T. C.

ORDU ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATRİSLERİN DMP İNVERSLERİ İÇİN BAZI YENİ GÖSTERİMLER VE ÇEŞİTLİ UYGULAMALARI

BURAK KARAMAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ORDU 2024

TEZ BİLDİRİMİ

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan ve kullanılan intihal tespit programının sonuçlarına göre; bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

BURAK KARAMAN

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

MATRİSLERİN DMP İNVERSLERİ İÇİN BAZI YENİ GÖSTERİMLER VE ÇEŞİTLİ UYGULAMALARI

BURAK KARAMAN

ORDU ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ, 87 SAYFA

(TEZ DANIŞMANI: PROF. DR. SELAHATTİN MADEN)

Bu tez çalışması beş bölüm halinde düzenlenmiştir. Birinci bölümde tez çalışmasının amacından bahsedilerek kısa bir giriş verilmiştir. İkinci bölümde çalışmada gerekli olacak temel tanımlar, teoremler ve bazı genel bilgiler ifade edilmiştir. Bu bölümde ayrıca bir matris için çeşitli invers tanımları ve bunların bazı özellikleri sıralanmıştır. Üçüncü bölümde matrisler için DMP invers tanımı verilerek bu inversin çeşitli özellikleri ortaya konulmuştur. Ayrıca matrislerin DMP inversleri ile ilgili bazı hesaplanma yöntemleri ve bu inverslerin çeşitli uygulamalarından bahsedilmiştir. Dördüncü bölümde sonuç ve öneriler verilmistir. Beşinci bölümde ise tezde yararlanılan kaynaklar listelenmiştir.

Anantara Kelimeler: Matris, Kare Matris, Rank, Parçalanmış Matris, Bir Matrisin İnversi, Genelleştirilmiş İnvers, Moore-Penrose İnvers, Drazin İnvers, Grup İnvers, Çekirdek İnvers, Çekirdek-EP İnvers, DMP İnvers.

ABSTRACT

SOME NEW REPRESENTATIONS AND VARIOUS APPLICATIONS FOR DMP INVERSES OF MATRICES

BURAK KARAMAN

ORDU UNIVERSITY INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

MATHEMATICS

MASTER THESIS, 87 PAGES

(SUPERVISOR: PROF. DR. SELAHATTİN MADEN)

This thesis is organized in five parts. In the first chapter, a short introduction is given by mentioning the purpose of the thesis study. In the second chapter, the basic definitions, theorems and some general informations that will be required in our study are expressed. Also, in this chapter, the definitions and some properties of several inverses of a matrix and are listed. In the third chapter, it is given the definition of the DMP inverse of a matrix and considered some properties of this inverse. Furthermore, some computational methods and several applications of the DMP inverses of matrices are given in this chapter. In the fourth chapter, conclusions and recommendations are given. In the fifth chapter, the sources used in the thesis are listed.

Keywords: Matrix, Square Matrix, Rank, Partitoned Matrix, İnverse of a Matrix, Generalized Inverse, Moore-Penrose Inverse, Drazin İnvers, Group Inverse, Core Inverse, Core-EP Inverse, DMP İnvers.

TEŞEKKÜR

Tez konusunun belirlenmesinde ve tüm çalışmalarım boyunca her zaman üstün bilgi ve deneyimleriyle bana yol gösteren danışman hocam Sayın Prof. Dr. Selahattin MADEN’ e en içten duygularla teşekkür eder, saygılarımı sunarım.

Ayrıca Lisansüstü eğitimim sırasında kendilerinden ders aldığım ve engin tecrübelerinden yararlandığım Ordu Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümündeki tüm değerli hocalarıma teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGELER ve KISALTMALAR LİSTESİ

$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{C}_n^m$ **veya** $\mathbb{C}_{m\times n}$	: $\mathbb{C}$ üzerinde tanımlı $m \times n$ tipindeki tüm matrislerin kümesi
$\boldsymbol{I_n}$	: $n \times n$ tipindeki birim matris
$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ **veya** $\boldsymbol{A'}$	: A matrisinin transpoz matrisi
$\overline{\boldsymbol{A}}$	: A matrisinin eşlenik matrisi (eş matrisi)
$\boldsymbol{A}^*$	: A matrisinin eşlenik transpoz matrisi (Hermitian matrisi)
$\lvert\boldsymbol{A}\rvert$	: A matrisinin determinantı
$\mathbf{Ek}(\boldsymbol{A})$	: A matrisinin ek matrisi
$\boldsymbol{A_{ij}}$	: A matrisinin bir a_{ij} elemanının kofaktörü
$\boldsymbol{A^{-1}}$	: A matrisinin inversi
$\mathbf{ind}(\boldsymbol{A})$	: A matrisinin indeksi
$\boldsymbol{r}(\boldsymbol{A})$	: A matrisinin rankı
$\boldsymbol{tr}(\boldsymbol{A})$	: A matrisinin izi
$\boldsymbol{\mathcal{C}}(\boldsymbol{A})$	: A matrisinin satır uzayı
$\boldsymbol{\mathcal{N}}(\boldsymbol{A})$	: A matrisinin null (sıfır) uzayı
$\mathfrak{R}(\boldsymbol{A})$	: A matrisinin ranj (sütun) uzayı
$\boldsymbol{A}^-$ **veya** $\boldsymbol{A^{(1)}}$	: A matrisinin genelleştirilmiş inversi (iç inversi)
$\boldsymbol{A}^=$ **veya** $\boldsymbol{A^{(2)}}$	: A matrisinin dış inversi
$\boldsymbol{A_r^-}$ **veya** $\boldsymbol{A^{(1,2)}}$	: A matrisinin yansımalı genelleştirilmiş inversi
$\boldsymbol{A}^\dagger$ **veya** $\boldsymbol{A}^+$	: A matrisinin Moore–Penrose tipi genelleştirilmiş inversi
$\boldsymbol{A^D}$	: A matrisinin Drazin inversi
$\boldsymbol{A^{D,\dagger}}$	: A matrisinin DMP inversi
$\boldsymbol{A}^\#$	: A matrisinin grup inversi
$\boldsymbol{A}^{\oplus}$	: A matrisinin çekirdek inversi
$\boldsymbol{A}^{\circledcirc}$	: A matrisinin çekirdek-EP inversi
$\mathbf{köş}(\boldsymbol{A})$	: A matrisinin köşegen elemanları
$\oplus$	: Direkt toplam

1. GİRİŞ

Bugün matris teorisi ve onun önemli bir kısmını oluşturan lineer denklem sistemleri, istatistik, sosyoloji, kimya, fizik eğitimi, bilgisayar mühendisliği, kodlama teorisi ve elektrik mühendisliği gibi pek çok teknik alanda gerekli matematiksel temel bilginin ayrılmaz bir parçası haline gelmiştir. Matris hesabı, 19. yüzyıl ortalarından itibaren kullanılmaya başlanmıştır. İngiliz matematikçi Sylvester, ilk kez 1850 yılında matris kavramını kullanmıştır. 1853 yılında ise bir diğer ingiliz bilgini Hamilton '*Lineer and Vector Functions*' isimli eserinde matrislerin bazı özelliklerinden faydalanmış fakat matris ismini henüz kullanmamıştır. Yine bir İngiliz matematikçisi olan Cavley, 1858 yılında zamanında çok meşhur olan '*Memorie on the Theory of Matrices*' isimli eserinde matris cebirinin temel esaslarını ortaya koymuştur. İlerleyen zamanlarda Fransız Laguerre ve Alman Frobenius matrislerle ilgili yeni kavram ve teoremler üzerinde çalışmışlardır.

Bir matrisin bilinene anlamda inversinden söz edebilmek için matrisin kare ve nonsingüler olması gerekmektedir. Ancak kare olmayan ya da kare olduğu halde singüler olan matrislerin de mevcut olduğu ve bu tipten matrislerle uygulamada çok sık karşılaşıldığı da bir gerçektir. Dolayısıyla bu tip matrislerin de bir çeşit inverslerine ihtiyaç duyulmaktadır. Singüler bir matrisin inversi kavramı ilk kez 1920 yılında Moore tarafından ortaya atılmış olmasına rağmen ta ki 1955 yılına kadar bu konuda herhangi bir sistematik çalışma yapılamamaktadır. 1955 yılında, önceki çalışmalardan tamamen habersiz olarak, Penrose (1955, 1956) biraz farklı bir yoldan da olsa Moore tarafından singüler matrisler için verilen invers kavramını yeniden tanımlamıştır. Penrose ile aynı dönemlerde yaşayan bilim adamlarından birisi olan Rao ise, bir singüler matrisin Pseudo İnversi olarak adlandırdığı ve en küçük kareler teorisinde, singüler matrisli normal denklemlerin çözümünde ve tahmin edicilerin varyanslarının hesaplanmasında çok sık kullanılan yeni bir invers kavramı geliştirmiştir. Ancak Rao tarafından geliştirilen Pseuda invers, Moore ve Penrose tarafından ortaya konulan kısıtlamaların tümünü sağlamamaktadır. Bu nedenledir ki bu invers, Moore–Penrose inversten biraz farklıdır. Rao, daha sonraki bir çalışmasında ise lineer denklemlerle ilgili problemlerinin çözümünde yeterli olan ve Moore ve Penrose' un vermiş olduğu tanımdan daha da zayıf bir tanım ortaya koymuştur. Bu invers, bir genelleştirilmiş invers (g–invers) olarak adlandırılmış ve bu inversin çeşitli uygulamaları Rao' nun birçok çalışmasında yer almıştır.

Genelleştirilmiş inversler üzerinde 1955' li yıllardan itibaren çalışan başlıca bilim adamları arasında Greville, Bjerhammer, Ben-Israel ve Charnes, Chipman, Chipman ve Rao, Scroggs ve Odell sayılabilir. Bott ve Duffin, bir kare matrisin kısıtlı inversini tanımlamışlardır ki bu invers bilinen g–inversten farklıdır ve bazı uygulamalarda oldukça fazla kullanılır. Chernoff, çalışmalarında singüler nonnegatif tanımlı bir matrisin g–inversini ele almıştır ki bu invers, bir g–invers olmamasına rağmen bazı tahmin problemlerinin incelenmesinde yararlıdır. Rao tarafından verilen daha zayıf tanımı sağlayan g–invers tek türlü olmamakla birlikte matris cebirinde ilginç bir çalışma olarak kabul edilir. 1967 yılında bir yayınında Rao, değişik amaçlarla kullanılmak üzere g–inverslerin bir sınıflandırmasını vermiştir. Bu çalışmalar daha sonra genelleştirilmiş inverslerin yeni bir sınıflandırmasını ortaya atan Mitra ve Bhimasankaram (1969, 1970) tarafından geliştirilmiştir.

Genelleştirilmiş inverslerin diğer çeşitli uygulamaları Mitra ve Rao (1968a, 1968b, 1969) ve Rao (1968) tarafından yapılan bir dizi çalışmada ele alınmıştır. Genelleştirilmiş inverslerle ilgili sistematik gelişmeler ve onların çeşitli uygulamaları *Generalized Inverse of Matrices and Its Applications* (Wiley, 1971) adlı kitapta verilmiştir.

Bu tez çalışmasında öncelikle kare olmayan ya da kare olduğu halde normal olarak bildiğimiz anlamda inversi mevcut olmayan matrisler için geliştirilen ve özellikle lineer denklem sistemlerinin genel durumda çözümünün mevcut olup-olmadığının araştırılmasında ve mevcut olması durumunda çözümün belirlenmesinde kullanılan ve bilinen anlamdaki invers özelliklerini de sağlayan Moore-penrose invers adı verilen bir genelleştirilmiş invers kavram ele alınmıştır. Bu amaçla öncelikle Moore-Penrose invers tanımı verilerek bu inversin çeşitli özellikleri verilmiş ve keyfi mertebeden bir kare matris için çekirdek invers tanımı verilerek bu inversin bazı özellikleri ortaya konulmuştur. Daha sonra bilinen anlamda inversi mevcut olmayan kare matrisler çekirdek-EP invers adı verilen yeni bir invers tanımı verilerek bu inversin çeşitli özellikleri verilmiş ve bu tipten inversleri hesaplamada kullanılan bazı yeni yöntemler geliştirilmiştir.

2. GENEL BİLGİLER

2.1 Matrislerle İlgili Bazı Temel Kavramlar

Tanım 2.1 i) $\mathbb{K}$ bir cisim, $m, n \in \mathbb{N}$ ve $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ olmak üzere bütün (i, j) sıralı ikililerinin kümesini $\mathcal{A} = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ gösterelim. Bir $\mathfrak{f}: \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{K}$ fonksiyonu

$$(i, j) \longrightarrow \mathfrak{f}(i, j) = a_{ij}$$

biçiminde tanımlansın. $a_{ij} \in \mathbb{K}$ olmak üzere keyfi seçilen $m.n$ tane elemanın oluşturduğu sayı tablosuna $\mathbb{K}$ cismi üzerinde tanımlı $m \times n$ tipinde bir matris denir ve

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

veya $A = \left[a_{ij}\right]_{m \times n}$ şeklinde gösterilir. Her bir (i, j), $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ ikilisine karşılık gelen a_{ij} elemanına A matrisinin (i, j)–yinci bileşeni denir.

ii) $m \times n$ tipindeki $A = \left[a_{ij}\right]$ ve $B = \left[b_{ij}\right]$ matrisleri için, eğer her (i, j), $1 \leq i \leq m$ ve $1 \leq j \leq n$ için $a_{ij} = b_{ij}$ ise A ve B matrisleri eşittir denir.

iii) $m \times n$ tipindeki bir $A = \left[a_{ij}\right]$ matrisi için eğer her (i, j), $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ için $a_{ij} = 0$ ise A matrisine bir sıfır matris denir (Hacısalihoğlu, HH., 1977).

Tanım 2.2 i) $m \times n$ tipindeki $A = \left[a_{ij}\right]$ ve $B = \left[b_{ij}\right]$ matrisleri verildiğinde, bu iki matrisin toplamı, (i, j)–yinci bileşeni $a_{ij} + b_{ij}$ olan bir matris olup

$$+: \mathbb{K}_n^m \times \mathbb{K}_n^m \longrightarrow \mathbb{K}_n^m$$

$$(A, B) \longrightarrow A + B = \left[a_{ij}\right] + \left[b_{ij}\right]$$

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + +b_{12} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlanır.

ii) $c \in \mathbb{K}$ bir skaler olmak üzere $cA \in \mathbb{K}_n^m$ matrisi (i, j)–yinci bileşeni ca_{ij} olan bir matristir. Başka bir deyişle

$$.: \mathbb{K} \times \mathbb{K}_n^m \longrightarrow \mathbb{K}_n^m$$

$$(c, A) \longrightarrow cA = \begin{bmatrix} ca_{11} & ca_{12} & \dots & ca_{1n} \\ ca_{21} & ca_{22} & \dots & ca_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ ca_{m1} & ca_{m2} & \dots & ca_{mn} \end{bmatrix}$$

dir (Hacısalihoğlu, HH., 1977).

Tanım 2.3 $A = [a_{ij}] \in \mathbb{K}_p^m$ ve $B = [b_{ij}] \in \mathbb{K}_n^p$ tipindeki A ve B matrislerinin çarpımı $C = [c_{ij}] \in \mathbb{K}_n^m$ tipinde bir matris olup

$$.: \ \mathbb{K}_p^m \times \mathbb{K}_n^p \longrightarrow \mathbb{K}_n^m$$

$$(A, B) \longrightarrow A.B = C$$

$$[a_{ij}].[b_{ij}] = [c_{ij}] = \left[\sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}\right], \ 1 \le i \le m, \ 1 \le j \le n$$

veya daha açık olarak

$$A.B = \begin{bmatrix} (a_{11}b_{11} + \dots + a_{1p}b_{p1}) & \dots & (a_{11}b_{1n} + \dots + a_{1p}b_{pn}) \\ \dots & \dots & \dots \\ (a_{m1}b_{11} + \dots + a_{mp}b_{p1}) & \dots & (a_{m1}b_{1n} + \dots + a_{mp}b_{pn}) \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlanır. Bu durumda iki matrisin çarpımının tanımlı olabilmesi için birinci matrisin sütun sayısı ile ikinci matrisin satır sayısının eşit olması gerekmektedir. Uygun A ve B matrislerinin çarpımı AB ile gösterilir (Hacısalihoğlu, HH., 1977).

Tanım 2.4 Özel olarak $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ alınırsa, bu takdirde matrise bir reel matris ve $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ alınırsa matrise bir kompleks matris denir (Hacısalihoğlu, HH., 1977).

Tanım 2.5 i) Eğer bir $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ matrisinde $m = n$ ise, yani A matrisin satır sayısı sütun sayısına eşit ise, bu takdirde A matrisine bir kare matris denir. Bir

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

kare matrisinde $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ elemanlarına bu A matrisinin köşegen(ya da esas köşegen) elemanları denir.

ii) Bir $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ kare matrisinin köşegen elemanları dışındaki diğer tüm elemanları sıfır ise bu A ya bir köşegen matris denir ve $A = \text{Köş}\{a_{11}, a_{22}, \dots , a_{nn}\}$ ile gösterilir.

iii) Bir köşegen matriste $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn} = \text{k}, \text{k} \in \mathbb{K}$ ise, matrise skaler matris denir.

iv) Köşegen elemanları 1 ve diğer elemanları 0 olan bir kare matrise birim matris denir ve $n-$ yinci mertebeden bir birim matris

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

şeklinde gösterilir. Herhangi bir $A \in \mathbb{K}_n^m$ matrisi için, $I_m A = A I_n = A$ eşitliği sağlanır (Hacısalihoğlu, HH., 1977).

Tanım 2.6 i) Bir $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ matrisinden aynı numaralı satır ve sütunların kendi aralarında yer değiştirmesiyle elde edilen matrisi A matrisinin transpozu denir ve $A^T = [a_{ij}]_{n\times m}$ ile gösterilir. Buna göre uygun mertebeden A ve B matrisleri için

$$(A+B)^T = A^T + B^T \quad \text{ve} \quad (AB)^T = B^T A^T$$

olduğu kolayca görülür.

ii) Eğer A bir reel kare matris olmak üzere $A^T = A$ ise, bu takdirde A matrisine bir simetrik matris denir.

iii) A ve B aynı mertebeden iki kare matris olmak üzere eğer $AB = BA$ eşitliği sağlanıyorsa, bu matrislere değişmelidir denir (Hacısalihoğlu, HH., 1977).

Tanım 2.7 $\{1,2,\dots n\}$ kümesinin kendisi üzerine tanımlı birebir ve örten bağıntısına veya buna eş değer olarak $1,2,\dots,n$ sayılarının yeniden bir sıralanmasına $\{1,2,\dots n\}$ kümesinin bir σ permütasyonu denir. Böyle bir permütasyon,

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ j_1 & j_2 & \dots & j_n \end{pmatrix}$$

veya kısaca

$$\sigma = j_1.j_2.\dots.j_n \quad , \; j_i = \sigma(i)$$

ile gösterilir. Bu şekildeki permütasyonların kümesi S_n ile gösterilir. S_n de gelişigüzel bir σ permütasyonu, örneğin $\sigma = j_1, j_2, \dots, j_n$ düşünüldüğünde σ da çift veya tek sayıda permütasyonlar olmasına göre σ ya çift veya tek permütasyon denir. O halde bir σ permütasyonunun işareti

$$sgn\sigma = \begin{cases} 1, & \text{eğer } \sigma \text{ çift ise} \\ -1, & \text{eğer } \sigma \text{ tek ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır ve $sgn\sigma$ ile gösterilir (Hacısalihoğlu, HH., 1977).

$A = [a_{ij}]_{n\times n}$ matrisi $\mathbb{K}$ cismi üzerinde tanımlı bir kare matris olsun. Bu takdirde A matrisinin her satırından ve her sütunundan yalnız ve yalnız bir eleman alınmak üzere n elemanın bir çarpımı göz önüne alınsın. Böyle bir çarpım $a_{1j_1}.a_{2j_2}.\ldots.a_{nj_n}$ şeklinde yazılır. Burada çarpanlar ardışık satırlardan gelir ve bu yüzden alt indisler $1, 2, \ldots, n$ doğal sayı sırasındadır. Çarpanlar farklı sütunlardan geldiğinden, ikinci alt indislerin dizisi S_n de bir $\sigma = j_1.j_2.\ldots.j_n$ permütasyonunu oluşturur. Tersine, S_n deki her bir permütasyon yukarıdaki şekilde bir çarpım tanımlar. Böylece A matrisi bu şekilde $n!$ tane çarpım kapsar.

Tanım 2.8 $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ kare matrisinin determinantı $\det(A)$ veya $|A|$ şeklinde gösterilir ve yukarıdaki her çarpanı $sgn\sigma$ ile çarpılan veya $n!$ tane çarpımların toplamıdır. Yani,

$$|A| = \sum_{\sigma}(sgn\sigma)a_{1j_1}.a_{2j_2}.\ldots.a_{nj_n}$$

veya

$$|A| = \sum_{\sigma\in S_n}(sgn\sigma)a_{1\sigma(1)}.a_{2\sigma(2)}.\ldots.a_{n\sigma(n)}$$

dir. Bu durumda 1×1 tipinde bir A matrisinin determinantı kendisidir, yani eğer $A = [a]$ ise, $\det(A) = |a| = a$ olur. Öte yandan 2×2 tipindeki bir A matrisi için

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21}$$

olur (Hacısalihoğlu, HH., 1977).

Tanım 2.9 i) $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ matrisinin keyfi bir a_{ij} elemanının $|M_{ij}|$ ile gösterilen minörü, A matrisinden i–yinci satırın ve j–yinci sütunun atılması ile oluşan alt kare matrisin determinantıdır.

ii) $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ matrisinin keyfi bir a_{ij} elemanının minörü $|M_{ij}|$ olsun. Bu durumda a_{ij} elemanının A_{ij} ile gösterilen kofaktörü (veya işaretli minörü),

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}.|M_{ij}|$$

olarak tanımlanır.

iii) $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ matrisinin determinantı herhangi bir satır(veya sütun) elemanlarının kendi kofaktörleriyle çarpılıp tüm elde edilen çarpanların toplanmasıyla hesaplanır. Başka bir deyişle herhangi i ve j $(i, j = 1,2,3, \dots, n)$ için

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}.A_{ik} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik}|M_{ik}| \tag{2.3}$$

veya

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}.A_{kj} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{kj}|M_{ik}| \tag{2.4}$$

olarak tanımlanır. Bu durumda her bir i için, (2.3) açılımına A matrisinin determinantının i–yinci satıra göre açılımı ve her bir j için, (2.4) açılımına ise A matrisinin determinantının j–yinci sütuna göre açılımı adı verilir.

iv) $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ matrisi için eğer $|A| = 0$ ise, A matrisine bir singüler matris ve $|A| \neq 0$ ise, A matrisine bir nonsingüler(veya regüler) matris denir (Hacısalihoğlu, HH., 1977).

Tanım 2.10 $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ matrisinde bir a_{ij} elemanının kofaktörü A_{ij} olmak üzere

$$\mathrm{Ek}(A) = [A_{ij}]^T = [A_{ji}]$$

matrisine A matrisinin ek matrisi denir ve

$$Ek(A) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

ile gösterilir (Hacısalihoğlu, HH., 1977).

Tanım 2.11 Herhangi bir $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ kare matrisi verildiğinde, eğer

$$A.B = B.A = I_n$$

olacak şekilde bir $B = [b_{ij}]_{n\times n}$ kare matrisi mevcut ise bu B matrisine A matrisinin inversi (tersi) denir ve $A^{-1} = B$ ile gösterilir (Hacısalihoğlu, HH., 1977).

Teorem 2.1 Bir $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ matrisi ile ek matrisinin çarpımı bir skaler matris olup,

$$A.\mathrm{Ek}(A) = \mathrm{Ek}(A).A = |A| \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = |A|I_n \tag{2.5}$$

ile verilir (Hacısalihoğlu, HH., 1977).

Teorem 2.2 Bir $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ nonsingüler matrisinin inversi,

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}.\mathrm{Ek}(A) \tag{2.6}$$

dır (Hacısalihoğlu, HH., 1977).

Teorem 2.3 i) Bir $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ nonsingüler matrisi için A^{-1} inversi tektir.

ii) A nonsingüler bir matris ise A^{-1} inversi de nonsingüler olup $(A^{-1})^{-1} = A$ dır.

iii) Eğer A ve B çarpıma uygun nonsingüler matrisler ise AB çarpımı da nonsingüler olup $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ dir.

iv) Eğer A matrisi nonsingüler ise A^T de nonsingüler olup $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ dir (Hacısalihoğlu, HH., 1977).

Tanım 2.12 i) Bir $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ kare matrisi için eğer $A^2 = A$ ise, bu takdirde A matrisine bir idempotent matris denir.

ii) $\mathbb{C}$ kompleks sayılar cismi üzerinde tanımlı bir A matrisinin elemanlarının yerlerine bunların eşlenikleri yazılarak elde edilen matrise A matrisinin eşleniği (eş matrisi) denir ve $\overline{A}$ ile gösterilir.

iii) $\mathbb{C}$ kompleks sayılar cismi üzerinde tanımlı bir A matrisi için eğer $\left(\overline{A}\right)^T = A$ ise, bu takdirde A matrisine bir hermityen matris denir ve $A^* = \left(\overline{A}\right)^T$ ile gösterilir.

iv) Bir A matrisi için eğer $AA^* = A^*A$ eşitliği sağlanıyorsa, bu takdirde A matrisine bir normal matris denir.

v) $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ nonsingüler bir matris olmak üzere, $A^{-1} = A^*$ (veya buna denk olarak $AA^* = A^*A = I$) ise A matrisine birimsel (unitary) matris denir.

vi) $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ bir kare matris olmak üzere, eğer $A^{-1} = A^T$ ise, bu takdirde A matrisine bir ortogonal matris denir (Hacısalihoğlu, HH., 1977).

Teorem 2.5 A ve B uygun mertebeden matrisler olmak üzere aşağıdaki eşitlikleri sağlanır (Hacısalihoğlu, HH., 1977).

i) $\left(\overline{A}\right)^T = \overline{(A^T)}$.

ii) $(A^*)^* = A$.

iii) $(A + B)^* = A^* + B^*$.

iv) $(AB)^* = B^*A^*$.

Tanım 2.13 i) $x_1, x_2, \dots, x_n$ vektörler kümesi verilmiş olsun. Eğer $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$ eşitliği ancak $a_1, a_2, \dots, a_n$ skalerlerinin tümü birden sıfır olduğunda sağlanıyorsa bu takdirde $x_1, x_2, \dots, x_n$ vektörlerine lineer bağımsızdır denir. Aksi durumda, yani, $a_1, a_2, \dots, a_n$ skalerlerinden en az biri sıfırdan farklı olmak üzere eğer $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$ eşitliği sağlanıyorsa bu takdirde $x_1, x_2, \dots, x_n$ vektörlerine lineer bağımlıdır denir.

ii) A matrisi $m \times n$ tipinde herhangi bir matris olsun. A matrisinin sütun vektörlerini $A_{*1}, A_{*2}, \dots, A_{*n}$ ile ve satır vektörlerini de $A_{1*}, A_{2*}, \dots, A_{m*}$ ile gösterelim. Bu takdirde A_{i*}, $i = 1, 2, \dots, m$ vektörleri arasından oluşturulan en büyük lineer bağımsız vektörler kümesinin eleman sayısına A matrisinin satır rankı ve A_{*j}, $j = 1, 2, \dots, n$ vektörleri arasından oluşturulan en büyük lineer bağımsız vektör kümesinin eleman sayısına ise A matrisinin sütun rankı denir (Hacısalihoğlu, HH., 1977).

Teorem 2.6 Bir matrisin herhangi iki satırının kendi aralarında yer değiştirmesi o matrisin satır rankını değiştirmez (Hacısalihoğlu, HH., 1977).

Teorem 2.7 i) Elemanter işlemler herhangi bir matrisin sütun rankını değiştirmez.
ii) Bir A matrisinin satır rankı sütun rankına eşittir (Hacısalihoğlu, HH., 1977).

Tanım 2.14 Herhangi bir A matrisinin rankı, satır ve sütun rankı olarak tanımlanır ve $\text{rank}(A)$ veya $r(A)$ şeklinde gösterilir (Hacısalihoğlu, HH., 1977).

Teorem 2.8 A bir matris olmak üzere $r(A) = r(A^T)$ dir (Hacısalihoğlu, HH., 1977).

Tanım 2.15 $n \times n$ tipindeki bir A matrisi için eğer $r(A) = n$ sağlanıyorsa A matrisine nonsingüler matris denir. Aksi durumda yani, $r(A) < n$ ise A matrisine singüler matris denir (Hacısalihoğlu, HH., 1977).

Tanım 2.16 i) $A \in \mathbb{K}_n^m$ matrisi $m \times n$ tipinde bir matris olsun. Bu takdirde $\mathcal{N}(A) = \{x: Ax = 0\}$ kümesine A marisinin null (sıfır) uzayı denir.

ii) $A \in \mathbb{K}_n^m$, $m \times n$ tipinde bir matris olsun. Bu takdirde $\Re(A) = \{y: Ax = y\}$ kümesine A matrisinin ranj (sütun) uzayı denir (Hacısalihoğlu, HH., 1977).

Teorem 2.9 $m \times n$ tipindeki bir A matrisi için eğer $r(A) = r$ ise, bu takdirde aşağıdaki şartları sağlayan nonsingüler P ve Q matrisleri mevcuttur. I, $r \times r$ boyutlu bir birim matris olmak üzere aşağıdaki durumlar sağlanır (Hacısalihoğlu, HH., 1977).

i) $m = n = r \Longrightarrow PAQ = I,$

ii) $m = r < n \Longrightarrow PAQ = [I, 0],$

iii) $m > r,\ n > r \Longrightarrow PAQ = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$

Teorem 2.10 Çarpıma uygun A ve B matrisleri için AB çarpımının rankı A ve B matrislerinin ranklarını geçemez. Başka bir deyişle,

$$r(AB) \leq \min\{r(A),\ r(B)\} \tag{2.7}$$

rank eşitsizliği geçerlidir (Hacısalihoğlu, HH., 1977).

2.2 Matrislerin Genelleştirilmiş İnversleri

Bu kısımda çalışmamız boyunca sık sık isimlerini zikredeceğimiz matrisler için bazı genelleştirilmiş inversler ve çeşitli özellikleri verilecektir.

Tanım 2.17 $\mathbb{C}_n^m$, kompleks sayılar cismi üzerinde tanımlı $m \times n$ tipindeki tüm matrislerin kümesini göstersin. Bir $A \in \mathbb{C}_n^m$ matrisi için aşağıdaki dört şartı (Moore–Penrose şartları) sağlayan bir X matrisine A matrisinin bir Moore–Penrose inversi denir ve A^{+} veya $A^{\dagger}$ sembollerinden birisi ile gösterilir (Pringle ve Rayner., 1971).

(i) $AXA = A,$

(ii) $XAX = X,$

(iii) $(AX)^* = AX,$

(iv) $(XA)^* = XA.$ (2.8)

Bu durumda eğer X matrisi sadece (i) şartını sağlıyorsa, bu X matrisine, A matrisinin bir genelleştirilmiş inversi (iç inversi) denir ve A^{-} veya $A^{(1)}$ ile gösterilir. Sadece (ii) şartını sağlayan X matrisine, A matrisinin bir dış inversi denir ve $A^{=}$ veya $A^{(2)}$ ile gösterilir. Hem (i) hem de (ii) şartını sağlayan X matrisine ise, A matrisinin bir yansımalı genelleştirilmiş inversi denir ve $A^{(1,2)}$ veya A_r^{-} ile gösterilir.

Bu tanıma göre eğer A nonsingüler bir matris ise A^{-1} matrisinin Moore–Penrose inversin şartlarını sağlayacağı açıktır, yani $A^{-1} = A^{\dagger}$ dir. Bununla birlikte, eğer A matris bir singüler matris veya kare olmayan bir matris ise, bu durumda Moore–Penrose şartlarını sağlayan bir $A^{\dagger}$ matrisinin mevcut olup olmadığı sorusu akla gelebilir. Bu sorunun cevabı her A matrisi için bir $A^{\dagger}$ matrisinin mevcut ve tek olduğu şeklindedir. Aşağıda bu durum gösterilecektir. Ayrıca bu şekilde tanımlanan Moore–Penrose inversin bazı önemli özellikleri verilecektir.

Teorem 2.11 Eğer A matrisi $m \times n$ tipinde bir sıfır matris ise, $A^{\dagger}$ matrisi de $n \times m$ tipinde sıfır matristir (Pringle ve Rayner., 1971).

Teorem 2.12 Her A matrisi için Moore–Penrose şartlarını sağlayan bir ve yalnız bir tek $A^{\dagger}$ matrisi vardır (Pringle ve Rayner., 1971).

İspat: Eğer $A = 0$ ise $A^{\dagger} = 0$ olacağından $A \neq 0$ alınabilir. A matrisi r ranklı bir matris olsun. Bu durumda A matrisi

$$A = BC \tag{2.9}$$

olarak parçalanabilir, burada B matrisi $m \times r$ tipinde r ranklı bir matris ve C matrisi de $r \times n$ tipinde r ranklı bir matris olup, B^*B ve CC^* matrisleri nonsingüler matrislerdir. Bu durumda eğer $A^{\dagger}$ matrisi

$$A^{\dagger} = C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^* \tag{2.10}$$

olarak alınırsa, A^{+} matrisi istenen Moore–Penrose şartlarını sağlar. Gerçekten

(i) $AA^{\dagger}A = (BC)C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^*(BC)$

$$= B(CC^*)(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}(B^*B)C = BC = A,$$

(ii) $A^{\dagger}AA^{\dagger} = C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^*(BC)C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^*$

$$= C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}(B^*B)(CC^*)(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^*$$

$$= C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^* = A^{+},$$

(iii) $(AA^{\dagger})^* = [(BC)C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^*]^* = B(B^*B)^{-1}(CC^*)^{-1}(CC^*)B^*$

$$= B(B^*B)^{-1}B^* = B(CC^*)(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^*$$

$$= (BC)C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^* = AA^{\dagger},$$

(iv) $(A^{\dagger}A)^* = [C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^*(BC)]^*$

$$= C^*(B^*B)(B^*B)^{-1}(CC^*)^{-1}C$$

$$= C^*(CC^*)^{-1}C = C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}(B^*B)C$$

$$= C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^*(BC) = A^{\dagger}A$$

olduğu görülür. Moore–Penrose inversin tek olduğunu göstermek için A matrisinin Moore–Penrose şartlarını sağlayan herhangi iki $A_1^\dagger$ ve $A_2^\dagger$ Moore–Penrose inversinin mevcut olduğunu varsayalım. Bu durumda,

$$A_1^\dagger = A_1^\dagger A A_1^\dagger = A_1^\dagger (A A_1^\dagger)^* = A_1^\dagger (A_1^\dagger)^* A^* = A_1^\dagger (A_1^\dagger)^* (A A_2^\dagger A)^*$$

$$= A_1^\dagger (A_1^\dagger)^* A^* (A_2^\dagger)^* A^* = A_1^\dagger (A A_1^\dagger)^* (A A_2^\dagger)^* = A_1^\dagger A A_1^\dagger A A_2^\dagger = A_1^\dagger A A_2^\dagger$$

$$= A_1^\dagger A \left(A_2^\dagger A A_2^\dagger\right) = (A_1^\dagger A)^* \left(A_2^\dagger A\right)^* A_2^\dagger = A^* (A_1^\dagger)^* A^* (A_2^\dagger)^* A_2^\dagger$$

$$= (A A_1^\dagger A)^* (A_2^\dagger)^* A_2^\dagger = A^* (A_2^\dagger)^* A_2^\dagger = (A_2^\dagger A)^* A_2^\dagger = A_2^\dagger A A_2^\dagger = A_2^\dagger$$

olur, yani $A^\dagger$ matrisi tektir.

Teorem 2.13 $m \times n$ tipinde bir A matrisinin Moore–Penrose inversi $n \times m$ tipindedir (Pringle ve Rayner., 1971).

Teorem 2.14 i) $m \times n$ tipinde bir A matrisinin tüm elemanları 1 ise, $A^\dagger = \frac{1}{m.n} A^*$ dir.
ii) $a,\ n \times 1$ tipinde bir sütun vektörü ise, bu durumda $a^\dagger = (a^* a)^{-1} a^*$ şeklindedir.

iii) $a,\ 1 \times n$ tipinde bir satır vektörü ise, bu durumda $a^\dagger$, $a^\dagger = a^* (a a^*)^{-1}$ şeklindedir (Pringle ve Rayner., 1971).

Teorem 2.15 A herhangi bir matris olmak üzere

$$(A^*)^\dagger = (A^\dagger)^* \qquad (2.11)$$

eşitliği geçerlidir (Pringle ve Rayner., 1971).

İspat: (2.9) bağıntısındaki gibi $A = BC$ alınsın. Bu durumda $A^* = C^* B^*$ olduğundan,

$$A^\dagger = C^* (CC^*)^{-1} (B^* B)^{-1} B^* \quad \text{ve} \quad (A^\dagger)^* = B (B^* B)^{-1} (CC^*)^{-1} C$$

elde edilir ki, bu da A^* matrisinin Moore–Penrose inversidir. Gerçekten,

(i) $A^* (A^*)^\dagger A^* = C^* B^* B (B^* B)^{-1} (CC^*)^{-1} C C^* B^* = C^* B^* = A^*$,

(ii) $(A^*)^+ A^* (A^*)^\dagger = B (B^* B)^{-1} (CC^*)^{-1} C C^* B^* B (B^* B)^{-1} (CC^*)^{-1} C$

$$= B (B^* B)^{-1} (CC^*)^{-1} C = (A^*)^\dagger,$$

(iii) $[A^* (A^*)^\dagger]^* = [(C^* B^*) B (B^* B)^{-1} (CC^*)^{-1} C]^* = [C^* (CC^*)^{-1} C]^*$

$$= C^* (CC^*)^{-1} C = C^* (B^* B)(B^* B)^{-1} (CC^*)^{-1} C = A^* (A^*)^\dagger,$$

(iv) $[(A^*)^\dagger A^*]^* = [B(B^*B)^{-1}(CC^*)^{-1}C(C^*B^*)]^* = [B(B^*B)^{-1}B^*]^*$

$$= B(B^*B)^{-1}B^* = B(B^*B)^{-1}(CC^*)^{-1}(CC^*)B^* = (A^*)^\dagger A^*$$

olur. Böylece, $(A^*)^\dagger = B(B^*B)^{-1}(CC^*)^{-1}C$ elde edilir. Buradan da $(A^*)^\dagger = (A^\dagger)^*$ olduğu görülür ve ispat tamamlanır.

Teorem 2.16 Bir matrisin Moore–Penrose inversinin Moore–Penrose inversi matrisin kendisine eşittir. Yani, bir A matrisi için, $(A^\dagger)^\dagger = A$ dirr (Pringle ve Rayner., 1971).

Teorem 2.17 Herhangi bir A matrisi için $r(A) = r(A^\dagger)$ eşitliği gerçeklenir (Pringle ve Rayner., 1971).

İspat: Teorem 2.10 $AA^\dagger A = A$ ve$A^\dagger AA^\dagger = A^\dagger$ eşitliklerine uygulanırsa sırasıyla

$$r(A) = r(AA^\dagger A) \leq \min\{r(A),\ r(A^\dagger)\} \leq r(A^\dagger)$$

ve

$$r(A^\dagger) = r(A^\dagger AA^\dagger) \leq \min\{r(A),\ r(A^\dagger)\} \leq r(A)$$

elde edilir. Bu iki eşitsizlikten istenen sonuç sağlanır.

Bu teoremin sonucu olarak eğer A matrisinin rankı r ise, bu takdirde $A^\dagger$, $AA^\dagger$, $A^\dagger A$, $AA^\dagger A$ ve $A^\dagger AA^\dagger$ matrislerinin her birinin rankının da r olduğu görülür.

Teorem 2.18 Eğer A simetrik ve idempotent bir matris ise, bu takdirde $A^\dagger = A$ dir (Pringle ve Rayner., 1971).

Teorem 2.19 Eğer $B = \text{Köş}\{\mathrm{b}_{11}, \mathrm{b}_{22}, \ldots, \mathrm{b}_{nn}\}$ ise, bu takdirde B matrisinin Moore–Penrose inversi $B^\dagger$, i–yinci satır ve i–yinci sütunda yer alan köşegen elemanı $\mathrm{b}_{ii} \neq 0$ iken b_{ii}^{-1} ve $\mathrm{b}_{ii} = 0$ iken 0 olan bir köşegen matristir (Pringle ve Rayner., 1971).

Teorem 2.19

i) A, $m \times n$ matrisi tam satır ranklı ise, $A^\dagger = A^*(AA^*)^{-1}$ ve $AA^\dagger = I_m$,

ii) A, $m \times n$ matrisi tam sütun ranklı ise, $A^\dagger = (A^*A)^{-1}A^*$ ve $A^\dagger A = I_n$ olur (Pringle ve Rayner., 1971).

İspat: Her iki durum için verilen $A^\dagger$ matrisinin Moore–Penrose şartlarını sağladığını göstermek yeterlidir. Bu durumda,

i) $AA^\dagger A = AA^*(AA^*)^{-1}A = (AA^*)(AA^*)^{-1}A = A$,

$$A^\dagger A A^\dagger = A^*(AA^*)^{-1}AA^*(AA^*)^{-1}$$
$$= A^*(AA^*)^{-1}(AA^*)(AA^*)^{-1} = A^*(AA^*)^{-1} = A^\dagger,$$
$$(AA^\dagger)^* = (AA^*(AA^*)^{-1})^* = ((AA^*)(AA^*)^{-1})^* = I^* = I$$
$$= (AA^*)(AA^*)^{-1} = AA^*(AA^*)^{-1} = AA^\dagger,$$
$$(A^\dagger A)^* = (A^*(AA^*)^{-1}A)^* = A^*(AA^*)^{-1}A = A^\dagger A$$

olacaktır.

ii) $AA^\dagger A = A(A^*A)^{-1}A^*A = A(A^*A)^{-1}(A^*A) = A,$
$$A^\dagger A A^\dagger = (A^*A)^{-1}A^*A(A^*A)^{-1}A^*$$
$$= (A^*A)^{-1}(A^*A)(A^*A)^{-1}A^* = (A^*A)^{-1}A^* = A^\dagger,$$
$$(AA^\dagger)^* = (A(A^*A)^{-1}A^*)^* = A(A^*A)^{-1}A^* = AA^\dagger,$$
$$(A^\dagger A)^* = ((A^*A)^{-1}A^*A)^* = ((A^*A)^{-1}(A^*A))^* = I^* = I$$
$$= (A^*A)^{-1}(A^*A) = (A^*A)^{-1}A^*A = A^\dagger A$$

dir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 2.20 $B \neq 0$ ve $C \neq 0$ olmak üzere B ve C matrisleri sırasıyla $m \times r$ ve $r \times n$ tipinde olmak üzere $r(B) = r(C) = r$ olsun. Bu takdirde,

$$(BC)^\dagger = C^\dagger B^\dagger \tag{2.12}$$

eşitliği sağlanır (Pringle ve Rayner., 1971).

İspat: B matrisi sütun ranklı bir matris ve C matrisi ise satır ranklı bir matris olduğundan Teorem 2.19 a göre

$$C^\dagger = C^*(CC^*)^{-1}$$

ve

$$B^\dagger = (BB^*)^{-1}B^*$$

olacaktır ve buradan da

$$C^\dagger B^\dagger = C^*(CC^*)^{-1}(BB^*)^{-1}B^*$$

elde edilir. Bu ise zaten $(BC)^\dagger$ matrisidir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

2.3 Bir Matrisin Çeşitli İnversleri ve Özellikleri

$\mathbb{C}_n^m$ $m \times n$ tipindeki kompleks matrislerinin kümesi olsun. A^*, $\Re(A)$ ve $r(A)$ sembolleri bir $A \in \mathbb{C}_n^m$ matrisinin sırasıyla, eşlenik devriğini, ranj uzayını (sütun uzayı) ve rankını göstersin. Ayrıca, I_n, n-yinci mertebeden birim matrisi göstersin.

DMP invers tanımına geçmeden önce, bazı genelleştirilmiş invers kavramlarını hatırlamak daha ilginç olacaktır. Bir önceki kısımda belirtildiği gibi bir $A \in \mathbb{C}_n^m$ matrisinin $A^\dagger \in \mathbb{C}_n^m$ ile gösterilen Moore-Penrose inversi aşağıdaki eşitlikleri sağlayan ve tek türlü olarak mevcut olan matristir:

$$AA^\dagger A = A \ , \ A^\dagger AA^\dagger = A^\dagger, \quad AA^\dagger = (AA^\dagger)^*, \ A^\dagger A = (A^\dagger A)^*$$

Moore-Penrose inversin önemli bir özelliği ortogonal izdüşümleri temsil etmek için kullanılabilmesidir. Örneğin $P_A = AA^\dagger$ ve $P_{A^*} = A^\dagger A$ sırasıyla $\Re(A)$ ve $\Re(A^*)$ üzerindeki ortogonal izdüşümlerdir.

Diğer bir önemli genelleştirilmiş invers ise Drazin inverstir. Bu inversin mevcut olması için matrisin bir kare matris olması gereklidir.

Tanım 2.18 Bir $A \in \mathbb{C}_n^n$ matrisinin Drazin inversi aşağıdaki üç denklemi sağlayan ve tek türlü mevcut olan bir $A^d \in \mathbb{C}_n^n$ matrisidir:

$$A^d AA^d = A^d, \ AA^d = A^d A, \ A^{l+1}A^d = A^{l+1}, \text{her } l \geq k \text{ için}, \tag{2.13}$$

burada k, $r(A^{k+1}) = r(A^k)$ eşitliğini sağlayan en küçük pozitif tam sayıdır. k sayısına A matrisinin indeksi denir ve $k = ind(A)$ ile gösterilir. Açıkça görülür ki $ind(A) = 0$ olması için gerek ve yeter şart A matrisinin nonsingüler olmasıdır. Öte yandan $AA^d = A^d A$ olması durumunda her $l \geq k$ için $A^{l+1}A^d = A^{l+1}$ eşitliğinin $A^d A^{l+1} = A^{l+1}$ eşitliğine denk olduğu açıktır.

Tanım 2.19 Bir A matrisi için eğer $ind(A) = 1$, yani $r(A^2) = r(A)$ ise bu durumda Drazin inverse grup invers adı verilir. Yani bir A matrisinin grup inversi aşağıdaki denklemleri sağlayan ve tek türlü olarak mevcut olan bir $A^\# \in \mathbb{C}_n^n$ matrisidir:

$$AA^\# A = A \quad A^\# AA^\# = A^\# \quad AA^\# = A^\# A \tag{2.14}$$

Burada hemen belirtelim ki her kare matrisin bir grup inverse sahip olması gerekmez. Ancak verilen bir A matrisinin böyle bir inverse sahip olması için gerek ve yeter koşul indeksinin 1 olması veya başka bir deyişle $r(A^2) = r(A)$ olmasıdır. İndeksi 1 olan matrislerin kümesi $\mathbb{C}_n^{CM}$ ile gösterilecektir, yani

$$\mathbb{C}_n^{CM} = \{ A \in \mathbb{C}_n^n : r(A^2) = r(A)\} \tag{2.15}$$

dir. İndeksi 1 olan matrislere grup matrisler veya çekirdek matrisler adı verilmektedir.

$\mathbb{C}_{m\times n}^{Pl}$, $\mathbb{C}_n^P$, $\mathbb{C}_n^{OP}$, $\mathbb{C}_n^{TM}$ ve $\mathbb{C}_n^{EP}$ ile sırasıyla kısmi izometrilerin, izdüşümlerin (idempotent matrislerin), ortogonal izdüşümlerin, (Hermityen idempotent matrislerin), tripotent matrislerin ve EP (ranj-Hermityen) matrislerin kümelerini gösterelim, yani

$$\mathbb{C}_{m,n}^{Pl} = \{ A \in \mathbb{C}_n^m : AA^*A = A\} = \{A \in \mathbb{C}_n^m : A^\dagger = A^*\}, \tag{2.16}$$

$$\mathbb{C}_n^P = \{A \in \mathbb{C}_n^n : A^2 = A\}, \tag{2.17}$$

$$\mathbb{C}_n^{OP} = \{A \in \mathbb{C}_n^n : A^2 = A = A^*\} = \{A \in \mathbb{C}_n^n : A^2 = A = A^\dagger\} , \tag{2.18}$$

$$\mathbb{C}_n^{TM} = \{A \in \mathbb{C}_n^n : A^3 = A\}, \tag{2.19}$$

$$\mathbb{C}_n^{EP} = \{A \in \mathbb{C}_n^n : AA^+ = A^+A\} = \{A \in \mathbb{C}_n^n : \mathfrak{R}(A) = \mathfrak{R}(A^*)\}, \tag{2.20}$$

olsun.

Rankı r olan her $A \in \mathbb{C}_n^n$ matrisi $U \in \mathbb{C}_n^n$ uniter matris olmak üzere,

$$A = U\begin{pmatrix} \Sigma K & \Sigma L \\ 0 & 0 \end{pmatrix}U^* \tag{2.21}$$

biçiminde gösterilebilir, burada $\Sigma = \text{köş}\{\sigma_1 I_{r_1} \ldots\ldots \ \sigma_t I_{r_t}\}$ köşegen matrisi A matrisinin singüler değerlerinden oluşan bir köşegen matris, $\sigma_1 > \sigma_2 > \cdots > \sigma_t > 0$ ve $r_1 + r_2 + \cdots + r_t = r$ olmak üzere $K \in \mathbb{C}_{r,r}$ ve $L \in \mathbb{C}_{r,n-r}$ matrisleri

$$KK^* + LL^* = I_r \tag{2.22}$$

eşitliğini sağlar. Burada önemli olan şudur; eğer A matrisi nonsingüler bir matris ise, yani $r = n$ ise (2.21) deki parçalı matrisin alt satırı ve sağ sütunu yok olur ve $V = UK^*$ olmak üzere $A = U\Sigma V^*$ olacaktır. Bu durumda (2.21) eşitliğinden

$$A^\dagger = U\begin{pmatrix} K^*\Sigma^{-1} & 0 \\ L^*\Sigma^{-1} & 0 \end{pmatrix} U^* \tag{2.23}$$

sonucu çıkmaktadır. Ayrıca eğer A matrisinin indeksi bir ise, bu takdirde

$$A^\# = U\begin{pmatrix} K^{-1}\Sigma^{-1} & K^{-1}\Sigma^{-1}K^{-1}L \\ 0 & 0 \end{pmatrix}U^* \tag{2.24}$$

yazılabilir. Daha sonraki değerlendirmelerde yardımcı olacak olan aşağıdaki lemma (2.21) ve (2.23) gösterimleri ile (2.16)-(2.20) ifadelerinin doğrudan birleştirilmesiyle elde edilmiştir.

Lemma 2.1 $A \in \mathbb{C}_n^n$ matrisi r ranklı olmak üzere (2.21) deki gösterime sahip olsun. Bu takdirde aşağıdaki durumlar gerçeklenir (Baksalary and Trenkler., 2010):

(i) $A \in \mathbb{C}_{n\times n}^{Pl} \Leftrightarrow \Sigma = I_r,$

(ii) $A \in \mathbb{C}_n^P \Leftrightarrow \Sigma K = I_r$,

(iii) $A \in \mathbb{C}_n^{OP} \Leftrightarrow L = 0, \Sigma = I_r,\ K = I_r,$

(iv) $A \in \mathbb{C}_n^{TM} \Leftrightarrow (\Sigma K)^2 = I_r,$

(v) $A \in \mathbb{C}_n^{EP} \Leftrightarrow \mathrm{L} = 0$.

Tanım 2.20 $A \in \mathbb{C}_n^n$ kare matrisi verilmiş olsun. Bu durumda

$$\text{(i)} \quad AA^{\oplus} = P_A \quad \text{ve} \quad \text{(ii)} \quad \mathfrak{R}(A^{\oplus}) \subseteq \mathfrak{R}(A) \tag{2.25}$$

şartlarını sağlayan bir $A^{\oplus} \in \mathbb{C}_n^n$ matrisine A matrisinin çekirdek inversi adı verilir (Baksalary veTrenkler., 2010).

Aşağıda çekirdek inversin çeşitli özellikleri verilecektir. Bu özellikler çekirdek invers ile bilinen çeşitli matris sınıfları arasındaki ilişkiyi ortaya koymada önemli rol oynamaktadır. Yukarıda da ifade belirtildiği gibi, bir matrisin Moore–Penrose inversi ve grup inversi tektir. Aynı özelliğin Çekirdek invers için de geçerli olduğu istenen bir durumdur.

Lemma 2.2 $A \in \mathbb{C}_n^n$ matrisi (2.21) şeklinde verilmiş olsun. Bu takdirde A matrisinin çekirdek inversi

$$A^{\oplus} = U \begin{pmatrix} (\Sigma K)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^* \tag{2.26}$$

şeklindedir (Baksalary ve Trenkler., 2010).

İspat. Öncelikle (2.2) – (.223) ifadelerinden

$$P_A = U \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^* \tag{2.27}$$

eşitliğinin yazılabildiğini belirtelim. Şimdi, $B \in \mathbb{C}_n^n$ matrisinin $W \in \mathbb{C}_r^r$ ve $Z \in \mathbb{C}_{n-r}^{n-r}$ A matrisinin çekirdek inversi olmak üzere

$$B = U\begin{pmatrix} W & X \\ Y & Z \end{pmatrix}U^* \tag{2.28}$$

şeklinde parçalanabildiğini farz edelim. Doğrudan hesaplamayla kolayca gösterilebilir ki, Tanım 2.18 de ifade edilen (i) koşulunun sağlanması için gerek ve yeter şart $\Sigma KW + \Sigma LY = I_r$ ve $KX + LZ = 0$ olmasıdır. Öte yandan $\Re(A^{\oplus}) \subseteq \Re(A)$ bağıntısı denk olarak $P_A A^{\oplus} = A^{\oplus}$ şeklinde de ifade edilebildiğinden, Tanım 2.18 de verilen (ii) koşulunun sağlanması için gerek ve yeter şart $Y = 0,\ Z = 0$ olmasıdır. Dolayısıyla, $\Sigma KW = I_r$, $KX = 0$ elde edilir. Bu koşullardan ilki, K matrisinin nonsingüler olduğunu ikincisi ise $X = 0$ olduğunu gösterir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Lemma 2.2 den kolayca görülür ki, her A kare matrisi çekirdek inverse sahip değildir ve $A^{\oplus}$ nın varlığı için gerek ve yeter koşul (2.21) gösterimindeki K matrisinin nonsingüler olmasıdır. Daha önce belirtildiği gibi $r(K) = r$ koşulu A matrisinin indeksinin bir olmasına ve dolayısıyla A matrisinin bir çekirdek matris olmasına eşdeğerdir. Bu durum $A^{\oplus}$ ile ilgili olarak 'Çekirdek invers' teriminin kullanımına ilham kaynağı olmuştur.

Öte yandan $r(A^2) = r(A)$ koşulu $A^{\#}$ grup inversinin varlığı için gerek ve yeter şart olduğundan $A^{\oplus}$ Çekirdek inversinin grup invers ile çakışıp çakışmadığını sorgulamak da doğaldır. Genel olarak bu durum doğru değildir. Örneğin

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

idempotent matrisi için $A^{\#} = A$ olmasına rağmen

$$A^{\dagger} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix},$$

ve buradan da

$$A^{\oplus} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

olduğu görülebilir. Ayrıca, (2.24) ve (2.26) karşılaştırıldığında $A^{\oplus} = A^{\#}$ durumunun olması için gerek ve yeter koşul $L = 0$ olması yani, A nın bir EP matris olması sonucuna götürür.

Aşağıdaki teoremler bir A matrisinin $A^{\oplus}$ çekirdek inversinin çeşitli karakterizasyonlarını ortaya koymaktadır.

Teorem 2.21 $A \in \mathbb{C}_n^{CM}$ ve $m \in \mathbb{N}$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki eşitlikler gerçeklenir (Baksalary ve Trenkler., 2010):

(i) $A^{\oplus} = A^{\#}P_A$,
(ii) $A^{\oplus} \in \mathbb{C}_n^{EP}$,
(iii) $(A^{\oplus})^{\dagger} = AP_A$,
(iv) $(A^{\oplus})^{\oplus} = AP_A$,
(v) $A^{\oplus} \in A\{1,2\}$,
(vi) $(A^{\oplus})^2 A = A^{\#}$,
(vii) $(A^{\oplus})^m = (A^m)^{\oplus}$,
(viii) $A^{\oplus}A = A^{\#}A$.

İspat. (i) şıkkı, (2.24), (2.26) ve (2.27) iadelerinin doğrudan bir sonucudur. (2.26) dan

$$(A^{\oplus})^{\dagger} = U\begin{pmatrix} \Sigma K & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}U^* \tag{2.29}$$

ve dolayısıyla $A^{\oplus}(A^{\oplus})^{\dagger} = (A^{\oplus})^{\dagger}A^{\oplus} = P_A$ elde edilir ki bu da teoremin (ii) şıkkıdır. Bir sonraki koşul da (2.21), (2.22) ve (2.29) eşitliklerinden elde edildiği gibi doğrudan doğruya kurulur. Öte yandan teoremin (i) şıkkından $(A^{\oplus})^{\oplus} = (A^{\oplus})^{\#}P_{A^{\oplus}}$ olduğu görülür, burada kolaylıkla doğrulanabileceği gibi $(A^{\oplus})^{\#}$ (2.29) da verilen $(A^{\oplus})^{+}$ ile aynıdır ve dolayısıyla $P_{A^{\oplus}} = P_A$ ile aynı biçimdedir. Böylelikle (iv) koşulunun geçerliliği doğrudan görülür. (v) şıkkının ispatı teoremin (i) şartının $AA^{\oplus}A = AA^{\#}P_AA$ ve $A^{\oplus}AA^{\oplus} = A^{\#}P_AAA^{\#}P_A$ olmasını gerektirdiği gerçeğine dayanır. Bu eşitliklerin birincisinden $AA^{\oplus}A = AA^{\#}A = A$ olduğu ve ikincisinden $A^{\oplus}AA^{\oplus} = A^{\#}AA^{\#}P_A = A^{\oplus}$ olduğu elde edilir. Ayrıca (vi) koşulunu sağlamak için (2.21) ve (2.27) ifadelerinin kullanımıyla yapılan basit hesaplamalardan sonra

$$(A^{\oplus})^2 A = U\begin{pmatrix} (\Sigma K)^{-1} & (\Sigma K)^{-2}\Sigma L \\ 0 & 0 \end{pmatrix}U^* ,$$

elde edilir ki sağ taraftaki matrisin (2.24) te verilen $A^{\#}$ matrisinin başka bir formunun olmasına yol açtığı gözlemlenir. Son iki koşulun ispatları ise teoremin (i) şıkkına dayanmaktadır. (viii) koşulunun geçerliliği kolayca görülürken (vii) koşulunun ispatı daha içeriklidir. Öncelikle Teorem 2.1 in (i) şıkkından $(A^{\oplus})^m = (A^{\#}P_A)^m$ elde edilir. Bundan dolayı (2.24) ve (2.27) eşitlikleri kullanılarak

$$(A^{\oplus})^m = U\begin{pmatrix} (\Sigma K)^{-m} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}U^* \tag{2.30}$$

olduğu görülür. Öte yandan, $(A^m)^\# = (A^\#)^m$ eşitliğinin belirlenen özelliği göze alındığında $(A^m)^{\oplus} = (A^\#)^m P_{A^m}$ denklemi elde edilir. Bununla beraber A matrisinin indeksi bir olduğundan, $P_{A^m} = P_A$ yazılabilir. Bunun sonucu olarak $(A^m)^{\oplus} = (A^\#)^m P_A$ yazılabilir. Buradan da $(A^m)^{\oplus}$ nin (2.30) daki matris ile aynı forma sahip olduğu gösterilmiş olur ve böylece de ispat tamamlanır.

Teorem 2.21 in (iii) şıkkından $A^{\oplus} = (A^2 A^\dagger)^\dagger$ elde edilir ki bu da (i) şıkkında verilen Çekirdek invers için alternatif bir formüldür. Ayrıca, Teorem 2.21 ile ilgili gözlemler aşağıda verilmiştir. Bunlardan ilki, EP sizlik özelliği Lemma 2.1 de meydana gelen yegane özelliktir ki bu $A^{\oplus}$ nın da sahip olup olmadığına bakılmaksızın A nın sahip olduğu tek özelliğin EP-sizlik özelliğidir. Örneğin, $A^{\oplus}$ matrisinin r-potent, yani $(A^{\oplus})^r = A^{\oplus}, r \geq 2$ olması için gerek ve yeter şart A matrisinin r-potent olmasıdır. Özellik olarak eğer $A^{\oplus}$ bir izdüşüm ise, bu takdirde bir ortogonal izdüşüm olacaktır.

Tanım 2.20 nin $AA^{\oplus}$ matrisinin $\Re(A)$ üzerindeki ortogonal izdüşüm olmasını istemesine rağmen, Teorem 2.21 in (viii) şıkkından, $A^{\oplus}A$ nın aynı zamanda idempotent olduğu ancak Hermityen olmasının gerekmediği de dikkate değerdir. Aslında $A^{\oplus}A$, $AA^\# = A^\# A$ ile çakışan $\Re(A)$ üzerine bir eğik izdüşümdür. Aşağıdaki teorem, $A^{\oplus}$ matrisinin A matrisinin çeşitli dönüşümlerine eşit olması için gerek ve yeter koşulları ortaya koyar.

Teorem 2.22 $A \in \mathbb{C}_n^{CM}$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler gerçeklenir (Baksalary ve Trenkler., 2010):

(i) $A^{\oplus} = 0 \Leftrightarrow A = 0$,
(ii) $A^{\oplus} = P_A \Leftrightarrow A \in \mathbb{C}_n^{P}$,
(iii) $A^{\oplus} = A^\dagger \Leftrightarrow A \in \mathbb{C}_n^{EP}$,
(iv) $A^{\oplus} = A^\# \Leftrightarrow A \in \mathbb{C}_n^{EP}$,
(v) $A^{\oplus} = A\, A \in \mathbb{C}_n^{TM} \cap \mathbb{C}_n^{EP}$,
(vi) $A^{\oplus} = A^* \Leftrightarrow A \in \mathbb{C}_{n\times n}^{Pl} \cap \mathbb{C}_n^{EP}$.

İspat: (i) şıkkının gereklilik kısmını oluşturmak için, Teorem 2.21 in (i) şıkkından $A^{\oplus} = 0 \Longrightarrow A^\# P_A = 0$ yazılabileceğine dikkat edelim. Sağ taraftaki ifadeyi A ile sağdan ve soldan çarparak $A = 0$ olduğu görülür. (i) şıkkının yeterlilik kısmı ise Tanım 2.18 (ii) koşulunun doğrudan bir sonucudur. Öte yandan (2.26) ve (2.27) ifadeleri ve Lemma 2.1 in (ii) şıkkının birleştirilmesiyle (ii) elde edilir. (2.23) ve (2.26) ifadeleri kullanılarak, $A^{\oplus} = A^{\dagger}$ olması için gerek ve yeter şartın $L = 0$ ve $(\Sigma K)^{-1} = K^{*}\Sigma^{-1}$ olduğu gösterilebilir. Bununla birlikte, (2.22) eşitliğinin ışığı altında, $L = 0 \Longrightarrow K^{*} = K^{-1}$ olduğu ve dolayısıyla bu ilişkilerin ikincisinin her zaman sağlandığı görülür. Benzer şekilde (iv) ifadesinin sol tarafındaki koşulun sağlanması için gerek ve yeter şart $L = 0$ ve $(\Sigma K)^{-1} = K^{-1}\Sigma^{-1}$ olmasıdır ki bu da yalnızca birinci koşula indirgenebilen bağlaç olması durumunda geçerlidir.

(2.21) ve (2.26) ifadelerinin kullanımıyla yapılan doğrudan hesaplamalar, $A^{\oplus} = A$ olması için gerek ve yeter şart $L = 0$ ve $(\Sigma K)^{-1} = \Sigma K$ iken $A^{\oplus} = A^{*}$ olması için gerek ve yeter şart $L = 0$ ve $(\Sigma K)^{-1} = K^{*}\Sigma$ olduğunu gösterir. Hem Σ ve hem de K matrislerinin nonsingüler olduğu gerçeğini kullanarak, birinci durumda $L = 0$ ın $(\Sigma K)^{2} = I_r$ ile ve ikinci durumda ise $\Sigma = I_r$ ile birleştirileceği sonucuna varılır. Buradan, teoremin (v) ve (vi) şıklarındaki ifadeler Lemma 2.1 den kolaylıkla elde edilebilir ve böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 2.22 nin (v) şıkkından $A^{\oplus} = A$ olması durumunda A matrisinin öz değerlerinin {-1, 0, 1} kümesine ait olduğu görülür bu ise herhangi bir tripotent matrisin özdeğerlerinin kısıtlı olduğunu gösterir. Bu durumla ilgili bir başka gözlem ise bir matrisin tripotent olması için gerek ve yeter şart iki ayrık idempotent matrisin farkı olarak ifade edilebilmesidir. Sonuç olarak söylenebilir ki $A^{\oplus} = A$ olması için gerek ve yeter şart $A \in \mathbb{C}_n^{EP}$ olması ve $A = P_1 - P_2$ olacak şekilde şekilde $P_1 P_2 = 0 = P_2 P_1$ şartlarını sağlayan $P_1, P_2 \in \mathbb{C}_n^{P}$ matrislerinin mevcut olmasıdır.

$A^{\oplus}$ yı içeren $A \in \mathbb{C}_n^{EP}$ matrisinin iki karakterizasyonu Teorem 2.22 de verildiği gibidir. Diğer sonuçlar aşağıdaki teoremde belirlenmiştir.

Teorem 2.23 $A \in \mathbb{C}_n^{CM}$ matrisi verilmiş olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler birbirine eşdeğerdir (Baksalary ve Trenkler., 2010):

(i) $A \in \mathbb{C}_n^{EP}$,
(ii) $(A^{\oplus})^{\oplus} = A$,
(iii) $A^{\oplus}A = AA^{\oplus}$,
(iv) $(A^{\dagger})^{\oplus} = A$,
(v) $(A^{\oplus})^{\dagger} = (A^{\dagger})^{\oplus}$.

İspat: İspat için (ii)–(v) koşullarının her birinin $L = 0$ ifadesine eşdeğer olduğunu göstermek yeterlidir. Teorem 2.21 in (iv) şıkkı göz önüne alındığında, teoremin (ii) koşulunun $AP_A = A$ olarak ifade edilebildiği görülür. Bu nedenle $(A^{\oplus})^{\oplus} = A \iff L = 0$ denkliği açıktır. Açıkça doğrulanabileceği gibi, (i)⟺(iii) kısmını ispatlamak için, $A^{\oplus}A = AA^{\oplus} \iff (\Sigma K)^{-1}\Sigma L = 0$ olduğuna dikkat edilmelidir. Bu durumda Teorem 2.1 in (i) şıkkının yeniden kullanılmasıyla $(A^{\dagger})^{\oplus} = (A^{\dagger})^{\#}P_{A^{\dagger}}$ olduğu gösterilebilir. Öte yandan doğrudan hesaplamayla

$$(A^{\dagger})^{\#} = U\begin{pmatrix} \Sigma(K^*)^{-1} & 0 \\ L^*(K^*)^{-1}\Sigma(K^*)^{-1} & 0 \end{pmatrix}U^*$$

ve

$$P_{A^{+}} = U\begin{pmatrix} K^*K & K^*L \\ L^*K & L^*L \end{pmatrix}U^*$$

olduğu gösterilebilir. Buradan da

$$(A^{\dagger})^{\oplus} = U\begin{pmatrix} \Sigma K & \Sigma L \\ L^*(K^*)^{-1}\Sigma K & L^*(K^*)^{-1}\Sigma L \end{pmatrix}U^* \tag{2.31}$$

elde edilir. Diğer taraftan (2.21) ve (2.31) ifadelerinin karşılaştırılması bizi $L^*(K^*)^{-1}\Sigma K = 0$ ve $L^*(K^*)^{-1}\Sigma L$ olması için gerek ve yeter şartın $(A^{\dagger})^{\oplus} = A$ olduğu sonucuna götürür. Σ ve K matrislerinin nonsingülerliği dikkate alındığında bu koşullardan ilkinin $L = 0$ a denk olduğu görülür. Böylece teoremin (i)⟺ (iv) denkliği ispatlanmış olur. Aslında (2.22) ve (2.31) den direkt olarak görülmektedir ki, $(A^{\oplus})^{\oplus} = A \iff L = 0$ denkliğinin geçerliliği ispatı tamamlayan bir gerçektir.

Teorem 2.23 e yapılan bir yorum da şudur ki, (2.23), (2.24) ve (2.26) eşitliklerinden $A \in \mathbb{C}_n^{EP} \iff A^{\oplus} = A^{\#} \iff A^{\oplus} = A^{\dagger}$ olduğunun elde edilmesidir. Bu durumda aşağıdaki teorem, iki ortogonal izdüşümün çarpımının çekirdek inversi için bir formül ortaya koymaktadır.

Sonuç 2.1 $A, B \in \mathbb{C}_n^{OP}$ matrisleri verilmiş olsun. Bu duruma $(AB)^{\oplus} = (ABA)^{\dagger}$ dir (Baksalary ve Trenkler., 2010).

İspat: A ve B sırasıyla (2.21) ve (2.28) genel şekillerinde verilmiş olsun. Bu takdirde $A, B \in \mathbb{C}_n^{OP}$ olduğundan

$$A = U\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}U^* \quad \text{ve } B = U\begin{pmatrix} W & X \\ X^* & Z \end{pmatrix}U^* \tag{2.32}$$

ifadeleri yazılabilir. Burada (2.32) nin sol taraftaki ifade Lemma 2.1' in (iii) şıkkından elde edilir ve (2.32) nin sağ tarafındaki W ve Z matrisleri Hermityen matrisler, yani $W^* = W$ ve $Z^* = Z$ dir. Öte yandan $B^2 = B$ olduğundan

$$W = W^2 + XX^* \tag{2.33}$$

elde edilir. Ayrıca (2.33) deki eşitlik (W, X) bir sütun parçalanmış matris olmak üzere

$$rk(W) = rk(WW^* + XX^*) = rk(W, X)$$

eşitliğini temsil eder. Bunun sonucu olarak

$$\Re(X) \subseteq \Re(W) \tag{2.34}$$

içermesi yazılabilir. (2.32) ifadelerinin bir sonucu olarak

$$AB = U\begin{pmatrix} W & X \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^* \tag{2.35}$$

eşitliği yazılabilir. Bu durumda (2.35) ifadesi sondan (2.32) de verilen A matrisi ile çarpıldığında

$$(ABA)^\dagger = U\begin{pmatrix} W^\dagger & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^*$$

sonucuna elde edilir. Öte yandan, (2.33) ve (2.34) ifadelerinin ışığı altında

$$(AB)^\dagger = U\begin{pmatrix} P_W & 0 \\ X^*W^\dagger & 0 \end{pmatrix} U^* \quad \text{ve} \quad (AB)^\# = U\begin{pmatrix} W^\dagger & (W^\dagger)^2 X \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^*$$

yazılabilir, burada

$$P_{AB} = U\begin{pmatrix} P_W & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^*$$

dir. Öte yandan $(AB)^{\oplus} = (AB)^\# P_{AB}$ formülü nedeniyle

$$(AB)^{\oplus} = U\begin{pmatrix} W^\dagger & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^*$$

eşitliğine ulaşılır ki bunun sonucunda da ispat tamamlanmış olur.

Şimdi Teorem 2.21 (i) ve (iii) deki $A^{\oplus}$ nın iki gösterimi hakkında daha ilginç sonuçlar verilecektir.

Sonuç 2.2 $A \in \mathbb{C}_n^{CM}$ matrisi (2.21) formuna sahip r ranklı bir matris olsun. X ve Y, A matrisinin iki genelleştirilmiş inversi olsun. O halde aşağıdaki koşullar eşdeğerdir (Baksalary ve Trenkler., 2010):

(i) $A^{\oplus} = XAY$,

(ii) $\Re(XA) \subseteq \Re(A)$,

(iii) $X_{12} \in \mathbb{C}_{r,(n-r)}$, $X_{22}, Y_{22} \in \mathbb{C}_{(n-r),(n-r)}$ ve $Y_{21} \in \mathbb{C}_{(n-r),r}$ olmak üzere X ve Y matrisleri sırasıyla

$$X = U\begin{pmatrix} (\Sigma K)^{-1} & X_{12} \\ 0 & X_{22} \end{pmatrix} U^* \text{ ve } Y = U\begin{pmatrix} (\Sigma K)^{-1} - K^{-1}LY_{21} & -K^{-1}LY_{22} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix} \quad (2.36)$$

şeklindedir.

Teorem 2.25 $A \in \mathbb{C}_n^{CM}$ matrisi (2.21) formuna sahip r ranklı bir matris olsun. Z**,** A matrisinin bir genelleştirilmiş inversi olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktir (Baksalary ve Trenkler., 2010):

(i) $A^{\oplus} = (A^2Z)^{\dagger}$,

(ii) $Z \in A\{1,3\}$,

(iii) $Z_{21} \in \mathbb{C}_{(n-r),r}$ ve $Z_{22} \in \mathbb{C}_{(n-r),(n-r)}$ olmak üzere Z matrisi

$$Z = U\begin{pmatrix} (\Sigma K)^{-1} - K^{-1}LZ_{21} & -K^{-1}LZ_{22} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix} U^* \quad (2.37)$$

olarak yazılabilir.

İspat: (ii) ve (iii) nin denkliği Sonuç 2.2 de zaten verildiğinden (i) ve (iii) nin denk olduğunu gösterelim. $A^{\oplus} = (A^2Z)^{\dagger}$ koşulu

$$(A^{\oplus})^{\dagger} = (A^2Z),$$

eşitliğine denk olduğundan $A^{\oplus}$ matrisinin Moore-Penrose inversi

$$(A^{\oplus})^{\dagger} = U\begin{pmatrix} \Sigma K & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^*$$

olarak yazılabilir. Öte yandan Z matrisi A nın bir genelleştirilmiş inversi olduğundan, Z matrisi aşağıdaki şekildedir:

$$Z = U\begin{pmatrix} (\Sigma K)^{-1} - K^{-1}LZ_{21} & Z_{21} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix} U^*.$$

Böylece A^2Z çarpımı

$$A^2Z = U\begin{pmatrix} \Sigma K & \Sigma L \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Sigma K & \Sigma L \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (\Sigma K)^{-1} - K^{-1}LZ_{21} & Z_{21} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix} U^*$$

$$= U\begin{pmatrix} \Sigma K & \Sigma K(\Sigma KZ_{12} + \Sigma LZ_{22} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^*$$

olarak yazılabilir ve böylece $A^{\oplus} = (A^2 Z)^{\dagger}$ eşitliği aşağıdaki denkleme eşdeğerdir:

$$\begin{pmatrix} \Sigma K & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Sigma K & \Sigma K(\Sigma K Z_{12} + \Sigma L Z_{22} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ki bunun sağlanması için gerek ve yeter şart

$$Z_{12} = -(\Sigma K)^{-1}(\Sigma L Z_{22}) = -K^{-1} L Z_{22}$$

olmasıdır. Böylece (i) ve (iii) nün denkliği ispatlanmış olur ve ispat tamamlanır.

A matrisi (2.21) biçiminde olduğunda, $A \leq^{\oplus} B$ eşitsizliğinin sağlanması için gerek ve yeter şart B matrisinin bir $Z \in \mathbb{C}_{n-r}^{CM}$ için

$$B = U \begin{pmatrix} \Sigma K & \Sigma L \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^* \tag{2.38}$$

formunda yazılabilmesidir.

Sonuç 2.3 $A, B \in \mathbb{C}_n^{CM}$ olsun ve $A \leq^{\oplus} B$ olduğunu varsayalım. Bu takdirde aşağıdaki eşitlikler sağlanır (Baksalary ve Trenkler., 2010):

(i) $BA^{\oplus}B = A$,
(ii) $B^{\oplus}AB^{\oplus} = A^{\oplus}$,
(iii) $B^{\oplus}BA^{\oplus} = A^{\oplus}BB^{\oplus} = A^{\oplus}$

Sonuç 2.4 $A \in \mathbb{C}_n^{CM}$ matrisi *r* ranklı bir matris olsun. Bu takdirde

(i) $B \in \mathbb{C}_n^{CM}$ olması için için gerek ve yeter koşul

$$BA^{\oplus}B = A \tag{2.39}$$

olmasıdır, burada $Z \in \mathbb{C}_{n-r}^{CM}$ ve $T \in \mathbb{C}_{r,r}$ ve $T^2 = I_r$ olmak üzere

$$B = U \begin{pmatrix} T\Sigma K & T\Sigma L \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^* \tag{2.40}$$

dir.

(ii) $B \in \mathbb{C}_n^{CM}$ olması için gerek ve yeter koşul

$$B^{\oplus}AB^{\oplus} = A^{\oplus} \tag{2.41}$$

olmasıdır, burada $Z \in \mathbb{C}_{n-r}^{CM}$, $V \in \mathbb{C}_{n-r}^{r}$, $T \in \mathbb{C}_r^r$ ve $T^2 = I_r$ olmak üzere

$$B = U \begin{pmatrix} T\Sigma K & T\Sigma[LZ^{\oplus} Z + V(I_{n-r} - Z^{\oplus} Z] \\ 0 & Z \end{pmatrix} \tag{2.42}$$

dir.

(iii) $B \in \mathbb{C}_n^{CM}$ olması için gerek ve yeter koşul $\Re(A) \subseteq \Re(B)$ olmak üzere

$$B^{\oplus}BA^{\oplus} = A^{\oplus}BB^{\oplus} = A^{\oplus} \tag{2.43}$$

olmasıdır (Baksalary veTrenkler., 2010).

Sonuç 2.5 $A, B \in \mathbb{C}_n^{CM}$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadelerler eşdeğerdir (Baksalary ve Trenkler., 2010):

(a) $A^{\oplus}BA^{\oplus} = A^{\oplus}$, yani $A^{\oplus}$, B matrisinin bir dış inversidir.
(b) $A^{\dagger}BA^{\#} = A^{\oplus}$

Sonuç 2.6 $A \in \mathbb{C}_n^{CM}$ matrisi r ranklı bir matris olsun. Bu takdirde $B \in \mathbb{C}_n^n$ nin

$$A^{\oplus}BA^{\oplus} = A^{\oplus} \tag{2.44}$$

eşitliğini sağlaması için gerek ve yeter şart B matrisinin $B_{12} \in \mathbb{C}_{r,(n-r)}$, $B_{21} \in \mathbb{C}_{(n-r),r}$ ve $B_{22} \in \mathbb{C}_{(n-r),(n-r)}$ keyfi matrisler olmak üzer

$$B = U\begin{pmatrix} \Sigma K & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}U^{*} \tag{2.45}$$

formunda olmasıdır.

(ii) $r(A) = r$ olmak üzere $B \in \mathbb{C}_n^n$ ve $A \in \mathbb{C}_n^{CM}$ matrislerinin, $B_{12} \in \mathbb{C}_{r,(n-r)}, B_{21} \in \mathbb{C}_{(n-r),r}$ ve $B_{22} \in \mathbb{C}_{(n-r),(n-r)}$ matrisleri keyfi matrisler olmak üzere

$$A^{\dagger}BA^{\#} = A^{\oplus} \tag{2.46}$$

eşitliğini sağlaması için gerek ve yeter şart A nın ranj-Hermityen ve B matrisinin

$$B = U\begin{pmatrix} \Sigma K & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}U^{*} \tag{2.47}$$

formunda olmasıdır (Baksalary ve Trenkler., 2010).

Şimdi çekirdek inversin bir genelleştirmesi olan bir başka genelleştirilmiş invers kavramı ele alınacaktır.

Tanım 2.21 $A \in \mathbb{C}_n^n$ matrisi $ind(A) = k$ özelliğini sağlasın. Bu takdirde $GAG = G$ olmak üzere

$$\Re(X) = \mathcal{C}(X) = \Re(A^k) \tag{2.48}$$

şartını sağlayan bir G matrisine $A \in \mathbb{C}_n^n$ matrisinin bir çekirdek-EP inversi denir ve $X = A^{\circledcirc}$ ile gösterilir (Wang, 2016).

Burada $\mathcal{C}(X) = \mathfrak{R}(X^*)$ olduğu dikkate alınırsa (2.48) ifadesinin

$$\mathfrak{R}(X) = \mathfrak{R}(X^*) = \mathfrak{R}(A^k) \tag{2.49}$$

olarak da yazılabileceğini belirtelim. Şimdi aşağıdaki Lemmayı verebiliriz.

Lemma 2.3 $A \in \mathbb{C}_n^n$ matrisi $ind(A) = k$ özelliğini sağlasın. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler biribirine denktir (Wang, 2016):

(i) X matrisi A matrisinin bir çekirdek-EP inversidir.

(ii) $XAX = X$, $(AX)^* = AX$, $XA^{t+1} = A^t$, $\mathfrak{R}(X) \subseteq \mathfrak{R}(A^t)$ dir, burada t bir pozitif tam sayısıdır.

İspat. (i) $\Longrightarrow$ (ii): (i) den X matrisi bir dış invers olup $\mathfrak{R}(X) = \mathcal{C}(X^*) = \mathfrak{R}(A^k)$ olduğu görülür. Öte yandan XA matris çarpımı $\mathfrak{R}(X) = \mathfrak{R}(A^k)$ üzerinde bir eğik izdüşüm olduğundan $XA^{k+1} = XAA^k = A^k$ yazılabilir. Dolayısıyla $k = t$ alınabilir. Benzer şekilde X matrisi A matrisinin bir dış inversi olduğundan AX bir idempotent matris olup $\mathcal{C}(AX) = \mathcal{C}(X) = \mathfrak{R}(A^k)$ dir. Böylece (3.2) den $\mathfrak{R}(AX) = \mathfrak{R}(A^{k+1}) = \mathfrak{R}(A^k)$ olduğu görülür. Bu nedenle AX bir EP matris olacaktır. Dolayısıyla idempotent ve EP olduğundan $(AX)^* = AX$ yazılabilir, bu ise (i) $\Longrightarrow$ (ii) ispatını tamamlar.

(ii)$\Longrightarrow$(i): X matrisi (ii) de verilen şartları sağlasın. Bu durumda $XA^{t+1} = A^t$ olduğundan $r(XA^{t+1}) = r(A^t)$ ve $\mathfrak{R}(A^t) \subseteq \mathfrak{R}(X)$ yazılabilir. Aksine olarak $t \geq k$ ve $\mathfrak{R}(A^t) = \mathfrak{R}(A^k)$ alalım. Bu durumda $\mathfrak{R}(X) \subseteq \mathfrak{R}(A^t)$ ifadesi $\mathfrak{R}(X) = \mathfrak{R}(A^k)$ eşitliğini sağlar. Öte yandan $XAX = X$ ve $(AX)^* = AX$ olduğundan AX matrisi $\mathcal{C}(X) = \mathcal{C}(AX) = \mathfrak{R}(AX)$ olacak şekilde bir eğik izdüşümdür. Bu durumda (3.3) den $\mathcal{C}(X) = \mathcal{C}(AX) = \mathfrak{R}(AX) = \mathfrak{R}(A^k)$ olduğu görülür. Bu nedenle X bir EP matrisi olup Gnin satır ve sütun uzayları $\mathfrak{R}(A^k)$ olarak aynıdır. Böylece (ii)$\Longrightarrow$(i) olduğu görülür ve ispat tamamlanır.

Çekirdek-EP inversin mevcut olup olmadığı ile ilgili soruya aşağıdaki Lemma kullanılarak cevap verilebilir.

Lemma 2.4 $\mathbb{F}$ keyfi bir skaler cisim olmak üzere A, P, Q matrisleri $\mathbb{F}$ cismi üzerinden uygun boyutta matrisler olsun. Bu takdirde aşağıdakiler gerçeklenir (Wang, 2016):

(i) Öyle bir $O \in \{A^{(2)}\}$ matrisi mevcuttur ki

$$\mathfrak{R}(O) \subseteq \mathfrak{R}(Q), \mathcal{C}(O) \subset \mathcal{C}(P) \text{ ve } r(O) = r(PAQ) \tag{2.50}$$

dir.

(ii) (i) deki tüm dış inverslerin sınıfı

$$\{O \in \{A^{(2)}\} : \mathfrak{R}(O) \subseteq \mathfrak{R}(Q),\ \mathcal{C}(O) \subset \mathcal{C}(P)\} = \{Q(PAQ)^{(2)}\mathrm{P}\} \tag{2.51}$$

ile verilir.

(iii) (i) deki tüm dış inverslerin sınıfı

$$\{O \in \{A^{(2)}\} : \mathfrak{R}(O) \subseteq \mathfrak{R}(Q), \mathcal{C}(O) \subset \mathcal{C}(P)\}$$

$$= \{Q_1(P_1AQ_1)^{(2)}P_1 :\ \mathfrak{R}(Q_1) \subseteq \mathfrak{R}(Q), \mathcal{C}(P_1) \subset \mathcal{C}(P)\} \tag{2.52}$$

ile verilir.

(iv) Eğer PAQ sıfır değilse bu takdirde $\mathfrak{R}(O) = \mathfrak{R}(Q)$ ve $\mathcal{C}(O) = \mathcal{C}(P)$ olacak şekilde bir O dış inversinin tek türlü olarak mevcut olması için gerek ve yeter şart ve $r(P) = r(Q) = r(PAQ)$ olmasıdır. Bu durumda O dış inversi PAQ nun keyfi seçilmiş $(PAQ)^{(1,2)}$ yansımalı g-inversi ve $(PAQ)^{(1)}$ g-inversi için

$$O = Q(PAQ)^{(1,2)}P = Q(PAQ)^{(1)}P \tag{2,53}$$

ile verilir.

Teorem 2.26 $ind(A) = k$ olmak üzere $A \in \mathbb{C}_n^n$ kare matrisi verilmiş olsun. Bu takdirde Çekirdek-EP inversin mevcut olması için gerek ve yeter şart $r\left(A^{*k}A^{k+1}\right) = r(A^k)$ olmasıdır. Ayrıca mevcut olması durumunda çekirdek-EP invers tektir ve

$$A^{\circledcirc} = A^k((A^*)^kA^{k+1})^{(1)}(A^*)^k \tag{2,54}$$

ile verilir (Wang, 2016).

İspat. Mevcut olduğunda A nın çekirdek-EP inversinin, satır ve sütun uzayları aynı ve $\mathfrak{R}A^k)$ ye eşit olmak üzere, A nın bir dış inversi olduğunu hatırlatalım. Bu durumda $\mathcal{C}(A^{*k}) = \mathfrak{R}(A^k)$ olduğu dikkate alınarak Lemma 2.4 (iv) den $P = A^{*k}$ ve $Q = A^k$ alınarak teorem kolayca elde edilir ve böylece ispat tamamlanır.

Hatırlatma 2.1 Skaler cisim yerine reel sayılar ya da kompleks sayılar cismi alındığında $ind(A) = k$ olan herhangi bir A matrisi için $r\left(A^{*k}A^{k+1}\right) = r(A^k)$ eşitliği $r\left(A^{*k}A^k\right) = r(A^k)$ eşitliği olarak alınabilir. Dolayısıyla reel sayılar ya da kompleks sayılar cismi üzerindeki bir kare matris için tıpkı Drazin invers de olduğu gibi $A^{\circledcirc}$ çekirdek-EP invers de daima mevcut ve tektir. Ayrıca eğer A^k bir EP matris ve $G = A^{\circledcirc}$ mevcut ise bu takdirde hem AG ve hem de GA aynı satır ve sütun uzaylarına sahip idempotent matrisle olacaktır. Bu nedenle $GA = AG$ olup (2.48) şartı sağlanır. Dolayısıyla bu durumda çekirdek-EP invers Drazin invers ile aynı olacaktır. Öte yandan indeksi 1 olan her kare matrisin bir grup inverse sahip olduğu bilinmektedir.

Hatırlatma 2.2 Eğer A matrisi 1 indeksli ve $G = A^{\circledcirc}$ ise bu takdirde $GA^2 = A$ olup G matrisi bir çekirdek matris ile bir nilpotent matrisin toplamı olarak $G = N + M$ olarak yazılabilir burada N bir çekirdek matris ve M bir nilpotent matris olup $MN = NM = 0$ dir. Bu ise AG ve GA matrislerinin idempotent matrisler olup $r(G) = r(A)$ eşitliğinin sağlandığını gösterir. Bu nedenle G matrisi $AGA = A$ şartını da sağlar.

Teorem 2.27 (Çekirdek-EP Ayrışımı) $A \in \mathbb{C}_n^n$ matrisi için $ind(A) = k$ olsun. Bu takdirde $A \in \mathbb{C}_n^n$ matrisi $A_1 \in \mathbb{C}_n^{CM}$, $A_2^k = 0$ ve $A_1^*A_2 = A_2A_1 = 0$ olmak üzere $A = A_1 + A_2$ formunda A_1 ve A_2 matrislerinin toplamı şeklinde yazılabilir. Burada A_1 ve A_2 biri veya her ikisi de sıfır olabilir (Wang, 2016).

İspat. $A \in \mathbb{C}_n^n$ olsun. Bu durumda Schur ayrışımına göre U^*AU bir üst üçgensel matris olacak şekilde bir $U \in \mathbb{C}_n^n$ üniter matrisi mevcuttur. Gerçekten üst üçgensel matrisin esas köşegen elemanları A matrisinin özdeğerleri olup ilk özdeğerin sıfırdan farklı olduğu kabul edilebilir. Bu nedenle T_1 üst üçgensel ve nonsingüler, T_3 üst üçgensel ve esas köşegeni sıfır olmak üzere A matrisi

$$A = U\begin{pmatrix} T_1 & T_2 \\ 0 & T_3 \end{pmatrix}U^*$$

şeklinde yazılabilir. Bu durumda A_1 ve A_2 matrisleri

$$A_1 = U\begin{pmatrix} T_1 & T_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}U^* \text{ ve } A_2 = U\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & T_3 \end{pmatrix}U^*$$

olarak alınırsa istenilen şartlar sağlanır.

Şimdi de kare matrislerin çekirdek-EP inverslerinin bazı özelliklerinin vereceğiz. Bununla ilgili olarak öncelikle $(AX)^* = AX, XA^{k+1} = A^k$ ve $\Re(X) = \Re(X^*) = \Re(A^k)$ şartlarını kullanarak çekirdek-EP invers için bazı gerek ve yeter şartlar vereceğiz. Daha sonra çekirdek-EP inversin bazı özelliklerini ve yeni gösterimlerini sıralayacağız. Bu durumda aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 2.28 $A \in \mathbb{C}_n^n$ matrisi için $ind(A) = k$ olsun. Bu takdirde X in A matrisinin bir çekirdek-EP inversi olması için gerek ve yeter şart $(AX)^* = AX, XA^{k+1} = A^k$ ve $\Re(X) \subseteq \Re(A^k)$ şartlarını sağlamasıdır (Zou ve Cheng, 2019).

İspat. $XA^{k+1} = A^k$ ve $\Re(X) \subseteq \Re(A^k)$ olduğunu varsayalım. Bu takdirde bir $T \in \mathbb{C}_n^n$ matrisi için $X = A^k T$ yazılabilir. Bu nedenle $XAX = XA^{k+1}T = A^k T = X$ elde edilir. Böylece Lemma 2.3 e göre ispat tamamlanmış olur.

Teorem 2.28 e göre X matrisi A matrisinin bir çekirdek-EP inversi olmak üzere $(AX)^* = AX$ ve $XA^{k+1} = A^k$ olacak şekilde X matrisi bulunabilir. Bu durumda aşağıdaki teoremde $(AX)^* = AX$ ve $XA^{k+1} = A^k$ ile çekirdek-EP için bazı gerek ve yeter şartlar geliştirilebilir.

Teorem 2.29 $A, X \in \mathbb{C}_n^n$ olmak üzere $ind(A) = k$ ve A matrisinin çekirdek-EP ayrışımı Teorem 2.27 deki gibi verilmiş olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktir (Zou ve Cheng, 2019):

(i) $X = A^{\circledcirc}$,

(ii) $(AX)^* = AX, XA^{k+1} = A^k$ ve $r(A^k) = r(X)$,

(iii) $(AX)^* = AX, XA^{k+1} = A^k$ ve $A_1 X^2 = X$,

(iv) $(AX)^* = AX, XA^{k+1} = A^k$ ve $A^s X^{s+1} = X, s > 0$ bir tam sayı,

(v) $(AX)^* = AX, XA^{k+1} = A^k$ ve $XA_1X = X$.

Teorem 2.30 $A, X \in \mathbb{C}_n^n$ olmak üzere $ind(A) = k$. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktir (Zou ve Cheng, 2019):

(i) $X = A^{\circledcirc}$,

(ii) $\Re(X) = \Re(X^*) = \Re(A^k)$ ve $XA^{k+1} = A^k$,

(iii) $\Re(X) = \Re(X^*) = \Re(A^k)$ ve $A^s X^{s+1} = X, s > 0$ bir tam sayı,

(iv) $\Re(X) = \Re(X^*) = \Re(A^k)$ ve $XA \in \mathbb{C}_n^P$,

(v) $\mathfrak{R}(X) = \mathfrak{R}(X^*) = \mathfrak{R}(A^k)$ ve $AX \in \mathbb{C}_n^P$,

(vi) $\mathfrak{R}(X) = \mathfrak{R}(X^*) = \mathfrak{R}(A^k)$ ve $AXA^k = A^k$.

Lemma 2.5 $A, X \in \mathbb{C}_n^n$ olmak üzere $ind(A) = k$ olsun. X matrisinin A matrisinin bir çekirdek-EP inversi olması için gerek ve yeter şart $AX = P_{A^k}$ ve $\mathfrak{R}(X) \subseteq \mathfrak{R}(A^k)$ olmasıdır (Zou ve Cheng, 2019).

Lemma 2.5 e göre çekirdek-EP invers hakkında bazı gerek ve yeter şartlar verilebilir:

Sonuç 2.7 $A, X \in \mathbb{C}_n^n$ olmak üzere $ind(A) = k$ olsun ve A matrisinin çekirdek-EP ayrışımı Teorem 2.27 deki gibi verilmiş olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler birbirine denktir (Zou ve Cheng, 2019):

(i) $X = A^{\circledcirc}$,

(ii) $AX = P_{A^k}$ ve $AX^2 = X$,

(iii) $AX = P_{A^k}$ ve $A_1X^2 = X$,

(iv) $AX = P_{A^k}$, $X \in \mathbb{C}_n^{EP}$ve $XAX = X$.

Sonuç 2.8 $A, X \in \mathbb{C}_n^n$ olmak üzere $ind(A) = k$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler birbirine denktir (Zou ve Cheng, 2019):

(i) $X = A^{\circledcirc}$,

(ii) $XAX = X,\ \mathfrak{R}(X) = \mathfrak{R}(A^k)$ ve $XP_{A^k} = X$

(iii) $XA^{k+1} = A^k$, $\mathfrak{R}(X) = \mathfrak{R}(A^k)$ ve $XP_{A^k} = X$

(iv) $XA^{k+1} = A^k$ ve $\mathfrak{R}(X^*) = \mathfrak{R}(A^k)$,

(v) $X = P_{A^k}X = XP_{A^k}$ ve $P_{A^k} = XAP_{A^k}$,

(vi) $X = P_{A^k}X = XP_{A^k}$ ve $P_{A^k} = P_{A^k}AX$.

Sonuç 2.9 $A, X \in \mathbb{C}_n^n$ olmak üzere $ind(A) = k$ olsun ve A matrisinin çekirdek-EP ayrışımı Teorem 2.27 deki gibi veriliş olsun. Bu takdirde aşağıdakiler birbirine denktir (Zou ve Cheng, 2019):

(i) $X = A^{\circledcirc}$,

(ii) $A^{k+1}X = A^kP_{A^k}$ ve $\mathfrak{R}(X) = \mathfrak{R}(A^k)$,

(iii) $A^{k+1}X = A^kP_{A^k}$ ve $P_{A^k}X = X$,

(iv) $A^{k+1}X = A^kP_{A^k}$ ve $A_1X^2 = X$,

(v) $A^{k+1}X = A^kP_{A^k}$ ve $X^2 = X$.

3. MATRİSLERİN DMP İNVERSLERİ

3.1 Bir Matrisin DMP İnversi

Bir önceki kısımda matrisleri bir takım genelleştirilmiş inverslerinden söz edilmiş, Moore-Penrose invers, Drazin invers, Grup invers, Çekirdek invers ve Çekirdek-EP invers tanımları verilmiş ve bu inverslerin bazı özellikleri sıralanmıştır. Bilindiği gibi bir matrisin Moore-Penrose inversi ve Drazin inversi daima mevcut iken, bir A matrisinin Grup inversinin ve Çekirdek inversinin mevcut olması için $r(A^2) = r(A)$ yani A matrisinin indeksinin 1, başka bir deyişle $ind(A) = 1$ olması gerek ve yeter şarttır. Ayrıca tıpkı Moore-Penrose invers ve Drazin invers de olduğu gibi bir matrisin çekirdek-EP invers de daima mevcut ve tektir.

Bu kısımda ise yeni bir genellştirilmiş invers kavramı verilecektir. Daha önce ifade edildiği gibi $\mathbb{C}_n^n$ $n \times n$ tipindeki kompleks kare matrislerinin kümesi olsun. A^*, $\Re(A)$ ve $r(A)$ sembolleri bir $A \in \mathbb{C}_n^n$ matrisinin sırasıyla, eşlenik devriğini, ranj uzayını (sütun uzayı) ve rankını ve I_n de n-yinci mertebeden birim matrisi göstersin. Bir $A \in \mathbb{C}_n^n$ matrisinin A^d Drazin invesini ve $A^\dagger$ Moore-Penrose inversini kullanarak keyfi indeksli, $ind(A) = m$ diyelim, A kare matrisinin yeni bir inversi verilerek bu inversin çeşitli özellikleri incelenecektir. Bu invers Drazin inves ve Moore-Penrose invers kullanılarak tanımlandığından buna DMP invers adı verilmiştir.

$ind(A) = m$ olmak üzere $A \in \mathbb{C}_n^n$ matrisi verilmiş olsun ve

$$XAX = X,\ XA = A^dA,\ A^mX = A^mA^\dagger \tag{3.1}$$

denklemler sistemini göz önüne alalım. Bu durumda aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.1 Eğer (3.1) sistemi bir çözüme sahip ise bu takdirde çözüm tektir (Malik ve Thoma, 2014).

İspat. X_1 ve X_2 matrisleri (3.1) sisteminin iki çözümü olsun yani, $X_1AX_1 = X_1$, $X_1A = A^dA,\ A^mX_1 = A^mA^\dagger$ ve $X_2AX_2 = X_2,\ X_2A = A^dA,\ A^mX_2 = A^mA^\dagger$ eşitlikleri sağlansın. Bu durumda A^dA nın bir izdüşüm ve $AA^d = A^dA$ olduğu dikkate alınırsa

$$\begin{aligned} X_1 = X_1AX_1 = A^dAX_1 = (A^dA)^mX_1 = (A^d)^mA^mX_1 = (A^d)^mA^mA^\dagger \\ = (A^d)^mA^mA^\dagger X_2 = (A^dA)^mX_2 = A^dAX_2 = X_2AX_2 = X_2 \end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 3.2 (3.1) sistemi tutarlı olup bir tek $X = A^d AA^\dagger$ çözümüne sahiptir (Malik ve Thoma, 2014).

İspat. $X = A^d AA^\dagger$ matrisinin (3.1) sistemini sağladığı kolayca görülebilir. Dolayısıyla (3.1) sistemi tutarlıdır. Çözümün tekliği ise Teorem 3.1 de gösterilmişti. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.1 ve Teorem 3.2 den görülür ki verilen bir A kare matrisi için $A^d AA^\dagger$ matrisi (3.1) sistemini sağlayan yegane matristir. Şimdi aşağıdaki tanım verilebilir.

Tanım 3.1 $ind(A) = m(\leq 1$ olması gerekmez) olmak üzere $A \in \mathbb{C}_n^n$ matrisi verilmiş olsun. A matrisinin $A^{d,\dagger}$ ile gösterilen DMP inversi,

$$A^{d,\dagger} = A^d AA^\dagger$$

olarak tanımlanır (Malik ve Thoma, 2014).

Şimdi singüler değer ayrışımı kullanılarak bir A kare matrisinin DMP inversi için kanonik form verilecektir. Rankı r olan her $A \in \mathbb{C}_n^n$ matrisi için singüler değer ayrışımı $U \in \mathbb{C}_n^n$ uniter matris olmak üzere,

$$A = U \begin{pmatrix} \Sigma K & \Sigma L \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^* \tag{3.2}$$

biçiminde gösterilir, burada $\Sigma = \text{köş}\{\sigma_1 I_{r_1} \ldots\ldots \sigma_t I_{r_t}\}$ köşegen matrisi A matrisinin singüler değerlerinden oluşan bir köşegen matris, $\sigma_1 > \sigma_2 > \cdots > \sigma_t > 0$ ve $r_1 + r_2 + \cdots + r_t = r$ olmak üzere $K \in \mathbb{C}_{r,r}$ ve $L \in \mathbb{C}_{r,n-r}$ matrisleri için $KK^* + LL^* = I_r$ eşitliği sağlanır. Bu durumda bu gerçek kullanılarak $ind(A) = m$ olmak üzere A matrisinin Drazin inversi hesaplanabilir. A matrisiyle uyumlu olarak parçalanmış

$$X = U \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix} U^* \tag{3.3}$$

matrisi A nın Drazin inversi olsun. Bu takdirde $XAX = X,\ XA = AX$ ve $A^{m+1}X = A^m$ eşitlikleri sağlanır. $XAX = X$ eşitliğinden

$$X_1 \Sigma K X_1 + X_1 \Sigma L X_3 = X_1, \tag{3.4}$$

$$X_3 \Sigma K X_1 + X_3 \Sigma L X_3 = X_3, \tag{3.5}$$

$$X_1 \Sigma K X_2 + X_1 \Sigma L X_4 = X_2, \tag{3.6}$$

$$X_3 \Sigma K X_2 + X_3 \Sigma L X_4 = X_4, \tag{3.7}$$

eşitlikleri, $XA = AX$ eşitliğinden

$$\Sigma K X_1 + \Sigma L X_3 = X_1 \Sigma K, \tag{3.8}$$

$$X_3 \Sigma K = 0, \tag{3.9}$$

$$\Sigma K X_2 + \Sigma L X_4 = X_1 \Sigma L, \tag{3.10}$$

$$X_3 \Sigma L = 0, \tag{3.11}$$

eşitlikleri ve $A^{m+1}X = A^m$ eşitliğinden de

$$(\Sigma K)^{m+1} X_1 + (\Sigma K)^m \Sigma L X_3 = (\Sigma K)^m, \tag{3.12}$$

$$(\Sigma K)^{m+1} X_2 + (\Sigma K)^m \Sigma L X_4 = (\Sigma K)^{m-1} \Sigma L \tag{3.13}$$

eşitlikleri yazılabilir. Bu eşitliklerden $X_1 \Sigma K X_1 = X_1, X_1 \Sigma K X_2 = X_2,\ \Sigma K X_1 = X_1 \Sigma K$, $\Sigma K X_2 = X_1 \Sigma L$ ve $(\Sigma K)^{m+1} X_1 = (\Sigma K)^m$, $(\Sigma K)^{m+1} X_2 = (\Sigma K)^{m-1} \Sigma L$ olduğu görülür. Bu eşitliklerde de A matrisinin Drazin inversinin

$$A^d = U \begin{pmatrix} (\Sigma K)^d & ((\Sigma K)^d)^2 \Sigma L \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^* \tag{3.14}$$

olduğu görülür. Ayrıca A matrisinin Moore-Penrose inversinin

$$A^\dagger = U \begin{pmatrix} K^* \Sigma^{-1} & 0 \\ L^* \Sigma^{-1} & 0 \end{pmatrix} U^* \tag{3.15}$$

olduğu gösterilebilir. Sonuç olarak A matrisinin DMP inversi

$$\begin{aligned} A^{d,\dagger} &= A^d A A^\dagger \\ &= U \begin{pmatrix} (\Sigma K)^d & ((\Sigma K)^d)^2 \Sigma L \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Sigma K & \Sigma L \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K^* \Sigma^{-1} & 0 \\ L^* \Sigma^{-1} & 0 \end{pmatrix} U^* \\ &= U \begin{pmatrix} (\Sigma K)^d & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^* \end{aligned}$$

olarak yazılabilir.

Teorem 3.3 $A \in \mathbb{C}_n^n$ matrisi (3.2) formunda verilmiş olsun. Bu takdirde

$$A^{d,\dagger} = U \begin{pmatrix} (\Sigma K)^d & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^*$$

dir (Malik ve Thoma, 2014).

(3.14) de bir A kare matrisinin Drazin inversinin bir gösterimi verildi. Bu durumda eğer

$$C_m = (\Sigma K)^{m-1}\Sigma((\Sigma K)^{2m}\Sigma)^{\dagger}(\Sigma K)^{m-1}\Sigma$$

olarak alınırsa $A^{d,\dagger}$ için de benzer bir gösterim

$$A^{d,\dagger} = U\begin{pmatrix} C_m K & C_m L \\ 0 & 0 \end{pmatrix}U^*$$

biçiminde verilebilir. Burada (3.14) gösterimi ΣK nın Drazin inversini içerirken bu son fomülün $(\Sigma K)^{2m}\Sigma$ nın Moore-Penrose inversini içerdiğini haturlatalım.

Lemma 3.1 $ind(A) = m$ olmak üzere $A \in \mathbb{C}_n^n$ matrisi (3.2) formunda verilmiş olsun. Bu takdirde 1 $ind(\Sigma K) = m - 1$ dir (Malik ve Thoma, 2014).

İspat. $\begin{pmatrix} \Sigma K & \Sigma L \\ Y & Z \end{pmatrix}$ matrisi nonsingüler olacak şekildeki uygun boyutlu Y ve Z matrisleri için $A^m = U\begin{pmatrix} (\Sigma K)^{m-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Sigma K & \Sigma L \\ Y & Z \end{pmatrix}U^*$ olduğundan $r(A^m) = r((\Sigma K)^{m-1})$ olduğu görülür. Benzer şekilde $r(A^{m+1}) = r((\Sigma K)^m)$ olacaktır. Bu nedenle $ind(A) = m$ olduğundan $r((\Sigma K)^{m-1}) = r((\Sigma K)^m)$ olacak şekildeki en küçük nonnegatif tamsayının $m - 1$ olduğu, yani $ind(\Sigma K) = m - 1$ olduğu görülür ve böylece de ispat tamamlanır.

Eğer $ind(A) = 1$ ise bu takdirde Tanım 3.1 de verilen DMP invers A matrisinin çekirdek inversiyle çakışacaktır. Bir A kare matrisiyle ilgili bir diğer dış invers $A^{\dagger,d} = A^{\dagger}AA^d$ olarak alınırsa A nın singüler değer ayrışımı kullanılarak $A^{\dagger,d}$ matrisinin kanonik formu

$$A^{\dagger,d} = U\begin{pmatrix} (K^*K)(\Sigma K)^d & (K^*K)((\Sigma K)^d)^2\Sigma L \\ (L^*K)(\Sigma K)^d & (L^*K)((\Sigma K)^d)^2\Sigma L \end{pmatrix}U^*$$

ile verilir. Bu durumda $A^{\dagger,d}$ nin $A^{d,\dagger}$ ile benzer özelliklere sahip olacağı beklenir. Aşağıdaki örnek genelde $A^{\dagger,d}$ ve $A^{d,\dagger}$ inverslerinin farklı olduğunu gösterir.

Örnek 3.1 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ matrisi verilmiş olsun. Bu takdirde basit hesaplamalarla $A^{d,\dagger} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ve $A^{d,\dagger} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ olduğu gösterilebilir.

Eğer $A^d = A^{\dagger}$ ise bu durumda $ind(A) \leq 1$ olacaktır. Böyle bir durumda $A^{\dagger,d} = A^{d,\dagger} = A^{\dagger} = A^{\#}$ olacaktır. Ayrıca eğer $A^d = A$ ise $A^{d,\dagger} = A^2A^{\dagger}$ ve $A^{\dagger,d} = A^{\dagger}A^2$

olacaktır. Eğer A matrisi bir EP tripotent matris ise bu takdirde $A^{\dagger} = A$ ve dolayısıyla ${}^{d}C_{A} = AA^{d}A$ olmak üzere $A^{d,\dagger} = A^{2}A^{\dagger}\,{}^{d}C_{A} = A^{\dagger,d}$ yazılabilir.

Teorem 3.4 $A \in \mathbb{C}_{n}^{n}$ matrisinin $A^{d,\dagger}$ DMP inversi aşağıdaki özelliklere sahiptir:

(i) $AXA = {}^{d}C_{A}$ dir.

(ii) ${}^{d,\dagger}C_{A} = AA^{d,\dagger}A$ olmak üzere $AX = {}^{d,\dagger}C_{A} = A^{\dagger}$ dir (Malik ve Thoma, 2014).

İspat. (i) $A \in \mathbb{C}_{n}^{n}$ matrisinin (3.2) deki ayrışımı kullanılarak basit bir hesaplamayla ${}^{d}C_{A} = AA^{d}A$ ve ${}^{d,\dagger}C_{A} = AA^{d,\dagger}A$ matrislerinin

$$ {}^{d}C_{A} = U\begin{pmatrix} {}^{d}C_{\Sigma K} & \Sigma K(\Sigma K)^{d}\Sigma L \\ 0 & 0 \end{pmatrix}U^{*} $$

ve

$$ {}^{d,\dagger}C_{A} = U\begin{pmatrix} {}^{d}C_{\Sigma K} & \Sigma K(\Sigma K)^{d}\Sigma L \\ 0 & 0 \end{pmatrix}U^{*} $$

şeklinde olduğu dolayısıyla ${}^{d}C_{A} = {}^{d,\dagger}C_{A}$ olduğu gösterilebilir. Sonuç olarak $A^{d,\dagger}$ inversi $AXA = {}^{d}C_{A}$ denkleminin bir çözümüdür. (ii) nin ispatı kolaydır. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.5 Eğer $A \in \mathbb{C}_{n}^{n}$ matrisi $ind(A) = m$ indeksli ise aşağıdaki ifadeler sağlanır (Malik ve Thoma, 2014):

(i) $AA^{d,\dagger}$ matrisi $\mathcal{N}(A^{d}A^{\dagger})$ boyunca $\Re\left({}^{d}C_{A}\right)$ üzerinde bir izdüşümdür.

(ii) $A^{d,\dagger}A = A^{d}A$ $\mathcal{N}(A^{m})$ boyunca $\Re(A^{m})$ üzerinde bir izdüşümdür.

İspat. (i) $A^{d,\dagger}$ inversi $A \in \mathbb{C}_{n}^{n}$ matrisinin bir dış inversi olduğundan $AA^{d,\dagger}$ matrisi bir izdüşümdür. Üstelik $\Re(AA^{d,\dagger}) = AA^{d}\Re(AA^{\dagger}) = AA^{d}\Re(A) = \Re(AA^{d}A) = \Re\left({}^{d}C_{A}\right)$ ve $\mathcal{N}(AA^{d,\dagger}) = \mathcal{N}(AA^{d}AA^{\dagger}) = \mathcal{N}(A^{d}AA^{\dagger}) = \mathcal{N}(A^{d}A^{\dagger})$ eşitlikleri sağlanır. (ii) ise $A^{d}A$ izdüşümünün özelliklerinden kolaylıkla gösterilebilir ve böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.6 Eğer $A \in \mathbb{C}_{n}^{n}$ matrisi $ind(A) = m$ indeksli ise $A^{d,\dagger}$ DMP inversi

$$ AX = P_{\Re\left({}^{d}C_{A}\right),\mathcal{N}(A^{d}A^{\dagger})}\,,\ \Re(X) \subseteq \Re(A^{m}) \tag{3.16} $$

ifadesini sağlayan tek X matrisidir (Malik ve Thoma, 2014).

İspat. Teorem 3.4 den $AA^{d,\dagger}$ nın idempotent olduğu görülür. Öte yandan $\Re(A^{d,\dagger}) = \Re(A^{d}AA^{\dagger}) \subseteq \Re(A^{d}A) = \Re(A^{m})$ elde edilir. Böylece geriye X matrisinin tekliğinin gösterilmesi kalır. Farz edelim ki X_1 ve X_2 (3.16) yı sağlasın. Bu takdirde $AX_1 = AX_2 = P_{\Re\left({}^{d}C_A\right),\mathcal{N}(A^dA^\dagger)}$, $\Re(X_1) \subseteq \Re(A^m)$ ve $\Re(X_2) \subseteq \Re(A^m)$ dir. Buradan $A(X_1 - X_2) = 0$ olduğundan $\Re(X_1 - X_2) \subseteq \mathcal{N}(A)$ olacaktır. $\Re(X_1) \subseteq \Re(A^m)$ ve $\Re(X_2) \subseteq \Re(A^m)$ özelliklerinden $ind(A) = m$ olduğundan $\Re(X_1 - X_2) \subseteq \Re(A^m)$ yani $\Re(X_1 - X_2) \subseteq \mathcal{N}(A^m) \cap \Re(A^m) = \{0\}$ elde edilir. Böylece $X_1 = X_2$ olur ve ispat tamamlanır.

Bir matrisin DMP inversi genel olarak onun Moore-Penrose, grup ve Drazin inverslerinden farklı olduğundan DMP inversler genelleştirilmiş inverslerin yeni bir sınıfıdır. Gerçekten Örnek 3.1 de $ind(A) = 1$ olup $A^\#$, $A^\dagger$ ve $A^{d,\dagger}$ inverslerinin her birisinin farlı olduğu görülebilir. Diğer bir örnek olarak

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

matrisi için de $ind(B) = 2$ olup

$$B^d = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B^\dagger = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B^{d,\dagger} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

olduğu kolayca gösterilebilir. B matrisi genelde $B^{d,\dagger}$ matrisinin B matrisinin bir g-inversi olmadığını söyleyebileceğimizi gösterir. Ayrıca aşağıdaki sonuçlar bize DMP inversin bazı özelliklerini çekirdek inversten miras aldığını gösterir.

Önerme 3.1 Eğer $A \in \mathbb{C}_n^n$ matrisi $ind(A) = m$ indeksli ise bu takdirde aşağıdaki durumlar sağlanır (Malik ve Thoma, 2014):

(a) $A^{d,\dagger} = A^d P_A$ dir.

(b) $A^{d,\dagger}$ inversi A nın bir dış inversidir.

(c) $(A^{d,\dagger})^n = \begin{cases} (A^dA^\dagger)^{n/2} & \text{, n çift ise} \\ A(A^dA^\dagger)^{(n+1)/2} & \text{, n tek ise} \end{cases}$ dir.

(d) $(A^{d,\dagger})^\dagger = ((AP_A)^d)^\dagger$ dir.

(e) $((A^{d,\dagger})^d)^d = A^{d,\dagger}$ dir.

(f) $AA^{d,\dagger} = A^{d,\dagger}A$ olması için gerek ve yeter şart $\mathcal{N}(A^\dagger) \subseteq \mathcal{N}(A^d)$ olmasıdır.

(g) $AA^{d,\dagger} = A$ olması için gerek ve yeter şart A nın EP ve tripotent olmasıdır.

İspat. (a) ve (b) Moore-Penrose ve Drazin inversin tanım ve özelliklerinden elde edilir. (c) n=1,2 için sırasıyla

$$(A^{d,\dagger})^1 = A^d AA^\dagger = AA^d A^\dagger \tag{3.17}$$

ve

$$(A^{d,\dagger})^2 = A^d AA^\dagger A^d AA^\dagger = A^d(AA^\dagger A)A^d A^\dagger = A^d AA^d A^\dagger = A^d A^\dagger \tag{3.18}$$

olduğu gösterilebilir. Bu durumda matematiksel tümevarımla genel ifade kolaylıkla elde edilebilir. (d) ve (e) Teorem 3.3 den gösterilebilir.

(f) yi gösterelim. Bu durumda $I - AA^\dagger$ ve $A^d A$ izdüşüm olduğundan

$$\begin{aligned} AA^{d,\dagger} = A^{d,\dagger}A &\Leftrightarrow AA^d AA^\dagger = A^d A \\ &\Leftrightarrow AA^d(I - AA^\dagger) = 0 \\ &\Leftrightarrow \Re(I - AA^\dagger) \subseteq \mathcal{N}(A^d A) \\ &\Leftrightarrow \mathcal{N}(A^\dagger) \subseteq \mathcal{N}(A^d) \end{aligned} \tag{3.19}$$

olduğu görülür. Şimdi de (g) yi gösterelim. $A \neq 0$ ve $A^{d,\dagger} = 0$ olduğunu varsayalım. Eğer A matrisi (3.2) formunda yazılırsa bu takdirde $A^{d,\dagger}$ inversi Torem 3.3 deki gibi ifade edilebilir. Burada eğer $\Sigma K \neq 0$ ise $A^{d,\dagger} = 0$ olduğundan $(\Sigma K)^d = 0$ olacaktır. Dolayısıyla ΣK nilpotettir ve bu nedenle A nilpotent olmak zorundadır. Eğer $\Sigma K = 0$ ise bu durumda $A = U\begin{pmatrix} 0 & \Sigma L \\ 0 & 0 \end{pmatrix}U^*$ matrisinin nilpotent olduğu açıktır. Tersine olarak $A = 0$ ve A nın nilpotent olması durumlarının her ikisinde de A nın Drazin inversi sıfır olacaktır. Son olarak (h) şıkkını ispatlayalım. $A = 0$ durumu açıktır. Bu nedenle $A \neq 0$ olup (3.2) formunda yazılabildiğini varsayalım. Bu takdirde $A^{d,\dagger}$ inversi Torem 3.3 deki gibi ifade edilebilir. Bu nedenle

$$\begin{aligned} A^{d,\dagger} = A &\Leftrightarrow (\Sigma K)^d = \Sigma K,\ \ \Sigma L = 0 \\ &\Leftrightarrow (\Sigma K)^3 = \Sigma K,\ L = 0 \Leftrightarrow A^3 = \mathrm{A}, \end{aligned} \tag{3.20}$$

olup A matrisi bir EP matristir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Önerme 3.2 Eğer $A \in \mathbb{C}_n^n$ matrisi sıfırdan farklı, $ind(A) = m$ indeksli olsun. Bu takdirde A matrisi (3.2) formunda ve $A^{d,\dagger}$ da Teorem 3.3 deki gibi olmak üzere aşağıdaki durumlar sağlanır (Malik ve Thoma, 2014):

(a) $A^{d,\dagger}$ matirisin EP olması için gerek ve yeter şart $(\Sigma K)^d$ nin EP olmasıdır.

(b) $(A^{d,\dagger})^\dagger = U\begin{pmatrix} ((\Sigma K)^d)^\dagger & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}U^*$ dir.

İspat. (a) ve (b) şıkları Teorem 3.3 ün uygulanmasıyla elde edilebilir.

3.2 DMP İnverslerin Bazı Gösterimleri

Özellikle Moore-Penrose invers ve Drazin invers gibi bazı genelleştirilmiş inverslerin birçoğunun karakterizasyonu sütun uzayı ve sıfır uzayı yardımıyla bir tür dış invers olarak ifade edilebilmektedir. Bu nedenle öncelikle DMP invers durumunda da böyle bir karakterizasyon verilebilir.

Teorem 3.7 Eğer $A \in \mathbb{C}_n^n$ matrisi $ind(A) = m$ indeksli ise bu takdirde

$$A^{d,\dagger} = A^{(2)}_{\Re(A^m),\mathcal{N}(A^m A^\dagger)} \tag{3.21}$$

olacaktır (Zuo ve Ark., 2022).

İspat. DMP invers tanımından görülebilir ki bu inversin bir dış invers olabilmesi için $\Re(A^{d,\dagger}) = \Re(A^m)$ ve $\mathcal{N}(A^{d,\dagger}) = \mathcal{N}(A^m A^\dagger)$ olmasının yeterlidir. Bunun sonucunda

$$\Re(A^{d,\dagger}) = \Re(A^d A A^{d,\dagger}) \subseteq \Re(A^m) = \Re(A^d A^{m+1})$$
$$= \Re(A^d A A^\dagger A^{m+1}) \subseteq \Re(A^{d,\dagger})$$

ve dolayısıyla $\Re(A^{d,\dagger}) = \Re(A^m)$ olduğu görülür. Benzer şekilde

$$\mathcal{N}(A^{d,\dagger}) \subseteq \mathcal{N}(A^m A^{d,\dagger}) = \mathcal{N}(A^m A^\dagger)$$
$$\subseteq \mathcal{N}((A^d)^m A^m A^{d,\dagger}) = \mathcal{N}(A^d A A^\dagger) = \mathcal{N}(A^{d,\dagger})$$

ve dolayısıyla $\mathcal{N}(A^{d,\dagger}) = \mathcal{N}(A^m A^{d,\dagger})$ olduğu görülür. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.1 ve Teorem 3.7 nin $\Re(A^{d,\dagger}) = \Re(A^m)$ ve $\mathcal{N}(A^{d,\dagger}) = \mathcal{N}(A^m A^\dagger)$ sonuçları kullanılarak bir A matrisinin DMP inversinin bazı farklı karakterizasyonları verilebilir. Bunun için aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 3.8 Eğer $A, X \in \mathbb{C}_n^n$ matrisi $ind(A) = m$ indeksli ise bu takdirde aşağıdaki ifadeler birbirine denktir (Zuo ve Ark., 2022):

(a) $X = A^{d,\dagger}$ dir,

(b) $A^m X = A^m A^\dagger$ ve $\Re(X) = \Re(A^m)$ dir.

(c) $\Re(X) = \Re(A^m), \mathcal{N}(X) = \mathcal{N}(A^m A^\dagger),\ XA \in \mathbb{C}_n^P$ dir.

(d) $\Re(X) = \Re(A^m), \mathcal{N}(X) = \mathcal{N}(A^m A^\dagger),\ AX \in \mathbb{C}_n^P$ dir.

(e) $\Re(X) = \Re(A^m), \mathcal{N}(X) = \mathcal{N}(A^m A^\dagger),\ XA^d = (A^d)^2$ dir.

(f) $XA^{m+1} = A^m, \mathcal{N}(X) = \mathcal{N}(A^m A^\dagger)$ dir.

(g) $XAA^d = A^d, r(X) = r(A^m), A^m X = A^m A^\dagger$ dir.

(h) $XAA^d = A^d, \mathcal{N}(X) = \mathcal{N}(A^m A^\dagger)$ dir.

İspat. Teorem 3.7 ve DMP invers tanımı veya Teorem 3.1 dikkate alınırsa (a) şıkkının diğer (b)-(e) şıklarının tümünü sağladığı kolaylıkla gösterilebilir.

(b) $\Longrightarrow$(a): $A^d A = P_{\Re(A^m),\mathcal{N}(A^m)}$ olduğundan $\Re(X) = \Re(A^m)$ den $A^d AX = X$ yazılabilir. öte yandan $A^d A$ matrisi idempotent olduğundan

$$X = A^d AX = (A^d A)^m X = (A^d A)^m A^m A^\dagger = A^{d,\dagger}$$

elde edilir.

(c) $\Longrightarrow$(b): XA idempotent olduğundan $\Re(A - AXA) \subseteq \mathcal{N}(X) = \mathcal{N}(A^m A^\dagger)$ olduğu ve dolayısıyla $A^m A^\dagger A = A^m A^\dagger AXA$ yani $A^m = A^m XA$ olduğu görülür. Bu eşitlik $A^\dagger$ ile sağdan çarpılırsa $A^m A^\dagger = A^m XAA^\dagger$ eşitliği elde edilir. Sonuç olarak $\Re(I - AA^\dagger) \subseteq \mathcal{N}(A^m A^\dagger) = \mathcal{N}(X)$ olduğundan $X = XAA^\dagger$ eşitliği yazılanilir. Buradan da $A^m A^\dagger = A^m X$ elde edilir.

(d) $\Longrightarrow$(a): Bu durum (c) $\Longrightarrow$(a) kısmındakine benzer olarak gösterilebilir.

(e) $\Longrightarrow$(b): $\Re(X) = \Re(A^m)$ olduğundan $A^d AX = X$ olup $XA^d = (A^d)^2$ eşitliği dikkate alınırsa $XA^d A = A^d$ ve bununla beraber $X = A^d A^2 X$ olduğu görülebilir. Bu nedenle $\Re(I - A^d A^2) \subseteq \mathcal{N}(A^m A^\dagger) = \mathcal{N}(X)$ yazılabilir ve buradan da $A^\dagger = A^{m+1} A^d X$ yani $A^m A^\dagger = A^m X$ olduğu görülür.

(f) ⟹(e): $XA^{m+1} = A^m$ eşitliği sağdan $(A^d)^{m+2}$ ile çarpılırsa $XA^d = (A^d)^2$ olduğu görülür. Bu durumda $\mathfrak{R}(A^m A^\dagger) = \mathfrak{R}(A^m)$ ve $\mathcal{N}(X) = \mathcal{N}(A^m A^\dagger)$ eşitlikleri kullanılırsa $dim\mathfrak{R}(A^m) = dim\mathfrak{R}(X)$ olduğu ve $\mathfrak{R}(A^m) \subseteq \mathfrak{R}(X)$ olduğundan $\mathfrak{R}(A^m) = \mathfrak{R}(X)$ eşitliğinin sağlandığı görülür.

(g) ⟹(b): $XAA^d = A^d$ eşitliğinin $XA^{m+1} = A^m$ ye denk olduğunu belirtelim ki bu da $\mathfrak{R}(A^m) \subseteq \mathfrak{R}(X)$ olduğunu gösterir. Bu durumda da $r(A^m) = r(X)$ eşitliğine göre $\mathfrak{R}(A^m) = \mathfrak{R}(X)$ elde edilir.

(h) ⟹(f): Bu durum $XAA^d = A^d$ ve $XA^{m+1} = A^m$ ifadelerinin denkliğinden kolayca görülebilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Not 3.1 Teorem 3.8 de aşağıdaki değişiklikler yapılabilir:

(a) Teorem 3.8 (e) şıkkında $XA^{m+1} = A^m$ yerine $XA = A^d A$ ve $\mathcal{N}(X) = \mathcal{N}(A^m A^\dagger)$ yerine $\mathcal{N}(A^m A^\dagger) \subseteq \mathcal{N}(X)$ yazılabilir.

(b) Teorem 3.8 (b), (c), (d) ve (f) şıklarında $\mathfrak{R}(A^m) = \mathfrak{R}(X)$ yerine $\mathfrak{R}(X) \subseteq \mathfrak{R}(A^m)$ yazılabilir.

Örnek 3.2 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ve $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ matrisleri verilmiş olsun. Bu takdirde basit hesaplamalarla

$$A^d = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad A^\dagger = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

olacağı gösterilebilir. Öte yandan $indA = 2$ olduğu açıktır. Bu durumda X matrisinin $XAA^d = A^d$ ve $A^2X = A^2A^\dagger$ eşitliklerini sağladığı görülür. Bununla beraber $\mathfrak{R}(X) \neq \mathfrak{R}(A^2)$ olacaktır. Bu nedenle teorem 3.7 ye göre $X \neq A^{d,\dagger}$ olduğu görülür.

Teorem 3.8 e göre $AA^{d,\dagger}$ ve $A^{d,\dagger}A$ matrisleri izdüşüm matrisleri olduğundan aşağıdaki teoremde $A^{d,\dagger}$ DMP inversinin $AA^{d,\dagger}$ ve $A^{d,\dagger}A$ izdüşümlerine göre bazı karakterizasyonları verilecektir. Burada $AA^d = P_{\mathfrak{R}(A^m),\mathcal{N}(A^m A^\dagger)}$ olduğu gösterilecektir. Ayrıca $A^{d,\dagger}A = AA^d$ olduğu gösterilebilir.

Teorem 3.9 Eğer $A, X \in \mathbb{C}_n^n$ matrisi $ind(A) = m$ indeksli ise bu takdirde aşağıdaki ifadeler birbirine denktir (Zuo ve Ark., 2022):

(a) $X = A^{d,\dagger}$ dir.

(b) $AX = A^2A^dA^\dagger$, $\Re(X) \subseteq \Re(A^m)$ dir.

(c) $AXA = AA^dA$, $\Re(X) \subseteq \Re(A^m)$, $\mathcal{N}(A^mA^\dagger) \subseteq \mathcal{N}(X)$ dir.

(d) $XA = AA^d$, $\mathcal{N}(A^mA^\dagger) \subseteq \mathcal{N}(X)$ dir.

(e) $AX^2 = X$, $A^mX = A^mA^\dagger$ dir.

(f) $AX^2 = X, AX = P_{\Re(A^m),\mathcal{N}(A^mA^\dagger)}$ dir.

(g) $XAX^2 = X, AX = A^2A^dA^\dagger$ dir.

İspat. Teorem 3.7 ve DMP invers tanımı veya Teorem 3.1 dikkate alınırsa (a) şıkkının diğer şıklarının tümünü sağladığı kolaylıkla gösterilebilir.

(b) ⟹(a): $AX = A^2A^dA^\dagger$ olduğundan $A^mX = A^mA^\dagger$ eşitliği sağlanır. Ayrıca $\Re(X) \subseteq \Re(A^m)$ ve $A^mX = A^mA^\dagger$ olduğundan $\Re(X) = \Re(A^m)$ yazılabilir. bu durumda Teorem 3.7 nin (b) ⟹(a) durumundan $X = A^{d,\dagger}$ olduğu görülür.

(c) ⟹(a): $\Re(X) \subseteq \Re(A^m)$ olduğundan $A^dAX = X$ olacaktır. $AXA = AA^dA$ eşitliği soldan A^d ile çarpılırsa $XA = A^dA$ olduğu görülür. $\Re(I - AA^\dagger) \subseteq \mathcal{N}(A^mA^\dagger) \subseteq \mathcal{N}(X)$ olduğundan $X = XAA^\dagger$ elde edilir. Böylece $A^mX = A^mXAA^\dagger = A^mA^dAA^\dagger = A^mA^\dagger$ eşitliği elde edilir.

(d) ⟹(a): Bu durum (c) ⟹(a) durumuna benzer şekilde gösterilebilir.

(e) ⟹(a): $AX^2 = X$ olduğundan $X = A^mX^{m+1}$ olup buradan $\Re(X) \subseteq \Re(A^m)$ olduğu görülür. Öte yandan $A^mX = A^mA^\dagger$ olduğundan $\Re(X) = \Re(A^m)$ olacaktır. Bu nedenle Teorem 3.7 (b) ⟹(a) dan $X = A^{d,\dagger}$ olduğu elde edilir.

(f) ⟹(a): (e) ⟹(a) durumunda olduğu gibi $AX^2 = X$ den $X = A^dAX$ elde edilir. Öte yandan $\Re(I - AX) = \mathcal{N}(A^mA^\dagger)$ olduğundan $A^mA^\dagger = A^mA^\dagger AX = A^mX$ elde edilir.

(g) ⟹(a): $AX = A^2A^dA^\dagger$ olduğundan $A^mA^\dagger = A^mX$ elde edilir.

Teorem 3.10 (Cline Formülü) $A, B \in \mathbb{C}_n^n$ matrisleri verilmiş olsun. Bu durumda AB çarpımı Drazin inverse sahip ise BA çarpımı da c sahip olup

$$(BA)^d = B((AB)^d)^2A \tag{3.22}$$

dir (Liau ve Ark. 2014).

İspat. İspat için Liau ve Ark. (2014) kaynağına bakılabilir.

Sonuç 3.1 Eğer $A \in \mathbb{C}_n^n$ matrisi $ind(A) = m$ indeksli ise bu takdirde $A^{d,\dagger} = (A^2 A^\dagger)^d$ dir (Zuo ve Ark., 2022).

İspat. Drazin inversler için Cline formülü dikkate alınırsa $(A^2 A^\dagger)^d = A(A^d)^2 A A^\dagger = A^{d,\dagger}$ olduğu görülür.

Sonuç 3.2 $A \in \mathbb{C}_n^n$ matrisi verilmiş olsun. Bu durumda $\bar{A} = I - A$ olmak üzere

$$A^{d,\dagger} = P_A (I - \bar{A} P_A)^d = (I - \bar{A} P_A)^d P_A \tag{3.23}$$

eşitliği sağlanır(Zuo ve Ark., 2022).

İspat. $I - \bar{A} P_A = I - AA^\dagger + A^2 A^\dagger$ olup $I - AA^\dagger$ ve $A^2 A^\dagger$ matrislerinin her iki çarpımı da sıfır olacağından

$$(I - \bar{A} P_A)^d = (I - AA^\dagger + A^2 A^\dagger)^d = I - AA^\dagger + (A^2 A^\dagger)^d \tag{3.24}$$

olduğu görülür. Bu durumda Teorem 3.11 e göre $(I - \bar{A} P_A)^d = I - AA^\dagger + A^{d,\dagger}$ yazılır. Bu nedenle

$$P_A (I - \bar{A} P_A)^d = P_A A^{d,\dagger} = A^{d,\dagger} \quad \text{ve} \quad (I - \bar{A} P_A)^d P_A = A^{d,\dagger} P_A = A^{d,\dagger} \tag{3.25}$$

olduğu görülür ve böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 3.3 $A \in \mathbb{C}_n^n$ matrisi $ind(A) = m$ indeksli ise bu durumda $A^{d,\dagger} = A^d$ olması için gerek ve yeter şart $A^m A^d = A^m A^\dagger$ olmasıdır (Zuo ve Ark., 2022).

İspat. Kolayca gösterilebilir ki $A^{d,\dagger} = A^d$ eşitliği $A^d A A^\dagger = A^d = A^d A A^d$ ye denktir. Yani $A^d A (A^\dagger - A^d) = 0$ olacaktır. Bu nedenle $A^{d,\dagger} = A^d$ olması için gerek ve yeter şart
$\mathfrak{R}(A^\dagger - A^d) \subseteq \mathcal{N}(A^m)$ yani $A^m A^d = A^m A^\dagger$ olmasıdır. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 3.4 $A \in \mathbb{C}_n^n$ matrisi $ind(A) = m$ indeksli ise bu durumda $A^{d,\dagger} = A^\dagger$ olması için gerek ve yeter şart $\mathfrak{R}(A^*) \subseteq \mathfrak{R}(A^m)$ olmasıdır (Zuo ve Ark., 2022).

İspat. Kolayca gösterilebilir ki $A^{d,\dagger} = A^\dagger$ eşitliği $(I - A^d A) A^\dagger = 0$ yani $\mathfrak{R}(A^*) \subseteq \mathfrak{R}(A^m)$ olmasına denk olacaktır.

Teorem 3.11 $ind(A) = m$ olan bir $A \in \mathbb{C}_n^n$ matrisinin singüler değer ayrışımı

$$A = U \begin{pmatrix} T & S \\ 0 & N \end{pmatrix} U^* \tag{3.26}$$

olmak üzere $A^{d,\dagger}$

$$A^{d,\dagger} = U\begin{pmatrix} T^{-1} & T^{-(m+1)}\tilde{S}NN^{\dagger} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}U^* \tag{3.27}$$

olacaktır, burada T nonsingüler, N nilpotent ve U üniter bir matris olmak üzere $\tilde{S} = \sum_{i=0}^{m-1} T^i\, SN^{m-i-1}$ dir (Zuo ve Ark., 2022).

İspat. $ind(A) = m$ olan bir $A \in \mathbb{C}_n^n$ matrisi için A^{2m+1} in bir iç inversi $(A^{2m+1})^-$ olmak üzere $A^d = A^m(A^{2m+1})^- A^m$ olduğu gösterilebilir. Bu durumda Teorem 3.1 e göre $A^{d,\dagger} = A^m(A^{2m+1})^- A^{m+1}A^{\dagger}$ elde edilir. Öte yandan grup invers de bir iç invers olduğundan $A^{d,\dagger} = A^m(A^{2m+1})^{\#} A^{m+1}A^{\dagger}$ elde edilir. Ayrıca A matrisinin singüler değer ayışımından $\tilde{S} = \sum_{i=0}^{m-1} T^i\, SN^{m-i-1}$ olmak üzere

$$A^{2m+1} = U\begin{pmatrix} T^{2m+1} & T^{(m+1)}\tilde{S} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}U^* \tag{3.28}$$

yazılabilir. Buradan direkt bir hesaplamayla

$$(A^{2m+1})^{\#} = \begin{pmatrix} (T^{2m+1})^{-1} & (T^{3m+1})^{-1}\tilde{S} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}U^* \text{ ve } AA^{\dagger} = U\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & NN^{\dagger} \end{pmatrix}U^* \tag{3.29}$$

olduğu görülebilir ve buradan da

$$\begin{aligned} A^{d,\dagger} &= A^m(A^{2m+1})^{\#} A^{m+1}A^{\dagger} \\ &= U\begin{pmatrix} T^{-1} & T^{-(m+1)}\tilde{S}NN^{\dagger} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}U^* \end{aligned} \tag{3.30}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

3.3 DMP İnversin Yer Değiştirme Yapısı

Bir integral operatörünün inversi için yer değiştirme kavrami ilk kez 1972 yılında L.A. Sakhnovich' in On Similarity of Operators isimli çalışmasında ele alınmıştır. Bir A matrisine yer değiştirme yapısına sahiptir denir şayet $AU - VA$ Sylvester yer değiştirmesi ve $A - VAU$ Stein yer değiştirmelerinin rankı A nın rankından çok daka küçük olacak şekilde uygun boyutlu U ve V matrisleri bulunabilirse. Bu durumda eğer bir A matrisi yer değiştirme yapısına sahip ise bu takdirde A matrisi ters alma algoritmaları çok daha hızlı uygulanabilir. Yer değiştirme yapısı genelleştirilmiş inverslerin hesaplanmasında da yaygın olarak kullanılmaktadır. Bu kısımda öncelikle bazı kısıtlamalar altında DMP inversin Sylvester yer değiştirme rankını ele alacağız. Daha sonra da genel bir yer değiştirme kavramı ele alınacaktır.

$A \in \mathbb{C}_n^m$ olsun. Ayrıca $U \in \mathbb{C}_n^n$ ve $V \in \mathbb{C}_m^m$ keyfi matrisleri verilsin. Bu durumda

$$d(U,V)A = AU - VA \tag{3.31}$$

operatörüne A matrisinin Sylvester yer değiştirmesi adı verilir. $d(U,V)A$ nın rankına da A matrisinin Sylvester yer değiştirme rankı denir. Nonsingüler bir A matrisi için $AU - VA = A(UA^{-1} - A^{-1}V)A$ eşitliği bize nonsingüler bir A matrisinin Sylvester yer değiştirme rankının onun A^{-1} inversinin rankına eşit olduğunu söyler. Başka bir deyişle eğer A matrisi (U,V) ile ilgili Sylvester yer değiştirme rankına göre yapılanmış ise A^{-1} inversi de (V,U) ile ilgili Sylvester yer değiştirme rankına göre yapılanmış olacaktır. Genelleştirilmiş inverslerin yer değiştirme rankını göz önüne almak doğaldır. Bu kısımda bazı şartlar altında DMP inversin ter değiştirme rankı için bir üst sınır verilecektir. Bununla ilgili olarak önce aşağıdaki lemma verilebilir.

Lemma 3.2 $A, P \in \mathbb{C}_n^n$ olmak üzere $P^2 = P$ olduğunu varsayalım. Bu takdirde aşağıdaki durumlar sağlanır (Wang ve Ark. 2018):

(a) $PA = A$ olması için kerek ve yeter şart $\mathfrak{R}(A) \subset \mathfrak{R}(P)$ olmasıdır.

(b) $AP = A$ olması için kerek ve yeter şart $Ker(P) \subset Ker(A)$ olmasıdır.

Şimdi $M = A^{d,\dagger}A$, $M_* = AA^{d,\dagger}$, $N = I - M$ ve $N_* = I - M_*$ matrislerini tanımlayalım. Bu takdirde

$$A^{d,\dagger}(AU - VA)A^{d,\dagger} = (I - N)UA^{d,\dagger} - A^{d,\dagger}V(I - N_*) \tag{3.32}$$

eşitliğinin sağlandığı kolayca gösterilebilir. Bu nedenle aşağıdaki lemma verilebilir.

Lemma 3.3 $A, U, V \in \mathbb{C}_n^n$ olsun. Bu takdirde

$$A^{d,\dagger}V - UA^{d,\dagger} = A^{d,\dagger}VN_* - NUA^{d,\dagger} - A^{d,\dagger}(AU - VA)A^{d,\dagger} \tag{3.33}$$

eşitliği sağlanır (Zhong ve Yang, 2022).

(3.33) eşitliğinden her iki tarafın rankı alınırsa $A^{d,\dagger}$ nın Sylvester yer değiştirme rankı için bir üst sınır verilebilir.

Teorem 3.12 $A^{d,\dagger}$ nın Sylvester yer değiştirme rankı için

$$r(A^{d,\dagger}V - UA^{d,\dagger}) \leq r(AU - VA) + r(M_*VN_*) + r(NUM) \tag{3.34}$$

eşitsizliği sağlanır (Zhong ve Yang, 2022).

İspat. $\Re(M) = \Re(A^{d,\dagger}A) \subset \Re(A^{d,\dagger})$ olduğu açıktır. Bu durumda

$$\Re\left(A^{d,\dagger}\right) = \Re\left(A^{d}AA^{\dagger}\right) \subset \Re\left(A^{d}A\right) = \Re\left(A^{d,\dagger}A\right) = \Re(M)$$

olduğundan $\Re(M) = \Re(A^{d,\dagger})$ elde edilir. Öte yandan

$$Ker\left(A^{d,\dagger}\right) \subset Ker\left(AA^{d,\dagger}\right) = Ker(M_*)$$

olduğu açıktır. Tersine olarak $x \in Ker\Re(M_*)$ için $AA^{d,\dagger}x = AA^{d}AA^{\dagger}x = 0$ olup buradan $A^{d}AA^{d}AA^{\dagger}x = A^{d}AA^{\dagger}x = A^{d,\dagger}x = 0$ olduğu görülür, yani $Ker(M_*) \subset Ker(A^{d,\dagger})$ elde edilir. Böylece $Ker(M_*) = Ker(A^{d,\dagger})$ olduğu görülür. Ayrıca

$$\begin{aligned} r\left(NUA^{d,\dagger}\right) &= \dim\left(\Re\left(NUA^{d,\dagger}\right)\right) \\ &= \dim\left(NU\Re(A^{d,\dagger})\right) \\ &= \dim\big(NU\Re(M)\big) \\ &= \dim\big(\Re(NUM)\big) \\ &= r(NUM) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} r\left(A^{d,\dagger}VN_*\right) &= \mathrm{n} - \dim\left(Ker\left(A^{d,\dagger}VN_*\right)\right) \\ &= \mathrm{n} - \dim\big(Ker(M_*VN_*)\big) \\ &= r(M_*VN_*) \end{aligned}$$

eşitlikleri yazılabilir. Bu durumda lemma 3.3 den (3.34) eşitliğinin sağlandığı görülür ve böylece de ispat tamamlanmış olur.

Şimdi bazı şartlar altında (3.34) eşitsizliğinin sağ tarafındaki ikinci ve üçüncü terimin toplamı için bir üst sınır verilebilir.

Teorem 3.13 $A \in \mathbb{C}_n^n$ matrisi (3.2) formunda verilmiş olsun. $U_1, V_1 \in \mathbb{C}_r^r$ olmak üzere

$$U = S\begin{pmatrix} U_1 & U_2 \\ U_3 & U_4 \end{pmatrix}S^* \text{ ve } V = S\begin{pmatrix} V_1 & V_2 \\ V_3 & V_4 \end{pmatrix}S^*$$

olsun. Bu takdirde eğer

$$\Re(U_1) \subset \Re((\Sigma K)^{p-1}) \text{ ve } Ker((\Sigma K)^{p-1}) \subset Ker(V_1)$$

içermeleri sağlanırsa, $p = ind(A)$ ve $G = A^p A^\dagger$ olmak üzere

$$r(M_* V N_*) + r(NUM) \leq r(UG - GV) \tag{3.35}$$

eşitsizliği sağlanır (Zhong ve Yang, 2022).

İspat. İlk önce G matrisinin yapısını belirleyelim. Eğer $A = S\begin{pmatrix} \Sigma K & \Sigma L \\ 0 & 0 \end{pmatrix} S^*$ formunda ise bu takdirde $A^\dagger = S\begin{pmatrix} K^*\Sigma^{-1} & 0 \\ L^*\Sigma^{-1} & 0 \end{pmatrix} S^*$ olacağından

$$\begin{aligned} G = A^p A^\dagger &= S\begin{pmatrix} (\Sigma K)^p & (\Sigma K)^{p-1}\Sigma L \\ 0 & 0 \end{pmatrix} S^* S \begin{pmatrix} K^*\Sigma^{-1} & 0 \\ L^*\Sigma^{-1} & 0 \end{pmatrix} S^* \\ &= S\begin{pmatrix} (\Sigma K)^p K^*\Sigma^{-1} + (\Sigma K)^{p-1}\Sigma L L^*\Sigma^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} S^* \\ &= S\begin{pmatrix} (\Sigma K)^{p-1}\Sigma(\mathrm{K}K^* + LL^*)\Sigma^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} S^* \\ &= S\begin{pmatrix} (\Sigma K)^{p-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} S^* \end{aligned}$$

olduğu görülür. Şimdi de $M_* V N_*$ ve NUM nin gösterimlerini verelim. Bu durumda $P = (\Sigma K)(\Sigma K)^p$ alınırsa

$$\begin{aligned} M_* V N_* &= A^{d,\dagger} V (I - AA^{d,\dagger}) \\ &= S\begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V_1 & V_2 \\ V_3 & V_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I - P & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} S^* \\ &= S\begin{pmatrix} PV_1(I-P) & PV_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} S^* \end{aligned} \tag{3.36}$$

elde edilir. Burada $ind(A) = p$ olduğundan $ind(\Sigma K) = p - 1$ olacaktır. Öte yandan, eğer $Ker((\Sigma K)^{p-1}) \subset Ker(V_1)$ ise bu takdirde

$$Ker(P) = Ker\left((\Sigma K)^d\right) = Ker((\Sigma K)^{p-1}) \subset Ker(V_1)$$

olup lemma 3.3 e göre $V_1(I - P) = 0$ elde edilir. Bu durumda (3.36) dan

$$\begin{aligned} r(M_* V N_*) = r(PV_2) &= \mathrm{n} - \dim\left(Ker(PV_2)\right) \\ &= n - \dim(Ker(\Sigma K)^{p-1} V_2) \\ &= r((\Sigma K)^{p-1} V_2) \end{aligned} \tag{3.37}$$

elde edilir. Diğer taraftan $Q = (\Sigma K)^p(\Sigma L)$ olmak üzere

$$
\begin{aligned}
NUM &= \left(I - A^{d,\dagger}A\right)UA^{d,\dagger}A \\
&= S\begin{pmatrix} I-P & -Q \\ 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} U_1 & U_2 \\ U_3 & U_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P & Q \\ 0 & I \end{pmatrix}S^* \\
&= S\begin{pmatrix} (I-P)U_1P - QU_3P & (I-P)U_1Q - QU_3Q \\ U_3P & U_3Q \end{pmatrix}S^* \qquad (3.38)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Buradan

$$
\begin{aligned}
r(NUM) &= r\left(S\begin{pmatrix} I & Q \\ 0 & I \end{pmatrix}S^*NUM\right) \\
&= r\left(S\begin{pmatrix} (I-P)U_1P - QU_3P & (I-P)U_1Q - QU_3Q \\ U_3P & U_3Q \end{pmatrix}S^*\right) \\
&= r\left(S\begin{pmatrix} (I-P)U_1 & 0 \\ U_3P & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P & Q \\ 0 & 0 \end{pmatrix}S^*\right) \\
&\leq r\left(S\begin{pmatrix} (I-P)U_1 & 0 \\ U_3P & 0 \end{pmatrix}S^*\right) \qquad (3.39)
\end{aligned}
$$

olduğu görülür. Öte yandan $\Re((\Sigma K)^{p-1}) = \Re\left((\Sigma K)^d\right) = \Re(P)$ olduğunu belirtelim. Bu durumda eğer $\Re(U_1) \subset \Re((\Sigma K)^{p-1})$ ise $PU_1 = U_1$ olacaktır. Böylece (3.39) dan

$$
r(NUM) \leq r(U_3P) = r\left(U_3(\Sigma K)^d\right) = r(U_3(\Sigma K)^{p-1}) \qquad (3.40)
$$

elde edilir. Buradan $F = UG - GV$ alınırsa

$$
\begin{aligned}
S^*FS &= S^*USS^*GS - S^*GSS^*VS \\
&= \begin{pmatrix} U_1 & U_2 \\ U_3 & U_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (\Sigma K)^{p-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} (\Sigma K)^{p-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V_1 & V_2 \\ V_3 & V_4 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} U_1(\Sigma K)^{p-1} - (\Sigma K)^{p-1}V_1 & -(\Sigma K)^{p-1}V_2 \\ U_3(\Sigma K)^{p-1} & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

yazılabilir. (3.37) ve (3.40) dan

$$
\begin{aligned}
r&\begin{pmatrix} U_1(\Sigma K)^{p-1} - (\Sigma K)^{p-1}V_1 & -(\Sigma K)^{p-1}V_2 \\ U_3(\Sigma K)^{p-1} & 0 \end{pmatrix} \\
&\geq r((\Sigma K)^{p-1}V_2) + r(U_3(\Sigma K)^{p-1}) \\
&\geq r(M_*VN_*) + r(NUM)
\end{aligned}
$$

elde edilir ve böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.12 ve Teorem 3.13 birleştirilerek aşağıdaki sonuçlar verilebilir.

Sonuç 3.5 $A \in \mathbb{C}_n^n$ matrisi (3.2) formunda verilmiş olsun. $U_1, V_1 \in \mathbb{C}_r^r$ olmak üzere

$$U = S\begin{pmatrix} U_1 & U_2 \\ U_3 & U_4 \end{pmatrix}S^* \text{ ve } V = S\begin{pmatrix} V_1 & V_2 \\ V_3 & V_4 \end{pmatrix}S^*$$

olsun. Eğer $\Re(U_1) \subset \Re((\Sigma K)^{p-1})$ ve $Ker((\Sigma K)^{p-1}) \subset Ker(V_1)$ ise, bu takdirde $p = ind(A)$ ve $G = A^p A^\dagger$ olmak üzere

$$r(A^{d,\dagger}V - UA^{d,\dagger}) \leq r(AU - VA) + r(UG - GV)$$

eşitsizliği sağlanır Zhong ve Yang, 2022).

Sonuç 3.6 $A \in \mathbb{C}_n^n$ matrisi (3.2) formunda verilsin ve $ind(A) = 1$ olsun. Bu takdirde $A^{\oplus}$ A nın çekirdek inversi olmak üzere

$$r(A^{\oplus}V - UA^{\oplus}) \leq r(AU - VA) + r(UG - GV)$$

eşitsizliği sağlanır, burada $G = AA^\dagger$ dir (Zhong ve Yang, 2022).

3.4 Üst Üçgensel Matrislerin DMP İnversinin Karakterizasyonları

Bu kısımdaki amacımız $T_i, i = 1,2,3,$ uygun boyuttan matrisler olmak üzere

$$T = \begin{pmatrix} T_1 & T_2 \\ 0 & T_3 \end{pmatrix} \tag{3.41}$$

tipindeki birüst üçgensel matrisin DMP inversinin çeşitli karakterizasyonlarını ve özelliklerini incelemektir. Bunun için öncelikle bazı lemmaları vereceğiz.

Lemma 3.4 uygun boyuttan matrisler olmak üzere eğer T_1 matrisi tersinir ise bu takdirde $T = \begin{pmatrix} T_1 & T_2 \\ 0 & T_3 \end{pmatrix}$ nin Moore-Penrose inversinin mevcut olması için gerek ve yeter şart $\Re(T_2)$ nin kapalı olmasıdır. Bu durumda $\Delta = \left(T_1T_1^* + T_2(I - T_3^\dagger T_3)T_2^*\right)^{-1}$ olmak üzere

$$T^\dagger = \begin{pmatrix} T_1^*\Delta & -T_1^*\Delta T_2 T_3^\dagger \\ (I - T_3^\dagger T_3)T_2^* & T_3^\dagger - ((I - T_3^\dagger T_3)T_2^*\Delta\, T_2 T_3^\dagger \end{pmatrix} \tag{3.42}$$

dir. Ayrıca $TT^\dagger = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & T_3T_3^\dagger \end{pmatrix}$ olup

$$T^\dagger T = \begin{pmatrix} T_1^*\Delta T_1 & -T_1^*\Delta T_2(I - T_3^\dagger T_3) \\ (I - T_3^\dagger T_3)T_2^*\Delta T_1 & T_3^\dagger\, T_3 + (I - T_3^\dagger T_3)T_2^*\Delta\, T_2 I - T_3^\dagger T_3) \end{pmatrix} \tag{3.43}$$

olacaktır (Cvetkovic, 2008).

Eğer $int(T) = k$ olmak üzere T matrisi T^d Drazin inversine sahipse $TT^k = T^{k+2}T^d = T^kT^2T^d$ olduğundan $\mathfrak{R}(T^k)$ uzayı T matrisinin bir invariant altuzayı olup T matrisi T_1 tersinir ve $T_3^k = 0$ olmak üzere $H = \mathfrak{R}(T^k) \oplus (\mathfrak{R}(T^k))^{\perp}$ uzay ayrışımına göre

$$T = \begin{pmatrix} T_1 & T_2 \\ 0 & T_3 \end{pmatrix} \tag{3.44}$$

formunda yazılabilir.

Lemma 3.5 Eğer $T = \begin{pmatrix} T_1 & T_2 \\ 0 & T_3 \end{pmatrix}$ matrisi Drazin tersinir ve $int(T) = k$ ise, bu takdirde

$$T^d = \begin{pmatrix} T_1^{-1} & \sum_{i=0}^{k-1} T_1^{i-k-1} T_2 T_3^{k-1-i} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.45}$$

olacaktır (Du ve deng, 2005).

$$X_0 = \sum_{i=0}^{k-1} T_1^{i-k-1} T_2 T_3^{k-1-i} \quad \text{ve} \quad \Delta = \left(T_1T_1^* + T_2(I - T_3^{\dagger}T_3)T_2^*\right)^{-1} \tag{3.46}$$

olarak tanımlansın.

Lemma 3.6 T_1 matrisi tersinir, X_0 matrisi (3.46) daki şekilde tanımlı ve $T_3^k = 0$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki durumlar sağlanır (Yu ve Deng, 2016):

(a) $T_1X_0 - X_0T_2 = T_1^{-1}T_2$ (3.47)

(b) $X_0 = 0 \Leftrightarrow T_2 = 0$

(c) $X_0T_3T_3^{\dagger} = 0 \Leftrightarrow X_0T_3 = 0 \Leftrightarrow T_2T_3 = 0 \Leftrightarrow X_0 = T_1^{-2}T_2$

İspat. (a) şıkkı X_0 ın tanımından (b) şıkkı (3.47) eşitliğinden elde edilir. (c) için eğer $X_0T_3T_3^{\dagger} = 0$ ise $X_0T_3 = X_0T_3T_3^{\dagger}T_3 = 0$ olacaktır. Eğer $X_0T_3 = 0$ ise (3.46) ya göre

$$T_1^{-2}T_2T_3 + T_1^{-3}T_2T_3^2 + \cdots + T_1^{-k+1}T_2T_3^{k-2} + T_1^{-k}T_2T_3^{k-1} = 0 \tag{3.48}$$

olacaktır. Eğer bu ifade sağdan T_3^{k-2} ile çarpılırsa $T_1^{-2}T_2T_3^{k-1} = 0$ olduğu görülür. Buradan da $T_2T_3^{k-1} = 0$ elde edilir. Aynı şekilde (3.48) ifadesi sağdan T_3^{k-3} ile çarpılırsa $T_2T_3^{k-2} = 0$ elde edilir. Bu şekilde devam edilerek $T_2T_3 = 0$ olduğu görülür. Tersine olarak eğer $T_2T_3 = 0$ ise X_0 ın tanımından $X_0 = T_1^{-2}T_2$ olacaktır. Öte yandan $X_0 = T_1^{-2}T_2$ ise

$$X_0 - T_1^{-2}T_2 = T_1^{-3}T_2T_3 + T_1^{-4}T_2T_3^2 + \cdots + T_1^{-k}T_2T_3^{k-2} + T_1^{-k-1}T_2T_3^{k-1} = 0$$

olacaktır. Yine buradan da $T_2T_3 = 0$ elde edilir. Eğer $T_2T_3 = 0$ ise $X_0T_3 = 0$ olacaktır. Eğer $X_0T_3 = 0$ ise $X_0T_3T_3^{\dagger} = 0$ olduğu görülür ve böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.14 Eğer T matrisi için $int(T) = k$ ise, bu takdirde T matrisinin DMP inversi tektir ve $T^{d,\dagger} = T^dTT^{\dagger}$ şeklindedir (Yu ve Deng, 2016).

İspat. Öncelikle belirtelim ki $int(T) = k(\leq 1$ olması gerekmez) olduğundan T matrisi matrisi hem Moore-Penrose hem de drazin tersinir olacaktır. $X = T^dTT^{\dagger}$ olsun. Bu takdirde

$$XTX = T^dTT^{\dagger}TT^dTT^{\dagger} = T^dTT^{\dagger} = X$$

olup $XT = T^dTT^{\dagger}T = T^dT$ ve $T^kX = T^kT^dTT^{\dagger} = T^kT^{\dagger}$ eşitlikleri sağlanır. Bu nedenle $X = T^dTT^{\dagger}$ DMP invers şartlarını sağlar. Eğer X_1 ve X_2 DMP şartlarını sağlayan iki matris ise bu durumda

$$\begin{aligned} X_1 = X_1\mathrm{T}X_1 &= TT^dX_1 \\ &= (TT^d)^kX_1 = (T^d)^kT^kX_1 \\ &= (T^d)^kT^kT^{\dagger} = (T^d)^kT^kX_2 \\ &= T^dTX_2 = X_2TX_2 = X_2 \end{aligned}$$

yazılabilir ve böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.14 den görülmektedir ki T nin hem Moore-Penrose hem de Drazin tersinir olması için gerek ve yeter şart DMP tersinir olmasıdır.

Teorem 3.15 Eğer T matrisi için $int(T) = k$ ise, bu takdirde T matrisinin DMP inversi X_0 (3.46) tanımlandığı gibi olmak üzere

$$T^{d,\dagger} = \begin{pmatrix} T_1^{-1} & X_0T_3T_3^{\dagger} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.49}$$

şeklindedir (Yu ve Deng, 2016).

İspat. Lemma 3.4, lemma 3.5 ve Teorem 3.14 den

$$T^{d,\dagger} = T^dTT^{\dagger} = \begin{pmatrix} T_1^{-1} & X_0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & X_0 \\ 0 & T_3T_3^{\dagger} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_1^{-1} & X_0T_3T_3^{\dagger} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

olduğu kolaylıkla görülür.

Bu durumda kolayca gösterilebilir ki

$$T^{d,\dagger}T=\begin{pmatrix} I & T_1X_0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ ve } TT^{d,\dagger}=\begin{pmatrix} I & T_1X_0T_3T_3^{\dagger} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

matrislerinin her ikisi de idempotent olacaktır.

T matrisiyle bir diğer invers daha vardır ki bu da $T^{\dagger,d}=T^{\dagger}TT^{d}$ olup T nin (3.44) deki uzay ayrışımı cinsinden $T^{\dagger,d}$ nın kanonik formu X_0 ve Δ (3.46) tanımlandığı gibi olmak üzere

$$T^{\dagger,d}=T^{\dagger}TT^{d}=\begin{pmatrix} T_1^*\Delta & T_1^*\Delta T_1X_0 \\ (I-T_3^{\dagger}T_3)T_2^*\Delta & T_3^{\dagger}-((I-T_3^{\dagger}T_3)T_2^*\Delta\, T_1X_0 \end{pmatrix} \tag{3.50}$$

ile verilebilir.

Not 3.2 (1) Eğer $(I-T_3^{\dagger}T_3)T_2^*=0$ ise bu takdirde $T^{\dagger,d}=T^{d}$ olacaktır. Şayet $int(T)\leq 1$ ise $T_3=0$ olacağından $T^{\#,\dagger}=T_1^{-1}\oplus 0$ olup $\Delta'=(T_1T_1^*+T_2T_2^*)^{-1}$ olmak üzere

$$T^{\dagger}=\begin{pmatrix} T_1^*\Delta' & 0 \\ T_2^*\Delta' & 0 \end{pmatrix},\ T^{\#}=\begin{pmatrix} T_1^{-1} & T_1^{-1}T_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ T^{\dagger,\#}=\begin{pmatrix} T_1^*\Delta' & T_1^*\Delta' T_1^{-1}T_2 \\ T_2^*\Delta' & T_2^*\Delta' T_1^{-1}T_2 \end{pmatrix} \tag{3.51}$$

olacaktır.

(2) Eğer $T^{\dagger}=T^{d}$ ise $T_2=T_3=0$ olacağından $T^{\#}=T^{\dagger}=T^{\#,\dagger}=T^{\dagger,\#}=T_1^{-1}\oplus 0$ olduğu gösterilebilir.

(3) Eğer $T^{\dagger}=T^{d}$ ise $T_2=0$ ve $T_1^2=I$ olacağından $int(T)\leq 1$, $T=T^3$ olup

$$T^{\#,\dagger}=T^{\#}TT^{\dagger}=T^2T^{\dagger}=(T^{\#})^2T^{\dagger},\ T^{\#,\dagger}T=T^2,\ T\,T^{\#,\dagger}=TT^{\dagger}$$

ve

$$T^{\dagger,\#}=T^{\dagger}TT^{\#}=T^{\dagger}T^2=T^{\dagger}(T^{\#})^2,\ \ T^{\dagger,\#}T=T^{\dagger}T,\ T\,T^{\dagger,\#}=T^2$$

olduğu gösterilebilir.

(4) Eğer $T^{d,\dagger}=T$ ise $T_2=T_3=0$ ve $T_1^2=I$ olacaktır. Bu durumda eğer $T^{\dagger}=T$ ise $(I-T_3^{\dagger}T_3)T_2^*=0$ ve $T_3^{\dagger}=T_3$ olduğu gösterilebilir. Öte yandan T_3 nilpotent olduğundan $T_3^{\dagger}=T_3$ eşitliği $T_3=0$ olduğunu gösterir. Buradan da $T_2=0$ ve $T_1^{\dagger}=I$ elde edilir. Bu durumda

$$T^{d,\dagger} = T \Leftrightarrow T^{\dagger} = T \Leftrightarrow T_2 = 0\,, T_3 = 0 \;\text{ ve }\; T_1^{\dagger} = I$$

olduğu gösterilebilir.

Teorem 3.16 Eğer T matrisi için $int(T) = k$ ise, bu takdirde T matrisinin DMP inversi $T^{d,\dagger} = (T^2T^{\dagger})^d$ şeklindedir (Yu ve Deng, 2016).

İspat. Teorem 3.15 den

$$T^{d,\dagger} = \begin{pmatrix} T_1^{-1} & X_0T_3T_3^{\dagger} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_0 = \sum_{i=0}^{k-1} T_1^{i-k-1}\, T_2T_3^{k-1-i}$$

yazılabilir. Bu durumda Lemma 3.4 e göre

$$T^2T^{\dagger} = T(TT^{\dagger}) = T = \begin{pmatrix} T_1 & T_2 \\ 0 & T_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & T_3T_3^{\dagger} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_1 & T_2T_3T_3^{\dagger} \\ 0 & T_3^2T_3^{\dagger} \end{pmatrix}$$

yazılabilir. Bu durumda eğer $int(T) \leq 1$ ise $T_3 = 0$ olup

$$(T^2T^{\dagger})^d = \begin{pmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^d = \begin{pmatrix} T_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = T^{d,\dagger}$$

olacağından iddia sağlanır. Eğer $int(T) \geq 2$ ise $T_3^k = 0$ olduğundan $\left(T_3^2T_3^{\dagger}\right)^{k-1} = T_3^kT_3^{\dagger} = 0$ olacaktır. Lemma 3.5 e göre

$$(T^2T^{\dagger})^d = \begin{pmatrix} T_1 & T_2T_3T_3^{\dagger} \\ 0 & T_3^2T_3^{\dagger} \end{pmatrix}^d = \begin{pmatrix} T_1^{-1} & Y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

yazılabilir, burada

$$\begin{aligned} Y &= \sum_{i=0}^{k-2} T_1^{i-k}\, T_2T_3T_3^{\dagger}\left(T_3^2T_3^{\dagger}\right)^{k-2-i} \\ &= T_1^{-2}T_2T_3T_3^{\dagger} + T_1^{-3}T_2T_3T_3^{\dagger}T_3^2T_3^{\dagger} \\ &\qquad + T_1^{-4}T_2T_3T_3^{\dagger}T_3^3T_3^{\dagger} + \cdots + T_1^{-k}T_2T_3T_3^{\dagger}T_3^{k-1}T_3^{\dagger} \\ &= [T_1^{-2}T_2 + T_1^{-3}T_2T_3 + T_1^{-4}T_2T_3^2 + \cdots + T_1^{-k}T_2T_3^{k-2}]T_3T_3^{\dagger} \\ &= X_0T_3T_3^{\dagger} \end{aligned}$$

dir. Böylece $T^{d,\dagger} = (T^2T^{\dagger})^d$ olup ispat tamamlanır.

Şimdi idempotent matrislerle ilgili bazı karakterizasyonlar verilecektir. T matrisi için $int(T) = k$ olduğunu varsayalım. Bu takdirde

$$\Re(T^k) = \Re(T^d) = \Re(T^dTT^\dagger TT^d) \subseteq \Re(T^dTT^\dagger) = \Re(T^{d,\dagger}) \subseteq \Re(T^d)$$

ve

$$\mathcal{N}(T^k) = \mathcal{N}(T^{k+1}T^d) \supseteq \mathcal{N}(T^d) = \mathcal{N}(T^d(T^d)^kT^k) \supseteq \mathcal{N}(T^k)$$

ifadeleri yazılabilir.

Bir T matrisinin $T^{(2)}_{U,V}$ ile gösterilen dış inversini $XTX = X$, $\Re(X) = U$ ve $\mathcal{N}(X) = V$ şartlarını sağlayan X matrisi olarak tanımlanırsa bu durumda

$$T^\dagger = T^{(2)}_{\Re(T^*),\mathcal{N}(T^*)},\ T^d = T^{(2)}_{\Re(T^k),\mathcal{N}(T^k)} \text{ ve } T^\# = T^{(2)}_{\Re(T),\mathcal{N}(T)} \tag{3.52}$$

olduğu gösterilebilir. Buradan da $T^{d,\dagger} = T^{(2)}_{\Re(T^k),\mathcal{N}(T^dTT^\dagger)}$ elde edilir. Öte yandan eğer $int(T) \leq 1$ ise bu durumda $T^{\#,\dagger} = T^{(2)}_{\Re(T),\mathcal{N}(T^*)}$ olacaktır. Ayrıca $T^{d,\dagger} = T^dTT^\dagger$ ve $T^{\dagger,d} = T^\dagger TT^d$ olduğundan

$$TT^{\dagger,d} = T^{d,\dagger}T = TT^d,\ T^{\dagger,d}TT^{\dagger,d} = T^{\dagger,d} \text{ ve } T^{d,\dagger}TT^{d,\dagger} = T^{d,\dagger} \tag{3.53}$$

eşitlikleri yazılabilir. Bu nedenle $T^{\dagger,d}T$, $TT^{\dagger,d}$, $TT^{d,\dagger}$ ve $T^{d,\dagger}T$ matrisleri idempotent olacaktır. Şimdi

$$P_1 = P_{\Re(T)} = TT^\dagger,\ \ P_2 = P_{\Re(T^k)},\ P_3 = P_{\Re(T^*)} = T^\dagger T \tag{3.54}$$

$$Q_1 = TT^d = T^{d,\dagger}T = TT^{\dagger,d},\ \ Q_2 = TT^{d,\dagger} = Q_1P_1,\ Q_3 = T^{\dagger,d}T = P_3Q_1 \tag{3.55}$$

matrislerini göz önüne alalım. Bu takdirde aşağıdaki teoremler verilebilir.

Teorem 3.17 T matrisi için $int(T) = k$ olduğunu varsayalım ve $Q_i\,, i = 1,2,3$ matrisleri (3.55) deki gibi tanımlanmış olsunlar. Bu takdirde aşağıdaki durumlar gerçeklenir (Yu ve Deng, 2016):

(a) $Q_1 = Q_2 \Leftrightarrow \mathcal{N}(T^*) \subseteq \mathcal{N}(T^k) \Leftrightarrow T^d = T^{d,\dagger}$.

(b) $Q_1 = Q_3 \Leftrightarrow \Re(T^*) \supseteq \Re(T^k) \Leftrightarrow T^d = T^{\dagger,d}$.

(c) $Q_2 = Q_3 \Leftrightarrow \Re(T^*) \supseteq \Re(T^k)$ ve $\mathcal{N}(T^*) \subseteq \mathcal{N}(T^k) \Leftrightarrow T^{d,\dagger} = T^d = T^{\dagger,d}$.

İspat. (a) $Q_1 = TT^d = T^{d,\dagger}T$ ve $Q_2 = TT^{d,\dagger} = TT^dTT^\dagger$ olduğundan

$$Q_1 = Q_2 \Leftrightarrow TT^dTT^\dagger = TT^d \Leftrightarrow TT^d(I - TT^\dagger) = 0$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{N}(T^*) = \mathcal{N}(TT^\dagger) = \Re(I - TT^\dagger) \subseteq \mathcal{N}(TT^\dagger) = \mathcal{N}(T^k)$$

$$\Leftrightarrow T^d(I - TT^\dagger) = 0 \Leftrightarrow T^d = T^{d,\dagger} \tag{3.56}$$

elde edilir.

(b) $Q_3 = T^{\dagger,d}T = T^\dagger TT^dT$ olduğundan

$$Q_1 = Q_3 \Leftrightarrow T^\dagger TT^dT = T^dT \Leftrightarrow I - TT^\dagger)TT^d = 0$$

$$\Leftrightarrow \ \Re(T^k) = \Re(T^d) = \Re(TT^d) \subseteq \mathcal{N}(I - T^\dagger T) = \Re(T^\dagger T) = \Re(T^*)$$

$$\Leftrightarrow (I - T^\dagger T)T^d = 0 \Leftrightarrow T^d = T^{\dagger,d} \tag{3.57}$$

elde edilir.

(c) Bu durumda sadece $Q_2 = Q_3$ ise $\Re(T^*) \supseteq \Re(T^k)$ ve $\mathcal{N}(T^*) \subseteq \mathcal{N}(T^k)$ olduğunu göstermek yeterlidir. Tersi durumlar (a) ve (b) den görülmektedir. Eğer $Q_2 = Q_3$ ise $TT^dTT^\dagger = T^\dagger TT^dT$ olacaktır. Bu eşitlik önce soldan T ie çarpılırsa $T^2T^dTT^\dagger = T^2T^d$ dolayısıyla $T^2T^d(I - TT^\dagger) = 0$ olur ki bu da

$$\mathcal{N}(T^*) = \mathcal{N}(TT^\dagger) = \Re(I - TT^\dagger) \subseteq \mathcal{N}(T^2T^d) = \mathcal{N}(T^d) = \mathcal{N}(T^k) \tag{3.58}$$

olduğunu gösterir. Aynı eşitlik sağdan T ie çarpılırsa $T^\dagger TT^dT^2 = T^dT^2$ ve buradan da dolayısıyla $(I - T^\dagger T)T^2T^d = 0$ elde edilir ki bu da

$$\Re(T^k) = \Re(T^2T^d) \subseteq \mathcal{N}(I - T^\dagger T) = \Re(T^*) \tag{3.59}$$

olduğunu gösterir ve böylece de ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.18 T matrisi için $int(T) = k$ olduğunu varsayalım ve P_i ve Q_i , $i = 1,2,3$ matrisleri sırasıyla (3.52) ve (3.53) deki gibi tanımlanmış olsunlar. Bu takdirde aşağıdaki durumlar gerçeklenir (Yu ve Deng, 2016):

(a) $Q_1 = P_2 \Leftrightarrow Q_3 = P_2 \Leftrightarrow [T, P_2] \coloneqq TP_2 - P_2T = 0 \Leftrightarrow T_2 = 0$.

(b) $P_2 = Q_2 \Leftrightarrow P_2T(I - P_2) = 0 \Leftrightarrow T_2T_3 = 0$.

(c) $P_1 = P_2 \Leftrightarrow P_1 = Q_2 \Leftrightarrow ind(T) \leq 1 \Leftrightarrow T_3 = 0$.

(d) $P_1 = P_3 \Leftrightarrow P_2 = P_3 \Leftrightarrow P_1 = Q_1 \Leftrightarrow P_1 = Q_3 \Leftrightarrow P_3 = Q_1 \Leftrightarrow P_3 = Q_2$

$$\Leftrightarrow \ P_3 = Q_3 \Leftrightarrow \ ind(T) \leq 1 \text{ve } \Re(T) = \Re(T^*) \Leftrightarrow T_2 = T_3 = 0.$$

İspat. Sadece (a) ve (b) şıklarının ispatı verilecektir. Diğerleri de benzer şekilde ispatlanabilir.

(a) (3.43)-(3.46) ifadelerinden

$$P_2 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q_1 = \begin{pmatrix} I & T_1 X_0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ve

$$Q_3 = \begin{pmatrix} T_1^* \Delta T_1 & T_1^* \Delta T_1^2 X_0 \\ (I - T_3^\dagger T_3) T_2^* \Delta T_1 & (I - T_3^\dagger T_3) T_2^* \Delta T_1^2 X_0 \end{pmatrix}$$

olduğu gösterilebilir. Bu durumda

$$Q_1 = P_2 \Leftrightarrow X_0 = 0 \Leftrightarrow T_2 = 0 \Leftrightarrow Q_3 = P_2 \Leftrightarrow [T, P_2] \coloneqq TP_2 - P_2 T = 0$$

elde edilir.

(b) Benzer şekilde (3.43)-(3.46) ifadelerinden

$$Q_2 = \begin{pmatrix} I & T_1 X_0 T_3 T_3^\dagger \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

olduğu gösterilebilir. Bu durumda

$$Q_2 = P_2 \Leftrightarrow X_0 T_3 T_3^\dagger = 0 \Leftrightarrow T_2 T_3 = 0 \Leftrightarrow P_2 T (I - P_2) T = 0$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.19 T matrisi için $int(T) = k$ olduğunu varsayalım ve P_i ve Q_i , $i = 1,2,3$ matrisleri sırasıyla (3.52) ve (3.53) deki gibi tanımlanmış olsunlar. Bu takdirde aşağıdaki durumlar gerçeklenir (Yu ve Deng, 2016):

(a) $P_1 T^d = T^d P_3 = T^d$.

(b) $P_1 Q_1 = Q_1 = Q_1 P_3$ ve $P_1 P_2 = P_2 = P_2 P_1$.

(c) $T^{d,\dagger} = T^d P_1 = Q_1 T^d P_1$ ve $T^{\dagger,d} = P_3 T^d = P_3 T^d Q_1$.

(d) $Q_1 T P_3 = P_1 T Q_1 = Q_1 T Q_1 = T Q_1 = T^2 T^d = (T^d)^d$.

(e) $T^2 (T^{d,\dagger})^2 = T T^{d,\dagger} = Q_2$ ve $(T^{d,\dagger})^2 T^2 = T^{d,\dagger} T = T^d T = Q_1$.

İspat. Sadece (a) ve (e) şıklarının ispatı verilecektir. Diğer şıkların ispatları (3.52) ve (3.53) deki tanımlardan kolayca gösterilebilir.

(a) $\Re(T) \supseteq \Re(T^k) = \Re(T^d)$ ve $\mathcal{N}(T^d) \subseteq \mathcal{N}(T^k) = \mathcal{N}(T^d)$ olduğundan

$$P_1 T^d = T T^\dagger T^d = T^d = T^d T^\dagger T = T^d P_3$$

olduğu görülür.

(e) Bu durumda

$$T^2(T^{d,\dagger})^2 = T^2T^dTT^\dagger TT^dT^\dagger = T^2T^dTT^dT^\dagger = T^2T^dT^\dagger = TT^{d,\dagger} = Q_2$$

ve

$$(T^{d,\dagger})^2T^2 = T^dTT^\dagger T^dTT^\dagger T^2 = T^dT = T^dTT^\dagger T = T^{d,\dagger}T = Q_1$$

olduğu görülür ve böylece de ispat tamamlanmış olur.

$(T^d)^d = T^2T^d$ ve $(T^\dagger)^\dagger = T$ olduğu bilinmektedir. Benzer şekilde $(T^{d,\dagger})^{d,\dagger}$, $(T^d)^{d,\dagger}$ ve $(T^{d,\dagger})^d$ için ifadeler aşağıdaki şekilde verilebilir.

Teorem 3.20 T matrisi için $int(T) = k$ olduğunu varsayalım ve P_2 matrisi (3.52) deki şekilde tanımlanmış olsun. Bu takdirde aşağıdaki durumlar gerçeklenir (Yu ve Deng, 2016):

(a) $(T^{d,\dagger})^{d,\dagger} = (T^d)^{d,\dagger} = TP_2$.

(b) $((T^d)^{d,\dagger})^2T^{d,\dagger} = T^2T^{d,\dagger}$=$(T^{d,\dagger})^d$.

İspat. (a) Bu durumda Lemma 3.5 ve Teorem 3.15 den

$$(T^{d,\dagger})^d = \begin{pmatrix} T_1^{-1} & X_0T_3T_3^\dagger \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^d = \begin{pmatrix} T_1 & T_1^2X_0T_3T_3^\dagger \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

elde edilir. Benzer şekilde Lemma 3.4 ve Teorem 3.15 den

$$\Delta'' = \left(T_1^{-1}(T_1^{-1})^* + X_0T_3T_3^\dagger(X_0T_3T_3^\dagger)^*\right)^{-1}$$

olmak üzere

$$(T^{d,\dagger})^\dagger = \begin{pmatrix} T_1^{-1} & X_0T_3T_3^\dagger \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^\dagger = \begin{pmatrix} T_1^{-1}\Delta'' & 0 \\ (X_0T_3T_3^\dagger)^*\Delta'' & 0 \end{pmatrix}$$

olduğu görülür. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}
(T^{d,\dagger})^{d,\dagger} &= \begin{pmatrix} T_1^{-1} & X_0T_3T_3^\dagger \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^{d,\dagger} \\
&= \begin{pmatrix} T_1^{-1} & X_0T_3T_3^\dagger \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^d \begin{pmatrix} T_1^{-1} & X_0T_3T_3^\dagger \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1^{-1} & X_0T_3T_3^\dagger \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^\dagger \\
&= \begin{pmatrix} T_1 & T_1^2X_0T_3T_3^\dagger \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1^{-1} & X_0T_3T_3^\dagger \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1^{-1}\Delta'' & 0 \\ (X_0T_3T_3^\dagger)^*\Delta'' & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} I & T_1X_0T_3T_3^{\dagger} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1^{-1}\Delta'' & 0 \\ (X_0T_3T_3^{\dagger})^*\Delta'' & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$(T^d)^{d,\dagger} = \begin{pmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (T^{d,\dagger})^{d,\dagger} = TP_2$$

olduğu gösterilebilir ve böylece (a) şıkkının ispatı tamamlanır.

(b) (a) şıkkının ispatından

$$((T^d)^{d,\dagger})^2T^{d,\dagger} = \begin{pmatrix} T_1^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1^{-1} & X_0T_3T_3^{\dagger} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} T_1 & T_1^2X_0T_3T_3^{\dagger} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= (T^{d,\dagger})^d$$

ve

$$T^2T^{d,\dagger} = \begin{pmatrix} T_1 & T_2 \\ 0 & T_3 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} T_1^{-1} & X_0T_3T_3^{\dagger} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} T_1 & T_1^2X_0T_3T_3^{\dagger} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= (T^{d,\dagger})^d$$

olduğu görülür ve böylece de ispat tamamlanmış olur.

3.5 DMP İnvers ve Bazı Kısmi Sıralamalar Arasındaki İlişkiler

Bu kısımda DMP ilişkisinin yıldız sıralama eksi kısmi sıralama gibi çeşitli özellikleri ve bazı ortak karakterizasyonları incelenecektir. Bununla ilgili olarak bu bağıntılar için denklik şartlarının belirlenmesi problemiyle ilgili olarak bazı ifadeler elde edilecek ve bu sıralamalar arasındaki ilişkiler araştırılacaktır. Bununla ilgili olarak öncelikle aşağıdaki lemma verilebilir.

Lemma 3.7 A ve B matrisleri için $int(A) = r$ ve $int(B) = s$ olduğunu varsayalım. Bu takdirde $M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$ matrisi Drazin tersinir olup $M^d = \begin{pmatrix} A^d & X \\ 0 & B^d \end{pmatrix}$ dir, burada X

$$X = (A^d)^2[\sum_{n=0}^{s-1}(A^d)^n CB^n](I - BB^d)$$

$$+(I - AA^d)[\sum_{n=0}^{r-1} A^n C(B^d)^n](B^d)^2 - A^d CAB^d \tag{3.60}$$

şeklindedir (Deng ve Yu, 2015).

Tanım 3.2 T ve B uygun mertebeden matrisler olsun. Bu takdirde

(i) Eğer $T^{d,\dagger}T = T^{d,\dagger}B$ ve $TT^{d,\dagger} = BT^{d,\dagger}$ ise T ve B arasında DMP sıralama ilişkisi vardır denir ve $T \overset{d,\dagger}{\leq} B$ ile gösterilir.

(ii) Eğer $T^*T = T^*B$ ve $TT^* = BT^*$ ise T ve B arasında yıldız kısmi sıralama ilişkisi vardır denir ve $T \overset{*}{\leq} B$ ile gösterilir.

(iii) Eğer $T^-T = T^-B$ ve $TT^- = BT^-$ ise T ve B arasında eksi kısmi sıralama ilişkisi vardır denir ve $T \overset{-}{\leq} B$ ile gösterilir. Burada T^- bir genelleştirilmi iç inverstir.

(iv) Eğer (iii) de T grup tersinir ise $T^- = T^\#$ olur. Bu durumdaki sıralamaya Sharp sıralaması denir ve $T \overset{\#}{\leq} B$ ile gösterilir (Yu ve Deng, 2016).

Şimdi aşağıdaki terorem verilebilir.

Teorem 3.21 $int(T) \leq k$ olmak üzere T matrisi T_1 tersinir ve $T_3^k = 0$ olmak üzere $H = \Re(T^k) \oplus (\Re(T^k))^\perp$ uzay ayrışımına göre

$$T = \begin{pmatrix} T_1 & T_2 \\ 0 & T_3 \end{pmatrix} \tag{3.61}$$

formunda verilmiş olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktir(Yu ve Deng, 2016):

(a) $T \overset{d}{\leq} B$ olacak şekilde bir B matrisi mevcuttur.

(b) $X_0 = \sum_{i=0}^{k-1} T_1^{i-k-1} T_2 T_3^{k-1-i}$ ve B_4 keyfi olmak üzere

$$B = \begin{pmatrix} T_1 & T_1^2 X_0 - T_1 X_0 T_3 T_3^\dagger B_4 \\ 0 & B_4 \end{pmatrix} \tag{3.62}$$

dir.

(c) $B = T + (I - TT^{d,\dagger})Y(I - T^{d,\dagger}T)$ olacak şekilde bir Y matrisi mevcuttur.

İspat. (a) ⟹(b). T matrisi (3.61) deki gibi verilmiş olsun. $B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}$ olsun. Eğer $T \overset{d}{\leq} B$ ise bu durumda yukarıda verilenler dikkate alınırsa

$$BT^{d,\dagger} = \begin{pmatrix} B_1 T_1^{-1} & B_1 X_0 T_3 T_3^{\dagger} \\ B_3 T_1^{-1} & B_3 X_0 T_3 T_3^{\dagger} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & T_1 X_0 T_3 T_3^{\dagger} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = TT^{d,\dagger}$$

olduğu görülebilir. Bu eşitlikten $B_1 = T_1$ ve $B_2 = 0$ elde edilir. Benzer şekilde

$$T^{d,\dagger} B = \begin{pmatrix} T_1^{-1} B_1 + X_0 T_3 T_3^{\dagger} B_3 & T_1^{-1} B_2 + X_0 T_3 T_3^{\dagger} B_4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & T_1 X_0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = T^{d,\dagger} T$$

eşitliğinden $B_2 = T_1^2 X_0 - T_1 X_0 T_3 T_3^{\dagger} B_4$ elde edilir. Buradan da

$$B = \begin{pmatrix} T_1 & T_1^2 X_0 - T_1 X_0 T_3 T_3^{\dagger} B_4 \\ 0 & B_4 \end{pmatrix}$$

olduğu görülür.

(b) ⟹(c). $Y = \begin{pmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Y_3 & B_4 - T_3 + Y_3 T_1 X_0 \end{pmatrix}$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}(I - TT^{d,\dagger}) Y (I - T^{d,\dagger} T) &= \begin{pmatrix} 0 & -T_1 X_0 T_3 T_3^{\dagger} \\ 0 & I \end{pmatrix} Y \begin{pmatrix} 0 & -T_1 X_0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -T_1 X_0 T_3 T_3^{\dagger} (B_4 - T_3) \\ 0 & B_4 - T_3 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

olduğu görülür. Bu nedenle

$$\begin{aligned} B = \begin{pmatrix} T_1 & T_1^2 X_0 - T_1 X_0 T_3 T_3^{\dagger} B_4 \\ 0 & B_4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} T_1 & T_2 + T_1 X_0 T_3 - T_1 X_0 T_3 T_3^{\dagger} B_4 \\ 0 & B_4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} T_1 & T_2 - T_1 X_0 T_3 T_3^{\dagger} (B_4 - T_3) \\ 0 & B_4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} T_1 & T_2 \\ 0 & T_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -T_1 X_0 T_3 T_3^{\dagger} (B_4 - T_3) \\ 0 & B_4 - T_3 \end{pmatrix} \\ &= T + (I - TT^{d,\dagger}) Y (I - T^{d,\dagger} T) \end{aligned}$$

olduğu görülür.

(c) ⟹(a). $T^{d,\dagger} T T^{d,\dagger} = T^d T T^{\dagger} T T^{d,\dagger} = T^d T T^{d,\dagger} = T^d T T^d T T^{d,\dagger} = T^d T T^{d,\dagger} = T^{d,\dagger}$ olduğundan

$$T^{d,\dagger}(I - TT^{d,\dagger}) = (I - T^{d,\dagger}T)T^{d,\dagger} = 0$$

olacaktır. Bu nedenle eğer $B = T + (I - TT^{d,\dagger})Y(I - T^{d,\dagger}T)$ ise bu takdirde

$$BT^{d,\dagger} = [T + (I - TT^{d,\dagger})Y(I - T^{d,\dagger}T)]T^{d,\dagger} = TT^{d,\dagger}$$

ve

$$T^{d,\dagger}B = T^{d,\dagger}[T + (I - TT^{d,\dagger})Y(I - T^{d,\dagger}T)] = T^{d,\dagger}T$$

olduğu görülür ve böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.21 den eğer (b) şıkkında $B_4 = 0$ veya (c) şıkkında $Y = -T$ ise bu takdirde $T \overset{d,\dagger}{\leq} TT^{d,\dagger}T$ olduğu görülür. Öte yandan eğer T ve B aynı mertebeden DMP tersinir matrisler ise bu takdirde B matrisi (3.62) formunda yazılabilir ve $B_4^{d,\dagger}$ mevcuttur. $ind(B_4) = s$ olduğunu varsayalım.

$$Z_0 = T_1^2X_0 - T_1X_0T_3T_3^\dagger B_4 \text{ ve } Y_0 = \sum_{i=0}^{s-1} T_1^{i-2}Z_0\, B_4^i\big(I - B_4B_4^d\big) - T_1^{-1}Z_0B_4^d \quad (3.63)$$

matrislerini tanımlayalım. (3.57) ve lemma 3.7 den

$$B^d = \begin{pmatrix} T_1^{-1} & Y_0 \\ 0 & B_4^d \end{pmatrix} \text{ ve } B^{d,\dagger} = B^dBB^\dagger = \begin{pmatrix} T_1^{-1} & Y_0B_4B_4^\dagger \\ 0 & B_4^{d,\dagger} \end{pmatrix} \quad (3.64)$$

ve dolayısıyla

$$TB^{d,\dagger} = \begin{pmatrix} I & T_1Y_0B_4B_4^\dagger + T_2B_4^{d,\dagger} \\ 0 & T_2B_4^{d,\dagger} \end{pmatrix} \text{ ve } B^{d,\dagger}T = \begin{pmatrix} I & T_1^{-1}T_2 + Y_0B_4B_4^\dagger T_2 \\ 0 & B_4^{d,\dagger}T_2 \end{pmatrix}$$

olduğu görülür. Eğer $T \overset{d,\dagger}{\leq} B$ ise bu takdirde

$$BT^{d,\dagger}B = BT^{d,\dagger}T = TT^{d,\dagger}T = TT^dTT^\dagger T = TT^dT$$

ve

$$T^{d,\dagger}BT^{d,\dagger} = T^{d,\dagger}TT^{d,\dagger} = T^{d,\dagger}$$

elde edilir, yani B matrisi $T^{d,\dagger}$ matrisinin bir genelleştirilmiş iç inversidir.

Sonuç 3.7 $int(T) \leq k$ olmak üzere T, B matrisleri verilmiş olsun. P matrisi $\Re(P) = \Re(T^{d,\dagger})$ olacak şekilde bir orthogonal izdüşüm ve Q ise $\mathcal{N}(Q) = \mathcal{N}(T^{d,\dagger})$ ve $(I - Q)P = (I - P)Q = 0$ olacak şekilde bir idempotent matris olsun. Bu takdirde

(a) Her B için $PT \overset{d,\dagger}{\leq} PT + (I-P)B(I-P)$ dir.

(b) $BT^{d,\dagger} = TT^{d,\dagger} \Leftrightarrow BP = TP$ dir.

(c) $T^{d,\dagger}B = T^{d,\dagger}T \Leftrightarrow QB = QT$ dir (Yu ve Deng, 2016).

İspat. (a) Eğer $int(T) \leq k$ ve P de $\Re(P) = \Re(T^{d,\dagger})$ olacak şekilde bir orthogonal izdüşüm ise T matrisi (3.61) formunda yazılabilir ve $PT = \begin{pmatrix} T_1 & T_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ matrisinin indeksi en fazla 1 olmak üzere $P = I \oplus 0$ yazılabilir. eğer $PT \overset{d,\dagger}{\leq} B$ olacak şekilde bir B matrisi mevcut ise (3.62) eşitliğine göre B matrisi

$$B = \begin{pmatrix} T_1 & T_2 \\ 0 & B_4 \end{pmatrix} = PT + (I-P)B(I-P)$$

formunda yazılabilir. Bu nedenle her B için $PT \overset{d,\dagger}{\leq} PT + (I-P)B(I-P)$ olduğu görülür.

(b) Burada $\Re(T^k) = \Re(T^{d,\dagger}) = \Re(TT^{d,\dagger}) = \Re(T^{d,\dagger}T) = \Re(TT^d) = \Re(T^dT) = \Re(T^d)$ olduğu dikkate alınırsa

$$\begin{aligned} (B-T)T^{d,\dagger} = 0 &\Leftrightarrow (B-T)\Re(T^{d,\dagger}) = 0 \\ &\Leftrightarrow (B-T)\Re(P) = 0 \Leftrightarrow (B-T)P = 0 \end{aligned}$$

olduğu görülür.

(c) $Q = TT^{d,\dagger}$ olsun. Bu durumda $Q = \begin{pmatrix} I & T_1X_0T_3T_3^\dagger \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ matrisi idempotent olup $(I-Q)P = (I-P)Q = 0$ ve $\mathcal{N}(Q) = \mathcal{N}(T^{d,\dagger})$ olacaktır. Eğer $T^{d,\dagger}(B-T) = 0$ ise $Q(B-T) = TT^{d,\dagger}(B-T) = 0$ elde edilir. Başka bir deyişle eğer T matrisi (3.61) gösterimine sahipse $P = I \oplus 0$ olacaktır. Öte yandan $(I-Q)P = (I-P)Q = 0$ olduğundan Q matrisi $Q = \begin{pmatrix} I & Q_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ formunda yazılabilir. Ayrıca $\mathcal{N}(Q) = \mathcal{N}(T^{d,\dagger})$ olduğundan $T^{d,\dagger}(I-Q) = 0$ olur ki buradan $Q_1 = T_1X_0T_3T_3^\dagger$ ve $Q = TT^{d,\dagger}$ olduğu elde edilir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} Q(B-T) = 0 &\Rightarrow TT^{d,\dagger}(B-T) = 0 \\ &\Rightarrow T^dTT^{d,\dagger}(B-T) = 0 \\ &\Rightarrow T^{d,\dagger}(B-T) = 0 \end{aligned}$$

olduğu görülür ve böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.22 $int(T) \leq k$ olmak üzere T matrisi verilmiş olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktir (Yu ve Deng, 2016):

(a) $T \overset{*}{\leq} B$ olacak şekilde bir B matrisi mevcuttur.

(b) $T = \begin{pmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ve $B = \begin{pmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & B_4 \end{pmatrix}$, (3.65)

(c) $B = T + \left(I - P_{\overline{\Re(T)}}\right)Y\left(I - P_{\overline{\Re(T^*)}}\right)$ (3.66)

olacak şekilde bir Y matrisi mevcuttur.

İspat. T matrisi verilmiş olsun. Bu takdirde $T = T_1 \oplus 0$ yazılabilir. B matrisi

$$B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}$$

formunda verilmiş olsun.

(a)⟹(b). Eğer $T \overset{*}{\leq} B$ ise $T^*T = \begin{pmatrix} T_1^*T_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_1^*B_1 & T_1^*B_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = T^*B$ ve $TT^* = \begin{pmatrix} T_1T_1^* & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1T_1^* & 0 \\ B_2T_1^* & 0 \end{pmatrix} = BT^*$ yazılabilir. Buradan $B_1 = T_1$, $B_2 = B_3 = 0$ ve dolayısıyla $B = T_1 \oplus B_4$ olduğu görülür.

(b)⟹(c). $Y = \begin{pmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Y_3 & B_4 \end{pmatrix}$ matrisi verilmiş olsun. $P_{\overline{\Re(T)}}$ matrisi $\overline{\Re(T)} \oplus \mathcal{N}(T^*)$ üzerinde izdüşüm olduğundan $P_{\overline{\Re(T)}} = I_{\overline{\Re(T)}} \oplus 0$ ve $P_{\overline{\Re(T^*)}}$ matrisi $\overline{\Re(T^*)} \oplus \mathcal{N}(T)$ üzerinde izdüşüm olduğundan $P_{\overline{\Re(T^*)}} = I_{\overline{\Re(T^*)}} \oplus 0$ eşitlikleri yazılabilir. Bu durumda

$$\begin{aligned} B &= T_1 \oplus B_4 \\ &= \begin{pmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Y_3 & B_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \\ &= T + \left(I - P_{\overline{\Re(T)}}\right)Y\left(I - P_{\overline{\Re(T^*)}}\right) \end{aligned}$$

elde edilir.

(c)⟹(a). $\left(I - P_{\overline{\Re(T^*)}}\right)T^* = 0$ ve $T^*\left(I - P_{\overline{\Re(T)}}\right) = 0$ olduğunu belirtelim. Buradan $(B - T)T^* = 0$ ve $T^*(B - T) = 0$ olduğu görülür ve böylece $T \overset{*}{\leq} B$ elde edilir. Bu ise teoremin ispatını tamamlar.

Teorem 3.23 $int(T) \leq k$ olmak üzere T matrisi verilmiş olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktir (Yu ve Deng, 2016):

(a) $T \overset{-}{\leq} B$ olacak şekilde bir B matrisi mevcuttur.

(b) $T = \begin{pmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ve $B = \begin{pmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & B_4 \end{pmatrix}$, (3.67)

(c) $B = T + (I - TT_0^-)Y(I - T_0^-T)$ (3.68)

olacak şekilde bir Y matrisi mevcuttur, burada T_0^- matrisi T matrisinin

$$(I - TT_0^-)Y(I - T_0^-T)T_0^- = 0 \quad \text{ve} \quad T_0^-(I - TT_0^-)Y(I - T_0^-T) = 0$$

eşitliklerini sağlayan bir genelleştirilmiş iç inversidir.

İspat. (a)$\Longrightarrow$(b). Eğer $T \overset{-}{\leq} B$ ise T_0^- matrisi T nin bir genelleştirilmiş iç inversi olmak üzere $T_0^-T = T_0^-B$ ve $TT_0^- = BT_0^-$ eşitlikleri sağlanır. $TT_0^-T = T$ olduğundan TT_0^- ve T_0^-T matrisleri idempotenttir. Bu nedenle TT_0^- matrisi $\Re(TT_0^-) \oplus \mathcal{N}(TT_0^-)$ üzerinde izdüşüm olduğundan $TT_0^- = I \oplus 0$ ve T_0^-T matrisi $\Re(T_0^-T) \oplus \mathcal{N}(T_0^-T)$ izdüşüm olduğundan $T_0^-T = I \oplus 0$ yazılabilir. öte yandan

$$TT_0^-T = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} T = T \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = T$$

olduğundan $T = T_1 \oplus 0$ olacaktır. Bu durumda $TT_0^- = I \oplus 0$ ve $T_0^-T = I \oplus 0$ olduğundan T_1 matrisi tersinir olacaktır. Böylece X_2, X_3 ve X_4 ün uygun seçimleri için T_0^- iç inversi $T_0^- = \begin{pmatrix} T_1^{-1} & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix}$ olarak yazılabilir. Üstelik $TT_0^- = I \oplus 0$ ve $T_0^-T = I \oplus 0$ eşitlikleri $X_2 = X_3 = 0$ olduğunu gösterir. Böylece keyfi bir X_4 için $T_0^- = T_1^{-1} \oplus X_4$ yazılabilir. Öte yandan

$$TT_0^-B = TT_0^-T = BTT_0^- = T$$

olduğundan

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

yazılabilir. Bu ise B nin $B = T_1 \oplus B_4$ formunda yazılabileceğini gösterir. Ayrıca

$$T_0^-B = T_0^-T \text{ ve } TT_0^- = BT_0^-$$

olduğundan $B_4X_4 = X_4B_4 = 0$ elde edilir.

(b)$\Longrightarrow$(c). $Y = \begin{pmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Y_3 & B_4 \end{pmatrix}$ matrisi verilmiş olsun. Bu durumda (b) den

$$B = T_1 \oplus B_4 = T + (I - TT_0^-)Y(I - T_0^-T)$$

yazılabilir, burada $T_0^-(I - TT_0^-)Y(I - T_0^-T) = 0 \oplus X_4Y_4 = 0$ ve $(I - TT_0^-)Y(I - T_0^-T)T_0^- = 0 \oplus Y_4X_4 = 0$ dir.

(c)$\Longrightarrow$(a). B matrisi (3.68) formunda ise T_0^- iç inversi için $(B - T)T_0^- = 0$ ve $T_0^-(B - T) = 0$ yani $T \overset{-}{\leq} B$ olduğu görülür ve böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.24 T, B matrisleri verilmiş olsun. $c_2(c_1 + c_2) \neq 0$ olmak üzere $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki durumlar sağlanır (Yu ve Deng, 2016):

(a) Eğer $int(T) = k$ ve $T \overset{d,\dagger}{\leq} B$ ise bu durumda $c_1T^k + c_2B^k$ nın tersinir olması için gerek ve yeter şart B nin tersinir olmasıdır. Bu durumda

$$(c_1T^k + c_2B^k)^{-1} = (c_1 + c_2)^{-1}(T^k)^{d,\dagger} + (c_2)^{-1}(B^k - T^k)^{d,\dagger}$$
$$-(c_2)^{-1}(c_1 + c_2)^{-1}(T^k)^{d,\dagger}(c_1T^k + c_2B^k)(B^k - T^k)^{d,\dagger}$$

dir.

(b) Eğer $T \overset{*}{\leq} B$ ise bu durumda $c_1T + c_2B$ nın tersinir olması için gerek ve yeter şart B nin tersinir olmasıdır. Bu durumda

$$(c_1T + c_2B)^{-1} = (c_1 + c_2)^{-1}T^\dagger + (c_2)^{-1}(I - T^\dagger T)B^{-1}(I - T^\dagger T)$$

dir.

(c) Eğer $T \overset{-}{\leq} B$ ise bu durumda $c_1T + c_2B$ nin tersinir olması için gerek ve yeter şart B nin tersinir olmasıdır. Bu durumda $T_0^-B = T_0^-T$ ve $TT_0^- = BT_0^-$ olacaak şekildeki bir T_0^- iç inversi için

$$(c_1T + c_2B)^{-1} = (c_1 + c_2)^{-1}T_0^- + (c_2)^{-1}(I - T_0^-T)B^{-1}(I - T_0^-T)$$

dir.

İspat. (a) (3.61) ve (3.62) eşitliklerinden eğer $int(T) = k$ ve $T \overset{d,\dagger}{\leq} B$ ise bu durumda $B_2 = T_1^2X_0 - T_1X_0T_3T_3^\dagger B_4$, $T_3^k = 0$ ve T_1 matrisi tersinir olmak üzere

$$T = \begin{pmatrix} T_1 & T_2 \\ 0 & T_3 \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad B = \begin{pmatrix} T_1 & B_2 \\ 0 & B_4 \end{pmatrix}$$

yazılabilir. Bradan

$$T^k = \begin{pmatrix} T_1^k & \sum_{i=0}^{k-1} T_1^{k-1-i} T_2 T_3^i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ ve } B^k = \begin{pmatrix} T_1^k & \sum_{i=0}^{k-1} T_1^{k-1-i} B_2 B_4^i \\ 0 & B_4^k \end{pmatrix}$$

olur ve dolayısıyla

$$c_1 T^k + c_2 B^k = \begin{pmatrix} (c_1 + c_2) T_1^k & c_1 \sum_{i=0}^{k-1} T_1^{k-1-i} T_2 T_3^i + c_2 \sum_{i=0}^{k-1} T_1^{k-1-i} B_2 B_4^i \\ 0 & c_2 B_4^k \end{pmatrix}$$

yazılablir. Bu durumda $c_1 T^k + c_2 B^k$ nın tersinir olması için gerek ve yeter şart B_4 ün tersinir olması dolayısıyla B nin tersinir olmasıdır. Bunun sonucu olarak

$$T^k (T^k)^\dagger = P_{\mathfrak{R}(T^k)} = I \oplus 0$$

ve

$$(B^k - T^k)^\dagger (B^k - T^k) = P_{\mathfrak{R}\left((B^k - T^k)^*\right)} = P_{\mathcal{N}\left((T^k)^*\right)} = 0 \oplus I$$

olduğu dikkate alınırsa Lemma 3.7 ye göre $X^\ominus = X^\dagger X X^d$ olmak üzere

$$(T^k)^{d,\dagger} = (T^k)^d T^k (T^k)^\dagger = T_1^{-k} \oplus 0 \,,$$

$$(B^k - T^k)^\ominus = (B^k - T^k)^\dagger (B^k - T^k)(B^k - T^k)^d = 0 \oplus B_4^{-k} \tag{3.69}$$

olduğu görülür. Böylece

$$S = -(c_2)^{-1}(c_1 + c_2)^{-1} T_1^{-k} \left[c_1 \sum_{i=0}^{k-1} T_1^{k-1-i} T_2 T_3^i + c_2 \sum_{i=0}^{k-1} T_1^{k-1-i} B_2 B_4^i \right] B_4^{-k}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}(c_1 T^k + c_2 B^k)^{-1} &= \begin{pmatrix} (c_1 + c_2)^{-1} T_1^{-k} & S \\ 0 & (c_2)^{-1} B_4^{-k} \end{pmatrix} \\ &= (c_1 + c_2)^{-1} (T^k)^{d,\dagger} + (c_2)^{-1} (B^k - T^k)^\ominus \\ &\quad - (c_2)^{-1} (c_1 + c_2)^{-1} (T^k)^{d,\dagger} (c_1 T^k + c_2 B^k)(B^k - T^k)^\ominus \end{aligned}$$

elde edilir.

(b) Eğer $int(T) = k$ ve $T \overset{*}{\leq} B$ ise (3.65) den $c_1 T + c_2 B$ nin tersinir olması için gerek ve yeter şart B nin tersinir olmasıdır. (3.66) ya göre

$$(I - T T^\dagger) B = B (I - T^\dagger T)$$

olup

$$(c_1T + c_2B)[(c_1 + c_2)^{-1}T^\dagger + (c_2)^{-1}(I - T^\dagger T)B^{-1}(I - TT^\dagger)]$$

$$= c_1(c_1 + c_2)^{-1}TT^\dagger + c_2(c_1 + c_2)^{-1}BT^\dagger + B(I - T^\dagger T)B^{-1}(I - TT^\dagger)$$

$$= c_1(c_1 + c_2)^{-1}TT^\dagger + c_2(c_1 + c_2)^{-1}TT^\dagger + (I - T^\dagger T)BB^{-1}(I - TT^\dagger)$$

$$= I$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$[(c_1 + c_2)^{-1}T^\dagger + (c_2)^{-1}(I - T^\dagger T)B^{-1}(I - TT^\dagger)](c_1T + c_2B) = I$$

olduğu da gösterilebilir.

(c) Eğer $int(T) = k$ ve $T \overset{-}{\leq} B$ ise (3.67) den $c_1T + c_2B$ nin tersinir olması için gerek ve yeter şart B nin tersinir olmasıdır. Bu durumda

$$T_0^- B = T_0^- T \text{ ve } TT_0^- = BT_0^-$$

olduğundan

$$(c_1T + c_2B)[(c_1 + c_2)^{-1}T_0^- + (c_2)^{-1}(I - T_0^- T)B^{-1}(I - TT_0^-)]$$

$$= c_1(c_1 + c_2)^{-1}TT_0^- + c_2(c_1 + c_2)^{-1}BT_0^- + B(I - T_0^- T)B^{-1}(I - TT_0^-)$$

$$= c_1(c_1 + c_2)^{-1}TT_0^- + c_2(c_1 + c_2)^{-1}TT_0^- + (B - TT_0^- T)B^{-1}(I - TT_0^-)$$

$$= c_1(c_1 + c_2)^{-1}TT_0^- + c_2(c_1 + c_2)^{-1}TT_0^- + (B - TT_0^- B)B^{-1}(I - TT_0^-)$$

$$= I$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$[(c_1 + c_2)^{-1}T_0^- + (c_2)^{-1}(I - T_0^- T)B^{-1}(I - TT_0^-)](c_1T + c_2B) = I$$

olduğu da gösterilebilir. Böylece de ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.25 T ve B matrisleri $int(T) = k$ olacak şekilde verilmiş olsunlar. Bu takdirde

$$T \overset{d,\dagger}{\leq} B \Leftrightarrow (T - B)T^d = 0$$

olup

$$T^d(I - T^\dagger B) = 0$$

eşitliği gerçeklenir (Yu ve Deng, 2016).

İspat. $T \overset{d,\dagger}{\leq} B \Leftrightarrow TT^{d,\dagger} = BT^{d,\dagger}$ ve $T^{d,\dagger}T = T^{d,\dagger}B$

$$\Leftrightarrow TT^dTT^{d,\dagger} = BT^dTT^{d,\dagger} \text{ ve } T\,T^d = T\,T^dT^\dagger B$$

$$\Leftrightarrow TT^dT = BT^dT \text{ ve } T^d = T^dT^\dagger B$$

$$\Leftrightarrow TT^d = BT^d \text{ ve } T^d = T^dT^\dagger B$$

yazılabilir. Bu durumda $TT^d = BT^d$ ve $T^d = T^dT^\dagger B \Longrightarrow T \overset{d,\dagger}{\leq} B$ için

$$TT^d = BT^d \Longrightarrow TT^dTT^\dagger = BT^dTT^\dagger$$

$$\Longrightarrow TT^{d,\dagger} = BT^{d,\dagger}$$

ve

$$T^d = T^dT^\dagger B \Longrightarrow T^dT = T^dTT^\dagger B$$

$$\Longrightarrow T^dTT^\dagger T = T^dTT^\dagger B$$

$$\Longrightarrow T^{d,\dagger}T = T^{d,\dagger}B$$

olduğu görülür. Bu nedenle $T \overset{d,\dagger}{\leq} B$ olup ispat tamamlanır.

Eğer T bir EP matris ise bu takdirde $T^d = T^\dagger = T^\#$ olacağından $T \overset{d,\dagger}{\leq} B \Leftrightarrow T \overset{\#}{\leq} B$ olduğu açıktır. Bu durumda $TB = BT$ dir. Genel durumda aşağıdaki sonuç verilebilir.

Teorem 3.26 T, B matrisleri $int(T) = k$ olacak şekilde verilmiş olsun. Bu takdirde eğer $T \overset{d,\dagger}{\leq} B$ ise

$$TB = BT \Leftrightarrow (T^d - T^{d,\dagger})B = 0 \text{ ve } P_{\Re((T^k))^\perp}(TB - BT) = 0$$

olacaktır (Yu ve Deng, 2016).

İspat. Bu durumda

$$(T^d - T^{d,\dagger})B = \left[\begin{pmatrix} T_1^{-1} & X_0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} T_1^{-1} & X_0T_3T_3^\dagger \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} T_1 & T_1^2X_0 - T_1X_0T_3T_3^\dagger B_4 \\ 0 & B_4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & X_0(I - T_3T_3^\dagger)B_4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

yazılabilir. Benzer şekilde

$$TB = \begin{pmatrix} T_1^2 & T_1^3X_0 - T_1^2X_0T_3T_3^{\dagger}B_4 + T_2B_4 \\ 0 & T_2B_4 \end{pmatrix},$$

$$BT = \begin{pmatrix} T_1^2 & T_1T_2 + T_1^2X_0T_2 - T_1X_0T_3T_3^{\dagger}B_4T_2 \\ 0 & B_4T_2 \end{pmatrix}$$

ve

$$P_{\Re((T^k))^{\perp}}(TB - BT) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & T_2B_4 - B_4T_2 \end{pmatrix}$$

olduğu gösterilebilir. Bu nedenle $TB = BT$ olması için gerek ve yeter şart $T_2B_4 = B_4T_2$ ve

$$T_1^3X_0 - T_1^2X_0T_3T_3^{\dagger}B_4 + T_2B_4 = T_1T_2 + T_1^2X_0T_2 - T_1X_0T_3T_3^{\dagger}B_4T_2 \tag{3.70}$$

olmasıdır. Öte yandan

$$T_1^3X_0 = T_1T_2 + T_1^2X_0T_2 \text{ ve } \quad T_1X_0T_3T_3^{\dagger}B_4T_2 = T_1X_0T_3B_4 = (T_1^2X_0 - T_2)B_4$$

olacağından (3.70) ifadesi $X_0T_3T_3^{\dagger}B_4 = X_0B_4$ olarak yazılabilir. Dolayısıyla $TB = BT$ olması için gerek ve yeter şart $(T^d - T^{d,\dagger})B = 0$ ve $P_{\Re((T^k))^{\perp}}(TB - BT) = 0$ olmasıdır ve böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.27 Grup tersinir matrisler için $\overset{d,\dagger}{\leq}$ ile tanımlanan DMP bağıntısı bir kısmi sıralama bağıntısıdır (Yu ve Deng, 2016).

İspat. T, B, C matrisleri grup tersinir olsun. Bu takdirde $T_3 = 0$ olacaktır. Bu durumda eğer $T \overset{d,\dagger}{\leq} B$ ise

$$B = \begin{pmatrix} T_1 & T_2 \\ 0 & B_4 \end{pmatrix}, \tag{3.71}$$

$ind(B_4) \leq 1$ olacak şekilde bir B_4 matris mevcuttur. Buradan $B_4 = 0$ olduğunda $T \overset{d,\dagger}{\leq} T$ olduğu açıktır. Şimdi $T \overset{d,\dagger}{\leq} B$ ve $B \overset{d,\dagger}{\leq} T$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $T \overset{d,\dagger}{\leq} B$ olduğundan

$$T^{d,\dagger} = \begin{pmatrix} T_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B^{d,\dagger} = B^{\#}BTB^{\dagger} = \begin{pmatrix} T_1^{-1} & -T_1^{-1}T_2B_4^{d,\dagger} \\ 0 & B_4^{d,\dagger} \end{pmatrix} \tag{3.72}$$

ve $B \overset{d,\dagger}{\leq} T$ olduğundan

$$(B-T)B^{d,\dagger}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & B_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}T_1^{-1} & -T_1^{-1}T_2B_4^{d,\dagger}\\ 0 & B_4^{d,\dagger}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & B_4B_4^{d,\dagger}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & B_4B_4^{\dagger}\end{pmatrix}=0$$

olacağından $B_4=0$ ve $B=T$ olduğu görülür. Şimdi de T,B,C matrislerinin indekslerinni en fazla 1 olduğu varsayımı altında $T \overset{d,\dagger}{\leq} B$ ve $B \overset{d,\dagger}{\leq} C$ olduğu verilsin. Bu durumda $T \overset{d,\dagger}{\leq} B$ olduğundan $ind(B_4)\leq 1$ olmak üzere B matrisi $T_1=(T_1',T_1'')$, $B_4=\begin{pmatrix}B_4' & B_4''\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ ve B_4' matrisi tersinir olmak üzere

$$B=\begin{pmatrix}T_1 & T_2\\ 0 & B_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}T_1 & T_1' & T_1''\\ 0 & B_4' & B_4''\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

olarak yazılabilir. Benzer düşünceyle $B \overset{d,\dagger}{\leq} C$ olduğundan

$$C=\begin{pmatrix}T_1 & T_1' & T_1''\\ 0 & B_4' & B_4''\\ 0 & 0 & C_4\end{pmatrix}$$

olacak şekilde $ind(C_4)\leq 1$ olan bir C_4 matrisi mevcuttur. Bu takdirde

$$T^{d,\dagger}(C-T)=\begin{pmatrix}T_1^{-1} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & B_4' & B_4''\\ 0 & 0 & C_4\end{pmatrix}=0$$

ve

$$(C-T)T^{d,\dagger}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & B_4' & B_4''\\ 0 & 0 & C_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}T_1^{-1} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=0$$

olup $T \overset{d,\dagger}{\leq} C$ olduğu görülür ve böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.28 T ve B matrisleri için $ind(T)\leq 1, B$ DMP tersinir ve $T \overset{d,\dagger}{\leq} B$ olsun.bu takdirde aşağıdakiler sağlanır (Yu ve Deng, 2016):

(a) $ind(TB), ind(BT)\leq 1$ olup $(TB)^{d,\dagger}=B^{d,\dagger}T^{d,\dagger}$ dir.

(b) $(B-T) \overset{d,\dagger}{\leq} B \Leftrightarrow (TB)^{d,\dagger}=B^{d,\dagger}T^{d,\dagger}$

$$\Leftrightarrow (BT)^{d,\dagger}=T^{d,\dagger}B^{d,\dagger}$$

$$\Leftrightarrow B^{d,\dagger}T^{d,\dagger}=T^{d,\dagger}B^{d,\dagger}.$$

İspat. $ind(T) \leq 1$ ve $T \overset{d,\dagger}{\leq} B$ ise bu durumda $T_3 = 0$ ve B_4 DMP tersinir olup

$$T = \begin{pmatrix} T_1 & T_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} T_1 & T_2 \\ 0 & B_4 \end{pmatrix}, T^{d,\dagger} = \begin{pmatrix} T_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ ve } B^{d,\dagger} = \begin{pmatrix} T_1^{-1} & -T_1^{-1}T_2B_4^{d,\dagger} \\ 0 & B_4^{d,\dagger} \end{pmatrix} \quad (3.73)$$

yazılabilir. Buradan T_1 tersinir olduğundan

$$TB = \begin{pmatrix} T_1^2 & T_1T_2 + T_2B_4 \\ 0 & \end{pmatrix}, \quad BT = \begin{pmatrix} T_1^2 & T_1T_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

matrislerinin indeksi en fazla 1 olacaktır. Dolayısıyla $(TB)^{d,\dagger} = (BT)^{d,\dagger} = T_1^{-2} \oplus 0$ ve $(B-T)^{d,\dagger} = 0 \oplus B_4^{d,\dagger}$ eşitlikleri yazılabilir. Bu durumda $(B-T)^{d,\dagger}T = 0$, $B^{d,\dagger}T^{d,\dagger} = T_1^{-2} \oplus 0$ ve

$$T^{d,\dagger}B^{d,\dagger} = \begin{pmatrix} T_1^{-1} & -T_1^{-1}T_2B_4^{d,\dagger} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, T(B-T)^{d,\dagger} = \begin{pmatrix} 0 & T_2B_4^{d,\dagger} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

olup $(TB)^{d,\dagger} = (BT)^{d,\dagger}$ eşitliği daima sağlanır. Öte yandan

$$\begin{aligned} (TB)^{d,\dagger} = T^{d,\dagger}B^{d,\dagger} &\Leftrightarrow (BT)^{d,\dagger} = T^{d,\dagger}B^{d,\dagger} \\ &\Leftrightarrow T_2B_4^{d,\dagger} = 0 \\ &\Leftrightarrow B^{d,\dagger}T^{d,\dagger} = T^{d,\dagger}B^{d,\dagger} \\ &\Leftrightarrow B - T) \overset{d,\dagger}{\leq} B \end{aligned}$$

olduğu görülür ve böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.29 T ve B matrisleri $ind(T), ind(B) \leq 1,$ olacak şekilde verilmiş olsun. bu takdirde aşağıdakiler sağlanır (Yu ve Deng, 2016):

(a) Eğer $T \overset{d,\dagger}{\leq} B$ ise $BT^{d,\dagger}B = T \Leftrightarrow ind(T) = 1$ dir.

(b) Eğer $T \overset{d,\dagger}{\leq} B$ ve B matrisi DMP tersinir ise $B^{d,\dagger}TT^{d,\dagger} = T^{d,\dagger}$ dir.

(c) $ind(T) = 1$ ise $T \overset{d,\dagger}{\leq} B \Leftrightarrow TT^{d,\dagger}B = BT^{d,\dagger}B = T$ dir.

İspat. (a) Eğer $T \overset{d,\dagger}{\leq} B$ ve $BT^{d,\dagger}B = T$ ise bu takdirde

$$\Re(T) = \Re(BT^{d,\dagger}B) = \Re(TT^{d,\dagger}B) \subseteq \Re(TT^{d,\dagger}) = \Re(T^k) \subseteq \Re(T)$$

elde edilir. Buradan $T_3 = 0$ yani $ind(T) = 1$ elde edilir. Öte yandan eğer $ind(T) = 1$ ise bu takdirde

$$T^{d,\dagger} = T^{\#}TT^{\dagger} \text{ ve } BT^{d,\dagger}B = TT^{d,\dagger}B = TT^{d,\dagger}T = TT^{\#}TT^{\dagger}T = T$$

olduğu görülür.

(b) Yukarıda verilenler dikkate alınırsa

$$B^{d,\dagger}TT^{d,\dagger} = \begin{pmatrix} T_1^{-1} & Y_0B_4B_4^{\dagger} \\ 0 & B_4^{d,\dagger} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} T_1 & Z_0 \\ 0 & B_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} T_1^{-1} & X_0T_2B_4^{\dagger} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = T^{d,\dagger}$$

olduğu görülür.

(c) $ind(T) = 1$ ise $T_3 = 0$ olup $T^{d,\dagger} = T_1^{-1}\oplus 0$ ve $TT^{d,\dagger} = I\oplus 0$ olacaktır. B matrisi $B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}$ olarak alınırsa $TT^{d,\dagger}B = T$ olduğundan $B_1 = T_1$ ve $B_2 = T_2$ olacaktır. Öte yandan

$$\begin{aligned} BT^{d,\dagger}B &= \begin{pmatrix} T_1 & T_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} T_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} T_1 & T_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} T_1 & T_2 \\ B_3 & B_3T_1^{-1}T_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} T_1 & T_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

olacağından $B_3 = 0$ ve dolayısıyla $B = \begin{pmatrix} T_1 & T_2 \\ 0 & B_4 \end{pmatrix}$ olduğu görülür. Bu durumda da ise Teorem 3.21 den $T \overset{d,\dagger}{\leq} B$ elde edilir. Gereklilik kısmı ise yine Teorem 3.21 den açıkça görülebilir ve böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.30 T matrisi $ind(T) \leq 1$ olacak şekilde verilmiş olsun. Bu takdirde aşağıdakiler denktir (Yu ve Deng, 2016):

(a) $T^{d,\dagger}BT^{d,\dagger} = T^{d,\dagger}$ olacak şekilde bir B matrisi mevcuttur.

(b) B matrisi $B = \begin{pmatrix} T_1 - T_1X_0T_3T_3^{\dagger}B_3 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}$ formundadır.

(c) $B = T + (I - TT^{d,\dagger})Y + Y(I - TT^{d,\dagger})$ dir.

İspat. (a) $\Longrightarrow$ (b) T matrisi (3.61) formunda olsun ve $B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}$ olarak alınsın. Eğer

$$T^{d,\dagger}BT^{d,\dagger} = \begin{pmatrix} T_1^{-1} & X_0T_2B_4^{\dagger} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} T_1^{-1} & X_0T_2B_4^{\dagger} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} T_1^{-1}B_1 + X_0T_3T_3^{\dagger}B_3 & T_1^{-1}B_2 + X_0T_3T_3^{\dagger}B_4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1^{-1} & X_0T_2B_4^{\dagger} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (T_1^{-1}B_1 + X_0T_3T_3^{\dagger}B_3)T_1^{-1} & (T_1^{-1}B_1 + X_0T_3T_3^{\dagger}B_3)X_0T_2B_4^{\dagger} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= T^{d,\dagger}$$

ise $T_1^{-1}B_1 + X_0T_3T_3^{\dagger}B_3 = I$ olacaktır. Buradan

$$B_1 = T_1 - T_1X_0T_3T_3^{\dagger}B_3$$

elde edilir ve böylece (b) şıkkı sağlanır.

(b) $\Longrightarrow$ (c) $Y_0 = \frac{1}{2}(B_4 + B_3T_1X_0T_3T_3^{\dagger} - T_3)$ olmak üzere

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & B_2 + T_1X_0T_3T_3^{\dagger}Y_0 - T_2 \\ B_3 & Y_0 \end{pmatrix}$$

olsun. Bu takdirde

$$(I - TT^{d,\dagger})Y = \begin{pmatrix} 0 & -T_1X_0T_3T_3^{\dagger} \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & B_2 + T_1X_0T_3T_3^{\dagger}Y_0 - T_2 \\ B_3 & Y_0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -T_1X_0T_3T_3^{\dagger}B_3 & -T_1X_0T_3T_3^{\dagger}Y_0 \\ B_3 & Y_0 \end{pmatrix},$$

$$Y(I - TT^{d,\dagger}) = \begin{pmatrix} 0 & B_2 + T_1X_0T_3T_3^{\dagger}Y_0 - T_2 \\ B_3 & Y_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -T_1X_0T_3T_3^{\dagger} \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & B_2 + T_1X_0T_3T_3^{\dagger}Y_0 - T_2 \\ 0 & Y_0 - B_3T_1X_0T_3T_3^{\dagger} \end{pmatrix}$$

olduğu görülür. Böylece

$$B = \begin{pmatrix} T_1 - T_1X_0T_3T_3^{\dagger}B_3 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} T_1 & T_2 \\ 0 & T_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -T_1X_0T_3T_3^{\dagger}B_3 & -T_1X_0T_3T_3^{\dagger}Y_0 \\ B_3 & Y_0 \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 & B_2 + T_1X_0T_3T_3^{\dagger}Y_0 - T_2 \\ 0 & Y_0 - B_3T_1X_0T_3T_3^{\dagger} \end{pmatrix}$$

$$= T + (I - TT^{d,\dagger})Y + Y(I - TT^{d,\dagger})$$

olduğu gösterilmiş olur.

(c) $\Longrightarrow$ (a) $TT^{d,\dagger}$ ve $T^{d,\dagger}T$ matrisleri idempotent olduğundan

$$\Re(T^{d,\dagger}) = \Re(TT^{d,\dagger}) = \Re(T^{d,\dagger}T)$$

yazılabilir. Buradan

$$TT^{d,\dagger}T^{d,\dagger} = T^{d,\dagger}TT^{d,\dagger} = T^{d,\dagger}$$

elde edilir. Bu durumda eğer

$$B = T + (I - TT^{d,\dagger})Y + Y(I - TT^{d,\dagger})$$

ise

$$\begin{aligned} T^{d,\dagger}BT^{d,\dagger} &= T^{d,\dagger}[T + (I - TT^{d,\dagger})Y + Y(I - TT^{d,\dagger})]T^{d,\dagger} \\ &= T^{d,\dagger}TT^{d,\dagger} \\ &= T^{d,\dagger} \end{aligned}$$

elde edilir ve böylece ispat tamamlanır.

4. SONUÇ ve ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında ilk olarak kısa bir Giriş verilerek Genel Bilgiler başlığı altında matrisler ile ilgili bazı önemli tanım ve teoremler verilmiştir. Kare olmayan ya da kare olduğu halde bildiğimiz anlamda inversi mevcut olmayan matrisler için geliştirilen ve özellikle lineer denklem sistemlerinin çözümünün olup-olmadığının araştırılmasında ve çözüm mevcut olması durumunda belirlenmesinde kullanılan ve bilinen anlamdaki invers özelliklerini de sağlayan genelleştirilmiş adı verilen yeni bir invers kavram ele alınmıştır. Bu amaçla öncelikle bir matrisin Moore-Penrose inversi tanımı verilerek bu inversin çeşitli özellikleri detaylı bir şekilde ortaya konulmuştur. Daha sonra keyfi mertebeden bir kare matris için Grup invers, Çekirdek invers ve Çekirdek-EP invers tanımları verilerek bu inverslerin bazı temel özellikleri ve çeşitli gösterimleri ortaya konulmuştur.

Tezin temel kısmında ise keyfi mertebeden bir kare matris için DMP invers adı verilen bir genelleştirilmiş invers tanımı verilerek bu inversin bazı temel özellikleri incelenmiştir. Ayrıca DMP invers ayrışımı verilerek bu ayrışım yardımıyla DMP invers hesaplamada kullanılan bazı yeni yöntemler ve bu inversin çeşitli gösterimleri verilmiştir. Daha sonra blok parçalanmış matrislerde DMP invers kavramı ele alınmış bu invers ile bazı sonuçlar verilmiştir. Son olarak DMP invers ve bazı kısmi sıralamalar arasındaki ilişkiler ele alınmıştır.

Tezde yapılan çalışmalar da dikkate alınarak keyfi mertebeden bir kare matris çeşitli alt kare matrisler şeklinde parçalanarak verilen matrisin DMP inversinin bu alt kare matrislerin DMP inversleri yardımıyla nasıl ifade edilebileceği araştırılabilir. Ayrıca tıpkı diğer genelleştirilmiş inverslerde olduğu gibi DMP inversleri hesaplamak için kullanılmak üzere algoritmalar ve bilgisayar programları geliştirilebilir. Özellikle matrislerin inverslerinin kullanıldığı çeşitli mühendislik uygulamalarında DMP inversin kullanılıp-kullanılamayacağı ve eğer kullanılabiliyorsa diğer inverslere göre daha uygulanabilir olup olmadığı araştırılabilir.

5. KAYNAKLAR

Baksalary, OM. & Trenkler, G. (2010). Core inverse of matrices. Linear Multilinear Algebra, 58, No. 6: 681–697.

Ben-Israel A & Greville TNE. Generalized Inverses, Theory and Applications, second edition, Canadian Mathematical Society, Springer, New York, Berlin, Heidelberg, Hong Kong, London, Milan, Paris, Tokyo, 2003.

Bjerhammer, A. (1958). A generalized matrix algebra, Kungl. Tekn. Hogsk. Handl. Stockholm. No. 124, 1-32.

Bu, C., Zhao, J. & Zheng, J. (2008). Group inverse for a class 2×2 block matrices over skew fields, Applied Mathematics and Computation 204: 45 – 49.

Chen, J., Zhu, H. & Patricio, P. (2017). Characterizations and representations of core and dual core inverses. Canad Math Bulletion, 60:269–282.

Cvetkovic-Ilic, DS. (2008). A note on the representation for the Drazin inverse of 2×2 block matrices. Linear Algebra Appl. 429, 242–248.

Cvetkovic-Ilic DS. & Deng C. (2009). Some results on the Drazin invertibility and idempotents. J Math Anal Appl. 359(2):731–738.

Cvetkovic-Ilic, DS. & Wei, Y. (2017). Algebraic properties of generalized inverses. Singapore: Springer.

Deng, C. & Yu, A. (2015). Relationships between DMP relation and some partial orders, Appl. Math. Comput. 266, 41–53.

Du, H., Deng, C. (2005). The representation and characterization of Drazin inverses of operators on a Hilbert space. Linear Algebra Appl. 407, 117–124.

Ke, Y., Wang, L. & Chen, J. (2019). The core inverse of a product and 2 × 2 matrices, Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society 42: 51 – 66.

Krishnaswamy, D. & Sankari, G. (2022). Some Results on Core Inverses of Block Matrices Over Skew Fields. Communications in Mathematics and Applications, Vol. 13, No. 1, 53–73.

Kurata, H. (2018). Some theorems on the core inverse of matrices and the core partial ordering. Appl Math Computation, 316:43–51.

Liao, Y., Chen, J. & Cui, J. (2014). Cline's Formula for the Generalized Drazin Inverse, Bull. Malays. Math. Sci. Soc. (2), 37(1): 37–42,

Liu, X. & Cai, N. (2018). High-order iterative methods for the DMP inverse, J. Math. 2018. 1–6,

Ma, H. (2018). Optimal perturbation bounds for the core inverse. Applied Math. Computation, 336: 176–181.

Ma, H. & Li, T. (2021). Characterizations and representations of the core inverse and its applications, Linear and Multilinear Algebra, 69(1): 93-103.

Ma, H., Gao, X. & Stanimirovic, PG. (2020). Characterizations, iterative method, sign pattern and perturbation analysis for the DMP inverse with its applications, Appl. Math. Comput. 378, 125196, Malik, SB. & N. Thome, N. (2014). On a new generalized inverse for matrices of an arbitrary index. Applied Mathematics and Computation. 226: 575-580.

Meng, L. (2017). The DMP inverse for rectangular matrices, Filomat. 31. No:19. 6015–6019.

Mieliniczuk, J. (2015). Some results on C-inverses of a core matrix, Indian Journal of Pure and Applied Mathematics 46: 383 – 395.

Mitra, SK. (1987). On group inverses and the sharp order. Linear Algebra and Its Applications, 92: 17–37.

Mitra, SK. & Rao, CR. (1968). A note on a previous lemma in the theory of least squares and some further results. Sankhya Ser. A. Vol. 30, 245-252.

Moore, E H. (1920). On the reciprocal of the general algebraic matrix (abstract), Bull. Amer. Math. Soc., Vol. 26, 394-395.

Mosić, D. & Djordjević, DS. (2018). The DMP inverse of Hilbert space operators, J. Spectr. Theory. 8(2). 555–573.

Mosic, D., Stanimirovic, PG. & Ma, H. (2021). Generalization of core-EP inverse for rectangular matrices. J. of Math. Analysis and Appl. 500(1), 125101, 1-19.

Penrose, R. (1955). A generalized inverse for matrices, Proceeding Cambridge Philos. Soc., Vol. 51, 406-413.

Penrose, R. (1956). On best approximate solutions of linear matrix equations, Proc. Cambridge Philos. Soc., Vol. 52, 17-19.

Prasad, KM. & Raj, MD. (2018). Bordering method to compute core-EP inverse, Spec. Mathematics. 6: 193–200.

Prasad, KM., Raj, MD. & Vinay, M. (2018). Iterative method to find core-EP inverse, Bull. Kerala Math. Assoc., Special Issue 16(1): 139–152.

Pringle, RM., Rayner AA. (1970). Expressions for generalized inverses of a bordered matrix with application to the theory of constrained linear models, SIAM Rev. 12, 107-115.

Pringle, RM., Rayner AA. (1971). Generalized Inverse Matrices ,Griffin,London.

Rakic, DS, Dincic, N, Djordjevic, DS. (2014). Core inverse and core partial order of Hilbert space operators. Appl Math Computations, 244: 283–302.

Rao, CR. (1962). A note on a generalized inverse of a matrix with applications to problems in mathematical statistics, Journal of Roy. Statist. Soc. Ser. B. Vol. 24, 152-158.

Rao, CR. (1966). Generalized inverse for matrices and its applications in mathematical statistics, Research papers in Statistics, Festschrift for Journal Neyman, New York, Wiley.

Rao, CR. (1967). Calculus of generalized inverse of matrices. Part 1: General theory, Sankhya Ser. A, Vol. 29, 317-342 s.

Rao, CR., Mitra, SK. (1971). Generalized inverse if matrices and its Applications, Wiley, New York.

Xu, S. (2019). Core invertibility of triangular matrices over a ring, Indian Journal of Pure and Applied Mathematics 50: 837 – 847.

Wang, H. (2016). Core-EP decomposition and its applications. Linear Algebra and Its Applications, 508: 289–300.

Wang, H., Li, X. (2015). Characterizations of the core inverse and the core partial ordering. Linear Multilinear Algebra, 63: 1829–1836.

Wang, H., Li, X. (2016). Partial orders based on core-nilpotent decomposition. Linear Algebra and its Applications. 488: 235-248.

Wang, H., Chen, J. & Yan, G. (2018). Generalized Cayley–Hamilton theorem for core-EP inverse matrix and DMP inverse matrix, J. Southeast Univ. English Edition 34: 135–138.

Wang, G., Wei, Y. & Qiao, S. (2018). Generalized Inverses: Theory and Computations, Developments in Mathematics, vol. 53, Springer: Singapore and Science Press, Beijing.

Wei, Y., Stanimirovic, PS. & Petkovic, MD. (2018). Numerical and Symbolic Computations of Generalized Inverses, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ.

Yu, A. & Deng C. (2016). Characterizations of DMP inverse in a Hilbert space. Calcolo. 53:331-341.

Zhong, J. & Yang, H. (2022). Displacement structure of the DMP inverse. Open Mathematics. 20: 1203–1214.

Zhou, M., Chen, J., Li, TT. & Wang, D. (2018). Three limit representation of the core-EP inverse, Filomat ,32(17): 5887 – 5894

Zuo, Z. & Cheng, YJ. (2019). Three new revisition of core-EP inverse of matrices, Filomat, 33(10): 3061 – 3072.

Zuo, K., Cvetkovic-Ilic, D. & Cheng, Y. (2022). Different characterizations of DMP-inverse of matrices, Linear Multilinear Algebra 70(3), 411–418.

Zuo, K., Yu, L. & Gaojun L. (2020). A new generalized inverse of matrices from core-EP decomposition. https://doi.org/10.48550/arXiv.2007.02364.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler	
Adı Soyadı	Burak KARAMAN
Doğum Yeri	
Doğum Tarihi	
Uyruğu	■ T.C. ❒ Diğer:
Telefon	
E-Posta Adresi	

Eğitim Bilgileri	
Lisans	
Üniversite	Ordu Üniversitesi
Fakülte	Fen edebiyat Fakültesi
Bölümü	Matematik Bölümü
Mezuniyet Yılı	2019
Yüksek Lisans	
Üniversite	
Enstitü Adı	
Anabilim Dalı	
Programı	
Mezuniyet Tarihi	
Doktora	
Üniversite	
Enstitü Adı	
Anabilim Dalı	
Programı	
Mezuniyet Tarihi	