T.C.

ORDU ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GA-KONVEKS VE HARMONİK KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN YENİ İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ VE UYGULAMALARI

Sercan TURHAN

DOKTORA TEZİ

ORDU 2016

TEZ ONAY

Ordu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü öğrencisi Sercan TURHAN tarafından hazırlanan ve Doç. Dr. Selahattin MADEN danışmanlığında yürütülen "GA-Konveks ve Harmonik Konveks Fonksiyonlar İçin Yeni İntegral Eşitsizlikleri ve Uygulamaları" adlı bu tez, jürimiz tarafından 30 / 06 / 2016 tarihinde oy birliği / ~~oy çokluğu~~ ile Matematik Anabilim Dalında Doktora tezi olarak kabul edilmiştir.

Danışman	:	Doç. Dr. Selahattin MADEN
II. Danışman	:	Prof. Dr. Hüseyin DEMİR, Ondokuz Mayıs Üniversitesi

Başkan	:	Doç. Dr. İmdat İŞCAN Matematik, Giresun Üniversitesi	İmza :
Üye	:	Doç. Dr. Selahattin MADEN Matematik, Ordu Üniversitesi	İmza :
Üye	:	Doç. Dr. Erhan SET Matematik, Ordu Üniversitesi	İmza :
Üye	:	Yrd. Doç. Dr. Erdal ÜNLÜYOL Matematik, Ordu Üniversitesi	İmza :
Üye	:	Yrd. Doç. Dr. Kerim BEKAR Matematik, Giresun Üniversitesi	İmza :

ONAY:

Bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulu'nun 14/07/2016 tarih ve 2016/335 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

27/07/2016

Enstitü Müdürü

Doç. Dr. Kürşat KORKMAZ

TEZ BİLDİRİMİ

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

İmza

Sercan TURHAN

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

GA-KONVEKS VE HARMONİK KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN YENİ İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ VE UYGULAMALARI

Sercan TURHAN

Ordu Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı, 2016
Doktora Tezi, 113.

Danışman: Doç. Dr. Selahattin MADEN

II.Danışman: Prof. Dr. Hüseyin DEMİR

Bu tezde diferansiyellenebilir konveks fonksiyonlar için yeni kesirli integral eşitsizlikleri verildi. Çalışmanın ilk bölümünde, konveks fonksiyonların tarihi gelişimi, kesirli integrallerin tarihi gelişimi ve literatür taraması verildi. İkinci bölümde, literatürdeki konveks fonksiyon çeşitleri, konveks fonksiyon sınıfları arasındaki hiyerarşi ve literatürde bulunan farklı ortalamalar verildi. Üçüncü bölümde, kesirli türev ve integrallerin tanımı verildikten sonra bu tezde kullanılan klasik eşitsizlikler ve daha sonrada tezin bulgular kısmına fikir veren lemmalar ve teoremler verildi. Dördüncü bölümde ise geometrik- aritmetik konveks fonksiyonlar, harmonik konveks fonksiyonlar ve quasi-geometrik konveks fonksiyonlarla ilgili yeni lemmalar, teoremler ve sonuçlar verildi. Elde edilen bu yeni sonuçlar için çeşitli ortalamalar ve hiper geometrik fonksiyon kullanılarak farklı uygulamalar verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Hermite-Hadamard-Fejér İntegral Eşitsizliği, Kesirli İntegral, Geometrik-Aritmetik Konveks Fonksiyonlar, Harmonik Konveks Fonksiyonlar, Quasi-Geometrik Konveks Konksiyonlar.

ABSTRACT

NEW INTEGRAL INEQUALITIES AND APPLICATIONS FOR GA-CONVEX AND HARMONICALLY CONVEX FUNCTIONS

Sercan TURHAN

University of Ordu
Institute of Science and Technology
Department of Mathematics, 2016
PhD. Thesis, 113.

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Selahattin MADEN

II. Supervisor: Prof. Dr. Hüseyin DEMİR

In this thesis, new fractional integral inequalities for differentiable convex functions are stated. In the first part, the historical developments of the convex functions and the fractional integrals and the literature review have been clarified. In the second part, types of convex functions in literature, the hierarchy of convex function classes, and different averages in the literature have been explained. In the third part, after the descriptions of fractional derivatives and integrals, the identities, theorems which provide insight into the findings of the thesis and classical inequalities used in this thesis have been described. In the fourth part, new identities, theorems and results about geometrically arithmetically convex functions, harmonically convex functions and quasi geometrically convex functions have been presented. For these new results obtained, different applications are provided by using different means and hyper geometric functions.

Key Words: Hermite-Hadamard-Fejér Type Inequality, Fractional Integrals, Geometrically Arithmetically Convex Functions Harmonically Convex Functions, Quasi Geometrically Convex Functions.

TEŞEKKÜR

Tüm çalışmalarım boyunca her zaman bilgi ve deneyimleriyle yolumu açan değerli hocalarım Sayın Doç. Dr. Selahattin MADEN ve Doç. Dr. İmdat İŞCAN' a en samimi duygularım ile teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca, çalışmalarım boyunca desteklerini esirgemeyen Ordu Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü öğretim üyelerine en içten şükranlarımı sunuyorum.

Çalışmam boyunca benden maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen anneme, babama, eşime ve ablama teşekkürlerimi sunuyorum.

İÇİNDEKİLER

ŞEKİLLER LİSTESİ

SİMGELER VE KISALTMALAR

$C(I)$	:	Konveks Fonksiyonlar Sınıfı
${}_R D^{\alpha}_{a^+}$	:	α-Mertebeden Riemann Liouville Kesirli Türev
${}_H D^{\alpha}_{a^+}$	:	α-Mertebeden Hadamard Kesirli Türev
f'	:	f Fonksiyonun Birinci Mertebeden Türevi
f''	:	f Fonksiyonun İkinci Mertebeden Türevi
f'''	:	f Fonksiyonun Üçüncü Mertebeden Türevi
Γ	:	Gamma Fonksiyonu
I	:	$\mathbb{R}$ 'de Herhangi Bir Aralık
I^o	:	I 'nın içi
$J(I)$	:	Jensen-Konveks Fonksiyonlar Sınıfı
$JQC(I)$	:	Jensen-Quasi-Konveks Fonksiyonlar Sınıfı
${}_R J^{\alpha}$	:	α-Mertebeden Riemann Liouville Kesirli İntegral
${}_H J^{\alpha}$	:	α- Mertebeden Hadamard Kesirli İntegral
$K_m(b)$	:	m-Konveks Fonksiyonlar Sınıfı
$K_m^{\alpha}(b)$	:	(α, m)-Konveks Fonksiyonlar Sınıfı
$K_n(b)$	:	n-Konveks Fonksiyonlar Sınıfı
K_s^2	:	İkinci Anlamda s-Konveks Fonksiyonlar Sınıfı
$L[a,b]$	:	[a,b] Aralığında İntegrallenebilir Fonksiyonlar Kümesi
$L_G(t)$	:	$a^t G^{1-t}$, $\forall t \in [0,1]$
$L_H(t)$	:	$\frac{aH}{tH+(1-t)a}$, $\forall t \in [0,1]$
$L(I)$	:	Log Konveks Fonksiyonlar Sınıfı
$Q(I)$	:	Godunova-Levin Fonksiyonlar sınıfı
$QC(I)$	:	Quasi-Konveks Fonksiyonlar Sınıfı

$P(I)$	:	P- Fonksiyonlar Sınıfı
$\mathbb{R}^+$	:	$(0,\infty)$ Aralığı
$\mathbb{R}_0^+$	:	$[0,\infty)$ Aralığı
$SX(h,l)$	:	h-Konveks Fonksiyonlar Sınıfı
$U_G(t)$	:	b^tG^{1-t}, $\forall t\in[0,1]$
$U_H(t)$	:	$\frac{bH}{tH+(1-t)b}$, $\forall t\in[0,1]$
$W(I)$	:	Wright-Konveks Fonksiyonlar Sınıfı
$WQC(I)$	:	Wright-Quasi-Konveks Fonksiyonlar Sınıfı
$\beta(x,y)$	:	x,y Pozitif Reel Sayılarının Beta Fonksiyonu

1. GİRİŞ

Konvekslik, M. Ö. 250 yılında Archimedes' in ünlü π değerini hesaplamasına kadar uzanan basit ve bilinen bir kavramdır. Archimedes bir konveks şeklin çevre uzunluğunun onu çevreleyen diğer bir şeklin çevre uzunluğundan daha küçük olduğunu önemle ifade etmiştir.

Gerçekte her zaman ve birçok yolla konvekslik kavramıyla karşılaşıyoruz ve deneyimliyoruz. Çok basit bir örnek olarak dik pozisyonda durduğumuzda ağırlık merkezimizin dik izdüşümü ayağımızın kapladığı konveks alanın içinde kalır. Böylece dengemizi sağlayabilmekteyiz. Bununla beraber günlük hayatımızda konveksiliğin büyük etkileri vardır, örneğin endüstri, iş, sağlık ve sanat alanlarında birçok uygulaması vardır. İşbirliğinin olmadığı oyunların parasal kaynakları ve adaleti en uygun şekilde paylaşımını yapma problemidir.

Konveks fonksiyon teorisi konveksliğin genel konularının bir parçasıdır, çünkü konveks bir fonksiyonun görüntü kümesi konveks bir kümedir. Konveks fonksiyonlar teorisi matemati-ğin tüm alanlarına dokunan önemli bir teoridir. Konvekslik konusunu gerektiren matemati-ğin ilk konularından birisi çizgisel analizdir. İkinci türev testi konveksliğin bulunmasında bize sonucu veren güçlü bir araçtır. Mucizevi şekilde Hessian test birkaç değişken durumu için doğal genişlemeye sahiptir. Optimizasyon ve kontrol teorisinde bazı karışık problemlerden hareketle konveks fonksiyon teorisi, sonsuz boyutlu Banach uzaylarının çalışma alanlarına genişletilmektedir.

Konveksliğin temelini oluşturan tanım, eşiitsizlikle ifade edildiğinden konveks fonksiyonlarda eşitsizliğin çok önemli bir yeri vardır. Klasik eşitsizlikle ve konvekslikle ilişkili olan Gauss, Cauchy, Schwartz, Buniakowsky, Hölder, Minkowski, Čhebyšhev, Lyapunov, Gram, Bessel, Hadamard, Landau, Bernstein, Hilbert, Hardy, Littlewood, Pólya, Markoff, Kolmogorov, Stieltjes, Beckenbach, Bellman, Mitrinović, Pachpatte, Pecaric ve Fink gibi önemli isimler bu alanda çok sayıda kitap yazmışlardır. 1934 yılında Hardy, Littlewood ve Pólya tarafından çıkarılan "Inequalities" isimli yazdıkları kitap bu alanda ilk çalışma olup temel kaynak olarak önemli bir yere sahiptir [21]. Bu kitap eşitsizlik konusunu ifade eden, farklı alanlar için kullanışlı bir rehber olarak kullanılan ilk kitaptır. Genel eşitsizlikler üzerine görülen diğer bir kitap ise E. F. Beckenbach ve R. Bellman tarafından 1961' de yazılan "Inequalities" isimli kitap, 1934 yılından 1961 yılına kadar eşitsizlikle ilgili yapılan mükemmel araştırmaları içeren bir kitaptır. 1970 yılında Mitrinović ise "Analytic Inequalities" isimli kitapla [47] birlikte bu konuyla ilgili literatürde mihenk taşı oluşturacak üçüncü kitap olmuştur. Konveks fonksiyonlar ve ilgili eşitsizlikleri için literatürde varolan diğer kitaplar ve doktora tezlerinden bazıları şunlardır: Bakınız [2, 4, 8, 14, 15, 38, 46, 48, 49, 62, 65, 67, 68]

Konveks fonksiyonların uzun bir tarihi vardır. 19. yüzyılın sonunda ortaya çıkmaya başlamıştır ve O. Hölder (1889), O. Stolz (1893) ve J. Hadamard' ın (1893) katkılarıyla temelleri atılmıştır. Konveks Fonksiyonlar Teorisi ile ilgili olan Eşitsizlikler Teorisi ise C. F. Gauss, A. L. Cauchy ve P. L. Čhebyšhev ile gelişmeye başlamıştır. 19.-20. yy' da bulunan eşitsizliklerin bir kısmı konveks fonksiyonlarla ilişkilendirilerek temel eşitsizlikler olmuşlardır. Bunların en önemlileri 1881 yılında Hermite tarafından elde edilen Hermite-Hadamard eşitsizliği ve 1938 yılında Ostrowski tarafından elde edilen Ostrowski eşitsizliğidir. Hermite-Hadamard eşitsizliği ile ilgili çalışmaların önemli bir kısmını S. S. Dragomir ve C. E. M. Pearce tarafından 2000 yılında yazılmış olan "Selected Topics on Hermite-Hadamard Inequalities and Applications" isimli kitapta; Ostrowski eşitsizliği ile ilgili çalışmaların büyük bir kısmı da S. S. Dragomir ve Themistocles M. Rassias tarafından 2002 yılında yazılmış olan "Ostrowski Type Inequalities and Applications in Numerical Integration" isimli kitapta bir araya getirilmiştir. Konveks fonksiyonlar için eşitsizlikler üzerine çalışan diğer matematikçiler; R. Agarval, G. Anastassiou, G. V. Milovanovic, A. M. Fink, Roberts and Varberg, N.S. Barnett, M. E. Özdemir, U. S. Kırmacı, H. Yıldırım, M. Z. Sarıkaya, N. Ujević, S. Varosanec, P. S. Bullen, P. Cerone, E. Set ve İ. İşcan şeklinde sıralayabiliriz.

Richard Bellman II. Uluslararası Genel Eşitsizlik Konferansı devam ederken yaptığı bir konuşmasında eşitsizlik çalışmanın pratik, teorik ve estetik olmak üzere üç nedeni olduğundan bahsetmiştir. Bunlar içerisinde estetik neden için bakan bir kimsenin yada bir seyircinin veya bir okuyucunun gözündeki güzellik olarak ifade etmiştir. Eşitsizliğin onları cezbeden bir zarifliği olduğunu söylemiştir.

Kesirli (tamsayı olmayan) diferansiyel teorisi, 30 Eylül 1695 yılında yazılan Leibniz' in notlarında yarım mertebeden türevin ifadesinin tartışılmasıyla başlıyor. Leibniz' in notu ile rasgele mertebeden türev ve integral teorisi görünmeye başladı ve 19. yüzyılın sonlarında Liouville bu yapıyı tamamladı. Bundan sonra Grünwald, Letnikov ve Riemann kesirli türev teorisi üzerine çalışmalarda bulundu. Bunun üzerine S. G. Samko ile A. A. Kilbas ve O. I. Marichev bu alanda büyük bir boşluğu kapatarak kesirli türev ve integral kavramları hakkında ansiklopedik bir monografi yayınladı.

Geçen birkaç 10 yıllık süreçte birçok yazar değişik reel materyaller, polimerler... gibi özelliklerini tanımlamak için kesirli türev ve integrallerin çok uygun olduğunu ifade etmektedirler. Bu ise tamsayı mertebeli türevlerle karşılaştırıldığı zaman, kesirli türevlerin gerçek hayata daha uygun olduğunu göstermektedir. Kesirli türevlerin bu avantajı nesnelerin mekanik ve elektriksel özelliklerinin akışkanlar teorisindeki elektrik devreleri, mate-matiksel modellemelerinde, elektro-analitik kimya gibi diğer birçok alanda kullanılmasını sağlamaktadır.

Bu çalışmada, farklı türden konveks fonksiyonlar detaylı olarak incelenmiştir. Bu amaçla çalışmanın ikinci bölümünde matematikte yer alan bazı temel tanım ve teoremler, bazı konveks fonksiyon sınıfları arasındaki hiyerarşi verilmiştir. Üçüncü bölümde ise geometrik-aritmetik ve harmonik-aritmetik konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard tipli integral eşitsizlikleri, ağırlıklı integral eşitsizlikleri ve kesirli integral eşitsizlikleri için temel lemmalar ve teoremler verilmiştir.

Bu çalışmanın dördüncü bölümünde ise tezin asıl konusu olan geometrik-aritmetik (GA), harmonik-aritmetik (HA) ve *quasi*-geometrik-aritmetik konveks fonksiyonlar için ağırlıklı Hermite-Hadamard tipli kesirli integral eşitsizlikleri ile ilgili yeni bir lemma ve bu lemmayı kullanarak yeni teoremler ve sonuçlar verilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1 Konveks Fonksiyonlarla İlgili Temel Tanım ve Özellikler

Bu bölümde bu çalışmada kullanılacak bazı temel tanım ve teorem verilecektir.

Tanım 2.1.1 (Konveks Küme): L bir lineer uzay ve $A \subseteq L$ olmak üzere $\forall x, y \in A$ için

$$B = \{z \in L : z = \alpha x + (1-\alpha)y, \qquad 0 \leq \alpha \leq 1\} \subseteq A$$

ise A kümesine konveks küme denir. Eğer $z \in B$ ise $z = \alpha x + (1-\alpha)y$ eşitliğindeki x ve y nin katsayıları için $\alpha + (1-\alpha) = 1$ bağıntısı her zaman doğrudur. Bu sebeple konveks küme tanımındaki $\alpha, 1-\alpha$ yerine $\alpha + \beta = 1$ şartını sağlayan ve negatif olmayan α, β reel sayıları alınabilir. Geometrik olarak B kümesi uç noktaları x ve y olan bir doğru parçasıdır. Bu durumda sezgisel olarak konveks küme, boş olmayan ve herhangi iki noktasını birleştiren doğru parçasını ihtiva eden kümesidir [5].

Tanım 2.1.2 (J-Konveks Fonksiyon): I, $\mathbb{R}$' de bir aralık olmak üzere her $x, y \in I$ için

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

şartını sağlayan bir f fonksiyonuna I üzerinde Jensen anlamında konveks veya J-konveks fonksiyon denir [47].

Tanım 2.1.3 (Kesin J-Konveks Fonksiyon): Her $x, y \in I$ ve $x \neq y$ için,

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) < \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

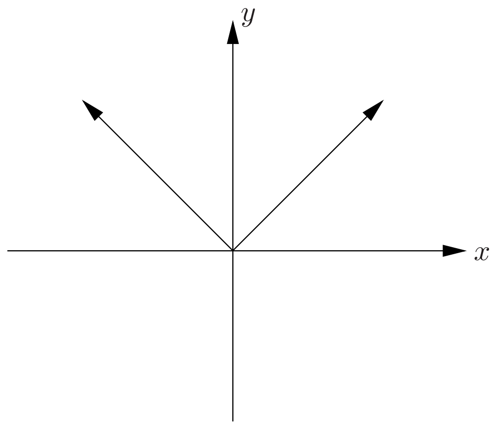
eşitsizliği sağlanıyorsa, f fonksiyonuna I üzerinde kesin J-konveks fonksiyon denir [47].

Tanım 2.1.4 (Konveks Fonksiyon): I, $\mathbb{R}$' de bir aralık ve $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere her $x, y \in I$ ve $\alpha \in [0,1]$ için,

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y)$$

şartı sağlanıyorsa f fonksiyonuna konveks fonksiyon denir (Bakınız Şekil 2.1).

Örneğin, $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ fonksiyonu I üzerinde bir konveks fonksiyondur.



Şekil 2.1: Bir aralıkta konveks fonksiyon ($f(x) = |x|$)

Sonuç 2.1.1 Her konveks fonksiyon aynı zamanda bir J-konveks fonksiyondur.

Sonuç 2.1.2 $I \subset \mathbb{R}$ olmak üzere, bir f fonksiyonunun I' da konveks olması için gerek ve yeter şart, her $x, y \in I$ için $p + q > 0$ olan $\forall p, q \geq 0$ için

$$f\left(\frac{px + qy}{p + q}\right) \leq \frac{pf(x) + qf(y)}{p + q}$$

olmasıdır [56].

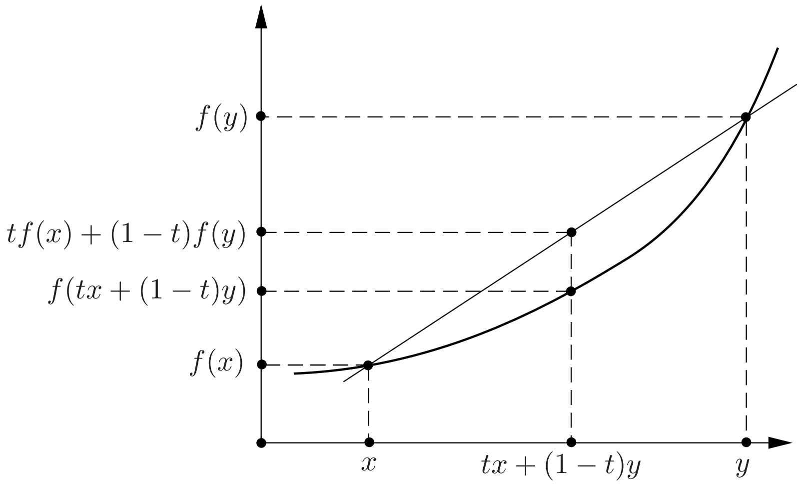
I üzerinde tanımlı bir f fonksiyonunun kesin konveksliğinin geometrik anlamı $(x, f(x))$ ve $(y, f(y))$ noktalarını içeren I üzerindeki doğru parçasının f' nin grafiğinin üst kısmında yer almasıdır. Bunu Şekil 2.2 de görmekteyiz.

Eğer f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında tanımlı, $[a, b]$ aralığında konveks (konkav) ve x_0 noktasında diferensiyellenebilen bir fonksiyon ise $x \in (a, b)$ için,

$$f(x) - f(x_0) \leq (\geq) f'(x_0)(x - x_0)$$

eşitsizliği yazılır [59].

Tanım 2.1.5 (Eşlenik Konveks Fonksiyonlar): $g : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu artan ve sürekli bir fonksiyon olsun ayrıca $g(0) = 0$ ve $x \longrightarrow \infty$ iken $g \longrightarrow \infty$



Şekil 2.2: Konveks fonksiyon şekli

şartlarını sağlasın. Bu durumda g^{-1} vardır ve g ile aynı şartları sağlar. Eğer f ve f^* fonksiyonları

$$f(x) = \int_0^x g(t)dt \quad ve \quad f^*(y) = \int_0^y g^{-1}(s)ds$$

şeklinde tanımlanırsa bu iki fonksiyon da konveks olup f ve f^* fonksiyonlarına birbirinin konveks eşleniği denir [59]. Aşağıdaki teorem konveks eşlenik çiftlerle ilgili önemli bir sonuçtur.

Teorem 2.1.1 (Young Eşitsizliği): f, $[0, c]$, $(c > 0)$, aralığı üzerinde reel değerli, artan ve sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer $f(0) = 0$, $a \in [0, c]$ ve $b \in [0, f(c)]$ ise,

$$\int_0^a f(x)dx + \int_0^b f^{-1}(x)dx \geq ab$$

eşitsizliği sağlanır [69].

Tanım 2.1.6 (Süreklilik): $f : S \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in S$ ve $\epsilon > 0$ verilmiş olsun. Eğer

$$|x - x_0| < \delta \quad olan \quad \forall x \in S \quad için \quad |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa f, x_0 da süreklidir denir [6].

Tanım 2.1.7 (Lipschitz Şartı): $f : S \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu için

$$|f(x) - f(y)| \leq M\,|x - y|$$

olacak şekilde bir $M > 0$ sayısı varsa f, S de Lipschitz şartını sağlıyor denir [6].

Sonuç 2.1.3 f, S de Lipschitz şartını sağlıyorsa f, S de düzgün süreklidir [6].

Tanım 2.1.8 (Düzgün Süreklilik): $f : S \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in S$ ve $\epsilon > 0$ verilmiş olsun.

$$x \in S \text{ ve } |x_1 - x_2| < \delta \text{ şartını sağlayan } \forall x_1, x_2 \in S \text{ için } |f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa f, S' de düzgün süreklidir denir [6].

Tanım 2.1.9 (Mutlak Süreklilik): I, $\mathbb{R}$ nin boştan farklı bir alt kümesi ve $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. I nın $\{(a_i, b_i)\}_{i=1}^{n}$ ayrık açık alt aralıklarının bir birleşimini göz önüne alalım. Eğer $\forall\epsilon > 0$ için $\sum_{i=1}^{n} |b_i - a_i| < \delta$ olduğunda $\sum_{i=1}^{n} |f(b_i) - f(a_i)| < \epsilon$ olacak şekilde bir $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ sayısı varsa, f fonksiyonu I kümesinde mutlak süreklidir denir [9].

Konvekslik, Lipschitz şartı, süreklilik ve mutlak süreklilik arasındaki ilişki aşağdaki teorem ile verilmektedir.

Teorem 2.1.2 L lineer uzay, $U \in L$ bir açık küme ve $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyon olsun.

a. f, U açık kümesinde konveks olsun. Eğer f, U' da bir noktanın komşuluğunda üstten sınırlı bir fonksiyon ise f, U' da yerel Lipschitz' dir ve bu nedenle U' nun kompakt alt kümesinde Lipschitz şartını sağlar ve U' da süreklidir.

b. f, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ açık kümesi üzerinde konveks ise f, U' nun her kompakt altkümesinde Lipschitz şartını sağlar ve U' da süreklidir [56].

Teorem 2.1.3 f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında konveks ise, bu taktirde

a. f, (a, b) aralığında süreklidir,

b. f, $[a,b]$ aralığında sınırlıdır [3].

Tanım 2.1.10 (Artan ve Azalan Fonksiyonlar): f, I aralığında tanımlı bir fonksiyon olsun. $x_1 < x_2$ olan $\forall x_1, x_2 \in I$ için

i. $f(x_2) > f(x_1)$ ise f fonksiyonu I üzerinde artandır,

ii. $f(x_2) < f(x_1)$ ise f fonksiyonu I üzerinde azalandır,

iii. $f(x_2) \geq f(x_1)$ ise f fonksiyonu I üzerinde azalmayandır,

iv. $f(x_2) \leq f(x_1)$ ise f fonksiyonu I üzerinde artmayandır,

denir [1].

Teorem 2.1.4 I, $\mathbb{R}$' de bir aralık, f, I üzerinde sürekli ve I^o üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda,

i. $\forall x \in I^o$ için $f'(x) > 0$ ise f fonksiyonu I üzerinde artandır.

ii. $\forall x \in I^o$ için $f'(x) < 0$ ise f fonksiyonu I üzerinde azalandır.

iii. $\forall x \in I^o$ için $f'(x) \geq 0$ ise f fonksiyonu I üzerinde azalmayandır.

iv. $\forall x \in I^o$ için $f'(x) \leq 0$ ise f fonksiyonu I üzerinde artmayandır [1].

Sonuç 2.1.4 f ve g konveks fonksiyonlar ve g aynı zamanda artan ise $g \circ f$ fonksiyonu da konvekstir [59].

Teorem 2.1.5 Eğer $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ tanımlı konveks (kesin konveks) bir fonksiyon ise $f'_+(x)$ ve $f'_-(x)$ var ve bu fonksiyonlar I^o' de artandır (kesin artandır) [56].

Teorem 2.1.6 f fonksiyonu (a,b) aralığında diferensiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda f fonksiyonunun konveks (kesin konveks) olması için gerek ve yeter şart f'' nin artan (kesin artan) olmasıdır [56].

Teorem 2.1.7 f fonksiyonunun I açık aralığında ikinci türevi mevcutsa, f fonksiyonunun bu aralık üzerinde konveks olması için gerek ve yeter şart $\forall x \in I$ için,

$$f''(x) \geq 0$$

olmasıdır [47].

Tanım 2.1.11 (p Normu): X, $\mathbb{R}^n$' de bir küme, μ, X' in alt kümelerinin σ-cebiri üzerinde bir ölçü ve f, X üzerinde tanımlanmış ölçülebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$\|f\|_p = \begin{cases} \{|f|^p \, d\mu\}^{1/p} & ,1 \leq p < \infty \\ sup\,|f| & ,p = \infty \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan ifadeye p-normu denir.

Tanım 2.1.12 (Gamma Fonksiyonu): $n > 0$ için,

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx$$

ile tanımlanan fonksiyon gamma fonksiyonu olarak tanımlanır. Bu integral $n > 0$ için yakınsaktır. Gamma fonksiyonunun bazı önemli özelliklerini aşağıdaki şekilde sıralayabiliriz:

i. $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n!$,

ii $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$,

iii. $\int_0^\infty \frac{x^p}{1+x} dx = \Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{sin(p\pi)}, \quad 0 < p < 1$,

iv. $2^{2n-1}\Gamma(n)\Gamma(n+\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}\Gamma(2n)$.

Tanım 2.1.13 (Beta Fonksiyonu): $Re(x)$, $Re(y) > 0$ için

$$\beta(x,y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} \, dt$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon beta fonksiyonu olarak tanımlanır. Bu integral $x > 0$ ve $y > 0$ için yakınsaktır [14].

Beta fonksiyonunun aşağıdaki özellikleri sağladığı kolayca görülebilir:

i. $\beta(x+1,y) = \frac{x}{x+y}\beta(x,y), \quad x,y \in (0,\infty)$

ii. $\beta(1,y) = \frac{1}{y}$

iii. $\beta(x,y) = \int\limits_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt = \int\limits_0^\infty \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}}, \quad x,y > 0$

iv. $\beta(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}, \quad x,y > 0$

v. $\beta(x,y) = \beta(y,x)$

özellikleri vardır [37].

Tanım 2.1.14 (Hipergeometrik Fonksiyon): $c > b > 0$, $|z| < 1$ için,

$$ {}_2F_1(a,b;c;z) = \frac{1}{\beta(b,c-b)} \int\limits_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-zt)^{-a}\,dt $$

şeklinde tanımlanan fonksiyona Hipergeometrik fonksiyon denir [40].

2.2 Farklı Türden Bazı Konveks Fonksiyon Sınıfları ve Temel Tanımlar

Tanım 2.2.1 (Quasi-Konveks Fonksiyon): $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $S \subset \mathbb{R}$ boştan farklı konveks küme olsun. $\forall x,y \in S$ ve $\lambda \in [0,1]$ için,

$$ f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq max\{f(x), f(y)\} $$

ise f' ye quasi-konveks fonksiyon denir [12].

Eğer ,

$$ f(\lambda x + (1-\lambda)y) < max\{f(x), f(y)\} $$

ise f' ye kesin quasi-konveks fonksiyon denir. Aynı şartlar altında, eğer

$$ f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq max\{f(x), f(y)\} $$

ise f' ye quasi-konkav fonksiyon ve eğer

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) > max\{f(x), f(y)\}$$

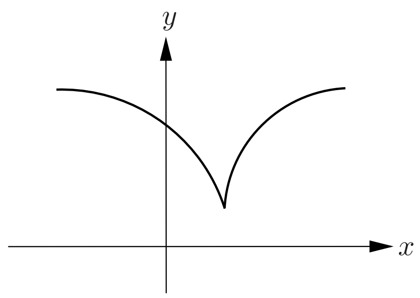
ise f' ye kesin quasi-konkav fonksiyon denir [12].

Tanım 2.2.2 f hem quasi-konveks hem de quasi-konkav ise f' ye quasi-monotonik fonksiyon denir [19].

Sonuç 2.2.1 Herhangi bir konveks fonksiyon aynı zamanda bir quasi-konveks fonksiyondur. Fakat tersi her zaman doğru değildir. Yani quasi-konveks olup konveks olmayan fonksiyonlar da vardır. Örneğin,

$$g(t) = \begin{cases} t & , t \in [-2,-1] \\ t^2 & , t \in [-1,2] \end{cases}$$

ile tanımlanan $g : [-2,2] \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $[-2,2]$ aralığında konveks değildir. fakat g fonksiyonu $[-2,2]$ aralığında quasi-konveks fonksiyondur [25].



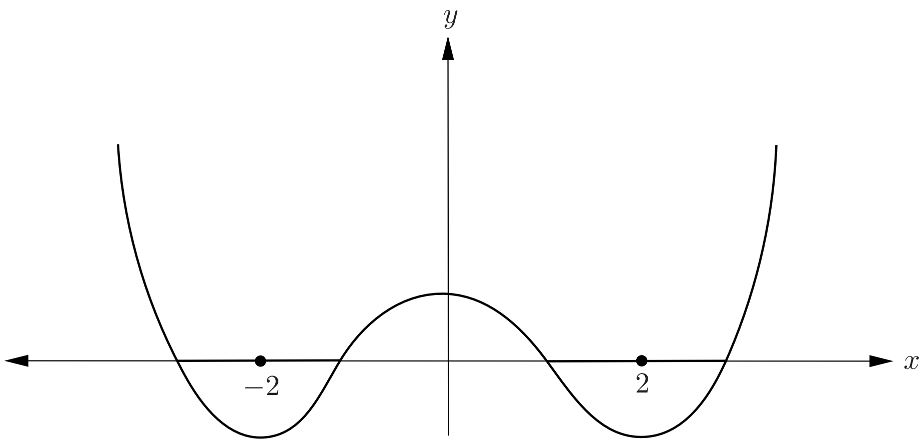
Şekil 2.3: Quasi konveks olup konveks olmayan fonksiyon

Aşağıdaki grafikte, kalın çizgi ile gösterilen aralıklarda fonksiyon quasi-konvekstir. Ama eğrinin tamamı düşünülürse bu fonksiyon quasi-konveks değildir [15].

Tanım 2.2.3 (Wright-Konveks Fonksiyon): $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $y > x, \delta > 0$ şartları altında her bir $y+\delta$, $x \in I$ için

$$f(x+\delta) - f(x) \leq f(y+\delta) - f(y)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f ye $I \subseteq \mathbb{R}$ de Wright-konveks fonksiyon denir [12].



Şekil 2.4: Aralıkta Quasi konveks fonksiyon $f(x) = x^4 - 10x^2 + 9$

Tanım 2.2.4 (Wright-Quasi-Konveks Fonksiyon): $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. $y > x$, $\delta > 0$ şartları altında $\forall x, y, y+\delta \in I$ ve $\forall t \in [0,1]$ için

$$\frac{1}{2}\left[f\left(tx+(1-t)y\right)+f\left((1-t)x+ty\right)\right] \leq max\{f(x), f(y)\}$$

veya

$$\frac{1}{2}\left[f(y)+f(x+\delta)\right] \leq max\{f(x), f(y+\delta)\}$$

eşitsizliklerinden biri sağlanıyorsa f ye $I \subseteq \mathbb{R}$ de Wright-quasi-konveks fonksiyon denir [12].

Tanım 2.2.5 (J-Quasi-Konveks Fonksiyon): $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu her $x, y \in I$ için

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq max\{f(x), f(y)\}$$

şartını sağlıyorsa f fonksiyonuna J-quasi-konveks fonksiyon denir [14].

Tanım 2.2.6 (Log-Konveks Fonksiyon): I, $\mathbb{R}$ de bir aralık $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Her $x, y \in I$ ve $\alpha \in [0,1]$ için

$$f\left(\alpha x+(1-\alpha)\,y\right) \leq f^{\alpha}(x)f^{1-\alpha}(y)$$

şartını sağlayan f fonksiyonuna Log-konveks fonksiyon denir [56].

Tanım 2.2.7 (Godunova-Levin Fonksiyonu): $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ negatif olmayan fonksi-yonu $\forall x, y \in I$, $\lambda \in (0,1)$ için

$$f\left(\lambda x+(1-\lambda)\,y\right) \leq \frac{f(x)}{\lambda}+\frac{f(y)}{1-\lambda}$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f ye Godunova-Levin fonksiyonu veya $Q(I)$ sınıfına aittir denir.

Bu tanıma denk olarak; eğer $f \in Q(I)$ ve $x, y, z \in I$ ise bu takdirde

$$f(x)(x-y)(x-z) + f(y)(y-x)(y-z) + f(z)(z-x)(z-y) \geq 0$$

eşitsizliği sağlanır [18].

Tanım 2.2.8 (P- fonksiyonu): $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ negatif olmayan bir fonksiyon olmak üzere eğer $\forall x, y \in I$, $\lambda \in (0,1)$ için

$$f(\lambda x + (1-\lambda) y) \leq f(x) + f(y)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonuna bir P-fonksiyonu veya $P(I)$ sınıfına aittir denir [11].

Tanım 2.2.9 (Birinci Anlamda s-Konveks Fonksiyon): $f : \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ ve $0 < s \leq 1$ olsun. $\alpha^s + \beta^s = 1$ olmak üzere her $u, v \in \mathbb{R}_0^+$ ve her $\alpha, \beta \geq 0$ için

$$f(\alpha u + \beta v) \leq \alpha^s f(u) + \beta^s f(v)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonuna birinci anlamda s-konveks fonksiyon denir [53].

Tanım 2.2.10 (İkinci Anlamda s-Konveks Fonksiyon): $f : \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ ve $0 < s \leq 1$ olsun. $\alpha + \beta = 1$ olmak üzere her $u, v \in \mathbb{R}_0^+$ ve her $\alpha, \beta \geq 0$ için

$$f(\alpha u + \beta v) \leq \alpha^s f(u) + \beta^s f(v)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonuna ikinci anlamda s-konveks fonksiyon denir [7, 22].

Tanım 2.2.9 ve Tanım 2.2.10 da $s = 1$ alındığında konveks fonksiyon tanımı elde edilir.

Tanım 2.2.11 **(h-Konveks Fonksiyon):** $h \not\equiv 0$ ve $h : J \longrightarrow \mathbb{R}$ negatif olmayan bir fonksiyon olsun. Her $x, y \in I$, $\alpha \in (0,1)$ için,

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq h(\alpha)f(x) + h(1-\alpha)f(y)$$

şartını sağlayan negatif olmayan $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna bir h-konveks fonksiyon denir. Burada I ve J, $\mathbb{R}$ de iki aralık, $(0,1) \subseteq J$ dir [66].

Eğer

i. $h(\alpha) = \alpha$ seçilirse h-konveks fonksiyonu negatif olmayan konveks fonksiyona dönüşür.

ii. $s \in (0,1)$ için $h(\alpha) = \alpha^s$ seçilirse h- konveks fonksiyonu s-konveks fonksiyona dönüşür.

Tanım 2.2.12 **(m-Konveks Fonksiyon):** $f : [0,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ ve $b > 0$ olsun. Her $x, y \in [0,b]$, $m, t \in [0,1]$ için

$$f(tx + m(1-t)y) \leq tf(x) + m(1-t)f(y)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonuna bir m-konveks fonksiyon denir. $f(0) \leq 0$ şartını sağlayan $[0,b]$ aralığında tanımlı olan bütün m-konveks fonksiyonların sınıfı $K_m(b)$ ile gösterilir [64].

Eğer $m = 1$ seçilirse $[0,b]$ aralığında m-konveks fonksiyon bilinen konveks fonksiyona dönüşür.

Tanım 2.2.13 **((α, m)-Konveks Fonksiyon):** $f : [0,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $b > 0$ olsun. Her $x, y \in [0,b]$, $t \in [0,1]$ ve $(\alpha, m) \in [0,1]^2$ için

$$f(tx + m(1-t)y) \leq t^\alpha f(x) + m(1-t^\alpha)f(y)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f-fonksiyonuna (α, m)-konveks fonksiyon denir [46]. Burada α ve m' den en az biri 0' dan farklı olmalıdır.

$(\alpha, m) \in \{(0,0), (1,m), (1,1)\}$ için sırasıyla artan, m-konveks ve konveks fonksiyon sınıfları-nın elde edildiği kolayca görülebilir.

Tanım 2.2.14 ((h,m)-Konveks Fonksiyon): $h : J \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ negatif olmayan bir fonksiyon olsun. $\forall x, y \in [0,b]$, $m \in [0,1]$ ve $\alpha \in [0,1]$ için $f : [0,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ negatif olmayan f fonksiyonu

$$f\left(\alpha x + m\left(1-\alpha\right)y\right) \leq h(\alpha)f(x) + mh(1-\alpha)f(y)$$

şartını sağlıyorsa f fonksiyonuna (h,m)-konveks fonksiyon denir [55].

Tanım 2.2.15 (Geometrik Konveks Fonksiyon): $f : I \subset \mathbb{R}^{+} \longrightarrow \mathbb{R}^{+}$ fonksiyonu verilsin. Eğer f fonksiyonu, her $x, y \in I$ ve $t \in [0,1]$ için

$$f\left(x^{t}y^{1-t}\right) \leq [f(x)]^{t}\,[f(y)]^{1-t}$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f fonksiyonuna geometrik konveks fonksiyon denir [72].

Tanım 2.2.16 (s-Geometrik Konveks Fonksiyon): $f : I \subset \mathbb{R}^{+} \longrightarrow \mathbb{R}^{+}$ fonksiyonu verilsin. Eğer f fonksiyonu, her $x, y \in I$, $s \in (0,1]$ ve $t \in [0,1]$ için,

$$f\left(x^{t}y^{1-t}\right) \leq [f(x)]^{t^{s}}\,[f(y)]^{(1-t)^{s}}$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f fonksiyonuna s-geometrik konveks fonksiyon denir [72].

$s = 1$ için, s-geometrik konveks fonksiyon tanımı geometrik konveks fonksiyon tanımına indirgenir.

Tanım 2.2.17 (Quasi Geometrik Konveks Fonksiyonu): $f : I \subseteq \mathbb{R}^{+} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksi-yonu verilsin. Eğer f fonksiyonu, $\forall x, y \in I$ ve $t \in [0,1]$ için

$$f\left(x^{t}y^{1-t}\right) \leq \sup\{f(x), f(y)\}$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f fonksiyonuna quasi geometrik konveks fonksiyon denir [26].

Tanım 2.2.18 (Geometrik-Aritmetik (GA) Konveks Fonksiyon): $f : I \subseteq \mathbb{R}^{+} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. Eğer f fonksiyonu $\forall x, y \in I$, $\lambda \in [0,1]$ için

$$f\left(x^{\lambda}y^{1-\lambda}\right) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f fonksiyonuna GA-konveks fonksiyon denir. Burada $x^{\lambda}y^{1-\lambda}$ ifadesi x ve y pozitif sayılarının ağırlıklı geometrik ortalaması ve $\lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$ ifadesi ise $f(x)$ ve $f(y)$ nin ağırlıklı aritmetik ortalamasıdır [51].

Tanım 2.2.19 (Birinci anlamda Geometrik-Aritmetik-s (GA-s) Konveks Fonksiyon): $f : I \subseteq \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. Eğer f fonksiyonu, $\forall x, y \in I$, $s \in (0, 1]$ ve $\lambda \in [0, 1]$ için,

$$f\left(x^{\lambda} y^{1-\lambda}\right) \leq (\geq) \lambda^s f(x) + (1 - \lambda^s) f(y)$$

eşitsizliğini sağlyorsa f fonksiyonuna birinci anlamda $GA - s$-konveks (konkav) fonksiyon denir [28].

Tanım 2.2.20 (İkinci anlamda Geometrik-Aritmetik-s (GA-s) Konveks Fonksiyon): $f : I \subseteq \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. Eğer f fonksiyonu $\forall x, y \in I$, $s \in (0, 1]$ ve $\lambda \in [0, 1]$ için

$$f\left(x^{\lambda} y^{1-\lambda}\right) \leq (\geq) \lambda^s f(x) + (1 - \lambda)^s f(y)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f fonksiyonuna ikinci anlamda $GA - s$-konveks (konkav) fonksiyon denir [28].

Özel olarak Tanım 2.2.19 ve Tanım 2.2.20' da $s = 1$ alındığında Tanım 2.2.18' deki GA- konveks fonksiyon tanımı elde edilir.

Tanım 2.2.21 (Geometrik Simetrik Fonksiyon): $g : [a, b] \subseteq \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $\forall x \in [a, b]$ için

$$g\left(\frac{ab}{x}\right) = g(x)$$

eşitliğini sağlıyorsa, g fonksiyonuna $\sqrt{ab}$' ye göre geometrik simetrik fonksiyon denir [43].

Tanım 2.2.22 (Harmonik Konveks Fonksiyon): $I \subset \mathbb{R} \backslash \{0\}$ bir aralık olsun. Eğer $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $\forall x, y \in I$ ve $t \in [0, 1]$ için,

$$f\left(\frac{xy}{tx + (1 - t)y}\right) \leq tf(y) + (1 - t)f(x)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f fonksiyonuna harmonik konveks fonksiyondur denir [29].

Tanım 2.2.23 (Harmonik Simetrik): $g : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $\forall x \in [a, b]$ için

$$g(x) = g\left(\frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{x}}\right)$$

eşitliği sağlanıyorsa g fonksiyonuna $\frac{2ab}{a+b}$' ye göre harmonik simetrik fonksiyon denir [44].

Önerme 2.2.1 $I \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$ bir reel aralık olsun. $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu için,

- Eğer f fonksiyonu, $I \subset \mathbb{R}^+$ aralığında konveks ve azalmayan bir fonksiyon ise f fonksiyonuna harmonik konveks fonksiyon denir.
- Eğer f fonksiyonu, $I \subset \mathbb{R}^+$ aralığında harmonik konveks ve artmayan bir fonksiyon ise f fonksiyonuna konveks fonksiyon denir.
- Eğer f fonksiyonu, $I \subset (-\infty, 0)$ aralığında harmonik konveks ve azalmayan bir fonksiyon ise f fonksiyonuna konveks fonksiyon denir.
- Eğer f fonksiyonu, $I \subset (-\infty, 0)$ aralığında konveks ve artmayan bir fonksiyon ise f fonksiyonuna harmonik konveks fonksiyon denir [29].

Tanım 2.2.24 (Harmonik s-Konveks Fonksiyon): $I \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$ bir reel aralık olsun. Eğer $f : I \subseteq \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu, $\forall x, y \in I$, $s \in (0, 1]$ ve $t \in [0, 1]$ için

$$f\left(\frac{xy}{tx + (1-t)y}\right) \leq t^s f(y) + (1-t)^s f(x)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f fonksiyonuna bir harmonik-s-konveks fonksiyon denir [33].

Özel olarak, Tanım 2.2.22' de $s = 1$ alınırsa Tanım 2.2.21 tanımındaki harmonik konveks fonksiyon tanımına indirgenir.

Önerme 2.2.2 $I \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$ bir reel aralık olsun. $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu için,

- Eğer f fonksiyonu s-konveks ve azalmayan bir fonksiyon ise f fonksiyonu harmonik-s konveks fonksiyondur.
- Eğer f fonksiyonu harmonik s-konveks ve artmayan bir fonksiyon ise f fonksiyonu s-konveks fonksiyondur [33].

Örnek 2.2.1 $s \in (0,1]$ ve $f : (0,1] \longrightarrow (0,1]$, $f(x) = x^s$ olarak tanımlansın. f fonksiyonu s-konveks ve azalmayan fonksiyon ise f harmonik s-konveks fonksiyon olur [33].

Tanım 2.2.25 (Bazı Özel Ortalamalar): Bu başlık altında a, b gibi iki pozitif reel sayı için bazı ortalamalar verilecektir [4, 8].

1. Aritmetik ortalama:
$$A = A(a,b) := \frac{a+b}{2},$$
2. Geometrik ortalama:
$$G = G(a,b) := \sqrt{ab},$$
3. Harmonik ortalama:
$$H = H(a,b) := \frac{2ab}{a+b},$$
4. Logaritmik ortalama:
$$L = L(a,b) := \begin{cases} a & , a = b \\ \frac{b-a}{lnb-lna} & , a \neq b \end{cases}$$
5. Identrik ortalama:
$$I = I(a,b) := \begin{cases} a & , a = b \\ \frac{1}{e}\left(\frac{b^b}{a^a}\right)^{\frac{1}{b-a}} & , a \neq b \end{cases}$$
6. p-logaritmik ortalama:
$$L_p = L_p(a,b) := \begin{cases} a & , a = b \\ \left[\frac{b^{p+1}-a^{p+1}}{(p+1)(b-a)}\right]^{\frac{1}{p}} & , a \neq b \end{cases}$$
7. Seiffert ortalama:
$$S = S(a,b) := \frac{a-b}{2arcsin\frac{a-b}{a+b}}$$
8. Bencze ortalama:
$$B = B(a,b) := \frac{a-b}{2arctg\frac{a-b}{a+b}}$$

ortalamaları vardır.

Ayrıca, $p \in \mathbb{R}$ olmak üzere L_p nin monoton artan olduğu bilinir ve $L_0 = I$, $L_{-1} = L$ ile gösterilir. Bu ortalamalar arasındaki ilişki literatürde, aşağıdaki gibi yer almaktadır:

$$H \leq G \leq L \leq I \leq A.$$

Son olarak x, y pozitif sayılarının r-inci kuvvetlerinin genelleştirilmiş logaritmik ortalaması

$$L_r(x,y) = \begin{cases} \frac{r}{r+1} \frac{x^{r+1}-y^{r+1}}{x^r-y^r} & , r \neq 0, -1, x \neq y \\ \frac{x-y}{lnx-lny} & , r = 0, x \neq y \\ xy\frac{lnx-lny}{x-y} & , r = -1, x \neq y \\ x & , x = y \end{cases}$$

biçiminde tanımlanır.

Tanım 2.2.26 (Ağırlıklı Aritmetik Ortalama): $x_i \in [a,b]$, $p_i > 0$ ve $P_n := \sum_{i=1}^{n} p_i > 0$, $(i = 1, 2, ..., n)$ olmak üzere

$$A_n(x,p) := \frac{1}{P_n} \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$$

şeklindeki ifadeye $x_i, (i = 1, 2, ...n)$ sayılarının $p_i(i = 1, 2, ...n)$ ağırlıklı aritmetik ortalaması denir [14].

Tanım 2.2.27 (r-Ortalama): x, y pozitif sayılarının r-inci kuvvetlerine göre kuvvet ortalaması

$$M_r(x,y;\lambda) = \begin{cases} x^{\lambda} y^{1-\lambda} & , r = 0 \\ (\lambda x^r + (1-\lambda) y^r)^{\frac{1}{r}} & , r \neq 0 \end{cases}$$

olarak tanımlanır [14].

Tanım 2.2.28 (r-Konveks fonksiyon): f pozitif bir fonksiyon olmak üzere her $x, y \in [a,b]$ ve $\lambda \in [0,1]$ için

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq M_r(f(x), f(y); \lambda)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonuna $[a,b]$ aralığında bir r-konveks fonksiyon denir [17].

Bu tanımdan 0-konveks fonksiyonların log-konveks fonksiyonlar ve 1-konveks fonksiyonların bilinen konveks fonksiyonlar olduğu sonucuna kolaylıkla ulaşılabilir. Ayrıca r-konvekslik tanımı,

$$f^r\left(\lambda x+(1-\lambda)y\right)=\begin{cases}\left(\lambda f^r(x)+(1-\lambda)f^r(y)\right)^{\frac{1}{r}} & ,r\neq 0\\ \left[f(x)\right]^{\lambda}\left[f(y)\right]^{1-\lambda} & ,r=0\end{cases}$$

biçiminde genişletilmiştir [12].

Tanım 2.2.29 (Starshaped Fonksiyon): $b>0$ olmak üzere $f:[0,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ fonksi-yonu, her $x\in[0,b]$ ve $t\in[0,1]$ için

$$f\left(tx\right)\leq tf\left(x\right)$$

şartını sağlıyorsa bu fonksiyona bir starshaped fonksiyon denir [64].

2.3 Bazı Konveks Fonksiyon Sınıflarının Hiyerarşisi

Fonksiyonlar teorisi çalışmalarında yeni sonuçlar ve genelleştirmeler elde etmek için kimi zaman fonksiyonun şartlarında bazı kısıtlamalar yapmak gerekirken kimi zamanda fonksi-yona ek özellikler katmak gerekir. Çünkü fonksiyonlar aynı anda birçok özelliği sağlayabilir veya bir fonksiyon sınıfı başka bir fonksiyon sınıfıyla bazı özellikleri itibariyle benzerlik gösterebilir. Çalışmalarımızda farklı türden konveks fonksiyonlar için çeşitli integ-ral eşitsizliklerini ispatlarken, bu eşitsizliklerin belli özel durumlar için başka konvekslik sınıfları içinde sağlandığını açıkça görebiliriz. Dolayısıyla buradan konveks fonksiyonlar arasında özellikleri açısından bir hiyerarşi olduğu gerçeğine ulaşılır. Fakat bu hiyerarşide tüm konvekslik sınıflarını beraber değerlendirmek oldukça güç olduğu için aralarındaki ilişki, tanımları ve özellikleri yardımıyla aşağıdaki şekilde oluşturulabilir:

Teorem 2.3.1 $I\subseteq\mathbb{R}$ olmak üzere, Log Konveks fonksiyonlar sınıfı, Konveks fonksi-yonlar sınıfı, Quasi-konveks fonksiyonlar sınıfı, P-fonksiyonlar sınıfı ve Godunova-Levin fonksiyonlar sınıfı sırasıyla $L(I)$, $C(I)$, $QC(I)$, $P(I)$, $Q(I)$ ile gösterilirse, bu takdirde

$$L(I)\subset C(I)\subset QC(I)\subset P(I)\subset Q(I)$$

olduğu görülür (Bakınız Şekil 2.5)[38].

Teorem 2.3.2 $I \subseteq \mathbb{R}$ olmak üzere, Quasi Konveks fonksiyonlar sınıfı, Wright-Quasi-Konveks fonksiyonlar sınıfı ve Jensen-Quasi-Konveks fonksi-yonlar sınıfı sırasıyla $QC(I)$, $WQC(I)$, $JQC(I)$ ile gösterilirse, bu takdirde

$$QC(I) \subset WQC(I) \subset JQC(I)$$

olduğu görülür (Bakınız Şekil 2.6) [12].

Teorem 2.3.3 $I \subseteq \mathbb{R}$ olmak üzere, konveks fonksiyonlar sınıfı, Wright-Konveks fonksi-yonlar sınıfı ve Jensen Konveks fonksiyonlar sınıfı sırasıyla $C(I)$, $W(I)$, $J(I)$ ile gösterilirse;

$$C(I) \subset W(I) \subset J(I)$$

olur (Bakınız Şekil 2.7) [67].

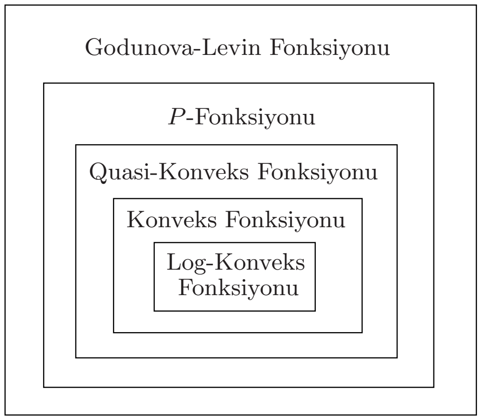
Lemma 2.3.1 Eğer f fonksiyonu m-konveks fonksiyonlar sınıfına ait ise bu takdirde f fonksi-yonu bir starshaped fonksiyondur [64].

Lemma 2.3.2 Eğer f fonksiyonu m-konveks fonksiyon ve $0 \leq n < m \leq 1$ ise f fonksiyonu bir n-konveks fonksiyondur [64].

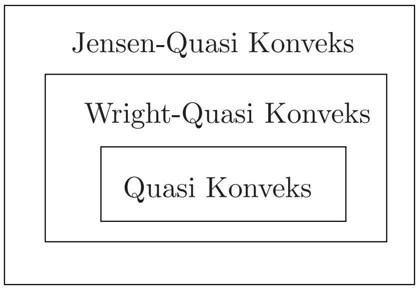
h-konveks fonksiyon tanımından açıkça görülebileceği gibi eğer $h(t) = t$ seçilirse negatif olmayan konveks fonksiyonlar veya eşitsizliğin yön değiştirmesinde negatif olmayan konkav fonksiyonlar, $h(t) = \frac{1}{t}$ seçilirse fonksiyonun $Q(I)$ sınıfından, eğer $s \in (0,1)$ olmak üzere $h(t) = t^s$ seçilirse fonksiyonun K_s^2 sınıfından bir konveks fonksiyon olacağı aşikardır. Bu bilgiler ışığında $h(t)$ fonksiyonun bazı özel değerleri için

$$C(I) \subset SX(h,I), \quad P(I) \subset SX(h,I), \quad K_s^2 \subset SX(h,I)$$

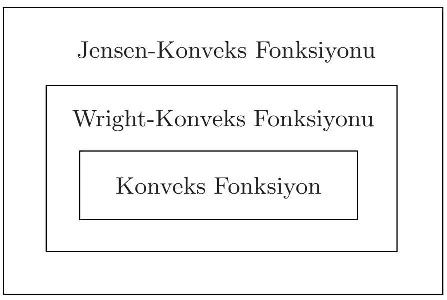
yazılabilir. Burada h fonksiyonu negatif olmayan fonksiyon olduğu için negatif olmayan konveks fonksiyonlar $SX(h,I)$ sınıfının alt kümesidir.



Şekil 2.5: Godunova-Levin fonksiyon, P-fonksiyon, Quasi Konveks fonksiyon, Konveks fonksiyon, Log-Konveks fonksiyon arasındaki sınıf ilişkisi



Şekil 2.6: Jensen-Quasi Konveks fonksiyon, Wright-Quasi Konveks fonksiyon, Quasi Konveks fonksiyon sınıfları arasındaki ilişki



Şekil 2.7: Jensen-konveks fonksiyon, Wright-konveks fonksiyon, Konveks fonksiyon sınıfları arasındaki ilişki

3. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölümün birinci kısmında kesirli Riemann-Liouville integral ve kesirli türev operatörle-riyle ilgili temel tanım ve özellikler verilecektir. İkinci kısmında ise Hermite-Hadamard eşitsizliği, Hermite-Hadamard-Fejér eşitsizliği ve kesirli Hermite-Hadamard-Fejér integral eşitsizlikleri ile ilgili temel teoremler verilecektir.

3.1 Kesirli Riemann-Liouville İntegral ve Türevleri

Liouville'nin kesirli integral operatörününün Riemann' ın değiştirdiği şekli, n-katlı integral için Cauchy' nün formülünün direk genellemesi olarak

$$\int_a^x dx_1 \int_a^{x_1} dx_2 \cdots \int_a^{x_{n-1}} f(x_n)dx_n = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-n}}dt \tag{3.1.1}$$

şeklinde ifade edilir. Bu integralin sol tarafında integrasyon sırasını ve buna bağlı olarak sınırları

$$\begin{array}{rl} a < x_1 < x & \quad x_2 < x_1 < x \\ a < x_2 < x_1 & \quad x_2 < x_1 < x \\ ,\cdots, & \quad ,\cdots, \\ a < x_{n-1} < x_{n-2} & \quad x_n < x_{n-1} < x \\ a < x_n < x_{n-1} & \quad a < x_n < x \end{array}$$

şeklinde değiştirdiğimizde (3.1.1) ifadesi

$$\int_a^x dx_1 \int_a^{x_1} dx_2 \cdots \int_a^{x_{n-1}} f(x_n)dx_n$$

$$= \int_a^x f(x_n)\left(\int_{x_n}^x\left(\int_{x_{n-1}}^x \cdots \int_{x_3}^x\left(\int_{x_2}^x dx_1\right)dx_2\cdots\right)dx_{n-1}\right)dx_n \tag{3.1.2}$$

şeklinde yazılır. (3.1.2) ifadesinde sırasıyla integral alınırsa ve $x_n = t$ dönüşümü yapılırsa

$$\int_a^x dx_1 \int_a^{x_1} dx_2 \cdots \int_a^{x_{n-1}} f(x_n)dx_n = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-n}}dt \tag{3.1.3}$$

eşitliği elde edilir. Gamma fonksiyonunun özelliğinden $(n-1)! = \Gamma(n)$ alındığında (3.1.1) eşitliği elde edilir. (3.1.1) eşitliğinde, n tamsayı değerleri alınmamış olabilir. Riemann bu durum için aşağıdaki şekilde kesirli integral tanımını vermiştir:

Tanım 3.1.1 $f(x) \in L[a,b]$ ve $a < x < b$ olsun. Bu durumda $\alpha > 0$ için

$$\left({}_R J_{a+}^{\alpha} f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x f(t)(x-t)^{\alpha-1}dt, \quad x > a \tag{3.1.4}$$

ve

$$\left({}_R J_{b-}^{\alpha} f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b f(t)(t-x)^{\alpha-1}dt, \quad x < b \tag{3.1.5}$$

integrallerine α-yıncı mertebeden Riemann-Liouville kesirli integralleri adı verilir. Burada $\left(J_{a+}^{0} f\right)(x) = \left(J_{b-}^{0} f\right)(x) = f(x)$ olacaktır.

Teorem 3.1.1 $f \in L[a,b]$ fonksiyonu ve $\alpha > 0$, $\beta > 0$ için

$$\left({}_R J_{a+}^{\alpha} f\right)(x)\left({}_R J_{a+}^{\beta} f\right)(x) = {}_R J_{a^+}^{\alpha+\beta} f(x) \tag{3.1.6}$$

eşitliği sağlanır.

Tanım 3.1.2 f fonksiyonu (a,b) aralığında sürekli ve integrallenebilir olsun. $\alpha \in (0,1)$ olmak üzere

$${}_R D_{a+}^{\alpha} f(x) := \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha}} \tag{3.1.7}$$

ifadesine α-yıncı mertebeden Riemann-Liouville kesirli türevi denir.

Özel olarak, kesirli türevde $\alpha = \frac{1}{2}$ alındığında ifadeye yarı türev adı verilir. Şimdi ise yarı kesirli türevler ile ilgili bir kaç örnek verelim. Bunun için, $f(x) = x^k$

şeklindeki fonksiyonu ele alalım. Burada k pozitif bir tamsayıdır. Ele aldığımız fonksiyonun a-yıncı mertebeden türevini alırsak

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^k \\
f'(x) &= kx^{k-1} \\
f''(x) &= k(k-1)x^{k-2} \\
f'''(x) &= k(k-1)(k-2)x^{k-3} \\
\ldots & \\
f^{(a)}(x) &= k(k-1)(k-2)\cdots(k-a+1)x^{k-a} \\
&= \frac{k!}{(k-a)!}x^{k-a}
\end{aligned}$$

yazılır. Yine burada $\Gamma(n) = (n-1)!$ olduğundan

$$f^{(a)}(x) = \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-a+1)}x^{k-a}$$

eşitliğini yazarız. Buradaki a sayısını herhangi bir pozitif sayı olarak seçerek fonksiyonun kesirli türevlerini hesaplayabiliriz.

Kabul edelim ki $a = \frac{1}{2}$ ve $k = 2$ olsun. Bu durumda fonksiyonun $\frac{1}{2}$-nci mertebeden türevini hesaplayalım. Bunun için

$$f(x) = x^2 \quad ve \quad a = \frac{1}{2} \quad ise,$$

$$f^{(a)}(x) = \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-a+1)}x^{k-a}$$

eşitliğinden yararlanarak,

$$f^{\frac{1}{2}}(x) = \frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}}x^2 = \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(2-\frac{1}{2}+1)}x^{2-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}}x^2 = \frac{2}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}x^{\frac{3}{2}}, \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \Gamma\left(1+\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}\Gamma\left(1+\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}\sqrt{\pi}$$

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}}x^2 = \frac{8}{3\sqrt{\pi}}x^{\frac{3}{2}},$$

elde edilir. Şimdi elde edilen yarım türevin tekrar yarım türevi alınırsa

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}}x^2\right) = \frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{8}{3\sqrt{\pi}}x^{\frac{3}{2}}\right) = 2x$$

olduğu kolayca görülür.

Riemann-Liouville kesirli integral ve türevi arasındaki bağlantıyı çözmek için Abel integral eşitliği olan, $0 < \alpha < 1$ için

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{\varphi(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha}} = f(x), \quad x > a, \tag{3.1.8}$$

eşitliğinden yararlanılır. Son eşitlikte x' i; t' ye ve t' yi; s' ye dönüştürüp her iki tarafını $(x-t)^{-\alpha}$ ile çarpıp a' dan x' e integralini alırsak

$$\int_a^x \frac{dt}{(x-t)^\alpha} \int_a^t \frac{\varphi(s)}{(t-s)^{1-\alpha}} ds = \Gamma(\alpha) \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^\alpha} dt$$

elde edilir. Elde edilen eşitliğin sol tarafında Dirichlet formulü gereğince sınırların yer değişimini uygularsak,

$$\int_a^x \varphi(s)ds \int_s^x \frac{dt}{(x-t)^\alpha (t-s)^{1-\alpha}} = \Gamma(\alpha) \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^\alpha} \tag{3.1.9}$$

olduğu görülür. (3.1.9) ifadesindeki iç taraftaki integralde $t = s+\tau(x-s)$ değişken değiştirmesi yapılırsa,

$$\int_s^x \frac{dt}{(x-t)^\alpha (t-s)^{1-\alpha}} = \int_0^1 \tau^{\alpha-1}(1-\tau)^{-\alpha} d\tau = \beta(\alpha, 1-\alpha) = \Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)$$

elde edilir. Son integrali Beta fonksiyonu ile ifade ettik. Bu ifade (3.1.9)' de kullanılırsa

$$\begin{aligned} \Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) \int_a^x \varphi(s)ds &= \Gamma(\alpha) \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^\alpha} \\ \int_a^x \varphi(s)ds &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^\alpha} dt \end{aligned}$$

elde edilir. Buradaki son eşitliğin her iki tarafının x' e göre türevi alınırsa,

$$\varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^\alpha} dt, \quad 0 < \alpha < 1 \tag{3.1.10}$$

elde edilir. Bu ise bize Tanım 3.1.2 yi vermektedir.

Bu türev formülünü daha genel olarak aşağıdaki şekilde ifade edebiliriz:

Tanım 3.1.3 f fonksiyonu her sonlu (a,x) aralığında sürekli ve integrallenebilir olsun. $m\in\mathbb{N}$, $m-1\le\alpha<m$ olmak üzere $x>a$ için reel bir f fonksiyonunun α-yıncı mertebeden Riemann-Liouville kesirli türevi

$$\left({}_{R}D^{\alpha}_{a^{+}}f\right)(x)=\frac{1}{\Gamma(m-\alpha)}\frac{d^{m}}{dx^{m}}\int\limits_{a}^{x}f(t)(x-t)^{m-\alpha-1}dt \tag{3.1.11}$$

şeklindedir.

Diğer taraftan Riemann-Liouville kesirli integrali ile Beta ve Gamma fonksiyonları arasındaki ilişkiyi kuralım. Bunun için

$$\left({}_{R}J^{\alpha}_{a^{+}}f\right)(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{a}^{x}f(t)\,(x-t)^{\alpha-1}\,dt,\quad x>a$$

Riemann-Liouville kesirli integralinde $f(t)=(t-a)^{\frac{1}{2}}$ ve $\alpha=\frac{1}{2}$ alınırsa, bu takdirde

$$\left({}_{R}J^{\frac{1}{2}}_{a^{+}}f\right)(x)=\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int\limits_{a}^{x}(t-a)^{\frac{1}{2}}\,(x-t)^{-\frac{1}{2}}\,dt,\quad x>a$$

elde edilir. Buradan

$$t=a+(x-a)\,\tau$$

değişken değişimi yapılırsa,

$$\int\limits_{0}^{1}\tau^{p-1}\,(1-\tau)^{q-1}\,d\tau=\beta(p,q)$$

şeklinde Beta fonksiyonu elde edilir. Beta fonksiyonu yardımıyla

$$\begin{aligned}\left({}_{R}J^{\frac{1}{2}}_{a^{+}}f\right)(x)&=\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int\limits_{a}^{x}(t-a)^{\frac{1}{2}}\,(x-t)^{-\frac{1}{2}}\,dt,\quad x>a\\&=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{0}^{1}(x-a)^{\frac{1}{2}}\,(x-a)^{-\frac{1}{2}+1}\,\tau^{\frac{1}{2}}\,(1-\tau)^{-\frac{1}{2}}\,dt\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}}(x-a)\int_0^1 \tau^{\frac{1}{2}}(1-\tau)^{-\frac{1}{2}}\,dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}}(x-a)\,\beta\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}}(x-a)\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\right)} \\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{2}(x-a)
\end{aligned}
$$

eşitliği elde edilir.

Yukarıda yaptığımız uygulamaya benzer olarak, $f(x) = \frac{8}{3\sqrt{\pi}}x^{\frac{3}{2}}$ fonksiyonunu gözönüne alalım ve bu fonksiyonun $\alpha = \frac{1}{2}$-inci mertebeden kesirli integralinin $f(x) = x^2$ olduğunu gösterelim. $a = 0$ olmak üzere Riemann-Liouville kesirli integrali

$$
\left({}_RJ^{\alpha}f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x f(t)\,(x-t)^{\alpha-1}\,dt, \quad x > 0
$$

olarak yazılır. Kabuller altında $f(x) = \frac{8}{3\sqrt{\pi}}x^{\frac{3}{2}}$ fonksiyonunun $\alpha = \frac{1}{2}$-nci mertebeden kesirli integralinin

$$
\begin{aligned}
\left({}_RJ^{\frac{1}{2}}f\right)(x) &= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int_0^x \frac{8}{3\sqrt{\pi}}t^{\frac{3}{2}}(x-t)^{-\frac{1}{2}}\,dt, \quad x > 0 \\
&= \frac{8}{3\sqrt{\pi}}\int_0^1 (ux)^{\frac{3}{2}}(x-ux)^{-\frac{1}{2}}\,xdu, \quad t = ux \\
&= \frac{8}{3\sqrt{\pi}}x^2\int_0^1 u^{\frac{3}{2}}(1-u)^{-\frac{1}{2}}\,du \\
&= \frac{8}{\sqrt{\pi}}x^2\beta\left(\frac{5}{2},\frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{8}{3\sqrt{\pi}}x^2\frac{\frac{3}{2}\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{2}+\frac{1}{2}\right)} \\
&= \frac{8}{3\sqrt{\pi}}x^2\frac{\frac{3}{2}\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(3)} \\
&= x^2
\end{aligned}
$$

olduğu görülür. (Bakınız $[40, 50, 60, 68]$) Hem uygulama alanlarında hem de teoride kullanılan ve klasik kesirli integrallerin farklı değişimleri ve genellemeleri olduğu bilinir. Bunlardan bir taneside Hadamard kesirli integralleridir. Şimdi bu integralleri tanımlayalım.

3.2 Hadamard Kesirli İntegraller

Riemann-Liouville kesirli integro-diferansiyeli, $\frac{d}{dx}$ diferansiyel operatörünün $\left(\frac{d}{dx}\right)^{\alpha}$ kesirli kuvveti şeklindedir ve tüm eksenleri düşünürsek öteleme ile ilişkisi sabittir. Hadamard ise $\left(x\frac{d}{dx}\right)^{\alpha}$ şeklinde kesirli bir kuvvete sahip kesirli integro-diferansiyel yapısını ortaya çıkardı. Bu yapı yarı eksen durumuna uygun ve genişleme ile ilişkisi sabittir. İlk olarak Hadamard $x > 0$, $\alpha > 0$ için

$$\left({}_H J_{+}^{\alpha}\phi\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{0}^{x}\frac{\phi(t)dt}{t\left(ln\frac{x}{t}\right)^{1-\alpha}} \tag{3.2.1}$$

ve

$$\left({}_H J_{-}^{\alpha}\phi\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{x}^{\infty}\frac{\phi(t)dt}{t\left(ln\frac{x}{t}\right)^{1-\alpha}} \tag{3.2.2}$$

integralleriyle tanıştırdı. $\alpha > 0$, $-\infty \leq a < b \leq \infty$ ve g sürekli türevlere sahip monoton bir fonksiyon ve $\phi \in L(a,b)$ için

$$\left({}_H J_{a^+;g}\phi\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{a}^{x}\frac{\phi(t)}{\left[g(x)-g(t)\right]^{1-\alpha}}g'(t)dt \tag{3.2.3}$$

olarak tanımlanan kesirli integralinde $g(t) = lnt$ alınarak elde edildiği için (3.2.1) integraline $g(t) = t$' ye göre ϕ fonksiyonunun kesirli integrali denir. Bununla beraber $g'(t)$' nin sürekli türevlerinin varlığının durumu bu durumda sağlamaz. (Eğer 0 yerine $a > 0$ integralinin soldan limitini alırsak $g'(t)$' nin sürekliliği sağlanır [60].)

Tanım 3.2.1 $\phi : [a,b] \subseteq \mathbb{R}^{+} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında integrallenebilir bir fonksiyon, $\alpha > 0$ ve $0 < a < b$ için

$$\left({}_H J_{a^+}^{\alpha}\phi\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{a}^{x}\frac{\phi(t)}{\left(ln\frac{x}{t}\right)^{1-\alpha}}\frac{dt}{t}, \quad x > a \tag{3.2.4}$$

ve

$$\left({}_{H}J^{\alpha}_{b^-}\phi\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{x}^{b}\frac{\phi(t)}{\left(ln\frac{t}{x}\right)^{1-\alpha}}\frac{dt}{t}, \quad x < b \tag{3.2.5}$$

integrallerine α-yıncı mertebeden Hadamard kesirli integrali denir ve burada ${}_{H}J^{\alpha}_{0^+}\phi = {}_{H}J^{\alpha}_{+}\phi$ ve ${}_{H}J^{\alpha}_{\infty^-}\phi = {}_{H}J^{\alpha}_{-}\phi$ dır.

Hadamard kesirli integral tanımından direk

$$x\frac{d}{dx}{}_{H}J^{\alpha+1}_{a^+}\phi = {}_{H}J^{\alpha}_{a^+}\phi, \quad -x\frac{d}{dx}{}_{H}J^{\alpha+1}_{b^-}\phi = {}_{H}J^{\alpha}_{b^-}\phi, \quad Re(\alpha) > 0 \tag{3.2.6}$$

özelliklerinin sağlandığı görülür. Hadamard kesirli türev, Riemann-Liouville kesirli türevine benzer bir yapıya sahiptir [60].

Tanım 3.2.2 f fonksiyonu (a, b) aralığında sürekli ve integrallenebilir olsun. $\alpha > 0$ için $[\alpha]$, α'nın tam kısmı ve $\{\alpha\} = \alpha - [\alpha]$ olmak üzere (3.2.6) özelliğinden yararlanarak

$$\begin{aligned} {}_{H}D^{\alpha}_{+}f(x) &:= \left(x\frac{d}{dx}\right)^{[\alpha]+1} {}_{H}J^{1-\{\alpha\}}_{+}f \\ &= {}_{H}J^{1-\{\alpha\}}_{+}\left(x\frac{d}{dx}\right)^{[\alpha]+1} f \end{aligned} \tag{3.2.7}$$

ifadesine α-yıncı mertebeden Hadamard kesirli türev denir. Burada ${}_{H}D^{\alpha}_{-}f$, ${}_{H}D^{\alpha}_{a^+}f$, ${}_{H}D^{\alpha}_{b^-}f$ benzer şekilde ifade edilir. Özellikle $0 < \alpha < 1$ için

$${}_{H}D_{+}f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}x\frac{d}{dx}\int\limits_{0}^{x}\frac{\phi(t)}{\left(ln\frac{x}{t}\right)^{\alpha}}\frac{dt}{t} \tag{3.2.8}$$

dir [60].

3.3 Önemli Eşitsizlikler

Teorem 3.3.1 (Hölder Eşitsizliği): $a = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$ ve $b = (b_1, b_2, \cdots, b_n)$ iki pozitif n-liler ve p, q, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ eşitliğini sağlayan sıfırdan farklı iki sayı olsun.

i Eğer p ve q pozitif ise bu takdirde

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right)^{1/q} \tag{3.3.1}$$

eşitsizliği sağlanır.

ii. Eğer $p < 0$ veya $q < 0$ ise bu takdirde

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \geq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right)^{1/q} \tag{3.3.2}$$

eşitsizliği sağlanır [47].

Teorem 3.3.2 (İntegrallenebilir Fonksiyonlar için Hölder Eşitsizliği): f ve g fonksiyonları $[a, b]$ aralığında tanımlı reel fonksiyonlar ve $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. Eğer $|f|^p$ ve $|g|^q$ fonksiyonları $[a, b]$ aralığında integrallenebilir fonksiyonlar ise bu takdirde

$$\int_a^b |f(x)g(x)|\, dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p\, dx\right)^{1/p} \left(\int_a^b |g(x)|^q\, dx\right)^{1/q} \tag{3.3.3}$$

eşitsizliği sağlanır [49].

Sonuç 3.3.1 f ve g fonksiyonları $[a, b]$ aralığında tanımlı ve integrallenebilir iki fonksiyon olsun. Eğer $q \geq 1$ için $|f|$ ve $|g|^q$ fonksiyonları $[a, b]$ aralığında integrallenebilir fonksiyonlar ise bu takdirde

$$\int_a^b |f(x)g(x)|\, dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|\, dx\right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_a^b |f(x)|\, |g(x)|^q\, dx\right)^{\frac{1}{q}} \tag{3.3.4}$$

eşitsizliği sağlanır [49].

Teorem 3.3.3 (Üçgen Eşitsizliği): Her x,y reel sayıları için

i. $|x + y| \leq |x| + |x|$,

ii. $||x| - |y|| \leq |x + y|$,

iii. $|x_1 + \cdots + x_n| \leq |x_1| + \cdots |x_n|$

eşitsizlikleri sağlanır [49].

Teorem 3.3.4 (İntegral için Üçgen Eşitsizliği): f, $[a,b]$ aralığında sürekli reel değerli bir fonksiyon ve $a<b$ olmak üzere

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx \tag{3.3.5}$$

eşitsizliği sağlanır.

Lemma 3.3.1 $0<\alpha\leq 1$ ve $0\leq a<b$ için

$$|a^\alpha - b^\alpha| \leq (b-a)^\alpha \tag{3.3.6}$$

ifadesi sağlanır[57].

3.4 Konvekslik İle İlgili Önemli Eşitsizlikler

Teorem 3.4.1 (Jensen Eşitsizliği): f, $I\subset\mathbb{R}$ aralığında tanımlı bir konveks fonksiyon, $x=(x_1,\cdots,x_n)\in I^n$ $(n\geq 2)$ ve p, $\left(P_k=\sum_{i=1}^k p_i\right)$ şeklinde tanımlanan pozitif sıralı n-li ise

$$f\left(\frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^n p_i x_i\right) \leq \frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^n p_i f(x_i) \tag{3.4.1}$$

eşitsizliği sağlanır[49].

Teorem 3.4.2 (Hermite-Hadamard Eşitsizliği): $I=[a,b]$ ve $f:I\longrightarrow\mathbb{R}$ bir konveks fonksiyon ise bu takdirde

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{3.4.2}$$

eşitsizliği sağlanır [20],[58].

Yukarıdaki teoremde konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliği verildi. Bir sonraki teoremde ise Konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard-Fejér eşitsizliği verilecektir ve ardından bu eşitsizliklerin daha genel hali olan kesirli Hermite-Hadamard ve kesirli Hermite-Hadamard-Fejér integral eşitsizlikleri verilecektir:

Teorem 3.4.3 $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ bir konveks fonksiyon ve $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ pozitif, integrallenebilir ve $x = \frac{a+b}{2}$' ye göre simetrik bir fonksiyon olmak üzere

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b g(x)dx \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}\int_a^b g(x)dx \quad (3.4.3)$$

eşitsizliği sağlanır [16].

Teorem 3.4.4 $0 \leq a < b$, $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ pozitif fonksiyon ve $f \in L[a,b]$ olsun. Eğer f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında konveks ise $\alpha > 0$ için

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}}\left[J_{a^+}^{\alpha}f(b) + J_{b^-}^{\alpha}f(a)\right] \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \quad (3.4.4)$$

eşitsizliği sağlanır [61].

Teorem 3.4.5 $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ konveks fonksiyon, $a < b$ ve $f \in L[a,b]$ olsun. $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ negatif olmayan, integrallenebilir ve $\frac{a+b}{2}$' ye göre simetrik bir fonksiyon ise bu takdirde $\alpha > 0$ için

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a+b}{2}\right)\left[J_{a^+}^{\alpha}g(b) + J_{b^-}^{\alpha}g(a)\right] &\leq \left[J_{a^+}^{\alpha}(fg)(b) + J_{b^-}^{\alpha}(fg)(a)\right] \\ &\leq \frac{f(a)+f(b)}{2}\left[J_{a^+}^{\alpha}g(b) + J_{b^-}^{\alpha}g(a)\right] \quad (3.4.5) \end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır [27].

Hermite-Hadamard ve Hermite-Hadamard-Fejér kesirli integral eşitsizliklerinin geometrik-aritmetik ve harmonik aritmetik ve quasi-geometrik konveks fonksiyonlar için ifadelerini aşağıdaki teoremlerde görebiliriz.

Teorem 3.4.6 $f : I \subseteq \mathbb{R}^{+} \longrightarrow \mathbb{R}$ geometrik-aritmetik (GA) konveks fonksiyon, $a, b \in I$, $a < b$ olsun. $g : [a,b] \longrightarrow [0,\infty)$ sürekli, pozitif ve $\sqrt{ab}$' ye göre geometrik simetrik bir fonksiyon ise bu takdirde

$$\begin{aligned} f\left(\sqrt{ab}\right)\int_a^b \frac{g(x)}{x}dx &\leq \int_a^b \frac{f(x)g(x)}{x}dx \\ &\leq \frac{f(a)+f(b)}{2}\int_a^b \frac{g(x)}{x}dx \end{aligned} \tag{3.4.6}$$

eşitsizliği gerçeklenir [43].

Teorem 3.4.7 $a, b \in I$, $a < b$, $f : I \subseteq \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $f \in L[a, b]$ olsun. Bu takdirde eğer f, $[a, b]$ aralığında GA-konveks fonksiyon ise $\alpha > 0$ için

$$f\left(\sqrt{ab}\right) \leq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2\left(ln(b/a)\right)^{\alpha}}\left[J^{\alpha}_{a^+}f(b) + J^{\alpha}_{b^-}f(a)\right] \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{3.4.7}$$

eşitsizliği sağlanır [28].

Teorem 3.4.8 $f : [a, b] \subseteq \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında GA-konveks, $a < b$, $a, b \in I$ ve $f \in L[a, b]$ olsun. Eğer $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ negatif olmayan, integrallenebilir, ve $\sqrt{ab}$' ye göre geometrik simetrik bir fonksiyon ise bu takdirde $\alpha > 0$ için

$$\begin{aligned} f\left(\sqrt{ab}\right)\left[J^{\alpha}_{a^+}g(b) + J^{\alpha}_{b^-}g(a)\right] &\leq \left[J^{\alpha}_{a^+}(fg)(b) + J^{\alpha}_{b^-}(fg)(a)\right] \\ &\leq \frac{f(a)+f(b)}{2}\left[J^{\alpha}_{a^+}g(b) + J^{\alpha}_{b^-}g(a)\right] \end{aligned} \tag{3.4.8}$$

kesirli integral eşitsizliği elde edilir [42].

Teorem 3.4.9 $f : I \subseteq \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ harmonik konveks fonksiyon ve $f \in L\left([a, b]\right)$, $a, b \in I$, $a < b$ olsun. $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ negatif olmayan, integrallenebilir ve $x = \frac{2ab}{a+b}$' ye göre harmonik simetrik bir fonksiyon ise bu takdirde

$$f\left(\frac{2ab}{a+b}\right)\int_a^b \frac{g(x)}{x^2}dx \leq \int_a^b \frac{f(x)g(x)}{x^2}dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}\int_a^b \frac{g(x)}{x^2}dx \tag{3.4.9}$$

eşitsizliği gerçeklenir [30].

Teorem 3.4.10 $f : I \subseteq \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, $f \in L[a, b]$, bir fonksiyon, $a, b \in I$ ve $a < b$ olsun. f fonksiyonu, $[a, b]$ aralığında harmonik konveks ve $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ negatif olmayan integrallenebilir ve $g(x) = \frac{1}{x}$ şeklinde tanımlanan fonksiyon olmak üzere $\alpha > 0$ için

$$\begin{aligned} f\left(\frac{2ab}{a+b}\right) &\leq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2}\left(\frac{ab}{a+b}\right)^{\alpha}\left\{J^{\alpha}_{1/a^{+}}(f\circ g)(1/b) + J^{\alpha}_{1/b^{-}}(f\circ g)(1/a)\right\} \\ &\leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \end{aligned} \tag{3.4.10}$$

eşitsizliği sağlanır [30].

Lemma 3.4.1 $g : [a,b] \subseteq \mathbb{R}\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ integrallenebilir ve $a < b$, $\frac{2ab}{a+b}$' ye göre harmonik simetrik olsun. $x \in \left[\frac{1}{b}, \frac{1}{a}\right]$, $h(x) = \frac{1}{x}$ ve $\alpha > 0$ ise

$$J^{\alpha}_{1/b^{+}}\left(g\circ h\right)(1/a) = J^{\alpha}_{1/a^{-}}\left(g\circ h\right)(1/b) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} J^{\alpha}_{1/b^{+}}\left(g\circ h\right)(1/a) \\ J^{\alpha}_{1/a^{-}}\left(g\circ h\right)(1/b) \end{bmatrix} \tag{3.4.11}$$

ifadesi sağlanır [32].

Teorem 3.4.11 $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ harmonik konveks fonksiyon, $a < b$, $f \in L[a,b]$ olsun. $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ negatif olmayan, integrallenebilir ve $\frac{2ab}{a+b}$' ye göre harmonik simetrik fonksiyon olsun. Bu takdirde $x \in \left[\frac{1}{b}, \frac{1}{a}\right]$ için $h(x) = \frac{1}{x}$ ve $\alpha > 0$ için

$$\begin{aligned} & f\left(\frac{2ab}{a+b}\right)\left[J^{\alpha}_{1/b^{+}}\left(g\circ h\right)(1/a) + J^{\alpha}_{1/a^{-}}\left(g\circ h\right)(1/b)\right] \\ & \leq \left[J^{\alpha}_{1/b^{+}}\left(fg\circ h\right)(1/a) + J^{\alpha}_{1/a^{-}}\left(fg\circ h\right)(1/b)\right] \\ & \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}\left[J^{\alpha}_{1/b^{+}}\left(g\circ h\right)(1/a) + J^{\alpha}_{1/a^{-}}\left(g\circ h\right)(1/b)\right] \end{aligned} \tag{3.4.12}$$

kesirli integral eşitsizliği gerçeklenir [32].

Teorem 3.4.12 $f : I \subseteq \mathbb{R}^{+} \longrightarrow \mathbb{R}$, I^{o} da differansiyelenebilir ve $a < b$, $f' \in L[a,b]$ olsun. $|f'|$, $[a,b]$' de quasi-geometrik konveks, $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ sürekli ve $x = \sqrt{ab}$' ye göre geometrik simetrik bir fonksiyon ise $\alpha > 0$ için

$$\begin{aligned} & \left|\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}\right)\left[J^{\alpha}_{a^{+}}g(b) + J^{\alpha}_{b^{-}}g(a)\right] - \left[J^{\alpha}_{a^{+}}(fg)(b) + J^{\alpha}_{b^{-}}(fg)(a)\right]\right| \\ \leq\ & \frac{\|g\|_{\infty}\, ln^{\alpha+1}(b/a)}{\Gamma(\alpha+1)} C_1(\alpha)\sup\{|f'(a)|, |f'(b)|\} \end{aligned} \tag{3.4.13}$$

eşitsizliği sağlanır, burada

$$C_1(\alpha) = \int_0^{1/2} \left[(1-u)^{\alpha} - u^{\alpha}\right]\left[a^{1-u}b^{u} + a^{u}b^{1-u}\right] du$$

dır [41].

Lemma 3.4.2 $f : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, I^o da diferansiyellenebilir bir fonksiyon, $a < b$, $a, b \in I$ ve $h : [a, b] \longrightarrow [0, \infty)$ diferansiyellenebilir olsun. Eğer $f' \in L[a, b]$ ise bu takdirde

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left[(h(b) - 2h(a))f(a) + h(b)f(b)\right] - \int_a^b f(x)h'(x)dx \\
= \; & \frac{(b-a)}{4}\left\{\int_0^1 \left[2h\left(\frac{1+t}{2}a + \frac{1-t}{2}b\right) - h(b)\right] f'\left(\frac{1+t}{2}a + \frac{1-t}{2}b\right) dt\right. \\
+ \; & \left.\int_0^1 \left[2h\left(\frac{1-t}{2}a + \frac{1+t}{2}b\right) - h(b)\right] f'\left(\frac{1-t}{2}a + \frac{1+t}{2}b\right) dt\right\}
\end{aligned}$$

eşitliği vardır [23].

Lemma 3.4.3 $f : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, I^o da diferansiyellenebilir bir fonksiyon, $a < b$, $a, b \in I$ ve $h : [a, b] \longrightarrow [0, \infty)$ diferansiyellenebilir olsun. Eğer $f' \in L[a, b]$ ise bu takdirde

$$\begin{aligned}
&\frac{h(a)}{2}\left(f(a) + f(b)\right) - h(b)f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{b-a}{4}\int_0^1 \left[f\left(\frac{1+t}{2}a + \frac{1-t}{2}b\right)\right. \\
+ \; & \left. f\left(\frac{1-t}{2}a + \frac{1+t}{2}b\right)\right]\left[h'\left((\frac{1+t}{2}a + \frac{1-t}{2}b\right) + h'\left((\frac{1-t}{2}a + \frac{1+t}{2}b\right)\right] dt \\
= \; & \frac{(b-a)}{4}\left\{\int_0^1 \left[h\left((\frac{1+t}{2}a + \frac{1-t}{2}b\right) - h\left(\frac{1-t}{2}a + \frac{1+t}{2}b\right) + h(b)\right]\right. \\
\times \; & \left.\left[-f'\left(\frac{1+t}{2}a + \frac{1-t}{2}b\right) + f'\left(\frac{1-t}{2}a + \frac{1+t}{2}b\right)\right] dt\right\}
\end{aligned} \tag{3.4.14}$$

eşitliği sağlanır [24].

4. BULGULAR

Bu bölümde ilk olarak geometrik-aritmetik (GA) konveks, (HA) harmonik konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard-Fejér tipli integral eşitsizliğinin sol ve sağ tarafı için yeni lemmalar ve teoremler elde edildi. Daha sonra ise yeni fonksiyonlar tanımlayarak Riemann Liouville ve Hadamard kesirli integrallere uygulanıp yeni sonuçlar elde edildi. Bunlara ek olarak GA-konveks fonksiyonlar için ortaya çıkarılan lemmaları quasi-geometrik-aritmetik konveks fonksiyonlar için uygulayıp eşitsizliğin sağ ve sol tarafı için yeni teorem ve sonuçlar elde edildi. Son olarak bulunan bazı sonuçlar çeşitli ortalamalara ve hiper geometrik fonksiyonlara uygulandı. Bu bölümdeki elde edilen bulgular uluslararası alan indeksli dergilerde makale olarak yayınlanmıştır. Bakınız [35, 36, 45].

4.1 Geometrik-Aritmetik Fonksiyonlar için Hermite-Hadamard-Fejér Tipli Kesirli İntegral Eşitsizlikleri

Bu bölümde $\forall a, b \in \mathbb{R}^+$, $t \in [0,1]$ için $G := G(a,b) = \sqrt{ab}$, $L_G(t) = a^t G^{1-t}$ ve $U_G(t) = b^t G^{1-t}$ notasyonları kullanılacaktır.

Lemma 4.1.1 $f : I \subseteq \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I^o da diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve , $a, b \in I^o$, $a < b$ olsun. $h : [a,b] \longrightarrow [0,\infty)$ diferansiyellenebilir fonksiyonu ve $f' \in L[a,b]$ için

$$[h(b) - 2h(a)]\frac{f(a)}{2} + h(b)\frac{f(b)}{2} - \int_a^b f(x)h'(x)dx$$

$$= \frac{lnb - lna}{4}\left\{\int_0^1 \left[2h\left(a^tG^{1-t}\right) - h(b)\right] f'\left(a^tG^{1-t}\right) a^tG^{1-t}dt\right.$$

$$\left. + \int_0^1 \left[2h\left(b^tG^{1-t}\right) - h(b)\right] f'\left(b^tG^{1-t}\right) b^tG^{1-t}dt\right\} \quad (4.1.1)$$

eşitliği sağlanır.

İspat. Eşitliğin sağ tarafındaki integralleri iki parça halinde ispatlayacağız. İlk integral kısmi integrasyon ve sonrasında $x = a^t G^{1-t}$, $dx = a^t G^{1-t} ln\left(\frac{a}{G}\right) dt$ değişken değişimi yapılırsa

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^1 \left[2h\left(a^t G^{1-t}\right) - h(b)\right] f'\left(a^t G^{1-t}\right) a^t G^{1-t} dt \\
&= \frac{1}{ln\left(\frac{a}{G}\right)} \left\{ \left[2h\left(a^t G^{1-t}\right) - h(b)\right] f\left(a^t G^{1-t}\right)\Big|_0^1 \right. \\
&- \left. 2\ln\left(\frac{a}{G}\right) \int_0^1 f\left(a^t G^{1-t}\right) h'\left(a^t G^{1-t}\right) a^t G^{1-t} dt \right\} \\
ln\left(\frac{G}{a}\right) I_1 &= [h(b) - 2h(a)] f(a) + [2h(G) - h(b)] f(G) - 2\int_a^G f(x)h'(x)dx
\end{aligned}$$

elde edilir. Son integralde Diğer taraftan ikinci integrale de kısmi integrasyon ve sonrasında $x = b^t G^{1-t}$, $dx = b^t G^{1-t} ln\left(\frac{b}{G}\right) dt$ değişken değişimi yapılırsa

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_0^1 \left[2h\left(b^t G^{1-t}\right) - h(b)\right] f'\left(b^t G^{1-t}\right) b^t G^{1-t} dt \\
&= \frac{1}{ln\left(\frac{b}{G}\right)} \left\{ \left[2h\left(b^t G^{1-t}\right) - h(b)\right] f\left(b^t G^{1-t}\right)\Big|_0^1 \right. \\
&- \left. 2\ln\left(\frac{b}{G}\right) \int_0^1 f\left(b^t G^{1-t}\right) h'\left(b^t G^{1-t}\right) b^t G^{1-t} dt \right\} \\
ln\left(\frac{b}{G}\right) I_2 &= h(b)f(b) - [2h(G) - h(b)] f(G) - 2\int_G^b f(x)h'(x)dx
\end{aligned}$$

elde edilir. Son olarak $ln\,(G/a)\, I_1$ ve $ln\,(b/G)\, I_2$ taraf tarafa toplanıp ikiye bölündüğünde

$$\frac{lnb - lna}{4}[I_1 + I_2] = [h(b) - 2h(a)] \frac{f(a)}{2} + h(b)\frac{f(b)}{2} - \int_a^b f(x)h'(x)dx \quad (4.1.2)$$

olduğu görülür. Böylece ispat tamamlanır.

Şimdi verdiğimiz özdeşliği temel alan teorem ve sonuçlarımızı verelim.

Teorem 4.1.1 $f : I \subseteq \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I^o da bir diferansiyellenebilir fonksiyon ve $h : [a,b] \longrightarrow [0,\infty)$ diferansiyellenebilir fonksiyon, $a,b \in I^o$, $a < b$ olsun. Eğer $|f'|$, $[a,b]$ aralığında geometrik-aritmetik konveks fonksiyon ise

$$\left|[h(b) - 2h(a)]\frac{f(a)}{2} + h(b)\frac{f(b)}{2} - \int_a^b f(x)h'(x)dx\right|$$

$$\leq \frac{\ln b - \ln a}{4}\left[\zeta_1(a,b)\left|f'(a)\right| + \zeta_2(a,b)\left|f'(G)\right| + \zeta_3(a,b)\left|f'(b)\right|\right] \tag{4.1.3}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada katsayılar

$$\zeta_1(a,b) = \int_0^1 ta^tG^{1-t}\left|2h\left(a^tG^{1-t}\right) - h(b)\right|dt \tag{4.1.4}$$

$$\begin{aligned}\zeta_2(a,b) &= \int_0^1 (1-t)a^tG^{1-t}\left|2h\left(a^tG^{1-t}\right) - h(b)\right|dt \\ &+ \int_0^1 (1-t)b^tG^{1-t}\left|2h\left(b^tG^{1-t}\right) - h(b)\right|dt\end{aligned} \tag{4.1.5}$$

$$\zeta_3(a,b) = \int_0^1 tb^tG^{1-t}\left|2h\left(b^tG^{1-t}\right) - h(b)\right|dt \tag{4.1.6}$$

şeklindedir.

İspat. Lemma 4.1.1 deki (4.1.1) eşitliğinin her iki tarafının mutlak değeri alınırsa

$$\begin{aligned}&\left|[h(b) - 2h(a)]\frac{f(a)}{2} + h(b)\frac{f(b)}{2} - \int_a^b f(x)h'(x)dx\right| \\ \leq\ & \frac{lnb - lna}{4}\left\{\int_0^1 \left|2h\left(a^tG^{1-t}\right) - h(b)\right|\left|f'\left(a^tG^{1-t}\right)a^tG^{1-t}\right|dt\right. \\ +\ & \left.\int_0^1 \left|2h\left(b^tG^{1-t}\right) - h(b)\right|\left|f'\left(b^tG^{1-t}\right)b^tG^{1-t}\right|dt\right\}\end{aligned} \tag{4.1.7}$$

elde edilir. (4.1.7) eşitsizliğinde $|f'|$ fonksiyonunun geometrik-aritmetik fonksiyon olduğunu kullanırsak

$$\left|[h(b)-2h(a)]\frac{f(a)}{2}+h(b)\frac{f(b)}{2}-\int\limits_a^b f(x)h'(x)dx\right|$$

$$\leq \frac{lnb-lna}{4}\left\{\int\limits_0^1\left|2h\left(a^tG^{1-t}\right)-h(b)\right|\left[t\left|f'(a)\right|+(1-t)\left|f'(G)\right|\right]a^tG^{1-t}dt\right.$$

$$\left.+\int\limits_0^1\left|2h\left(b^tG^{1-t}\right)-h(b)\right|\left[t\left|f'(b)\right|+(1-t)\left|f'(G)\right|\right]b^tG^{1-t}dt\right\} \quad (4.1.8)$$

eşitsizliğini buluruz. Son eşitsizlikte parantezi dağıttımızda (4.1.4)-(4.1.6) katsayılarını elde ederiz ve böylece ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 4.1.1 $g:[a,b]\longrightarrow[0,\infty)$ sürekli, pozitif fonksiyon; $\sqrt{ab}$' e göre simetrik ve $\|g\|_\infty=\sup_{x\in[a,b]}|g(x)|$ olsun. Bu durumda Teorem 4.1.1' in koşulları altında $h:[a,b]\longrightarrow[0,\infty)$, $x\in[a,b]$ ve $\alpha>0$ için $h(x)=\int\limits_a^x\left[\left(ln\frac{b}{t}\right)^{\alpha-1}+\left(ln\frac{t}{a}\right)^{\alpha-1}\right]\frac{g(t)}{t}dt$ şeklinde tanımlanırsa

$$\left|\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}\right)\left[{}_HJ^{\alpha}_{a^+}g(b)+{}_HJ^{\alpha}_{b^-}g(a)\right]-\left[{}_HJ^{\alpha}_{a^+}(fg)(b)+{}_HJ^{\alpha}_{b^-}(fg)(a)\right]\right|$$

$$\leq \frac{(\ln b-\ln a)^{\alpha+1}}{2^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)}\|g\|_\infty\left[C_1(\alpha)\left|f'(a)\right|+C_2(\alpha)\left|f'(G)\right|+C_3(\alpha)\left|f'(b)\right|\right] \quad (4.1.9)$$

eşitsizliği gerçeklenir, burada katsayılar

$$\begin{aligned}
C_1(\alpha) &= \int\limits_0^1\left[(1+t)^\alpha-(1-t)^\alpha\right]ta^tG^{1-t}dt,\\
C_2(\alpha) &= \int\limits_0^1(1-t)\left[(1+t)^\alpha-(1-t)^\alpha\right]\left[a^tG^{1-t}+b^tG^{1-t}\right]dt,\\
C_3(\alpha) &= \int\limits_0^1\left[(1+t)^\alpha-(1-t)^\alpha\right]tb^tG^{1-t}dt
\end{aligned}$$

şeklindedir. $0<\alpha\leq 1$ için (4.1.9) eşitsizliğinde Lemma 3.3.1' i kullanırsak

$$\left|\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}\right)\left[{}_HJ^{\alpha}_{a^+}g(b)+{}_HJ^{\alpha}_{b^-}g(a)\right]-\left[{}_HJ^{\alpha}_{a^+}(fg)(b)+{}_HJ^{\alpha}_{b^-}(fg)(a)\right]\right|$$

$$\leq \frac{(\ln b-\ln a)^{\alpha+1}}{2\Gamma(\alpha+1)}\|g\|_\infty\left[E_1(\alpha)\left|f'(a)\right|+E_2(\alpha)\left|f'(G)\right|+E_3(\alpha)\left|f'(b)\right|\right] \quad (4.1.10)$$

eşitsizliğini ve

$$
\begin{aligned}
E_1(\alpha) &= \int_0^1 t^{\alpha+1} a^t G^{1-t} dt \\
E_2(\alpha) &= \int_0^1 \left[(1-t)\, t^{\alpha} a^t G^{1-t} + (1-t)\, t^{\alpha} b^t G^{1-t}\right] dt \\
E_3(\alpha) &= \int_0^1 t^{\alpha+1} b^t G^{1-t} dt
\end{aligned}
$$

katsayılarını elde ederiz.

İspat. Teorem 4.1.1' e göre, (4.1.8) eşitsizliğinde $x \in [a,b]$ için

$$h(x) = \int_a^x \left[\left(ln\frac{b}{t}\right)^{\alpha-1} + \left(ln\frac{t}{a}\right)^{\alpha-1}\right] \frac{g(t)}{t} dt$$

alınırsa

$$\left|\Gamma(\alpha)\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}\right)\left[{}_HJ_{a+}^{\alpha} g(b) +{}_H J_{b-}^{\alpha} g(a)\right] - \Gamma(\alpha)\left[{}_HJ_{a+}^{\alpha}(fg)(b) +{}_H J_{b-}^{\alpha}(fg)(a)\right]\right| \tag{4.1.11}$$

ve diğer taraftan (4.1.8) eşitsizliğinin sağ tarafında da $x \in [a,b]$ için

$$h(x) = \int_a^x \left[\left(ln\frac{b}{t}\right)^{\alpha-1} + \left(ln\frac{t}{a}\right)^{\alpha-1}\right] \frac{g(t)}{t} dt$$

alınırsa

$$
\begin{aligned}
&\leq \frac{lnb-lna}{4}\left\{\int_0^1 \left| \begin{array}{c} 2\int_a^{a^tG^{1-t}} \left[\left(\ln\frac{b}{x}\right)^{\alpha-1} + \left(\ln\frac{x}{a}\right)^{\alpha-1}\right]\frac{g(x)}{x}dx \\ -\int_a^b \left[\left(\ln\frac{b}{x}\right)^{\alpha-1} + \left(\ln\frac{x}{a}\right)^{\alpha-1}\right]\frac{g(x)}{x}dx \end{array}\right| \times \right. \\
&\qquad\qquad [t\,|f'(a)| + (1-t)\,|f'(G)|]\, a^t G^{1-t} dt \\
&\quad + \int_0^1 \left| \begin{array}{c} 2\int_a^{b^tG^{1-t}} \left[\left(\ln\frac{b}{x}\right)^{\alpha-1} + \left(\ln\frac{x}{a}\right)^{\alpha-1}\right]\frac{g(x)}{x}dx \\ -\int_a^b \left[\left(\ln\frac{b}{x}\right)^{\alpha-1} + \left(\ln\frac{x}{a}\right)^{\alpha-1}\right]\frac{g(x)}{x}dx \end{array}\right| \times \\
&\qquad\qquad \left. [t\,|f'(b)| + (1-t)\,|f'(G)|]\, b^t G^{1-t} dt \right\}
\end{aligned} \tag{4.1.12}
$$

olduğu görülür. Son ifadede $g(x)$ fonksiyonunun $\sqrt{ab}$' ye göre geometrik simetrik olduğunu kullanırsak her $t \in [0,1]$ için

$$\left|2\int\limits_{a}^{a^tG^{1-t}}\left[\left(\ln\frac{b}{x}\right)^{\alpha-1}+\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{\alpha-1}\right]\frac{g(x)}{x}dx-\int\limits_{a}^{b}\left[\left(\ln\frac{b}{x}\right)^{\alpha-1}+\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{\alpha-1}\right]\frac{g(x)}{x}dx\right| = \left|\int\limits_{a^tG^{1-t}}^{b^tG^{1-t}}\left[\left(\ln\frac{b}{x}\right)^{\alpha-1}+\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{\alpha-1}\right]\frac{g(x)}{x}dx\right| \tag{4.1.13}$$

ve

$$\left|2\int\limits_{a}^{b^tG^{1-t}}\left[\left(\ln\frac{b}{x}\right)^{\alpha-1}+\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{\alpha-1}\right]\frac{g(x)}{x}dx-\int\limits_{a}^{b}\left[\left(\ln\frac{b}{x}\right)^{\alpha-1}+\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{\alpha-1}\right]\frac{g(x)}{x}dx\right| = \left|\int\limits_{a^tG^{1-t}}^{b^tG^{1-t}}\left[\left(\ln\frac{b}{x}\right)^{\alpha-1}+\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{\alpha-1}\right]\frac{g(x)}{x}dx\right| \tag{4.1.14}$$

olduğunu görürüz. Bu durumda (4.1.12)-(4.1.14) ifadelerini kullanırsak

$$\begin{aligned}
&\left|\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}\right)\left[{}_HJ^{\alpha}_{a^+}g(b)+{}_HJ^{\alpha}_{b^-}g(a)\right]-\left[{}_HJ^{\alpha}_{a^+}\left(fg\right)(b)+{}_HJ^{\alpha}_{b^-}\left(fg\right)(a)\right]\right| \\
&\leq \frac{lnb-lna}{4\Gamma(\alpha)}\left\{\int\limits_0^1\left|\int\limits_{a^tG^{1-t}}^{b^tG^{1-t}}\left[\left(\ln\tfrac{b}{x}\right)^{\alpha-1}+\left(\ln\tfrac{x}{a}\right)^{\alpha-1}\right]\tfrac{g(x)}{x}dx\right|\times\right. \\
&\qquad\left[t\left|f'(a)\right|+(1-t)\left|f'(G)\right|\right]a^tG^{1-t}dt \\
&\quad+\int\limits_0^1\left|\int\limits_{a^tG^{1-t}}^{b^tG^{1-t}}\left[\left(\ln\tfrac{b}{x}\right)^{\alpha-1}+\left(\ln\tfrac{x}{a}\right)^{\alpha-1}\right]\tfrac{g(x)}{x}dx\right|\times \\
&\qquad\left.\left[t\left|f'(b)\right|+(1-t)\left|f'(G)\right|\right]b^tG^{1-t}dt\right\}
\end{aligned} \tag{4.1.15}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{lnb-lna}{4\Gamma(\alpha)}\left\|g\right\|_{\infty}\left\{\int\limits_0^1\left[\int\limits_{a^tG^{1-t}}^{b^tG^{1-t}}\left[\left(\ln\tfrac{b}{x}\right)^{\alpha-1}+\left(\ln\tfrac{x}{a}\right)^{\alpha-1}\right]\tfrac{1}{x}dx\right]\times\right. \\
&\qquad\left[t\left|f'(a)\right|+(1-t)\left|f'(G)\right|\right]a^tG^{1-t}dt \\
&\quad+\int\limits_0^1\left[\int\limits_{a^tG^{1-t}}^{b^tG^{1-t}}\left[\left(\ln\tfrac{b}{x}\right)^{\alpha-1}+\left(\ln\tfrac{x}{a}\right)^{\alpha-1}\right]\tfrac{1}{x}dx\right]\times \\
&\qquad\left.\left[t\left|f'(b)\right|+(1-t)\left|f'(G)\right|\right]b^tG^{1-t}dt\right\}
\end{aligned} \tag{4.1.16}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Son eşitsizlikte içerideki integrali

$$\int\limits_{a^tG^{1-t}}^{b^tG^{1-t}}\left[\left(\ln\frac{b}{x}\right)^{\alpha-1}+\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{\alpha-1}\right]\frac{1}{x}dx$$

$$= \int\limits_{a^tG^{1-t}}^{b^tG^{1-t}} \left(\ln\frac{b}{x}\right)^{\alpha-1} \frac{1}{x}dx + \int\limits_{a^tG^{1-t}}^{b^tG^{1-t}} \left(\ln\frac{x}{a}\right)^{\alpha-1}\frac{1}{x}dx$$

$$= \frac{2.(\ln b - \ln a)^{\alpha}}{2^{\alpha}.\alpha}\left[(1+t)^{\alpha} - (1-t)^{\alpha}\right] \tag{4.1.17}$$

şeklinde hesaplar ve son eşitlikte Lemma 3.3.1 'i kullanırsak

$$\int\limits_{a^tG^{1-t}}^{b^tG^{1-t}} \left[\left(\ln\frac{b}{x}\right)^{\alpha-1} + \left(\ln\frac{x}{a}\right)^{\alpha-1}\right]\frac{1}{x}dx$$

$$= \int\limits_{a^tG^{1-t}}^{b^tG^{1-t}} \left(\ln\frac{b}{x}\right)^{\alpha-1} \frac{1}{x}dx + \int\limits_{a^tG^{1-t}}^{b^tG^{1-t}} \left(\ln\frac{x}{a}\right)^{\alpha-1}\frac{1}{x}dx$$

$$\leq \frac{2.(\ln b - \ln a)^{\alpha}}{\alpha}t^{\alpha} \tag{4.1.18}$$

yazılır. (4.1.16) - (4.1.18) ifadelerinin kombinasyonunu kullanırsak (4.1.9) ve (4.1.10) eşitsizliğini elde ederiz. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 4.1.2 i. Eğer Sonuç 4.1.1 'deki (4.1.10) eşitsizliğinde, $\alpha = 1$ alınırsa ,

$$\left|\left[\frac{f(a)+f(b)}{2}\right]\int\limits_a^b \frac{g(x)}{x}dx - \int\limits_a^b f(x)\frac{g(x)}{x}dx\right| \leq \frac{(\ln b - \ln a)^2}{4}\|g\|_{\infty}$$
$$\times\left[E_1(1)\left|f'(a)\right| + E_2(1)\left|f'(G)\right| + E_3(1)\left|f'(b)\right|\right] \tag{4.1.19}$$

eşitsizliği elde edilir, burada $a, b > 0$ için,

$$E_1(1) = \int\limits_0^1 t^2a^tG^{1-t}dt,$$

$$E_2(1) = \int\limits_0^1 t(1-t)a^tG^{1-t}dt + \int\limits_0^1 t(1-t)b^tG^{1-t}dt$$

$$E_3(1) = \int\limits_0^1 t^2a^tG^{1-t}dt$$

dır.

ii. Eğer Sonuç 4.1.1' deki (4.1.9) eşitsizliğinde, $g(x) = 1$ alınırsa

$$\left|\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}\right) - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(\ln b - \ln a)^{\alpha}}\left[{}_HJ^{\alpha}_{a^+}f(b) + {}_HJ^{\alpha}_{b^-}f(a)\right]\right|$$
$$\leq \frac{(\ln b - \ln a)}{2^{\alpha+2}}\left[C_1(\alpha)\left|f'(a)\right| + C_2(\alpha)\left|f'(G)\right| + C_3(\alpha)\left|f'(b)\right|\right] \tag{4.1.20}$$

eşitsizliği elde edilir.

iii. Eğer Sonuç 4.1.1' deki (4.1.10) eşitsizliğinde, $g(x) = 1$ ve $\alpha = 1$ alınırsa

$$\left| \left(\frac{f(a) + f(b)}{2} \right) - \frac{1}{(\ln b - \ln a)} \int_a^b \frac{f(x)}{x} dx \right|$$
$$\leq \frac{(\ln b - \ln a)}{4} \left[E_1(1) |f'(a)| + E_2(1) |f'(G)| + E_3(1) |f'(b)| \right] \quad (4.1.21)$$

eşitsizliği elde edilir.

Teorem 4.1.2 $f : I \subseteq \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, I^o da diferansiyellenebilir bir fonksiyon, $a, b \in I^o$, $a < b$, ve $g : [a, b] \longrightarrow [0, \infty)$ sürekli, pozitif bir fonksiyon ve $x = \sqrt{ab}$' ye göre geometrik simetrik olsun. Eğer $|f'|^q$, $[a, b]$ aralığında geometrik-aritmetik konveks bir fonksiyon ise

$$\left| [h(b) - 2h(a)] \frac{f(a)}{2} + h(b) \frac{f(b)}{2} - \int_a^b f(x) h'(x) dx \right| \leq \frac{\ln b - \ln a}{4}$$

$$\times \left\{ \begin{array}{c} \left(\int_0^1 |2h(a^t G^{1-t}) - h(b)| \, dt \right)^{1-\frac{1}{q}} \times \\ \left(\int_0^1 \begin{array}{c} (|2h(a^t G^{1-t}) - h(b)|) \times \\ \left(t a^{qt} G^{q(1-t)} |f'(a)|^q + (1-t) a^{qt} G^{q(1-t)} |f'(G)|^q \right) dt \end{array} \right)^{\frac{1}{q}} \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{c} + \left(\int_0^1 |2h(b^t G^{1-t}) - h(b)| \, dt \right)^{1-\frac{1}{q}} \times \\ \left(\int_0^1 \begin{array}{c} (|2h(b^t G^{1-t}) - h(b)|) \times \\ \left(t b^{qt} G^{q(1-t)} |f'(b)|^q + (1-t) b^{qt} G^{q(1-t)} |f'(G)|^q \right) dt \end{array} \right)^{\frac{1}{q}} \end{array} \right\} \quad (4.1.22)$$

olur.

İspat. (4.1.7) eşitsizliğinde $|f'|^q$ fonksiyonunun geometrik aritmetik konveks fonksiyon olduğunu ve Sonuç 3.3.1' i kullanırsak ispat tamamlanır.

Sonuç 4.1.3 $g:[a,b]\longrightarrow[0,\infty)$ sürekli, pozitif, $\sqrt{ab}$' e göre geometrik simetrik bir fonksiyon ve $\|g\|_\infty=\sup_{x\in[a,b]}|g(x)|$ olsun. Bu durumda Teorem 4.1.2' nin koşulları altında $h:[a,b]\longrightarrow[0,\infty)$, $x\in[a,b]$ ve $\alpha>0$ için $h(x)=\int\limits_a^x\left[\left(ln\frac{b}{t}\right)^{\alpha-1}+\left(ln\frac{t}{a}\right)^{\alpha-1}\right]\frac{g(t)}{t}dt$ şeklinde tanımlanırsa, $q\geq1$ için

$$\begin{aligned}
&\left|\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}\right)\left[{}_HJ^\alpha_{a+}g(b)+{}_HJ^\alpha_{b-}g(a)\right]-\left[{}_HJ^\alpha_{a+}\left(fg\right)(b)+{}_HJ^\alpha_{b-}\left(fg\right)(a)\right]\right|\\
\leq\;&\frac{(\ln b-\ln a)^{\alpha+1}\|g\|_\infty}{2^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)}\left(\frac{2^{\alpha+2}-2^2}{\alpha+1}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left[C_1(\alpha,q)\left|f'(a)\right|^q+C_2(\alpha,q)\left|f'(G)\right|^q\right.\\
+\;&\left.C_3(\alpha,q)\left|f'(b)\right|^q\right]^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}\tag{4.1.23}$$

eşitsizliği sağlanır, burada katsayılar

$$\begin{aligned}
C_1(\alpha,q)&=\int\limits_0^1\left[(1+t)^\alpha-(1-t)^\alpha\right]ta^{qt}G^{q(1-t)}dt,\\
C_2(\alpha,q)&=\int\limits_0^1\left[(1+t)^\alpha-(1-t)^\alpha\right](1-t)\left(a^{qt}G^{q(1-t)}+b^{qt}G^{q(1-t)}\right)dt,\\
C_3(\alpha,q)&=\int\limits_0^1\left[(1+t)^\alpha-(1-t)^\alpha\right]tb^{qt}G^{q(1-t)}dt
\end{aligned}$$

integralleriyle tanımlanır.

İspat. Teorem 4.1.2' deki (4.1.22) eşitsizliği ve (4.1.17) eşitliğinden yararlanırsak

$$\begin{aligned}
&\left|\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}\right)\left[{}_HJ^\alpha_{a+}g(b)+{}_HJ^\alpha_{b-}g(a)\right]-\left[{}_HJ^\alpha_{a+}\left(fg\right)(b)+{}_HJ^\alpha_{b-}\left(fg\right)(a)\right]\right|\\
\leq\;&\frac{(\ln b-\ln a)^{\alpha+1}\|g\|_\infty}{2^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)}\times\\
&\left\{\begin{array}{c}\left(\int\limits_0^1\left[(1+t)^\alpha-(1-t)^\alpha\right]dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\times\\
\left(\int\limits_0^1\left[(1+t)^\alpha-(1-t)^\alpha\right]\left(ta^{qt}G^{q(1-t)}\left|f'(a)\right|^q+(1-t)a^{qt}G^{q(1-t)}\left|f'(G)\right|^q\right)dt\right)^{\frac{1}{q}}\end{array}\right.\\
+\;&\left.\begin{array}{c}\left(\int\limits_0^1\left[(1+t)^\alpha-(1-t)^\alpha\right]dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\times\\
\left(\int\limits_0^1\left[(1+t)^\alpha-(1-t)^\alpha\right]\left(tb^{qt}G^{q(1-t)}\left|f'(b)\right|^q+(1-t)b^{qt}G^{q(1-t)}\left|f'(G)\right|^q\right)dt\right)^{\frac{1}{q}}\end{array}\right\}
\end{aligned}$$

$$\leq \quad \frac{(\ln b-\ln a)^{\alpha+1}\|g\|_{\infty}}{2^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)}(\frac{2^{\alpha+1}-2}{\alpha+1})^{1-\frac{1}{q}}\times$$

$$\left[\begin{array}{c}\left(\int\limits_0^1 \begin{array}{c}[(1+t)^{\alpha}-(1-t)^{\alpha}]\times \\ \left[ta^{qt}G^{q(1-t)}\left|f'(a)\right|^q+(1-t)a^{qt}G^{q(1-t)}\left|f'(G)\right|^q\right]dt\end{array}\right)^{\frac{1}{q}} \\ +\left(\int\limits_0^1 \begin{array}{c}[(1+t)^{\alpha}-(1-t)^{\alpha}]\times \\ \left[tb^{qt}G^{q(1-t)}\left|f'(b)\right|^q+(1-t)b^{qt}G^{q(1-t)}\left|f'(G)\right|^q\right]dt\end{array}\right)^{\frac{1}{q}}\end{array}\right] \tag{4.1.24}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Öte yandan $a>0$, $b>0$, $\quad r<1, a^r+b^r<2^{1-r}(a+b)^r$ ifadesinden yararlanırsak, $q\geq 1$ için

$$\leq \quad \frac{(\ln b-\ln a)^{\alpha+1}\|g\|_{\infty}}{2^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)}(\frac{2^{\alpha+2}-2^2}{\alpha+1})^{1-\frac{1}{q}}\times$$

$$\left[\int_0^1\left(\begin{array}{c}[(1+t)^{\alpha}-(1-t)^{\alpha}]\,ta^{qt}G^{q(1-t)}\left|f'(a)\right|^q+ \\ [(1+t)^{\alpha}-(1-t)^{\alpha}]\,(1-t)\left(\begin{array}{c}a^{qt}G^{q(1-t)} \\ +b^{qt}G^{q(1-t)}\end{array}\right)\left|f'(G)\right|^q \\ +[(1+t)^{\alpha}-(1-t)^{\alpha}]\,tb^{qt}G^{q(1-t)}\left|f'(b)\right|^q\end{array}\right)dt\right]^{\frac{1}{q}} \tag{4.1.25}$$

elde ederiz ve böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 4.1.4 Sonuç 4.1.3' de $\alpha=1$ ve $g(x)=\frac{1}{\ln b-\ln a}$ alınırsa,

$$\left|\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}\right)-\frac{1}{\ln b-\ln a}\int\limits_a^b\frac{f(x)}{x}dx\right|\leq\frac{(\ln b-\ln a)}{2^{2+\frac{1}{q}}}\times$$

$$\left[C_1(1,q)\left|f'(a)\right|^q+C_2(1,q)\left|f'(G)\right|^q+C_3(1,q)\left|f'(b)\right|^q\right]^{\frac{1}{q}} \tag{4.1.26}$$

eşitzsizliği elde edilir.

Şimdi ise Hermite-Hadamard-Fejér tipli kesirli integral eşitsizliğinin geometrik-aritmetik konveks fonksiyonlar için sol tarafını elde edeceğimiz Lemma 4.1.2 ve bu lemmaya bağlı teoremlerle ilgileneceğiz.

Lemma 4.1.2 $f: I\subseteq\mathbb{R}^+\longrightarrow\mathbb{R}$ fonksiyonu, I^o' da diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $a,b\in I^o$, $a<b$ olsun. $h:[a,b]\longrightarrow[0,\infty)$ diferansiyellenebilir

fonksiyonu ve $f' \in L[a,b]$ için

$$\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}\right)h(a)-f(G)h(b)+\frac{\ln b-\ln a}{4}\times$$
$$\left\{\begin{array}{c}\int\limits_0^1 [h'(L_G(t))L_G(t)+h'(U_G(t))U_G(t)]\times \\ [f(L_G(t))+f(U_G(t))]\,dt\end{array}\right\}$$

$$= \frac{lnb-lna}{4}\left\{\int\limits_0^1 [h(L_G(t))-h(U_G(t))+h(b)]\times\right.$$
$$[-f'(L_G(t))L_G(t)+f'(U_G(t))U_G(t)]\,dt\} \qquad (4.1.27)$$

eşitliği sağlanır.

İspat. Eşitliğin sol tarafındaki integralleri iki parça halinde ispatlayacağız. İlk integrali kısmi integrasyon yöntemiyle

$$\begin{aligned} I_1 &= \int\limits_0^1 [h(L_G(t))-h(U_G(t))+h(b)]\,d\left(f\left(L_G(t)\right)\right) \\ &= [h(L_G(t))-h(U_G(t))+h(b)]\,f\left(L_G(t)\right)\big|_0^1 \\ &- \int\limits_0^1 f(L_G(t))\left[h'(L_G(t))L_G(t)\ln\left(\frac{a}{G}\right)-h'(U_G(t))U_G(t)\ln\left(\frac{b}{G}\right)\right]dt \end{aligned}$$

şeklinde elde ederiz. Şimdi ise aynı yöntemle ikinci integrali aldığımızda

$$\begin{aligned} I_2 &= \int\limits_0^1 [h(L_G(t))-h(U_G(t))+h(b)]\,d\left(f\left(U_G(t)\right)\right) \\ &= [h(L_G(t))-h(U_G(t))+h(b)]\,f\left(U_G(t)\right)\big|_0^1 \\ &- \int\limits_0^1 f(U_G(t))\left[h'(L_G(t))L_G(t)\ln\left(\frac{a}{G}\right)-h'(U_G(t))U_G(t)\ln\left(\frac{b}{G}\right)\right]dt \end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Elde edilen I_1 ve I_2 integrallerini taraf tarafa toplayıp ikiye böldüğümüzde

$$\begin{aligned} \frac{I_1+I_2}{2} &= \left(\frac{f(a)+f(b)}{2}\right)h(a)-h(b)f(G) \\ &+ \frac{lnb-lna}{4}\left\{\begin{array}{c}\int\limits_0^1 [h'(L_G(t))L_G(t)+h'(U_G(t))U_G(t)] \\ \times[f(L_G(t))+f(U_G(t))]\,dt\end{array}\right\} \end{aligned} \qquad (4.1.28)$$

elde edilir ve böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.1.3 $f : I \subseteq \mathbb{R}^{+} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I^{o}' da differansiyellenebilir ve $h : [a,b] \longrightarrow [0,\infty)$ diferansiyellenebilir fonksiyon , $a,b \in I^{o}$, $a < b$ olsun. Eğer $|f'|$, $[a,b]$ aralığında geometrik-aritmetik konveks fonksiyon ise

$$\left|\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}\right)h(a)-h(b)f(\sqrt{ab})+\frac{1}{2}\left[\int_a^b f(x)h'(x)dx+\int_a^b f(x)h'(\frac{ab}{x})\frac{ab}{x^2}dx\right]\right|$$

$$\leq \frac{\ln b-\ln a}{4}\left[\zeta_1(a,b)\left|f'(a)\right|+\zeta_2(a,b)\left|f'(G)\right|+\zeta_3(a,b)\left|f'(b)\right|\right] \quad (4.1.29)$$

eşitsizliği gerçeklenir ve burada katsayılar

$$\zeta_1(a,b) = \int_0^1 tL_G(t)\left|h(L_G(t))-h(U_G(t))+h(b)\right|dt \quad (4.1.30)$$

$$\zeta_2(a,b) = \int_0^1 (1-t)L_G(t)\left|h(L_G(t))-h(U_G(t))+h(b)\right|dt + \int_0^1 (1-t)U_G(t)\left|h(L_G(t))-h(U_G(t))+h(b)\right|dt \quad (4.1.31)$$

$$\zeta_3(a,b) = \int_0^1 tU_G(t)\left|h(L_G(t))-h(U_G(t))+h(b)\right|dt \quad (4.1.32)$$

integralleriyle tanımlanır.

İspat. Lemma 4.1.2 deki (4.1.27) eşitliğinin her iki tarafının mutlak değeri alınırsa

$$\left|\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}\right)h(a)-h(b)f(\sqrt{ab})+\frac{1}{2}\left[\int_a^b f(x)h'(x)dx+\int_a^b f(x)h'(\frac{ab}{x})\frac{ab}{x^2}dx\right]\right|$$

$$\leq \frac{lnb-lna}{4}\left\{\int_0^1 \left|h(L_G(t))-h(U_G(t))+h(b)\right|\left|f'\left(L_G(t)\right)L_G(t)\right|dt + \int_0^1 \left|h(L_G(t))-h(U_G(t))+h(b)\right|\left|f'\left(U_G(t)\right)U_G(t)\right|dt\right\} \quad (4.1.33)$$

elde edilir. (4.1.33) eşitsizliğinde $|f'|$ fonksiyonunun geometrik-aritmetik konveks fonksiyon olduğunu kullanırsak

$$\left| \left(\frac{f(a)+f(b)}{2}\right) h(a) - h(b) f(\sqrt{ab}) + \frac{1}{2}\left[\int_a^b f(x)h'(x)dx + \int_a^b f(x)h'(\frac{ab}{x})\frac{ab}{x^2}dx\right]\right|$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{lnb-lna}{4}\left\{\int_0^1 |h(L_G(t)) - h(U_G(t)) + h(b)| \left[t\left|f'(a)\right| + (1-t)\left|f'(G)\right|\right] L_G(t)dt\right. \\ &+ \left.\int_0^1 |h(L_G(t)) - h(U_G(t)) + h(b)| \left[t\left|f'(b)\right| + (1-t)\left|f'(G)\right|\right] U_G(t)dt\right\} \qquad (4.1.34) \end{aligned}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Son eşitsizlikte integral içerisindeki mutlak değer ifadesini parantez içine dağıttımızda ispatı tamamlamış oluruz.

Sonuç 4.1.5 $g : [a,b] \longrightarrow [0,\infty)$ sürekli, pozitif, $\sqrt{ab}$' e göre geometrik simetrik bir fonksiyon ve $\|g\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |g(x)|$ olsun. Bu durumda Teorem 4.1.3 koşulları altında $h : [a,b] \longrightarrow [0,\infty)$, $x \in [a,b]$ ve $\alpha > 0$ için $h(x) = \int_a^x \left[\left(ln\frac{b}{t}\right)^{\alpha-1} + \left(ln\frac{t}{a}\right)^{\alpha-1}\right]$ $\frac{g(t)}{t}dt$ şeklinde tanımlanırsa

$$\left|\left[{}_HJ^\alpha_{a^+}(fg)(b) + {}_HJ^\alpha_{b^-}(fg)(a)\right] - f\left(\sqrt{ab}\right)\left[{}_HJ^\alpha_{a^+}g(b) + {}_HJ^\alpha_{b^-}g(a)\right]\right|$$

$$\leq \frac{(\ln b - \ln a)^{\alpha+1}}{2\Gamma(\alpha+1)} \|g\|_\infty \left[K_1(\alpha)\left|f'(a)\right| + K_2(\alpha)\left|f'(G)\right| + K_3(\alpha)\left|f'(b)\right|\right] \quad (4.1.35)$$

eşitsizliği sağlanır ve burada katsayılar

$$\begin{aligned} K_1(\alpha) &= \int_0^1 \left[1 - (\frac{1+t}{2})^\alpha + (\frac{1-t}{2})^\alpha\right] tL_G(t)dt, \\ K_2(\alpha) &= \int_0^1 (1-t)\left[1 - (\frac{1+t}{2})^\alpha + (\frac{1-t}{2})^\alpha\right]\left[L_G(t) + U_G(t)\right]dt, \\ K_3(\alpha) &= \int_0^1 \left[1 - (\frac{1+t}{2})^\alpha + (\frac{1-t}{2})^\alpha\right] tU_G(t)dt \end{aligned}$$

integralleriyle ifade edilir.

İspat. Teorem 4.1.3' ün ispatındaki (4.1.34) eşitsizliğinde $x \in [a,b]$ için

$$h(x) = \int_a^x \left[\left(ln\frac{b}{t}\right)^{\alpha-1} + \left(ln\frac{t}{a}\right)^{\alpha-1}\right]\frac{g(t)}{t}dt$$

ile tanımlanmış fonksiyon gözönüne alınırsa

$$\left|\frac{1}{2}\left[\int_a^b f(x)\left[\left(ln\frac{b}{x}\right)^{\alpha-1}+\left(ln\frac{x}{a}\right)^{\alpha-1}\right]\frac{g(x)}{x}dx\right.\right.$$

$$\left.+\int_a^b f(x)\left[\left(ln\frac{b}{x}\right)^{\alpha-1}+\left(ln\frac{x}{a}\right)^{\alpha-1}\right]\frac{g(\frac{ab}{x})}{x}dx\right]$$

$$\left.-f(\sqrt{ab})\int_a^b f(x)\left[\left(ln\frac{b}{x}\right)^{\alpha-1}+\left(ln\frac{x}{a}\right)^{\alpha-1}\right]\frac{g(x)}{x}dx\right|$$

olduğu görülür. $g(x)$ fonksiyonu $\sqrt{ab}$' ye göre geometrik simetrik olduğundan

$$\left|\int_a^b f(x)\left[\left(ln\frac{b}{x}\right)^{\alpha-1}+\left(ln\frac{x}{a}\right)^{\alpha-1}\right]\frac{g(x)}{x}dx\right.$$

$$\left.-f(\sqrt{ab})\int_a^b f(x)\left[\left(ln\frac{b}{x}\right)^{\alpha-1}+\left(ln\frac{x}{a}\right)^{\alpha-1}\right]\frac{g(x)}{x}dx\right|$$

$$=\left|\Gamma(\alpha)\left[{}_HJ^{\alpha}_{a^+}(fg)(b)+{}_HJ^{\alpha}_{b^-}(fg)(a)\right]-\Gamma(\alpha)\left[{}_HJ^{\alpha}_{a^+}g(b)+{}_HJ^{\alpha}_{b^-}g(a)\right]f(\sqrt{ab})\right| \tag{4.1.36}$$

ifadesi elde edilir. Diğer taraftan (4.1.34) eşitsizliğinin sağ tarafında da aynı fonksiyonu kullanırsak

$$\leq\frac{lnb-lna}{4}$$

$$\left\{\int_0^1\left|\begin{array}{l}\int_a^{L_G(t)}\left[\left(\ln\frac{b}{x}\right)^{\alpha-1}+\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{\alpha-1}\right]\frac{g(x)}{x}dx\\-\int_a^{U_G(t)}\left[\left(\ln\frac{b}{x}\right)^{\alpha-1}+\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{\alpha-1}\right]\frac{g(x)}{x}dx\\+\int_a^{b}\left[\left(\ln\frac{b}{x}\right)^{\alpha-1}+\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{\alpha-1}\right]\frac{g(x)}{x}dx\end{array}\right|\left[tf'(a)+(1-t)f'(G)\right]L_G(t)dt\right.$$

$$\left.+\int_0^1\left|\begin{array}{l}\int_a^{L_G(t)}\left[\left(\ln\frac{b}{x}\right)^{\alpha-1}+\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{\alpha-1}\right]\frac{g(x)}{x}dx\\-\int_a^{U_G(t)}\left[\left(\ln\frac{b}{x}\right)^{\alpha-1}+\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{\alpha-1}\right]\frac{g(x)}{x}dx\\+\int_a^{b}\left[\left(\ln\frac{b}{x}\right)^{\alpha-1}+\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{\alpha-1}\right]\frac{g(x)}{x}dx\end{array}\right|\left[tf'(b)+(1-t)f'(G)\right]U_G(t)dt\right\} \tag{4.1.37}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Son eşitsizlikte integral içerisini

$$\left|\int_a^{L_G(t)}\left[\left(\ln\frac{b}{x}\right)^{\alpha-1}+\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{\alpha-1}\right]\frac{g(x)}{x}dx-\int_a^{U_G(t)}\left[\left(\ln\frac{b}{x}\right)^{\alpha-1}+\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{\alpha-1}\right]\frac{g(x)}{x}dx\right.$$

$$\left.+\int_a^{b}\left[\left(\ln\frac{b}{x}\right)^{\alpha-1}+\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{\alpha-1}\right]\frac{g(x)}{x}dx\right|$$

$$=\left|\int_a^{L_G(t)}\left[\left(\ln\frac{b}{x}\right)^{\alpha-1}+\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{\alpha-1}\right]\frac{g(x)}{x}dx+\int_{U_G(t)}^{b}\left[\left(\ln\frac{b}{x}\right)^{\alpha-1}+\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{\alpha-1}\right]\frac{g(x)}{x}dx\right| \tag{4.1.38}$$

olarak yazabiliriz ve $g(x)$ fonksiyonu $\sqrt{ab}$' ye göre geometrik simetrik olduğundan her $t\in[0,1]$ için

$$\int_a^{L_G(t)}\left[\left(\ln\frac{b}{x}\right)^{\alpha-1}+\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{\alpha-1}\right]\frac{g(x)}{x}dx=\int_{U_G(t)}^{b}\left[\left(\ln\frac{b}{x}\right)^{\alpha-1}+\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{\alpha-1}\right]\frac{g(x)}{x}dx \tag{4.1.39}$$

ifadesini elde ederiz. Böylece

$$\left|\left[{}_HJ^{\alpha}_{a^+}(fg)(b)+{}_HJ^{\alpha}_{b^-}(fg)(a)\right]-\left[{}_HJ^{\alpha}_{a^+}g(b)+{}_HJ^{\alpha}_{b^-}g(a)\right]f(\sqrt{ab})\right|$$

$$\leq\frac{lnb-lna}{2\Gamma(\alpha)}\left\{\begin{array}{c}\int_0^1\left|\int_a^{L_G(t)}\left[\left(\ln\frac{b}{x}\right)^{\alpha-1}+\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{\alpha-1}\right]\frac{g(x)}{x}dx\right|\times\\ \left[tf'(a)+(1-t)f'(G)\right]L_G(t)dt\\ +\int_0^1\left|\int_a^{L_G(t)}\left[\left(\ln\frac{b}{x}\right)^{\alpha-1}+\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{\alpha-1}\right]\frac{g(x)}{x}dx\right|\times\\ \left[tf'(b)+(1-t)f'(G)\right]U_G(t)dt\end{array}\right\}$$

$$\leq\frac{lnb-lna}{2\Gamma(\alpha)}\|g\|_\infty\left\{\begin{array}{c}\int_0^1\left(\int_a^{L_G(t)}\left[\left(\ln\frac{b}{x}\right)^{\alpha-1}+\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{\alpha-1}\right]\frac{1}{x}dx\right)\times\\ \left[tf'(a)+(1-t)f'(G)\right]L_G(t)dt\\ +\int_0^1\left(\int_a^{L_G(t)}\left[\left(\ln\frac{b}{x}\right)^{\alpha-1}+\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{\alpha-1}\right]\frac{1}{x}dx\right)\times\\ \left[tf'(b)+(1-t)f'(G)\right]U_G(t)dt\end{array}\right\} \tag{4.1.40}$$

eşitsizliği yazılabilir. Son eşitsizlikte integral içerisindeki integral ifadesini

$$\int_a^{L_G(t)} \left[\left(\ln \frac{b}{x} \right)^{\alpha-1} + \left(\ln \frac{x}{a} \right)^{\alpha-1} \right] \frac{1}{x} dx$$

$$= \frac{(\ln b - \ln a)^\alpha}{\alpha} \left[1 - \left(\frac{1+t}{2} \right)^\alpha + \left(\frac{1-t}{2} \right)^\alpha \right] \quad (4.1.41)$$

şeklinde elde ederiz. (4.1.40) eşitsizliğinde (4.1.41) eşitliğini kullanırsak (4.1.35) eşitsizliğine ulaşırız ve böylece ispatı tamamlamış oluruz.

Sonuç 4.1.6 i. Eğer Sonuç 4.1.5' deki (4.1.35) eşitsizliğinde, $\alpha = 1$ alınırsa

$$\left| \int_a^b f(x) \frac{g(x)}{x} dx - f\left(\sqrt{ab} \right) \int_a^b \frac{g(x)}{x} dx \right| \leq \frac{(\ln b - \ln a)^2}{4} \|g\|_\infty \times$$
$$[K_1(1) \left| f'(a) \right| + K_2(1) \left| f'(G) \right| + K_3(1) \left| f'(b) \right|] \quad (4.1.42)$$

eşitsizliği elde edilir ve burada $a, b > 0$ için

$$K_1(1) = \int_0^1 \left(t - t^2 \right) a^t G^{1-t} dt,$$

$$K_2(1) = \int_0^1 (1-t)^2 \left[a^t G^{1-t} + b^t G^{1-t} \right] dt,$$

$$K_3(1) = \int_0^1 \left(t - t^2 \right) b^t G^{1-t} dt$$

katsayılarına ulaşırız.

ii. Eğer Sonuç 4.1.5' deki (4.1.35) eşitsizliğinde, $g(x) = 1$ alınırsa

$$\left| \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(\ln b - \ln a)^\alpha} \left[{}_H J_{a+}^\alpha f(b) + {}_H J_{b-}^\alpha f(a) \right] - f\left(\sqrt{ab} \right) \right|$$
$$\leq \frac{(\ln b - \ln a)}{4} \left[K_1(\alpha) \left| f'(a) \right| + K_2(\alpha) \left| f'(G) \right| \right.$$
$$\left. + K_3(\alpha) \left| f'(b) \right| \right] \quad (4.1.43)$$

eşitsizliği elde edilir.

iii. Eğer Sonuç 4.1.5' deki (4.1.35) eşitsizliğinde $g(x) = 1$ ve $\alpha = 1$ alınırsa

$$\left| \frac{1}{(\ln b - \ln a)} \int_a^b \frac{f(x)}{x} dx - f\left(\sqrt{ab}\right) \right|$$

$$\leq \frac{(\ln b - \ln a)}{4} \left[K_1(1) |f'(a)| + K_2(1) |f'(G)| + K_3(1) |f'(b)| \right] \quad (4.1.44)$$

eşitsizliği elde edilir.

Teorem 4.1.4 $f : I \subseteq \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu, I^o' da diferansiyellenebilir $a, b \in I^o$, $a < b$, ve $g : [a, b] \longrightarrow [0, \infty)$ sürekli, pozitif ve $x = \sqrt{ab}$' ye göre geometrik simetrik bir fonksiyon olsun. Eğer $|f'|^q$, $[a, b]$ aralığında geometrik-aritmetik konveks bir fonksiyon ise bu takdirde

$$\left| \left(\frac{f(a) + f(b)}{2} \right) h(a) - h(b) f(\sqrt{ab}) + \frac{1}{2} \left[\int_a^b f(x) h'(x) dx + \int_a^b f(x) h'(\frac{ab}{x}) \frac{ab}{x^2} dx \right] \right|$$

$$\leq \frac{\ln b - \ln a}{4} \left\{ \begin{array}{c} \left(\int_0^1 |h(L_G(t)) - h(U_G(t)) + h(b)| \, dt \right)^{1-\frac{1}{q}} \times \\ \left(\int_0^1 \begin{array}{c} (|h(L_G(t)) - h(U_G(t)) + h(b)|) \times \\ (t (L_G(t))^q |f'(a)|^q + (1-t) (L_G(t))^q |f'(G)|^q) \, dt \end{array} \right)^{\frac{1}{q}} \\ + \left(\int_0^1 |h(L_G(t)) - h(U_G(t)) + h(b)| \, dt \right)^{1-\frac{1}{q}} \times \\ \left(\int_0^1 \begin{array}{c} (|h(L_G(t)) - h(U_G(t)) + h(b)|) \times \\ (t (U_G(t))^q |f'(b)|^q + (1-t) (U_G(t))^q |f'(G)|^q) \, dt \end{array} \right)^{\frac{1}{q}} \end{array} \right\} \quad (4.1.45)$$

dir.

İspat. Teorem 4.1.3' ün ispatındaki (4.1.33) eşitsizliğinde $|f'|^q$, $q \geq 1$, fonksiyonunun geometrik aritmetik konveks fonksiyon olduğunu ve Sonuç 3.3.1 ifadesini kullanırsak ispat tamamlanır.

Sonuç 4.1.7 $g : [a, b] \longrightarrow [0, \infty)$ sürekli, pozitif, $\sqrt{ab}$' e göre geometrik simetrik bir fonksiyon ve $\|g\|_\infty = \sup_{x \in [a,b]} |g(x)|$ olsun. Bu durumda Teorem 4.1.4 koşulları altında $h:[a,b]\longrightarrow[0,\infty)$ fonksiyonu, $t\in[a,b]$ ve $\alpha>0$ için $h(x)=\int\limits_a^x\left[\left(ln\frac{b}{t}\right)^{\alpha-1}\right.$ $\left.+\left(ln\frac{t}{a}\right)^{\alpha-1}\right]\frac{g(t)}{t}dt$ şeklinde tanımlanırsa , $q\geq 1$ için

$$\begin{aligned}&\left|\left[{}_HJ_{a^+}^{\alpha}(fg)(b)+{}_HJ_{b^-}^{\alpha}(fg)(a)\right]-\left[{}_HJ_{a^+}^{\alpha}g(b)+{}_HJ_{b^-}^{\alpha}g(a)\right]f(\sqrt{ab})\right|\\&\leq\frac{(\ln b-\ln a)^{\alpha+1}\|g\|_\infty}{4\Gamma(\alpha+1)}\left[2-\frac{4}{\alpha+1}+\frac{2^{2-\alpha}}{\alpha+1}\right]^{1-\frac{1}{q}}\\&\left[K_1(\alpha,q)|f'(a)|^q+K_2(\alpha,q)|f'(G)|^q+K_3(\alpha,q)|f'(b)|^q\right]^{\frac{1}{q}}\end{aligned}\tag{4.1.46}$$

eşitsizliği elde edilir, burada katsayılar

$$\begin{aligned}K_1(\alpha,q)&=\int\limits_0^1\left[1-\left(\frac{1+t}{2}\right)^{\alpha}+\left(\frac{1-t}{2}\right)^{\alpha}\right]t\,(L_G(t))^q\,dt\\K_2(\alpha,q)&=\int\limits_0^1\left[1-\left(\frac{1+t}{2}\right)^{\alpha}+\left(\frac{1-t}{2}\right)^{\alpha}\right](1-t)\left((L_G(t))^q+(U_G(t))^q\right)dt\\K_3(\alpha,q)&=\int\limits_0^1\left[1-\left(\frac{1+t}{2}\right)^{\alpha}+\left(\frac{1-t}{2}\right)^{\alpha}\right]t\,(U_G(t))^q\,dt\end{aligned}$$

integralleriyle tanımlanır.

İspat. Teorem 4.1.4' deki (4.1.45) eşitsizliğinde, Sonuç 4.1.5' deki (4.1.38), (4.1.39) ve (4.1.41) eşitliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned}&\left|\left[{}_HJ_{a^+}^{\alpha}(fg)(b)+{}_HJ_{b^-}^{\alpha}(fg)(a)\right]-\left[{}_HJ_{a^+}^{\alpha}g(b)+{}_HJ_{b^-}^{\alpha}g(a)\right]f(\sqrt{ab})\right|\\&\leq\frac{(\ln b-\ln a)^{\alpha+1}\|g\|_\infty}{4\Gamma(\alpha+1)}\\&\left\{\begin{array}{c}\left(\int\limits_0^1\left[1-\left(\frac{1+t}{2}\right)^{\alpha}+\left(\frac{1-t}{2}\right)^{\alpha}\right]dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\times\\\left(\int\limits_0^1\begin{array}{c}\left[1-\left(\frac{1+t}{2}\right)^{\alpha}+\left(\frac{1-t}{2}\right)^{\alpha}\right]\times\\\left[t\,(L_G(t))^q|f'(a)|^q+(1-t)\,(L_G(t))^q|f'(G)|^q\right]dt\end{array}\right)^{\frac{1}{q}}\\+\begin{array}{c}\left(\int\limits_0^1\left[1-\left(\frac{1+t}{2}\right)^{\alpha}+\left(\frac{1-t}{2}\right)^{\alpha}\right]dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\times\\\left(\int\limits_0^1\begin{array}{c}\left[1-\left(\frac{1+t}{2}\right)^{\alpha}+\left(\frac{1-t}{2}\right)^{\alpha}\right]\times\\\left[t\,(U_G(t))^q|f'(b)|^q+(1-t)\,(U_G(t))^q|f'(G)|^q\right]dt\end{array}\right)^{\frac{1}{q}}\end{array}\end{array}\right\}\end{aligned}$$

$$\leq \frac{(\ln b-\ln a)^{\alpha+1}\|g\|_\infty}{4\Gamma(\alpha+1)}\left[1-\frac{2}{\alpha+1}+\frac{2^{1-\alpha}}{\alpha+1}\right]^{1-\frac{1}{q}}\times$$
$$\left[\begin{array}{c}\left(\int\limits_0^1 \begin{array}{c}\left[1-\left(\frac{1+t}{2}\right)^\alpha+\left(\frac{1-t}{2}\right)^\alpha\right]\times\\ \left[t\left(L_G(t)\right)^q\left|f'(a)\right|^q+(1-t)\left(L_G(t)\right)^q\left|f'(G)\right|^q\right]dt\end{array}\right)^{\frac{1}{q}}\\ +\left(\int\limits_0^1 \begin{array}{c}\left[1-\left(\frac{1+t}{2}\right)^\alpha+\left(\frac{1-t}{2}\right)^\alpha\right]\times\\ \left[t\left(U_G(t)\right)^q\left|f'(b)\right|^q+(1-t)\left(U_G(t)\right)^q\left|f'(G)\right|^q\right]dt\end{array}\right)^{\frac{1}{q}}\end{array}\right] \tag{4.1.47}$$

olduğu görülür. Son eşitsizlikte $a>0$, $b>0$, $r<1, a^r+b^r<2^{1-r}(a+b)^r$ ifadesi altında

$$\leq \frac{(\ln b-\ln a)^{\alpha+1}\|g\|_\infty}{4\Gamma(\alpha+1)}\left[2-\frac{4}{\alpha+1}+\frac{2^{2-\alpha}}{\alpha+1}\right]^{1-\frac{1}{q}}\times$$
$$\left[\int\limits_0^1\left(\begin{array}{c}\left[1-\left(\frac{1+t}{2}\right)^\alpha+\left(\frac{1-t}{2}\right)^\alpha\right]t\left(L_G(t)\right)^q\left|f'(a)\right|^q\\ \\ +\left[1-\left(\frac{1+t}{2}\right)^\alpha+\left(\frac{1-t}{2}\right)^\alpha\right](1-t)\left(\begin{array}{c}\left(L_G(t)\right)^q\\ +\left(U_G(t)\right)^q\end{array}\right)\left|f'(G)\right|^q\\ \\ +\left[1-\left(\frac{1+t}{2}\right)^\alpha+\left(\frac{1-t}{2}\right)^\alpha\right]t\left(U_G(t)\right)^q\left|f'(b)\right|^q\end{array}\right)dt\right]^{\frac{1}{q}} \tag{4.1.48}$$

eşitsizliğini elde ederiz ve böylece ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 4.1.8 Sonuç 4.1.7' de $\alpha=1$ ve $g(x)=\frac{1}{\ln b-\ln a}$ alınırsa,

$$\left|\frac{1}{\ln b-\ln a}\int\limits_a^b\frac{f(x)}{x}dx-f\left(\sqrt{ab}\right)\right|\leq\frac{(\ln b-\ln a)}{4}\times$$
$$\left[K_1(1,q)\left|f'(a)\right|^q+K_2(1,q)\left|f'(G)\right|^q+K_3(1,q)\left|f'(b)\right|^q\right]^{\frac{1}{q}} \tag{4.1.49}$$

eşitsizliği elde edilir.

4.2 Harmonik-Aritmetik Fonksiyonlar için Hermite-Hadamard-Fejér Tipli Kesirli İntegral Eşitsizlikleri

Bu bölümde harmonik konveks fonksiyonlar için yeni Hermite-Hadamard-Fejér tipli kesirli integral eşitsizlikleri elde edildi. Öncelikle sol tarafı için bir lemma ve bu lemmadan yararlanarak teorem ve sonuçlar verildi. Bu bölümde $a,b \in \mathbb{R}^{+}$, $t \in [0,1]$ için $H := H(a,b) = \frac{2ab}{a+b}$, $L_H(t) = \frac{aH}{tH+(1-t)a}$ ve $U_H(t) = \frac{bH}{tH+(1-t)b}$ notasyonları kullanılacaktır.

Lemma 4.2.1 $I \subseteq \mathbb{R} \setminus \{0\}$ bir reel sayı aralığı olsun. $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu, I^o da diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $a,b \in I^o$, $a < b$ olsun. $h : [a,b] \longrightarrow [0,\infty)$ diferansiyellenebilir fonksiyon ve $f' \in L([a,b])$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{f(a)+f(b)}{2}\right) h(a) - f(H)h(b) \\
+ & \frac{b-a}{4ab}\left\{\begin{array}{c} \int\limits_0^1 \left[h'(L_H(t))\left(L_H(t)\right)^2 + h'(U_H(t))\left(U_H(t)\right)^2\right] \times \\ \left[f(L_H(t)) + f(U_H(t))\right] dt \end{array}\right\} \\
= & \frac{b-a}{4ab}\left\{\begin{array}{c} \int\limits_0^1 \left[h(L_H(t)) - h(U_H(t)) + h(b)\right] \times \\ \left[-f'(L_H(t))\left(L_H(t)\right)^2 + f'(U_H(t))\left(U_H(t)\right)^2\right] dt \end{array}\right\}
\end{aligned} \tag{4.2.1}$$

eşitliği sağlanır.

İspat. Eşitliğin sol tarafındaki integralleri iki parça halinde ispatlayacağız. İlk integralde kısmi integrasyon yöntemini kullandığımızda

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^1 \left[h(L_H(t)) - h(U_H(t)) + h(b)\right] d\left(f\left(L_H(t)\right)\right) \\
&= \left[h(L_H(t)) - h(U_H(t)) + h(b)\right] f\left(L_H(t)\right)\Big|_0^1 \\
&- \int_0^1 f(L_H(t))\left[h'(L_H(t))L'(t) - h'(U_H(t))U'(t)\right] dt \\
&= h(a)f(a) - h(b)f(H) - \int_0^1 f(L_H(t))\left[h'(L_H(t))L'(t) - h'(U_H(t))U'(t)\right] dt
\end{aligned}$$

elde ederiz. İkinci integral için de kısmi integrasyon uyguladığımızda

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_0^1 \left[h(L_H(t)) - h(U_H(t)) + h(b)\right] d\left(f\left(U_H(t)\right)\right) \\
&= \left[h(L_H(t)) - h(U_H(t)) + h(b)\right] f\left(U_H(t)\right)\Big|_0^1 \\
&- \int_0^1 f(U_H(t))\left[h'(L_H(t))L'(t) - h'(U_H(t))U'(t)\right] dt
\end{aligned}$$

$$= \quad h(a)f(b)-h(b)f(H)-\int_0^1 f(U_H(t))\left[h'(L_H(t))L'(t)-h'(U_H(t))U'(t)\right]dt$$

elde ederiz. Elde edilen I_1 ve I_2 integrallerini taraf tarafa toplayıp ikiye böldüğümüzde

$$\begin{aligned}\frac{I_1+I_2}{2} &= \left(\frac{f(a)+f(b)}{2}\right)h(a)-h(b)f(H)\\ &+ \frac{b-a}{4ab}\left\{\begin{array}{c}\int_0^1\left[h'(L_H(t))\left(L_H(t)\right)^2+h'(U_H(t))\left(U_H(t)\right)^2\right]\times\\ \left[f(L_H(t))+f(U_H(t))\right]dt\end{array}\right\}\end{aligned} \quad (4.2.2)$$

olduğu görülür ve böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.2.1 $I\subseteq\mathbb{R}\setminus\{0\}$ bir reel sayı aralığı olsun. $f:I\longrightarrow\mathbb{R}$ fonksiyonu, I^o' da diferansiyellenebilir bir fonksiyon, $h:[a,b]\longrightarrow[0,\infty)$ diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $a,b\in I^o$, $a<b$ olsun . Eğer $|f'|$, $[a,b]$ aralığında harmonik konveks bir fonksiyon ise bu takdirde

$$\begin{aligned}&\left|\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}\right)h(a)-h(b)f(\frac{2ab}{a+b})\right.\\ &\left.+\frac{1}{2}\left[\int_a^b f(x)h'(x)dx+\int_a^b f(x)h'(\frac{Hx}{2x-H})\left(\frac{H}{2x-H}\right)^2dx\right]\right|\\ &\le\frac{b-a}{4ab}\left[\zeta_1(a,b)\left|f'(a)\right|+\zeta_2(a,b)\left|f'(H)\right|+\zeta_3(a,b)\left|f'(b)\right|\right]\end{aligned} \quad (4.2.3)$$

eşitsizliği gerçekleşir. Burada katsayılar

$$\zeta_1(a,b) = \int_0^1 t\left(L_H(t)\right)^2\left|h(L_H(t))-h(U_H(t))+h(b)\right|dt \quad (4.2.4)$$

$$\zeta_2(a,b) = \int_0^1 \begin{array}{c}(1-t)\left|h(L_H(t))-h(U_H(t))+h(b)\right|\times\\ \left[\left(L_H(t)\right)^2+\left(U_H(t)\right)^2\right]dt\end{array} \quad (4.2.5)$$

$$\zeta_3(a,b) = \int_0^1 t\left(U_H(t)\right)^2\left|h(L_H(t))-h(U_H(t))+h(b)\right|dt \quad (4.2.6)$$

integralleriyle ifade edelir.

İspat. Lemma 4.2.1 deki (4.2.1) eşitliğinin her iki tarafının mutlak değeri alınırsa

$$\left|\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}\right)h(a)-h(b)f(\frac{2ab}{a+b})\right.$$

$$+\frac{1}{2}\left[\int_a^b f(x)h'(x)dx+\int_a^b f(x)h'(\frac{Hx}{2x-H})\left(\frac{H}{2x-H}\right)^2dx\right]\Bigg|$$

$$\leq \frac{b-a}{4ab}\left\{\int_0^1 |h(L_H(t))-h(U_H(t))+h(b)|\left|f'\left(L_H(t)\right)\left(L_H(t)\right)^2\right|dt\right.$$

$$\left.+\int_0^1 |h(L_H(t))-h(U_H(t))+h(b)|\left|f'\left(U_H(t)\right)\left(U_H(t)\right)^2\right|dt\right\} \qquad (4.2.7)$$

elde edilir. (4.2.7) eşitsizliğinden $|f'|$ fonksiyonunun harmonik konveks bir fonksiyon olduğu kullanılarak

$$\Bigg|\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}\right)h(a)-h(b)f(\frac{2ab}{a+b})$$

$$+\frac{1}{2}\left[\int_a^b f(x)h'(x)dx+\int_a^b f(x)h'(\frac{Hx}{2x-H})\left(\frac{H}{2x-H}\right)^2dx\right]\Bigg|$$

$$\leq \frac{b-a}{4ab}\left\{\begin{array}{c}\int_0^1 |h(L_H(t))-h(U_H(t))+h(b)|\times \\ \left[t\left|f'(a)\right|+(1-t)\left|f'(H)\right|\right]\left(L_H(t)\right)^2dt\end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{c}+\int_0^1 |h(L_H(t))-h(U_H(t))+h(b)|\times \\ \left[t\left|f'(b)\right|+(1-t)\left|f'(H)\right|\right]\left(U_H(t)\right)^2dt\end{array}\right\} \qquad (4.2.8)$$

eşitsizliğinin sağlandığı görülür. (4.2.8) eşitsizliğinde integral içerisindeki mutlak değer ifadesini paranteze dağıttımızda ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 4.2.1 $g:[a,b]\longrightarrow[0,\infty)$ sürekli, pozitif, $x=\frac{2ab}{a+b}$' e göre harmonik simetrik bir fonksiyon ve $\|g\|_\infty=\sup_{x\in[a,b]}|g(x)|$ olsun. Bu durumda Teorem 4.2.1 'de $\alpha>0$ için $h(t)=\int_{1/t}^{1/a}\left((\psi g)\circ\varphi\right)(x)dx$, $\psi(x)=\left[\left(x-\frac{1}{b}\right)^{\alpha-1}+\left(\frac{1}{a}-x\right)^{\alpha-1}\right]$, $\varphi(x)=\frac{1}{x}$, $x\in[\frac{1}{b},\frac{1}{a}]$ şeklinde alınırsa

$$\Bigg|\left[{}_RJ^\alpha_{1/b^+}\left(fg\circ\varphi\right)(1/a)+{}_RJ^\alpha_{1/a^-}\left(fg\circ\varphi\right)(1/b)\right]$$

$$-f\left(\frac{2ab}{a+b}\right)\left[{}_RJ^\alpha_{1/b^+}\left(g\circ\varphi\right)(1/a)+{}_RJ^\alpha_{1/a^-}\left(g\circ\varphi\right)(1/b)\right]\Bigg|$$

$$\leq\frac{(b-a)^{\alpha+1}\|g\|_\infty}{2(ab)^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)}\left[F_1(\alpha)\left|f'(a)\right|+F_2(\alpha)\left|f'(H)\right|+F_3(\alpha)\left|f'(b)\right|\right] \qquad (4.2.9)$$

eşitsizliği sağlanır ve burada katsayılar

$$F_1(\alpha) = \int_0^1 \left[1-(\frac{1+t}{2})^\alpha+(\frac{1-t}{2})^\alpha\right] t\left(L_H(t)\right)^2 dt$$

$$F_2(\alpha) = \int_0^1 \left[1-(\frac{1+t}{2})^\alpha+(\frac{1-t}{2})^\alpha\right](1-t)\left[\left(L_H(t)\right)^2+\left(U_H(t)\right)^2\right] dt$$

$$F_3(\alpha) = \int_0^1 \left[1-(\frac{1+t}{2})^\alpha+(\frac{1-t}{2})^\alpha\right] t\left(U_H(t)\right)^2 dt$$

integralleriyle elde edelir.

İspat. Teorem 4.2.1' in ispatındaki (4.2.8) eşitsizliğinde $t \in [a,b]$, $\varphi(x) = \frac{1}{x}$, $x \in [\frac{1}{b}, \frac{1}{a}]$ olmak üzere

$$h(t) = \int_{1/t}^{1/a} \left((\psi g)\circ\varphi\right)(x)dx, \quad \psi(x) = \left[\left(x-\frac{1}{b}\right)^{\alpha-1}+\left(\frac{1}{a}-x\right)^{\alpha-1}\right]$$

aldığımızda

$$\left|\frac{1}{2}\left[\int_a^b \left[\left(\frac{1}{a}-x\right)^{\alpha-1}+\left(x-\frac{1}{b}\right)^{\alpha-1}\right]\frac{f(x)g(x)}{x^2}dx\right.\right.$$

$$\left.+\int_a^b \left[\left(\frac{1}{a}-x\right)^{\alpha-1}+\left(x-\frac{1}{b}\right)^{\alpha-1}\right]\frac{f(x)g(\frac{Hx}{2x-H})}{x^2}dx\right]$$

$$\left.-f(\frac{2ab}{a+b})\int_a^b \left[\left(\frac{1}{a}-x\right)^{\alpha-1}+\left(x-\frac{1}{b}\right)^{\alpha-1}\right]\frac{g(x)}{x^2}dx\right| \tag{4.2.10}$$

elde ederiz. Hipoteze göre $g(x)$ fonksiyonu $\frac{2ab}{a+b}$' ye göre harmonik simetrik olduğundan,

$$\left|\int_a^b \left[\left(\frac{1}{a}-x\right)^{\alpha-1}+\left(x-\frac{1}{b}\right)^{\alpha-1}\right]\frac{f(x)g(x)}{x^2}dx\right.$$

$$\left.-f(\frac{2ab}{a+b})\int_a^b \left[\left(\frac{1}{a}-x\right)^{\alpha-1}+\left(x-\frac{1}{b}\right)^{\alpha-1}\right]\frac{g(x)}{x^2}dx\right|$$

$$= \left|\begin{array}{c} \Gamma(\alpha)\left[{}_RJ^\alpha_{1/b^+}\left(fg\circ\varphi\right)(1/a)+{}_RJ^\alpha_{1/a^-}\left(fg\circ\varphi\right)(1/b)\right] \\ -\Gamma(\alpha)\left[{}_RJ^\alpha_{1/b^+}g\circ\varphi(1/a)+{}_RJ^\alpha_{1/a^-}g\circ\varphi(1/b)\right]f\left(\frac{2ab}{a+b}\right)\end{array}\right| \tag{4.2.11}$$

ifadesine ulaşıldı. Diğer taraftan (4.2.8) eşitsizliğinin sağ tarafına $h(t)$ fonksiyonunu uygulanırsa

$$\leq \frac{b-a}{4ab}\left\{\begin{array}{l}\displaystyle\int_0^1 \left|\begin{array}{c}\displaystyle\int_{1/L_H(t)}^{1/a}\left[\left(\tfrac{1}{a}-x\right)^{\alpha-1}+\left(x-\tfrac{1}{b}\right)^{\alpha-1}\right](g\circ\varphi)(x)dx \\ \displaystyle-\int_{1/U_H(t)}^{1/a}\left[\left(\tfrac{1}{a}-x\right)^{\alpha-1}+\left(x-\tfrac{1}{b}\right)^{\alpha-1}\right](g\circ\varphi)(x)dx \\ \displaystyle+\int_{1/b}^{1/a}\left[\left(\tfrac{1}{a}-x\right)^{\alpha-1}+\left(x-\tfrac{1}{b}\right)^{\alpha-1}\right](g\circ\varphi)(x)dx\end{array}\right| \\ \qquad\times\left[tf'(a)+(1-t)f'(H)\right](L_H(t))^2\,dt \\ \displaystyle+\int_0^1 \left|\begin{array}{c}\displaystyle\int_{1/L_H(t)}^{1/a}\left[\left(\tfrac{1}{a}-x\right)^{\alpha-1}+\left(x-\tfrac{1}{b}\right)^{\alpha-1}\right](g\circ\varphi)(x)dx \\ \displaystyle-\int_{1/U_H(t)}^{1/a}\left[\left(\tfrac{1}{a}-x\right)^{\alpha-1}+\left(x-\tfrac{1}{b}\right)^{\alpha-1}\right](g\circ\varphi)(x)dx \\ \displaystyle+\int_{1/b}^{1/a}\left[\left(\tfrac{1}{a}-x\right)^{\alpha-1}+\left(x-\tfrac{1}{b}\right)^{\alpha-1}\right](g\circ\varphi)(x)dx\end{array}\right| \\ \qquad\times\left[tf'(b)+(1-t)f'(H)\right](U_H(t))^2\,dt\end{array}\right\} \tag{4.2.12}$$

ve son eşitsizlikte tekrar $g(x)$ fonksiyonunun $\frac{2ab}{a+b}$' ye göre harmonik simetrik olduğu kullanılırsa

$$\left|\left[{}_RJ^{\alpha}_{a^+}(fg)(b)+{}_RJ^{\alpha}_{b^-}(fg)(a)\right]-\left[{}_RJ^{\alpha}_{a^+}g(b)+{}_RJ^{\alpha}_{b^-}g(a)\right]f\left(\frac{2ab}{a+b}\right)\right|$$

$$\leq \frac{b-a}{2ab\Gamma(\alpha)}\left\{\begin{array}{l}\displaystyle\int_0^1\left|\int_{1/L_H(t)}^{1/a}\left[\left(\tfrac{1}{a}-x\right)^{\alpha-1}+\left(x-\tfrac{1}{b}\right)^{\alpha-1}\right](g\circ\varphi)(x)dx\right| \\ \qquad\times\left[tf'(a)+(1-t)f'(H)\right](L_H(t))^2\,dt \\ \displaystyle+\int_0^1\left|\int_{1/L_H(t)}^{1/a}\left[\left(\tfrac{1}{a}-x\right)^{\alpha-1}+\left(x-\tfrac{1}{b}\right)^{\alpha-1}\right](g\circ\varphi)(x)dx\right| \\ \qquad\times\left[tf'(b)+(1-t)f'(H)\right](U_H(t))^2\,dt\end{array}\right\}$$

$$\leq \frac{(b-a)\left\|g\right\|_{\infty}}{2ab\Gamma(\alpha)}\left\{\begin{array}{l}\displaystyle\int_0^1\left(\int_{1/L_H(t)}^{1/a}\left[\left(\tfrac{1}{a}-x\right)^{\alpha-1}+\left(x-\tfrac{1}{b}\right)^{\alpha-1}\right]dx\right)\times \\ \qquad\left[tf'(a)+(1-t)f'(H)\right](L_H(t))^2\,dt \\ \displaystyle+\int_0^1\left(\int_{1/L_H(t)}^{1/a}\left[\left(\tfrac{1}{a}-x\right)^{\alpha-1}+\left(x-\tfrac{1}{b}\right)^{\alpha-1}\right]dx\right)\times \\ \qquad\left[tf'(b)+(1-t)f'(H)\right](U_H(t))^2\,dt\end{array}\right\} \tag{4.2.13}$$

elde edilir. Eşitsizlikteki integral ifadesi

$$\int\limits_{1/L_H(t)}^{1/a}\left[\left(\frac{1}{a}-x\right)^{\alpha-1}+\left(x-\frac{1}{b}\right)^{\alpha-1}\right]dx=\frac{(b-a)^{\alpha}}{\alpha(ab)^{\alpha}}\left[1-\left(\frac{1+t}{2}\right)^{\alpha}+\left(\frac{1-t}{2}\right)^{\alpha}\right] \tag{4.2.14}$$

şeklindedir. (4.2.13) ve (4.2.14) ifadelerinden (4.2.9) eşitsizliği elde edilir ve böylece ispatı tamamlamış oluruz.

Sonuç 4.2.2 i. Eğer Sonuç 4.2.1' deki (4.2.9) eşitsizliğinde, $\alpha=1$ alınırsa bu takdirde

$$\left|\int\limits_a^b f(x)\frac{g(x)}{x^2}dx-f\left(\frac{2ab}{a+b}\right)\int\limits_a^b\frac{g(x)}{x^2}dx\right|\leq\frac{(b-a)^2}{2\,(ab)^2}\times$$

$$\|g\|_{\infty}\left[F_1(1)\left|f'(a)\right|+F_2(1)\left|f'(H)\right|+F_3(1)\left|f'(b)\right|\right] \tag{4.2.15}$$

eşitsizliği elde edilir, burada her $a,b>0$ için

$$\begin{aligned} F_1(1) &= \int\limits_0^1 t\,(1-t)\,(L_H(t))^2\,dt,\\ F_2\,(1) &= \int\limits_0^1 (1-t)^2\left[(L_H(t))^2+(U_H(t))^2\right]dt,\\ F_3(1) &= \int\limits_0^1 t\,(1-t)\,(U_H(t))^2\,dt \end{aligned}$$

dir.

ii. Eğer Sonuç 4.2.1' deki (4.2.9) eşitsizliğinde, $g(x)=1$ alınırsa bu takdirde

$$\left|\frac{(ab)^{\alpha}\Gamma(\alpha+1)}{2\,(b-a)^{\alpha}}\left[{}_RJ^{\alpha}_{1/b^+}\,(f\circ\varphi)\,(1/a)+{}_RJ^{\alpha}_{1/a^-}\,(f\circ\varphi)\,(1/b)\right]-f\left(\frac{2ab}{a+b}\right)\right|$$

$$\leq\frac{(b-a)}{4ab}\left[F_1\,(\alpha)\left|f'(a)\right|+F_2\,(\alpha)\left|f'(H)\right|+F_3\,(\alpha)\left|f'(b)\right|\right] \tag{4.2.16}$$

eşitsizliği elde edilir.

iii. Eğer Sonuç 4.2.1' deki (4.2.9) eşitsizliğinde, $\alpha=1$ ve $g(x)=1$ alınırsa bu takdirde

$$\left|\frac{ab}{b-a}\int\limits_a^b\frac{f(x)}{x}dx-f\left(\frac{2ab}{a+b}\right)\right|\leq\frac{(b-a)}{4ab}\times$$

$$\left[F_1\,(1)\left|f'(a)\right|+F_2\,(1)\left|f'(H)\right|+F_3\,(1)\left|f'(b)\right|\right] \tag{4.2.17}$$

eşitsizliği elde edilir.

Teorem 4.2.2 $I \subseteq \mathbb{R} \setminus \{0\}$ bir reel sayı aralığı olsun. $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I^o 'da diferansiyellenebilir ve $h : [a,b] \longrightarrow [0,\infty)$ diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $a,b \in I^o$, $a < b$ olsun. Eğer $|f'|^q$, $[a,b]$ aralığında harmonik konveks bir fonksiyon ise bu takdirde

$$\begin{aligned}
&\left| \left(\frac{f(a)+f(b)}{2} \right) h(a) - h(b) f\left(\frac{2ab}{a+b} \right) \right. \\
&\left. + \frac{1}{2} \left[\int_a^b f(x) h'(x) dx + \int_a^b f(x) h'\left(\frac{Hx}{2x-H}\right) \left(\frac{H}{2x-H} \right)^2 dx \right] \right| \\
&\leq \frac{(b-a)}{4ab} \left\{ \begin{array}{c} \left(\int_0^1 \left| h(L_H(t)) - h(U_H(t)) + h(b) \right| dt \right)^{1-\frac{1}{q}} \times \\ \left(\int_0^1 \begin{array}{c} \left(\left| h(L_H(t)) - h(U_H(t)) + h(b) \right| \right) \times \\ \left(t \left(L_H(t) \right)^{2q} |f'(a)|^q + (1-t) \left(L_H(t) \right)^{2q} |f'(H)|^q \right) dt \end{array} \right)^{\frac{1}{q}} \end{array} \right. \\
&\quad \left. \begin{array}{c} + \left(\int_0^1 \left| h(L_H(t)) - h(U_H(t)) + h(b) \right| dt \right)^{1-\frac{1}{q}} \times \\ \left(\int_0^1 \begin{array}{c} \left(\left| h(L_H(t)) - h(U_H(t)) + h(b) \right| \right) \times \\ \left(t \left(U_H(t) \right)^{2q} |f'(b)|^q + (1-t) \left(U_H(t) \right)^{2q} |f'(H)|^q \right) dt \end{array} \right)^{\frac{1}{q}} \end{array} \right\} \qquad (4.2.18)
\end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. Teorem 4.2.1' in ispatındaki (4.2.7) eşitsizliğinde $|f'|^q$ fonksiyonunun harmonik konveks bir fonksiyon olduğunu ve Sonuç 3.3.1' i kullanırsak ispat tamamlanır.

Sonuç 4.2.3 $g : [a,b] \longrightarrow [0,\infty)$ sürekli, pozitif, $x = \frac{2ab}{a+b}$' e göre harmonik simetrik bir fonksiyon ve $\|g\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |g(x)|$ olsun. Bu durumda Teorem 4.2.2' nin koşulları altında $\alpha > 0$ için $h(t) = \int_{1/t}^{1/a} \left[\left(x - \frac{1}{b}\right)^{\alpha-1} + \left(\frac{1}{a} - x\right)^{\alpha-1} \right] g \circ \varphi(x) dx$, $x \in [\frac{1}{b}, \frac{1}{a}]$, $\varphi(x) = \frac{1}{x}$, alınırsa bu takdirde

$$\left| \left[{}_R J^{\alpha}_{1/b^+} \left(fg \circ \varphi \right) (1/a) + {}_R J^{\alpha}_{1/a^-} \left(fg \circ \varphi \right) (1/b) \right] \right.$$

$$
\left.-f\left(\frac{2ab}{a+b}\right)\left[{}_{R}J^{\alpha}_{1/b^{+}}\left(g\circ\varphi\right)(1/a)+{}_{R}J^{\alpha}_{1/a^{-}}\left(g\circ\varphi\right)(1/b)\right]\right|
$$

$$
\leq\frac{(b-a)^{\alpha+1}\left\|g\right\|_{\infty}}{2(ab)^{\alpha+1}\Gamma\left(\alpha+1\right)}\left[2-\frac{4}{\alpha+1}+\frac{2^{2-\alpha}}{\alpha+1}\right]^{1-\frac{1}{q}}\times
$$

$$
\left[F_{1}\left(\alpha,q\right)\left|f'(a)\right|^{q}+F_{2}\left(\alpha,q\right)\left|f'(H)\right|^{q}+F_{3}\left(\alpha,q\right)\left|f'(b)\right|^{q}\right]^{\frac{1}{q}} \qquad (4.2.19)
$$

eşitsizliği elde edilir, burada katsayılar $q\geq 1$ için

$$
\begin{aligned}
F_{1}\left(\alpha,q\right) &= \int_{0}^{1}\left[1-\left(\frac{1+t}{2}\right)^{\alpha}+\left(\frac{1-t}{2}\right)^{\alpha}\right]t\left(L_{H}(t)\right)^{2q}dt\\
F_{2}\left(\alpha,q\right) &= \int_{0}^{1}\left[1-\left(\frac{1+t}{2}\right)^{\alpha}+\left(\frac{1-t}{2}\right)^{\alpha}\right](1-t)\left(\left(L_{H}(t)\right)^{2q}+\left(U_{H}(t)\right)^{2q}\right)dt\\
F_{3}\left(\alpha,q\right) &= \int_{0}^{1}\left[1-\left(\frac{1+t}{2}\right)^{\alpha}+\left(\frac{1-t}{2}\right)^{\alpha}\right]t\left(U_{H}(t)\right)^{2q}dt
\end{aligned}
$$

şeklindedir.

İspat. (4.2.18) eşitsizliği ve (4.2.14) eşitliğinden yararlanırsak

$$
\left|\left[{}_{R}J^{\alpha}_{1/b^{+}}\left(fg\circ\varphi\right)(1/a)+{}_{R}J^{\alpha}_{1/a^{-}}\left(fg\circ\varphi\right)(1/b)\right]\right.
$$

$$
\left.-f\left(\frac{2ab}{a+b}\right)\left[{}_{R}J^{\alpha}_{1/b^{+}}\left(g\circ\varphi\right)(1/a)+{}_{R}J^{\alpha}_{1/a^{-}}\left(g\circ\varphi\right)(1/b)\right]\right|
$$

$$
\leq\frac{(b-a)^{\alpha+1}\left\|g\right\|_{\infty}}{2(ab)^{\alpha+1}\Gamma\left(\alpha+1\right)}
$$

$$
\left\{\begin{array}{c}\left(\int_{0}^{1}\left[1-\left(\frac{1+t}{2}\right)^{\alpha}+\left(\frac{1-t}{2}\right)^{\alpha}\right]dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\times\\
\left(\int_{0}^{1}\begin{array}{c}\left[1-\left(\frac{1+t}{2}\right)^{\alpha}+\left(\frac{1-t}{2}\right)^{\alpha}\right]\times\\ \left(t\left(L_{H}(t)\right)^{2q}\left|f'(a)\right|^{q}+(1-t)\left(L_{H}(t)\right)^{2q}\left|f'\left(H\right)\right|^{q}\right)dt\end{array}\right)^{\frac{1}{q}}\\
+\left(\int_{0}^{1}\left[1-\left(\frac{1+t}{2}\right)^{\alpha}+\left(\frac{1-t}{2}\right)^{\alpha}\right]dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\times\\
\left(\int_{0}^{1}\begin{array}{c}\left[1-\left(\frac{1+t}{2}\right)^{\alpha}+\left(\frac{1-t}{2}\right)^{\alpha}\right]\times\\ \left(t\left(U_{H}(t)\right)^{2q}\left|f'(b)\right|^{q}+(1-t)\left(U_{H}(t)\right)^{2q}\left|f'(H)\right|^{q}\right)dt\end{array}\right)^{\frac{1}{q}}\end{array}\right\}
$$

$$
\leq\frac{(b-a)^{\alpha+1}\left\|g\right\|_{\infty}}{2(ab)^{\alpha+1}\Gamma\left(\alpha+1\right)}\left[1-\frac{2}{\alpha+1}+\frac{2^{1-\alpha}}{\alpha+1}\right]^{1-\frac{1}{q}}\times
$$

$$\left[\left(\int_0^1 \begin{array}{c}\left[1-\left(\frac{1+t}{2}\right)^{\alpha}+\left(\frac{1-t}{2}\right)^{\alpha}\right]\times \\ \left[t\left(L_H(t)\right)^{2q}\left|f'(a)\right|^q+(1-t)\left(L_H(t)\right)^{2q}\left|f'(H)\right|^q\right]dt\end{array}\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left.+\left(\int_0^1 \begin{array}{c}\left[1-\left(\frac{1+t}{2}\right)^{\alpha}+\left(\frac{1-t}{2}\right)^{\alpha}\right]\times \\ \left[t\left(U_H(t)\right)^{2q}\left|f'(b)\right|^q+(1-t)\left(U_H(t)\right)^{2q}\left|f'(H)\right|^q\right]dt\end{array}\right)^{\frac{1}{q}}\right] \quad (4.2.20)$$

eşitsizliğini elde ederiz. Bu durumda $a>0,\ b>0,\ r<1, a^r+b^r<2^{1-r}(a+b)^r$ ifadesinden yararlanarak

$$\leq \frac{(b-a)^{\alpha+1}\|g\|_{\infty}}{2(ab)^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)}\left[2-\frac{4}{\alpha+1}+\frac{2^{2-\alpha}}{\alpha+1}\right]^{1-\frac{1}{q}}\times$$

$$\left[\int_0^1\left(\begin{array}{c}\left[1-\left(\frac{1+t}{2}\right)^{\alpha}+\left(\frac{1-t}{2}\right)^{\alpha}\right]t\left(L_H(t)\right)^{2q}\left|f'(a)\right|^q \\ +\left[1-\left(\frac{1+t}{2}\right)^{\alpha}+\left(\frac{1-t}{2}\right)^{\alpha}\right](1-t)\left(\begin{array}{c}\left(L_H(t)\right)^{2q} \\ +\left(U_H(t)\right)^{2q}\end{array}\right)\left|f'(H)\right|^q \\ +\left[1-\left(\frac{1+t}{2}\right)^{\alpha}+\left(\frac{1-t}{2}\right)^{\alpha}\right]t\left(U_H(t)\right)^{2q}\left|f'(b)\right|^q\end{array}\right)dt\right]^{\frac{1}{q}} \quad (4.2.21)$$

elde edilir ve böylece ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 4.2.4 Eğer Sonuç 4.2.3' de $\alpha=1$ ve $g(x)=\frac{1}{\ln b-\ln a}$ alınırsa,

$$\left|\frac{ab}{b-a}\int_a^b\frac{f(x)}{x^2}dx-f\left(\frac{2ab}{a+b}\right)\right|\leq\frac{(b-a)}{4ab}\times$$
$$\left[F_1(1,q)\left|f'(a)\right|^q+F_2(1,q)\left|f'(H)\right|^q+F_3(1,q)\left|f'(b)\right|^q\right]^{\frac{1}{q}} \quad (4.2.22)$$

eşitsizliği elde edilir.

Şimdi de Hermite-Hadamard-Fejér tipli kesirli integral eşitsizliğinin harmonik konveks fonksiyonlar için bir üst sınır belirleyeceğiz.

Lemma 4.2.2 $I\subseteq\mathbb{R}\setminus\{0\}$ bir reel sayı aralığı olsun. $f:I\longrightarrow\mathbb{R}$ fonksiyonu I^o 'da diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $a,b\in I^o$, $a<b$ ve $h:[a,b]\longrightarrow[0,\infty)$ diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda $f'\in L[a,b]$ olmak üzere

$$
\begin{aligned}
& [h(b)-2h(a)]\frac{f(a)}{2}+h(b)\frac{f(b)}{2}-\int_a^b f(x)h'(x)dx \\
= & \frac{b-a}{4ab}\left\{\int_0^1 [2h(L_H(t))-h(b)]\,f'(L_H(t))\,(L_H(t))^2\,dt\right. \\
+ & \left.\int_0^1 [2h(U_H(t))-h(b)]\,f'(U_H(t))\,(U_H(t))^2\,dt\right\} \qquad (4.2.23)
\end{aligned}
$$

eşitliği gerçeklenir.

İspat. Eşitliğin sol tarafındaki integralleri iki parça halinde ispatlayacağız. İlk integrali kısmi integrasyon ve $x=\frac{aH}{tH+(1-t)a}$, $dx=\frac{-aH(H-a)dt}{(tH+(1-t)a)^2}$ değişken değişimini uygulayıp

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^1 [2h(L_H(t))-h(b)]\,f'(L_H(t))\,L_H^2(t)dt \\
&= \frac{aH}{a-H}\left\{[2h(L_H(t))-h(b)]\,f(L_H(t))\Big|_0^1\right. \\
&- \left.\int_0^1 f(L_H(t))\,2h'(L_H(t))\,\frac{-aH(H-a)}{(tH+(1-t)a)^2}dt\right\} \\
\left(\frac{H-a}{aH}\right)I_1 &= [h(b)-2h(a)]\,f(a)+[2h(H)-h(b)]\,f(H)-2\int_a^H f(x)h'(x)dx
\end{aligned}
$$

ve ikinci integral için de kısmi integrasyon ve $x=\frac{bH}{tH+(1-t)b}$, $dx=\frac{-bH(H-b)dt}{(tH+(1-t)b)^2}$ değişken değişimini uyguladığımızda

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \int_0^1 [2h(U_H(t))-h(b)]\,f'(U_H(t))\,U_H^2(t)dt \\
&= \frac{bH}{b-H}\left\{[2h(U_H(t))-h(b)]\,f(U_H(t))\Big|_0^1\right. \\
&- \left.\int_0^1 f(U_H(t))\,2h'(U_H(t))\,\frac{-bH(H-b)}{(tH+(1-t)b)^2}dt\right\} \\
\left(\frac{b-H}{bH}\right)I_2 &= h(b)f(b)-[2h(H)-h(b)]\,f(H)-2\int_H^b f(x)h'(x)dx
\end{aligned}
$$

yazılabilir. Son olarak $\left(\frac{H-a}{aH}\right) I_1$ ve $\left(\frac{b-H}{bH}\right) I_2$ taraf tarafa toplayıp ikiye böldüğümüzde

$$\frac{b-a}{4ab}[I_1+I_2] = [h(b)-2h(a)]\frac{f(a)}{2}+h(b)\frac{f(b)}{2}-\int_a^b f(x)h'(x)dx$$

olduğu görülür ve böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.2.3 $I \subseteq \mathbb{R}\setminus\{0\}$ bir reel sayı aralığı olsun. $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I^o' da diferansiyellenebilir bir fonksiyon, $a, b \in I^o$, $a < b$ olmak üzere $h : [a,b] \longrightarrow [0,\infty)$ diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Eğer $|f'|$, $[a,b]$ aralığında harmonik konveks bir fonksiyon ise bu takdirde

$$\begin{aligned}&\left|[h(b)-2h(a)]\frac{f(a)}{2}+h(b)\frac{f(b)}{2}-\int_a^b f(x)h'(x)dx\right|\\ &\leq \frac{b-a}{4ab}\left[\zeta_1(a,b)\left|f'(a)\right|+\zeta_2(a,b)\left|f'(H)\right|+\zeta_3(a,b)\left|f'(b)\right|\right]\end{aligned} \tag{4.2.24}$$

eşitsizliği gerçeklenir, burada katsayılar

$$\zeta_1(a,b) = \int_0^1 \left|2h\left(L_H(t)\right)-h(b)\right|(1-t)\left(L_H(t)\right)^2 dt \tag{4.2.25}$$

$$\begin{aligned}\zeta_2(a,b) &= \int_0^1 t\left(L_H(t)\right)^2\left|2h\left(L_H(t)\right)-h(b)\right|dt\\ &+ \int_0^1 t((U_H(t))^2\left|2h\left(U_H(t)\right)-h(b)\right|dt\end{aligned} \tag{4.2.26}$$

$$\zeta_3(a,b) = \int_0^1 \left|2h\left(U_H(t)\right)-h(b)\right|(1-t)\left(U_H(t)\right)^2 dt \tag{4.2.27}$$

integralleriyle verilir.

İspat. Lemma 4.2.2' deki (4.2.23) eşitliğinin her iki tarafının mutlak değeri alınırsa

$$\left| [h(b)-2h(a)]\frac{f(a)}{2}+h(b)\frac{f(b)}{2}-\int_a^b f(x)h'(x)dx \right|$$
$$\leq \frac{b-a}{4ab}\left\{ \int_0^1 \left|2h\left(L_H(t)\right)-h(b)\right| \left|f'\left(L_H(t)\right)\left(L_H(t)\right)^2\right| dt \right.$$
$$\left. +\int_0^1 \left|2h\left(U_H(t)\right)-h(b)\right| \left|f'\left(U_H(t)\right)\left(U_H(t)\right)^2\right| dt \right\} \tag{4.2.28}$$

eşitsizliği elde edilir. (4.2.28) eşitsizliğinde $|f'|$ fonksiyonunun harmonik konveks bir fonksiyon olduğu gözönüne alındığında

$$\left| [h(b)-2h(a)]\frac{f(a)}{2}+h(b)\frac{f(b)}{2}-\int_a^b f(x)h'(x)dx \right|$$
$$\leq \frac{b-a}{4ab}\left\{ \int_0^1 \left|2h\left(L_H(t)\right)-h(b)\right| \left\{t\left|f'(H)\right|+(1-t)\left|f'(a)\right|\right\}\left(L_H(t)\right)^2 dt \right.$$
$$\left. +\int_0^1 \left|2h\left(U_H(t)\right)-h(b)\right| \left\{t\left|f'(H)\right|+(1-t)\left|f'(b)\right|\right\}\left(U_H(t)\right)^2 dt \right\} \tag{4.2.29}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

Sonuç 4.2.5 $g : [a,b] \longrightarrow [0,\infty)$ sürekli, pozitif, $x=\frac{2ab}{a+b}$' e göre harmonik simetrik bir fonksiyon ve $\|g\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]}|g(x)|$ olsun. Bu durumda Teorem 4.2.3' de $\alpha>0$, $x\in[\frac{1}{b},\frac{1}{a}]$ olmak üzere $h(t)=\int_{1/t}^{1/a}\left((\psi g)\circ\varphi\right)(x)dx$, $\psi(x)=\left[\left(x-\frac{1}{b}\right)^{\alpha-1}+\left(\frac{1}{a}-x\right)^{\alpha-1}\right]$, $\varphi(x)=\frac{1}{x}$, alınırsa

$$\left|\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}\right)\left[{}_RJ^\alpha_{1/b^+}g\circ\varphi(1/a)+{}_RJ^\alpha_{1/a^-}g\circ\varphi(1/b)\right]\right.$$
$$\left.-\left[{}_RJ^\alpha_{1/b^+}\left(fg\circ\varphi\right)(1/a)+{}_RJ^\alpha_{1/a^-}\left(fg\circ\varphi\right)(1/b)\right]\right|$$
$$\leq \frac{(b-a)^{\alpha+1}\|g\|_\infty}{2^{\alpha+1}(ab)^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)}\left[T_1(\alpha)\left|f'(a)\right|+T_2(\alpha)\left|f'(H)\right|+T_3(\alpha)\left|f'(b)\right|\right] \tag{4.2.30}$$

eşitsizliği elde edilir ve burada katsayılar

$$\begin{aligned}
T_1(\alpha) &= \int_0^1 (1-t)\left[(1+t)^\alpha - (1-t)^\alpha\right](L_H(t))^2 dt \\
T_2(\alpha) &= \int_0^1 t\left[(1+t)^\alpha - (1-t)^\alpha\right]\left[(L_H(t))^2 + (U_H(t))^2\right] dt \\
T_3(\alpha) &= \int_0^1 (1-t)\left[(1+t)^\alpha - (1-t)^\alpha\right](L_H(t))^2 dt
\end{aligned}$$

integralleriyle verilir. Özel olarak (4.2.30) eşitsizliği ve Lemma 3.3.1' den yararlanırsak, $0 < \alpha \leq 1$ için

$$\begin{aligned}
&\Bigg|\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}\right)\left[{}_RJ^\alpha_{1/b^+}g\circ\varphi(1/a) + {}_RJ^\alpha_{1/a^-}g\circ\varphi(1/b)\right] \\
&-\left[{}_RJ^\alpha_{1/b^+}(fg\circ\varphi)(1/a) + {}_RJ^\alpha_{1/a^-}(fg\circ\varphi)(1/b)\right]\Bigg| \leq \frac{(b-a)^{\alpha+1}\|g\|_\infty}{2(ab)^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)}\times \\
&\left[D_1(\alpha)|f'(a)| + D_2(\alpha)|f'(H)| + D_3(\alpha)|f'(b)|\right] \qquad (4.2.31)
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada ise katsayılar

$$\begin{aligned}
D_1(\alpha) &= \int_0^1 (1-t)t^\alpha(L_H(t))^2 dt \\
D_2(\alpha) &= \int_0^1 t^{\alpha+1}\left[(L_H(t))^2 + (U_H(t))^2\right] dt \\
D_3(\alpha) &= \int_0^1 (1-t)t^\alpha(U_H(t))^2 dt
\end{aligned}$$

şeklindedir.

İspat. Teorem 4.2.3' ün ispatında verilen (4.2.29) eşitsizliğinde $t \in [a,b]$, $x \in \left[\frac{1}{b}, \frac{1}{a}\right]$ olmak üzere

$$h(t) = \int_{1/t}^{1/a} ((\psi g)\circ\varphi)(x)dx, \quad \psi(x) = \left[\left(x-\frac{1}{b}\right)^{\alpha-1} + \left(\frac{1}{a}-x\right)^{\alpha-1}\right], \quad \varphi(x) = \frac{1}{x}$$

olduğu gözönüne alınırsa eşitsizliğin sol tarafı

$$\left| \begin{array}{c} \Gamma(\alpha)\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}\right)\left[{}_RJ^{\alpha}_{1/b+}g\circ\varphi(1/a)+{}_RJ^{\alpha}_{1/a-}g\circ\varphi(1/b)\right] \\ \\ -\Gamma(\alpha)\left[{}_RJ^{\alpha}_{1/b+}\left(fg\circ\varphi\right)(1/a)+{}_RJ^{\alpha}_{1/a-}\left(fg\circ\varphi\right)(1/b)\right] \end{array} \right|$$

olarak elde edilir. Diğer taraftan (4.2.29) eşitsizliğinin sağ tarafı için $h(t)$ fonksiyonunu uygularsak

$$\begin{aligned} &\leq \frac{b-a}{4ab}\left\{ \int_0^1 \left| \begin{array}{c} 2\int\limits_{1/L_H(t)}^{1/a}\left[\left(x-\frac{1}{b}\right)^{\alpha-1}+\left(\frac{1}{a}-x\right)^{\alpha-1}\right]g\circ\varphi(x)dx \\ -\int\limits_{1/b}^{1/a}\left[\left(x-\frac{1}{b}\right)^{\alpha-1}+\left(\frac{1}{a}-x\right)^{\alpha-1}\right]g\circ\varphi(x)dx \end{array} \right| \times \right. \\ &\qquad [t\left|f'(H)\right|+(1-t)\left|f'(a)\right|](L_H(t))^2dt \\ &+\int_0^1 \left| \begin{array}{c} 2\int\limits_{1/U_H(t)}^{1/a}\left[\left(x-\frac{1}{b}\right)^{\alpha-1}+\left(\frac{1}{a}-x\right)^{\alpha-1}\right]g\circ\varphi(x)dx \\ -\int\limits_{1/b}^{1/a}\left[\left(x-\frac{1}{b}\right)^{\alpha-1}+\left(\frac{1}{a}-x\right)^{\alpha-1}\right]g\circ\varphi(x)dx \end{array} \right| \times \\ &\qquad \left. [t\left|f'(H)\right|+(1-t)\left|f'(b)\right|](U_H(t))^2dt \right\} \end{aligned} \tag{4.2.32}$$

olduğu görülür. $g(x)$ fonksiyonu hipoteze göre $\frac{2ab}{a+b}$' ye göre simetrik olduğundan, $t\in[0,1]$ için

$$\begin{aligned} &\left|2\int\limits_{1/L_H(t)}^{1/a}\left[\left(x-\frac{1}{b}\right)^{\alpha-1}+\left(\frac{1}{a}-x\right)^{\alpha-1}\right]g\circ\varphi(x)dx \right. \\ &\left. -\int\limits_{1/b}^{1/a}\left[\left(x-\frac{1}{b}\right)^{\alpha-1}+\left(\frac{1}{a}-x\right)^{\alpha-1}\right](g\circ\varphi)(x)dx\right| \\ &= \left|\int\limits_{1/U_H(t)}^{1/L_H(t)}\left[\left(x-\frac{1}{b}\right)^{\alpha-1}+\left(\frac{1}{a}-x\right)^{\alpha-1}\right](g\circ\varphi)(x)dx\right| \end{aligned} \tag{4.2.33}$$

ve

$$\left|2\int\limits_{1/U_H(t)}^{1/a}\left[\left(x-\frac{1}{b}\right)^{\alpha-1}+\left(\frac{1}{a}-x\right)^{\alpha-1}\right]g\circ\varphi(x)dx\right.$$

$$
\begin{aligned}
& - \int_{1/b}^{1/a} \left[\left(x - \frac{1}{b} \right)^{\alpha-1} + \left(\frac{1}{a} - x \right)^{\alpha-1} \right] (g \circ \varphi)(x) dx \Bigg| \\
&= \left| \int_{1/U_H(t)}^{1/L_H(t)} \left[\left(x - \frac{1}{b} \right)^{\alpha-1} + \left(\frac{1}{a} - x \right)^{\alpha-1} \right] (g \circ \varphi)(x) dx \right| \qquad (4.2.34)
\end{aligned}
$$

ifadeleri yazılır. (4.2.32)' de (4.2.33) ve (4.2.34) ifadeleri yerlerine yazılırsa

$$
\begin{aligned}
& \Bigg| \left(\frac{f(a)+f(b)}{2} \right) \left[{}_R J^{\alpha}_{1/b^+} g \circ \varphi(1/a) + {}_R J^{\alpha}_{1/a^-} g \circ \varphi(1/b) \right] \\
& - \left[{}_R J^{\alpha}_{1/b^+} (fg \circ \varphi)(1/a) + {}_R J^{\alpha}_{1/a^-} (fg \circ \varphi)(1/b) \right] \Bigg| \\
& \leq \frac{b-a}{4ab\Gamma(\alpha)} \Bigg\{ \int_0^1 \left| \left[\int_{1/U_H(t)}^{1/L_H(t)} \left(x - \tfrac{1}{b} \right)^{\alpha-1} + \left(\tfrac{1}{a} - x \right)^{\alpha-1} \right] g \circ \varphi(x) dx \right| \times \\
& \qquad [t |f'(H)| + (1-t) |f'(a)|] (L_H(t))^2 dt \\
& + \int_0^1 \left| \int_{1/U_H(t)}^{1/L_H(t)} \left[\left(x - \tfrac{1}{b} \right)^{\alpha-1} + \left(\tfrac{1}{a} - x \right)^{\alpha-1} \right] g \circ \varphi(x) dx \right| \times \\
& \qquad [t |f'(H)| + (1-t) |f'(b)|] (U_H(t))^2 dt \Bigg\} \\
& \leq \frac{(b-a) \|g\|_{\infty}}{4ab\Gamma(\alpha)} \Bigg\{ \int_0^1 \left[\int_{1/U_H(t)}^{1/L_H(t)} \left| \left(x - \tfrac{1}{b} \right)^{\alpha-1} + \left(\tfrac{1}{a} - x \right)^{\alpha-1} \right| dx \right] \times \\
& \qquad [t |f'(H)| + (1-t) |f'(a)|] (L_H(t))^2 dt \\
& + \int_0^1 \left[\int_{1/U_H(t)}^{1/L_H(t)} \left| \left(x - \tfrac{1}{b} \right)^{\alpha-1} + \left(\tfrac{1}{a} - x \right)^{\alpha-1} \right| dx \right] \times \\
& \qquad [t |f'(H)| + (1-t) |f'(b)|] (U_H(t))^2 dt \Bigg\} \qquad (4.2.35)
\end{aligned}
$$

eşitsizliği elde edilir. Son eşitsizlikte integral içindeki ifade

$$
\begin{aligned}
& \int_{1/U_H(t)}^{1/L_H(t)} \left| \left(x - \frac{1}{b} \right)^{\alpha-1} + \left(\frac{1}{a} - x \right)^{\alpha-1} \right| dx \\
&= \int_{1/U_H(t)}^{1/L_H(t)} \left(x - \frac{1}{b} \right)^{\alpha-1} dx + \int_{1/U_H(t)}^{1/L_H(t)} \left(\frac{1}{a} - x \right)^{\alpha-1} dx \\
&= \frac{2^{1-\alpha}}{\alpha} \left(\frac{b-a}{ab} \right)^{\alpha} \left\{ (1+t)^{\alpha} - (1-t)^{\alpha} \right\} \qquad (4.2.36)
\end{aligned}
$$

şeklinde yazılabilir. Özel olarak Lemma 3.3.1' den

$$\int_{1/U_H(t)}^{1/L_H(t)} \left| \left(x-\frac{1}{b}\right)^{\alpha-1} + \left(\frac{1}{a}-x\right)^{\alpha-1} \right| dx$$

$$= \int_{1/U_H(t)}^{1/L_H(t)} \left(x-\frac{1}{b}\right)^{\alpha-1} dx + \int_{1/U_H(t)}^{1/L_H(t)} \left(\frac{1}{a}-x\right)^{\alpha-1} dx$$

$$\leq \frac{2}{\alpha}\left(\frac{b-a}{ab}\right)^{\alpha} t^{\alpha}$$

olduğu görülür. (4.2.35) eşitsizliğinde (4.2.36) ifadesi kullanıldığında (4.2.30) ve (4.2.31) eşitsizlikleri elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 4.2.6 i. Eğer Sonuç 4.2.5' deki (4.2.31) eşitsizliğinde, $\alpha = 1$ alınırsa her $a, b > 0$ için

$$\left| \left[\frac{f(a)+f(b)}{2}\right] \int_a^b \frac{g(x)}{x^2} dx - \int_a^b f(x)\frac{g(x)}{x^2} dx \right|$$

$$\leq \frac{(b-a)^2}{4(ab)^2} \|g\|_\infty \left[D_1(1)\left|f'(a)\right| + D_2(1)\left|f'(H)\right| + D_3(1)\left|f'(b)\right|\right] \quad (4.2.37)$$

eşitsizliği elde edilir, burada katsayılar

$$D_1(1) = \int_0^1 (1-t)t(L_H(t))^2 dt$$

$$D_2(1) = \int_0^1 t^2 \left[(L_H(t))^2 + (U_H(t))^2\right] dt$$

$$D_3(1) = \int_0^1 (1-t)t(U_H(t))^2 dt$$

şeklindedir.

ii. Eğer Sonuç 4.2.5' deki (4.2.30) eşitsizliğinde, $g(x) = 1$ alınırsa

$$\left| \left(\frac{f(a)+f(b)}{2}\right) - \frac{(ab)^\alpha \Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^\alpha} \left[{}_RJ^\alpha_{1/b^+}(f\circ\varphi)(1/a) + {}_RJ^\alpha_{1/a^-}(f\circ\varphi)(1/b)\right] \right|$$

$$\leq \frac{(b-a)}{2^{\alpha+2}ab} \left[T_1(\alpha)\left|f'(a)\right| + T_2(\alpha)\left|f'(H)\right| + T_3(\alpha)\left|f'(b)\right|\right] \quad (4.2.38)$$

eşitsizliği elde edilir.

iii. Eğer Sonuç 4.2.5' deki (4.2.31) eşitsizliğinde, $\alpha = 1$ ve $g(x) = 1$ alınırsa bu takdirde

$$\left| \left(\frac{f(a)+f(b)}{2} \right) - \frac{ab}{(b-a)} \int_a^b \frac{f(x)}{x^2} dx \right|$$

$$\leq \frac{(b-a)}{4(ab)} \left[D_1(1) |f'(a)| + D_2(1) |f'(H)| + D_3(1) |f'(b)| \right] \tag{4.2.39}$$

eşitsizliği elde edilir.

Teorem 4.2.4 $I \subseteq \mathbb{R} \setminus \{0\}$ bir reel sayı aralığı olsun. $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu, I^o 'da diferansiyellenebilir, $h : [a,b] \longrightarrow [0,\infty)$ diferansiyellenebilir ve $a, b \in I^o$, $a < b$ olsun. Eğer $|f'|^q$, $[a,b]$ aralığında harmonik konveks fonksiyon ise bu takdirde

$$\left| [h(b) - 2h(a)] \frac{f(a)}{2} + h(b) \frac{f(b)}{2} - \int_a^b f(x) h'(x) dx \right|$$

$$\leq \frac{b-a}{4ab} \left\{ \begin{array}{c} \left(\int_0^1 |2h(L_H(t)) - h(b)| \, dt \right)^{1-\frac{1}{q}} \times \\ \left(\int_0^1 \begin{array}{c} (|2h(L_H(t)) - h(b)|) \times \\ \left(t (L_H(t))^{2q} |f'(a)|^q + (1-t) (L_H(t))^{2q} |f'(H)|^q \right) dt \end{array} \right)^{\frac{1}{q}} \\ + \left(\int_0^1 |2h(U_H(t)) - h(b)| \, dt \right)^{1-\frac{1}{q}} \times \\ \left(\int_0^1 \begin{array}{c} (|2h(U_H(t)) - h(b)|) \times \\ \left(t (U_H(t))^{2q} |f'(b)|^q + (1-t) (U_H(t))^{2q} |f'(H)|^q \right) dt \end{array} \right)^{\frac{1}{q}} \end{array} \right\} \tag{4.2.40}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. Teorem 4.2.3' ün ispatındaki (4.2.28) eşitsizliğinde $|f'|^q$ fonksiyonunun harmonik konveks fonksiyon olduğunu ve Sonuç 3.3.1' i kullanırsak ispat tamamlanır.

Sonuç 4.2.7 $g : [a,b] \longrightarrow [0,\infty)$ sürekli, pozitif, $x = \frac{2ab}{a+b}$' e göre harmonik simetrik bir fonksiyon ve $\|g\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |g(x)|$ olsun. Bu durumda Teorem

4.2.4' ün koşulları altında $\alpha > 0$, $x \in \left[\frac{1}{b}, \frac{1}{a}\right]$ için $h(t) = \int\limits_{1/t}^{1/a} ((\psi g) \circ \varphi)(x)dx$, $\psi(x) = \left[\left(x - \frac{1}{b}\right)^{\alpha-1} + \left(\frac{1}{a} - x\right)^{\alpha-1}\right]$, $\varphi(x) = \frac{1}{x}$ alınırsa

$$\begin{aligned}
&\left|\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}\right)\left[{}_RJ^{\alpha}_{1/b^+}(g\circ\varphi)(1/a) + {}_RJ^{\alpha}_{1/a^-}(g\circ\varphi)(1/b)\right]\right. \\
&\left.-\left[{}_RJ^{\alpha}_{1/b^+}(fg\circ\varphi)(1/a) + {}_RJ^{\alpha}_{1/a^-}(fg\circ\varphi)(1/b)\right]\right| \\
&\leq \frac{(b-a)^{\alpha+1}\|g\|_{\infty}}{2^{\alpha+1}(ab)^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)}\left(\frac{2^2(2^{\alpha}-1)}{\alpha+1}\right)^{1-\frac{1}{q}} \times \\
&\left[T_1(\alpha,q)\left|f'(a)\right|^q + T_2(\alpha,q)\left|f'(H)\right|^q + T_3(\alpha,q)\left|f'(b)\right|^q\right]^{\frac{1}{q}} \qquad (4.2.41)
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir, burada $q \geq 1$ için katsayılar

$$\begin{aligned}
T_1(\alpha,q) &= \int_0^1 \left[(1+t)^{\alpha} - (1-t)^{\alpha}\right] t\,(L_H(t))^{2q}\,dt \\
T_2(\alpha,q) &= \int_0^1 \left[(1+t)^{\alpha} - (1-t)^{\alpha}\right](1-t)\left((L_H(t))^{2q} + (U_H(t))^{2q}\right)dt \\
T_3(\alpha,q) &= \int_0^1 \left[(1+t)^{\alpha} - (1-t)^{\alpha}\right] t\,(U_H(t))^{2q}\,dt
\end{aligned}$$

şeklinde olacaktır.

İspat. Teorem 4.2.4' deki (4.2.40) eşitsizliği ve Sonuç 4.2.5' in ispatındaki (4.2.36) eşitliği gözönüne alınırsa

$$\begin{aligned}
&\left|\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}\right)\left[{}_RJ^{\alpha}_{a^+}g(b) + {}_RJ^{\alpha}_{b^-}g(a)\right] - \left[{}_RJ^{\alpha}_{a^+}(fg)(b) + {}_RJ^{\alpha}_{b^-}(fg)(a)\right]\right| \\
&\leq \frac{(b-a)^{\alpha+1}}{2^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)} \times
\end{aligned}$$

$$\left\{\begin{array}{c}
\left(\int\limits_0^1 \left[(1+t)^{\alpha} - (1-t)^{\alpha}\right]dt\right)^{1-\frac{1}{q}} \times \\
\left(\int\limits_0^1 \left[(1+t)^{\alpha} - (1-t)^{\alpha}\right]\left(t\,(L_H(t))^{2q}\left|f'(a)\right|^q + (1-t)\,(L_H(t))^{2q}\left|f'(H)\right|^q\right)dt\right)^{\frac{1}{q}}
\end{array}\right.$$

$$\left.+\begin{array}{c}
\left(\int\limits_0^1 \left[(1+t)^{\alpha} - (1-t)^{\alpha}\right]dt\right)^{1-\frac{1}{q}} \times \\
\left(\int\limits_0^1 \left[(1+t)^{\alpha} - (1-t)^{\alpha}\right]\left(t\,(U_H(t))^{2q}\left|f'(b)\right|^q + (1-t)\,(U_H(t))^{2q}\left|f'(H)\right|^q\right)dt\right)^{\frac{1}{q}}
\end{array}\right\}$$

$$\leq \frac{(b-a)^{\alpha+1}\|g\|_{\infty}}{2^{\alpha+1}(ab)^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)}\left(\frac{2^{\alpha+1}-2}{\alpha+1}\right)^{1-\frac{1}{q}}\times$$

$$\left[\begin{array}{c}\left(\int\limits_0^1 \begin{array}{c}[(1+t)^{\alpha}-(1-t)^{\alpha}]\times \\ \left[t\left(L_H(t)\right)^{2q}|f'(a)|^q+(1-t)\left(L_H(t)\right)^{2q}|f'(H)|^q\right]dt\end{array}\right)^{\frac{1}{q}} \\ +\left(\int\limits_0^1 \begin{array}{c}[(1+t)^{\alpha}-(1-t)^{\alpha}]\times \\ \left[t\left(U_H(t)\right)^{2q}|f'(b)|^q+(1-t)\left(U_H(t)\right)^{2q}|f'(H)|^q\right]dt\end{array}\right)^{\frac{1}{q}}\end{array}\right] \tag{4.2.42}$$

olduğu görülür. Bu durumda $a>0,\ b>0,\ r<1, a^r+b^r<2^{1-r}(a+b)^r$ ifadesinden yararlanırsak

$$\leq \frac{(b-a)^{\alpha+1}\|g\|_{\infty}}{2^{\alpha+1}(ab)^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)}\left(\frac{2^2(2^{\alpha}-1)}{\alpha+1}\right)^{\frac{1}{p}}\times$$

$$\left[\int\limits_0^1\left(\begin{array}{c}[(1+t)^{\alpha}-(1-t)^{\alpha}]\,t\left(L_H(t)\right)^{2q}|f'(a)|^q+ \\ [(1+t)^{\alpha}-(1-t)^{\alpha}](1-t)\left(\begin{array}{c}\left(L_H(t)\right)^{2q} \\ +\left(U_H(t)\right)^{2q}\end{array}\right)|f'(H)|^q \\ +[(1+t)^{\alpha}-(1-t)^{\alpha}]\,t\left(U_H(t)\right)^{2q}|f'(b)|^q\end{array}\right)dt\right]^{\frac{1}{q}} \tag{4.2.43}$$

yazılabilir.

Sonuç 4.2.8 Eğer Sonuç 4.2.7' de $\alpha=1$ ve $g(x)=\frac{1}{\ln b-\ln a}$ özel olarak alınırsa

$$\left|\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}\right)-\frac{ab}{(b-a)}\int\limits_a^b\frac{f(x)}{x^2}dx\right|\leq\frac{(b-a)}{2^{2+\frac{1}{q}}(ab)}\times$$

$$\left[T_1(1,q)|f'(a)|^q+T_2(1,q)|f'(H)|^q+T_3(1,q)|f'(b)|^q\right]^{\frac{1}{q}} \tag{4.2.44}$$

elde edilir.

4.3 Quasi Geometrik Konveks Fonksiyonlar için Hermite-Hadamard-Fejér Tipli Kesirli İntegral Eşitsizleri

Bu kısımda Lemma 4.1.1 ve Lemma 4.1.2 eşitliklerini quasi geometrik konveks fonksiyonlar için uyguladık. Yeni teoremler ve sonuçlar elde ettik.

Teorem 4.3.1 $f : I \subseteq \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I^o 'da diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $a, b \in I^o$, $a < b$ olmak üzere $h : [a, b] \longrightarrow [0, \infty)$ diferansiyellenebilir olsun. Eğer $|f'|$, $[a, b]$ aralığında quasi geometrik fonksiyon ise

$$\left|[h(b) - 2h(a)]\frac{f(a)}{2} + h(b)\frac{f(b)}{2} - \int_a^b f(x)h'(x)dx\right| \leq \frac{\ln b - \ln a}{4} \times$$
$$[\zeta_1(a, b) \sup\{f'(a), f'(G)\} + \zeta_1(a, b) \sup\{f'(b), f'(G)\}] \tag{4.3.1}$$

eşitsizliği yazılabilir, burada katsayılar

$$\begin{aligned} \zeta_1(a, b) &= \int_0^1 \left|2h\left(a^t G^{1-t}\right) - h(b)\right| a^t G^{1-t} dt \\ \zeta_2(a, b) &= \int_0^1 \left|2h\left(b^t G^{1-t}\right) - h(b)\right| b^t G^{1-t} dt \end{aligned}$$

dir.

İspat. Teorem 4.1.1' in ispatındaki (4.1.7) eşitsizliğinde $|f'|$ fonksiyonunun, $[a, b]$ aralığında quasi geometrik konveks fonksiyon olduğu dikkate alınırsa her $t \in [0, 1]$ için

$$\left|[h(b) - 2h(a)]\frac{f(a)}{2} + h(b)\frac{f(b)}{2} - \int_a^b f(x)h'(x)dx\right| \leq \frac{lnb - lna}{4} \times$$
$$\left\{\int_0^1 \left|2h\left(a^t G^{1-t}\right) - h(b)\right| [\sup\{f'(a), f'(G)\}] a^t G^{1-t} dt\right.$$
$$\left. + \int_0^1 \left|2h\left(b^t G^{1-t}\right) - h(b)\right| [\sup\{f'(b), f'(G)\}] b^t G^{1-t} dt\right\} \tag{4.3.2}$$

elde edilir ve böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 4.3.1 $g : [a, b] \longrightarrow [0, \infty)$ sürekli, pozitif, $\sqrt{ab}$' ye göre geometrik simetrik bir fonksiyon ve $\|g(x)\|_\infty = sup_{x\in[a,b]} |g(x)|$ olsun. Bu durumda Teorem 4.3.1 koşulları altında $\alpha > 0$ için $h(x) = \int_a^x \left[\left(ln\frac{b}{t}\right)^{\alpha-1} + \left(ln\frac{t}{a}\right)^{\alpha-1}\right] \frac{g(t)}{t} dt$ alınırsa

$$\left|\left(\frac{f(a) + f(b)}{2}\right) \left[{}_H J^\alpha_{a^+} g(b) + {}_H J^\alpha_{b^-} g(a)\right] - \left[{}_H J^\alpha_{a^+} (fg)(b) + {}_H J^\alpha_{b^-} (fg)(a)\right]\right|$$

$$\leq \frac{(\ln b-\ln a)^{\alpha+1}}{2^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)}\|g\|_{\infty}\left[C_1(\alpha)\sup\left\{\left|f'(a)\right|,\left|f'(G)\right|\right\}+C_2(\alpha)\sup\left\{\left|f'(b)\right|,\left|f'(G)\right|\right\}\right] \tag{4.3.3}$$

eşitsizliği elde edelir, burada katsayılar

$$C_1(\alpha)=\int_0^1\left[(1+t)^{\alpha}-(1-t)^{\alpha}\right]a^tG^{1-t}dt$$

$$C_2(\alpha)=\int_0^1\left[(1+t)^{\alpha}-(1-t)^{\alpha}\right]b^tG^{1-t}dt$$

şeklinde tanımlanır.

İspat. Teorem 4.3.1' ün ispatındaki (4.3.2) eşitsizliğinde her $x\in[a,b]$ için

$$h(x)=\int_a^x\left[\left(ln\frac{b}{t}\right)^{\alpha-1}+\left(ln\frac{t}{a}\right)^{\alpha-1}\right]\frac{g(t)}{t}dt$$

fonksiyonunu alırsak

$$\left|\Gamma(\alpha)\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}\right)\left[{}_HJ_{a^+}^{\alpha}g(b)+{}_HJ_{b^-}^{\alpha}g(a)\right]-\Gamma(\alpha)\left[{}_HJ_{a^+}^{\alpha}(fg)(b)+{}_HJ_{b^-}^{\alpha}(fg)(a)\right]\right|$$

elde ediliriz. Eşitsizliğin sağ tarafı için ise aynı şekilde

$$\leq\frac{lnb-lna}{4}\left\{\int_0^1\left|\begin{array}{c}2\int_a^{a^tG^{1-t}}\left[\left(\ln\frac{b}{x}\right)^{\alpha-1}+\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{\alpha-1}\right]\frac{g(x)}{x}dx\\-\int_a^b\left[\left(\ln\frac{b}{x}\right)^{\alpha-1}+\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{\alpha-1}\right]\frac{g(x)}{x}dx\end{array}\right|\right.$$
$$\times\left[\sup\left\{f'(a),f'(G)\right\}\right]a^tG^{1-t}dt$$
$$+\int_0^1\left|\begin{array}{c}2\int_a^{b^tG^{1-t}}\left[\left(\ln\frac{b}{x}\right)^{\alpha-1}+\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{\alpha-1}\right]\frac{g(x)}{x}dx\\-\int_a^b\left[\left(\ln\frac{b}{x}\right)^{\alpha-1}+\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{\alpha-1}\right]\frac{g(x)}{x}dx\end{array}\right|$$
$$\left.\times\left[\sup\left\{f'(b),f'(G)\right\}\right]b^tG^{1-t}dt\right\} \tag{4.3.4}$$

olur. $g(x)$ fonksiyonu $\sqrt{ab}$' ye göre geometrik simetrik fonksiyon olduğundan her $t\in[0,1]$ için

$$\left|2\int_{a}^{a^tG^{1-t}}\left[\left(\ln\frac{b}{x}\right)^{\alpha-1}+\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{\alpha-1}\right]\frac{g(x)}{x}dx\right.$$
$$\left.-\int_{a}^{b}\left[\left(\ln\frac{b}{x}\right)^{\alpha-1}+\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{\alpha-1}\right]\frac{g(x)}{x}dx\right|$$
$$=\left|\int_{a^tG^{1-t}}^{b^tG^{1-t}}\left[\left(\ln\frac{b}{x}\right)^{\alpha-1}+\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{\alpha-1}\right]\frac{g(x)}{x}dx\right| \quad (4.3.5)$$

ve

$$\left|2\int_{a}^{b^tG^{1-t}}\left[\left(\ln\frac{b}{x}\right)^{\alpha-1}+\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{\alpha-1}\right]\frac{g(x)}{x}dx\right.$$
$$\left.-\int_{a}^{b}\left[\left(\ln\frac{b}{x}\right)^{\alpha-1}+\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{\alpha-1}\right]\frac{g(x)}{x}dx\right|$$
$$=\left|\int_{a^tG^{1-t}}^{b^tG^{1-t}}\left[\left(\ln\frac{b}{x}\right)^{\alpha-1}+\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{\alpha-1}\right]\frac{g(x)}{x}dx\right| \quad (4.3.6)$$

ifadeleri elde edilir. (4.3.4) eşitsizliğinde (4.3.5) ve (4.3.6) integrallerini kullandığımızda

$$\left|\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}\right)\left[{}_HJ^{\alpha}_{a^+}g(b)+{}_HJ^{\alpha}_{b^-}g(a)\right]-\left[{}_HJ^{\alpha}_{a^+}\left(fg\right)(b)+{}_HJ^{\alpha}_{b^-}\left(fg\right)(a)\right]\right|$$
$$\leq\frac{lnb-lna}{4\Gamma(\alpha)}\left\{\int_0^1\left|\int_{a^tG^{1-t}}^{b^tG^{1-t}}\left[\left(\ln\tfrac{b}{x}\right)^{\alpha-1}+\left(\ln\tfrac{x}{a}\right)^{\alpha-1}\right]\tfrac{g(x)}{x}dx\right|\times\right.$$
$$\left[\sup\left\{f'(a),f'(G)\right\}\right]a^tG^{1-t}dt$$
$$+\int_0^1\left|\int_{a^tG^{1-t}}^{b^tG^{1-t}}\left[\left(\ln\tfrac{b}{x}\right)^{\alpha-1}+\left(\ln\tfrac{x}{a}\right)^{\alpha-1}\right]\tfrac{g(x)}{x}dx\right|\times$$
$$\left.\left[\sup\left\{f'(b),f'(G)\right\}\right]b^tG^{1-t}dt\right\}$$
$$\leq\frac{lnb-lna}{4\Gamma(\alpha)}\left\|g\right\|_{\infty}\left\{\int_0^1\left[\int_{a^tG^{1-t}}^{b^tG^{1-t}}\left[\left(\ln\tfrac{b}{x}\right)^{\alpha-1}+\left(\ln\tfrac{x}{a}\right)^{\alpha-1}\right]\tfrac{1}{x}dx\right]\times\right.$$
$$\left[\sup\left\{f'(a),f'(G)\right\}\right]a^tG^{1-t}dt$$

$$
\left.\begin{array}{l}
+\int\limits_0^1 \left[\int\limits_{a^tG^{1-t}}^{b^tG^{1-t}} \left[\left(\ln \frac{b}{x}\right)^{\alpha-1} + \left(\ln \frac{x}{a}\right)^{\alpha-1} \right] \frac{1}{x} dx \right] \times \\
\qquad [\sup\{f'(b), f'(G)\}]\, b^tG^{1-t} dt
\end{array}\right\} \tag{4.3.7}
$$

eşitsizliğini elde ederiz. Son eşitsizlikde bulunan integral

$$
\begin{aligned}
& \int\limits_{a^tG^{1-t}}^{b^tG^{1-t}} \left[\left(\ln \frac{b}{x}\right)^{\alpha-1} + \left(\ln \frac{x}{a}\right)^{\alpha-1} \right] \frac{1}{x} dx \\
&= \int\limits_{a^tG^{1-t}}^{b^tG^{1-t}} \left(\ln \frac{b}{x}\right)^{\alpha-1} \frac{1}{x} dx + \int\limits_{a^tG^{1-t}}^{b^tG^{1-t}} \left(\ln \frac{x}{a}\right)^{\alpha-1} \frac{1}{x} dx \\
&= \frac{2.\,(\ln b - \ln a)^{\alpha}}{2^{\alpha}.\alpha} \left[(1+t)^{\alpha} - (1-t)^{\alpha}\right]
\end{aligned} \tag{4.3.8}
$$

şeklinde yazılabilir. (4.3.7) eşitsizliğinde (4.3.8) ifadesini kullanırsak (4.3.3) eşitsizliğini elde etmiş oluruz.

Sonuç 4.3.2 i. Eğer Sonuç 4.3.1' deki (4.3.1) eşitsizliğinde $\alpha = 1$ alınırsa, bu takdirde $a, b > 0$ için

$$
\left| \left[\frac{f(a)+f(b)}{2} \right] \int\limits_a^b \frac{g(x)}{x} dx - \int\limits_a^b f(x) \frac{g(x)}{x} dx \right| \leq \frac{(\ln b - \ln a)^2}{4} \left\| g \right\|_{\infty} \times
$$

$$
\left[C_1(\alpha) \sup\{|f'(a)|, |f'(G)|\} + C_2(\alpha) \sup\{|f'(b)|, |f'(G)|\} \right] \tag{4.3.9}
$$

eşitsizliği elde edilir. Burada katsayılar

$$
\begin{aligned}
C_1(1) &= \int\limits_0^1 t a^t G^{1-t} dt, \\
C_2(1) &= \int\limits_0^1 t b^t G^{1-t} dt
\end{aligned}
$$

şeklindedir.

ii. Eğer Sonuç 4.3.1' deki (4.3.1) eşitsizliğinde $g(x) = 1$ alınırsa, bu durumda

$$
\begin{aligned}
& \left| \left(\frac{f(a)+f(b)}{2} \right) - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(\ln b - \ln a)^{\alpha}} \left[{}_H J_{a^+}^{\alpha} f(b) + {}_H J_{b^-}^{\alpha} f(a) \right] \right| \leq \frac{(\ln b - \ln a)}{2^{\alpha+2}} \times \\
& \left[C_1(\alpha) \sup\{|f'(a)|, |f'(G)|\} + C_2(\alpha) \sup\{|f'(b)|, |f'(G)|\} \right]
\end{aligned} \tag{4.3.10}
$$

eşitsizliği elde edilir.

iii. Eğer Sonuç 4.3.1' deki (4.3.1) eşitsizliğinde $\alpha = 1$ ve $g(x) = 1$ alınırsa

$$\left| \left(\frac{f(a)+f(b)}{2} \right) - \frac{1}{(\ln b - \ln a)} \int_a^b \frac{f(x)}{x} dx \right| \leq \frac{(\ln b - \ln a)}{4} \times$$
$$[C_1(\alpha) \sup\{|f'(a)|, |f'(G)|\} + C_2(\alpha) \sup\{|f'(b)|, |f'(G)|\}] \quad (4.3.11)$$

eşitsizliği elde edilir.

Teorem 4.3.2 $f : I \subseteq \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I^o 'da diferansiyellenebilir, $a, b \in I^o$, $a < b$ olmak üzere $h : [a, b] \longrightarrow [0, \infty)$ diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Eğer $|f'|^q$, $[a, b]$ aralığında quasi geometrik fonksiyon ise bu takdirde, $q \geq 1$ için

$$\left| [h(b) - 2h(a)] \frac{f(a)}{2} + h(b) \frac{f(b)}{2} - \int_a^b f(x) h'(x) dx \right|$$
$$\leq \frac{\ln b - \ln a}{4} \left\{ \begin{array}{c} \left(\int_0^1 |2h(a^t G^{1-t}) - h(b)| \, dt \right)^{1-\frac{1}{q}} \times \\ \left(\int_0^1 \begin{array}{c} (|2h(a^t G^{1-t}) - h(b)|) \times \\ \left(\sup\{|f'(a)|^q, |f'(G)|^q\} a^{qt} G^{q(1-t)} \right) dt \end{array} \right)^{\frac{1}{q}} \end{array} \right.$$
$$\left. \begin{array}{c} + \left(\int_0^1 |2h(b^t G^{1-t}) - h(b)| \, dt \right)^{1-\frac{1}{q}} \times \\ \left(\int_0^1 \begin{array}{c} (|2h(b^t G^{1-t}) - h(b)|) \times \\ \left(\sup\{|f'(b)|^q, |f'(G)|^q\} b^{qt} G^{q(1-t)} \right) dt \end{array} \right)^{\frac{1}{q}} \end{array} \right\} \quad (4.3.12)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. Teorem 4.1.1' in ispatındaki (4.1.7) eşitsizliğinde $|f'|^q$ fonksiyonunun quasi geometrik fonksiyon olduğundan ve Sonuç 3.3.1' den yararlandığımızda ispatı tamamlamış oluruz.

Sonuç 4.3.3 $f : I \subseteq \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu, I^o' da diferansiyellenebilir ve $g : [a, b] \longrightarrow [0, \infty)$ sürekli, pozitif ve $\sqrt{ab}$' ye göre geometrik simetrik bir fonksiyon, $\|g(x)\|_\infty = sup_{x\in[a,b]} |g(x)|$ olsun. Bu durumda Teorem 4.3.1' in koşulları altında $\alpha > 0$ için $h(x) = \int_a^x \left[\left(ln\frac{b}{t} \right)^{\alpha-1} + \left(ln\frac{t}{a} \right)^{\alpha-1} \right] \frac{g(t)}{t} dt$ alınırsa her $q \geq 1$ için

$$\left| \left(\frac{f(a)+f(b)}{2} \right) [{}_H J_{a^+}^\alpha g(b) + {}_H J_{b^-}^\alpha g(a)] - [{}_H J_{a^+}^\alpha (fg)(b) + {}_H J_{b^-}^\alpha (fg)(a)] \right|$$

$$\leq \frac{(\ln b-\ln a)^{\alpha+1}\|g\|_\infty}{2^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)}(\frac{2^{\alpha+2}-2^2}{\alpha+1})^{1-\frac{1}{q}}\left[\begin{array}{c} C_1(\alpha,q)\sup\{|f'(a)|^q,|f'(G)|^q\} \\ \\ +C_2(\alpha,q)\sup\{|f'(b)|^q,|f'(G)|^q\}\end{array}\right]^{1/q} \tag{4.3.13}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada katsayılar $q\geq 1$ için

$$\begin{aligned} C_1(\alpha,q) &= \int_0^1 [(1+t)^\alpha-(1-t)^\alpha]\, a^{qt}G^{q(1-t)}dt \\ C_2(\alpha,q) &= \int_0^1 [(1+t)^\alpha-(1-t)^\alpha]\, b^{qt}G^{q(1-t)}dt \end{aligned}$$

integralleriyle ifade edilir.

İspat. Teorem 4.3.2' deki (4.3.12) eşitsizliğinde (4.3.8) eşitliğini yerine yazarsak

$$\left|\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}\right)[{}_HJ^\alpha_{a^+}g(b)+{}_HJ^\alpha_{b^-}g(a)]-[{}_HJ^\alpha_{a^+}(fg)(b)+{}_HJ^\alpha_{b^-}(fg)(a)]\right|$$

$$\leq \frac{(\ln b-\ln a)^{\alpha+1}\|g\|_\infty}{2^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)}\times$$

$$\left\{\begin{array}{c} \left(\int_0^1[(1+t)^\alpha-(1-t)^\alpha]\,dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\times \\ \left(\int_0^1[(1+t)^\alpha-(1-t)^\alpha]\left(\sup\{|f'(a)|^q,|f'(G)|^q\}\,a^{qt}G^{q(1-t)}\right)dt\right)^{\frac{1}{q}} \\ +\quad \left(\int_0^1[(1+t)^\alpha-(1-t)^\alpha]\,dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\times \\ \left(\int_0^1[(1+t)^\alpha-(1-t)^\alpha]\left(\sup\{|f'(b)|^q,|f'(G)|^q\}\,b^{qt}G^{q(1-t)}\right)dt\right)^{\frac{1}{q}}\end{array}\right\}$$

$$\leq \frac{(\ln b-\ln a)^{\alpha+1}\|g\|_\infty}{2^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)}(\frac{2^{\alpha+1}-2}{\alpha+1})^{1-\frac{1}{q}}\times$$

$$\left[\begin{array}{c}\left(\int_0^1 \begin{array}{c}[(1+t)^\alpha-(1-t)^\alpha]\times \\ \left[\left(\sup\{|f'(a)|^q,|f'(G)|^q\}\,a^{qt}G^{q(1-t)}\right)\right]dt\end{array}\right)^{\frac{1}{q}} \\ +\left(\int_0^1 \begin{array}{c}[(1+t)^\alpha-(1-t)^\alpha]\times \\ \left[\left(\sup\{|f'(b)|^q,|f'(G)|^q\}\,b^{qt}G^{q(1-t)}\right)\right]dt\end{array}\right)^{\frac{1}{q}}\end{array}\right] \tag{4.3.14}$$

olduğu görülür. Son eşitsizlikte $a>0,\ b>0,\ r<1$ için $a^r+b^r<2^{1-r}(a+b)^r$ ifadesi kullanılırsa, her $q\geq 1$ için

$$\left|\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}\right)[{}_HJ^\alpha_{a^+}g(b)+{}_HJ^\alpha_{b^-}g(a)]-[{}_HJ^\alpha_{a^+}(fg)(b)+{}_HJ^\alpha_{b^-}(fg)(a)]\right|$$

$$\leq \frac{(\ln b-\ln a)^{\alpha+1}\|g\|_{\infty}}{2^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)}\left(\frac{2^{\alpha+2}-2^{2}}{\alpha+1}\right)^{1-\frac{1}{q}}\times$$

$$\left[\int_{0}^{1}\left([(1+t)^{\alpha}-(1-t)^{\alpha}]\times\begin{bmatrix}\sup\{|f'(a)|^{q},|f'(G)|^{q}\}a^{qt}G^{q(1-t)}\\+\sup\{|f'(b)|^{q},|f'(G)|^{q}\}b^{qt}G^{q(1-t)}\end{bmatrix}\right)dt\right]^{\frac{1}{q}} \tag{4.3.15}$$

eşitsizliğini elde ederiz.

Sonuç 4.3.4 Sonuç 4.3.3' deki (4.3.13) eşitsizliğinde $\alpha=1$ ve $g(x)=\frac{1}{\ln b-\ln a}$ alınırsa, her $q\geq 1$ için

$$\left|\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}\right)-\frac{1}{\ln b-\ln a}\int_{a}^{b}\frac{f(x)}{x}dx\right|$$

$$\leq \frac{(\ln b-\ln a)}{2^{2+\frac{1}{q}}}\begin{bmatrix}C_{1}(1,q)\sup\{|f'(a)|^{q},|f'(G)|^{q}\}\\ \\+C_{2}(1,q)\sup\{|f'(b)|^{q},|f'(G)|^{q}\}\end{bmatrix}^{\frac{1}{q}} \tag{4.3.16}$$

eşitsizliği elde edilir.

Teorem 4.3.3 $f: I\subseteq\mathbb{R}^{+}\longrightarrow\mathbb{R}$ fonksiyonu I^{o}' da diferansiyellenebilir bir fonksiyon, $a,b\in I^{o}$, $a<b$ için $h:[a,b]\longrightarrow[0,\infty)$ fonksiyonu diferansiyellenebilir olsun. Eğer $|f'|$, $[a,b]$ aralığında quasi geometrik konveks fonksiyon ise bu takdirde

$$\left|\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}\right)h(a)-h(b)f(\sqrt{ab})+\frac{1}{2}\left[\int_{a}^{b}f(x)h'(x)dx+\int_{a}^{b}f(x)h'\left(\frac{ab}{x}\right)\frac{ab}{x^{2}}dx\right]\right|$$

$$\leq \frac{\ln b-\ln a}{4}\left[\zeta_{1}(a,b)\sup\{f'(a),f'(G)\}+\zeta_{2}(a,b)\sup\{f'(b),f'(G)\}\right] \tag{4.3.17}$$

eşitsizliği sağlanır, burada katsayılar

$$\zeta_{1}(a,b) = \int_{0}^{1}L_{G}(t)\left|h(L_{G}(t))-h(U_{G}(t))+h(b)\right|dt$$

$$\zeta_{2}(a,b) = \int_{0}^{1}U_{G}(t)\left|h(L_{G}(t))-h(U_{G}(t))+h(b)\right|dt$$

dır.

İspat. Lemma 4.1.2' deki (4.1.27) eşitliğinin her iki tarafının mutlak değeri alındığında

$$\left|\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}\right)h(a)-h(b)f(\sqrt{ab})+\frac{1}{2}\left[\int_a^b f(x)h'(x)dx+\int_a^b f(x)h'(\frac{ab}{x})\frac{ab}{x^2}dx\right]\right|$$

$$\leq \frac{lnb-lna}{4}\left\{\int_0^1 \left|h(L_G(t))-h(U_G(t))+h(b)\right|\left|f'\left(L_G(t)\right)L_G(t)\right|dt\right.$$

$$\left.+\int_0^1 \left|h(L_G(t))-h(U_G(t))+h(b)\right|\left|f'\left(U_G(t)\right)U_G(t)\right|dt\right\} \tag{4.3.18}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu durumda $|f'|$ fonksiyonu, $[a,b]$ aralığında quasi geometrik konveks fonksiyon olduğundan

$$\left|\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}\right)h(a)-h(b)f(\sqrt{ab})+\frac{1}{2}\left[\int_a^b f(x)h'(x)dx+\int_a^b f(x)h'(\frac{ab}{x})\frac{ab}{x^2}dx\right]\right|$$

$$\leq \frac{lnb-lna}{4}\left\{\int_0^1 \left|h(L_G(t))-h(U_G(t))+h(b)\right|\left[\sup\left\{f'\left(a\right),f'\left(G\right)\right\}\right]L_G(t)dt\right.$$

$$\left.+\int_0^1 \left|h(L_G(t))-h(U_G(t))+h(b)\right|\left[\sup\left\{f'\left(b\right),f'\left(G\right)\right\}\right]U_G(t)dt\right\} \tag{4.3.19}$$

yazılabilir ve böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 4.3.5 $g:[a,b]\longrightarrow[0,\infty)$ sürekli, pozitif ve $\sqrt{ab}$' ye göre geometrik simetrik bir fonksiyon ve $\|g(x)\|_\infty = sup_{x\in[a,b]}|g(x)|$ olsun. Bu durumda Teorem 4.3.3' ün koşulları altında eğer $\alpha>0$ için $h(x)=\int_a^x\left[\left(ln\frac{b}{t}\right)^{\alpha-1}+\left(ln\frac{t}{a}\right)^{\alpha-1}\right]\frac{g(t)}{t}dt$ alınırsa

$$\left|\left[{}_HJ^\alpha_{a^+}\left(fg\right)(b)+{}_HJ^\alpha_{b^-}\left(fg\right)(a)\right]-f\left(\sqrt{ab}\right)\left[{}_HJ^\alpha_{a^+}g(b)+{}_HJ^\alpha_{b^-}g(a)\right]\right|$$

$$\leq \frac{(\ln b-\ln a)^{\alpha+1}}{2\Gamma\left(\alpha+1\right)}\|g\|_\infty\left[C_1(\alpha)\sup\left\{\left|f'(a)\right|,\left|f'(G)\right|\right\}\right.$$

$$\left.+C_2(\alpha)\sup\left\{\left|f'(b)\right|,\left|f'(G)\right|\right\}\right] \tag{4.3.20}$$

eşitsizliği sağlanır, burada katsayılar

$$C_1\left(\alpha\right)=\int_0^1\left[1-(\frac{1+t}{2})^\alpha+(\frac{1-t}{2})^\alpha\right]L_G(t)dt$$

$$C_2(\alpha) = \int_0^1 \left[1 - (\frac{1+t}{2})^\alpha + (\frac{1-t}{2})^\alpha\right] U_G(t)dt$$

şeklinde tanımlanır.

İspat. Hipotezde tanımlanan h fonksiyonu (4.3.19) eşitsizliğinde yerine yazılırsa

$$\left|\left[{}_HJ^\alpha_{a^+}(fg)(b) + {}_HJ^\alpha_{b^-}(fg)(a)\right] - f\left(\sqrt{ab}\right)\left[{}_HJ^\alpha_{a^+}g(b) + {}_HJ^\alpha_{b^-}g(a)\right]\right|$$

$$\leq \frac{lnb - lna}{4}\left\{\int_0^1 \left|\begin{array}{c} \int_a^{L_G(t)} \left[\left(\ln\frac{b}{x}\right)^{\alpha-1} + \left(\ln\frac{x}{a}\right)^{\alpha-1}\right]\frac{g(x)}{x}dx \\ -\int_a^{U_G(t)} \left[\left(\ln\frac{b}{x}\right)^{\alpha-1} + \left(\ln\frac{x}{a}\right)^{\alpha-1}\right]\frac{g(x)}{x}dx \\ +\int_a^b \left[\left(\ln\frac{b}{x}\right)^{\alpha-1} + \left(\ln\frac{x}{a}\right)^{\alpha-1}\right]\frac{g(x)}{x}dx \end{array}\right| \times \left[\sup\left\{f'(a), f'(G)\right\}\right] L_G(t)dt\right.$$

$$\left. + \int_0^1 \left|\begin{array}{c} \int_a^{L_G(t)} \left[\left(\ln\frac{b}{x}\right)^{\alpha-1} + \left(\ln\frac{x}{a}\right)^{\alpha-1}\right]\frac{g(x)}{x}dx \\ -\int_a^{U_G(t)} \left[\left(\ln\frac{b}{x}\right)^{\alpha-1} + \left(\ln\frac{x}{a}\right)^{\alpha-1}\right]\frac{g(x)}{x}dx \\ +\int_a^b \left[\left(\ln\frac{b}{x}\right)^{\alpha-1} + \left(\ln\frac{x}{a}\right)^{\alpha-1}\right]\frac{g(x)}{x}dx \end{array}\right| \times \left[\sup\left\{f'(b), f'(G)\right\}\right] U_G(t)dt\right\} \tag{4.3.21}$$

olduğu görülür. (4.1.38) ve (4.1.39) ifadelerini yerine yazarsak

$$\left|\left[{}_HJ^\alpha_{a^+}(fg)(b) + {}_HJ^\alpha_{b^-}(fg)(a)\right] - \left[{}_HJ^\alpha_{a^+}g(b) + {}_HJ^\alpha_{b^-}g(a)\right] f(\sqrt{ab})\right|$$

$$\leq \frac{lnb - lna}{2\Gamma(\alpha)}\left\{\int_0^1 \left|\int_a^{L_G(t)} \left[\left(\ln\frac{b}{x}\right)^{\alpha-1} + \left(\ln\frac{x}{a}\right)^{\alpha-1}\right]\frac{g(x)}{x}dx\right| \left[\sup\left\{f'(a), f'(G)\right\}\right] L_G(t)dt\right.$$

$$\left. + \int_0^1 \left|\int_a^{L_G(t)} \left[\left(\ln\frac{b}{x}\right)^{\alpha-1} + \left(\ln\frac{x}{a}\right)^{\alpha-1}\right]\frac{g(x)}{x}dx\right| \left[\sup\left\{f'(b), f'(G)\right\}\right] U_G(t)dt\right\}$$

$$\leq \frac{lnb - lna}{2\Gamma(\alpha)}\|g\|_\infty\left\{\int_0^1 \left(\int_a^{L_G(t)} \left[\left(\ln\frac{b}{x}\right)^{\alpha-1} + \left(\ln\frac{x}{a}\right)^{\alpha-1}\right]\frac{1}{x}dx\right) \left[\sup\left\{f'(a), f'(G)\right\}\right] L_G(t)dt\right.$$

$$\left. + \int_0^1 \left(\int_a^{L_G(t)} \left[\left(\ln\frac{b}{x}\right)^{\alpha-1} + \left(\ln\frac{x}{a}\right)^{\alpha-1}\right]\frac{1}{x}dx\right) \left[\sup\left\{f'(b), f'(G)\right\}\right] U_G(t)dt\right\} \tag{4.3.22}$$

eşitsizliği elde edilir ve böylece ispat tamamlamış olur.

Sonuç 4.3.6 i. Eğer Sonuç 4.3.5' deki (4.3.20) eşitsizliğinde $\alpha = 1$ alınırsa, bu takdirde $a, b > 0$ için

$$\left| \int_a^b f(x) \frac{g(x)}{x} dx - f\left(\sqrt{ab}\right) \int_a^b \frac{g(x)}{x} dx \right| \leq \frac{(\ln b - \ln a)^2}{4} \|g\|_\infty \times$$
$$[C_1(1) \sup\{|f'(a)|, |f'(G)|\} + C_2(1) \sup\{|f'(b)|, |f'(G)|\}] \quad (4.3.23)$$

yazılabilir, burada katsayıları

$$\begin{aligned} C_1(1) &= \int_0^1 (1-t)\, a^t G^{1-t} dt, \\ C_2(1) &= \int_0^1 (1-t)\, b^t G^{1-t} dt \end{aligned}$$

olacaktır.

ii. Eğer Sonuç 4.3.5' deki (4.3.20) eşitsizliğinde $g(x) = 1$ alınırsa

$$\left| \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(\ln b - \ln a)^\alpha} \left[{}_H J_{a+}^\alpha f(b) + {}_H J_{b-}^\alpha f(a) \right] - f\left(\sqrt{ab}\right) \right| \leq \frac{(\ln b - \ln a)}{4} \times$$
$$[C_1(\alpha) \sup\{|f'(a)|, |f'(G)|\} + C_2(\alpha) \sup\{|f'(b)|, |f'(G)|\}] \quad (4.3.24)$$

eşitsizliği elde edilir.

iii. Eğer Sonuç 4.3.5' deki (4.3.20) eşitsizliğinde $\alpha = 1$ ve $g(x) = 1$ alınırsa

$$\left| \frac{1}{(\ln b - \ln a)} \int_a^b \frac{f(x)}{x} dx - f\left(\sqrt{ab}\right) \right| \leq \frac{(\ln b - \ln a)}{4} \times$$
$$[C_1(1) \sup\{|f'(a)|, |f'(G)|\} + C_2(1) \sup\{|f'(b)|, |f'(G)|\}] \quad (4.3.25)$$

eşitsizliği elde edilir.

Teorem 4.3.4 $f : I \subseteq \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I^o' da diferansiyellenebilir, $a, b \in I$, $a < b$ olmak üzere $h : [a, b] \longrightarrow [0, \infty)$ diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Eğer $|f'|^q$, $[a, b]$ aralığında quasi geometrik konveks bir fonksiyon ise bu takdirde,

$q \geq 1$ için

$$\left|\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}\right)h(a)-h(b)f(\sqrt{ab})+\frac{1}{2}\left[\int_a^b f(x)h'(x)dx+\int_a^b f(x)h'(\frac{ab}{x})\frac{ab}{x^2}dx\right]\right|$$

$$\leq \frac{\ln b-\ln a}{4}\left\{\begin{array}{c}\left(\int_0^1 |h(L_G(t))-h(U_G(t))+h(b)|\,dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\times \\ \left(\int_0^1 \begin{array}{c}(|h(L_G(t))-h(U_G(t))+h(b)|)\times \\ (\sup\{|f'(a)|^q,|f'(G)|^q\}(L_G(t))^q)\,dt\end{array}\right)^{\frac{1}{q}}\end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{c}+\left(\int_0^1 |h(L_G(t))-h(U_G(t))+h(b)|\,dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\times \\ \left(\int_0^1 \begin{array}{c}(|h(L_G(t))-h(U_G(t))+h(b)|)\times \\ (\sup\{|f'(b)|^q,|f'(G)|^q\}(U_G(t))^q)\,dt\end{array}\right)^{\frac{1}{q}}\end{array}\right\} \qquad (4.3.26)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. Teorem 4.3.3' in ispatındaki (4.3.18) eşitsizliğinde $|f'|^q$ fonksiyonu quasi geometrik konveks fonksiyon olduğundan ve Sonuç 3.3.1' den yararlandığımızda ispatı tamamlamış oluruz.

Sonuç 4.3.7 $f : [a,b] \subseteq \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ diferansiyellenebilir bir fonksiyon, $g : [a,b] \longrightarrow [0,\infty)$ sürekli, pozitif, $\sqrt{ab}$' ye göre simetrik bir fonksiyon ve $\|g(x)\|_\infty = sup_{x\in[a,b]}|g(x)|$ olsun. Bu durumda Teorem 4.3.3' ün koşulları altında $\alpha > 0$ için $h(x) = \int_a^x \left[\left(ln\frac{b}{t}\right)^{\alpha-1}+\left(ln\frac{t}{a}\right)^{\alpha-1}\right]\frac{g(t)}{t}dt$ alınırsa bu durumda $|f'|^q$ fonksiyonu quasi geometrik konveks bir fonksiyon ise her $q \geq 1$ için

$$\left|\left[{}_HJ^\alpha_{a^+}(fg)(b)+{}_HJ^\alpha_{b^-}(fg)(a)\right]-\left[{}_HJ^\alpha_{a^+}g(b)+{}_HJ^\alpha_{b^-}g(a)\right]f(\sqrt{ab})\right|$$

$$\leq \frac{(\ln b-\ln a)^{\alpha+1}\|g\|_\infty}{4\Gamma(\alpha+1)}\left[2-\frac{4}{\alpha+1}+\frac{2^{2-\alpha}}{\alpha+1}\right]^{1-\frac{1}{q}}$$

$$\left[\begin{array}{c}C_1(\alpha,q)\sup\{|f'(a)|^q,|f'(G)|^q\} \\ +C_2(\alpha,q)\sup\{|f'(b)|^q,|f'(G)|^q\}\end{array}\right]^{\frac{1}{q}} \qquad (4.3.27)$$

dir, burada katsayılar

$$
\begin{aligned}
C_1(\alpha,q) &= \int_0^1 \left[1-\left(\frac{1+t}{2}\right)^{\alpha}+\left(\frac{1-t}{2}\right)^{\alpha}\right](L_G(t))^q\,dt \\
C_2(\alpha,q) &= \int_0^1 \left[1-\left(\frac{1+t}{2}\right)^{\alpha}+\left(\frac{1-t}{2}\right)^{\alpha}\right](U_G(t))^q\,dt
\end{aligned}
$$

şeklinde elde edilir.

İspat. Teorem 4.3.4' deki (4.3.26) eşitsizliğinde (4.1.39) ve (4.1.41) eşitlikleri kullanılırsa bu durumda her $q \geq 1$ için

$$
\begin{aligned}
&\left|\left[{}_HJ^{\alpha}_{a^+}(fg)(b)+{}_HJ^{\alpha}_{b^-}(fg)(a)\right]-\left[{}_HJ^{\alpha}_{a^+}g(b)+{}_HJ^{\alpha}_{b^-}g(a)\right]f(\sqrt{ab})\right| \\
&\leq \frac{(\ln b-\ln a)^{\alpha+1}\|g\|_{\infty}}{4\Gamma(\alpha+1)}\left\{\begin{array}{c}\left(\int_0^1\left[1-\left(\frac{1+t}{2}\right)^{\alpha}+\left(\frac{1-t}{2}\right)^{\alpha}\right]dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\times \\ \left(\begin{array}{c}\int_0^1\left[1-\left(\frac{1+t}{2}\right)^{\alpha}+\left(\frac{1-t}{2}\right)^{\alpha}\right]\times \\ \left(\sup\left\{|f'(a)|^q,|f'(G)|^q\right\}(L_G(t))^q\right)dt\end{array}\right)^{\frac{1}{q}}\end{array}\right. \\
&\quad+\left.\begin{array}{c}\left(\int_0^1\left[1-\left(\frac{1+t}{2}\right)^{\alpha}+\left(\frac{1-t}{2}\right)^{\alpha}\right]dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\times \\ \left(\begin{array}{c}\int_0^1\left[1-\left(\frac{1+t}{2}\right)^{\alpha}+\left(\frac{1-t}{2}\right)^{\alpha}\right]\times \\ \left(\sup\left\{|f'(b)|^q,|f'(G)|^q\right\}(U_G(t))^q\right)dt\end{array}\right)^{\frac{1}{q}}\end{array}\right\} \\
&\leq \frac{(\ln b-\ln a)^{\alpha+1}\|g\|_{\infty}}{4\Gamma(\alpha+1)}\left[1-\frac{2}{\alpha+1}+\frac{2^{1-\alpha}}{\alpha+1}\right]^{1-\frac{1}{q}}\times \\
&\quad\left[\begin{array}{c}\left(\int_0^1\begin{array}{c}\left[1-\left(\frac{1+t}{2}\right)^{\alpha}+\left(\frac{1-t}{2}\right)^{\alpha}\right]\times \\ \left[\sup\left\{|f'(a)|^q,|f'(G)|^q\right\}(L_G(t))^q\right]dt\end{array}\right)^{\frac{1}{q}} \\ +\left(\int_0^1\begin{array}{c}\left[1-\left(\frac{1+t}{2}\right)^{\alpha}+\left(\frac{1-t}{2}\right)^{\alpha}\right]\times \\ \left[\sup\left\{|f'(b)|^q,|f'(G)|^q\right\}(U_G(t))^q\right]dt\end{array}\right)^{\frac{1}{q}}\end{array}\right]
\end{aligned}
\tag{4.3.28}
$$

eşitsizliği elde edilir. Son eşitsizlikte $a>0$, $b>0$, $r<1$ için $a^r+b^r<2^{1-r}(a+b)^r$ ifadesini kullanırsak, her $q \geq 1$ için

$$\leq \frac{(\ln b-\ln a)^{\alpha+1}\|g\|_{\infty}}{4\Gamma(\alpha+1)}\left[2-\frac{4}{\alpha+1}+\frac{2^{2-\alpha}}{\alpha+1}\right]^{1-\frac{1}{q}}\times$$

$$\left[\int_0^1\left(\begin{array}{c}\left[1-\left(\frac{1+t}{2}\right)^{\alpha}+\left(\frac{1-t}{2}\right)^{\alpha}\right](L_G(t))^q\sup\{|f'(a)|^q,|f'(G)|^q\}\\ \\ +\left[1-\left(\frac{1+t}{2}\right)^{\alpha}+\left(\frac{1-t}{2}\right)^{\alpha}\right](U_G(t))^q\sup\{|f'(b)|^q,|f'(G)|^q\}\end{array}\right)dt\right]^{\frac{1}{q}} \quad (4.3.29)$$

olduğu görülür ve böylece ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 4.3.8 Sonuç 4.3.7' deki (4.3.27) eşitsizliğinde $\alpha=1$ ve $g(x)=\frac{1}{\ln b-\ln a}$ alınırsa, bu takdrde her $q\geq 1$ için

$$\left|\frac{1}{\ln b-\ln a}\int_a^b\frac{f(x)}{x}dx-f\left(\sqrt{ab}\right)\right|$$
$$\leq\frac{(\ln b-\ln a)}{4}\left[\begin{array}{c}C_1(1,q)\sup\{|f'(a)|^q,|f'(G)|^q\}\\ +C_2(1,q)\sup\{|f'(b)|^q,|f'(G)|^q\}\end{array}\right]^{\frac{1}{q}} \quad (4.3.30)$$

eşitsizliği elde edilir.

4.4 Uygulamalar

Burada, önceki bölümlerde elde edilen yeni sonuçları farklı konveks fonksiyonlar için uyguladık.

Sonuç 4.4.1 $f(x)=x^r$, $r>2$, şeklinde tanımlanan $f:I\subseteq\mathbb{R}^+\longrightarrow\mathbb{R}$ fonksiyon I^o da diferansiyellenebilir, $a,b\in I^o$, $a<b$ ve $g:[a,b]\longrightarrow[0,\infty)$, $g(x)=\left(\frac{x}{b}-\frac{a}{x}\right)^2$ fonksiyonu sürekli, pozitif ve $\sqrt{ab}$' ye göre geometrik simetrik fonksiyon olsun. Bu şartlar altında Sonuç 4.1.6 (i) şıkkındaki (4.1.42) eşitsizliği uygulanırsa

$$\Bigg|\frac{L\left(a^{r+2},b^{r+2}\right)-2G^2(a,b)L\left(a^r,b^r\right)+G^4(a,b)L\left(a^{r-2},b^{r-2}\right)}{2}$$
$$-G^r(a,b)\left[L\left(a^2,b^2\right)-G^2(a,b)\right]\Bigg|\leq\frac{(lnb-lna)\,rL^2(a,b)}{8}$$
$$\left[8a^{r-\frac{1}{2}}\left(L\left(\sqrt{a},\sqrt{b}\right)+A\left(\sqrt{a},\sqrt{b}\right)\right)+(16\,(L(a,b)-G(a,b)))\,G^r(a,b)\right.$$
$$\left.+8b^{r-\frac{1}{2}}\left(L\left(\sqrt{a},\sqrt{b}\right)+A\left(\sqrt{a},\sqrt{b}\right)\right)\right] \quad (4.4.1)$$

eşitsizliği elde edilir.

İspat. Öncelikle $|f'| = f'$ fonksiyonun geometrik-aritmetik konveks fonksiyon olduğunu gösterelim. Bunun için

$$\forall x \in I^o, i\c{c}in \quad f''(x) > 0 \quad ve \quad f'''(x) > 0$$

şartlarını incelemek yeterlidir. Bu durumda

$$\begin{aligned} f'(x) &= rx^{r-1} \\ f''(x) &= r(r-1)x^{r-2} > 0 \\ f'''(x) &= r(r-1)(r-2)x^{r-3} > 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Çünkü f fonksiyonunun tanımı gereği $r > 2$ dir. Diğer taraftan g fonksiyonunun $\sqrt{ab}$' ye göre simetriklik şartını sağlaması gerekir. Bunun için geometrik simetriklik tanımı gereği

$$g\left(\frac{ab}{x}\right) = \left(\frac{\frac{ab}{x}}{b} - \frac{a}{\frac{ab}{x}}\right)^2 = \left(\frac{x}{b} - \frac{a}{x}\right)^2 = g(x) \qquad (4.4.2)$$

elde edilir ve böylece hipotezin doğruluğu gösterilmiş olur. Sonuç 4.1.6 (i) hipotezini sağlayan fonksiyonlar öncelikle (4.1.42) eşitsizliğinin sol tarafında yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} &\left| \int_a^b x^r \frac{\left(\frac{x}{b} - \frac{a}{x}\right)^2}{x} dx - (ab)^{\frac{r}{2}} \int_a^b \frac{\left(\frac{x}{b} - \frac{a}{x}\right)^2}{x} dx \right| \\ &= 2\left(lnb - lna\right) \left\{ \left[\frac{L\left(a^{r+2}, b^{r+2}\right)}{2b^2} - \frac{a}{b} L(a^r, b^r) + \frac{a^2}{2} L(a^{r-2}, b^{r-2}) \right] \right. \\ &\left. -G^r(a,b) \left[\frac{L(a^2, b^2) - G^2(a,b)}{b^2} \right] \right\} \end{aligned} \qquad (4.4.3)$$

elde edilir. Diğer taraftan aynı şekilde (4.1.42) eşitsizliğinin sağ tarafında yerine konulursa

$$\leq \frac{(lnb - lna)^2}{4} \frac{(b-a)^2}{b^2} \left[K_1(1) r a^{r-1} + K_2(1) r G^{r-1}(a,b) + K_3(1) r b^{r-1} \right] \quad (4.4.4)$$

burada katsayılar

$$K_1(1) = \int_0^1 \left(t-t^2\right) a^t G^{1-t} dt = \frac{16\sqrt{a}\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)+4\sqrt{a}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)(lnb-lna)}{(lnb-lna)^3},$$

$$K_2(1) = \int_0^1 (1-t)^2 \left[a^t G^{1-t}+b^t G^{1-t}\right] dt = \frac{16\left(L(a,b)-G(a,b)\right)}{(lnb-lna)^2},$$

$$K_3(1) = \int_0^1 \left(t-t^2\right) b^t G^{1-t} dt = \frac{16\sqrt{b}\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)+4\sqrt{b}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)(lnb-lna)}{(lnb-lna)^3}$$

şeklindedir. Bu integraller Matlab programında hesaplanmıştır. (4.4.3) ve (4.4.4) de gerekli sadeleştirmeler yapıldığında (4.4.1) eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 4.4.2 $f(x) = x^r$, $r > 2$, şeklinde tanımlanan $f : I \subseteq \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I^{o}' da diferansiyellenebilir, $a, b \in I^o$, $a < b$ ve $g : [a,b] \longrightarrow [0,\infty)$, $g(x) = \left(\frac{x}{b}-\frac{a}{x}\right)^2$ fonksiyonu sürekli, pozitif ve $\sqrt{ab}$' ye göre geometrik simetrik bir fonksiyon olsun. Bu şartlar altında Sonuç 4.1.2 (i) de (4.1.19) eşitsizliği dikkate alınırsa

$$\begin{aligned}
&\left|A\left(a^r,b^r\right)\left(2L\left(a^2,b^2\right)-G^2(a,b)-\left[L\left(a^{r+2},b^{r+2}\right)\right)-2G^2(a,b)L\left(a^r,b^r\right)\right.\right.\\
&\left.\left.+G^4(a,b)L\left(a^{r-2},b^{r-2}\right)\right]\right|\\
&\leq L^2(a,b)r\left(lnb^2-lna^2\right)\left\{\left[\frac{L\left(\sqrt{a},\sqrt{b}\right)}{\sqrt{a}}-1-\frac{lnb-lna}{4}\right]a^r\right.\\
&\qquad+\left[-2L(a,b)+A(a,b)+G(a,b)\right]G^{r-1}(a,b)\\
&\qquad\left.+\left[\frac{L\left(\sqrt{a},\sqrt{b}\right)}{\sqrt{b}}-1+\frac{lnb-lna}{4}\right]b^r\right\} \qquad (4.4.5)
\end{aligned}$$

elde edilir.

İspat. Sonuç 4.4.1' in ispatında $f'(x)$ fonksiyonun geometrik-aritmetik konveks fonksiyon ve $g(x)$ fonksiyonun $\sqrt{ab}$' ye göre simetrik olduğunu gösterdik. Hipotezde tanımlanan fonksiyonları (4.1.19) eşitsizliğinin öncelikle sol tarafında yerine yazarsak

$$\left|\left(\frac{a^r+b^r}{2}\right)\int_a^b \frac{\left(\frac{x}{b}-\frac{a}{x}\right)^2}{x}dx-\int_a^b x^r\frac{\left(\frac{x}{b}-\frac{a}{x}\right)^2}{x}dx\right| = \frac{(lnb-lna)}{b^2}\left|A\left(a^r,b^r\right)\right.$$
$$\left[2L\left(a^2,b^2\right)-G^2(a,b)\right]-\left[L\left(a^{r+2},b^{r+2}\right)-2G^2(a,b)L\left(a^r,b^r\right)\right.$$
$$\left.\left.+G^4(a,b)L\left(a^{r-2},b^{r-2}\right)\right]\right| \tag{4.4.6}$$

elde edilir. Diğer taraftan (4.1.19) eşitsizliğinin sağ tarafında yerine yazılırsa

$$\leq \frac{(lnb-lna)^2 r}{4}\left(\frac{b-a}{b}\right)^2\left[E_1(1)a^{r-1}+E_2(1)G^{r-1}(a,b)+E_3(1)b^{r-1}\right] \tag{4.4.7}$$

elde edilir, burada katsayılar

$$\begin{aligned}
E_1(1) &= \frac{16\sqrt{a}\left(\sqrt{b}-\sqrt{a}\right)-8a\left(lnb-lna\right)-2a\left(lnb-lna\right)^2}{\left(lnb-lna\right)^3}\\
E_2(1) &= \frac{-16(b-a)+4(a+b)\left(lnb-lna\right)+8\sqrt{ab}}{\left(lnb-lna\right)^2}\\
E_3(1) &= \frac{16\sqrt{b}\left(\sqrt{b}-\sqrt{a}\right)-8b\left(lnb-lna\right)+2b\left(lnb-lna\right)^2}{\left(lnb-lna\right)^3}
\end{aligned}$$

şeklindedir. Buradaki katsayılar Matlab programıyla elde edilmiştir. Gerekli sadeleştirmeler ve düzenlemeler yapıldığında (4.4.5) eşitsizliğini sağlamış olur.

Sonuç 4.4.3 $p>4$ için $I=\left(1,e^{\frac{3}{4}(p-2)-\sqrt{\frac{9}{16}(p-2)^2-\frac{(p-2)(p-3)}{2}}}\right)$ bir aralık, $f(x)=(lnx)^{p-1}$ şeklinde tanımlanan $f:I\subseteq\mathbb{R}^+\longrightarrow\mathbb{R}$ fonksiyonu I^{o}' da diferansiyellenebilir, $a,b\in I$ ve $a<b$ olsun. Bu şartlar altında Sonuç 4.1.2 (ii) deki (4.1.20) eşitsizliği gözönüne alınırsa

$$\left|A\left((lna)^{p-1},(lnb)^{p-1}\right)-\frac{\alpha}{2(lnb)^{1-p}}\left[{}_2F_1\left(1-p,\alpha;\alpha+1;1-\frac{lna}{lnb}\right)\beta(\alpha,1)\right.\right.$$
$$\left.\left.+\,{}_2F_1\left(1-p,1;\alpha+1;1-\frac{lna}{lnb}\right)\beta(1,\alpha)\right]\right|$$
$$\leq\frac{(lnb-lna)(p-1)}{2^{\alpha+2}}\left[C_1(\alpha)\frac{(lna)^{p-2}}{a}+C_2(\alpha)\frac{A^{p-2}(lna,lnb)}{G}\right.$$
$$\left.+\,C_3(\alpha)\frac{(lnb)^{p-2}}{b}\right] \tag{4.4.8}$$

eşitsizliği sağlanır, burada $C_1(\alpha),C_2(\alpha)$ ve $C_3(\alpha)$ katsayıları (4.1.9) da tanımlandığı gibidir.

İspat. Öncelikle $x \in \left(1, e^{\frac{3}{4}(p-2)-\sqrt{\frac{9}{16}(p-2)^2-\frac{(p-2)(p-3)}{2}}}\right)$ için

$$\begin{aligned}
f(x) &= (lnx)^{p-1}, \\
f'(x) &= \frac{(p-1)\,(lnx)^{p-2}}{x} > 0, \\
f''(x) &= \frac{(p-1)(p-2)(lnx)^{p-3}-(p-1)(lnx)^{p-2}}{x^2} > 0, \\
f'''(x) &= \frac{(p-1)(p-2)(p-3)(lnx)^{p-4}-(p-1)(p-2)(lnx)^{p-3}}{x^3} \\
&+ \frac{-2(p-1)(p-2)(lnx)^{p-3}+2(p-1)(lnx)^{p-2}}{x^3} > 0
\end{aligned}$$

olduğundan $f(x)$ fonksiyonu GA-konveks fonksiyondur. O halde (4.1.20) eşitsizliğinin sol tarafı için

$$_{H}J^{\alpha}_{a^+}f(b) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_a^b (lnt)^{p-1}\left(ln\left(\frac{b}{t}\right)\right)^{\alpha-1}\frac{dt}{t}$$

integralinde $lnt = lnb - (lnb - lna)u$, $\frac{dt}{t} = -(lnb - lna)du$ değişken değişimi yapılarak $1 < a < b$ ve $\alpha > 0$ için

$$\begin{aligned}
{}_{H}J^{\alpha}_{a^+}f(b) &= \frac{(lnb-lna)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^1 (lnb-(lnb-lna)u)^{p-1}\,u^{\alpha-1}du \\
&= \frac{(lnb-lna)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)(lnb)^{1-p}}\int\limits_0^1 \frac{u^{\alpha-1}du}{\left[1-\left(1-\frac{lna}{lnb}\right)u\right]^{1-p}} \\
&= \frac{(lnb-lna)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)\,(lnb)^{1-p}}\,{}_2F_1\left(1-p,\alpha;\alpha+1;1-\frac{lna}{lnb}\right)\beta(\alpha,1) \quad (4.4.9)
\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$_{H}J^{\alpha}_{b^-}f(a) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_a^b (lnt)^{p-1}\left(ln\left(\frac{t}{a}\right)\right)^{\alpha-1}\frac{dt}{t}$$

integralinde $lnt = lnb - (lnb - lna)u$, $\frac{dt}{t} = -(lnb - lna)du$ değişken değişimi yapılarak $1 < a < b$ ve $\alpha > 0$ için

$$\begin{aligned}
{}_{H}J^{\alpha}_{b^-}f(a) &= \frac{(lnb-lna)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^1 (lnb-(lnb-lna)u)^{p-1}\,(1-u)^{\alpha-1}du \\
&= \frac{(lnb-lna)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)(lnb)^{1-p}}\int\limits_0^1 \frac{(1-u)^{\alpha-1}du}{\left[1-\left(1-\frac{lna}{lnb}\right)u\right]^{1-p}} \\
&= \frac{(lnb-lna)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)(lnb)^{1-p}}\,{}_2F_1\left(1-p,1;\alpha+1;1-\frac{lna}{lnb}\right)\beta(1,\alpha) \quad (4.4.10)
\end{aligned}$$

yazılabilir. Eşitsizliğin sağ tarafında ise f fonksiyonun hipotezde verilen tanımını kullanırsak ispat tamamlanır.

Sonuç 4.4.4 $p > 4$ için $I = \left(1, e^{\frac{3}{4}(p-2)-\sqrt{\frac{9}{16}(p-2)^2-\frac{(p-2)(p-3)}{2}}}\right)$ bir aralık, $f(x) = (lnx)^{p-1}$ şeklinde tanımlanan $f : I \subseteq \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I^o' da diferansiyellenebilir, $a, b \in I$ ve $a < b$ olsun. Bu şartlar altında Sonuç 4.1.6 (ii) deki (4.1.42) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{\alpha}{2\,(lnb)^{1-p}}\left[{}_2F_1\left(1-p,\alpha;\alpha+1;1-\frac{lna}{lnb}\right)\beta(\alpha,1)\right.\right.\\
&\left.\left.+\ {}_2F_1\left(1-p,1;\alpha+1;1-\frac{lna}{lnb}\right)\beta(1,\alpha)\right] - A^{p-1}(lna,lnb)\right|\\
&\le \frac{(lnb-lna)\,(p-1)}{4}\left[K_1(\alpha)\frac{(lna)^{p-2}}{a} + K_2(\alpha)\frac{A^{p-2}(lna,lnb)}{G}\right.\\
&+\quad \left.K_3(\alpha)\frac{(lnb)^{p-2}}{b}\right] \qquad (4.4.11)
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. burada elde edilen $K_1(\alpha), K_2(\alpha)$ ve $K_3(\alpha)$ katsayıları (4.1.35) de tanımlandığı gibidir.

İspat. Sonuç 4.4.3' ün ispat yöntemini uygulandığımızda (4.4.11) eşitsizliğini elde ederiz.

Sonuç 4.4.5 $f(x) = x^{p-1}$, $p > 3$, şeklinde tanımlanan $f : I \subseteq \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I^o' da diferansiyellenebilir, $a, b \in I$, $a < b$ olsun. Bu şartlar altında Sonuç 4.2.2 (ii) deki (4.2.16) eşitsizliği gözönüne alınırsa

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{\alpha}{2(a)^{p-1}}\left[{}_2F_1\left(p-1,\alpha;\alpha+1;1-\frac{a}{b}\right)\beta(\alpha,1)\right.\right.\\
&\left.\left.+\ {}_2F_1\left(p-1,1;\alpha+1;1-\frac{a}{b}\right)\beta(1,\alpha)\right]\right|\\
&\le \frac{(b-a)\,(p-1)}{4ab}\left[F_1(\alpha)\,a^{p-2} + F_2(\alpha)\,H^{p-2} + F_3(\alpha)\,b^{p-2}\right] \quad (4.4.12)
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada katsayılar Sonuç 4.2.1' de tanımlandığı gibidir.

İspat. f fonksiyonu $I \subseteq \mathbb{R}^+$ aralığında konveks ve azalmayan bir fonksiyon olduğundan harmonik fonksiyondur. O halde

$${}_RJ^{\alpha}_{\frac{1}{b}+}\,(f\circ\varphi)\,(1/a) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{1/b}^{1/a}\left(\frac{1}{a}-t\right)^{\alpha-1} f\left(\frac{1}{t}\right)dt, \quad \varphi(x) = 1/x$$

integralinde $t=\frac{1}{a}-\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)u,\ dt=-\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)du$ değişken değişimi yapılarak $0<a<b$ ve $\alpha>0$ için

$$\begin{aligned}
{}_RJ^{\alpha}_{\frac{1}{b}+}\left(f\circ\varphi\right)(1/a) &= \frac{\Gamma(\alpha)(b-a)^{\alpha}}{(ab)^{\alpha}}\int\limits_0^1 \frac{u^{\alpha-1}du}{\left[\frac{1}{a}-\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)u\right]^{p-1}} \\
&= \frac{\Gamma(\alpha)(b-a)^{\alpha}}{(ab)^{\alpha}a^{p-1}}\int\limits_0^1 \frac{u^{\alpha-1}du}{\left[1-\left(1-\frac{a}{b}\right)u\right]^{p-1}} \\
&= \frac{\Gamma(\alpha)(b-a)^{\alpha}}{(ab)^{\alpha}a^{p-1}}{}_2F_1\left(p-1,\alpha;\alpha+1;1-\frac{a}{b}\right)\beta(\alpha,1)
\end{aligned} \tag{4.4.13}$$

elde edilir. Benzer şekilde

$${}_RJ^{\alpha}_{\frac{1}{a}-}\left(f\circ\varphi\right)(1/b)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{1/b}^{1/a}\left(t-\frac{1}{b}\right)^{\alpha-1}f\left(\frac{1}{t}\right)dt,\quad \varphi(x)=1/x$$

integralinde $t=\frac{1}{a}-\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)u,\ dt=-\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)du$ değişken değişimi yapılarak $0<a<b$ ve $\alpha>0$ için

$$\begin{aligned}
{}_RJ^{\alpha}_{\frac{1}{a}-}\left(f\circ\varphi\right)(1/b) &= \frac{\Gamma(\alpha)(b-a)^{\alpha}}{(ab)^{\alpha}}\int\limits_0^1 \frac{(1-u)^{\alpha-1}du}{\left[\frac{1}{a}-\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)u\right]^{p-1}} \\
&= \frac{\Gamma(\alpha)(b-a)^{\alpha}}{(ab)^{\alpha}a^{p-1}}\int\limits_0^1 \frac{(1-u)^{\alpha-1}du}{\left[1-\left(1-\frac{a}{b}\right)u\right]^{p-1}} \\
&= \frac{\Gamma(\alpha)(b-a)^{\alpha}}{(ab)^{\alpha}a^{p-1}}{}_2F_1\left(p-1,1;\alpha+1;1-\frac{a}{b}\right)\beta(1,\alpha)
\end{aligned} \tag{4.4.14}$$

elde edilir. (4.4.13), (4.4.14) ifadeleri ve f fonksiyonu hipotezde tanımlandığı gibi (4.2.16) eşitsizliğinde yerine yazılırsa ispat tamamlanır.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu çalışmada literatürde konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliği ile ilgili olarak verilen lemmalar farklı konveks fonksiyonlar için verildi. Bu elde edilen lemmalar farklı fonksiyonlar için ifade edilerek Hermite-Hadamard-Fejér tipli kesirli integral eşitsizlikleri elde edildi. Böylelikle litaratürde olan Hermite-Hadamard-Fejér integral, Hermite-Hadamard kesirli integral ve Hermite-Hadamard-Fejér kesirli integral eşitsizliklerini yeni bir yöntemle elde edildi. Böylelikle tüm çalışmaların bir genellemesi elde edildi.

Tezde temel alınan fonksiyon çeşitleri geometrik aritmetik, harmonik konveks ve quasi geometrik fonksiyonlar olarak belirlenmiştir. Elde edilen sonuçlardan yararlanılarak geometrik aritmetik fonksiyonlar için çeşitli ortalamalarla ilgili ve hipergeometrik fonksi-yonlarla ilgili uygulamalarda tezin sonunda verilmiştir. Böylece yeni elde edilen sonuçların uygulanabilir olduğu gösterilmiştir.

Konuyla ilgili olan araştırmacılar bu tezde verilen yöntemlerden yararlanarak farklı türden konveks fonksiyonlar için yeni lemmalar elde edip kesirli integral için sonuçlar bularak çeşitli uygulamalar üzerinde çalışabilirler.

KAYNAKLAR

[1] Adams, R. A., Essex, C., 2010. Calculus A Complete Course, Pearson Canada Inc., Toronto, Ontario, pp 934.

[2] Alomari, M. W. N., 2011. Several inequalities of Hermite-Hadamard, Ostrowski and Simpson type for s-convex quasi-convex and r-convex mappings with some applications, Doktora Tezi, Universiti Kebangsaan Malaysia Bangi.

[3] Azpeitia, A. G., 1994. Convex functions and the Hadamard inequality, Rev. Colombiana Mat., 28, 7-12.

[4] Bagdasar, O. 2006. Inequalities and Applications, Bachelor' s Degree Thesis, Babeş Bolyai University, Cluj Napoca.

[5] Bayraktar, M., 2000. Fonksiyonel Analiz, ISBN 975-442-035-1.

[6] Bayraktar, M., 2010. Analiz, ISBN 978-605-395-412-5,.

[7] Breckner, W. W., 1978 Stetigkeitsaussagen für eine klasse verallgemeinerter konvexer funktionen in topologischen linearen räumen, Publ. Inst. Math., Beograd, 23, 13-20.

[8] Bullen, P. S., Mitrinović , D. S., Vasiś , P. M., 1988. Means and Their Inequalities, Springer Science+Business Media, B. V.

[9] Carter, M., Van Brunt, B., 2000. The Lebesgue-Stieltjes Integral: A Practical Introduction,ISBN: 0387950125.

[10] Dahmani, Z., 2010. On Minkowski and Hermite-Hadamard integral inequalities via fractional integration, Ann. Funct. Anal. 1, pp. 51-58.

[11] Dragomir, S. S., Pečarić , J. and Persson, L. E., 1995. Some inequalities of Hadamard type, Soochow Journal of Mathematics, 21, 335-341.

[12] Dragomir, S. S., Pearce C. E. M., 1998. Quasi-convex functions and Hadamard' s inequality, Bull. Austral.Math. Soc., 57, 377-385.

[13] Dragomir, S.S., 2012. Hermite-Hadamard's type inequalities for convex funtions of selfadjoint operators in Hilbert spaces, Linear Algebra Appl. 436, no. 5, 1503-1515.

[14] Dragomir, S.S.,Pearce, C. E. M., 2000. Selected topics on Hermite-Hadamard type inequalities and applications, RGMIA Monographs. Available online at http://rgmia.vu.edu.au/monographs/hermite hadamard.html.

[15] Ekinci, A., 2014. Klasik Eşitsizlikler Yoluyla Konveks Fonksiyonlar İçin İntegral Eşitsizlikler, Doktora Tezi, Atatürk Üniversitesi, Erzurum.

[16] Fejér,L., 1906. Uberdie Fourierreihen, II, Math. Naturwise. Anz. Ungar. Akad. in Hungarian, Wiss, 24, pp. 369-390,

[17] Gill, P. M., Pearce, C. E. M. and Pečaricć , J., 1997. Hadamard' s inequality for convex functions, J. Math. Anal.and Appl., 215, 461-470.

[18] Godunova, E. K., Levin, V. I., 1985. Neravenstva dlja funkcii širokogo klassa, soderž aščego vypuklye, monotonnye i nekotorye drugie vidy funkcii, Vyčislitel. Mat. i. Mat. Fiz. Mežvuzov. Sb. Nauč. Trudov, MGPI, Moskva, 138-142.

[19] Greenberg, H. J., Pierskalla, W. P., 1970. A review of quasi convex functions, Reprinted from Operations Research, 19, 7.

[20] Hadamard, J., 1893. Etude sur les propriétés des fonctions entiées et en particulier d'une fonction considérée par Riemann, J. Math. Pures Appl., 9, 171215.

[21] Hardy, G., Littlewood, J. E, Polya, G., 1952. Inequalities, 2nd Ed., Cambridge University Press, 324, United Kingdom.

[22] Hudziki H. and Maligranda, L., 1994. Some remarks on s-convex functions, Aequationes Math., 48, 100-111.

[23] Hwang, D-Y., 2011. Some inequalities for differentiable convex mapping with application to weighted trapezoidal formula and higher moments of random variables, Applied Mathematics and Computation, 217, 9598-9605.

[24] Hwang, S-R., Yeh, S-Y., Tseng, K-L., 2014. Refinements and similar extensions of Hermite-Hadamard inequality for fractional integrals and their applications, Applied Mathematics and Computation, 249, 103-113.

[25] Ion, D. A., 2007. Some estimates on the Hermite-Hadamard inequality through quasi-convex functions, Annals of University of Craiova Math. Comp. Sci. Ser., vol. 34, 82-87.

[26] İşcan, İ., 2013. New general integral inequalities for quasi-geometrically convex functions via fractional integrals, Journal of Inequalities and Applications, 1, 2013:491.

[27] İşcan, İ., 2015. Hermite-Hadamard-Fejér Type Inequalities for convex Functions via Fractional Integrals, Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math., 60, No. 3, 355-366.

[28] İşcan, İ., 2014. Hermite-Hadamard type inequalities for GA-s -convex functions, Le Matematiche, LXIX-Fasc. II, pp. 129-146.

[29] İşcan, İ., 2014. Hermite-Hadamard type inequaities for harmonically convex functions , Hacettepe Journal of Mathematics and Statistic 43, 6, 935-942.

[30] İşcan, İ., Wu, S., 2014. Hermite-Hadamard type inequalities for harmonically-convex functions via fractional integrals, Applied Mathematics and Computation, 238, 237-244.

[31] İşcan, İ.,Kunt M., 2015. Fejér and Hermite-Hadamard-Fejér type inequalities for harmonically s-convex functions via Fractional Integrals, The Australian Journal of Mathematical Analysis and Applcations, Vol: 12, Article 10, pp 1-6.

[32] İşcan, İ.,Kunt, M., 2015. Hermite-Hadamard-Fejér type inequalities for harmonically convex functions via fractional integrals, RGMIA Research Report Collection, 18, Article 107, pp.1-16.

[33] İşcan, İ., 2015. Ostrowski type inequalities for harmonically s-convex functions, Konuralp Journal Mathematics, Volume 3, No 1, pp. 63-74.

[34] İşcan, İ. ,Kunt M., 2015. Fejér and Hermite-Hadamard-Fejér type inequalities for harmonically s-convex functions via Fractional Integrals, The Australian Journal of Mathematical Analysis and Applications, Vol: 12, Article 10, pp 1-6.

[35] İşcan, İ., Turhan, S., 2016. Generalized Hermite-Hadamard-Fejér type inequalities for GA-convex functions via fractional integral, Moroccan J. Pure and Appl. Anal., Volume 2(1), pages 34-46.

[36] İşcan, İ., Turhan, S., Maden, S., 2016. Some Hermite-Hadamard-Fejer type inequalities for harmonically convex functions via fractional integral, New Trends in Mathematical Sciences, 4, No. 2, 1-10.

[37] Jeffrey, A., Dai, H-H., 2008. Handbook of Mathematical Formulas and Integrals, Elsevier Inc. 4. Edition, 589, UK.

[38] Kavurmacı, H., 2012. Bazı Farklı Türden Konveks Fonksiyonlar için Ostrowski ve Hermite-Hadamard Tipli İntegral Eşitsizlikleri, Doktora Tezi, Atatürk Üniversitesi, Erzurum.

[39] Kırmacı, U. S., Bakula, M. K., Özdemir, M. E., Pečarić, J., 2008. *On Some Inequalities for p-Norms*, Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics, Volume 9, Issue 1, 27, p 8.

[40] Kilbas, A. A.,Srivastava, H. M., Trujillo J. J., 2006. Theory and applications of fractional differential equations. Elsevier, Amsterdam.

[41] Kunt, M., İşcan, İ., 2016. Hermite-Hadamard-Fejér Type Inequalities for Quasi-Geomet-rically Convex Functions via Fractional Integrals, Hindawi Publishing Corporation Journal of Mathematics, volume 2016, Article ID 6523041, 7 pages.

[42] Kunt, M.,İşcan, İ., 2015. On new inequalities of Hermite-Hadamard-Fejér Type for GA-convex functions via fractional integrals, http://rgmia.-org/papers/v18/v18a25.pdf.

[43] Latif, M. A., Dragomir, S. S., Momoniat E., 2015. Some Fejér type integral inequalities related with geometrically-arithmetically-convex functions with applications, http://rgmia.org/papers/v18/v18a25.pdf.

[44] Latif, M.A.,Dragomir, S. S.,Momoniat E., 2015. Some Fejér type inequalities for harmonically-convex functions with applications to special means, http://rgmia.org/papers/v18/v18a24.pdf.

[45] Maden, S., Turhan, S., İşcan, İ., 2016. New Hermite-Hadamard-Fejer type inequalities for GA-convex functions, AIP conference proceedings 1726, 020043 (2016), http://dx.doi.org/10.1063/1.4945869

[46] Miheşan, V. G., 1993. A generalization of the convexity, Seminar on Functional Equations, Approx. and Convex., Cluj-Napoca, Romania.

[47] Mitrinović, D. S., 1970. Analytic Inequalities, Springer-Verlang, Berlin.

[48] Mitrinović, D.S.,Pečarić, J.E.,Fink A.M., 1991. *Inequalities Involving Functions and Their Integrals and Derivatives*, Kluwer Academic Publishers, 587 pp, Dordrecht/Bos-ton/London.

[49] Mitrinović, D.S.,Pečarić, J.E.,Fink, A.M., 1993. Classical and New Inequalities in Analysis,Kluwer Academic Publishers, 740, UK.

[50] Munkhammar, J., 2004. Riemann-Liouville Fractional Derivatives and the Taylor-Riemann Series, Department of Mathematics, Uppsala University.

[51] Niculescu, C. P., 2000. Convexity according to the geometric mean, Math. Inequal. Appl. 3 (2), Available online at http://dx.doi.org/10.7153/mia-03-19, 155–167.

[52] Niculescu, C. P., 2003. Convexity according to means, Math. Inequal. Appl. 6 (4), 571–579. Available online at http://dx.doi.org/10.7153/mia-06-53.

[53] Orlicz, W., 1961. A note on modular spaces I, Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Math. Astronom. Phys., 9, 157-162.

[54] Özdemir, M. E., Yıldız, Ç., 2013. The Hadamard's inequality for quasi-convex functions via fractional integrals, Annals of the University of Craiova, Mathematics and Computer Science Series Volume 40(2), 167-173.

[55] Özdemir, M. E., Akdemir, A. O., Set, E., 2011. On $(h-m)$-convexity and Hadamard-type inequalities, ArXiv:1103.6163v1 [math.CA] 31 Mar 20.

[56] Pečarić, J., Proschan, F., Tong, Y.L., 1992. Convex Functions, Partial Orderings and Statistical Applications, Academic Press, Inc.

[57] Prudnikov, A. P., Brychkov, Y. A., Marichev, O. J., 1981. Integral and series, Elementary Functions, Vol. 1, Nauka, Moscow.

[58] Pachpatte, B. G., 2005. Mathematical Inequalities, vol. 67, Elsevier, North-Holland Mathematical Library.

[59] Roberts, A.W., Varberg, D.E., 1973. *Convex Functions*, Academic Press, New York, pp 300.

[60] Samko, S. G., Kilbas, A. A., Marichev, O. I., 1993. Fractional Integrals and Derivatives Theory and Applications, Gordon and Breach Science Publishers, Singapore.

[61] Sarıkaya, M. Z., Set, E., Yaldız H., Başak, N., 2013. Hermite-Hadamard's inequalities for fractional integrals and related fractional inequalities, Mathematical and Computer Modelling, 57(9), pp. 2403-2407.

[62] Set, E., 2010. Bazı Farklı Türden Konveks Fonksiyonlar İçin İntegral Eşitsizlikleri, Doktora Tezi, Atatürk Üniversitesi, Erzurum.

[63] Toader, G. H., 1984. Some Generalisations of the Convexity, Proc. Colloq. Approx. Optim, Cluj-Napoca, Romanya, 329-338.

[64] Toader, G. H., 1988. On Generalization of the Convexity, Mathematica, 30(53), 83-87.

[65] Tunç, M., 2011. Bazı Konveks Fonksiyonlar İçin Hermite-Hadaamard Tipli Eşitsizlikler ve Uygulamaları, Doktora Tezi, Atatürk Üniversitesi, Erzurum.

[66] Varošanec, S., 2007. On h-convexity, J. Math. Anal. Appl., 326, 303-311.

[67] Wright, E. M., 1954. An inequality for convex functions, Amer. Math. Monthly 61, 620-622.

[68] Yaldız, H., 2012. Kesirli İntegraller İçin Hermite-Hadamard Eşitsizliği, Yüksek Lisans Tezi, Düzce Üniversitesi, Düzce.

[69] Young, W. H., 1912. On Classes of Summable Functions and Their Fourier Series,Proc. Roy. Soc. London A 87, 225-229.

[70] Zhang, T.-Y.,Ji, A.-P.,Qi F., 2013. Some inequalities of Hermite-Hadamard type for GA-convex functions with applications to means, Le Matematiche, Vol. LXVIII– Fasc. I, pp. 229–239. doi: 10.4418/2013.68.1.17.

[71] Zhang, X.-M.,Chu, Y.-M.,Zhang, X.-H., 2010. The Hermite-Hadamard Type Inequality of GA-Convex Functions and Its Application, Journal of Inequalities and Applications, Volume, Article ID 507560, 11 pages. doi:10.1155/2010/507560.

[72] Zhang, T.-Y., Ji, A.-P. and Qi, F., 2012. On Integral Inequalities of Hermite-Hadamard Type for s-Geometrically Convex Functions, Abstract and Applied Analysis,, doi:10.11 55/2012/560586.

ÖZGEÇMİŞ

Adı-Soyadı	:	Sercan TURHAN
Doğum Yeri	:	Bulancak / Giresun
Doğum Tarihi	:	1985
Medeni Hali	:	Evli
Bildiği Yabancı Dil	:	İngilizce
İletişim Bilgileri	:	Giresun Üniversitesi Dereli Meslek Yüksekokulu Bölümü, sercan.turhan@giresun.edu.tr
Lise	:	Giresun Yabancı Dil Ağırlıklı Lisesi, 2003
Lisans	:	Kocaeli Üniversitesi Fen-Ed. Fak. Matematik Böl. -2007
Yüksek Lisans	:	Karadeniz Teknik Üniversitesi, 2010