



T.C.

ORDU ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ALTERNATİF ÇATININ VEKTÖREL MOMENT EĞRİLERİ
ÜZERİNE

HÜLYA ŞARDAĞ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

ORDU 2019

T.C.
ORDU ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

**ALTERNATİF ÇATININ VEKTÖREL MOMENTLERİ
ÜZERİNE**

HÜLYA ŞARDAĞ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ORDU 2019

TEZ ONAY

Hülya ŞARDAĞ tarafından hazırlanan "ALTERNATİF ÇATININ VEKTÖREL MOMENT EĞRİLERİ ÜZERİNE" adlı tez çalışmasının savunma sınavı 14.06.2019 tarihinde yapılmış ve jüri tarafından oy birliği ile Ordu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü MATEMATİK ANABİLİM DALI YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman

Dr. Öğr. Üyesi Süleyman ŞENYURT

Jüri Üyeleri

Danışman

Dr. Öğr. Üyesi Süleyman ŞENYURT

Ordu Üniversitesi / Matematik

Üye

Doç. Dr. Erhan SET

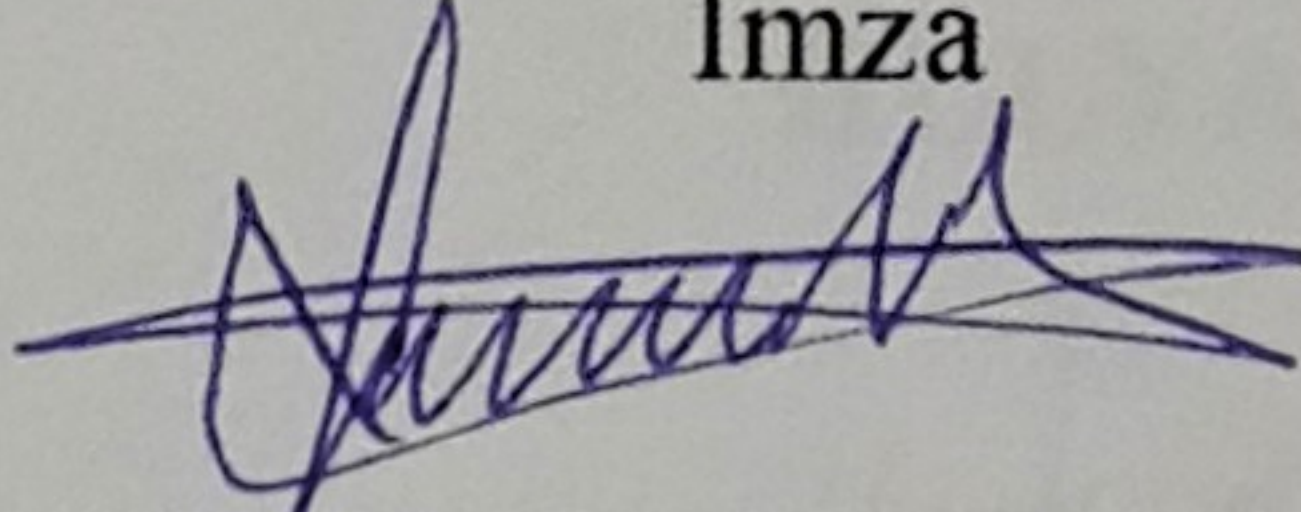
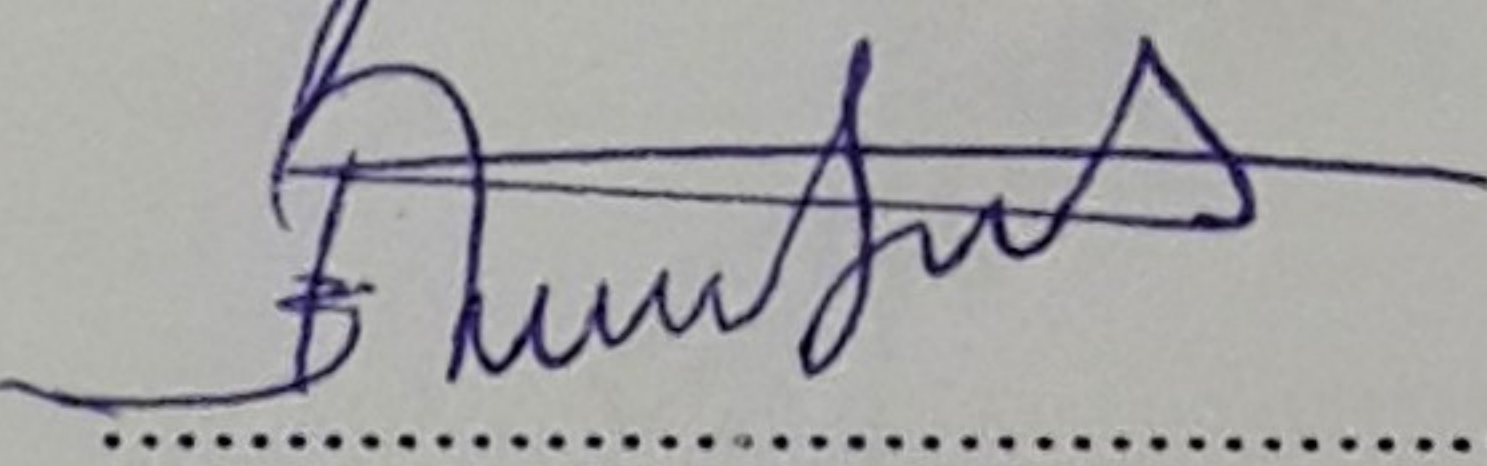
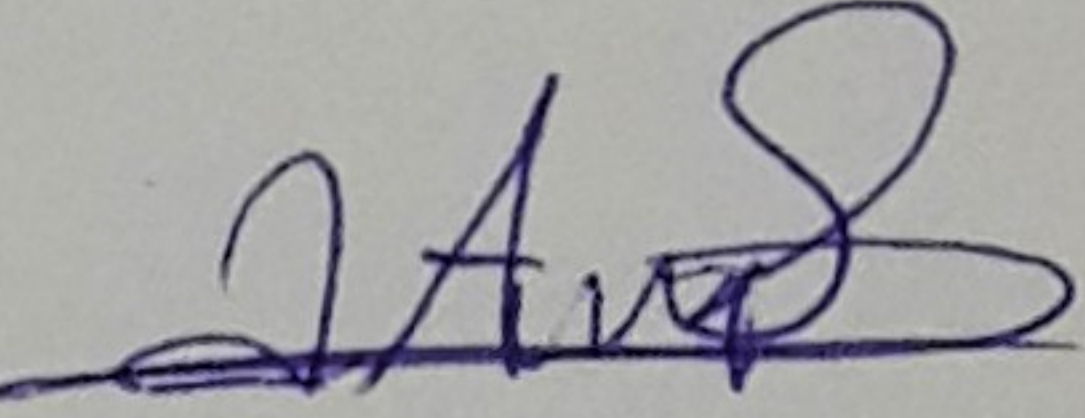
Ordu Üniversitesi / Matematik

Üye

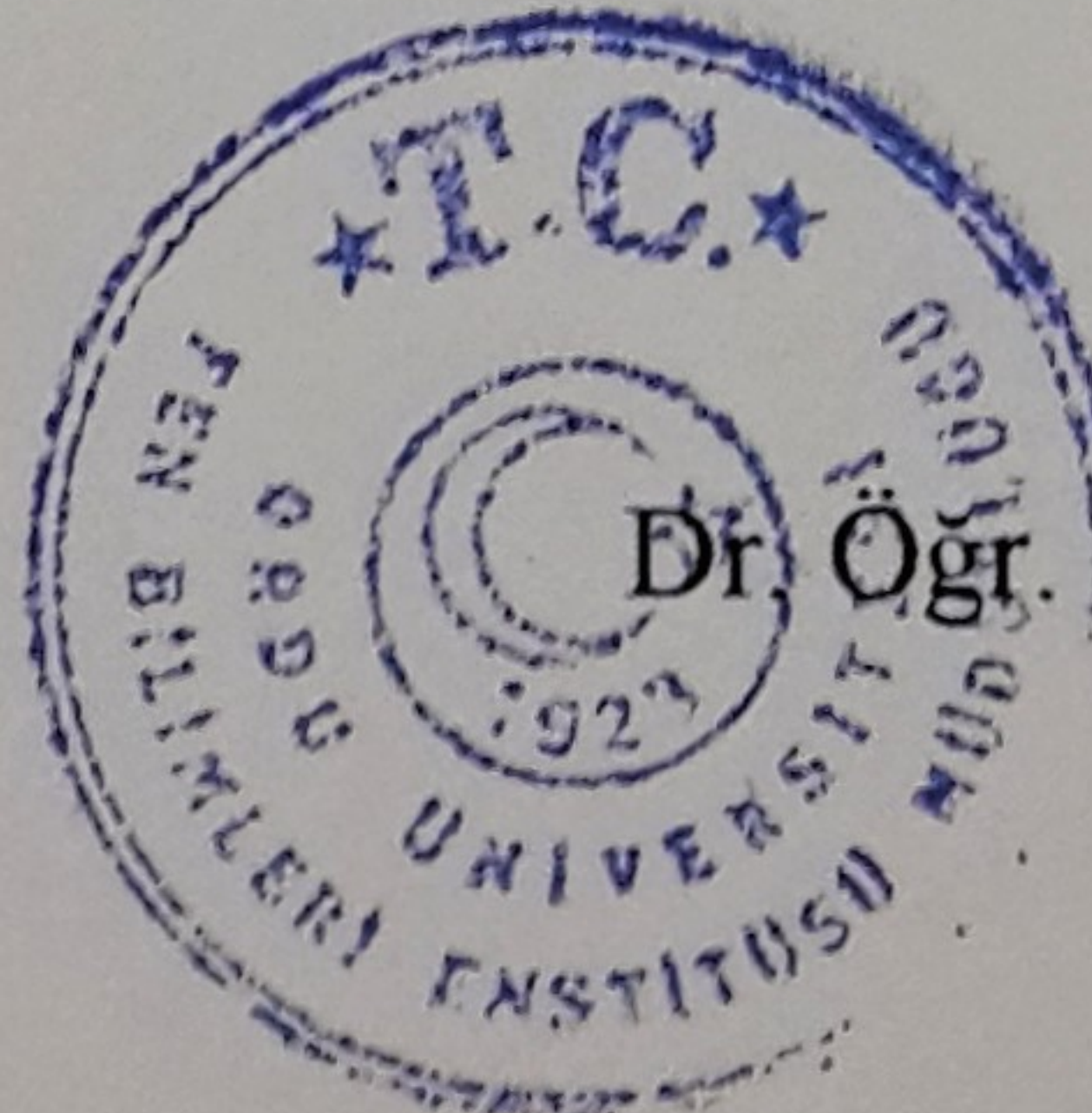
Dr. Öğr. Üyesi Nihat ALTINIŞIK

Ondokuz Mayıs Üniversitesi / Matematik

İmza

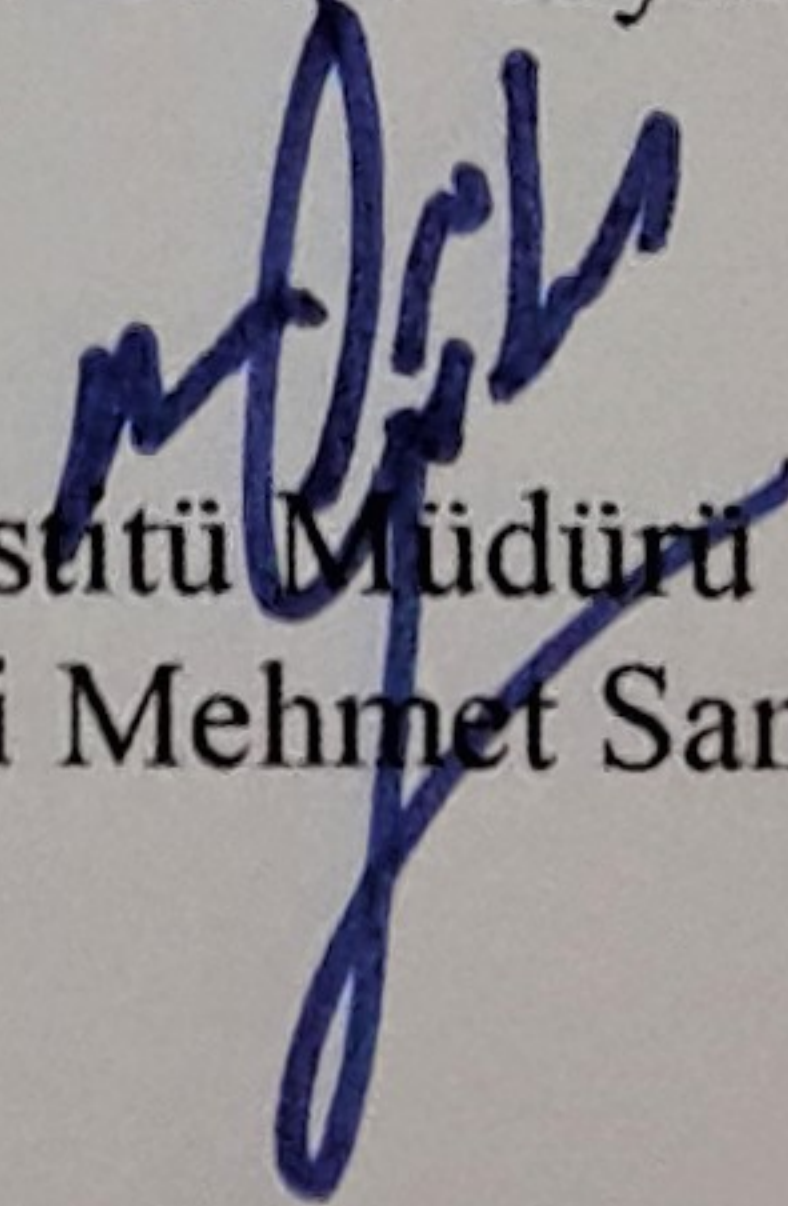

.....

.....

.....

01 / 07 2019 tarihinde enstitüye teslim edilen bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulu'nun 05 / 07 / 2019 tarih ve 2019 / 34 sayılı kararı ile onaylanmıştır.



Enstitü Müdürü

Dr. Öğr. Üyesi Mehmet Sami GÜLER



TEZ BİLDİRİMİ

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan ve kullanılan intihal tespit programının sonuçlarına göre; bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

HÜLYA ŞARDAĞ

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

ALTERNATİF ÇATININ VEKTÖREL MOMENT EĞRİLERİ ÜZERİNE

HÜLYA ŞARDAĞ

ORDU ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ 51 SAYFA

TEZ DANIŞMANI: DR ÖĞR. ÜYESİ SÜLEYMAN ŞENYURT

Bu çalışma altı bölüm halinde düzenlenmiştir. Giriş bölümünde çalışmanın amacı ve konunun ele alınma nedeni tartışıldı. Önceki Çalışmalar bölümünde Alternatif çatı, vektörel moment eğrileri ve sabit genişlikli eğri çifti ile ilgili çalışmalara yer verildi. Materyal ve Yöntem bölümünde, 3- boyutlu Öklid uzayına ait temel kavramlar, Alternatif çatı ile ilgili temel bilgilere yer verildi. Daha sonra Öklid uzayında vektörel moment eğrileri ve sabit genişlikli eğri çifti ile ilgili temel kavramlar ifade edildi.

Bulgular Bölümü çalışmamızın orijinal kısmını oluşturmaktadır. Bu bölümde ilk olarak, Alternatif çatı vektörlerinin oluşturduğu vektörel moment eğrileri tanımlanıp, bu eğrilerin Frenet aparatları hesaplandı. Daha sonra bu eğrilerin sabit genişlikli eğri çiftine dahil olup olmadığı hesaplandı. Word programı kullanılarak elde edilen eğrilerin çizimleri yapıldı.

Anahtar Kelimeler: Alternatif çatı, vektörel moment, sabit genişlikli eğri çifti.

ABSTRACT

ON THE VECTORIAL MOMENTUMS OF ALTERNATIVE FRAME

HÜLYA ŞARDAĞ

ORDU UNIVERSITY INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED
SCIENCES

MATHEMATICS

SCIENCE TEACHER EDUCATION

MASTER'S THESIS, 51 PAGE

SUPERVISOR: DR. ÖĞR. ÜYESİ SÜLEYMAN ŞENYURT

This thesis is organized into six sections. In the introduction, the aim of the study and the reason for its handling are discussed. In preliminaries we mentioned those of works which are used through this study. In the material and method section we clarify the basic concepts of Euclidean 3-space, alternative Frenet frame and alternative Darboux vector. Then, we explain the curve pairs having constant width.

Discussion and results section is the original part of our study. In this section, the curves drawn by the moment vectors of the alternative frame vectors are first defined. After that the Frenet vectors and the curvatures of these defined curves are calculated. Subsequently we give the decision whether these curves are included in the constant-width curve pairs or not. At last the curves we obtained are drawn using the word program.

Keywords: Alternative frame, vectorial moment, constant width curve pair.

TEŐEKKÖR

Yüksek lisans danışmanlığımı üstlenip özenle çalışmalarımı takip eden, her zaman engin bilgi ve deneyimleriyle yolumu açan değerli hocam Sayın Dr. Öğr. Üyesi Süleyman ŞENYURT' a en samimi duygularım ile teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca Matematik Bölümümüzdeki değerli hocalarıma ve yakın desteklerini gördüğüm aileme ve arkadaşlarıma sonsuz teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

TEZ BİLDİRİMİ	I
ÖZET	II
ABSTRACT	III
TEŞEKKÜR	IV
ŞEKİLLER LİSTESİ	VI
SİMGELER VE KISALTMALAR	VII
1. GİRİŞ	1
2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR	2
3. MATERYAL VE YÖNTEM	3
3.1 Öklid Uzayı	3
3.2 Öklid Uzayında Alternatif Çatı	5
4. BULGULAR ve TARTIŞMA	13
4.1 α Eğrisinin Alternatif Vektörlerinden Elde Edilen Vektörel Moment Eğrileri	13
5. SONUÇ ve ÖNERİLER	49
6. KAYNAKLAR	50

ŞEKİLLER LİSTESİ

3.1	Alternatif çatı	6
3.2	\bar{D} alternatif Darboux vektörü	9
3.3	Sabit genişlikli eğri çifti	10
4.1	α_1 -vektörel moment eğrisi	14
4.2	α_2 -vektörel moment eğrisi	20
4.3	α_3 -vektörel moment eğrisi	26
4.4	α_4 -vektörel moment eğrisi	32
4.5	α ile α_1 eğrisi sabit genişlikli eğri çifti oluşturmaz.	39
4.6	α ile α_2 eğrisi sabit genişlikli eğri çifti oluşturmaz.	41
4.7	α ile α_3 eğrisi sabit genişlikli eğri çifti oluşturmaz.	44
4.8	α ile α_4 eğrisi sabit genişlikli eğri çifti oluşturmaz.	46

SİMGELER VE KISALTMALAR

- E^3 : 3-boyutlu Öklid Uzayı
 $\| \cdot \|$: Norm
 \wedge : Vektörel çarpım
 T : Teğet vektör
 N : Aslinormal vektör
 B : Binormal vektör
 W : Birim Darboux vektör
 C : $W \wedge N$ -birim vektör
 \bar{D} : Alternatif Darboux vektörü
 κ : α eğrisine ait eğrilik
 τ : α eğrisine ait torsiyon
 α_1 : $\alpha \wedge N$ -vektörel moment eğrisi
 α_2 : $\alpha \wedge C$ -vektörel moment eğrisi
 α_3 : $\alpha \wedge W$ -vektörel moment eğrisi
 α_4 : $\alpha \wedge \bar{D}$ -vektörel moment eğrisi

1. GİRİŞ

3-Boyutlu Öklid uzayında eğrilerin diferensiyel geometrisi üzerine birçok çalışmalar yapılmıştır. Üzerinde en çok çalışma yapılan eğrilerinden en önemlileri İvolüt-Evolüt eğrileri, Bertrand eğri çiftleri ve Manheim eğri çiftleridir. Literatürde bu eğrilere ait çok sayıda kaynak mevcuttur.

Son zamanlarda, 1778 de L. Euler'in tanımladığı sabit genişlikli eğriler üzerinde çalışmalar ön plana çıkmaktadır. Bu eğriler, karşılıklı noktalarında teğetleri paralel-zıt yönlü ve aralarındaki uzaklık sabit olan eğrilerdir. Daha sonra Akdoğan ve Mağden, (2001) sabit genişlikli eğrilerin diferensiyel denklem sistemini elde etmişlerdir.

Herhangi bir eğrinin parametresine bağlı olarak değişen bir \vec{x} vektörünün \vec{x}^* vektörel moment vektörü, vektörel moment eğrisini çizer. Tunçer, (2017) herhangi bir eğrinin Frenet vektörlerinin vektörel moment eğrilerini tanımlamış ve bu eğrilerin Frenet aparatlarını hesaplamıştır. Kaya ve Önder, (2017) eğrinin aslinormal vektörü N , birim Darboux vektörü W ve bu iki vektörün vektörel çarpımından elde edilen birim vektör C olmak üzere bu vektörlerin oluşturduğu ortonormal sisteme alternatif çatı demişlerdir.

Bu çalışmada, ilk olarak, alternatif çatı vektörlerinin vektörel moment vektörlerinin çizdiği eğrilerin Frenet vektörleri, eğrilikleri ve torsiyonları hesaplandı. Daha sonra elde edilen eğrilerin alternatif çatı vektörleri verildi. Son olarak, vektörel moment eğrilerinin sabit genişlikli eğri çiftine dahil olup olmadığı araştırıldı. Maple programı kullanılarak vektörel moment eğrilerinin çizimleri yapıldı.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Chen "Constant ratio Hypersurface" isimli çalışmada herhangi bir eğrinin 3-Boyutlu Öklid uzayında Frenet vektörlerinin lineer birleşimi olarak yazmış ve katsayılar arasındaki bağıntıları vermiştir, (Chen, 2001).

Akdoğan ve Mağden, "Some Characterization of Curves of Constant Breadth in E^n Space" isimli çalışmada sabit genişlikli eğrilerin diferensiyel denklemini verip yaklaşık bir çözümlerini elde etmişlerdir. Ayrıca sabit genişlikli eğrilerin eğrilikleri arasındaki bağıntıları da hesaplamışlardır, (Euler, 1778), (Akdoğan ve Mağden, 2001).

Tunçer, "Vectorial moments of curves in Euclidean 3-space" isimli çalışmada Frenet vektörlerinin vektörel moment vektörlerinin çizdiği eğrileri tanımlamış ve bu eğrilerin Frenet aparatlarını, helis olma durumlarını ve sabit genişlikli eğri çiftine dahil olup olmadıklarını araştırmıştır, (Tunçer, 2017).

Kaya ve Önder, "New Partner Curves in the Euclidean 3-Space E^3 " isimli çalışmada Alternatif çatı vektörlerini tanımlamışlardır. Daha sonra CN^* -partner eğrisini tanımlayıp bu eğriye ait bazı özellikler vermişlerdir, (Kaya ve Önder, 2017).

Şenyurt, "D-Smarandache Curves According to the Sabban Frame of the Spherical Indicatrix Curve" isimli çalışmada alternatif çatı vektörlerine göre Darboux vektörünün ifade etmiş ve bu vektörün birim küre yüzeyinde çizdiği küresel eğrinin geodizik eğriliğini hesaplamıştır, (Şenyurt, 2018).

3. MATERYAL VE YÖNTEM

3.1 Öklid Uzayı

Bu bölümde, 3-boyutlu Öklid Uzayı ile ilgili temel kavramlara yer verilmiştir. A boştan farklı bir cümle ve V de K cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun.

$$f : A \times A \rightarrow V$$

fonksiyonu aşağıdaki aksiyomları sağlarsa A ya V ile birleştirilmiş bir afin uzay denir:

$$A_1 : \forall P, Q, R \in A \quad \text{için } f(P, Q) + f(Q, R) = f(P, R)$$

$$A_2 : \forall P \in A, \forall \alpha \in V \quad \text{için } f(P, Q) = \alpha$$

olacak şekilde bir tek $Q \in A$ noktası vardır.

A, V ile birleşen bir afin uzay olsun. $P_0, P_1, P_2, P_3 \in A$ noktaları için $\{P_0P_1, P_0P_2, P_0P_3\}$ cümlesi V nin bir bazı ise $\{P_0, P_1, P_2, P_3\}$ nokta 4-lüsüne bir afin çatısı denir. Burada P_0 noktasına çatının başlangıç noktası, $P_i, 1 \leq i \leq 3$, noktalarına da çatının birim noktaları denir. $\text{boy}V = 3$ ise A ya 3-boyutlu bir afin uzay denir.

$$\langle, \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

şeklinde tanımlı fonksiyon aşağıdaki aksiyomları sağlarsa bu fonksiyona bir iç çarpım fonksiyonu denir: $\forall x, y, z \in V, \forall a, b \in \mathbb{R}$ için

a. Bilineerlik Aksiyomu;

$$\langle ax + by, z \rangle = a\langle x, z \rangle + b\langle y, z \rangle,$$

$$\langle x, ay + bz \rangle = a\langle x, y \rangle + b\langle x, z \rangle,$$

b. Simetri Aksiyomu;

$$\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle,$$

c. Pozitif Tanımlılık (kararlılık) Aksiyomu;

$$\langle x, x \rangle \geq 0, \quad \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

\mathbb{R}^3 afin uzay, $\forall X, Y \in \mathbb{R}^3$ olsun.

$$\langle, \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \langle X, Y \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$

şeklinde tanımlı fonksiyon bir iç çarpım fonksiyonudur. Bu fonksiyona standart iç çarpım veya Öklid iç çarpımı denir. Üzerinde Öklid iç çarpımı tanımlı \mathbb{R}^3 afin uzayına Öklid uzayı denir ve \mathbb{E}^3 ile gösterilir.

$X = (x_1, x_2, x_3), Y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ olmak üzere,

$$d : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad d(X, Y) = \sqrt{\sum_{i=1}^3 (x_i - y_i)^2}$$

şeklinde tanımlanan d fonksiyonuna uzaklık fonksiyonu, $d(X, Y)$ reel sayısına da X ve Y noktaları arasındaki uzaklık denir.

$\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \alpha(s) = (\alpha_1(s), \alpha_2(s), \alpha_3(s))$ diferensiyellenebilir fonksiyona \mathbb{R}^3 te bir eğri denir. Burada I aralığına α eğrisinin parametre aralığı, $s \in I$ değişkenine de α eğrisinin parametresi denir. α eğrisinin yay parametresine göre teğet, aslinormal ve binormal vektörleri sırasıyla

$$T(s) = \alpha'(s), \quad N(s) = \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|}, \quad B(s) = T(s) \wedge N(s)$$

verilir. Bu vektörlere eğrinin Frenet vektörleri adı verilir. α birim hızlı eğri değil ise Frenet vektörleri

$$T(s) = \frac{\alpha'(s)}{\|\alpha'(s)\|}, \quad N(s) = \frac{B(s) \wedge T(s)}{\|B(s) \wedge T(s)\|}, \quad B(s) = \frac{\alpha'(s) \wedge \alpha''(s)}{\|\alpha'(s) \wedge \alpha''(s)\|} \quad (3.1.1)$$

şeklinde verilir (Hacısalıhoğlu, 1983). α eğrisinin eğrilik ve torsiyonu sırasıyla

$$\kappa(s) = \frac{\|\alpha'(s) \wedge \alpha''(s)\|}{\|\alpha'(s)\|^3}, \quad \tau(s) = \frac{\det(\alpha'(s), \alpha''(s), \alpha'''(s))}{\|\alpha'(s) \wedge \alpha''(s)\|^2} \quad (3.1.2)$$

bağıntısıyla verilir, (Sabuncuoğlu, 2014). Eğer α eğrisi yay parametresiyle verilirse eğrilik

$\kappa(s) = \alpha''(s)$ ve torsiyon $\tau(s) = -\langle B'(s), N(s) \rangle$ şeklindedir. Yay parametresiyle verilen eğrinin Frenet vektörleri ile bunların türev vektörleri arasında

$$\begin{aligned} T'(s) &= \kappa(s)N(s), \\ N'(s) &= -\kappa(s)T(s) + \tau(s)B(s), \\ B'(s) &= -\tau(s)N(s) \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

bağıntısı vardır. Bu bağıntıya eğrinin Frenet formülleri adı verilir, (Hacısalihoglu, 1983). α eğrisi Frenet vektörlerine bağlı olarak

$$\alpha(s) = f(s)T(s) + g(s)N(s) + h(s)B(s) \quad (3.1.4)$$

şeklinde yazılır. Burada f, g, h katsayıları

$$f'(s) = 1 + g(s)\kappa(s), \quad g'(s) = h(s)\tau(s) - f(s)\kappa(s), \quad h'(s) = -g(s)\tau(s). \quad (3.1.5)$$

şeklinde birer fonksiyondur, (Chen, 2001).

3.2 Öklid Uzayında Alternatif Çatı

α eğrisinin Frenet vektörleri parametreye bağlı olarak bir eksen etrafında dönme hareketi yapar. Bu eksene üzerindeki vektör \bar{W} ile gösterilirse

$$T' = \bar{W} \wedge T, \quad N' = \bar{W} \wedge N, \quad B' = \bar{W} \wedge B \quad (3.2.1)$$

bağıntısını sağlar. Buradan gerekli işlemler yapıldığında \bar{W}

$$\bar{W} = \tau T + \kappa B$$

şeklinde bulunur. Bu vektöre Darboux vektörü denir. Darboux eksenini üzerindeki birim vektöre ise birim Darboux vektörü denir ve

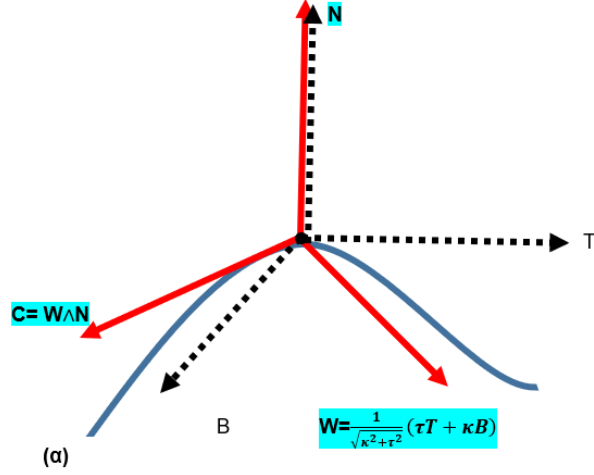
$$W = \frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} T + \frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} B \quad (3.2.2)$$

şeklinde yazılır (Fenchel, 1951), (Gray, 1997). α eğrisinin N normal vektörü ile W birim

Darboux vektörü vektörel çarpılırsa

$$C = W \wedge N = -\frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}T + \frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}B \quad (3.2.3)$$

birim vektörü elde edilir. Bu şekilde elde edilen $\{N, C, W\}$ sistemine Alternatif çatı denir, (Kaya ve Önder, 2017).



Şekil 3.1: Alternatif çatı

(3.2.2) ve (3.2.3) bağıntılarında gerekli işlemler yapıldığında alternatif çatı ile Frenet çatısı arasında

$$C = -\frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}T + \frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}B, \quad W = \frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}T + \frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}B,$$

ve

$$T = -\frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}C + \frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}W, \quad B = \frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}C + \frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}W,$$

bağıntısı vardır. Burada $\beta = \sqrt{\kappa^2 + \tau^2}$, $\bar{\kappa} = \frac{\kappa}{\beta}$ ve $\bar{\tau} = \frac{\tau}{\beta}$ alınırsa çatılar arasındaki bağıntı

$$C = -\bar{\kappa}T + \bar{\tau}B, \quad ve \quad T = -\bar{\kappa}C + \bar{\tau}W,$$

$$W = \bar{\tau}T + \bar{\kappa}B, \quad B = \bar{\tau}C + \bar{\kappa}W, \quad (3.2.4)$$

şeklinde bulunur.

Teorem 3.2.1 Alternatif çatı vektörleri ile bunların türev vektörleri arasında

$$N' = \beta C, \quad C' = -\beta N + \gamma W, \quad W' = -\gamma C \quad (3.2.5)$$

bağıntısı vardır. Burada $\gamma = \frac{\kappa^2}{\kappa^2 + \tau^2} \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'$ şeklinde bir katsayıdır.

İspat. (3.1.3) ve (3.2.4) bağıntılarından

$$\begin{aligned} N' &= -\kappa T + \tau B \\ &= -\kappa(-\bar{\kappa}C + \bar{\tau}W) + \tau(\bar{\tau}C + \bar{\kappa}W) \\ &= \kappa\bar{\kappa}C - \kappa\bar{\tau}W + \tau\bar{\tau}C + \tau\bar{\kappa}W \\ &= \frac{\kappa^2 + \tau^2}{\beta} C \end{aligned}$$

bulunur. $\beta = \sqrt{\kappa^2 + \tau^2}$ eşitliği yerine yazılırsa

$$N' = \beta C$$

bağıntısı elde edilir. (3.2.4) bağıntısında C vektörünün türevi alınırsa

$$C' = -\bar{\kappa}'T - \bar{\kappa}T' + \bar{\tau}'B + \bar{\tau}B'$$

olur. (3.1.3) ve (3.2.4) eşitlikleri yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} C' &= -(\bar{\kappa})'T - \bar{\kappa}\kappa N + (\bar{\tau})'B + \bar{\tau}(-\tau)N \\ &= -(\bar{\kappa}\kappa + \bar{\tau}\tau)N - (\bar{\kappa})'T + (\bar{\tau})'B \\ &= -\beta N - (\bar{\kappa})'(-\bar{\kappa}C + \bar{\tau}W) + (\bar{\tau})'(\bar{\tau}C + \bar{\kappa}W) \\ &= -\beta N + \underbrace{((\bar{\kappa})'\bar{\kappa} + (\bar{\tau})'\bar{\tau})}_0 C + (-(\bar{\kappa})'\bar{\tau} + (\bar{\tau})'\bar{\kappa})W \\ &= -\beta N + \frac{\kappa^2}{\kappa^2 + \tau^2} \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'W \end{aligned}$$

bulunur. W vektörünün katsayısı

$$\gamma = \frac{\kappa^2}{\kappa^2 + \tau^2} \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)' \quad (3.2.6)$$

olarak alınırsa C' vektörü

$$C' = -\beta N + \gamma W$$

şeklinde bulunur. (3.2.4) bağıntısında W vektörünün türevi alınırsa

$$W' = (\bar{\tau})'T + \bar{\tau}T' + (\bar{\kappa})'B + \bar{\kappa}B'$$

olur. (3.1.3), (3.2.4) ve (3.2.6) bağıntılarından W' vektörü

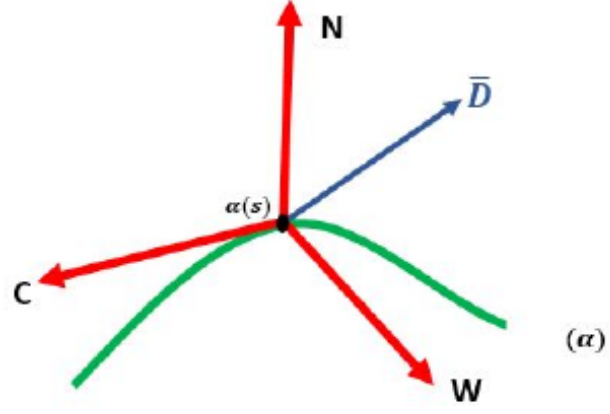
$$\begin{aligned} W' &= (\bar{\tau})'T + \bar{\tau}\kappa N + (\bar{\kappa})'B + \bar{\kappa}(-\tau N) \\ &= (\bar{\tau}\kappa - \bar{\kappa}\tau)N + (\bar{\tau})'T + (\bar{\kappa})'B \\ &= \underbrace{(\bar{\tau}\kappa - \bar{\kappa}\tau)}_0 N + (\bar{\tau})'(-\bar{\kappa}C + \bar{\tau}W) + (\bar{\kappa})'(\bar{\tau}C + \bar{\kappa}W) \\ &= ((\bar{\kappa})'\bar{\tau} - (\bar{\tau})'\bar{\kappa})C + \underbrace{((\bar{\tau})'\bar{\tau} + (\bar{\kappa})'\bar{\kappa})}_0 W \\ &= ((\bar{\kappa})'\bar{\tau} - (\bar{\tau})'\bar{\kappa})C \\ &= -\gamma C \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. \square

Teorem 3.2.2 α eğrisinin alternatif çatı vektörleri N, C, W olsun. Bu çatıya göre Darboux vektörü

$$\bar{D} = \gamma N + \beta W \quad (3.2.7)$$

şeklinde verilir, (Şenyurt, 2018).



Şekil 3.2: \bar{D} alternatif Darboux vektörü

İspat. Darboux vektörü N, C, W vektörlerine bağlı olarak (Şekil 3.2) den

$$\bar{D} = aN + bC + cW \quad (3.2.8)$$

yazılır. \bar{D} vektörü (3.2.1) bağıntısına benzer olarak sırasıyla N, C, W vektörleriyle vektörel çarpılırsa

$$\begin{aligned} N' = \bar{D} \wedge N &\Rightarrow \beta C = (aN + bC + cW) \wedge N \\ &\Rightarrow \beta C = -bW + cC \\ &\Rightarrow b = 0, \quad c = \beta. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C' = \bar{D} \wedge C &\Rightarrow -\beta N + \gamma W = (aN + bC + cW) \wedge C \\ &\Rightarrow -\beta N + \gamma W = aW - cN \\ &\Rightarrow a = \gamma, \quad c = \beta. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W' = \bar{D} \wedge W &\Rightarrow -\gamma C = (aN + bC + cW) \wedge W \\ &\Rightarrow -\gamma C = -aC - bN \\ &\Rightarrow a = \gamma, \quad b = 0. \end{aligned}$$

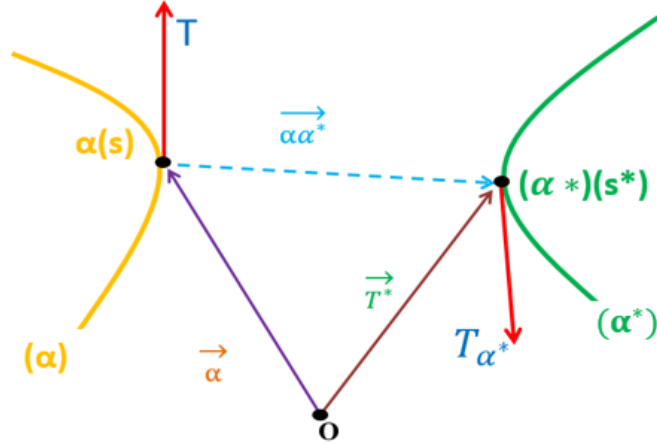
bulunur. a, b, c katsayıları (3.2.8) de yerine yazılırsa \bar{D} alternatif Darboux vektörü

$$\bar{D} = \gamma N + \beta W$$

şeklinde olur. \square

Tanım 3.2.1 E^3 – Euclidean uzayında α ve α^* gibi birim hızlı C^3 –sınıftan kapalı iki eğri olsun. Bu eğrilerin $\alpha(s)$ ve $\alpha^*(s^*)$ gibi karşılıklı noktalarında teğetleri paralel ve zıt yönlü, aralarındaki uzaklık sabit ise bu iki eğriye sabit genişlikli eğri çifti denir ve $\{\alpha, \alpha^*\}$ ile gösterilir, (Euler, 1778), (Akdoğan ve Mağden, 2001).

Teorem 3.2.3 Düzlemsel bir $\alpha(s)$ eğrisinin T teğet vektörünün vektörel momentini T^* olsun. T^* vektörünün çizdiği eğri $\alpha^*(s^*)$ ile gösterilirse, bu eğri $\alpha(s)$ eğrisi ile sabit genişlikli eğri çifti oluşturur, (Tunçer, 2017).



Şekil 3.3: Sabit genişlikli eğri çifti

İspat. α eğrisi Frenet vektörlerinin lineer birleşimi olarak

$$\alpha(s) = f(s)T(s) + g(s)N(s) + h(s)B(s) \quad (3.2.9)$$

şeklinde yazılır. T vektörünün T^* vektörel moment vektörü

$$\begin{aligned} T^* &= \alpha \wedge T \\ &= (fT + gN + hB) \wedge T \\ &= h(s)N(s) - g(s)B(s) \end{aligned}$$

hesaplanır. Bu vektörün çizmiş olduğu eğri α^* ile gösterilirse

$$\alpha^*(s^*) = h(s)N(s) - g(s)B(s) \quad (3.2.10)$$

olur. $\overrightarrow{\alpha\alpha^*}$ vektörü (Şekil 3.3) den

$$\overrightarrow{\alpha\alpha^*} = m_1T + m_2N + m_3B$$

yazılır. Burada (3.2.9), (3.2.10) bağıntıları dikkate alınırsa

$$\begin{aligned}\vec{\alpha}^* - \vec{\alpha} &= m_1T + m_2N + m_3B, \\ hN - gB - fT - gN - hB &= m_1T + m_2N + m_3B\end{aligned}$$

eşitliği yazılır. Bu eşitlikten m_1 , m_2 ve m_3 katsayıları sırasıyla

$$m_1 = -f, \quad m_2 = h - g, \quad m_3 = -(h + g)$$

şeklinde bulunur. α eğrisi düzlemsel olduğundan $\tau = 0$ olur. α ile α^* eğrisinin aynı düzlemde olması için $f = 0$ dır. Bu katsayılar α^* eğrisinde yerine yazılırsa

$$\alpha^* = \alpha + (h - g)N - (h + g)B \quad (3.2.11)$$

şeklinde olur. Bu durumda (3.1.5) bağıntısının yeni hali

$$g' = 0 \Rightarrow g = \text{sabit} \quad \text{ve} \quad h' = 0 \Rightarrow h = \text{sabit}$$

şeklinde bulunur. (3.2.11) bağıntısından α ve α^* eğrileri arasındaki uzaklık

$$d(\alpha, \alpha^*) = \|\overrightarrow{\alpha\alpha^*}\|^2 = 2h^2 + 2g^2$$

sabit olur. α^* eğrisinin s parametresine göre türevi alınırsa

$$\begin{aligned}\frac{d\alpha^*}{ds^*} \cdot \frac{ds^*}{ds} &= \alpha' + (h - g)'N + (h - g)N' - (h + g)'B - (h + g)B' \\ T_{\alpha^*} \cdot \frac{ds^*}{ds} &= T + (h - g)'N + (h - g)(-\kappa T + \tau B) - (h + g)'B - (h + g)(-\tau N) \\ &= (1 - \kappa(h - g))T + ((h - g)' + (h + g)\tau)N + ((h - g)\tau - (h + g)')B\end{aligned}$$

şeklinde olur. $g = sbt$, $h = sbt$ ve $\tau = 0$ olma şartı dikkate alınırsa

$$\begin{aligned}T^* \frac{ds^*}{ds} &= (1 - \kappa(h - g))T \\ &= \underbrace{(1 + \kappa g - \kappa h)}_{f'}T\end{aligned}$$

olur. $f = 0$ olduğundan

$$T^* \frac{ds^*}{ds} = -\kappa h T$$

bulunur. $\{\alpha, \alpha^*\}$ sabit genişlikli eğri olduğundan $T^* = -T$ olur. Buradan

$$h\kappa = 1 \text{ veya } h = \frac{1}{\kappa} > 0$$

bulunur. Bu durumda teğet vektörler paralel ve zıt yönlü bulunur. α ve α^* eğrilerinin aralarındaki uzaklık sabit ve teğet vektörleri paralel-zıt yönlü olduğundan bu iki eğri sabit genişlikli eğri çifti oluşturur. \square

Sonuç 3.2.1 $\alpha(s)$ eğrisinin N aslinormal ve B binormal vektörlerinin N^* ve B^* vektörel moment vektörlerinin çizdiği eğriler $\alpha(s)$ eğrisi ile sabit genişlikli eğri çifti oluşturmazlar, (Tunçer, 2017).

4. BULGULAR ve TARTIŞMA

Bu bölüm çalışmanın orjinal kısmını oluşturmaktadır. Burada, ilk olarak diferensiyelenebilir herhangi bir α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet vektörleri yerine o noktadaki alternatif çatı vektörleri alınarak bu vektörlerin vektörel moment vektörlerinin çizdiği eğriler tanımlandı. İkinci olarak, vektörel moment vektörlerinin çizdiği eğrilerin Frenet vektörleri, eğrilikleri ve burulmaları hesaplandı. Daha sonra bulunan her bir eğrinin alternatif çatı vektörleri bulunup esas eğrinin alternatif çatı vektörleri cinsinden ifadeleri verildi. Son olarak da elde edilen eğrilerin sabit genişlikli eğri çiftine dahil olup olmadıkları araştırıldı.

4.1 α Eğrisinin Alternatif Vektörlerinden Elde Edilen Vektörel Moment Eğrileri

Birim hızlı bir α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki alternatif çatısı $\{N, C, W\}$ olsun. Bu durumda α eğrisi (3.1.4) deki bağıntıya benzer olarak

$$\alpha(s) = f(s)N(s) + g(s)C(s) + h(s)W(s) \quad (4.1.1)$$

şeklinde yazılır. Burada f, g, h fonksiyonları arasında

$$f'(s) = g(s)\beta(s), \quad g'(s) = h(s)\gamma(s) - f(s)\beta(s) - \bar{\kappa}, \quad h'(s) = \bar{\tau} - g(s)\gamma(s) \quad (4.1.2)$$

bağıntısı vardır. Bunu görmek için (4.1.1) bağıntısından türev alınırsa

$$\alpha'(s) = f'(s)N(s) + f(s)N'(s) + g'(s)C(s) + g(s)C'(s) + h'(s)W(s) + h(s)W'(s) \quad (4.1.3)$$

olur. (3.2.4) ve (3.2.5) bağıntılarından

$$-\bar{\kappa}C + \bar{\tau}W = (f' - g\beta)N + (g' + f\beta - h\gamma)C + (h' + g\gamma)W$$

yazılır. Buradan

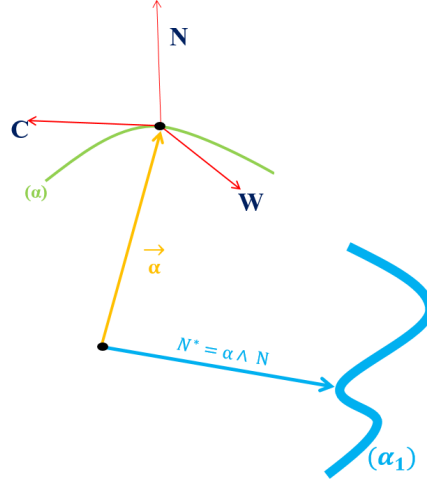
$$f' - g\beta = 0, \quad g' + f\beta - h\gamma = -\bar{\kappa}, \quad h' + g\gamma = \bar{\tau} \quad (4.1.4)$$

bağıntıları elde edilir.

Tanım 4.1.1 Birim hızlı regüler herhangi bir $\alpha(s)$ eğrisinin alternatif çatı vektörleri sırasıyla N , C ve W olsun. N -aslinormal vektörünün $N^*(s) = \alpha(s) \wedge N(s)$ şeklinde tanımlı vektörel moment vektörünün çizdiği eğri

$$\alpha_1(s) = h(s)C(s) - g(s)W(s)$$

bağıntısıyla verilir. (Şekil 4.1)



Şekil 4.1: α_1 -vektörel moment eğrisi

Teorem 4.1.1 $\alpha_1(s)$ eğrisinin Frenet vektörleri T_1, N_1, B_1 olsun. Bu vektörler sırasıyla

$$T_1(s) = -r_1 h \beta N + r_1 \bar{\tau} C + r_1 (\bar{\kappa} + f \beta) W,$$

$$N_1(s) = r_1 m_1 \{ (y_1 h \tau + x_1 ((\bar{\tau})^2 + (\bar{\kappa} + f \beta)^2) - z_1 h (\kappa + f \beta^2)) N$$

$$+ (z_1 \bar{\tau} - y_1 (\bar{\kappa} + f \beta) + h (y_1 h \beta^2 + x_1 \tau)) C$$

$$+ ((y_1 \bar{\tau} - x_1 h \beta) - z_1 (x_1 h^2 \beta^2 + (\bar{\tau})^2)) W \},$$

$$B_1(s) = m_1 (z_1 \bar{\tau} - y_1 (\bar{\kappa} + f \beta)) N + m_1 (x_1 (\bar{\kappa} + f \beta) + z_1 h \beta) C - m_1 (y_1 h \beta + x_1 \bar{\tau}) W,$$

şeklinde verilir. Burada r_1, m_1, x_1, y_1, z_1

$$r_1 = \frac{1}{\sqrt{(h\beta)^2 + (\bar{\tau})^2 + (\bar{\kappa} + f\beta)^2}},$$

$$m_1 = \frac{1}{\sqrt{(z_1\bar{\tau} - y_1(\bar{\kappa} + f\beta))^2 + (x_1(\bar{\kappa} + f\beta) + z_1h\beta)^2 + (y_1h\beta + x_1\bar{\tau})^2}},$$

$$x_1 = -\tau - (h\beta)', \quad y_1 = -h\beta^2 - \gamma f\beta, \quad z_1 = (f\beta)'$$

şeklinde birer katsayıdır.

İspat. α_1 eğrisinin yay parametresi t olsun. Buna göre s parametresine göre türev alınırsa

$$\alpha_1'(s) = T_1 \frac{dt}{ds} = -h\beta N + \bar{\tau}C + (\bar{\kappa} + f\beta)W \quad (4.1.5)$$

bulunur. Buradan norm alınırsa

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\sqrt{(h\beta)^2 + (\bar{\tau})^2 + (\bar{\kappa} + f\beta)^2}}$$

olur. Bu ifade (4.1.5) de yerine yazılırsa $\alpha_1(s)$ -vektörel moment eğrisinin $T_1(s)$ teğet vektörü

$$T_1(s) = \frac{-h\beta N + \bar{\tau}C + (\bar{\kappa} + f\beta)W}{\sqrt{(h\beta)^2 + (\bar{\tau})^2 + (\bar{\kappa} + f\beta)^2}}$$

biçiminde bulunur. Burada

$$r_1 = \frac{1}{\sqrt{(h\beta)^2 + (\bar{\tau})^2 + (\bar{\kappa} + f\beta)^2}} \quad (4.1.6)$$

alınırsa $T_1(s)$ teğet vektörünün sade yazılışı

$$T_1(s) = -r_1 h\beta N + r_1 \bar{\tau}C + r_1 (\bar{\kappa} + f\beta)W$$

şeklinde olur. (4.1.5) den tekrar türev alınır ve (3.2.5) bağıntısı yerine yazılırsa $\alpha_1''(s)$

vektörü

$$\begin{aligned}
\alpha_1''(s) &= -(h\beta)'N - h\beta N' + (\bar{\tau})'C + \bar{\tau}C' + (\bar{\kappa} + f\beta)'W + (\bar{\kappa} + f\beta)W' \\
&= -(\tau + (h\beta)')N + ((\bar{\tau})' - h\beta^2 - \gamma(\bar{\kappa} + f\beta))C + ((\bar{\kappa} + f\beta)' + \bar{\tau}\gamma)W \\
&= -(\tau + (h\beta)')N + \underbrace{((\bar{\tau})' - \gamma\bar{\kappa} - h\beta^2 - \gamma f\beta)}_0 C + \underbrace{((\bar{\kappa})' + \bar{\tau}\gamma + (f\beta)')}_0 W \\
&= -(\tau + (h\beta)')N - (h\beta^2 + \gamma f\beta)C + (f\beta)'W
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Burada çatı vektörlerinin katsayıları

$$x_1 = -\tau - (h\beta)', \quad y_1 = -h\beta^2 - \gamma f\beta, \quad z_1 = (f\beta)'$$

şeklinde alınırsa $\alpha_1''(s)$ vektörünün

$$\alpha_1''(s) = x_1 N + y_1 C + z_1 W$$

olur. $\alpha_1'(s)$ ve $\alpha_1''(s)$ vektörleri vektörel çarpılırsa

$$\alpha_1'(s) \wedge \alpha_1''(s) = (z_1 \bar{\tau} - y_1(\bar{\kappa} + f\beta))N + (x_1(\bar{\kappa} + f\beta) + z_1 h\beta)C - (y_1 h\beta + x_1 \bar{\tau})W$$

şeklinde bulunur. Norm alınırsa

$$\|\alpha_1'(s) \wedge \alpha_1''(s)\| = \sqrt{(z_1 \bar{\tau} - y_1(\bar{\kappa} + f\beta))^2 + (x_1(\bar{\kappa} + f\beta) + z_1 h\beta)^2 + (y_1 h\beta + x_1 \bar{\tau})^2}$$

olur. $\alpha_1(s)$ eğrisinin $B_1(s)$ binormal vektörü

$$B_1(s) = \frac{(z_1 \bar{\tau} - y_1(\bar{\kappa} + f\beta))N + (x_1(\bar{\kappa} + f\beta) + z_1 h\beta)C - (y_1 h\beta + x_1 \bar{\tau})W}{\sqrt{(z_1 \bar{\tau} - y_1(\bar{\kappa} + f\beta))^2 + (x_1(\bar{\kappa} + f\beta) + z_1 h\beta)^2 + (y_1 h\beta + x_1 \bar{\tau})^2}}$$

şeklinde bulunur. Burada

$$m_1 = \frac{1}{\sqrt{(z_1 \bar{\tau} - y_1(\bar{\kappa} + f\beta))^2 + (x_1(\bar{\kappa} + f\beta) + z_1 h\beta)^2 + (y_1 h\beta + x_1 \bar{\tau})^2}} \quad (4.1.7)$$

alınırsa $B_1(s)$ binormal vektörünün sade yazılışı

$$B_1(s) = m_1(z_1\bar{\tau} - y_1(\bar{\kappa} + f\beta))N + m_1(x_1(\bar{\kappa} + f\beta) + z_1h\beta)C - m_1(y_1h\beta + x_1\bar{\tau})W$$

şeklinde olur. $\alpha_1(s)$ eğrisinin $N_1(s)$ aslinormal vektörü $N_1 = B_1 \wedge T_1$ eşitliğinden

$$\begin{aligned} N_1(s) &= r_1 m_1 (y_1 h \tau + x_1 (\bar{\tau})^2 - x_1 (\bar{\kappa} + f\beta)^2 - z_1 h (\kappa + f\beta^2)) N \\ &\quad + r_1 m_1 ((z_1 \bar{\tau} - y_1) (\bar{\kappa} + f\beta) + h (y_1 h \beta^2 + x_1 \tau)) C \\ &\quad + r_1 m_1 ((y_1 \bar{\tau} - x_1 h \beta) (\bar{\kappa} + f\beta) - z_1 (x_1 h^2 \beta^2 + \bar{\tau}^2)) W \end{aligned} \quad (4.1.8)$$

şeklinde bulunur. \square

Teorem 4.1.2 $\alpha_1(s)$ -vektörel moment eğrisinin κ_1 eğriliği ve τ_1 burulması sırasıyla

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= r_1^3 \sqrt{(z_1 \bar{\tau} - y_1 (\bar{\kappa} + f\beta))^2 + (x_1 (\bar{\kappa} + f\beta) + z_1 h \beta)^2 + (y_1 h \beta + x_1 \bar{\tau})^2}, \\ \tau_1 &= m_1^2 (y_1^2 + z_1^2) (h^2 + \beta^2) + m_1^2 (2x_1 y_1 h \tau + (x_1^2 + y_1^2) (\bar{\tau})^2) \\ &\quad + m_1^2 (2x_1 z_1 h \beta - 2z_1 y_1 \bar{\tau} + (x_1^2 + y_1^2) (\bar{\kappa} + f\beta)) (\bar{\kappa} + f\beta), \end{aligned}$$

şeklinde verilir.

İspat. $\alpha_1(s)$ -vektörel moment eğrisinin κ_1 eğriliği (4.1.6) ve (4.1.7) bağıntılarından gerekli işlemler yapılırsa

$$\kappa_1 = r_1^3 \sqrt{(z_1 \bar{\tau} - y_1 (\bar{\kappa} + f\beta))^2 + (x_1 (\bar{\kappa} + f\beta) + z_1 h \beta)^2 + (y_1 h \beta + x_1 \bar{\tau})^2}$$

olarak bulunur. $\alpha_1''(s)$ vektörünün tekrar türevi alınır

$$\alpha_1'''(s) = (x_1' - y_1 \beta)N + (y_1' + x_1 \beta - z_1 \gamma)C + (z_1' + y_1 \gamma)W$$

olur. $\alpha'_1(s)$, $\alpha''_1(s)$ ve $\alpha'''_1(s)$ vektörlerinin determinanı hesaplanırsa

$$\begin{aligned} \det(\alpha'_1, \alpha''_1, \alpha'''_1) &= (2x_1z_1h\beta - 2z_1y_1\bar{\tau} + (x_1^2 + y_1^2)(\bar{\kappa} + f\beta))(\bar{\kappa} + f\beta) \\ &+ 2x_1y_1h\tau + (x_1^2 + z_1^2)(\bar{\tau})^2 + (y_1^2 + z_1^2)(h^2 + \beta^2) \end{aligned} \quad (4.1.9)$$

şeklinde bulunur. (4.1.7) ve (4.1.9) bağıntılarından $\alpha_1(s)$ -vektörel moment eğrisinin τ_1 burulması

$$\begin{aligned} \tau_1 &= m_1^2(y_1^2 + z_1^2)(h^2 + \beta^2) + m_1^2(2x_1y_1h\tau + (x_1^2 + y_1^2)(\bar{\tau})^2) \\ &+ m_1^2(2x_1z_1h\beta - 2z_1y_1\bar{\tau} + (x_1^2 + y_1^2)(\bar{\kappa} + f\beta))(\bar{\kappa} + f\beta) \end{aligned}$$

elde edilir. \square

Teorem 4.1.3 α_1 eğrisinin alternatif çatı vektörleri N_1, C_1, W_1 olsun. Bu vektörler sırasıyla

$$\begin{aligned} N_1(s) &= r_1m_1 \left((y_1h\tau + x_1(\bar{\tau})^2 - x_1(\bar{\kappa} + f\beta)^2 - z_1h(\kappa + f\beta^2))N \right. \\ &+ ((z_1\bar{\tau} - y_1)(\bar{\kappa} + f\beta) + h(y_1h\beta^2 + x_1\tau))C \\ &\left. + ((y_1\bar{\tau} - x_1h\beta)(\bar{\kappa} + f\beta) - z_1(x_1h^2\beta^2 + \bar{\tau}^2))W \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_1(s) &= \frac{1}{\sqrt{\kappa_1^2 + \tau_1^2}} \left((\kappa_1r_1h\beta + \tau_1m_1(z_1\bar{\tau} - y_1(\bar{\kappa} + f\beta)))N \right. \\ &+ (\tau_1m_1(x_1(\bar{\kappa} + f\beta) + z_1h\beta) - \kappa_1r_1\bar{\tau})C \\ &\left. - (\kappa_1r_1(\bar{\kappa} + f\beta) + \tau_1m_1(y_1h\beta + x_1\bar{\tau}))W \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_1(s) = & \frac{1}{\sqrt{\kappa_1^2 + \tau_1^2}} \left((\tau_1 r_1 h\beta + \kappa_1 m_1 (z_1 \bar{\tau} - y_1 (\bar{\kappa} + f\beta))) N \right. \\
& + (\tau_1 r_1 \bar{\tau} + \kappa_1 m_1 (x_1 (\bar{\kappa} + f\beta) + z_1 h\beta)) C \\
& \left. + (\tau_1 r_1 (\bar{\kappa} + f\beta) - \kappa_1 m_1 (y_1 h\beta + x_1 \bar{\tau})) W \right)
\end{aligned}$$

şeklinde verilir.

İspat. (4.1.8) bağıntısından N_1 vektörü açıkça görülür. (3.2.4) bağıntısına benzer olarak C_1 vektörü

$$C_1(s) = -\frac{\kappa_1}{\sqrt{\kappa_1^2 + \tau_1^2}} T_1 + \frac{\tau_1}{\sqrt{\kappa_1^2 + \tau_1^2}} B_1$$

yazılır. Teorem 4.1.1 den T_1 ve B_1 vektörleri burada yerine yazılırsa $C_1(s)$ vektörü

$$\begin{aligned}
C_1(s) = & \frac{1}{\sqrt{\kappa_1^2 + \tau_1^2}} \left((\kappa_1 r_1 h\beta + \tau_1 m_1 (z_1 \bar{\tau} - y_1 (\bar{\kappa} + f\beta))) N \right. \\
& + (\tau_1 m_1 (x_1 (\bar{\kappa} + f\beta) + z_1 h\beta) - \kappa_1 r_1 \bar{\tau}) C \\
& \left. - (\kappa_1 r_1 (\bar{\kappa} + f\beta) + \tau_1 m_1 (y_1 h\beta + x_1 \bar{\tau})) W \right)
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. (3.2.4) bağıntısına benzer olarak $W_1(s)$ vektörü

$$W_1(s) = \frac{\tau_1}{\sqrt{\kappa_1^2 + \tau_1^2}} T_1 + \frac{\kappa_1}{\sqrt{\kappa_1^2 + \tau_1^2}} B_1$$

olur. T_1 ve B_1 vektörleri burada yerine yazılırsa $W_1(s)$ vektörü

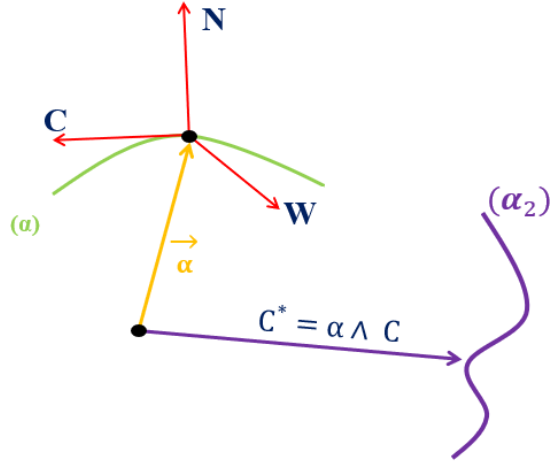
$$\begin{aligned}
W_1(s) = & \frac{1}{\sqrt{\kappa_1^2 + \tau_1^2}} \left((\tau_1 r_1 h\beta + \kappa_1 m_1 (z_1 \bar{\tau} - y_1 (\bar{\kappa} + f\beta))) N \right. \\
& + (\tau_1 r_1 \bar{\tau} + \kappa_1 m_1 (x_1 (\bar{\kappa} + f\beta) + z_1 h\beta)) C \\
& \left. + (\tau_1 r_1 (\bar{\kappa} + f\beta) - \kappa_1 m_1 (y_1 h\beta + x_1 \bar{\tau})) W \right)
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. \square

Tanım 4.1.2 α eğrisinin alternatif çatı vektörleri N, C, W olsun. C birim vektörünün $C^* = \alpha(s) \wedge C(s)$ şeklinde tanımlı vektörel moment vektörünün çizdiği $\alpha_2(s)$ eğrisi

$$\alpha_2(s) = -h(s)N(s) + f(s)W(s)$$

şeklinde verilir. (Şekil 4.2)



Şekil 4.2: α_2 -vektörel moment eğrisi

Teorem 4.1.4 $\alpha_2(s)$ -vektörel moment eğrisinin Frenet vektörleri T_2, N_2, B_2 olsun. Bu vektörler

$$T_2 = r_2(g\gamma - \bar{\tau})N - r_2(h\beta + f\gamma)C + r_2g\beta W,$$

$$\begin{aligned} N_2 = & r_2m_2\{((z_2g\beta - y_2(h\beta + f\gamma))(g\gamma - \bar{\tau}) - x_2(g^2\beta^2 + (h\beta + f\gamma)^2))N \\ & + (y_2g^2\beta^2 - y_2(g\gamma - \bar{\tau})^2 + (z_2g\beta - x_2(g\gamma - \bar{\tau}))(h\beta + f\gamma))C \\ & + (x_2g\beta(g\gamma - \bar{\tau}) - z_2(g\gamma - \bar{\tau})^2 + (z_2(h\beta + f\gamma) + y_2g\beta)(h\beta + f\gamma))W\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_2 = & -m_2(z_2(h\beta + f\gamma) + y_2g\beta)N + m_2(x_2g\beta - z_2(g\gamma - \bar{\tau}))C \\ & + m_2(x_2(h\beta + f\gamma) + y_2(g\gamma - \bar{\tau}))W, \end{aligned}$$

bağıntısıyla verilir. Burada r_2, m_2, x_2, y_2, z_2

$$r_2 = \frac{1}{\sqrt{(g\gamma - \bar{\tau})^2 + (h\beta + f\gamma)^2 + (g\beta)^2}},$$

$$m_2 = \frac{1}{\sqrt{(z_2(h\beta + f\gamma) - y_2g\beta)^2 + (x_2g\beta - z_2(g\gamma - \bar{\tau}))^2 + (x_2(h\beta + f\gamma) + y_2(g\gamma - \bar{\tau}))^2}},$$

$$x_2 = (g\gamma - \bar{\tau})' + h\beta^2 + f\gamma\beta, \quad y_2 = \tau - (h\beta + f\gamma)', \quad z_2 = (g\beta)' - \gamma(h\beta + f\gamma)$$

şeklinde birer katsayıdır.

İspat. α_2 eğrisinin yay parametresi t olsun. Buna göre s parametresine göre türev alınırsa

$$\alpha_2'(s) = T_2 \frac{dt}{ds} = (g\gamma - \bar{\tau})N - (h\beta + f\gamma)C + (g\beta)W \quad (4.1.10)$$

şeklinde bulunur. Buradan norm alınırsa

$$\frac{dt}{ds} = \sqrt{(g\gamma - \bar{\tau})^2 + (h\beta + f\gamma)^2 + (g\beta)^2}$$

olur. Bu ifade (4.1.10) de yerine yazılırsa $\alpha_2(s)$ -vektörel moment eğrisinin $T_2(s)$ teğet vektörü

$$T_2(s) = \frac{(g\gamma - \bar{\tau})N - (h\beta + f\gamma)C + (g\beta)W}{\sqrt{(g\gamma - \bar{\tau})^2 + (h\beta + f\gamma)^2 + (g\beta)^2}}$$

şeklinde bulunur ve

$$r_2 = \frac{1}{\sqrt{(g\gamma - \bar{\tau})^2 + (h\beta + f\gamma)^2 + (g\beta)^2}} \quad (4.1.11)$$

olarak alınırsa $T_2(s)$ teğet vektörünün sade yazılışı

$$T_2(s) = r_2(g\gamma - \bar{\tau})N - r_2(h\beta + f\gamma)C + r_2g\beta W$$

şeklinde elde edilir. $\alpha'_2(s)$ vektörünün tekrar türevi alınırsa

$$\alpha''_2(s) = ((g\gamma - \bar{\tau})' + h\beta^2 + f\gamma\beta)N + (\tau - (h\beta + f\gamma)')C + ((g\beta)' - \gamma(h\beta + f\gamma))W$$

bulunur. Burada N, C, W vektörlerinin katsayıları

$$x_2 = (g\gamma - \bar{\tau})' + h\beta^2 + f\gamma\beta, \quad y_2 = \tau - (h\beta + f\gamma)', \quad z_2 = (g\beta)' - \gamma(h\beta + f\gamma)$$

şeklinde alınırsa $\alpha''_2(s)$ vektörü

$$\alpha''_2(s) = x_2N + y_2C + z_2W$$

olur. $\alpha'_2(s)$ ve $\alpha''_2(s)$ vektörlerinin $\alpha'_2(s) \wedge \alpha''_2(s)$ vektörel çarpımı

$$\begin{aligned} \alpha'_2(s) \wedge \alpha''_2(s) &= (z_2(h\beta + f\gamma) - y_2g\beta)N + (x_2g\beta - z_2(g\gamma - \bar{\tau}))C \\ &\quad + (x_2(h\beta + f\gamma) + y_2(g\gamma - \bar{\tau}))W \end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Norm alınırsa

$$\|\alpha'_2(s) \wedge \alpha''_2(s)\| = \left((z_2(h\beta + f\gamma) - y_2g\beta)^2 + (x_2g\beta - z_2(g\gamma - \bar{\tau}))^2 + (x_2(h\beta + f\gamma) + y_2(g\gamma - \bar{\tau}))^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

olur. $B_2(s)$ binormal vektörü

$$B_2 = \frac{(z_2(h\beta + f\gamma) - y_2g\beta)N + (x_2g\beta - z_2(g\gamma - \bar{\tau}))C + (x_2(h\beta + f\gamma) + y_2(g\gamma - \bar{\tau}))W}{\left((z_2(h\beta + f\gamma) - y_2g\beta)^2 + (x_2g\beta - z_2(g\gamma - \bar{\tau}))^2 + (x_2(h\beta + f\gamma) + y_2(g\gamma - \bar{\tau}))^2 \right)^{\frac{1}{2}}}$$

şekline bulunur. Burada

$$m_2 = \frac{1}{\left((z_2(h\beta + f\gamma) - y_2g\beta)^2 + (x_2g\beta - z_2(g\gamma - \bar{\tau}))^2 + (x_2(h\beta + f\gamma) + y_2(g\gamma - \bar{\tau}))^2 \right)^{\frac{1}{2}}} \quad (4.1.12)$$

alnırsa $B_2(s)$ binormal vektörünün sade yazılışı

$$B_2 = -m_2(z_2(h\beta + f\gamma) - y_2g\beta)N + m_2(x_2g\beta - z_2(g\gamma - \bar{\tau}))C + m_2(x_2(h\beta + f\gamma) + y_2(g\gamma - \bar{\tau}))W$$

şeklinde olur. $\alpha_2(s)$ eğrisinin $N_2(s)$ aslinormal vektörü $N_2(s) = B_2(s) \wedge T_2(s)$ eşitliğinden

$$\begin{aligned} N_2(s) = r_2 m_2 \left\{ \right. & ((z_2g\beta - y_2(h\beta + f\gamma))(g\gamma - \bar{\tau}) - x_2(g^2\beta^2 + (h\beta + f\gamma)^2))N \\ & + (y_2g^2\beta^2 - y_2(g\gamma - \bar{\tau})^2 + (z_2g\beta - x_2(g\gamma - \bar{\tau}))(h\beta + f\gamma))C \\ & \left. + (x_2g\beta(g\gamma - \bar{\tau}) - z_2(g\gamma - \bar{\tau})^2 + (z_2(h\beta + f\gamma) + y_2g\beta)(h\beta + f\gamma))W \right\} \end{aligned} \quad (4.1.13)$$

şeklinde elde edilir. \square

Teorem 4.1.5 $\alpha_2(s)$ -vektörel moment eğrisinin κ_2 eğriliği ve τ_2 burulması sırasıyla

$$\begin{aligned} \kappa_2 &= r_2^3 \sqrt{(z_2(h\beta + f\gamma) - y_2g\beta)^2 + (x_2g\beta - z_2(g\gamma - \bar{\tau}))^2 + (x_2(h\beta + f\gamma) + y_2(g\gamma - \bar{\tau}))^2}, \\ \tau_2 &= m_2^2 \left\{ (x_2g\beta - z_2(g\gamma - \bar{\tau})) \cdot (y_2' + x_2\beta - z_2\gamma) + (y_2(g\gamma - \bar{\tau}) + x_2(h\beta + f\gamma)) \cdot (z_2' + y_2\gamma) \right. \\ & \quad \left. - (y_2g\beta + z_2(h\beta + f\gamma)) \cdot (x_2' - y_2\beta) \right\}, \end{aligned}$$

şeklinde verilir.

İspat. $\alpha_2(s)$ -vektörel moment eğrisinin κ_2 eğriliği (4.1.11) ve (4.1.12) bağıntılarında gerekli işlemler yapıldığında

$$\kappa_2 = r_2^3 \sqrt{(z_2(h\beta + f\gamma) - y_2g\beta)^2 + (x_2g\beta - z_2(g\gamma - \bar{\tau}))^2 + (x_2(h\beta + f\gamma) + y_2(g\gamma - \bar{\tau}))^2}$$

şeklinde elde edilir. $\alpha_2''(s)$ vektöründe tekrar türev alınırsa

$$\alpha_2'''(s) = (x_2' - y_2\beta)N + (y_2' + x_2\beta - z_2\gamma)C + (z_2' + y_2\gamma)W$$

olur. $\alpha'_2(s)$, $\alpha''_2(s)$ ve $\alpha'''_2(s)$ vektörlerinin determinanı hesaplanırsa

$$\begin{aligned}
\det(\alpha'_2, \alpha''_2, \alpha'''_2) &= (x_2g\beta - z_2(g\gamma - \bar{\tau})).(y'_2 + x_2\beta - z_2\gamma) \\
&\quad + (y_2(g\gamma - \bar{\tau}) + x_2(h\beta + f\gamma)).(z'_2 + y_2\gamma) \\
&\quad - (y_2g\beta + z_2(h\beta + f\gamma)).(x'_2 - y_2\beta)
\end{aligned} \tag{4.1.14}$$

bulunur. (4.1.12) ve (4.1.14) bağıntılarından $\alpha_2(s)$ eğrisinin τ_2 burulması

$$\begin{aligned}
\tau_2 &= m_2^2 \left\{ (x_2g\beta - z_2(g\gamma - \bar{\tau})).(y'_2 + x_2\beta - z_2\gamma) \right. \\
&\quad + (y_2(g\gamma - \bar{\tau}) + x_2(h\beta + f\gamma)).(z'_2 + y_2\gamma) \\
&\quad \left. - (y_2g\beta + z_2(h\beta + f\gamma)).(x'_2 - y_2\beta) \right\}
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. \square

Teorem 4.1.6 α_2 eğrisinin alternatif çatı vektörleri N_2, C_2, W_2 olsun. Bu vektörler sırasıyla

$$\begin{aligned}
N_2(s) &= r_2m_2 \left(((z_2g\beta - y_2(h\beta + f\gamma))(g\gamma - \bar{\tau}) - x_2(g^2\beta^2 + (h\beta + f\gamma)^2))N \right. \\
&\quad + (y_2g^2\beta^2 - y_2(g\gamma - \bar{\tau})^2 + (z_2g\beta - x_2(g\gamma - \bar{\tau}))(h\beta + f\gamma))C \\
&\quad \left. + (x_2g\beta(g\gamma - \bar{\tau}) - z_2(g\gamma - \bar{\tau})^2 + (z_2(h\beta + f\gamma) + y_2g\beta)(h\beta + f\gamma))W \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_2(s) = & \frac{1}{\sqrt{\kappa_2^2 + \tau_2^2}} \left(-(\kappa_2 r_2 (g\gamma - \bar{\tau}) + \tau_2 m_2 (z_2 (h\beta + f\gamma) + y_2 g\beta)) N \right. \\
& + (\kappa_2 r_2 (h\beta + f\gamma) + \tau_2 m_2 (x_2 g\beta - z_2 (g\gamma - \bar{\tau}))) C \\
& \left. + (\tau_2 m_2 (x_2 (h\beta + f\gamma) + y_2 (g\gamma - \bar{\tau})) - \kappa_2 r_2 g\beta) W \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_2(s) = & \frac{1}{\sqrt{\kappa_2^2 + \tau_2^2}} \left((\tau_2 r_2 (g\gamma - \bar{\tau}) - \kappa_2 m_2 (z_2 (h\beta + f\gamma) + y_2 g\beta)) N \right. \\
& + (\kappa_2 m_2 (x_2 g\beta - z_2 (g\gamma - \bar{\tau})) - \tau_2 r_2 (h\beta + f\gamma)) C \\
& \left. + (\tau_2 r_2 g\beta + \kappa_2 m_2 (x_2 (h\beta + f\gamma) + y_2 (g\gamma - \bar{\tau}))) W \right)
\end{aligned}$$

şeklinde verilir.

İspat. (4.1.13) bağıntısından N_2 vektörü açıkça görülür. (3.2.4) bağıntısına benzer olarak C_2 vektörü

$$C_2(s) = -\frac{\kappa_2}{\sqrt{\kappa_2^2 + \tau_2^2}} T_2 + \frac{\tau_2}{\sqrt{\kappa_2^2 + \tau_2^2}} B_2$$

yazılır. Teorem 4.1.4 den T_2 ve B_2 vektörleri burada yerine yazılırsa $C_2(s)$ vektörü

$$\begin{aligned}
C_2(s) = & \frac{1}{\sqrt{\kappa_2^2 + \tau_2^2}} \left(-(\kappa_2 r_2 (g\gamma - \bar{\tau}) + \tau_2 m_2 (z_2 (h\beta + f\gamma) + y_2 g\beta)) N \right. \\
& + (\kappa_2 r_2 (h\beta + f\gamma) + \tau_2 m_2 (x_2 g\beta - z_2 (g\gamma - \bar{\tau}))) C \\
& \left. + (\tau_2 m_2 (x_2 (h\beta + f\gamma) + y_2 (g\gamma - \bar{\tau})) - \kappa_2 r_2 g\beta) W \right)
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. (3.2.4) bağıntısına benzer olarak W_2 vektörü

$$W_2(s) = \frac{\tau_2}{\sqrt{\kappa_2^2 + \tau_2^2}} T_2 + \frac{\kappa_2}{\sqrt{\kappa_2^2 + \tau_2^2}} B_2$$

olur. T_2 ve B_2 vektörleri burada yerine yazılırsa $W_2(s)$ vektörü

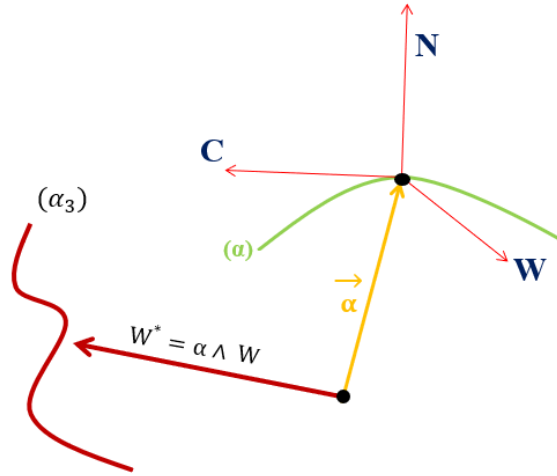
$$W_2(s) = \frac{1}{\sqrt{\kappa_2^2 + \tau_2^2}} \left((\tau_2 r_2 (g\gamma - \bar{\tau}) - \kappa_2 m_2 (z_2 (h\beta + f\gamma) + y_2 g\beta)) N \right. \\ \left. + (\kappa_2 m_2 (x_2 g\beta - z_2 (g\gamma - \bar{\tau})) - \tau_2 r_2 (h\beta + f\gamma)) C \right. \\ \left. + (\tau_2 r_2 g\beta + \kappa_2 m_2 (x_2 (h\beta + f\gamma) + y_2 (g\gamma - \bar{\tau}))) W \right)$$

elde edilir. \square

Tanım 4.1.3 α eğrisinin alternatif çatısı N, C, W olsun. $\alpha(s)$ eğrisinin W birim Darboux vektörünün $W^* = \alpha(s) \wedge W(s)$ şeklinde tanımlı vektörel moment vektörünün çizdiği eğri

$$\alpha_3(s) = g(s)N(s) - f(s)C(s)$$

şeklinde verilir. (Şekil 4.3)



Şekil 4.3: α_3 -vektörel moment eğrisi

Teorem 4.1.7 $\alpha_3(s)$ -vektörel moment eğrisinin Frenet vektörleri T_3, N_3, B_3 olsun. Bu vektörler

$$T_3(s) = r_3(\bar{\kappa} + h\gamma)N - r_3f\gamma W,$$

$$N_3(s) = -r_3m_3\{(x_3(f\gamma)^2 + z_3f\gamma(\bar{\kappa} + h\gamma))N + (z_3(f\gamma)^2 + y_3f\gamma(\bar{\kappa} + h\gamma)^2)C \\ + (x_3f\gamma(\bar{\kappa} + h\gamma) + z_3f\gamma(\bar{\kappa} + h\gamma)^2)W\},$$

$$B_3(s) = m_3z_3f\gamma N - m_3(x_3f\gamma + z_3(\bar{\kappa} + h\gamma))C + m_3y_3(\bar{\kappa} + h\gamma)W,$$

şeklinde verilir. Burada r_3, m_3, x_3, y_3, z_3 ifadeleri

$$r_3 = \frac{1}{\sqrt{(\bar{\kappa} + h\gamma)^2 + (f\gamma)^2}},$$

$$m_3 = \frac{1}{\sqrt{(z_3f\gamma)^2 + (x_3f\gamma + z_3(\bar{\kappa} + h\gamma))^2 + (y_3(\bar{\kappa} + h\gamma))^2}},$$

$$x_3 = (\bar{\kappa} + h\gamma)', \quad y_3 = (\kappa + \gamma\beta(h + f)), \quad z_3 = -(f\gamma)'$$

birer katsayıdır.

İspat. α_3 eğrisinin yay parametresi t olsun. Buna göre s parametresine göre türev alınırsa

$$\alpha_3'(s) = T_3 \frac{dt}{ds} = (\bar{\kappa} + h\gamma)N - f\gamma W \quad (4.1.15)$$

yazılır. Buradan norm alınırsa

$$\frac{dt}{ds} = \sqrt{(\bar{\kappa} + h\gamma)^2 + (f\gamma)^2}$$

olur. Bu ifade (4.1.15) de yerine yazılırsa $\alpha_3(s)$ -vektörel moment eğrisinin $T_3(s)$ teğet vektörü

$$T_3(s) = \frac{(\bar{\kappa} + h\gamma)N - f\gamma W}{\sqrt{(\bar{\kappa} + h\gamma)^2 + (f\gamma)^2}}$$

bulunur ve

$$r_3 = \frac{1}{\sqrt{(\bar{\kappa} + h\gamma)^2 + (f\gamma)^2}} \quad (4.1.16)$$

almırsa $T_3(s)$ teğet vektörünün sade yazılışı

$$T_3(s) = r_3(\bar{\kappa} + h\gamma)N - r_3f\gamma W$$

şeklinde verilir. $\alpha'_3(s)$ vektörünün tekrar türevi almırsa

$$\alpha''_3(s) = (\bar{\kappa} + h\gamma)'N + (\kappa + \gamma\beta(h + f))C - (f\gamma)'W$$

bulunur. Burada N, C, W vektörlerinin katsayıları

$$x_3 = (\bar{\kappa} + h\gamma)', \quad y_3 = \kappa + \gamma\beta(h + f), \quad z_3 = -(f\gamma)'$$

şeklinde almırsa $\alpha''_3(s)$ vektörü

$$\alpha''_3(s) = x_3N + y_3C + z_3W$$

olur. $\alpha'_3(s)$ ve $\alpha''_3(s)$ vektörlerinin vektörel çarpımı

$$\alpha'_3(s) \wedge \alpha''_3(s) = z_3f\gamma N - (x_3f\gamma + z_3(\bar{\kappa} + h\gamma))C + y_3(\bar{\kappa} + h\gamma)W$$

bulunur. Norm almırsa

$$\|\alpha'_3(s) \wedge \alpha''_3(s)\| = \sqrt{(z_3f\gamma)^2 + (x_3f\gamma + z_3(\bar{\kappa} + h\gamma))^2 + (y_3(\bar{\kappa} + h\gamma))^2}$$

şeklinde olur. $\alpha_3(s)$ -vektörel moment eğrisinin $B_3(s)$ binormal vektörü

$$B_3(s) = \frac{z_3f\gamma N - (x_3f\gamma + z_3(\bar{\kappa} + h\gamma))C + y_3(\bar{\kappa} + h\gamma)W}{\sqrt{(z_3f\gamma)^2 + (x_3f\gamma + z_3(\bar{\kappa} + h\gamma))^2 + (y_3(\bar{\kappa} + h\gamma))^2}}$$

bulunur ve

$$m_3 = \frac{1}{\sqrt{(z_3 f \gamma)^2 + (x_3 f \gamma + z_3(\bar{\kappa} + h \gamma))^2 + (y_3(\bar{\kappa} + h \gamma))^2}} \quad (4.1.17)$$

alınırsa $B_3(s)$ binormal vektörü

$$\begin{aligned} B_3(s) = & -m_3(z_3(h\beta + f\gamma) - y_3g\beta)N + m_3(x_3g\beta - z_3(g\gamma - \bar{\tau}))C \\ & + m_3(x_3(h\beta + f\gamma) + y_3(g\gamma - \bar{\tau}))W \end{aligned}$$

bulunur. $\alpha_3(s)$ eğrisinin $N_3(s)$ aslinormal vektörü

$$\begin{aligned} N_3(s) = & -r_3 m_3 \{ (x_3(f\gamma)^2 + z_3 f \gamma(\bar{\kappa} + h\gamma))N + (z_3(f\gamma)^2 + y_3 f \gamma(\bar{\kappa} + h\gamma)^2)C \\ & + (x_3 f \gamma(\bar{\kappa} + h\gamma) + z_3 f \gamma(\bar{\kappa} + h\gamma)^2)W \} \end{aligned} \quad (4.1.18)$$

şeklinde elde edilir. \square

Teorem 4.1.8 $\alpha_3(s)$ -vektörel moment eğrisinin κ_3 eğriliği ve τ_3 burulması sırasıyla

$$\begin{aligned} \kappa_3 = & r_3^3 \sqrt{(z_3 f \gamma)^2 + (x_3 f \gamma + z_3(\bar{\kappa} + h \gamma))^2 + (y_3(\bar{\kappa} + h \gamma))^2}, \\ \tau_3 = & m_3^2 \left(y_3(\bar{\kappa} + h \gamma)(z_3' + y_3 \gamma) - (z_3(\bar{\kappa} + h \gamma) + x_3 f \gamma) \cdot (y_3' + x_3 \beta - z_3 \gamma) \right. \\ & \left. + y_3 f \gamma (x_3' - y_3 \beta) \right), \end{aligned}$$

şeklinde verilir.

İspat. $\alpha_3(s)$ -vektörel moment eğrisinin κ_3 eğriliği (4.1.16) ve (4.1.17) bağıntılarından gerekli işlemler yapıldığında

$$\kappa_3 = r_3^3 \sqrt{(z_3 f \gamma)^2 + (x_3 f \gamma + z_3(\bar{\kappa} + h\gamma))^2 + (y_3(\bar{\kappa} + h\gamma))^2}$$

olur. $\alpha_3''(s)$ vektöründe tekrar türev alınır

$$\alpha_3'''(s) = (x_3' - y_3\beta)N + (y_3' + x_3\beta - z_3\gamma)C + (z_3' + y_3\gamma)W$$

şeklinde bulunur. $\alpha_3'(s)$, $\alpha_3''(s)$ ve $\alpha_3'''(s)$ vektörlerinin determinanı hesaplanırsa

$$\begin{aligned} \det(\alpha_3', \alpha_3'', \alpha_3''') &= y_3 f \gamma (x_3' - y_3 \beta) + y_3 (\bar{\kappa} + h\gamma) (z_3' + y_3 \gamma) \\ &\quad - (z_3 (\bar{\kappa} + h\gamma) + x_3 f \gamma) \cdot (y_3' + x_3 \beta - z_3 \gamma) \end{aligned} \quad (4.1.19)$$

olur. (4.1.17) ve (4.1.19) bağıntılarından $\alpha_3(s)$ eğrisinin τ_3 burulması

$$\begin{aligned} \tau_3 &= m_3^2 \left(y_3 (\bar{\kappa} + h\gamma) (z_3' + y_3 \gamma) - (z_3 (\bar{\kappa} + h\gamma) + x_3 f \gamma) \cdot (y_3' + x_3 \beta - z_3 \gamma) \right. \\ &\quad \left. + y_3 f \gamma (x_3' - y_3 \beta) \right) \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. \square

Teorem 4.1.9 α_3 eğrisinin alternatif çatı vektörleri N_3, C_3, W_3 olsun. Bu vektörler sırasıyla

$$\begin{aligned} N_3(s) &= -r_3 m_3 ((x_3 (f\gamma)^2 + z_3 f \gamma (\bar{\kappa} + h\gamma))N + (z_3 (f\gamma)^2 + y_3 f \gamma (\bar{\kappa} + h\gamma)^2)C \\ &\quad + (x_3 f \gamma (\bar{\kappa} + h\gamma) + z_3 f \gamma (\bar{\kappa} + h\gamma)^2)W), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_3(s) &= \frac{1}{\sqrt{\kappa_3^2 + \tau_3^2}} \left(-(\tau_3 m_3 z_3 f \gamma - \kappa_3 r_3 (\bar{\kappa} + h\gamma))N - (\tau_3 m_3 (x_3 f \gamma + z_3 (\bar{\kappa} + h\gamma)))C \right. \\ &\quad \left. + (\kappa_3 r_3 f \gamma + \tau_3 m_3 y_3 (\bar{\kappa} + h\gamma))W \right), \end{aligned}$$

$$W_3(s) = \frac{1}{\sqrt{\kappa_3^2 + \tau_3^2}} \left((\kappa_3 m_3 z_3 f \gamma + \tau_3 r_3 (\bar{\kappa} + h\gamma)) N - (\kappa_3 m_3 (x_3 f \gamma + z_3 (\bar{\kappa} + h\gamma))) C \right. \\ \left. + (\kappa_3 m_3 y_3 (\bar{\kappa} + h\gamma) - \tau_3 r_3 f \gamma) W \right),$$

şeklinde verilir.

İspat. (4.1.18) bağıntısından N_3 vektörü açıkça görülür. (3.2.4) bağıntısına benzer olarak C_3 vektörü

$$C_3(s) = -\frac{\kappa_3}{\sqrt{\kappa_3^2 + \tau_3^2}} T_3 + \frac{\tau_3}{\sqrt{\kappa_3^2 + \tau_3^2}} B_3$$

yazılır. Teorem 4.1.7 den T_3 ve B_3 vektörleri burada yerine yazılırsa $C_3(s)$ vektörü

$$C_3(s) = \frac{1}{\sqrt{\kappa_3^2 + \tau_3^2}} \left(-(\tau_3 m_3 z_3 f \gamma - \kappa_3 r_3 (\bar{\kappa} + h\gamma)) N - (\tau_3 m_3 (x_3 f \gamma + z_3 (\bar{\kappa} + h\gamma))) C \right. \\ \left. + (\kappa_3 r_3 f \gamma + \tau_3 m_3 y_3 (\bar{\kappa} + h\gamma)) W \right)$$

şeklinde bulunur. (3.2.4) bağıntısına benzer olarak W_3 vektörü

$$W_3(s) = \frac{\tau_3}{\sqrt{\kappa_3^2 + \tau_3^2}} T_3 + \frac{\kappa_3}{\sqrt{\kappa_3^2 + \tau_3^2}} B_3$$

olur. T_3 ve B_3 vektörleri burada yerine yazılırsa $W_3(s)$ vektörü

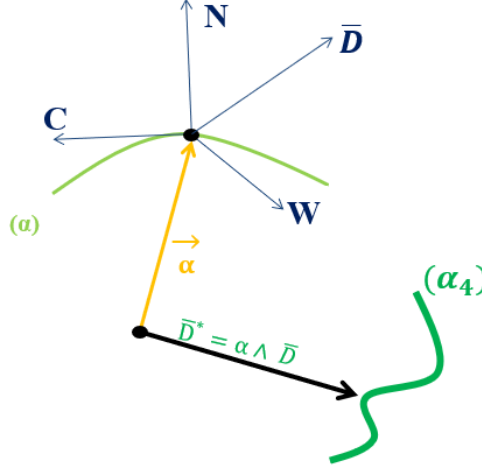
$$W_3(s) = \frac{1}{\sqrt{\kappa_3^2 + \tau_3^2}} \left((\kappa_3 m_3 z_3 f \gamma + \tau_3 r_3 (\bar{\kappa} + h\gamma)) N - (\kappa_3 m_3 (x_3 f \gamma + z_3 (\bar{\kappa} + h\gamma))) C \right. \\ \left. + (\kappa_3 m_3 y_3 (\bar{\kappa} + h\gamma) - \tau_3 r_3 f \gamma) W \right)$$

elde edilir. \square

Tanım 4.1.4 α eğrisinin alternatif çatısı N, C, W olsun. $\alpha(s)$ eğrisinin \bar{D} alternatif Darboux vektörünün $\bar{D}^* = \alpha(s) \wedge \bar{D}(s)$ şeklinde tanımlı vektörel moment vektörünün çizdiği eğri

$$\alpha_4(s) = g(s)\beta(s)N(s) + (h(s)\gamma(s) - f(s)\beta(s))C(s) - g(s)\gamma(s)W(s)$$

şeklinde verilir. (Şekil 4.4)



Şekil 4.4: α_4 -vektörel moment eğrisi

Teorem 4.1.10 $\alpha_4(s)$ -vektörel moment eğrisinin Frenet vektörleri T_4, N_4, B_4 olsun. Bu vektörler

$$T_4(s) = r_4(g\beta' - \kappa)N + r_4(\bar{\tau} + g\beta - (f\beta)')C - r_4(\bar{\kappa}\gamma + g\gamma')W,$$

$$\begin{aligned} N_4(s) = & r_4m_4 \left((y_4(\bar{\tau} + g\beta - (f\beta)') - z_4(\bar{\kappa}\gamma + g\gamma'))(g\beta' - \kappa) \right. \\ & \left. - x_4(\bar{\tau} + g\beta - (f\beta)')^2 - x_4(\bar{\kappa}\gamma + g\gamma')^2 \right) N \\ & + r_4m_4 \left((x_4(g\beta' - \kappa) - z_4(\bar{\kappa}\gamma + g\gamma'))(\bar{\tau} + g\beta - (f\beta)') \right. \\ & \left. - y_4(\bar{\kappa}\gamma + g\gamma')^2 - y_4(g\beta' - \kappa)^2 \right) C \\ & - r_4m_4 \left((x_4(g\beta' - \kappa) + y_4(\bar{\tau} + g\beta - (f\beta)'))(\bar{\kappa}\gamma + g\gamma') \right. \\ & \left. + z_4(g\beta' - \kappa)^2 + z_4(\bar{\tau} + g\beta - (f\beta)')^2 \right) W, \end{aligned}$$

$$B_4(s) = m_4(z_4(\bar{\tau} + g\beta - (f\beta)') + y_4(\bar{\kappa}\gamma + g\gamma'))N - m_4(x_4(\bar{\kappa}\gamma + g\gamma') + z_4(g\beta' - \kappa))C \\ + m_4(y_4(g\beta' - \kappa) - x_4(\bar{\tau} + g\beta - (f\beta)'))W,$$

şeklinde verilir. Burada r_4, m_4, x_4, y_4, z_4 ifadeleri

$$r_4 = \frac{1}{\sqrt{(g\beta' - \kappa)^2 + (\bar{\tau} + g\beta - (f\beta)')^2 + (\bar{\kappa}\gamma + g\gamma')^2}},$$

$$m_4 = \frac{1}{\left(\begin{aligned} &(z_4(\bar{\tau} + g\beta - (f\beta)') + y_4(\bar{\kappa}\gamma + g\gamma'))^2 + (x_4(\bar{\kappa}\gamma + g\gamma') + z_4(g\beta' - \kappa))^2 \\ &+ (y_4(g\beta' - \kappa) - x_4(\bar{\tau} + g\beta - (f\beta)'))^2 \end{aligned} \right)^{\frac{1}{2}}},$$

$$x_4 = (g\beta' - \kappa)' - \beta(\bar{\tau} + g\beta - (f\beta)'),$$

$$y_4 = (\bar{\tau} + g\beta - (f\beta)')' + \beta(g\beta' - \kappa) + \gamma(\bar{\kappa}\gamma + g\gamma'),$$

$$z_4 = \gamma(\bar{\tau} + g\beta - (f\beta)') - (\bar{\kappa}\gamma + g\gamma)'$$

birer katsayıdır.

İspat. α_4 eğrisinin yay parametresi t olsun. Buna göre s parametresine göre türev alınırsa

$$\alpha_4'(s) = T_4 \frac{dt}{ds} = (g\beta' - \kappa)N + (\bar{\tau} + g\beta - (f\beta)')C - (\bar{\kappa}\gamma + g\gamma')W \quad (4.1.20)$$

olur. Buradan norm alınırsa

$$\frac{dt}{ds} = \sqrt{(g\beta' - \kappa)^2 + (\bar{\tau} + g\beta - (f\beta)')^2 + (\bar{\kappa}\gamma + g\gamma')^2}$$

yazılır. Bu ifade (4.1.20) de yerine yazılırsa $\alpha_4(s)$ eğrisinin $T_4(s)$ teğet vektörü

$$T_4(s) = \frac{(g\beta' - \kappa)N + (\bar{\tau} + g\beta - (f\beta)')C - (\bar{\kappa}\gamma + g\gamma')W}{\sqrt{(g\beta' - \kappa)^2 + (\bar{\tau} + g\beta - (f\beta)')^2 + (\bar{\kappa}\gamma + g\gamma')^2}}$$

şeklinde bulunur ve

$$r_4 = \frac{1}{\sqrt{(g\beta' - \kappa)^2 + (\bar{\tau} + g\beta - (f\beta)')^2 + (\bar{\kappa}\gamma + g\gamma')^2}} \quad (4.1.21)$$

alnırsa $T_4(s)$ teğet vektörünün sade yazılışı

$$T_4(s) = r_4(g\beta' - \kappa)N + r_4(\bar{\tau} + g\beta - (f\beta)')C - r_4(\bar{\kappa}\gamma + g\gamma')W$$

elde edilir. $\alpha'_4(s)$ vektörünün tekrar türevi alınırsa

$$\begin{aligned} \alpha''_4(s) &= ((g\beta' - \kappa)' - \beta(\bar{\tau} + g\beta - (f\beta)'))N \\ &\quad + ((\bar{\tau} + g\beta - (f\beta)')' + \beta(g\beta' - \kappa) + \gamma(\bar{\kappa}\gamma + g\gamma'))C \\ &\quad + (\gamma(\bar{\tau} + g\beta - (f\beta)') - (\bar{\kappa}\gamma + g\gamma'))W \end{aligned}$$

bulunur. Burada katsayılar

$$\begin{aligned} x_4 &= (g\beta' - \kappa)' - \beta(\bar{\tau} + g\beta - (f\beta)'), \\ y_4 &= (\bar{\tau} + g\beta - (f\beta)')' + \beta(g\beta' - \kappa) + \gamma(\bar{\kappa}\gamma + g\gamma'), \\ z_4 &= \gamma(\bar{\tau} + g\beta - (f\beta)') - (\bar{\kappa}\gamma + g\gamma)' \end{aligned}$$

olarak alınırsa $\alpha''_4(s)$ vektörü

$$\alpha''_4(s) = x_4N + y_4C + z_4W$$

şeklinde olur. $\alpha'_4(s)$ ve $\alpha''_4(s)$ vektörlerinin vektörel çarpım vektörü

$$\begin{aligned}\alpha'_4(s) \wedge \alpha''_4(s) &= (z_4(\bar{\tau} + g\beta - (f\beta)') + y_4(\bar{\kappa}\gamma + g\gamma'))N - (x_4(\bar{\kappa}\gamma + g\gamma') + z_4(g\beta' - \kappa))C \\ &\quad + (y_4(g\beta' - \kappa) - x_4(\bar{\tau} + g\beta - (f\beta)'))W\end{aligned}$$

olarak bulunur. Buradan norm alınırsa

$$\|\alpha'_4(s) \wedge \alpha''_4(s)\| = \left(\begin{aligned} &(z_4(\bar{\tau} + g\beta - (f\beta)') + y_4(\bar{\kappa}\gamma + g\gamma'))^2 + (x_4(\bar{\kappa}\gamma + g\gamma') + z_4(g\beta' - \kappa))^2 \\ &+ (y_4(g\beta' - \kappa) - x_4(\bar{\tau} + g\beta - (f\beta)'))^2 \end{aligned} \right)^{\frac{1}{2}}$$

şeklinde bulunur ve

$$m_4 = \frac{1}{\|\alpha'_4(s) \wedge \alpha''_4(s)\|} \quad (4.1.22)$$

olarak alınırsa $B_4(s)$ binormal vektörü

$$\begin{aligned}B_4(s) &= m_4(z_4(\bar{\tau} + g\beta - (f\beta)') + y_4(\bar{\kappa}\gamma + g\gamma'))N - m_4(x_4(\bar{\kappa}\gamma + g\gamma') + z_4(g\beta' - \kappa))C \\ &\quad + m_4(y_4(g\beta' - \kappa) - x_4(\bar{\tau} + g\beta - (f\beta)'))W\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. $\alpha_4(s)$ -vektörel moment eğrisinin $N_4(s)$ aslinormal vektörü ise

$$\begin{aligned}N_4(s) &= r_4 m_4 ((y_4(\bar{\tau} + g\beta - (f\beta)') - z_4(\bar{\kappa}\gamma + g\gamma'))(g\beta' - \kappa) \\ &\quad - x_4(\bar{\tau} + g\beta - (f\beta)')^2 - x_4(\bar{\kappa}\gamma + g\gamma')^2)N \\ &\quad + r_4 m_4 ((x_4(g\beta' - \kappa) - z_4(\bar{\kappa}\gamma + g\gamma'))(\bar{\tau} + g\beta - (f\beta)') \\ &\quad - y_4(\bar{\kappa}\gamma + g\gamma')^2 - y_4(g\beta' - \kappa)^2)C \\ &\quad - r_4 m_4 ((x_4(g\beta' - \kappa) + y_4(\bar{\tau} + g\beta - (f\beta)'))(\bar{\kappa}\gamma + g\gamma') \\ &\quad + z_4(g\beta' - \kappa)^2 + z_4(\bar{\tau} + g\beta - (f\beta)')^2)W\end{aligned} \quad (4.1.23)$$

şeklinde elde edilir. \square

Teorem 4.1.11 $\alpha_4(s)$ -vektörel moment eğrisinin κ_4 eğriliği ve τ_4 burulması sırasıyla

$$\kappa_4 = r_4^3 \left(\begin{array}{c} (z_4(\bar{\tau} + g\beta - (f\beta)') + y_4(\bar{\kappa}\gamma + g\gamma'))^2 + (x_4(\bar{\kappa}\gamma + g\gamma') + z_4(g\beta' - \kappa))^2 \\ + (y_4(g\beta' - \kappa) - x_4(\bar{\tau} + g\beta - (f\beta)'))^2 \end{array} \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\tau_4 = m_4^2 \left\{ \begin{array}{l} (x_4' - y_4\beta)((z_4(\bar{\tau} + g\beta - (f\beta)') + y_4(\bar{\kappa}\gamma + g\gamma')) \\ - (y_4' + x_4\beta - z_4\gamma)(x_4(\bar{\kappa}\gamma + g\gamma') + z_4(g\beta' - \kappa)) \\ + (z_4' + y_4\gamma)(y_4(g\beta' - \kappa) - x_4(\bar{\tau} + g\beta - (f\beta)')) \end{array} \right\},$$

şeklinde verilir.

İspat. $\alpha_4(s)$ -vektörel moment eğrisinin κ_4 eğriliği (4.1.21) ve (4.1.22) bağıntılarında gerekli işlemler yapılırsa

$$\kappa_4 = r_4^3 \left(\begin{array}{c} (z_4(\bar{\tau} + g\beta - (f\beta)') + y_4(\bar{\kappa}\gamma + g\gamma'))^2 + (x_4(\bar{\kappa}\gamma + g\gamma') + z_4(g\beta' - \kappa))^2 \\ + (y_4(g\beta' - \kappa) - x_4(\bar{\tau} + g\beta - (f\beta)'))^2 \end{array} \right)^{\frac{1}{2}}$$

şeklinde elde edilir. $\alpha_4''(s)$ vektöründe tekrar türev alınırsa

$$\alpha_4'''(s) = (x_4' - y_4\beta)N + (y_4' + x_4\beta - z_4\gamma)C + (z_4' + y_4\gamma)W$$

biçiminde olur. $\alpha_4'(s)$, $\alpha_4''(s)$ ve $\alpha_4'''(s)$ vektörlerinin determinantı hesaplanırsa

$$\begin{aligned} \det(\alpha_4', \alpha_4'', \alpha_4''') &= (x_4' - y_4\beta)((z_4(\bar{\tau} + g\beta - (f\beta)') + y_4(\bar{\kappa}\gamma + g\gamma')) \\ &\quad - (y_4' + x_4\beta - z_4\gamma)(x_4(\bar{\kappa}\gamma + g\gamma') + z_4(g\beta' - \kappa)) \\ &\quad + (z_4' + y_4\gamma)(y_4(g\beta' - \kappa) - x_4(\bar{\tau} + g\beta - (f\beta)'))) \end{aligned} \quad (4.1.24)$$

bulunur. (4.1.22) ve (4.1.24) bağıntılarından $\alpha_4(s)$ -vektörel moment eğrisinin τ_4 burulması

$$\begin{aligned} \tau_4 = m_4^2 & \left\{ (x'_4 - y_4\beta) \left((z_4(\bar{\tau} + g\beta - (f\beta)')) + y_4(\bar{\kappa}\gamma + g\gamma') \right) \right. \\ & - (y'_4 + x_4\beta - z_4\gamma) \left(x_4(\bar{\kappa}\gamma + g\gamma') + z_4(g\beta' - \kappa) \right) \\ & \left. + (z'_4 + y_4\gamma) \left(y_4(g\beta' - \kappa) - x_4(\bar{\tau} + g\beta - (f\beta)') \right) \right\} \end{aligned}$$

elde edilir. \square

Teorem 4.1.12 α_4 eğrisinin alternatif çatı vektörleri N_4, C_4, W_4 olsun. Bu vektörler sırasıyla

$$\begin{aligned} N_4(s) = r_4 m_4 & \left((y_4(\bar{\tau} + g\beta - (f\beta)') - z_4(\bar{\kappa}\gamma + g\gamma'))(g\beta' - \kappa) \right. \\ & \left. - x_4(\bar{\tau} + g\beta - (f\beta)')^2 - x_4(\bar{\kappa}\gamma + g\gamma')^2 \right) N \\ & + r_4 m_4 \left((x_4(g\beta' - \kappa) - z_4(\bar{\kappa}\gamma + g\gamma'))(\bar{\tau} + g\beta - (f\beta)') \right. \\ & \left. - y_4(\bar{\kappa}\gamma + g\gamma')^2 - y_4(g\beta' - \kappa)^2 \right) C \\ & + r_4 m_4 \left((x_4(g\beta' - \kappa) + y_4(\bar{\tau} + g\beta - (f\beta)'))(\bar{\kappa}\gamma + g\gamma') \right. \\ & \left. + z_4(g\beta' - \kappa)^2 + z_4(\bar{\tau} + g\beta - (f\beta)')^2 \right) W, \\ C_4(s) = \frac{1}{\sqrt{\kappa_4^2 + \tau_4^2}} & \left(- (\tau_4 m_4 (z_4(\bar{\tau} + g\beta - (f\beta)') + y_4(\bar{\kappa}\gamma + g\gamma')) - \kappa_4 r_4 (g\beta' - \kappa)) N \right. \\ & - (\kappa_4 r_4 (\bar{\tau} + g\beta - (f\beta)') + \tau_4 m_4 (x_4(\bar{\kappa}\gamma + g\gamma') + z_4(g\beta' - \kappa))) C \\ & \left. + (\kappa_4 r_4 (\bar{\kappa}\gamma + g\gamma') + \tau_4 m_4 (y_4(g\beta' - \kappa) - x_4(\bar{\tau} + g\beta - (f\beta)'))) W \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_4(s) = & \frac{1}{\sqrt{\kappa_4^2 + \tau_4^2}} \left((\kappa_4 m_4 (z_4(\bar{\tau} + g\beta - (f\beta)') + y_4(\bar{\kappa}\gamma + g\gamma')) + \tau_4 r_4 (g\beta' - \kappa)) N \right. \\
& + (\tau_4 r_4 (\bar{\tau} + g\beta - (f\beta)') - \kappa_4 m_4 (x_4(\bar{\kappa}\gamma + g\gamma') + z_4(g\beta' - \kappa))) C \\
& \left. + (\kappa_4 m_4 (y_4(g\beta' - \kappa) - x_4(\bar{\tau} + g\beta - (f\beta)')) - \tau_4 r_4 (\bar{\kappa}\gamma + g\gamma')) W \right)
\end{aligned}$$

şeklinde verilir.

İspat. (4.1.23) bağıntısından $N_4(s)$ vektörü açıkça görülür. (3.2.4) bağıntısına benzer olarak C_4 vektörü

$$C_4(s) = -\frac{\kappa_4}{\sqrt{\kappa_4^2 + \tau_4^2}} T_4 + \frac{\tau_4}{\sqrt{\kappa_4^2 + \tau_4^2}} B_4$$

yazılır. Teorem 4.1.10 dan T_4 ve B_4 vektörleri burada yerine yazılırsa $C_4(s)$ vektörü

$$\begin{aligned}
C_4(s) = & \frac{1}{\sqrt{\kappa_4^2 + \tau_4^2}} \left(-(\tau_4 m_4 (z_4(\bar{\tau} + g\beta - (f\beta)') + y_4(\bar{\kappa}\gamma + g\gamma')) - \kappa_4 r_4 (g\beta' - \kappa)) N \right. \\
& - (\kappa_4 r_4 (\bar{\tau} + g\beta - (f\beta)') + \tau_4 m_4 (x_4(\bar{\kappa}\gamma + g\gamma') + z_4(g\beta' - \kappa))) C \\
& \left. + (\kappa_4 r_4 (\bar{\kappa}\gamma + g\gamma') + \tau_4 m_4 (y_4(g\beta' - \kappa) - x_4(\bar{\tau} + g\beta - (f\beta)'))) W \right),
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. (3.2.4) bağıntısına benzer olarak W_4 vektörü

$$W_4(s) = \frac{\tau_4}{\sqrt{\kappa_4^2 + \tau_4^2}} T_4 + \frac{\kappa_4}{\sqrt{\kappa_4^2 + \tau_4^2}} B_4$$

olur. T_4 ve B_4 vektörleri burada yerine yazılırsa $W_4(s)$ vektörü

$$\begin{aligned}
W_4(s) = & \frac{1}{\sqrt{\kappa_4^2 + \tau_4^2}} \left((\kappa_4 m_4 (z_4(\bar{\tau} + g\beta - (f\beta)') + y_4(\bar{\kappa}\gamma + g\gamma')) + \tau_4 r_4 (g\beta' - \kappa)) N \right. \\
& + (\tau_4 r_4 (\bar{\tau} + g\beta - (f\beta)') - \kappa_4 m_4 (x_4(\bar{\kappa}\gamma + g\gamma') + z_4(g\beta' - \kappa))) C \\
& \left. + (\kappa_4 m_4 (y_4(g\beta' - \kappa) - x_4(\bar{\tau} + g\beta - (f\beta)')) - \tau_4 r_4 (\bar{\kappa}\gamma + g\gamma')) W \right)
\end{aligned}$$

elde edilir. \square

Teorem 4.1.13 Düzlemsel bir $\alpha(s)$ eğrisinin N aslinormal vektörününün vektörel momenti N^* olsun. N^* vektörünün çizdiği eğri $\alpha_1(s)$ eğrisi ile $\alpha(s)$ eğrisi sabit genişlikli eğri çifti oluşturmaz.

İspat. α eğrisi alternatif çatı vektörlerinin lineer birleşimi olarak

$$\alpha(s) = f(s)N(s) + g(s)C(s) + h(s)W(s) \quad (4.1.25)$$

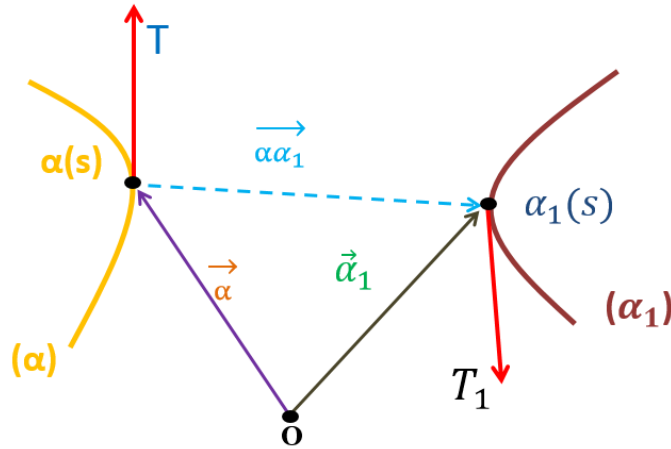
şeklinde yazılır. N^* vektörel moment vektörü

$$\begin{aligned} N^* &= \alpha \wedge N \\ &= (fN + gC + hW) \wedge N \\ &= h(s)C(s) - g(s)W(s) \end{aligned}$$

şeklinde hesaplanır. Bu vektörün çizmiş olduğu eğri α_1 ile gösterilirse

$$\alpha_1(s) = h(s)C(s) - g(s)W(s) \quad (4.1.26)$$

olur.



Şekil 4.5: α ile α_1 eğrisi sabit genişlikli eğri çifti oluşturmaz.

$\overrightarrow{\alpha\alpha_1}$ vektörü (Şekil 4.5) den

$$\overrightarrow{\alpha\alpha_1} = a_1N + a_2C + a_3W$$

yazılır. Burada (4.1.25), (4.1.26) bağıntıları dikkate alınırsa

$$\begin{aligned} \vec{\alpha}_1 - \vec{\alpha} &= a_1N + a_2C + a_3W, \\ hC - gW - fN - gC - hW &= a_1N + a_2C + a_3W \end{aligned}$$

eşitliği bulunur. Bu eşitlikten a_1, a_2, a_3 katsayıları sırasıyla

$$a_1 = -f, \quad a_2 = h - g, \quad a_3 = -(h + g)$$

olur. Bu katsayılar α_1 eğrisinde yerine yazılırsa

$$\alpha_1 = \alpha - fN + (h - g)C - (h + g)W \quad (4.1.27)$$

şeklinde olur. α eğrisi düzlemsel olduğundan $\tau = 0$ olur. α ve α_1 eğrilerinin aynı düzlemde olması için $f = 0$ olmalıdır. Bu durumda bu eğriler arasındaki uzaklık

$$d(\alpha, \alpha_1) = \|\overrightarrow{\alpha\alpha_1}\|^2 = (h - g)^2 + (h + g)^2$$

şeklinde bulunur. $f = 0$ ve $\tau = 0$ olduğundan (4.1.4) bağıntısının yeni hali

$$g\beta = 0, \quad g' - h\gamma = \bar{\kappa}, \quad h' + g\gamma = \bar{\tau} \quad (4.1.28)$$

olur. $\tau = 0$ olduğundan $\beta, \gamma, \bar{\kappa}$ ve $\bar{\tau}$ ifadeleri

$$\beta = \sqrt{\kappa^2 + \tau^2} \Rightarrow \beta = \kappa,$$

$$\gamma = \frac{\kappa^2}{\kappa^2 + \tau^2} \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)' \Rightarrow \gamma = 0$$

$$\bar{\kappa} = \frac{\kappa}{\beta} \Rightarrow \bar{\kappa} = 1$$

$$\bar{\tau} = \frac{\tau}{\beta} \Rightarrow \bar{\tau} = 0$$

şekline dönüşür. Bu bağıntılar (4.1.28) de yerine yazılırsa

$$g = 0, \quad g = s + c, \quad h = c$$

çelişkisi elde edilir. Böylece α ve α_1 eğrileri arasındaki uzaklık sabit olmaz. Bu durumda α ve α_1 eğrileri sabit genişlikli eğri çifti oluşturmaz. \square

Teorem 4.1.14 Düzlemsel bir $\alpha(s)$ eğrisinin C vektörününün vektörel momentini C^* olsun. C^* vektörünün çizdiği eğri $\alpha_2(s)$ eğrisi ile $\alpha(s)$ eğrisi sabit genişlikli eğri çifti oluşturmaz.

İspat. α eğrisi alternatif çatı vektörlerinin lineer birleşimi olarak

$$\alpha(s) = f(s)N(s) + g(s)C(s) + h(s)W(s) \quad (4.1.29)$$

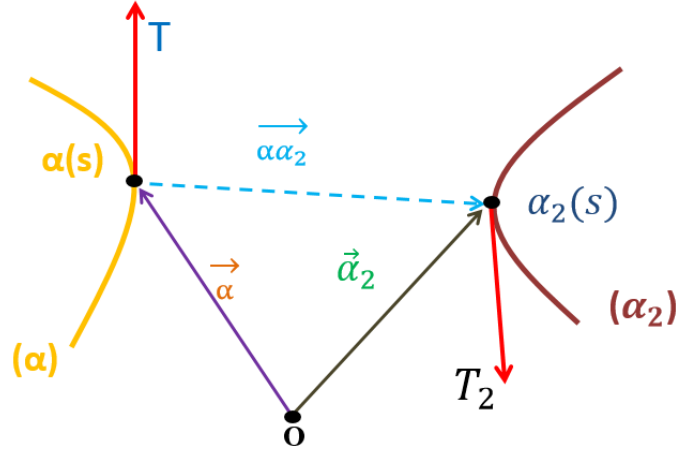
biçiminde yazılır. C vektörünün C^* vektörel moment vektörü

$$\begin{aligned} C^* &= \alpha \wedge C \\ &= (fN + gC + hW) \wedge C \\ &= -h(s)N(s) + f(s)W(s) \end{aligned}$$

şeklinde hesaplanır. Bu vektörün çizmiş olduğu eğri $\alpha_2(s)$ ile gösterilirse

$$\alpha_2(s) = -h(s)N(s) + f(s)W(s) \quad (4.1.30)$$

olur.



Şekil 4.6: α ile α_2 eğrisi sabit genişlikli eğri çifti oluşturmaz.

$\overrightarrow{\alpha\alpha_2}$ vektörü (Şekil 4.6) dan

$$\overrightarrow{\alpha\alpha_2} = a_1N + a_2C + a_3W$$

yazılır. Burada (4.1.29), (4.1.30) bağıntıları dikkate alınırsa

$$\begin{aligned} \vec{\alpha}_2 - \vec{\alpha} &= a_1N + a_2C + a_3W, \\ -hN + fW - fN - gC - hW &= a_1N + a_2C + a_3W \end{aligned}$$

eşitliği yazılır. Bu eşitlikten a_1 , a_2 ve a_3 katsayıları sırasıyla

$$a_1 = -h - f, \quad a_2 = -g, \quad a_3 = f - h$$

olur. Bu katsayılar α_2 eğrisinde yerine yazılırsa

$$\alpha_2 = \alpha - (h + f)N + -gC + (f - h)W \quad (4.1.31)$$

şeklinde olur. α eğrisi düzlemsel olduğu için $\tau = 0$ olur. α ve α_2 eğrisinin aynı düzlemde olması için $g = 0$ olmalıdır. Bu durumda (4.1.4) bağıntısının yeni hali

$$f' = 0, \quad f\beta - h\gamma = \bar{\kappa} \Rightarrow f\kappa = 1, \quad h' = \bar{\tau} \quad (4.1.32)$$

şeklinde olur. $\tau = 0$ olduğundan β , γ , $\bar{\kappa}$ ve $\bar{\tau}$ eşitlikleri

$$\begin{aligned} \beta &= \sqrt{\kappa^2 + \tau^2} \Rightarrow \beta = \kappa, \\ \gamma &= \frac{\kappa^2}{\kappa^2 + \tau^2} \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)' \Rightarrow \gamma = 0 \\ \bar{\kappa} &= \frac{\kappa}{\beta} \Rightarrow \bar{\kappa} = 1 \\ \bar{\tau} &= \frac{\tau}{\beta} \Rightarrow \bar{\tau} = 0 \end{aligned} \quad (4.1.33)$$

şeklinde bulunur. Bu bağıntılar (4.1.32) de yerine yazılırsa

$$f = \text{sabit} \quad \text{ve} \quad h = \text{sabit}$$

elde edilir. Bu durumda α ve α_2 eğrileri arasındaki uzaklığın

$$d(\alpha, \alpha_2) = \|\overrightarrow{\alpha\alpha_2}\|^2 = (f + h)^2 + (f - h)^2$$

sabit olduğu görülür. α_2 eğrisinin s parametresine göre türevi alınırsa

$$\frac{d\alpha_2}{dt} \frac{dt}{ds} = \alpha' - (f+h)'N - (f+h)N' + (f-h)'W + (f-h)W'$$

$$\begin{aligned} T_2 \frac{dt}{ds} &= -\bar{\kappa}C + \bar{\tau}W - (f+h)'N - (f+h)(\beta C) + (f-h)'W + (f-h)(-\gamma C) \\ &= -(f+h)'N - ((f+h)\beta + (f-h)\gamma + \bar{\kappa})C + ((f-h)' + \bar{\tau})W \end{aligned}$$

şeklinde bulunur. (3.2.4) bağıntısında $\tau = 0$ ve $\bar{\kappa} = 1$ olma durumları yazılırsa T-teğet vektörü

$$T = -C \quad (4.1.34)$$

olur. (4.1.32) ve (4.1.33) bağıntılarından

$$T_2 \frac{dt}{ds} = (-h\kappa - 2)C$$

$$T_2 = -\underbrace{\frac{ds}{dt}(h\kappa + 2)}_{\lambda} C$$

$$T_2 = -\lambda C$$

teğet vektörleri paralel fakat zıt yönlü değildir. Bu durumda α ve α_2 eğrileri sabit genişlikli eğri çiftine dahil olmaz. \square

Teorem 4.1.15 Düzlemsel $\alpha(s)$ eğrisinin W vektörünün vektörel momenti W^* olsun. W^* vektörünün çizdiği eğri $\alpha_3(s)$ eğrisi ile $\alpha(s)$ eğrisi sabit genişlikli eğri çifti oluşturmaz.

İspat. α eğrisi alternatif çatı vektörlerinin lineer birleşimi olarak

$$\alpha(s) = f(s)N(s) + g(s)C(s) + h(s)W(s) \quad (4.1.35)$$

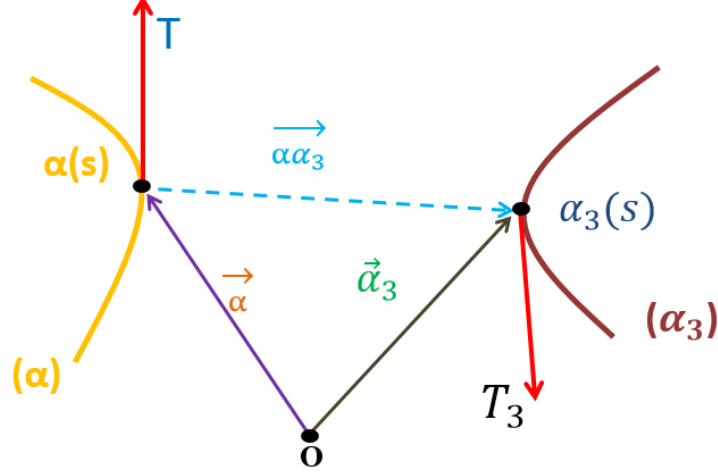
biçiminde yazılır. W vektörünün W^* vektörel moment vektörü

$$\begin{aligned} W^* &= \alpha \wedge W \\ &= (fN + gC + hW) \wedge W \\ &= g(s)N(s) - f(s)C(s) \end{aligned}$$

şeklinde hesaplanır. Bu vektörün çizmiş olduğu eğri $\alpha_3(s)$ ile gösterilirse

$$\alpha_3(s) = g(s)N(s) - f(s)C(s) \quad (4.1.36)$$

olur.



Şekil 4.7: α ile α_3 eğrisi sabit genişlikli eğri çifti oluşturmaz.

$\overrightarrow{\alpha\alpha_3}$ vektörü (Şekil 4.7) den

$$\overrightarrow{\alpha\alpha_3} = a_1N + a_2C + a_3W$$

yazılır. Burada (4.1.35), (4.1.36) bağıntıları dikkate alınırsa

$$\begin{aligned} \vec{\alpha}_3 - \vec{\alpha} &= a_1N + a_2C + a_3W, \\ gN - fC - fN - gC - hW &= a_1N + a_2C + a_3W \end{aligned}$$

eşitliği yazılır. Bu eşitlikten a_1 , a_2 ve a_3 katsayıları sırasıyla

$$a_1 = g - f, \quad a_2 = -g - f, \quad a_3 = -h$$

olur. Bu katsayılar α_3 eğrisinde yerine yazılırsa

$$\alpha_3 = \alpha + (g - f)N - (g + f)C - hW \quad (4.1.37)$$

şeklinde olur. α eğrisi düzlemsel olduğu için $\tau = 0$ olur. α ve α_3 eğrilerinin aynı düzlemde olması için $h = 0$ olmalıdır. Bu durumda bu eğriler arasındaki uzaklık

$$d(\alpha, \alpha_3) = \|\overrightarrow{\alpha\alpha_3}\|^2 = (g - f)^2 + (g + f)^2$$

şeklinde bulunur. (4.1.4) bağıntısının yeni hali

$$f' - g\beta = 0, \quad g' + f\beta = \bar{\kappa}, \quad g\gamma = \bar{\tau} \quad (4.1.38)$$

olur. β , γ , $\bar{\kappa}$ ve $\bar{\tau}$ eşitlikleri ise

$$\beta = \sqrt{\kappa^2 + \tau^2} \Rightarrow \beta = \kappa,$$

$$\gamma = \frac{\kappa^2}{\kappa^2 + \tau^2} \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)' \Rightarrow \gamma = 0$$

$$\bar{\kappa} = \frac{\kappa}{\beta} \Rightarrow \bar{\kappa} = 1$$

$$\bar{\tau} = \frac{\tau}{\beta} \Rightarrow \bar{\tau} = 0$$

şeklinde bulunur. Bu bağıntılar (4.1.38) de yerine yazılırsa bir çelişki elde edilir. Böylece α ve α_3 eğrileri arasındaki uzaklık sabit olmaz. Bu durumda α ve α_3 eğrileri sabit genişlikli eğri çifti oluşturmaz. \square

Teorem 4.1.16 Düzlemsel bir $\alpha(s)$ eğrisinin \bar{D} vektörünün vektörel momenti \bar{D}^* olsun. \bar{D}^* vektörünün çizdiği eğri $\alpha_4(s)$ eğrisi ile $\alpha(s)$ eğrisi sabit genişlikli eğri çifti oluşturmaz.

İspat. α eğrisi alternatif çatı vektörlerinin lineer birleşimi olarak

$$\alpha(s) = f(s)N(s) + g(s)C(s) + h(s)W(s) \quad (4.1.39)$$

biçiminde yazılır. \bar{D} vektörünün \bar{D}^* vektörel moment vektörü

$$\begin{aligned} \bar{D}^* &= \alpha \wedge \bar{D} \\ &= (fN + gC + hW) \wedge (\gamma N + \beta W) \\ &= g(s)\beta(s)N(s) + (h(s)\gamma(s) - f(s)\beta(s))C(s) - g(s)\gamma(s)W(s) \end{aligned}$$

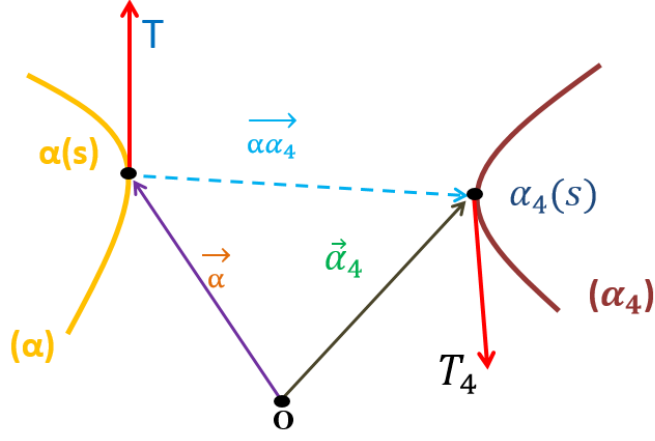
şeklinde hesaplanır. Bu vektörün çizmiş olduğu eğri $\alpha_4(s)$ ile gösterilirse

$$\alpha_4(s) = g(s)\beta(s)N(s) + (h(s)\gamma(s) - f(s)\beta(s))C(s) - g(s)\gamma(s)W(s) \quad (4.1.40)$$

olur.

$\overrightarrow{\alpha}_4$ vektörü (Şekil 4.8) den

$$\overrightarrow{\alpha}_4 = a_1N + a_2C + a_3W$$



Şekil 4.8: α ile α_4 eğrisi sabit genişlikli eğri çifti oluşturmaz.

yazılır. Burada (4.1.39), (4.1.40) bağıntılarından

$$\begin{aligned}\vec{\alpha}_4 - \vec{\alpha} &= a_1N + a_2C + a_3W, \\ g\beta N + (h\gamma - f\beta)C - g\gamma W - fN - gC - hW &= a_1N + a_2C + a_3W\end{aligned}$$

eşitliği yazılır. Bu eşitlikten a_1 , a_2 ve a_3 katsayıları sırasıyla

$$a_1 = g\beta - f, \quad a_2 = h\gamma - f\beta - g, \quad a_3 = -g\gamma - h$$

olur. Bu katsayılar α_4 eğrisinde yerine yazılırsa

$$\alpha_4 = \alpha + (g\beta - f)N + (h\gamma - f\beta - g)C - (g\gamma + h)W \quad (4.1.41)$$

şeklinde bulunur. α eğrisi düzlemsel olduğu için $\tau = 0$ olur. Bu durumda β , γ , $\bar{\kappa}$ ve $\bar{\tau}$ eşitlikleri

$$\beta = \kappa, \quad \gamma = 0, \quad \bar{\kappa} = 1, \quad \bar{\tau} = 0$$

şekline dönüşür. Bu durumda α ve α_4 eğrileri arasındaki uzaklık

$$\begin{aligned}
d(\alpha, \alpha_4) &= \|\overrightarrow{\alpha\alpha_4}\|^2 = (g\beta - f)^2 + (h\gamma - f\beta - g)^2 + (g\gamma + h)^2 \\
&= (g\kappa - f)^2 + (f\kappa + g)^2 + h^2
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Böylece α ve α_4 eğrileri arasındaki uzaklık sabit olmaz. Bu durumda α ve α_4 eğrileri sabit genişlikli eğri çifti oluşturmaz. \square

Örnek 4.1.1 $\alpha(s) = \left(\frac{4}{5} \cos s, 1 - \sin s, -\frac{3}{5} \cos s\right)$ eğrisinin alternatif çatı vektörleri N, C, W olsun. Bu vektörler sırasıyla

$$\begin{aligned}
N(s) &= \left(-\frac{4}{5} \cos s, \sin s, \frac{3}{5} \cos s\right), & C(s) &= \left(\frac{4}{5} \sin s, \cos s, -\frac{3}{5} \sin s\right), \\
W(s) &= \left(-\frac{3}{5}, 0, -\frac{4}{5}\right), & \kappa(s) &= 1, \quad \tau(s) = 0
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. α eğrisi alternatif çatı vektörleri cinsinden

$$\alpha(s) = f(s)N(s) + g(s)C(s) + h(s)W(s)$$

yazılır. Burada N, C, W vektörleri yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
\left(\frac{4}{5} \cos s, 1 - \sin s, -\frac{3}{5} \cos s\right) &= f(s)\left(-\frac{4}{5} \cos s, \sin s, \frac{3}{5} \cos s\right) + g(s)\left(\frac{4}{5} \sin s, \cos s, -\frac{3}{5} \sin s\right) \\
&\quad + h(s)\left(-\frac{3}{5}, 0, -\frac{4}{5}\right)
\end{aligned}$$

olur. Gerekli işlemler yapıldığında $f(s), g(s), h(s)$ fonksiyonları

$$f(s) = \sin s - 1, \quad g(s) = \cos s, \quad h(s) = 0$$

şeklinde bulunur. Bulunan bu fonksiyonlar α_1, α_2 ve α_3 vektörel moment eğrilerinde yerine yazılırsa

$$\alpha_1(s) = h(s)C(s) - g(s)W(s) = \left(\frac{3}{5} \cos s, 0, \frac{4}{5} \cos s\right),$$

$$\alpha_2(s) = -h(s)N(s) + f(s)W(s) = \left(-\frac{3}{5}(\sin s - 1), 0, -\frac{4}{5}(\sin s - 1)\right),$$

$$\alpha_3(s) = g(s)N(s) - f(s)C(s) = \left(\frac{4}{5} \sin s, 1, -\frac{3}{5} \sin s\right)$$

elde edilir. α eğrisinin alternatif vektörlerinin vektörel momentleri tarafından çizilen eğriler birer doğru olduğundan sabit genişlikli eğri çiftine dahil olmadıkları gösterilmiş oldu.

5. SONUÇ ve ÖNERİLER

Bu tezde elde edilen sonuçlar bulgular bölümünde şekillerle açıklanmıştır. Burada ilk olarak, alternatif çatı vektörlerinin vektörel moment eğrileri tanımlandı. Daha sonra bu eğrilerin Frenet aparatları verildi.

Son olarak bu çatıdan elde edilen vektörel moment eğrilerinin sabit genişlikli eğri çiftine dahil olup olmadığı verildi. Tanımlanan eğrilerin şekilleri çizilerek yeni şekiller elde edildi.

Benzer çalışma elde edilen vektörel moment eğrilerinden Smarandache eğrileri tanımlanabilir. Ayrıca eğri üzerinde başka çatılar da tanımlanabilir ve bu durumda yeni açılımlar elde edilebilir.

6. KAYNAKLAR

1. Akdoğan, Z. and Mağden, A. (2001). Some Characterization of Curves of Constant Breadth in E^n Space, *Turk J. Math.*, 25(433 - 444).
2. Chen, B-Y. (2001). Constant ratio Hypersurface, *Soochow J.Math.*, 27(4), 353-362.
3. Euler, L. (1778). De curvis Triangularibus, *Acta Acad. Pertropol.*, 3-30.
4. Fenchel, W. (1951). On The Differential Geometry of Closed Space Curves, *Bulletin of American Mathematical Society*, 57(44-54).
5. Gray, A., (1997). Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica, 2nd ed. Boca Raton, FL: CRC Press, 205s.
6. Hacısalihoğlu, H.H., (1983). Diferensiyel Geometri, İnönü Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Yayınları, Malatya, Mat. no.7, 270s.
7. Kaya, O. and Önder, M. (2017). New Partner Curves in the Euclidean 3-Space E^3 , *International Journal of Geometry*, 6(2), 41-50.
8. Sabuncuoğlu, A., (2014). Diferensiyel Geometri, Nobel Yayınları, 440s.
9. Şenyurt, S. (2018). D-Smarandache Curves According to the Sabban Frame of the Spherical Indicatrix Curve, *Turk. J. Math. Comput. Sci*, 9(39-49).
10. Tunçer, Y. (2017). Vectorial moments of curves in Euclidean 3-space, *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, 14(2), 1750020.

ÖZGEÇMİŞ

Adı-Soyadı : Hülya ŞARDAĞ
Doğum Yeri : GİRESUN
Doğum Tarihi : 02.05.1996
Medeni Hali : Bekar
Bildiği Yabancı Dil : İngilizce
İletişim Bilgileri : Ordu Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik
Bölümü
hulyasardag369@gmail.com, hulyasardag@odu.edu.tr
Lise : Bulancak Lisesi-2012
Lisans : Ordu Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik
Bölümü-2017

Konferans ve Sempozyumlar :

1. S. Şenyurt and H.Şardağ, "On Vectorial Moment of the Darboux Vector." International Conference Mathematics and Mathematics Education (ICMME), 2018, Ordu.