T.C.

ORDU ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÖZEŞLENİK OPERATÖRLERİN SÜREKLİ FONKSİYONLARI İÇİN OPERATÖR *Q*-PREİNVEKS VE OPERATÖR PREİNVEKS *P*-SINIFI

CANSU ALTUNÇ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ORDU 2019

T.C.

ORDU ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

CANSU ALTUNÇ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ORDU 2019

TEZ ONAY

Cansu ALTUNÇ tarafından hazırlanan "**ÖZEŞLENİK OPERATÖRLERİN SÜREKLİ FONKSİYONLARI İÇİN OPERATÖR *Q*-PREİNVEKS VE OPERATÖR PREİNVEKS *P*-SINIFI**" adlı tez çalışmasının savunma sınavı 12.06.2019 tarihinde yapılmış ve jüri tarafından oy birliği / ~~oy çokluğu~~ ile Ordu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü MATEMATİK ANABİLİM DALI YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman
Dr. Öğr. Üyesi Erdal ÜNLÜYOL

İkinci Danışman
Dr. Öğr. Üyesi Rukiye ÖZTÜRK MERT
Matematik Bölümü, Hitit Üniversitesi

Jüri Üyeleri	İmza
Danışman Dr. Öğr. Üyesi Erdal ÜNLÜYOL Matematik Bölümü, Ordu Üniversitesi	....
Üye Dr. Öğr. Üyesi Kerim BEKAR Matematik Bölümü, Giresun Üniversitesi	....
Üye Dr. Öğr. Üyesi Mehmet KORKMAZ Matematik Bölümü, Ordu Üniversitesi	....

19 / 06 / 2019 tarihinde enstitüye teslim edilen bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulu'nun 21 / 06 / 2019 tarih ve 2019 / 272 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

T.C. ORDU ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ 1923

Enstitü Müdürü
Dr. Öğr. Üyesi Mehmet Sami GÜLER

TEZ BİLDİRİMİ

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan ve kullanılan intihal tespit programının sonuçlarına göre; bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

Cansu ALTUNÇ

Bu çalışma Ordu Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinatörlüğünün B-1803 numaralı projesi ile desteklenmiştir.

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER ve KISALTMALAR LİSTESİ

$\mathbb{R}$	:	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^n$	:	n −boyutlu reel sayılar kümesi, $n \in \mathbb{N}$
$\mathbb{C}$	:	Kompleks sayılar kümesi
$(.,.)$	:	İç çarpım
$(X,(.,.))$	:	İç çarpım uzayı
$\|\cdot\|$	:	Norm fonksiyonu
$(X,\|\cdot\|)$	:	Normlu uzay
H	:	Hilbert uzayı
$\rho(A)$	:	Rozelventa kümesi
$Sp(A), \sigma(A)$	:	A operatörünün spektrumu
∇	:	Diverjans
H-H	:	Hermite-Hadamard
$(H,(.,.))$	:	Hilbert uzayı
B(H)	:	H'dan H'a sınırlı operatörlerin kümesi
$B(H)^+$	:	H'dan H'a pozitif, sınırlı operatörlerin kümesi
$B(H)_{sa}^+$	:	H'dan H'a pozitif, sınırlı, özeşlenik operatörlerin kümesi

1. GİRİŞ

Elster ve Neshse, (1980), konveks fonksiyonlar sınıfını incelemiştir. Yani

$$f: S \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonu için $x, \mathrm{y} \in \mathrm{S}$ ve $\lambda \in [0,1]$ olmak üzere

$$f(z) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \tag{1.0.1}$$

eşitsizliğini sağlayan $z \in S$ noktalarını veren fonksiyonlara konveksel fonksiyon denir. Eğer S bir konveks küme ve f de konveks bir fonksiyon ise, bu durumda f konvekseldir denilebilir. Elster ve Neshse konveksel matematiksel proğramlama için optimal şartlar altında bir büküm noktası elde etmiştir.

Hayashi ve Komiya, (1982), konveksel fonksiyonlar için Gordan tipli bir teorem geliştirmişler. Ek olarak, konveksel programlar için Lograngion dualliğini araştırmışlardır.

Hanson, (1981), her $x, \mathrm{u} \in \mathrm{S} \subseteq \mathbb{R}$ için

$$f(x) - f(u) \geq [\eta(x,u)]^T \nabla f(u) \tag{1.0.2}$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde bir $\eta(x,u)$ vektör fonksiyonuna sahip $f: S \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ diferansiyellenebilir fonksiyonlarını incelemiştir. Burada "∇" sembolü diverjansı göstermektedir. Bu şekildeki fonksiyonlar Craven, (1981), tarafından inveks fonksiyon olarak isimlendirilmiştir. Bu terim "**<u>in</u>**variant con**<u>vex</u>**" kavramından kısaltılmıştır.

Craven ve Glover, (1985), Ben-Israel ve Mond, (1986), ve ayrıca Martin, (1985), inveks fonksiyonlar sınıfının, sabit noktası $(f'(x) = 0)$ global minimuma sahip fonksiyonlar sınıfına denk olduğunu göstermişlerdir.

Ben-Israel ve Mond, (1986), Hanson ve Mond, (1987), S üzerinde diferansiyellenmeyen fonksiyonların, her $x, \mathrm{u} \in \mathrm{S}$ ve $\lambda \in [0,1]$ için

$$f\big(u + \lambda\eta(x,u)\big) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(u) \tag{1.0.3}$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde bir n-boyutlu $\eta(x,u)$ vektör fonksiyonunun varlığını ispat etmişlerdir. Buna ek olarak diferansiyellenebilen fonksiyonların (1.0.2) ve (1.0.3)' ü sağladığını da göstermişlerdir. Bu şartlar altında (1.0.3) eşitsizliğini sağlayan bu fonksiyonları V. Jeyakumar,"preinvex" olarak isimlendirmiştir. Ayrıca,

$$f: S \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

m-boyutlu vektör değerli bir fonksiyon olsun. Bu durumda, eğer f' nin bileşenlerinin her biri, η ya göre S üzerinde preinveks oluyor ise, bu f fonksiyonuna η' ya göre S üzerinde preinvekstir denir. Her $x, u \in S$ ve $\lambda \in [0,1]$ için

$$u + \lambda\eta(x,u) \in S$$

olup buradan preinveks fonksiyonlar konvekseldir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde bazı temel tanım, teorem ve örnekler verilecektir.

Tanım 2.0.1 (Lineer Uzay) L boş olmayan bir küme ve F bir cisim olsun.

$$+ : L \times L \longrightarrow L$$

ve

$$. : F \times L \longrightarrow L$$

işlemleri tanımlansın. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa L' ye F cismi üzerinde bir lineer uzay (vektör uzayı) denir.

A) L, $+$ işlemine göre değişmeli bir gruptur. Yani

G_1. Her $x, y \in L$ için $x + y \in L$

G_2. Her $x, y, z \in L$ için $x + (y + z) = (x + y) + z$

G_3. Her $x \in L$ için $x + \theta = \theta + x = x$ olacak şekilde bir $\theta \in L$ vardır.

G_4. Her $x \in L$ için $x + (-x) = (-x) + x = \theta$ olacak şekilde bir $-x \in L$ vardır.

G_5. Her $x, y \in L$ için $x + y = y + x$ dir.

B) $x, y \in L$ ve $\alpha, \beta \in F$ olmak üzere aşağıdaki şartlar sağlanır:

L_1. $\alpha x \in L$

L_2. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$

L_3. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$

L_4. $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$

L_5. $1.x = x$ dir. (Buradaki 1, F 'nin birim elemanıdır). $F = \mathbb{R}$ ise L' ye reel lineer uzay, $F = \mathbb{C}$ ise L' ye karmaşık reel lineer uzay denir.

Tanım 2.0.2 Lineer uzaylar üzerinde tanımlı dönüşümlere operatör denir.

Tanım 2.0.3 F bir cisim olsun. V ve W, F cismi üzerinde tanımlanmış iki lineer uzay olsun. $u, v \in V$ ve $c \in F$ olmak üzere $T: V \longrightarrow W$ dönüşümü,

a) $\mathrm{T}(u+v) = \mathrm{T}(u) + \mathrm{T}(v)$

b) $\mathrm{T}(cu) = c\mathrm{T}(u)$

şartlarını sağlıyor ise T‘ ye V üzerinde bir lineer dönüşümdür denir.

Tanım 2.0.4 (İç-çarpım uzayı): F ($\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$) bir cisim olmak üzere, X bir vektör uzayı olsun. $(.,.) : X \times X \longrightarrow F$ dönüşümü aşağıdaki özelliklere sahipse $(.,.)$ dönüşümüne X vektör uzayı üzerinde bir iç-çarpım, $(X, (.,.))$ ikilisine de iç-çarpım uzayı denir.

1. $\forall x \in X$ için $(x,x) \geq 0$ ve $(x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0_X$

2. $\forall x, y \in X$ için $(x,y) = \overline{(y,x)}$

3. $\forall x, y \in X$ ve $\alpha \in F$ için $(\alpha x, y) = \alpha(x,y)$

4. $\forall x, y, z \in X$ için $(x+y, z) = (x,z) + (y,z)$

Not 2.0.1 $F = \mathbb{R}$ olması durumunda 2. özellik $(x,y) = (y,x)$ olur.

İç çarpım tanımını kullanılarak aşağıdaki eşitlikleri kolayca elde edebiliriz.

1. $\forall x, y, z \in X$ ve $\forall \alpha, \beta \in F$ için $(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x,z) + \beta(y,z)$

2. $\forall x, y \in X$ ve $\forall \alpha \in F$ için $(x, \alpha y) = \bar{\alpha}(x,y)$

3. $\forall x, y \in X$ ve $\forall \alpha, \beta \in F$ için $(x, \alpha y + \beta z) = \bar{\alpha}(x,y) + \bar{\beta}(y,z)$.

Not 2.0.2 Literatürde iç-çarpım fonksiyonu $(.,.)$ veya $\langle .,. \rangle$ sembollerinden biriyle gösterilebilir.

Tanım 2.0.5 (Norm): X, F cismi üzerinde bir lineer uzay olsun. $\|\cdot\|: X \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun x’ deki değerini $\|x\|$ ile gösterelim. Bu fonksiyon için her $x, y \in X$ ve her $\alpha \in F$ olmak üzere,

$\|x\| \geq 0$, $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$

$\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\| \qquad \alpha \in F,$

$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (üçgen eşitsizliği)

şartları sağlanıyorsa $\|\cdot\|$ fonksiyonuna X' de bir Norm denir. $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine de Normlu Uzay denir.

Tanım 2.0.6 (Hilbert Uzayı): $(X,(.,.))$ bir iç çarpım uzayı olsun. Eğer bu iç çarpım uzayı norma göre tam ise, yani $(X,(.,.))$ iç çarpım uzayı içindeki her Cauchy Dizisi iç-çarpımın ürettiği bu norma göre yakınsak ise bu iç çarpıma bir "Hilbert Uzayı" denir.

Tanım 2.0.7 (Birim Operatör): $\mathrm{A}: \mathrm{X} \rightarrow \mathrm{X}$ operatörü verilsin. Eğer her $x \in X$ için $Ax = x$ ise A operatörüne birim (özdeşlik) operatör denir. I, E ve I_X sembolleri ile gösterilir.

Tanım 2.0.8 (Sınırlı Operatör): X ve Y iki normlu uzay olsun. A, tanım kümesi $D(A) \subset X$ ve görüntü kümesi $R(A) \subset Y$ olan bir operatör olsun. Eğer A operatörü $D(A)$' nın X' de sınırlı her kümesine $R(A)$' nın Y' de sınırlı bir kümesini karşılık getiriyorsa A' ya sınırlı operatör denir. Başka bir ifadeyle her $x \in D(A)$

$$\|\mathrm{Ax}\|_{\mathrm{Y}} \leq c\|x\|_{\mathrm{X}},$$

olacak şekilde sabit bir ≥ varsa A' ya sınırlı operatör denir.

Tanım 2.0.9 (Lineer Operatör): X ve Y aynı F cismi üzerinde iki lineer uzay olsun. $A: \mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{Y}$ operatörü verilsin. Eğer $D(A)$, X in bir alt uzayı ve

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y),$$

her $x, y \in D(A)$ ve her $\alpha, \beta \in F$ ise A' ya lineer operatör denir.

Tanım 2.0.10 (Eşlenik ve Özeşlenik Operatör): A, H Hilbert uzayı üzerinde sınırlı lineer bir operatör olsun. Eğer her $f, g \in D(A) \subset H$ için

$$(Af, g) = (f, A^* g)$$

eşitliği sağlanıyorsa A^* a, A' nın eşlenik operatörü denir.

Eğer $D(A) = D(A^*)$ ve $A^* = A$ ise buradaki A' ya özeşlenik operatör denir.

Tanım 2.0.11 (Rezolventa): H bir Hilbert uzayı ve $A: D(A) \subset H \longrightarrow H$ bir lineer operatör olsun.

$$\rho(A) \coloneqq \{\lambda \in \mathbb{C}: (A - \lambda \mathrm{E})^{-1} \ H\text{'da lineerdir}\}$$

kümesine A operatörünün "rezolventası" veya "çözücü operatörü" denir.

Tanım 2.0.12 (Spektrum): H bir Hilbert uzayı olsun.

$$Sp(A) = \sigma(A) \coloneqq \mathbb{C} \backslash \rho(A)$$

kümesine A operatörünün spektrumu denir. A operatörünün spektrum kümesi $\sigma(A)$ veya $Sp(A)$ ile gösterilir.

$a < b,\ a, b \in \mathbb{R}$ ve $f\colon \mathrm{I} \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ bir konveks f fonksiyonu için;

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \qquad 2.0.1$$

eşitsizliği sağlanır. Buradaki iki eşitsizlik de yön değiştirir ise f, $[a, b]$ üzerinde konkav fonksiyon olur. (2.0.1) eşitsizliği literatürde Hermite-Hadamard eşitsizliği olarak bilinir. Hermite-Hadamard eşitsizliğini, Jensen eşitsizliği ve konvekslik tanımı yardımıyla kolaylıkla elde edebiliriz. Klasik anlamda Hermite-Hadamard eşitsizliği $f\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ (sürekli) konveks fonksiyonunun ortalama değerini verir. Dragomir ve Agarwal, (1998), ise konveks fonksiyonları içeren Hermite Hadamard eşitsizliğinin sağ tarafını elde etmişlerdir.

Kikianty, (2010), Banach uzayları üzerinde Hermite-Hadamard eşitsizliğini elde etmiştir. Konveks fonksiyonların özel bir genelleştirmesi olan inveks ve preinvekslik kavramları Hanson, (1981), tarafından çalışılmıştır.

X bir vektör uzayı ve $x, y \in X$, $x \neq y$ olsun. $t \in [0,1]$ için

$$[x, y] \coloneqq (1-t)x + ty$$

ifadesini tanımlayalım.

$f\colon [x, y] \longrightarrow \mathbb{R}$ ve

$$g(x, y)(t) \coloneqq f\big((1-t)x + ty\big), \qquad t \in [0,1]$$

fonksiyonlarını düşünelim. f‘ nin, $[x, y]$‘ de konveks fonksiyon olabilmesi için gerekli ve yeterli koşul $g(x, y)$‘ nin [0,1] aralığı üzerinde konveks olmasıdır. Bir $[x, y] \subseteq X$ parçası üzerinde tanımlanmış herhangi bir konveks fonksiyon için,

$g(x, y)\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ konveks fonksiyonundan

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \int_0^1 f\big((1-t)x + ty\big)dt \leq \frac{f(x)+f(y)}{2} \qquad (2.0.2)$$

Hermite-Hadamard eşitsizliğini elde edebiliriz.

Dragomir, (2002a, b), operatör preinveks ve operatör konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard tipli eşitsizliklerin operatör versiyonunu elde etmiştir.

Sınırlı, özeşlenik operatörlerin sürekli fonksiyonları için $(H,(.,.))$ Hilbert uzayı üzerinde tanımlı tüm sınırlı lineer operatörlerin kümesi olan $B(H)$‘ daki operatörlerde sıralamayı inceleyelim. A ve B, H Hilbert uzayı üzerinde iki özeşlenik operatör ve her $x \in H$ olsun. Bu durumda;

$$\langle Ax, x\rangle \leq \langle Bx, x\rangle$$

ise o zaman

$$A \leq B$$

yazabiliriz. Buna operatörlerde sıralama denir. A operatörü, $(H,(.,.))$ kompleks Hilbert uzayı üzerinde sınırlı ve özeşlenik olsun. Gelfand dönüşümü, A tarafından üretilen $C^*(A)$ C^*-cebiri, H üzerinde 1_H birim operatör, $Sp(A)$ olarak gösterilen A‘ nın spektrumu üzerinde tanımlanan kompleks değerli tüm fonksiyonların $C\big(Sp(A)\big)$ kümesi arasında Φ $-$izomorfizm $*$-izometriği ile kuruldu. Herhangi $f, g \in C\big(Sp(A)\big)$ ve herhangi $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ için, (Furuta ve ark., 2005)

i. $\Phi(\alpha f + \beta g) = \alpha\Phi(f) + \beta\Phi(g)$

ii. $\Phi(fg) = \Phi(f)\Phi(g)$ ve $\Phi(f^*) = \Phi(f)^*$

iii. $\|\Phi(f)\| = \|f\| \coloneqq sup_{t\in Sp(A)}|f(t)|$

iv. $\Phi(f_0) = 1_H$ ve $\Phi(f_1) = A$,

yazabiliriz. Burada $t \in Sp(A)$ için $f_0(t) = 1$ ve $f_1(t) = t$. Bu gösterimle, tüm $f \in C(Sp(A))$ için;

$$f(A) \coloneqq \Phi(f) \tag{2.0.3}$$

şeklinde tanımlanabilir. Bu da A sınırlı özeşlenik operatörlerinin f fonksiyonu altındaki görüntüsünün ne ifade ettiğini gösterir.

Eğer A, sınırlı, özeşlenik bir operatör ve f ,$Sp(A)$ üzerinde reel değerli sürekli bir fonksiyon ise herhangi bir $t \in Sp(A)$ için $f(t) \geq 0$ olması $f(A) \geq 0$ demektir. Yani

$f(A)$, H üzerinde pozitif bir operatördür. Ayrıca f ve g, $Sp(A)$ üzerinde reel değerli sürekli iki fonksiyon olsun. Her $t \in Sp(A)$ için

$$f(t) \leq g(t)$$

ise o zaman $B(H)$ daki operatör sıralamasına göre

$$f(A) \leq g(A)\text{‘ dir.}$$

Spektrumları $I \subseteq \mathbb{R}$ de olan her $A, B \in B(H)$ için

$$f\big((1-\lambda)A + \lambda B\big) \leq (\geq)(1-\lambda)f(A) + \lambda f(B)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, $I \subseteq \mathbb{R}$ aralığı üzerinde tanımlı reel değerli f sürekli fonksiyonuna operatör konveks (operatör konkav) fonksiyon denir.

Operatör konveks (operatör konkav) ve operatör monoton fonksiyonlar ile ilgili bazı sonuçları Furuta ve ark., (2005), vermiştir.

Dragomir, (2011), operatör konveks fonksiyonlar için aşağıdaki şekilde Hermite-Hadamard tipli eşitsizliği ispatlamıştır.

Teorem 2.0.5 Dragomir, (2011), $f: I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I aralığı üzerinde operatör konveks bir fonksiyon olsun. Bu durumda spektrumları I‘ da tanımlı her A ve B özeşlenik operatörleri için

$$\left(f\left(\frac{A+B}{2}\right) \leq\right)\frac{1}{2}\left[f\left(\frac{3A+B}{4}\right) + f\left(\frac{A+3B}{4}\right)\right]$$

$$\leq \int_0^1 f\big((1-t)A + tB\big)dt$$

$$\leq \frac{1}{2}\left[f\left(\frac{A+B}{2}\right) + \frac{f(A)+f(B)}{2}\right]\left(\leq \frac{f(A)+f(B)}{2}\right) \tag{2.0.4}$$

eşitsizliği sağlanır.

Tanım 2.0.13 (İnveks Küme): $F \subseteq \mathbb{R}^n$, $f\colon F \longrightarrow \mathbb{R}$ ve $\eta(.,.)\colon F \times F \longrightarrow \mathbb{R}^n$ sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer her $x, y \in F$ ve $t \in [0,1]$ için,

$$y + t\eta(x,y) \in F$$

oluyorsa F’ ye $\eta(.,.)$ dönüşümüne göre inveks bir küme denir.

NOT 2.0.3 Her konveks kümenin $\eta(y,x) = y - x$ fonksiyonuna göre invek olduğu açıktır. Fakat bunun tersi genelde doğru değildir, yani konveks olmayan inveks kümeler mevcuttur.

Örnek 2.0.1 $S \subseteq \mathbb{R}^2$ bir küme ve $\eta(.,.): S \times S \longrightarrow \mathbb{R}^2$ olsun. Bu durumda

$$S := ([-9,-2] \cup [1,8]) \times ([-9,-2] \cup [1,8])$$

$$\eta(x,u) := \{\eta_1(x,u), \eta_2(x,u)\}$$

şeklinde tanımlayalım. Burada,

$$\eta_1(x,u) = \begin{cases} x_1 - u_1, & x_1 \geq 0, & u_1 \geq 0, \\ -9 - u_1, & x_1 \geq 0, & u_1 \leq 0, \\ 1 - u_1, & x_1 \leq 0, & u_1 \geq 0, \\ x_1 - u_1, & x_1 \leq 0, & u_1 \leq 0, \end{cases}$$

$$\eta_1(x,u) = \begin{cases} x_2 - u_2, & x_2 \geq 0, & u_2 \geq 0, \\ -9 - u_2, & x_2 \geq 0, & u_2 \leq 0, \\ 1 - u_2, & x_2 \leq 0, & u_2 \geq 0, \\ x_2 - u_2, & x_2 \leq 0, & u_2 \leq 0, \end{cases}$$

olarak seçilirse $S \subseteq \mathbb{R}^2$ konveks bir küme olmayıp yukarıdaki şekilde seçilen $\eta(x,u)$' ya göre inveks bir kümedir.

Tanım 2.0.14 $F \subseteq \mathbb{R}^n$, η' ya göre boştan farklı bir inveks küme, x ve u, S kümesinin keyfi iki elemanı olsun. Bu durumda,

$$P_{uv} := \{y = u + t\eta(x,u) : t \in [0,1]\}$$

şeklinde tanımlanan P_{uv} kümesine, S' de bulunan u ve $v = u + \eta(x,u)$ noktalarını birleştiren kapalı bir η-yolu denir. Benzer şekilde,

$$P_{uv}^{o} := \{y = u + t\eta(x,u) : t \in (0,1)\}$$

açık bir η-yolu da tanımlanır.

Tanım 2.0.15 $F \subseteq \mathbb{R}^n$, η' ya göre boştan farklı bir inveks küme olsun. Bu durumda her $x, y \in F$ ve $t \in [0,1]$ için,

(C) $\eta\big(y, y + t\eta(x,y)\big) = - t\eta(x,y)$

$\eta\big(x, y + t\eta(x,y)\big) = (1-t)\, \eta(x,y)$

ise η dönüşümü (C) şartını sağlar denir.

Not 2.0.4 Eğer η dönüşümü (C) şartını sağlarsa, her $x, y \in F$ ve her $t_1, t_2 \in [0,1]$ için

$$\eta(y + t_2\eta(x,y)\ ,\ y + t_1\eta(x,y)\ )=(t_2 - \ t_1)\eta(x,y)$$

eşitliği sağlanır.

Tanım 2.0.16 (Operatör Preinveks Fonksiyon): $S \subseteq B(H)_{sa}$, $\eta: S \times S \longrightarrow\ B(H)_{sa}$ dönüşümüne bağlı inveks bir küme olsun. Bu durumda $B(H)$' daki operatör sıralamasına göre her $A, B \in S$ ve $t \in [0,1]$ için

$$f\big(A + t\eta(B,A)\big) \leq (1-t)f(A) + tf(B)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonuna S üzerinde η' ye göre operatör preinveks denir.

Örnek 2.0.2 (Ghazanfari ve ark., (2013), Örnek 1-a) Varsayalım 1_H, H Hilbert uzayı üzerinde bir birim operatörü,

$$T \coloneqq (-3 \times 1_H\ , -1 \times 1_H) = \{A \in B(H)_{sa}: -3 \times 1_H\ < A < \ -1 \times 1_H\}$$

$$U \coloneqq \{1_H\ , 4 \times 1_H\} = \{A \in B(H)_{sa}: 1_H\ < A < \ 4 \times 1_H\}$$

$$S \coloneqq T \cup U \subseteq B(H)_{sa}$$

ve $\eta_1: S \times S \longrightarrow\ B(H)_{sa}$ fonksiyonu,

$$\eta_1(A,B) = \begin{cases} A - B, & A, B \in U \\ A - B, & A, B \in T \\ 1_H - B, & A, B \in T \\ -1_H - B, & A \in U, B \in T \end{cases}$$

olsun. η_1' in (C) koşulunu sağladığı ve S kümesinin η_1 fonksiyonuna göre inveks olduğu açıktır. $f(t) = t^2$ reel fonksiyonu S kümesi üzerinde η_1' e göre preinvekstir. Fakat $a, b \in\ \mathbb{R}$ için $g(t) = a + bt$ fonksiyonu S kümesi üzerinde η_1' e göre preinveks değildir.

Örnek 2.0.3 (Ghazanfari ve ark., (2013), Örnek 2) Örnek 2.0.2' deki şartlar altında her $A, B \in S$ ve $V = A + \eta_1(B,A)$ için,

$$\left(\frac{A+V}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{2}\left[\left(\frac{3A+V}{4}\right)^2 + \left(\frac{A+3V}{4}\right)^2\right]$$

$$\leq \int_0^1 \left(A + t\eta_1(B, A)\right)^2 dt$$

$$\leq \frac{1}{2}\left[\left(\frac{A+V}{2}\right)^2 + \left(\frac{A^2+V^2}{2}\right)\right]$$

$$\leq \frac{A^2+B^2}{2}$$

sağlanır.

Örnek 2.0.4 (Ghazanfari ve ark., (2013), Örnek 1-b) $\boldsymbol{V} \coloneqq (\mathbf{-2} \times \mathbf{1}_{\boldsymbol{H}}\, , \mathbf{0})$,

$W \coloneqq (0,\ 2 \times 1_H),\ S \coloneqq V \cup W \subseteq B(H)_{sa}$ ve $\eta_2 \colon S \times S \longrightarrow\ B(H)_{sa}$ fonksiyonu,

$$\eta_2(A, B) \coloneqq \begin{cases} A - B, & A, B \in V \text{ veya } A, B \in W, \\ 0, & \text{diğer yerlerde} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. $\boldsymbol{\eta_2}$, (C) koşulunu sağlar ve S kümesi η_2’ ye göre invekstir. $a \in \mathbb{R}$ ve $f(t) = a$ sabit fonksiyonu S kümesi üzerinde η_2’ ye göre sadece preinveks fonksiyondur.

NOT 2.0.5 Her operatör konveks fonksiyon, $\eta(A, B) = A - B$ dönüşümüne göre operatör preinveks bir fonksiyondur, fakat tersi genelde doğru değildir (Ghazanfari ve ark., (2013),).

Örnek 2.0.5 (Ghazanfari ve ark., (2013), Örnek 1-c) $f(t) = -|t|$ konveks bir fonksiyon değildir, fakat f fonksiyonu,

$$\eta_3(A, B) \coloneqq \begin{cases} A - B, & A, B \geq 0 \text{ veya } A, B \leq 0, \\ B - A, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

$\boldsymbol{\eta_3}$ fonksiyonuna göre konveks olmayan fakat preinveks olan bir fonksiyondur.

3. YAPILAN ÇALIŞMALAR

3.1. OPERATÖR Q-PREİNVEKS FONKSİYONLAR

Tanım 3.1.1 (Operatör Q-Preinveks Fonksiyon): $S \subseteq B(H)_{sa}$, $\eta: S \times S \longrightarrow B(H)^{+}{}_{sa}$ dönüşümüne göre bir inveks küme olsun. O halde her $t \in (0,1)$ ve spektrumları I'da tanımlı her özeşlenik A, B operatörleri için;

$$f\big(A + t\eta(B, A)\big) \leq \frac{f(A)}{t} + \frac{f(B)}{(1-t)} \tag{3.1.1}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonuna I üzerinde η'ya göre bir operatör Q-preinveks fonksiyon denir.

UYARI: Operatör Q-sınıfı fonksiyonlarını her $\sigma(A_k)$' ya bağlı özeşlenik A_k operatörleri ve $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$ $(1 \leq k \leq n)$ olacak şekilde pozitif λ_k sayıları, sabit ve sıralı n' liler için Jensen tipli eşitsizlikler,

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k A_k\right) \leq \sum_{k=I}^{n} \frac{f(A_k)}{\lambda_k}$$

kolayca genişletilebilir.

Lemma: Kabul edelim ki $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer f, operatör Q-preinveks fonksiyon ise o halde spektrumları I' da olan $A \in B(H)_{sa}$ operatörü için, $f(A) \geq 0$.

İspat: f operatör Q-preinveks olduğunda her $A, B \in B(H)_{sa}$ için,

$$f\big(A + t\eta(B, A)\big) \leq \frac{f(A)}{t} + \frac{f(B)}{(1-t)}$$

eşitsizliği geçerli olur. Buradan her iki tarafı $t\ (1-t)$ ile çarparak;

$$t\,(1-t) f\big(A + t\eta(B, A)\big) \leq (1-t) f(A) + \ t\, f(B)$$

elde ederiz.

$t \rightarrow 0$ ise $0 \leq\ f(A)$ elde ederiz.

3.2. OPERATÖR Q-PREİNVEKS FONKSİYONLARIN BAZI CEBİRSEL ÖZELLİKLERİ VE BAZI YENİ EŞİTSİZLİKLER

Teorem 3.2.1 f fonksiyonu, $I \subseteq \mathbb{R}$ kümesi üzerinde bir η'ya göre operatör Q-preinveks fonksiyon olsun. Spektrumları I' da olan her $A, B \in B(H)_{sa}$ ve $A < B$ için, f' nin $[A, B]$' de integrallenebildiğini ve η' nın (C) koşulunu sağladığını kabul edelim. Bu durumda,

$$f\left(A + \tfrac{1}{2} \cdot \eta(B, A)\right) \leq \tfrac{4}{B-A} \int_A^B f(x)\,\mathrm{d}x \tag{3.2.1}$$

eşitsizliği doğrudur.

İspat 3.2.1 İddiaya göre f, η' ya göre operatör Q-preinveks fonksiyon olduğundan, spektrumları I' da olan her $A, B \in B(H)_{sa}$ operatörleri ve $t \in (0,1)$ için,

$$f\big(A + t\eta(B, A)\big) \leq \frac{f(A)}{t} + \frac{f(B)}{(1-t)}$$

eşitsizliğini yazabiliriz. $t = \frac{1}{2}$ için;

$$f\left(A + \frac{1}{2}\eta(B, A)\right) \leq 2[f(A) + f(B)]$$

elde edilir.

Burada $\coloneqq A + t\eta(B, A)$, $B \coloneqq A + (1-t)\eta(B, A)$ olarak seçersek,

$$f\left(A + \frac{1}{2}\eta(B, A)\right) \leq 2[f(A) + f(B)]$$

$$f\left(A + t\eta(B, A) + \frac{1}{2}\eta(A + (1-t)\eta(B, A)\,, A + t\eta(B, A))\right)$$
$$\leq 2\big[f\big(A + t\eta(B, A)\big) + f\big(A + (1-t)\eta(B, A)\big)\big]$$

olup η dönüşümü, (C) şartını sağladığından

$$A + t\eta(B, A) + \frac{1}{2}\eta\big(A + (1-t)\,\eta(B, A)\,, A + t\eta(B, A)\big)$$

$$= A + t\eta(B, A) + \frac{1-t-t}{2}\eta(B, A)$$

$$= A + t\eta(B, A) + \frac{1-2t}{2}\eta(B, A)$$

$$= A + t\eta(B,A) + \frac{1}{2}\eta(B,A) - t\eta(B,A)$$

$$= A + \frac{1}{2}\eta(B,A)$$

yazabiliriz. Dolayısıyla

$$f\left(A + \tfrac{1}{2}\eta(B,A)\right) \leq 2\big[f\big(A + t\eta(B,A)\big) + f\big(A + (1-t)\eta(B,A)\big)\big].$$

Buradan (0,1) aralığı üzerinde her iki tarafın *t*' ye göre integralini alırsak,

$$f\left(A + \frac{1}{2}\eta(B,A)\right) \leq 2\left[\int_0^1 f\big(A + t\cdot\eta(B,A)\big)\,dt + \int_0^1 f\big(A + (1-t)\cdot\,\eta(B,A)\big)\,dt\right]$$

$$\leq 2.2.\tfrac{1}{B-A}\int_A^B f(t)\,\mathrm{d}t$$

eşitsizliğini buluruz.

$$f\left(A + \frac{1}{2}\eta(B,A)\right) \leq \frac{4}{B-A}\int_A^B f(x)\,\mathrm{d}x$$

eşitsizliğini elde ederiz. Bu ise ispatı tamamlar.

NOT: $A + \frac{1}{2}\eta(B,A) = \frac{2A+\eta(B,A)}{2}$

$$= \frac{A+\big(A+\eta(B,A)\big)}{2}$$

$E := \; A + \eta(B,A)$ olarak tanımlarsak,

$A + \frac{1}{2}\eta(B,A) = \frac{2A+\eta(B,A)}{2} = \frac{A+\big(A+\eta(B,A)\big)}{2} = \frac{A+E}{2}$

elde edilir. Buradan (3.2.1) eşitsizliği,

$$f\left(\frac{A+E}{2}\right) \leq \frac{4}{B-A}\int_A^B f(t)\,dt$$

şeklinde de yazılabilir.

Teorem 3.2.2 $f, g: I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları η'ya göre iki operatör Q-preinveks fonksiyon olsun. Bu durumda $(f+g)$ fonksiyonu da η'ya göre operatör Q-preinveks fonksiyondur.

İspat 3.2.2 f ve g fonksiyonları η'ya göre operatör Q-preinveks fonksiyon ise, spektrumları $I \subseteq \mathbb{R}$' de olan her $A, B \in B(H)_{sa}$ operatörleri ve her $t \in (0,1)$ için;

$$
\begin{aligned}
(f+g)\big(A+\ t\eta(B,A)\big) &= f\big(A+t\eta(B,A)\big)+g\big(A+t\eta(B,A)\big)\\
&\leq \frac{f(A)}{t}+\frac{f(B)}{1-t}+\frac{g(A)}{t}+\frac{g(B)}{1-t}\\
&\leq \frac{f(A)+g(A)}{t}+\frac{f(B)+g(B)}{1-t}\\
&\leq \frac{(f+g)(A)}{t}+\frac{(f+g)(B)}{1-t}
\end{aligned}
$$

olup, $(f+g)$ fonksiyonu η'ya göre operatör Q-preinveks fonksiyondur.

Teorem 3.2.3 $f: I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu η'ya göre operatör Q-preinveks fonksiyon olsun. Bu durumda her $\alpha \geq O$ için (αf) fonksiyonu da η'ya göre operatör Q-preinveks fonksiyondur.

İspat 3.2.3 Spektrumları $I \subseteq \mathbb{R}$ de olan her pozitif, sınırlı, özeşlenik A, B operatörleri ve her $t \in (0,1)$ için f fonksiyonu η'ya göre operatör Q-preinveks fonksiyon olduğundan,

$$
f\big(A+\ t\eta(B,A)\big) \leq \frac{f(A)}{t}+\frac{f(B)}{1-t}
$$

yazabiliriz. Her $\alpha \geq O$ için bu eşitsizliğin her iki tarafını α ile çarparsak

$$
\alpha f\big(A+\ t\eta(B,A)\big) \leq \alpha\frac{f(A)}{t}+\alpha\frac{f(B)}{1-t}
$$

$$
(\alpha f)\big(A+\ t\eta(B,A)\big) \leq \frac{(\alpha f)(A)}{t}+\frac{(\alpha . f)(B)}{1-t}
$$

elde ederiz. Bu ise ispatı tamamlar.

Teorem 3.2.4 Eğer $f: I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ η'ya göre bir operatör Q-preinveks fonksiyon ise bu durumda spektrumları I'da olan her $A, B \in B(H)_{sa}$ için,

$$f(2A+\ \eta(B,A)-x)\leq \frac{f(A)+f(B)}{1-t}+\frac{f(A)+f(B)}{t}-f(x)$$

eşitsizliği doğrudur.

İspat 3.2.4 Özel olarak $= A + t\eta(B,A) \in I$, $t \in (0,1)$ olarak seçelim. Bu durumda,

$$\begin{aligned} f(2A+\eta(B,A)-x) &= f\big(2A+\eta(B,A)-A-t\eta(B,A)\big) \\ &= f\big(A+(1-\ t)\eta(B,A)\big) \end{aligned}$$

olarak hesaplanır. İddiaya göre f, η'ya göre operatör Q-preinveks fonksiyon olduğundan,

$$\begin{aligned} f(2A+\eta(B,A)-x) &= f\big(A+(1-\ t)\eta(B,A)\big) \\ &\leq \frac{f(A)}{1-t}+\frac{f(B)}{t} \end{aligned}$$

yazabiliriz. Buradan

$$\begin{aligned} f(2A+\eta(B,A)-x) &\leq \frac{f(A)}{1-t}+\frac{f(B)}{t} \\ &= \frac{f(A)}{1-t}+\frac{f(B)}{t}+\frac{f(A)}{t}+\frac{f(B)}{1-t}-\left(\frac{f(A)}{t}+\frac{f(B)}{1-t}\right) \\ &= \frac{f(A)+f(B)}{1-t}+\frac{f(A)+f(B)}{t}-\left(\frac{f(A)}{t}+\frac{f(B)}{1-t}\right) \\ &\leq \frac{f(A)+f(B)}{1-t}+\frac{f(A)+f(B)}{t}-f(x) \end{aligned}$$

olup buradan ispat tamamlanır.

3.3. OPERATÖR PREİNVEKS *P*-SINIFI FONKSİYONLAR

Tanım 3.3.1 (Operatör Preinveks *P*-Sınıfı Fonksiyonlar) $f,\ I$ aralığı üzerinde tanımlı reel değerli sürekli bir fonksiyon ve $S,\ \eta: S \times S \longrightarrow\ B(H)_{sa}$ dönüşümüne göre inveks bir küme olsun. O halde spektrumları I'da olan her $A, B \in B(H)_{sa}$ ve $t \in [0,1]$ için;

$$f\big(A + t\eta(B, A)\big) \leq f(A) + f(B)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonuna I üzerinde η dönüşümüne göre Operatör Preinveks *P*-Sınıfı Fonksiyon denir.

3.4. OPERATÖR PREİNVEKS *P*-SINIFI FONKSİYONLARIN BAZI CEBİRSEL ÖZELLİKLERİ VE BAZI YENİ EŞİTSİZLİKLER

Önerme: $S,\ \eta: S \times S \longrightarrow\ B(H)_{sa}$ dönüşümüne göre inveks bir küme ve $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olsun. Ayrıca η, S üzerinde (C) şartını sağlasın. Bu durumda her $A, B \in B(H)_{sa}$ ve $V = A + \eta(B, A)$ noktalarını birleştiren P_{AV} η-yolu üzerinde f fonksiyonunun η' ya göre operatör preinveks P-sınıfı fonksiyonu olabilmesi için gerekli ve yeterli koşul her $x \in H$ ve $\|x\| = 1$ için;

$\varphi_{x,A,B}$=$\langle f\big(A + t\eta(B, A)\big)x, x\rangle$ şeklinde tanımlanan $\varphi_{x,A,B}: [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$,

fonksiyonunun [0,1] aralığında konveks olmasıdır.

İspat: $'' \Rightarrow ''$: Her $A, B \in B(H)_{sa}, V = A + \eta(B, A)$ ve f, P_{AV} η -yolu üzerinde η' ya göre operatör preinveks P -sınıfı olsun. Bu durumda;

$$\varphi_{x,A,B}(t) = \langle f\big(A + t\eta(B, A)\big)x, x\rangle$$

şeklinde tanımlanan $\varphi_{x,A,B}: [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun konveks olduğunu gösterelim.

İddiaya göre f, P_{AV} η -yolu üzerinde η' ya göre operatör preinveks P -sınıfı

olduğundan, her $A, B \in B(H)_{sa}$ ve $t \in [0,1]$ için

$A^* = A + t_1\eta(B, A)$, $B^* = A + t_2\eta(B, A)$ olmak üzere;

$$\varphi_{x,A,B}\ ((1-t)t_1 + tt_2) = \langle f(A + [(1-t)t_1 + tt_2]\eta(B, A)\ )x, x\rangle$$

$$=< f(A + t_1\eta(B, A) + tt_2\eta(B, A) - tt_1\eta(B, A))\ x, x >$$

$$=< f(A + t_1\eta(B, A) + t(t_2 - t_1)\eta(B, A))\ x, x >$$

$$=< f(A + t_1\eta(B, A) + t\eta\big(A + t_2\eta(B, A)\ \ ,\ \ A + t_1\eta(B, A)\big)\ x, x >$$

$=< f(A^* + t\eta(B^*, A^*)\ )\ x, x >$ f operatör preinveks P-sınıfı ise;

$$\leq < f(A^*)x, x > + < f(B^*)x, x >$$

$$\leq (1-t) < f(A^*)x, x > + t. < f(B^*)x, x >$$

$$\leq (1-t)\langle f\big(A + t_1\eta(B, A)\big)x, x\rangle + t\ \langle f\big(A + t_2\eta(B, A)\big)x, x\rangle$$

$$\leq (1-t)\varphi_{x,A,B}(t_1) + \ t\ \varphi_{x,A,B}(t_2)$$

olup,

$\varphi_{x,A,B}$, [0,1] aralığı üzerinde konvekstir.

$'' \Leftarrow ''$: Kabul edelim ki,

$$\varphi_{x,A,B}=\langle f\big(A+t\eta(B,A)\big)x,x\rangle \tag{3.4.1}$$

[0,1] aralığı üzerinde operatör konveks olsun.

$$\langle f\big(\,C_1+t\eta(C_2,\,C_1)\big)x,x\rangle$$

$$c_1\colon A+t_1\eta(B,A)\in P_{AV}$$

$$c_2\colon A+t_2\eta(B,A)\in P_{AV}$$

şeklinde tanımlayalım. Her $t\in[0,1]$ için;

$$\begin{aligned}
\varphi_{x,A,B} &=< f(A+t_1\eta(B,A)+t\eta\big(A+t_2\eta(B,A)\;\;,\;\;A+t_1\eta(B,A)\big)\,x,x>\\
&=< f(A+t_1\eta(B,A)+t(t_2-t_1)\eta(B,A))\,x,x>\\
&=< f(A+t_1\eta(B,A)+tt_2\eta(B,A)-\mathrm{t}.t_1\eta(B,A))\,x,x>\\
&=< f\big(A+t_1(1-t)\eta(B,A)+tt_2\eta(B,A)\big)x,x>\\
&=< f(A+[t_1(1-t)+t_2t]\eta(B,A))\,x,x>\\
&=\varphi_{x,A,B}\,(t_1(1-t)+t_2t)\\
&=(1-t)\varphi_{x,A,B}(t_1)+t\varphi_{x,A,B}(t_2)\\
&=(1-t)\langle f\big(A+t_1\eta(B,A)\big)x,x\rangle+\;t\langle f\big(A+t_2\eta(B,A)\big)x,x\rangle\\
&\le\langle f\big(A+t_1\eta(B,A)\big)x,x\rangle+\langle f\big(A+t_2\eta(B,A)\big)x,x\rangle\\
&\le\varphi_{x,A,B}(t_1)+\varphi_{x,A,B}(t_2)
\end{aligned}$$

olup f fonksiyonu P_{AV} η-yolu üzerinde η'ya göre operatör preinveks P-sınıfı fonksiyonudur. Dolasıyla ispat tamamlanır.

Teorem 3.4.1 Kabul edelim ki $S\subseteq B(H)_{sa}$, $\eta\colon S\times S\longrightarrow\; B(H)_{sa}$ 'ya bağlı inveks bir küme ve η dönüşümü (C) şartını sağlasın. Eğer her $A,B\in B(H)_{sa}$ ve $V=A+\eta(B,A)$ için $f\colon I\longrightarrow\mathbb{R}$ fonksiyonu, P_{AV} η-yolu üzerinde η' ya bağlı operatör preinveks P-sınıfı fonksiyonu ise bu durumda aşağıdaki eşitsizlik sağlanır,

$$f\left(\frac{A+V}{2}\right)\le\frac{1}{2}\left[f\left(\frac{A+V}{2}\right)+f\left(\frac{3V\_A}{2}\right)\right]$$

$$\leq \int_0^{\frac{1}{2}} f\big(A + t\eta(B, A)\big)\,\mathrm{dt}$$

$$\leq \frac{1}{2}\left[f(A) + f(V) + f\left(\frac{A+V}{2}\right)\right]$$

$$\leq f(A) + f(B). \tag{3.4.2}$$

İspat 3.4.1 $x \in H$, $\|x\| = 1$ ve $t \in [0,1]$ için;

$\langle Ax, x\rangle \in Sp(A) \subseteq I$ ve $\langle Vx, x\rangle \in Sp(V) \subseteq I$ o halde,

$$\big\langle \big(A + t\eta(B, A)\big)x, x\big\rangle = \langle Ax, x\rangle + t\,\langle \eta(B, A)x, x\rangle \in I \tag{3.4.3}$$

elde ederiz. f sürekli ve $\int_0^1 f\big(A + t\eta(B, A)\big)\mathrm{dt}$ integral değerli operatörü mevcuttur. η dönüşümü, (C) koşulunu sağladığından her $t \in [0,1]$ için;

$$A + \frac{1}{2}\,\eta(B, A) = A + t\eta(B, A) + \frac{1}{2}\eta(A + (1 - t)\eta(B, A)\ \ ,\ \ A + t\eta(B, A)\,) \tag{3.4.4}$$

yazabiliriz. Buradan

$$f\left(A + \frac{1}{2}\eta(B, A)\right) \leq \frac{1}{2}\, f\big(A +\ t\eta(B, A)\big) + \frac{1}{2} f\big(A + (1 - t)\eta(B, A)\big)$$

$$\leq \frac{1}{2}\,[(1 - t)f(A) + tf(B)] + \frac{1}{2}\,[tf(A) + (1 - t)f(B)]$$

$$\leq [(1 - t)f(A) + tf(B)] + [tf(A) + (1 - t)f(B)]$$

$$\leq f(A) +\ f(B) \tag{3.4.5}$$

olup $t \in [0,1]$ üzerinde (3.4.5)' in integrali alınır ve doğru olan aşağıdaki eşitliği kullanırsak

$$\int_0^1 f\big(A + t\eta(B, A)\big)\mathrm{dt} = \int_0^1 f\big(A + (1 - t)\eta(B, A)\big)\,\mathrm{dt} \tag{3.4.6}$$

Operatör preinveks *P*-sınıfı fonksiyonları için;

$$f\left(\frac{A+\big(A+\eta(B,A)\big)}{2}\right) \leq \int_0^1 f\big(A + t\eta(B, A)\big)dt \leq f(A) + f(B)$$

$$f\left(\frac{A + V}{2}\right) \leq \int_0^1 f\big(A + t\eta(B, A)\big)dt \leq f(A) + f(B)$$

sonucunu elde ederiz.

Bir önceki önermeden f, η' ya göre operator preinveks P-sınıfı fonksiyonu için, $\varphi_{x,A,B}$, $[0,1]$ aralığı üzerinde konveks fonksiyon olduğundan reel değerli konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliğini kullanabiliriz.

$$\varphi\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_{a}^{b} \varphi(s)ds \leq \varphi(a) + \varphi(b)$$

$a = 0$, $b = \frac{1}{2}$ ile

$$\left\langle f\left(\frac{A+V}{2}\right)x, x\right\rangle \leq 2\int_0^{\frac{1}{2}} \varphi_{x,A,B}(s)ds \leq < (f(A) > + < f\left(\frac{A+V}{2}\right))\, x\,,\ \ x >$$

elde ederiz.

ve $a = \frac{1}{2}$, $b = 1$ ile

$$\left\langle f\left(\frac{3V-A}{2}\right)x, x\right\rangle \leq \int_1^{\frac{1}{2}} \varphi_{x,A,B}(s)ds \leq \left\langle f\left(\frac{A+V}{2}\right)x, x\right\rangle + \langle f(V)x, x\rangle$$

elde ederiz.

İki sonucun toplamı ile,

$$\frac{1}{2}\left[\left\langle f\left(\frac{A+V}{2}\right)x, x\right\rangle + \left\langle f\left(\frac{3V-A}{2}\right)x, x\right\rangle\right] \leq \int_0^1 \varphi_{x,A,B}(s)ds$$

$$\leq \left\langle\left(\frac{f(A)+f(V)}{2}\right)x, x + 2f\left(\frac{A+V}{2}\right)x, x\right\rangle$$

yazılabilir. Ayrıca f fonksiyonunun sürekliliğinden;

$$\int_0^1 \langle f(A + t\eta(B,A))x, x\rangle \mathrm{dt} = \int_0^1 \langle f(A + t\eta(B,A))dtx, x\rangle,$$

eşitsizliği doğru olup, (3.4.4) eşitsizliğinden

$$f\left(\frac{A+V}{2}\right) \leq \frac{1}{2}\left[f\left(\frac{A+V}{2}\right) + f\left(\frac{3V-A}{2}\right)\right] \leq f(A) + f(B)$$

buluruz. Buradan istenen (3.4.2) sonucunu çıkarırız.

4. SONUÇ ve ÖNERİLER

Bu tez çalışması, literatürde olmayan ve ilk defa burada tanımladığımız Operatör Q-preinveks Fonksiyonları ve Operatör Preinveks P-Sınıfı Fonksiyonları kavramlarının incelenip açıklanmasıyla meydana gelmiştir. Bu çalışmada elde edilen sınıflar ile ilgili bazı yeni tanım, teorem ve eşitsizlikler verilmiştir. Verilen bilgilere dayanarak Hilbert uzayı üzerinde sınırlı, özeşlenik operatörlerin sürekli fonksiyonları için operatör preinveks sınıfı alanında bilgi edinmek isteyen bilim insanlarına yol gösterici bir literatür olma niteliğindedir.

Bu tez çalışmasında aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir:

1) η'ya göre Operatör Q-preinveks Fonksiyon tanımı verilmiş, bazı cebirsel özellikleri araştırılmış ve Hermite-Hadamard tipli yeni eşitsizlikler ifade ve ispat edilmiştir.

2) η'ya göre Operatör Preinveks P-Sınıfı Fonksiyonları tanımı verilmiş, bazı cebirsel özellikleri araştırılmış ve Hermite-Hadamard tipli yeni eşitsizlikler ifade ve ispat edilmiştir.

Bu tez çalışmasında elde edilen sonuçlar ışığında aşağıdaki önerileri verebiliriz.

1) Klasik eşitsizliklerle, bir Hilbert uzayında sınırlı özeşlenik operatörlerin sürekli fonksiyonları için diğer tip konvekslik çeşitleri incelenebilir.

2) İncelenecek diğer tip konvekslik çeşitleri için yol ve yöntem olacak bir kaynak olarak bakılabilir.

5. KAYNAKLAR

Ben-Israel, A., & Mond, B. (1986). What is Invexity? /. *Journal of the Australian Mathematical Society*, 28(1), 1-9.

Craven, B. D. (1981). Invex Functions and Constrained Local Minima. *Bulletin of the Australian Mathematical Society, 24*(3), 357-366.

Craven, B. D., & Glover, B. M. (1985). Invex Functions and Duality. *Journal of the Australian Mathematical Society, 39*(1), 1-20.

Dragomir, S. S. (2002a). An Inequality Improving the First Hermite-Hadamard Inequality forConvex FunctionsDefined on Linear Spaces and Applications for Semi-Inner Products. *Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics, 3*, 8.

Dragomir, S. S. (2002b). An Inequality Improving the Second Hermite-Hadamard Inequality for Convex Functions Defined on Linear Spaces and Applications for Semi-Inner Products. *Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics, 3*, 8.

Dragomir, S. S. (2011). Hermite–Hadamard's Type Inequalities for Operator Convex Functions. *Applied Mathematics and Computation, 218*(3), 766-772.

Dragomir, S. S., & Agarwal, R. P. (1998). Two Inequalities for Differentiable Mappings and Applications to Special Means of Real Numbers and to Trapezoidal Formula . *Applied Mathematics Letters, 11*(5), 91-95.

Elster, K. H., & Neshse, R. (1980). Optimality conditions for some nonconvexproblems. *Optimization Techiniques: Lecture Notes in Control and Information Sciences, 23*, 1-9.

Furuta, T., Micic, J., Pečarić, J., & Seo, Y. (2005). *Mond-Pečarić Method in Operator Inequalities.* Zagrep: Element.

Ghazanfari, A.G., Shakoori, M., Barani, A., & Dragomir, S.S. (2013). *Hermite-Hadamard type inequality for operator preinvex functions.* math. FA, 4; Available online at http.//arXiv:1306.0730vl.

Hanson, M. A. (1981). On Sufficiency of the Kuhn-Tucker Conditions. *Journal Of Mathematical Analysis and Applıcations*, 545-550.

Hanson, M. A., & Mond, B. (1987). Convex Transformable Programming Problems and Invexity. *Journal of Information and Optimization Sciences, 8*(2), 201-207.

Hayashi, M., & Komiya, H. (1982). Perfect duality for convexlike programs. *Journal Of Optimization Theory And Applıcations, 38*(2), 179-189.

Kikianty, E. (2010). Hermite-Hadamard Inequality in the Geometry of Banach Spaces. *Victoria University*, 218.

Martin, D. H. (1985). The Essence of Invexity. *Journal of Optimization Theory and* Applications, 47(1), 65-76.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler	
Adı Soyadı	Cansu ALTUNÇ
Doğum Yeri	Mersin
Doğum Tarihi	20.03.1992
Uyruğu	■ T.C. ❐ Diğer:
Telefon	0538 581 77 73
E-Posta Adresi	cansu_unal33@hotmail.com

Eğitim Bilgileri	
Lisans	
Üniversite	Ordu Üniversitesi
Fakülte	Fen Edebiyat Fakültesi
Bölümü	Matematik
Mezuniyet Yılı	28.06.2015

Yayınlar

1. **Uluslararası Makaleler**

Unluyol E., Baskoy E., **Altunç C.,** Some new Hermite-Hadamard type inequalities in terms of operator *h*-preinvex functions in Hilbert space, AIP Conference Proceedings 1991, 020021 (2018); https://doi.org/10.1063/1.5047894 (Web of Science).

Unluyol E., Ozturk Mert R., **Altunç C.,** On operator GA-convex functions in Hilbert spaces, AIP Conference Proceedings 1991, 020021 (2018); https://doi.org/10.1063/1.5047901 (Web of Science).

2. **Uluslararası Bildiriler**

Unluyol E, **Altunç C.,** Ozturk Mert R., Operator P-preinvex class for continuous functions of selfadjoint operators, International Conference on Computational and Statistical Methods in Applied Sciences (COSTAS 2017), 9-11 Nov. 2017, Samsun, Turkey, p. 39.

Unluyol E, Ozturk Mert R., **Altunç C.,** Operator Q-preinvex class for continuous functions of selfadjoint operators, International Conference on Computational and Statistical Methods in Applied Sciences (COSTAS 2017), 9-11 Nov. 2017, Samsun, Turkey, p. 40.

Unluyol E., Baskoy E., **Altunç C.,** Some new Hermite-Hadamard type inequalities in terms of operator *h*-preinvex functions in Hilbert space, International Conference on Mathematics and Related Sciences (ICMRS 2018), 30 April-4 May 2018, IC Santai Family Resort, Belek-Anltalya Turkey, p. 35.