T. C.

ORDU ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI ÖZEL EĞRİLERDEN ELDE EDİLEN ADJOİNT EĞRİLERİ VE ÖZELLİKLERİ

EDA ÖZTÜRK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ORDU 2024

TEZ BİLDİRİMİ

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan ve kullanılan intihal tespit programının sonuçlarına göre; bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

EDA ÖZTÜRK

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

BAZI ÖZEL EĞRİLERDEN ELDE EDİLEN ADJOİNT EĞRİLERİ VE ÖZELLİKLERİ

EDA ÖZTÜRK

ORDU ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ, 84 SAYFA

(TEZ DANIŞMANI: DR. ÖĞR. ÜYESİ SÜLEYMAN ŞENYURT)

Bu çalışma dört bölümden oluşmaktadır. Giriş bölümünde konunun tarihi, kullanım alanları ve bunlarla ilgili yapılan çalışmalardan bahsedilmiştir. Genel bilgiler bölümünde konuyla ilgili tanımlar, teoremler ve ispatlar yer almaktadır. Materyal ve yöntemler kısmında tezin önemli noktalarına yani kullanılan eğrilere, modifiye çatı, adjoint eğri ile ilgili tanım, teorem ve ispatlar verildi.

Tez çalışmamızın asıl fikri bulgular kısmında yer almaktadır. Burada İnvolüt-Evolüt, Bertrand eğri çifti ve Mannheim eğri çifti önce modifiye edildi. Daha sonra bu eğrilerden elde edilen adjoint eğriler bulundu. Son olarak da elde edilen adjoint eğriler modifiye edilerek esas eğri ile bağlantıları hesaplandı.

Anahtar Kelimeler: Modifiye ortogonal çatı, adjoint eğri, İnvolüt-Evolüt eğri çifti, Bertrand eğri çifti, Mannheim eğri çifti

ABSTRACT

ADJOINT CURVES OBTAINED FROM SOME SPECIAL CURVES AND THEIR CHARACTERIZATIONS

EDA ÖZTÜRK

ORDU UNIVERSITY INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

MATHEMATİCS

MASTER THESIS, 84 PAGES

(SUPERVISOR: ASST. PROF. DR. SÜLEYMAN ŞENYURT)

This study consists of four parts. In the introduction section, the history of the subject, its areas of use and studies on them are mentioned. The general information section includes definitions, theorems and proofs on the subject. In the material and methods section, the important points of the thesis, namely the curves used, definitions, theorems and frames regarding the modified frame and adjoint curve were given.

The main idea of our thesis is in the findings section. Here, Involute-Evolute, Bertrand curve pair and Mannheim curve pair were first modified. Then, adjoint curves obtained from these curves were found. Finally, the obtained adjoint curves were modified and their connections with the main curve were calculated.

Keywords: Modified orthogonal frame, adjoint curve, Involute-Evolute curve, Bertrand curve, Mannheim curve

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim boyunca benden desteğini, sabrını ve bilgilerini esirgemeyen danışman hocam Sayın Dr. Öğr. Üyesi Süleyman ŞENYURT'a, Ordu Üniversitesi Arş. Gör. Dr. Davut CANLI hocama teşekkürü borç bilirim.

Yüksek lisansa başlamam konusunda beni destekleyen ve fikirlerini esirgemeyen mezunu olduğum Karadeniz Teknik Üniversitesi'nden Sayın Prof. Dr. Abdullah ÇAVUŞ hocama sonsuz teşekkür ve saygılarımı sunarım.

İÇİNDEKİLER

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

SİMGELER ve KISALTMALAR LİSTESİ

E^3	:	3- boyutlu Öklid Uzayı
$\lVert \ \rVert$	:	Norm
$\langle \ \rangle$	:	Öklid İç Çarpımı
$\boldsymbol{t}$	:	Teğet Vektör
$\boldsymbol{n}$	:	Aslinormal Vektör
$\boldsymbol{b}$	:	Binormal Vektör
$\boldsymbol{C}$	:	Birim Darboux Vektörü
$\boldsymbol{W}$	:	Darboux Vektörü
$\boldsymbol{\kappa}$	:	Eğrilik
$\boldsymbol{\tau}$	:	Burulma
β_1	:	İnvolüt Eğrisinin Adjoint Eğrisi
β_2	:	Evolüt Eğrisinin Adjoint Eğrisi
β_3	:	Bertrand Eğrisinin Adjoint Eğrisi
β_4	:	Mannheim Eğrisinin Adjoint Eğrisi
$\boldsymbol{T}$	:	Modifiye Ortogonal Çatı Teğet Vektörü
$\boldsymbol{N}$	:	Modifiye Ortogonal Çatı Asli Normal Vektörü
$\boldsymbol{B}$	:	Modifiye Ortogonal Çatı Binormal Vektörü
γ	:	Modifiye Ortogonal Çatıya Göre Adjoint Eğri
γ_1	:	İnvolüt Eğrisinin Modifiye Ortogonal Çatıya Göre Adjoint Eğrisi
γ_2	:	Evolüt Eğrisinin Modifiye Ortogonal Çatıya Göre Adjoint Eğrisi
γ_3	:	Bertrand Eğrisinin Modifiye Ortogonal Çatıya Göre Adjoint Eğrisi
γ_4	:	Mannheim Eğrisinin Modifiye Ortogonal Çatıya Göre Adjoint Eğrisi
$\boldsymbol{t}_{\gamma_1}$	:	İnvolüt Eğrisinin Modifiye Ortogonal Çatıya Göre Adjoint Eğrisinin Teğet Vektörü
$\boldsymbol{n}_{\gamma_1}$	:	İnvolüt Eğrisinin Modifiye Ortogonal Çatıya Göre Adjoint Eğrisinin Normal Vektörü
$\boldsymbol{b}_{\gamma_1}$	:	İnvolüt Eğrisinin Modifiye Ortogonal Çatıya Göre Adjoint Eğrisinin Binormal Vektörü
$\boldsymbol{\kappa}_{\gamma_1}$	:	İnvolüt Eğrisinin Modifiye Ortogonal Çatıya Göre Adjoint Eğrisinin Eğriliği
$\boldsymbol{\tau}_{\gamma_1}$	:	İnvolüt Eğrisinin Modifiye Ortogonal Çatıya Göre Adjoint Eğrisinin Burulması
$\boldsymbol{t}_{\gamma_2}$	:	Evolüt Eğrisinin Modifiye Ortogonal Çatıya Göre Adjoint Eğrisinin Teğet Vektörü
$\boldsymbol{n}_{\gamma_2}$	:	Evolüt Eğrisinin Modifiye Ortogonal Çatıya Göre Adjoint Eğrisinin Normal Vektörü
$\boldsymbol{b}_{\gamma_2}$	:	Evolüt Eğrisinin Modifiye Ortogonal Çatıya Göre Adjoint Eğrisinin Binormal Vektörü
$\boldsymbol{\kappa}_{\gamma_2}$	:	Evolüt Eğrisinin Modifiye Ortogonal Çatıya Göre Adjoint Eğrisinin Eğriliği

τ_{γ_2}	:	Evolüt Eğrisinin Modifiye Ortogonal Çatıya Göre Adjoint Eğrisinin Burulması
t_{γ_3}	:	Bertrand Eğrisinin Modifiye Ortogonal Çatıya Göre Adjoint Eğrisinin Teğet Vektörü
n_{γ_3}	:	Bertrand Eğrisinin Modifiye Ortogonal Çatıya Göre Adjoint Eğrisinin Normal Vektörü
b_{γ_3}	:	Bertrand Eğrisinin Modifiye Ortogonal Çatıya Göre Adjoint Eğrisinin Binormal Vektörü
κ_{γ_3}	:	Bertrand Eğrisinin Modifiye Ortogonal Çatıya Göre Adjoint Eğrisinin Eğriliği
τ_{γ_3}	:	Bertrand Eğrisinin Modifiye Ortogonal Çatıya Göre Adjoint Eğrisinin Burulması
t_{γ_4}	:	Mannheim Eğrisinin Modifiye Ortogonal Çatıya Göre Adjoint Eğrisinin Teğet Vektörü
n_{γ_4}	:	Mannheim Eğrisinin Modifiye Ortogonal Çatıya Göre Adjoint Eğrisinin Normal Vektörü
b_{γ_4}	:	Mannheim Eğrisinin Modifiye Ortogonal Çatıya Göre Adjoint Eğrisinin Binormal Vektörü
κ_{γ_4}	:	Mannheim Eğrisinin Modifiye Ortogonal Çatıya Göre Adjoint Eğrisinin Eğriliği
τ_{γ_4}	:	Mannheim Eğrisinin Modifiye Ortogonal Çatıya Göre Adjoint Eğrisinin Burulması
T_{γ_1}	:	İnvolüt Eğrisinin Modifiye Ortogonal Çatıya Göre Adjoint Eğrisinin Modifiye Çatısının Teğet Vektörü
N_{γ_1}	:	İnvolüt Eğrisinin Modifiye Ortogonal Çatıya Göre Adjoint Eğrisinin Modifiye Çatısının Normal Vektörü
B_{γ_1}	:	İnvolüt Eğrisinin Modifiye Ortogonal Çatıya Göre Adjoint Eğrisinin Modifiye Çatısının Binormal Vektörü
T_{γ_2}	:	Evolüt Eğrisinin Modifiye Ortogonal Çatıya Göre Adjoint Eğrisinin Modifiye Çatısının Teğet Vektörü
N_{γ_2}	:	Evolüt Eğrisinin Modifiye Ortogonal Çatıya Göre Adjoint Eğrisinin Modifiye Çatısının Normal Vektörü
B_{γ_2}	:	Evolüt Eğrisinin Modifiye Ortogonal Çatıya Göre Adjoint Eğrisinin Modifiye Çatısının Binormal Vektörü
T_{γ_3}	:	Bertrand Eğrisinin Modifiye Ortogonal Çatıya Göre Adjoint Eğrisinin Modifiye Çatısının Teğet Vektörü
N_{γ_3}	:	Bertrand Eğrisinin Modifiye Ortogonal Çatıya Göre Adjoint Eğrisinin Modifiye Çatısının Normal Vektörü
B_{γ_3}	:	Bertrand Eğrisinin Modifiye Ortogonal Çatıya Göre Adjoint Eğrisinin Modifiye Çatısının Binormal Vektörü
T_{γ_4}	:	Mannheim Eğrisinin Modifiye Ortogonal Çatıya Göre Adjoint Eğrisinin Modifiye Çatısının Teğet Vektörü
N_{γ_4}	:	Mannheim Eğrisinin Modifiye Ortogonal Çatıya Göre Adjoint Eğrisinin Modifiye Çatısının Normal Vektörü
B_{γ_4}	:	Mannheim Eğrisinin Modifiye Ortogonal Çatıya Göre Adjoint Eğrisinin Modifiye Çatısının Binormal Vektörü

1. GİRİŞ

Geometrinin tarihi M.Ö. 300'lü yıllara kadar dayanır. Başlarda sadece günlük ihtiyaçlar karşılanmak için kullanılsa da, günümüzde kullandığımız kavramlar Öklid tarafından aksiyomlara dayalı sistem haline getirildi.

Öklid, geometrik aksiyomları oluştururken uzaklık kavramını ele almış ve basit bir şekilde mutlak değer ile tanımlanan uzaklık kavramını norm haline getirmiştir. Daha sonra bu kavramı metrik ile birleştirip reel sayılarda üç boyutlu metrik uzay kavramını bulmuştur. Bu uzay kavramına da Öklid uzay denir.

Diferensiyel geometri, geometrik problemleri çözmek için diferensiyel, integral hesaplama ve lineer cebir kullanılan matematik alt dalıdır. Son yıllarda odağı birçok gelişme göstermiştir. İlgi odağı olmasının sebebi ise kullanım alanlarının çok geniş olmasına dayanır. Fizik, mühendislik, uzay bilimleri, ekonometri gibi bir çok bilim dalında kullanılmaktadır.

Diferensiyel geometride önemli yere sahip alanlardan biri de eğriler teorisidir. Farklı boyutlar ve uzaylarda çalışma imkanı sağladığı için bilim insanları tarafından merak uyandırdığı için hala gelişim göstermektedir. Eğriler ilk olarak 14. yy da Nicole Oresme tarafından basitçe ortaya atılımıştır. Newton, Leibniz, ve Euler gibi önemli bilim insanları tarafından geliştirilip kullandığımız ve gelişme sağladığımız alt yapıları oluşturulmuştur. 1847 yılında Frenet doktora tezinde uzaydaki herhangi bir eğri için her noktasında tanımlı bir ortogonal çatı tanımlamış daha sonra Serret de bu çatıya katkıda bulunarak Frenet-Serret formülleri ortaya çıkmıştır. Üç boyutlu Öklid uzayında eğriler üzerine birçok çalışmalar yapılmıştır. İki eğrinin karşılıklı noktalarında Frenet vektörleri arasındaki bağıntılardan yararlanılarak yeni eğri çiftleri elde edilmiştir. Bu eğri çiftlerinden bazıları İnvolüt- Evolüt eğrisi, Bertrand eğrisi, Mannheim eğrisidir.

İnvolüt eğrisi 1658 yılında ilk kez C. Huygens tarafından tanımlanmıştır. Bu eğri optik ölçümlerin doğru sonuçlarına ulaşılırken bulunmuştur. Evolüt eğrisi en doğru saat dilimi oluşturulmak amacıyla boylam hesaplamalarında kullanılmıştır. Bertrand eğri çifti 1850 yılında J. Bertrand tarafından asli normalleri eğri boyunca lineer bağımlı bir eğri olarak tanımlanıştır. Mannheim eğri çifti ilk olarak A.

Mannheim tarafından 1878 bir eğrinin asli normali diğer eğrinin binormli ile lineer bağımlı olarak tanımlanmıştır. Bu eğri üzerinde yakın tarihlerde çalışmalar yapan Liu ve Wang Mannheim, bu eğrilerinin eğrilik ve burulması ile sonuçlar elde etmişlerdir (Lui ve Wang, 2007).

Sürekli gelişme halinde olan geometri alanında 3-boyutlu Öklid uzayında Frenet-Serret çatısının oluşturulmakta zorlanıldığı belirsizlik durumları ortaya çıkmıştır. Bu belirsizliği ortadan kaldırabilmek için Takao Sasai tarafından 1984 yılında modifiye ortogonal çatı tanımlanmıştır (Sasai,1984). M.K. Karacan ve B. Bükçü modifiye çatı ile ilgili bir çok çalışma yapmıştır (Karacan ve Bükçü,2016). S.M Gür ve M. Bektaş ise birim hızlı olmayan bir eğrinin modifiye çatısı ile ilgili çalışmalar yapmıştır (Gür ve Bektaş, 2022). Azak A. 2021 yılımda modifiye çatı tanımını involüt-evolüt eğri çiftine uygulamıştır (Azak, 2021). Benzer şekilde Mannheim eğrileri ile ilgili çalışmalar yapılmıştır (Lone ve ark., 2018).

Öklid uzayında eğrinin Frenet-Serret vöktörlerinden yararlanılarak yeni ve özel bir eğri kavramı olan Adjoint eğriler ortaya çıkmıştır. Bir eğrinin bi normal vektürünün integrali alınarak elde edilen bu eğri bir çok çalışmada kullanılmıştır. Arıkan ve Kaya Nurkan (2020) adjoint eğriyi modifiye ederek farklı bir çalışma yapmışlardır (Arıkan ve Kaya Nurkan, 2020).

Bu tez çalışmasında da İnvolüt-Evolüt eğrisi, Mannheim eğrisi, Bertrand eğrisi modifiye çatıları bulunmuştur. Daha sonra bu eğrilerin adjoint eğrileri elde edilmiştir. Son olarak da adjoint eğrisi ile elde edilen yeni eğriler modifiye edilerek esas eğri ile bağlantıları bulunmuştur.

2. GENEL BİLGİLER

2.1 Temel Kavramlar

Tanım 2.1.1 A boştan farklı bir cümle ve V de K cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. Aşağıdaki önermeleri sağlayan bir $f : A \times A \to V$ fonksiyonu varsa A ya V ile birleştirilmiş bir afin uzay denir:

$$\forall P, M, N \in A \text{ için, } f(P,M) + f(M,N) = f(P,N),$$

$$\forall P \in A, \forall \omega \in V \text{ için } f(P,M) = \omega$$

olacak şekilde bir tek $M \in A$ noktası vardır (Hacısalihoğlu,1983).

Tanım 2.1.2 V vektör uzayı olsun.

$$\langle , \rangle : V \times V \to R$$

şeklinde tanımlı fonksiyon aşağıdaki aksiyomları sağlarsa bu fonksiyona bir iç çarpım fonksiyonu denir:

$\forall\, x, y, z \in V$ için

a) Bilineerlik Aksiyomu;

$$\langle ax + by, z \rangle = a\langle x, z \rangle + b\langle y, z \rangle,$$

$$\langle x, ay + bz \rangle = a\langle x, y \rangle + b\langle x, z \rangle,$$

b) Simetri Aksiyomu;

$$\langle x, y \rangle = \langle y, z \rangle,$$

c) Pozitif Tanımlılık (kararlılık) Aksiyomu;

$$\langle x, x \rangle \geq 0,\ \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = \vec{0}\ .$$

Tanım 2.1.3 R^3, A afin uzayı ile birleşen reel vektör uzayı olsun. $\forall\, X,Y \in R^3$ için

$$\langle , \rangle : R^3 \times R^3 \to R,\ \langle X,Y \rangle = \sum_{i=1}^{3} x_i y_i = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$$

şeklinde tanımlı fonksiyon bir iç çarpım fonksiyonudur. Bu iç çarpıma da standart iç çarpım veya Öklid iç çarpım denir. Standart iç çarpımın tanımlı olduğu R^3 vektör uzayı ile birleşen afin uzayına 3-boyutlu standart Öklid uzayı denir ve E^3 ile gösterilir (Hacısalihoğlu,1998).

Tanım 2.1.4 $X = (x_1, x_2, x_3)$, $Y = (y_1, y_2, y_3) \in R^3$ olsun.

$$d : E^3 \times E^3 \to R,\ d(X,Y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} \left(y_i - x_i\right)^3}$$

şeklinde tanımlanan d fonksiyonuna uzaklık fonksiyonu, $d(X,Y)$ reel sayısına da X ile Y noktaları arasındaki uzaklık denir (Hacısalihoğlu,1983).

Tanım2.1.5 $\alpha : I \subset R \to E^3, \alpha(s) = (\alpha_1(s), \alpha_2(s), \alpha_3(s))$ diferensiyellenebilir fonksiyona E^3 de bir eğri denir. Burada I aralığına α eğrisinin parametre aralığı ve $s \in I$ değişkenine de α eğrisinin parametresi denir. $\|\alpha'(s)\| = 1$ ise eğriye birim hızlı eğri ve $s \in I$ parametresine de eğrinin yay parametresi denir (Hacısalihoğlu,1983).

Tanım 2.1.6 $\alpha = \alpha(s)$ eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet vektörleri

a) $s \in I$ yay parametresi ise

$$t(s) = \alpha'(s),$$

$$n(s) = \frac{1}{\|\alpha''(s)\|}\alpha''(s), \tag{2.1}$$

$$b(s) = t(s) \times n(s)$$

b) $s \in I$ keyfi parametre ise

$$t(s) = \frac{1}{\|\alpha'(s)\|}\alpha'(s),$$

$$n(s) = b(s) \times t(s), \tag{2.2}$$

$$b(s) = \frac{1}{\|\alpha'(s) \times \alpha''(s)\|}\left(\alpha'(s) \times \alpha''(s)\right)$$

Burada $'\times'$ sembolü IR^3 deki vektörel çarpımdır.

Tanım 2.1.7 α, diferansiyellenebilir bir eğri eğrilik ve torsiyonu sırasıyla κ ve τ ile gösterilsin.

a) α birim hızlı ise κ ve τ eğrilikleri

$$\kappa : I \to R, \quad \kappa(s) = \|t'(s)\|,$$

$$\tau : I \to R, \quad \tau(s) = -\langle b'(s), n(s)\rangle = \langle n'(s), b(s)\rangle \tag{2.3}$$

b) α keyfi parametre ile verilmiş ise κ ve τ eğrilikleri

$$\kappa(s) = \frac{\|\alpha'(s) \times \alpha''(s)\|}{\|\alpha'(s)\|^3}, \quad \tau(s) = \frac{\det\left(\alpha'(s), \alpha''(s), \alpha'''(s)\right)}{\|\alpha'(s) \times \alpha''(s)\|^2} \tag{2.4}$$

denklemleri ile verilir (Hacısalihoğlu,1983).

Tanım 2.1.8 α eğrisinin Frenet türev vektörleri

a) α birim hızlı (yay parametreli) ise

$$t'(s) = \kappa(s)n(s),$$

$$n'(s) = -\kappa(s)t(s) + \tau(s)b(s), \tag{2.5}$$

$$b'(s) = -\tau(s)n(s)$$

b) α keyfi parametreli ise

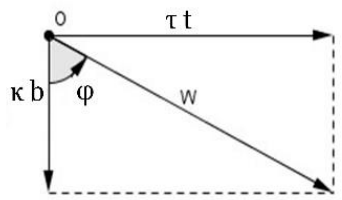
$$t'(s) = \nu\kappa(s)n(s),$$

$$n'(s) = \nu(-\kappa(s)t(s) + \tau(s)b(s)), \tag{2.6}$$

$$b'(s) = -\nu\tau(s)n(s)$$

bağıntısı vardır. Buarada $\nu = \|\alpha'\|$ (Hacısalihoğlu,1983; O'neill,2006).

Tanım 2.1.9 α eğrisinin Frenet vektörlerinin bir eksen etrafında yaptığı ani dönme hareketinin yön ve doğrultusunu veren vektöre Darboux vektörü denir (Hacısalihoğlu,1998).



Şekil 2.1 Darboux vektörü

Bu tanıma göre Darboux vektörü $\vec{W}$ ile gösterilirse ,

$$t' = \vec{W} \times t,$$
$$n' = \vec{W} \times n,$$
$$b' = \vec{W} \times b$$

eşitliği yazılabilir.

α birim hızlı eğrisinin $\{t, n, b\}$ çatısına Darboux vektörü

$$W = \tau t + \kappa b$$

denklemi ile verilir (Özdemir,2020).

Gerçekten $\vec{W}$ vektörü $W = xt + yn + zb$ şeklinde yazılırsa Tanım 2.1.9 dan

$$\begin{aligned} t' &= \vec{W} \times t \\ &= (xt + yn + zb) \times t \\ &= -yb + zn, \\ b' &= \vec{W} \times b \\ &= (xt + \kappa b) \times b \\ &= -xn \end{aligned}$$

yazılır. Buradan $y = 0, z = \kappa,\ x = \tau$ bulunur. Bu değerler $\vec{W}$ vektöründe yerine yazılırsa $W = \tau t + \kappa b$ elde edilir.

W ile b vektörleri arasındaki açı φ ile gösterilirse Şekil 2. 1' den

$$\sin\varphi = \frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}, \qquad \cos\varphi = \frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}$$

yazılır. Darboux vektörü yönündeki birim vektör C ile gösterilirse bu vektör

$$C = \frac{\tau}{\|\vec{W}\|} t + \frac{\kappa}{\|\vec{W}\|} b,$$

$$C = \frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} t + \frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} b,$$

$$C = \sin\varphi t + \cos\varphi b$$

şeklinde bulunur (Fenchel,1951; Hacısalihoğlu, 1983).

3. MATERYAL VE YÖNTEM

3.1 Modifiye Ortogonal Çatı

Bir fonksiyonun her noktada türevlenebilir olmayabilir. Dolayısıyla bu noktalar üzerinde belirsizlik oluştuğundan Frenet çatısı kurulurken tanımsızlık durumları oluşabilir. Türevlenebilir olmayan noktalarda Frenet çatısı elde etmek için modifiye edilmesine ihtiyaç duyulur. Modifiye ortogonal çatı ilk kez 1984 yılında Takao Sasai tarafından yayımlanan bir makalede tanımlanmıştır (Sasai,1984).

Tanım 3.1.1 α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet çatısı $\{t,n,b\}$ olsun.

a) $T = t, \quad N = \kappa n, \quad B = \kappa b$ (3.1)

şeklinde tanımlı $\{T,N,B\}$ ortogonal çatısına κ'ya göre modifiye ortogonal çatı,

b) $\tau \neq 0$ olmak üzere

$T = t, \quad N = \tau n, \quad B = \tau b$ (3.2)

şeklinde tanımlı $\{T,N,B\}$ ortogonal çatısına da τ 'ya göre modifiye ortogonal çatı denir (Sasai,1984).

Teorem 3.1.1 α eğrisinin κ ve τ' ya göre modifiye ortogonal çatılarının türev vektörleri arasında sırasıyla

$$\begin{bmatrix} T'(s) \\ N'(s) \\ B'(s) \end{bmatrix} = \frac{1}{\kappa}\begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa^3 & \kappa' & \kappa\tau \\ 0 & -\kappa\tau & \kappa' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} T(s) \\ N(s) \\ B(s) \end{bmatrix} ,$$

$$\begin{bmatrix} T'(s) \\ N'(s) \\ B'(s) \end{bmatrix} = \frac{1}{\tau}\begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa\tau^2 & \tau' & \tau^2 \\ 0 & -\tau^2 & \tau' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} T(s) \\ N(s) \\ B(s) \end{bmatrix}$$

bağıntıları vardır (Sasai, 1984).

İspat: (3.1) ifadesinin türevi alınır ve (2.5) bağıntısındaki Frenet vektörleri türevleri kullanılırsa

$$T' = t'$$

$$T' = \nu\kappa n$$

$$= \nu N,$$

$$N' = (\kappa n)'$$

$$= \kappa' n + \kappa n'$$

$$= \kappa' n + \kappa(-\kappa t + \tau b)$$

$$= \frac{\kappa'}{\kappa} N - \nu\kappa^2 T + \nu\tau B,$$

$$B' = (\kappa b)'$$

$$= \kappa' b + \kappa b'$$

$$= \kappa' b - \nu\kappa\tau n$$

$$= \frac{\kappa'}{\kappa} B - \nu\tau N$$

olur. (3.2) deki ifadelerin türevi alınır ve (2.5) bağıntısındaki Frenet vektörleri türevleri kullanılırsa

$$T' = t'$$

$$= \nu\kappa n$$

$$= \frac{\nu\kappa N}{\tau},$$

$$N' = (\tau n)'$$

$$= \tau' n + \tau n'$$

$$= \tau' n + \tau(-\kappa t + \tau b)$$

$$= \frac{\tau'}{\tau} N - \nu\kappa\tau T + \nu\tau B,$$

$$B' = (\tau b)'$$

$$= \tau' b + \tau b'$$

$$= \tau' b - \nu\tau\tau n$$

$$= \frac{\tau'}{\tau} B - \nu\tau N$$

bulunur.

3.2 Adjoint Eğri

Tanım 3.2.1 α eğrisinin binormal vektörü b ve adjoint eğrisi β ile gösterilirsin. β adjoint eğrisi

$$\beta(s) = \int b(s)\,ds \tag{3.3}$$

şeklinde tanımlanır (Arıkan ve Kaya Nurkan, 2019; Do Carmo, 1976).

Teorem3.2.1 α eğrisi ile β adjoint eğrisinin yay parametreleri aynıdır (Arıkan ve Kaya Nurkan, 2019).

İspat: (3.3) ifadesinden türev alınır ve sonra norm hesaplanırsa

$$\frac{d\beta}{ds} = b \Rightarrow \left\|\frac{d\beta}{ds}\right\| = \|b\| \Rightarrow \left\|\frac{d\beta}{ds}\right\| = 1$$

bulunur. Buradan $\|d\beta\| = \|ds\|$ olur.

Teorem 3.2.2 α birim hızlı eğrisinin Frenet vektörleri $\{t,n,b\}$ ve β adjoint eğrisinin Frenet vektörleri $\{t_\beta,n_\beta,b_\beta\}$ olsun. Bu eğrilerin Frenet vektörleri ve eğrilikleri arasında

$$t_\beta = b,\ \ n_\beta = -n,\ \ b_\beta = t,\ \ \kappa_\beta = \tau,\ \ \tau_\beta = \kappa \tag{3.4}$$

bağıntıları vardır (Arıkan ve Kaya Nurkan, 2019)

İspat: $\beta(s) = \int b(s)ds$ ifadesinin türevleri alınır ve (2.5) Frenet vektörlerinin türev formülleri yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
&\beta' = b,\\
&\beta'' = b' = -\tau n,\\
&\beta''' = (-\tau n)' = \kappa\tau t - \tau' n - \tau^2 b,\\
&\|\beta'\| = 1,\\
&\beta'\times\beta'' = \tau t,\\
&\|\beta'\times\beta''\| = \tau,\\
&\det(\beta',\beta'',\beta''') = \tau^2\kappa
\end{aligned} \tag{3.5}$$

bulunur. Bu ifadeler Frenet formullerinde yerine yazılırsa adjoint eğrisinin Frenet vektörleri, eğrilik ve torsiyonu

$$t_\beta = \frac{\beta'}{\|\beta'\|} = b,\ b_\beta = \frac{\beta'\times\beta''}{\|\beta'\times\beta''\|} = t,\ n_\beta = b_\beta\times t_\beta = -n,$$

$$\kappa_\beta = \frac{\|\beta'\times\beta''\|}{\|\beta'\|^3} = \tau\ ,\ \ \tau_\beta = \frac{\det(\beta',\beta'',\beta''')}{\|\beta'\times\beta''\|^2} = \kappa$$

şeklinde bulunur.

3.3 İnvolüt Eğrileri

Tanım 3.3.1 Aynı aralıkta tanımlı iki eğri α ve α_1 olsun. α eğrisinin teğet vektörü α_1 eğrisinin $\alpha_1(s)$ noktasından geçiyor ve bu noktadaki teğetine dik ise α_1 eğrisine α eğrisinin involütü denir. α eğrisinin teğet vektörü t , α_1 eğrisinin teğet vektörü t_1 ile gösterilirse involüt eğrisi tanımdan $\langle t_1(s), t(s)\rangle = 0$ olur (Sabuncuoğlu, 2016).

Teorem 3.3.1 α eğrisinin involütü α_1 eğrisi olsun. α_1 involüt eğrisinin denklemi

$$\alpha_1(s) = \alpha(s) + \lambda(s)t(s), \quad \lambda(s) = k - s, \quad k \in R \tag{3.6}$$

bağıntısıyla verilir (Sabuncuoğlu, 2016).

İspat: (3.6) ifadesinin türevi alınırsa

$$\begin{aligned} \alpha_1' &= \alpha' + \lambda' t + \lambda\kappa n \\ &= (1+\lambda)t + \lambda\kappa n \end{aligned}$$

olur. İnvolüt eğri tanımından

$$\begin{aligned} \langle \alpha_1', t\rangle = 0 &\Rightarrow \langle (1+\lambda')t + \lambda\kappa n, t\rangle = 0 \\ &\Rightarrow \quad 1 + \lambda' = 0 \\ &\Rightarrow \lambda = k - s, \quad k \in R \end{aligned}$$

bulunur.

Teorem 3.3.2 α_1 eğrisi α eğrisinin involütü ve Frenet çatıları sırasıyla $\{t_1, n_1, b_1\}$, $\{t, n, b\}$ olsun. Bu çatılar arasında

$$t_1 = n, \quad n_1 = -\frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}t + \frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}b, \quad b_1 = \frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}t + \frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}b \tag{3.7}$$

bağıntıları vardır (Sabuncuoğlu, 2016).

İspat: (3.6) ifadesinin türevleri alınır ve Frenet formülleri için gerekli hesaplamalar yapılırsa

$$\alpha_1' = \alpha' - t + \lambda t' = \lambda\kappa n,$$

$$\alpha_1''(s) = (\lambda\kappa n)'$$
$$= (\lambda'\kappa + \lambda\kappa')n - \lambda\kappa n'$$
$$= (\lambda'\kappa + \lambda\kappa')n - \lambda\kappa(-\kappa t + \tau b)$$
$$= \lambda\kappa^2 t + (\lambda'\kappa + \lambda\kappa')n - \lambda\kappa\tau b,$$

$$\alpha_1'''(s) = (2\kappa^2 - 3\lambda\kappa\kappa')t + (-\lambda\kappa^3 - 2\kappa' + \lambda\kappa''\tau^2)n + (-2\kappa\tau + 2\lambda\kappa'\tau + \lambda\kappa\tau')b,$$

$$\alpha_1' \times \alpha_1'' = (\lambda\kappa n)\times((\lambda'\kappa + \lambda\kappa')n - \lambda\kappa^2 t + \lambda\kappa\tau b) = \lambda^2\kappa^2\tau t + \lambda^2\kappa^3 b,$$

$$\left\langle \alpha_1' \times \alpha_1'', \alpha_1''' \right\rangle = \left\langle \begin{array}{l} \lambda^2\kappa^2\tau t + \lambda^2\kappa^3 b, \\ (2\kappa^2 - 3\lambda\kappa\kappa')t + (-(k-x)\kappa^3 - 2\kappa' + \lambda'' - \lambda\kappa\tau^2)n \\ +(-2\kappa\tau + 2\lambda\kappa'\tau + \lambda\kappa\tau')b \end{array} \right\rangle,$$
$$= \lambda^3\kappa^3(\kappa\tau' - \kappa'\tau)$$

$$\left\|\alpha_1'\right\| = \lambda\kappa\,,$$

$$\begin{aligned} \left\|\alpha_1' \times \alpha_1''\right\| &= \sqrt{\kappa^6\lambda^4 + \lambda^4\kappa^4\tau^2} \\ &= \lambda^2\kappa^2\sqrt{\kappa^2 + \tau^2} \end{aligned} \tag{3.8}$$

bulunur. Bu bağıntılar Frenet formüllerinde yerine yazılırsa, involüt eğrisinin Frenet vektörleri

$$t_1 = \frac{\alpha_1'}{\left\|\alpha_1'\right\|} = \frac{\lambda\kappa}{|\lambda\kappa|}n \quad ,$$

$$t_1 = n,\,,$$

$$b_1 = \frac{\alpha_1' \times \alpha_1''}{\left\|\alpha_1' \times \alpha_1''\right\|} = \frac{\lambda^2\kappa^2\tau t + \lambda^2\kappa^3 b}{\lambda^2\kappa^2\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}$$
$$= \frac{\lambda^2\kappa^2(\tau t + \kappa b)}{\lambda^2\kappa^2\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} = \frac{\tau t + \kappa b}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}$$

elde edilir. Normal vektör hesaplamaları kullanılırsa

$$n_1 = b_1 \times t_1 = \frac{\tau t + \kappa b}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} \times n = \frac{-\kappa t + \tau b}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}\cdot$$

Teorem 3.3.3 α_1 eğrisi α eğrisinin involüt eğrisi ve α_1 eğrisinin eğrilikleri sırasıyla κ_1, τ_1 olsun . Bu eğrilikler arasında

$$\kappa_1 = \frac{\sqrt{\left(\kappa^2 + \tau^2\right)(s)}}{(k-s)\kappa(s)}, \qquad \tau_1 = \frac{(\kappa\tau' - \kappa'\tau)(s)}{(k-s)\kappa\left(\kappa^2 + \tau^2\right)(s)}, \quad \lambda = k - s \tag{3.9}$$

bağıntısı vardır (Sabuncuoğlu, 2016).

İspat: Frenet formüllerinde (3.8) bağıntıları yerine yazılırsa α_1 involüt eğrisinin eğrilikleri

$$\kappa_1 = \frac{\left\|\alpha_1' \times \alpha_1''\right\|}{\left\|\alpha_1'\right\|^3} = \frac{\lambda^2\kappa^2\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}{\left\|\lambda\kappa n\right\|^3},$$

$$\kappa_1 = \frac{\sqrt{\left(\kappa^2 + \tau^2\right)}}{\left|(k-s)\kappa\right|},$$

$$\tau_1 = \frac{\left\langle \alpha_1' \times \alpha_1'', \alpha_1''' \right\rangle}{\left\|\alpha_1' \times \alpha_1''\right\|^2} = \frac{\lambda^3\kappa^3(\kappa\tau' - \kappa'\tau)}{\left(\lambda^2\kappa^2\sqrt{\kappa^2+\tau^2}\right)^2},$$

$$\tau_1 = \frac{(\kappa\tau' - \kappa'\tau)}{\lambda\kappa\left(\kappa^2+\tau^2\right)}$$

şeklinde bulunur.

3.4 Evolüt Eğrileri

Tanım 3.4.1 Aynı aralıkta tanımlı iki eğri α ve α_2 olsun. α_2 eğrisinin teğet vektörü α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasından geçiyor ve bu noktadaki teğetine dik ise α_2 eğrisine α eğrisinin evolütü denir. α eğrisinin teğet vektörü t , eğrisinin teğet vektörü t_2 ile gösterilirse bu tanımdan

$$\left\langle t_2(s), t(s) \right\rangle = 0$$

ifadesi bulunur (Sabuncuoğlu, 2016).

Teorem 3.4.1 α_2 eğrisi α eğrisinin evolütü olsun. Evolüt eğrisinin denklemi

$$\alpha_2(s)=\alpha(s)+\rho(s)n(s)-\rho(s)\tan(\varphi(s)+c)b(s) \tag{3.10}$$

bağıntısıyla verilir. Burada $\varphi(s)+c$ ifadesi $\alpha(s)$ noktasındaki normal düzlemde birinci kenarı $\alpha_2(s)-\alpha(s)$, ikinci kenarı $n(s)$ olan ve $\varphi(s)=\int_0^s \tau(u)du$ şeklinde tanımlı bir açıdır (Sabuncuoğlu, 2016).

İspat: α_2 eğrisinin $\alpha_2(s)$ noktasındaki teğet doğrusu, $t_2(s)$ vektörünün gerdiği doğru ve bu doğru $\alpha(s)$ noktasından geçtiğinden $\alpha_2(s)-\alpha(s)$ vektörü de $t(s)$ vektörüne diktir. Yani

$$\alpha_2(s)-\alpha(s)=\lambda(s)n(s)+\mu(s)b(s)$$

biçimindedir. (3.10) ifadesinin türevi alınır ve evolüt eğri tanımı kullanılırsa

$$(\alpha_2(s))'=(1-\lambda(s)\kappa(s))t(s)+(\lambda'(s)-\mu(s)\tau(s))n(s)+(\lambda(s)\tau(s)+\mu'(s))b(s),$$

$$\langle t_2(s),t(s)\rangle=\left\langle(\alpha_2(s))',t(s)\right\rangle=0,$$

$$\left\langle(1-\lambda(s)\kappa(s))t(s)+(\lambda'(s)-\mu(s)\tau(s))n(s)+(\lambda(s)\tau(s)+\mu'(s))b(s),t(s)\right\rangle=0,$$

$$1-\lambda(s)\kappa(s)=0$$

olur. Buradan

$$\frac{\lambda(s)}{\lambda'(s)-\mu'(s)\tau(s)}=\frac{\mu(s)}{\lambda(s)\tau(s)+\mu'(s)},$$

$$\lambda(s)=-\frac{1}{\kappa(s)}=\rho(s)$$

ve

$$\tau(s)=\frac{\mu(s)\rho'(s)-\mu'(s)\rho(s)}{(\mu^2+\rho^2)(s)}$$

bulunur. Teorem 3.4.1 den

$$\begin{aligned}\varphi(s) &= \int_0^s \tau(t)\,dt \\ &= \int_0^s \frac{\mu(s)\rho'(t)-\mu'(t)\rho(t)}{\mu^2(t)+\rho^2(t)}dt \\ &= \int_0^s \frac{\left(-\frac{\mu}{\rho}(t)\right)'}{1+\left(\frac{\mu}{\rho}(t)\right)^2}dt\end{aligned}$$

$$-\frac{\mu}{\rho}(t) = k \Rightarrow \left(\frac{\mu}{\rho}(t)\right)' = dk$$

$$\begin{aligned}\varphi(s) &= -\int_0^s \frac{dk}{1+\kappa^2} \\ &= -(\arctan k + c) = -\arctan k - c\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi(s) &= \arctan\left(-\frac{\mu(s)}{\rho(s)}\right) - c \\ &\Rightarrow \varphi(s)+c = \arctan\left(-\frac{\mu}{\rho}(s)\right) \\ &\Rightarrow -\frac{\mu(s)}{\rho(s)} = \tan(\varphi(s)+c) \\ &\Rightarrow \mu(s) = -\rho(s)\tan(\varphi(s)+c)\end{aligned}$$

Buna göre

$$\alpha_2(s) = \alpha(s) + \rho(s)n(s) - \rho(s)\tan(\varphi(s)+c)b(s)$$

bulunur.

Teorem 3.4.2 α_2 eğrisi α eğrisinin evolütü ve Frenet çatıları sırasıyla $\{t_2, n_2, b_2\}$, $\{t, n, b\}$ olsun. Bu çatılar arasında

$$t_2 = \cos(\varphi + c)n - \sin(\varphi + c)b$$

$$n_2 = -t \tag{3.11}$$

$$b_2 = \sin(\varphi + c)n + \cos(\varphi + c)b$$

bağıntısı vardır (Sabuncuoğlu, 2016).

İspat: (3.10) denkleminin türevi ve normu alınıp teğet vektör tanımında yerine yazılırsa

$$\alpha_2' = \frac{\rho' + \rho\tan(\varphi + c)}{\cos(\varphi + c)}\left(\cos(\varphi + c)n - \sin(\varphi + c)b\right) ,$$

$$\left\|\alpha_2'\right\| = \frac{\rho' + \rho\tan(\varphi + c)}{\cos(\varphi + c)} ,$$

$$t_2 = \frac{\alpha_2'}{\left\|\alpha_2'\right\|}$$

$$t_2 = \frac{\frac{\rho' + \rho\tan(\varphi + c)}{\cos(\varphi + c)}\left(\cos(\varphi + c)n - \sin(\varphi + c)b\right)}{\frac{\rho' + \rho\tan(\varphi + c)}{\cos(\varphi + c)}}$$

$$t_2 = \cos(\varphi + c)n - \sin(\varphi + c)b$$

olur. Frenet vektörü tanımından

$$\begin{aligned} t_2' &= \kappa_2 n_2 \\ &= \left\|\alpha_2'\right\|\kappa_2 n_2 \\ &= -\kappa\cos(\varphi + c)t \end{aligned}$$

$$-\kappa\cos(\varphi + c)t = \frac{\rho' + \rho\tan(\varphi + c)}{\cos(\varphi + c)}\kappa_2 n_2 \tag{3.12}$$

olur. n_2 ve t vektörleri birim vektör olduğundan $n_2=-t$ veya $n_2=t$ elde edilir. $n_2=-t$ olduğu kabul edilirse

$$\begin{aligned} b_2 &= t_2 \times n_2 \\ &= \left(\cos(\varphi+c)n-\sin(\varphi+c)b\right)\times(-t) \\ &= \sin(\varphi+c)n+\cos(\varphi+c)b \end{aligned}$$

bulunur.

Teorem 3.4.3 α_2 eğrisi α eğrisinin evolütü eğrisi ve α_2 eğrisinin eğrilikleri κ_2,τ_2 olsun. Bu eğrilikler arasında

$$\kappa_2=\frac{\kappa^3\cos^3(\varphi+c)}{\kappa\tau\sin(\varphi+c)-\kappa'\cos(\varphi+c)}\ , \quad \tau_2=\frac{-\kappa^3\sin(\varphi+c)\cos^2(\varphi+c)}{\kappa\tau\sin(\varphi+c)-\kappa'\cos(\varphi+c)} \tag{3.13}$$

bağıntısı vardır (Sabuncuoğlu, 2016).

İspat: (3.12) denklemi düzenlenlenirse

$$\kappa_2=\frac{\kappa^3\cos^3(\varphi+c)}{\kappa\tau\sin(\varphi+c)-\kappa'\cos(\varphi+c)}$$

olur.

$$b_2'=\left\|\alpha_2'\right\|\tau_2 n_2,$$

$$-\left\|\alpha_2'\right\|\tau_2 n_2=-\kappa\sin(\varphi+c)t$$

olduğundan

$$\tau_2=\frac{-\kappa^3\sin(\varphi+c)\cos^2(\varphi+c)}{\kappa\tau\sin(\varphi+c)-\kappa'\cos(\varphi+c)}$$

bulunur.

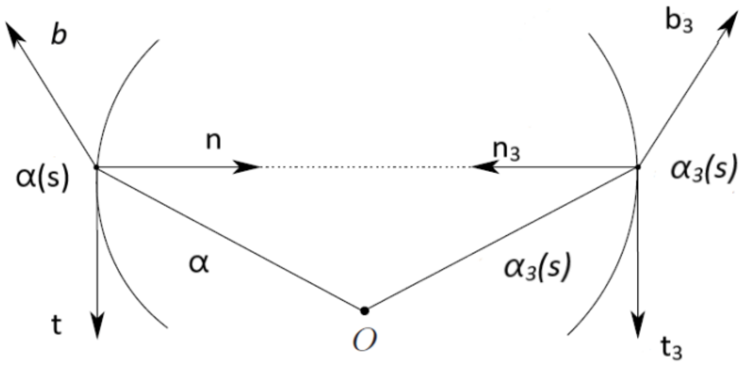
3.5 Bertrand Eğrileri

Tanım 3.5.1 α ve α_3 aynı aralıkta tanımlı iki eğri olsun. Bu eğrilerin asli normalleri lineer bağımlı ise α eğrisine Bertrand eğrisi, α_3 eğrisine α eğrisinin Bertrand partner eğrisi ve (α,α_3) ikilisine de Bertrand eğri çifti denir.

Bu tanıma göre Bertrand eğrileri arasında

$$\alpha_3(s) = \alpha(s) + \lambda(s) n(s) \tag{3.14}$$

bağıntısı vardır (Sabuncuoğlu, 2016).



Şekil 3.1 Bertrand eğri çifti

Teorem 3.5.1 Bertrand eğri çiftlerinin teğet vektörleri arasındaki açı sabittir (Sabuncuoğlu, 2016).

İspat: $\langle t_3, t\rangle' = 0$ ise Bertrand eğri çiftleri arasındaki açı sabittir. Gerçekten

$$\langle t_3, t\rangle' = \left\langle t_3', t\right\rangle + \langle t_3, t'\rangle = \nu\kappa_3 \langle n_3, t\rangle + \kappa \langle t_3, n\rangle$$

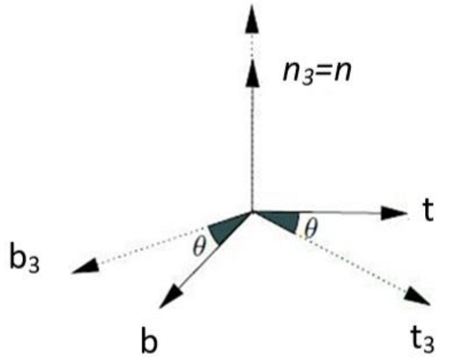
olur. $n \perp t$ olduğundan $\langle n_3, t\rangle = 0$ dır. Bu eğrilerin normalleri paralel ve $n_3 \perp t_3$ olduğundan $\langle t_3, n\rangle = 0$ dır. Buradan $\langle t_3, t\rangle' = 0$ olur.

Teorem 3.5.2 (α, α_3) Bertrand eğri çifti ve Frenet vektörleri sırasıyla $\{t, n, b\}$, $\{t_3, n_3, b_3\}$ olsun. $\langle t_3, t\rangle = \cos\theta$ olmak üzere bu çatılar arasında

$$t_3 = \cos\theta t - \sin\theta b, \quad n_3 = n, \quad b_3 = \sin\theta t + \cos\theta b \tag{3.15}$$

bağıntıları vardır (Sabuncuoğlu, 2016).

İspat: $\langle t_3, t\rangle' = 0$ olduğundan θ açısı sabittir. Bertrand eğri tanımından $n_3 = n$ olur. t ve t_3 arasındaki açı sabit ve θ olduğundan b ve b_3 arasındaki açı da θ olur.



Şekil 3.2 Bertrand eğri çifti arasındaki açı

Şekil 3.2 den Bertrand eğri çiftlerinin teğet ve binormal vektörleri arasındaki bağıntı bulunur.

Teorem 3.5.3 (α,α_3) Bertrand eğri çifti olsun. Bu eğrilerin eğrilikleri arasında

$$\kappa_3=\frac{\lambda\kappa-\sin^2\theta}{\lambda(1-\lambda\kappa)},\quad \tau_3=\frac{\sin^2\theta}{\lambda^2\tau},\quad \cos\theta=\langle t_3,t\rangle \tag{3.16}$$

bağıntısı vardır (Özdemir,2020).

İspat: (3.14) denkleminin türevi alınır ve norm hesaplanırsa

$$\alpha_3'=\alpha'+\lambda' n+\lambda(-\kappa t+\tau b)=(1-\lambda\kappa)t+\lambda' n+\lambda\tau b,$$
$$\left\|\alpha_3'\right\|=\sqrt{(1-\lambda\kappa)^2+(\lambda')^2+\lambda^2\kappa^2}$$

olur. Frenet formül hesaplamalarından

$$t_3=\frac{\alpha_3'}{\left\|\alpha_3'\right\|}$$
$$=\frac{1-\lambda\kappa}{\sqrt{(1-\lambda\kappa)^2+(\lambda')^2+\lambda^2\kappa^2}}t+\frac{\lambda'}{\sqrt{(1-\lambda\kappa)^2+(\lambda')^2+\lambda^2\kappa^2}}n+\frac{\lambda\tau}{\sqrt{(1-\lambda\kappa)^2+(\lambda')^2+\lambda^2\kappa^2}}b$$

teğet vektörü bulunur. Bertrand eğri tanımından asli normaller lineer bağımlı olduğundan

$\langle t_3, n_3 \rangle = 0$

$$\Rightarrow \left\langle \frac{1-\lambda\kappa}{\sqrt{(1-\lambda\kappa)^2+(\lambda')^2+\lambda^2\kappa^2}}t+\frac{\lambda'}{\sqrt{(1-\lambda\kappa)^2+(\lambda')^2+\lambda^2\kappa^2}}n+\frac{\lambda\tau}{\sqrt{(1-\lambda\kappa)^2+(\lambda')^2+\lambda^2\kappa^2}}b, n \right\rangle = 0,$$

$$\Rightarrow \frac{\lambda'}{(1-\lambda\kappa)^2+(\lambda')^2+\lambda^2\kappa^2} = 0,$$

$$\Rightarrow \lambda' = 0,$$

$$\Rightarrow \lambda = c, \quad c \in R \quad \text{sabit}$$

olur. Bu durumda $d(\alpha, \alpha_3) = \lambda = c$ olduğu görülür. Buradan

$\alpha_3' = t_3 = (1-\lambda\kappa)t + \lambda\tau b$ bulunur. Bertrand eğrisinin teğet vektörü

$t_3 = \cos\theta t - \sin\theta b$ ile $t_3 = (1-\lambda\kappa)t + \lambda\tau b$ denklemlerinden

$\cos\theta = (1-\lambda\kappa)$ ve $\sin\theta = -\lambda\tau$ bulunur. Diğer taraftan (3.14) denklemi düzenlenerek

$\alpha = \alpha_3 - \lambda n_3$ şeklinde yazılıbilir. Bu denklemin türevi alınırsa

$$\alpha' = \alpha_3' - (\lambda n_3)',$$
$$t = (1+\lambda\kappa_3)t_3 - \lambda\tau_3 b_3$$

olur. Bertrand eğrisinin teğet vektörü $t = \cos\theta t_3 + \sin\theta b_3$ şeklinde yazılabilir.

$t = (1+\lambda\kappa_3)t_3 - \lambda\tau_3 b_3$ ve $t = (1+\lambda\kappa_3)t_3 - \lambda\tau_3 b_3$ ifadeleri düzenlenerek

$\cos\theta = (1+\lambda\kappa_3)$ ve $\sin\theta = -\lambda\tau_3$bulunur. $\cos\theta = (1-\lambda\kappa)$ ve $\cos\theta = (1+\lambda\kappa_3)$ ifadeleri taraf tarafa çarpılısa $\cos^2\theta = (1-\lambda\kappa)(1+\lambda\kappa_3)$ olur. Bu ifade düzenlenirse Bertrand eğrisinin eğriliği

$$\kappa_3 = \frac{\lambda\kappa - \sin^2\theta}{\lambda(1-\lambda\kappa)}$$

olur.

Benzer şekilde $\sin\theta = -\lambda\tau$ ve $\sin\theta = -\lambda\tau_3$ ifadeleri taraf tarafa çarpılırsa $\sin^2\theta = \lambda^2\tau\tau_3$ olur. Bu ifade düzenlenirse Bertrand eğrisinin burulması

$$\tau_3 = \frac{\sin^2\theta}{\lambda^2\tau}$$

şeklinde bulur.

Teorem 3.5.4 (α,α_3) Bertrand eğri çifti olsun. α eğrisinin eğrilikleri ve burulma fonksiyonları κ ve τ olmak üzere α_3 eğrisinin Bertrand eğrisi olması için gerek ve yeter koşul $\mu,\lambda \in R\setminus\{0\}$ için $\lambda\kappa - \mu\tau = 1$ olmasıdır (Özdemir,2020).

İspat: $\cos\theta = (1-\lambda\kappa)$ ve $\sin\theta = -\lambda\tau$ ifadeleri oranlanırsa $\cot\theta = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta} = \dfrac{\lambda\kappa - 1}{\lambda\kappa}$ olur. $\lambda\cot\theta = \eta$ olarak alınırsa $\eta\tau = \lambda\kappa - 1$ buradan da $\lambda\kappa - \eta\tau = 1$ bulunur. Diğer taraftan bir ψ eğrisi için

$$\frac{d\psi_3}{ds} = t + \lambda(\kappa t + \tau b) = (1-\lambda\kappa)t + \lambda\tau b = \tau(-\eta t - \lambda b)$$

olur. ψ_3 eğrisinin teğet vektörü

$$t_3 = \frac{\psi_3'}{\left|\psi_3'\right|} = \frac{-\eta t + \lambda b}{\sqrt{\eta^2 + \lambda^2}}$$

bulunur. Teğet vektörün s ye göre türevi alınırsa

$$\frac{dt_3}{ds} = \frac{-\eta t' + \lambda b'}{\sqrt{\eta^2 + \lambda^2}} = \frac{-(\eta\kappa + \tau\lambda)n}{\sqrt{\eta^2 + \lambda^2}}$$

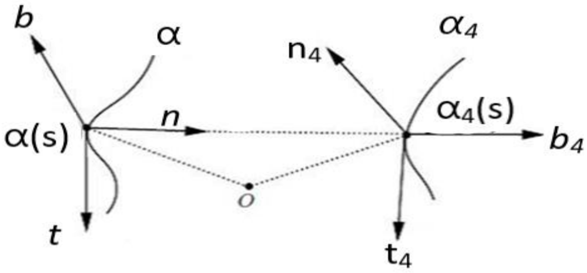
olur. Teğet vektörün $\bar{s}$ ye göre türevi alınırsa

$$\frac{dt_3}{dt} = \frac{dt_3}{d\bar{s}}\frac{d\bar{s}}{dt} = \kappa_3 n_3$$

olduğundan $n_3 = \pm n$ bulunur. Bu durumda ψ eğrisi bir Bertrand eğrisi olur.

3.6 Mannheim Eğrileri

Tanım 3.6.1 α , α_4 iki eğri, α eğrisinin normali ile α eğrisinin binormali lineer bağımlı ise α eğrisine Mannheim eğrisi, eğrisine ise Mannheim partner eğrisi denir (Wang ve Liu, 2007).



Şekil 3.3 Mannheim eğri çifti

Teorem 3.6.1 (α,α_4) Mannhaeim eğri çifti olsun. Bu durumda, α eğrisi ile α_4 Mannheim eğri çiftleri arasında

$$\alpha_4 = \alpha(s) + \lambda(s)n(s) \tag{3.17}$$

bağıntısı vardır ve λ sabittir (Wang ve Liu,2007).

İspat: (3.17) denkleminin türevi alınıp eşitliğin her iki tarafı n ile iç çarpılırsa

$$\begin{aligned}(\alpha_4)' &= \alpha + \lambda' b + \lambda n' \\ &= \alpha + \lambda' b + \lambda(-\kappa t + \tau b)\end{aligned}$$

$$\left\langle (\alpha_4)', n \right\rangle = \langle \alpha + \lambda' b + \lambda(-\kappa t + \tau b), n\rangle = \lambda'$$

eşitliği elde edilir. n ile b_4 aynı doğrultuda olduğundan $\lambda' = 0$ olur. Yani λ fonksiyonu sabittir.

Teorem 3.6.2 (α,α_4) Mannheim eğri çifti olsun. Bu eğrilerin $\{t,n,b\}$, $\{t_4,n_4,b_4\}$ Frenet çatıları arasında

$$t = \cos\theta t_4 + \sin\theta n_4, \quad n = -b_4, \quad b = -\sin\theta t_4 + \cos\theta n_4,$$

veya (3.18)

$$t_4 = \cos\theta t - \sin\theta b, \quad n_4 = \sin\theta t + \cos\theta b, \quad b_4 = n,$$

bağıntısı vardır (Orbay ve Kasap, 2009).

İspat: Mannheim eğrisi tanımdan n ile b_4 lineer bağımlıdır. t ile t_4 arasındaki açı θ ile gösterilirse t ve b vektörleri

$$t = \cos\theta t_4 + \sin\theta n_4, \quad b = -\sin\theta t_4 + \cos\theta n_4$$

şeklinde yazılır. $n = t \times b$ ifadesinden n vektörü

$$\begin{aligned} n &= \left(\cos\theta t_4 + \sin\theta n_4\right) \times \left(-\sin\theta t_4 + \cos\theta n_4\right) \\ &= \left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right)\left(n_4 \times t_4\right) \\ &= \left(n_4 \times t_4\right) \\ &= -b_4 \end{aligned}$$

bulunur. Bu ifadelerde $\{t_4, n_4, b_4\}$ yalnız bırakılırsa

$$t_4 = \cos\theta t - \sin\theta b, \quad n_4 = \sin\theta t + \cos\theta b, \quad b_4 = n$$

olur.

Teorem 3.6.3 (α, α_4) Mannheim eğri çiftinin eğrilikleri sırasıyla $\{\kappa, \tau\}$ ve $\{\kappa_4, \tau_4\}$ olsun. Bu eğrilikler arasında

$$\kappa = -\tau_4 \sin\theta \frac{ds_4}{ds}, \quad \tau = \tau_4 \cos\theta \frac{ds_4}{ds}$$

veya (3.19)

$$\kappa_4 = -\frac{d\theta}{ds_4}, \quad \tau_4 = \kappa \sin\theta \frac{ds}{ds_4} - \tau \cos\theta \frac{ds}{ds_4}$$

bağıntıları vardır (Orbay ve Kasap, 2009).

İspat: Mannheim eğri tanımından n ile b_4 lineer bağımlı olduğundan $\langle n, b_4 \rangle = 0$ dır. Bu ifadenin türevi alınır, Frenet formülleri kullanılır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$\left\langle \frac{dt}{ds_4}, b_4 \right\rangle + \left\langle t, \frac{db_4}{ds_4} \right\rangle = 0 \ ,$$

$$\kappa \frac{ds}{ds_4} \langle n, b_4 \rangle - \tau_4 \langle t, n_4 \rangle = 0$$

olur. $n = -b_4$ ve $\langle t, n_4 \rangle = \sin\theta$ olduğundan κ eğriliği

$$\kappa = -\tau_4 \sin\theta \frac{ds_4}{ds}$$

şeklinde bulunur. Benzer şekilde $\langle b, n_4 \rangle = \cos\theta$ olduğundan τ eğriliği

$$\tau = \tau_4 \cos\theta \frac{ds_4}{ds}$$

bulunur.

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu bölümde involüt eğrisi, evolüt eğrisi, Mannheim eğri çifti, Bertrand eğri çiftleri modifiye edilerek Frenet çatıları ve esas eğri ile arasındaki bağlantılar bulundu. Daha sonra involüt eğrisi, evolüt eğrisi, Mannheim eğri çifti, Bertrand eğrilerinin adjoint eğrisi, adjoint eğrisinin Frenet elemanları ve esas eğri ile arasındaki bağıntılar hesaplandı. Son olarak involüt eğrisi, evolüt eğrisi, Mannheim eğri çifti, Bertrand eğrilerinin modifiye çatılarından elde edilen adjoint eğrileri ve elde edilen adjoint eğrilerin Frenet elemanları ile esas eğrinin Frenet elemanları arasındaki bağlantılar bulundu.

4.1 İnvolüt Eğrisinin Modifiye Ortogonal Çatıya Göre Adjoint Eğrisi

Teorem 4.1.1 α eğrisinin involüt eğrisi α_1 olsun. İnvolüt eğrisinin

a) κ ya göre modifiye çatısı ve türev vektörleri

$$T_1 = t_1, \quad N_1 = \kappa_1 n_1, \quad B_1 = \kappa_1 b_1 \ , \tag{4.1}$$

$$\begin{bmatrix} T_1'(s) \\ N_1'(s) \\ B_1'(s) \end{bmatrix} = \frac{1}{\kappa_1}\begin{bmatrix} 0 & \nu\kappa_1 & 0 \\ -\nu\kappa_1^3 & \kappa_1' & \nu\kappa_1\tau_1 \\ 0 & -\nu\kappa_1\tau_1 & \kappa_1' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} T_1(s) \\ N_1(s) \\ B_1(s) \end{bmatrix}$$

b) τ ya göre modifiye çatısı ve türev vektörleri

$$T_1 = t_1, \quad N_1 = \tau_1 n_1, \quad B_1 = \tau_1 b_1 \ , \tag{4.2}$$

$$\begin{bmatrix} T_1' \\ N_1' \\ B_1' \end{bmatrix} = \frac{1}{\tau_1}\begin{bmatrix} 0 & \nu\kappa_1 & 0 \\ -\nu\kappa_1\tau_1^2 & \tau_1' & \nu\tau_1^2 \\ 0 & -\nu\tau_1^2 & \tau_1' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} T_1 \\ N_1 \\ B_1 \end{bmatrix}$$

şeklinde verilir. Burada $\nu = \left\|\alpha_1'\right\|$.

İspat:(4.1) deki ifadelerin türevleri alınır ve (2.5) bağıntısındaki Frenet vektörlerinin türev formülleri kullanılırsa involüt eğrisinin κ'ya göre modifiye çatısının türev vektörleri

$$
\begin{aligned}
T_1' &= t_1' \\
&= \nu\kappa_1 n_1 \\
&= \nu N_1, \\
N_1' &= (\kappa_1 n_1)' \\
&= \kappa_1' n_1 + \kappa_1 n_1' \\
&= \kappa_1' n_1 + \kappa_1(-\kappa_1 t_1 + \tau_1 b_1) \\
&= \frac{\kappa_1'}{\kappa_1} N_1 - \nu\kappa_1^2 T_1 + \nu\tau_1 B_1, \\
B_1' &= (\kappa_1 b_1)' \\
&= \kappa_1' b_1 + \kappa_1 b_1' \\
&= \kappa_1' b_1 - \nu\kappa_1\tau_1 n_1 \\
&= \frac{\kappa_1'}{\kappa_1} B_1 - \nu\tau_1 N_1
\end{aligned}
$$

olur. (4.2) deki ifadelerin türevi alınır ve (2.5) bağıntısındaki Frenet vektörlerinin türev formülleri kullanılırsa involüt eğrisinin τ 'ya göre modifiye çatısının türev vektörleri

$$
\begin{aligned}
T_1' &= t_1' \\
&= \nu\kappa_1 n_1 \\
&= \frac{\nu\kappa_1 N_1}{\tau_1},
\end{aligned}
$$

$$N_1' = (\tau_1 n_1)'$$

$$= \tau_1' n_1 + \tau_1 n_1'$$

$$= \tau_1' n_1 + \tau_1 (-\kappa_1 t_1 + \tau_1 b_1)$$

$$= \frac{\tau_1'}{\tau_1} N_1 - \nu \kappa_1 \tau_1 T_1 + \nu \tau_1 B_1,$$

$$B_1' = (\tau_1 b_1)'$$

$$= \tau_1' b_1 + \tau_1 b_1'$$

$$= \tau_1' b_1 - \nu \tau_1 \tau_1 n_1$$

$$= \frac{\tau_1'}{\tau_1} B_1 - \nu \tau_1 N_1$$

bulunur.

Teorem 4.1.2 α_1, α involütü olsun. α_1 involüt eğrisinin α esas eğrisi ile arasındaki bağıntılar

a) κ ya göre modifiye çatısı

$$T_1 = n, \quad N_1 = -\frac{1}{\lambda} t + \frac{\tan\theta}{\lambda} b, \quad B_1 = \frac{\tan\theta}{\lambda} t + \frac{1}{\lambda} b$$

b) τ ya göre modifiye çatısı

$$T_1 = n, \quad N_1 = \frac{1}{\lambda\kappa}(-\cos\theta t + \sin\theta b), \quad B_1 = \frac{1}{\lambda\kappa}(\sin\theta t + \cos\theta b)$$

şeklinde verilir.

İspat: (3.7) ve (3.9) ifadelerindeki involüt eğrisinin Frenet elemanlarının esas eğri ile arasındaki bağlantılar (4.1) ve (4.2) ifadelerinde yerine yazılırsa α_1 involüt eğrisinin modifiye çatısının α esas eğrisi arasındaki bağıntılar elde edilir.

Teorem 4.1.3 β_1 eğrisi, α_1 involüt eğrisinin adjoint eğrisi olsun. β_1 eğrisinin Frenet vektörleri ile α_1 involüt eğrisinin Frenet vektörleri arasında

$$t_{1\beta_1} = b_1, \quad n_{1\beta_1} = -n_1, \quad b_{1\beta_1} = t_1$$

bağıntısı vardır.

İspat: $\beta_1(s) = \int b_1(s)\,ds$ ifadesinin birinci, ikinci ve üçüncü türevleri alınır, norm hesaplanır ve Frenet formüllerinde yerine yazılırsa β_1 adjoint eğrisinin Frenet elemanları

$$\beta_1(s) = \int b_1(s)\,ds,$$

$$\beta_1' = b_1,$$

$$\beta_1'' = -\nu\tau_1 n_1, \tag{4.3}$$

$$\beta_1''' = -\left(\left(\nu\tau_1\right)' n_1 - \nu^2\tau_1\kappa_1 t_1 + \nu^2\tau_1^2 b_1\right)$$

$$\beta_1'(s) \times \beta_1''(s) = b_1 \times \left(-\nu\tau_1 n_1\right) = \nu\tau_1 t_1,$$

$$\left\|\beta_1'(s) \times \beta_1''(s)\right\| = \left\|\tau_1 t_1\right\| = \nu\tau_1,$$

$$t_{1\beta_1} = \frac{\beta_1'}{\left\|\beta_1'\right\|} = b_1,$$

$$b_{1\beta_1} = \frac{\beta_1' \times \beta_1''}{\left\|\beta_1' \times \beta_1''\right\|} = t_1,$$

$$n_{1\beta_1} = b_{1\beta_1} \times t_{1\beta_1} = -n_1$$

şeklinde bulunur.

Teorem 4.1.4 β_1 adjoint eğrisinin eğrilik ve burulması

$$\kappa_{1\beta_1} = \nu\tau_1, \qquad \tau_{1\beta_1} = \nu\kappa_1$$

bağıntılarıyla verilir.

İspat: (4.3) ifadeleri Frenet formüllerinde yerine yazılırsa β_1 adjoint eğrisinin eğrilikleri

$$\kappa_{1\beta_1} = \frac{\left\| \beta_1' \times \beta_1'' \right\|}{\left\| \beta_1' \right\|^3} = \nu\tau_1,$$

$$\tau_{1\beta_1} = \frac{\det\left(\beta_1' \times \beta_1'', \beta_1''' \right)}{\left\| \beta_1' \times \beta_1'' \right\|^2} = \nu\kappa_1$$

şeklinde bulunur.

Teorem 4.1.5 β_1 adjoint eğrisinin Frenet elemanları ile α eğrisinin Frenet elemanları arasında

$$t_{1\beta_1} = \sin\theta t + \cos\theta b, \quad b_{1\beta_1} = n, \quad n_{1\beta_1} = \cos\theta t - \sin\theta b,$$

$$\kappa_{1\beta_1} = \frac{\nu}{\lambda\kappa}, \quad \tau_{1\beta_1} = \frac{\nu\sec\theta}{\lambda}$$

bağıntıları vardır.

İspat:(3.7) ve (3.9) involüt eğrisinin Frenet vektörlerinin esas eğri cinsinden ifadeleri (3.4) adjoint eğrisinin Frenet vektörleri arasındaki bağıntılarda yerine yazılırsa β_1 adjoint eğrisinin Frenet elemanlarının α eğrisinin Frenet elemanları arasındaki bağıntılar elde edilir.

Teorem 4.1.6 α eğrisinin involütü α_1 , involüt eğrisinin modifiye ortogonal çatısının adjoint eğrisi γ_1 ve bu eğrinin Frenet elemanları $\left\{ t_{\gamma_1}, n_{\gamma_1}, b_{\gamma_1}, \kappa_{\gamma_1}, \tau_{\gamma_1} \right\}$ ile gösterilsin. γ_1 adjoint eğrisinin

a) κ ya göre modifiye ortogonal çatıları ve eğrilikleri arasındaki bağıntılar

$$T_{\gamma_1} = \frac{1}{\kappa_1} B_1, \quad N_{\gamma_1} = -\frac{\nu\tau_1}{\kappa_1^2} N_1, \quad B_{\gamma_1} = \frac{\nu\tau_1}{\kappa_1} T_1,$$

$$\kappa_{\gamma_1} = \frac{\nu\tau_1}{\kappa_1}, \quad \tau_{\gamma_1} = \nu$$

b) τ ya göre modifiye ortogonal çatıları ve eğrilikleri arasındaki bağıntılar

$$T_{\gamma_1} = \frac{1}{\tau_1} B_1, \quad N_{\gamma} = -\frac{\nu\kappa_1}{\tau_1^2} N_1, \quad B_{\gamma_1} = \frac{\nu\kappa_1}{\tau_1} T_1,$$

$$\kappa_{\gamma_1} = \nu, \quad \tau_{\gamma_1} = \frac{\nu\kappa_1}{\tau_1}$$

şeklinde verilir.

İspat: $\gamma_1(s) = \int B_1(s)\,ds$ ifadesinin türevi alınırsa $\frac{d\gamma_1}{ds} = B_1$ olur.

γ_1 eğrisinin yay parametresi $\bar{s}$ olsun. $\frac{d\gamma_1}{ds} = B_1$ ifadesinin $\bar{s}$ ye göre türevi alırsa $\frac{d\gamma_1}{d\bar{s}}\frac{d\bar{s}}{ds} = B_1$ olur. Bu durumda iç çarpım yapılırsa

$$\left\langle \frac{d\gamma_1}{d\bar{s}}\frac{d\bar{s}}{ds}, \frac{d\gamma_1}{d\bar{s}}\frac{d\bar{s}}{ds} \right\rangle = \langle B_1, B_1 \rangle$$

$$\Rightarrow \left\langle \frac{d\gamma_1}{d\bar{s}}\frac{d\bar{s}}{ds}, \frac{d\gamma_1}{d\bar{s}}\frac{d\bar{s}}{ds} \right\rangle = \langle \kappa_1 b_1, \kappa_1 b_1 \rangle$$

$$\Rightarrow \langle t_{\gamma_1}, t_{\gamma_1} \rangle \left(\frac{d\bar{s}}{ds} \right)^2 = (\kappa_1)^2$$

$$\Rightarrow \frac{d\bar{s}}{ds} = \kappa_1 \tag{4.4}$$

olur. $\frac{d\gamma_1}{d\bar{s}}\frac{d\bar{s}}{ds} = B_1$ ifadesinde (4.4) yerine yazılırsa $\gamma_1{}'\kappa_1 = B_1$ veya $\gamma_1{}' = \frac{1}{\kappa_1} B_1$

bulunur. γ_1 eğrisinin teğet vektörü t_{γ_1} ile gösterilirse t_{γ_1} Frenet, adjoint eğri ve modifiye ortogonal çatı tanımınlarından

$$\gamma_1' = t_{\gamma_1} = T_{\gamma_1}$$
$$T_{\gamma_1} = \frac{1}{\kappa_1} B_1$$

olur. γ_1 eğrisinin $\bar{s}$ ye göre türevi alınır ve norm hesaplanırsa

$$\frac{d^2\gamma_1}{(d\bar{s})^2} = -\frac{(\kappa_1)'}{(\kappa_1)^2} B_1 + \frac{1}{\kappa_1}\left(\frac{(\kappa_1)'}{\kappa_1} B_1 - \nu\tau_1 N_1\right) = -\frac{\nu\tau_1}{\kappa_1} N_1,$$

$$\left\|\frac{d^2\gamma_1}{(d\bar{s})^2}\right\| = \left\|-\frac{\nu\tau_1}{\kappa_1} N_1\right\| = \frac{\nu\tau_1}{\kappa_1}$$

bulunur. Eğrilik tanımından κ_{γ_1} eğriliği

$$\kappa_{\gamma_1} = \frac{\nu\tau_1}{\kappa_1}$$

şeklinde olur. Adjoint eğri tanımından $n_{\gamma_1} = -n_1$ ve modifiye ortogonal çatı tanımından $N_1 = \kappa_1 n_1$ ifadeleri düzenlenerek $N_{\gamma_1} = \kappa_{\gamma_1} n_{\gamma_1}$ denkleminde yerine yazılırsa γ_1 eğrisinin modifiye ortogonal çatısından elde edilen adjoint eğrinin normal vektörü

$$N_{\gamma_1} = \frac{\nu\tau_1}{(\kappa_1)^2} N_1$$

olur. Adjoint eğri tanımından $b_{\gamma_1} = t_1$ ve modifiye ortogonal çatı tanımından $B_1 = \kappa_1 b_1$ ifadeleri düzenlenir ve $B_{\gamma_1} = \kappa_{\gamma_1} b_{\gamma_1}$ denkleminde yerine yazılırsa γ_1 eğrisinin modifiye ortogonal çatısından elde edilen adjoint eğrinin binormal vektörü

$$b_{\gamma_1} = t_{\gamma_1} \times n_{\gamma_1} = b_1 \times -n_1 = t_1 = T_1,$$

$$B_{\gamma_1} = \kappa_{\gamma_1} b_{\gamma_1},$$

$$B_{\gamma_1}=\frac{\nu\tau_1}{\kappa_1}T_1$$

olur. Eğrilik tanımından

$$\tau_{\gamma_1}=\left\langle\frac{dn_{\gamma_1}}{d\bar{s}},b_{\gamma_1}\right\rangle=\frac{dn_{\gamma_1}}{d\bar{s}}\frac{d\bar{s}}{ds}=\frac{d}{ds}\left(-\frac{1}{\kappa_1}N_1\right)$$

$$\Rightarrow\left(n_{\gamma_1}\right)'\kappa_1=\frac{\left(\kappa_1\right)'}{\left(\kappa_1\right)^2}N_1-\frac{1}{\kappa_1}\left(N_1\right)'$$

$$\Rightarrow\tau_{\gamma_1}=\left\langle\nu T_1+\nu\frac{\tau_1}{\left(\kappa_1\right)^2}B_1,T_1\right\rangle$$

$$\Rightarrow\tau_{\gamma_1}=\nu$$

bulunur. Benzer şekilde adjoint eğrinin τ_1 e göre modifiye çatı elemanları bulunur.

$\gamma_1(s)=\int B_1(s)ds$ ifadesinin türevi alınırsa $\dfrac{d\gamma_1}{ds}=B_1$ olur. γ_1 eğrisinin yay parametresi $\bar{s}$ olsun. $\dfrac{d\gamma_1}{ds}=B_1$ ifadesinin $\bar{s}$ ye göre türevi alırsa $\dfrac{d\gamma_1}{d\bar{s}}\dfrac{d\bar{s}}{ds}=B_1$ olur. Bu durumda iç çarpım yapılırsa

$$\left\langle\frac{d\gamma_1}{d\bar{s}}\frac{d\bar{s}}{ds},\frac{d\gamma_1}{d\bar{s}}\frac{d\bar{s}}{ds}\right\rangle=\left\langle B_1,B_1\right\rangle$$

$$\Rightarrow\left\langle\frac{d\gamma_1}{d\bar{s}}\frac{d\bar{s}}{ds},\frac{d\gamma_1}{d\bar{s}}\frac{d\bar{s}}{ds}\right\rangle=\left\langle\tau_1 b_1,\tau_1 b_1\right\rangle$$

$$\Rightarrow\left\langle t_{\gamma_1},t_{\gamma_1}\right\rangle\left(\frac{d\bar{s}}{ds}\right)^2=\left(\tau_1\right)^2$$

$$\Rightarrow\frac{d\bar{s}}{ds}=\tau_1 \tag{4.5}$$

olur. $\dfrac{d\gamma_1}{d\bar{s}}\dfrac{d\bar{s}}{ds}=B_1$ ifadesinde (4.5) yerine yazılırsa $\gamma_1'\tau_1=B_1$ veya $\gamma_1'=\dfrac{1}{\tau_1}B_1$

bulunur. γ_1 eğrisinin teğet vektörü t_{γ_1} ile gösterilirse t_{γ_1} Frenet, adjoint eğri ve modifiye ortogonal çatı tanımınlarından

$$\gamma_1' = b_1 = t_{\gamma_1} = T_{\gamma_1}$$
$$T_{\gamma_1} = \frac{1}{\tau_1} B_1$$

olur. γ_1 eğrisinin $\bar{s}$ ye göre türevi alınır ve norm hesaplanırsa

$$\frac{d\gamma_1}{d\bar{s}} \frac{d\bar{s}}{ds} = \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\tau_1} B_1 \right),$$

$$\frac{d}{d\bar{s}} \frac{d\gamma_1}{ds} \frac{d\bar{s}}{ds} = -\frac{(\tau_1)'}{(\tau_1)} B_1 + \frac{1}{\tau_1}\left(\frac{(\tau_1)'}{\tau_1} B_1 - \nu\tau_1 N_1 \right),$$

$$\frac{d^2\gamma_1}{(d\bar{s})^2}\tau_1 = (-\nu\tau_1 N_1),$$

$$\frac{d^2\gamma_1}{(d\bar{s})^2} = -\nu N_1,$$

$$\left\| \frac{d^2\gamma_1}{(d\bar{s})^2} \right\| = \left\| -\nu N_1 \right\| = \nu$$

bulunur. Eğrilik tanımından κ_{γ_1} eğriliği

$$\kappa_{\gamma_1} = \nu$$

şeklinde olur. Eğrilik tanımından $\tau_{\gamma_1} = \left\langle \frac{dn_{\gamma_1}}{d\bar{s}}, b_{\gamma_1} \right\rangle$ ifadesindeki $\frac{dn_{\gamma_1}}{d\bar{s}}$ hesaplanırsa

$$\frac{dn_{\gamma_1}}{d\bar{s}} = \frac{d}{d\bar{s}}(-n_1) = -\frac{ds}{d\bar{s}}\frac{d}{ds} n_1 = -\frac{1}{\tau_1}(-\nu\kappa_1 t_1 + \nu\tau_1 b_1) = \frac{\nu\kappa_1}{\tau_1} - \nu b_1 \qquad (4.6)$$

olur. $\tau_{\gamma_1} = \left\langle \frac{dn_{\gamma_1}}{d\bar{s}}, b_{\gamma_1} \right\rangle$ ifadesinde (4.6) yerine yazılırsa γ_1 eğrisinin modifiye ortogonal çatısından elde edilen adjoint eğrinin burulması

$$\tau_{\gamma_1} = \left\langle \frac{dn_{\gamma_1}}{d\bar{s}}, b_{\gamma_1} \right\rangle$$

$$\Rightarrow \tau_{\gamma_1} = \left\langle \frac{\nu\kappa_1}{\tau_1} - \nu b_1, t \right\rangle$$

$$\Rightarrow \tau_{\gamma_1} = \frac{\nu\kappa_1}{\tau_1}$$

şeklinde bulunur. Adjoint eğri tanımından $n_{\gamma_1} = -n_1$ ve modifiye ortogonal çatı tanımından $N_1 = \tau_1 n_1$ ifadeleri düzenlenlenerek $N_{\gamma_1} = \tau_{\gamma_1} n_{\gamma_1}$ denkleminde yerine yazılırsa

$$N_{\gamma_1} = -\frac{\nu\kappa_1}{\tau_1^2} N_1$$

elde edilir. Adjoint eğri tanımından $b_{\gamma_1} = t_2$ ve modifiye ortogonal çatı tanımından $B_1 = \tau_1 b_1$ ifadeleri düzenlenirse $B_{\gamma_1} = \tau_{\gamma_1} b_{\gamma_1}$ denkleminde yerine yazılırsa

$$B_{\gamma_1} = \frac{\nu\kappa_1}{\tau_1} T_1$$

olur.

Sonuç 4.1.1 γ_1 eğrisi ile α esas eğrisinin Frenet elamanları arasında

a) κ ya göre modifiye ortogonal çatı ve eğrilikleri

$$T_{\gamma_1} = \sin\theta t + \cos\theta b,$$

$$N_{\gamma_1} = \frac{-\nu\theta'}{\kappa}\left(\cos^2\theta t + \sin\theta\cos\theta b\right),$$

$$B_{\gamma_1} = \frac{-\nu\theta'\lambda}{\kappa\sec^2\theta} n\ ,$$

$$\kappa_{\gamma_1} = \frac{\nu\theta'}{\kappa\sec\theta}\ ,$$

$$\tau_{\gamma_1} = \nu$$

b) τ ya göre modifiye ortogonal çatı ve eğrilikleri

$$T_{\gamma_1} = \frac{\kappa^2+\tau^2}{\kappa\tau'-\kappa'\tau}\left(\sin\theta t + \cos\theta b\right),$$

$$N_{\gamma_1} = \frac{\nu\left(\kappa^2+\tau^2\right)^{5/2}}{\left(\kappa\tau'-\kappa'\tau\right)^2}\left(\cos\theta t - \sin\theta b\right),$$

$$B_{\gamma_1} = \frac{\nu\left(\kappa^2+\tau^2\right)^{3/2}}{\kappa\tau'-\kappa'\tau} n,$$

$$\kappa_{\gamma_1} = \nu,$$

$$\tau_{\gamma_1} = \frac{\nu\left(\kappa^2+\tau^2\right)^{3/2}}{\kappa\tau'-\kappa'\tau}$$

şeklinde verilir.

İspat: (4.1) ve (4.2) involüt eğrisinin modifiye çatısı daha sonra (3.7) ve (3.9) idafelerindeki involüt eğrisinin Frenet elemanlarının esas eğri cinsinden ifadeleri Teorem 4.1.6 da yerine yazılırsa γ_1 eğrisinin Frenet elemanlarının α esas eğrisi ile arasındaki bağıntılar elde edilir.

4.2 Evolüt Eğrisinin Modifiye Ortogonal Çatıya Göre Adjoint Eğrisi

Teorem 4.2.1 α eğrisinin evolüt eğrisi α_2 olsun. Evolüt eğrisinin

a) κ ya göre modifiye çatı ve türev vektörleri

$$T_2 = t_2, \quad N_2 = \kappa_2 n_2, \quad B_2 = \kappa_2 b_2 \tag{4.7}$$

$$\begin{bmatrix} T_2' \\ N_2' \\ B_2' \end{bmatrix} = \frac{1}{\kappa_2}\begin{bmatrix} 0 & \nu\kappa_2 & 0 \\ -\nu\kappa_2^3 & \kappa_2' & \nu\kappa_2\tau_2 \\ 0 & -\nu\tau_2\kappa_2 & \kappa_2' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} T_2 \\ N_2 \\ B_2 \end{bmatrix}$$

b) τ ya göre modifiye çatı ve türev vektörleri

$$T_2 = t_2, \quad N_2 = \tau_2 n_2, \quad B_2 = \tau_2 b_2 \tag{4.8}$$

$$\begin{bmatrix} T_2' \\ N_2' \\ B_2' \end{bmatrix} = \frac{1}{\tau_2}\begin{bmatrix} 0 & \nu\kappa_2 & 0 \\ -\nu\kappa_2\tau_2^2 & \tau_2' & \nu\tau_2^2 \\ 0 & -\nu\tau_2^2 & \tau_2' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} T_2 \\ N_2 \\ B_2 \end{bmatrix}$$

şeklinde verilir. Burada $\nu = \left\| \alpha_2' \right\|$.

İspat: (4.7) deki ifadelerin türevleri alınır ve (2.5) bağıntısındaki Frenet vektörlerinin türev formülleri kullanılırsa evolüt eğrisinin κ'ya göre modifiye çatısının türev vektörleri

$$\begin{aligned} T_2' &= t_2' \\ &= \nu\kappa_2 n_2 \\ &= \nu N_2, \end{aligned}$$

$$N_2' = \left(\kappa_2 n_2\right)'$$

$$= \kappa_2' n_2 + \kappa_2 n_2'$$

$$= \kappa_2' n_2 + \kappa_2 \left(-\kappa_2 t_2 + \tau_2 b_2\right)$$

$$= \frac{\kappa_2'}{\kappa_2} N_2 - \nu\kappa_2^2 T_2 + \nu\tau_2 B_2,$$

$$B_2' = \left(\kappa_2 b_2\right)'$$

$$= \kappa_2' b_2 + \kappa_1 b_2'$$

$$= \kappa_2' b_2 - \nu\kappa_2 \tau_2 n_2$$

$$= \frac{\kappa_2'}{\kappa_2} B_2 - \nu\tau_2 N_2$$

olur. (4.8) deki ifadelerin türevi alınır ve (2.5) bağıntısındaki Frenet vektörlerinin türev formülleri kullanılırsa evolüt eğrisinin τ 'ya göre modifiye çatısının türev vektörleri

$$T_2' = t_2'$$

$$= \nu\kappa_2 n_2$$

$$= \frac{\nu\kappa_2 N_2}{\tau_2},$$

$$N_2{}' = \left(\tau_2 n_2\right)'$$

$$= \tau_2{}' n_2 + \tau_2 n_2{}'$$

$$= \tau_2{}' n_2 + \tau_2 \left(-\kappa_2 t_2 + \tau_2 b_2\right)$$

$$= \frac{\tau_2{}'}{\tau_2} N_2 - \nu \kappa_2 \tau_2 T_2 + \nu \tau_2 B_2,$$

$$B_2{}' = \left(\tau_2 b_2\right)'$$

$$= \tau_2{}' b_2 + \tau_2 b_2{}'$$

$$= \tau_2{}' b_2 - \nu \tau_2 \tau_2 n_2$$

$$= \frac{\tau_2{}'}{\tau_2} B_2 - \nu \tau_2 N_2$$

şeklinde bulunur.

Teorem 4.2.2 α_2, α eğrisinin evolütü olsun. α_2 evolüt eğrisinin α esas eğrisi ile arasındaki bağıntılar

a) κ ya göre modifiye çatısı

$$T_2 = \cos\left(\varphi + c\right) n - \sin\left(\varphi + c\right) b$$

$$N_2 = -\frac{\kappa^3 \cos^3\left(\varphi + c\right)}{\kappa\tau \sin\left(\varphi + c\right) - \kappa' \cos\left(\varphi + c\right)} t$$

$$B_2 = \frac{\kappa^3 \cos^3\left(\varphi + c\right)}{\kappa\tau \sin\left(\varphi + c\right) - \kappa' \cos\left(\varphi + c\right)} \left(\sin\left(\varphi + c\right) n + \cos\left(\varphi + c\right) b\right)$$

b) τ ya göre modifiye çatısı

$$T_2 = \cos(\varphi + c)n - \sin(\varphi + c)b$$

$$N_2 = \frac{\kappa^3 \sin(\varphi + c)\cos^2(\varphi + c)}{\kappa\tau \sin(\varphi + c) - \kappa' \cos(\varphi + c)} t$$

$$B_2 = \frac{-\kappa^3 \sin(\varphi + c)\cos^2(\varphi + c)}{\kappa\tau \sin(\varphi + c) - \kappa' \cos(\varphi + c)} \left(\sin(\varphi + c)n + \cos(\varphi + c)b\right)$$

şeklinde verilir.

İspat: (3.11) ve (3.13) deki evolüt eğrisinin Frenet elemanlarının esas eğri ile arasındaki bağıntılar (4.7) ve (4.8) ifadelerinde yerine yazılırsa α_2 evolüt eğrinin modifiye çatısının α esas eğrisi arasındaki bağıntılar elde edilir.

Teorem 4.2.3 β_2 eğrisi, α_2 evolüt eğrisinin adjoint eğrisi olsun. β_2 eğrisinin Frenet vektörleri ile α_2 involüt eğrisinin Frenet vektörleri arasında

$$t_{2\beta_2} = b_2, \quad n_{2\beta_2} = -n_2, \quad b_{2\beta_2} = t_2$$

bağıntısı vardır.

İspat: $\beta_2(s) = \int b_2(s)ds$ ifadesinin birinci, ikinci ve üçüncü türevleri alınır, norm hesaplanır ve Frenet formüllerinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
&\beta_2(s) = \int b_2(s)ds, \\
&\beta_2'(s) = b_2, \\
&\beta_2''(s) = -v\tau_2 n_2, \\
&\beta_2'''(s) = -\left((v\tau_2)' n_2 - v^2\tau_2\kappa_2 t_2 + v^2\tau_2^2 b_2\right), \\
&\beta_2'(s) \times \beta_2''(s) = b_2 \times (-v\tau_2 n_2) = v\tau_2 t_2, \\
&\left\|\beta_2'(s) \times \beta_2''(s)\right\| = \left\|\tau_2 t_2\right\| = v\tau_2
\end{aligned} \tag{4.9}$$

olur. Frenet vektörleri hesaplanırsa β_2 adjoint eğrisinin Frenet elemanları

$$t_{2\beta_2} = \frac{\beta_2'}{\left\|\beta_2'\right\|} = \frac{b_2}{\left\|b_2\right\|} = b_2,$$

$$b_{2\beta_2} = \frac{\beta_2' \times \beta_2''}{\left\|\beta_2' \times \beta_2''\right\|} = \frac{\tau_2 t_2}{\tau_2} = t_2,$$

$$n_{2\beta_2} = b_{2\beta_2} \times t_{2\beta_2} = -n_2$$

şeklinde bulunur.

Teorem 4.2.4 α eğrisinin evolüt eğrisi olan α_2 eğrisinin adjoint eğrisi β_2 nin eğrilik ve burulması

$$\kappa_{2\beta_2} = \nu\tau_2, \quad \tau_{2\beta_2} = \nu\kappa_2$$

bağıntılarıyla verilir.

İspat: (4.9) ifadeleri Frenet formüllerinde yerine yazılırsa β_2 adjoint eğrisinin eğrilikleri

$$\kappa_{2\beta_2} = \frac{\left\|\beta_2' \times \beta_2''\right\|}{\left\|\beta_2'\right\|^3} = \nu\tau_2,$$

$$\tau_{2\beta_2} = \frac{\det\left(\beta_2' \times \beta_2'', \beta_2'''\right)}{\left\|\beta_2' \times \beta_2''\right\|^2} = \nu\kappa_2$$

şeklinde bulunur.

Teorem 4.2.5 β_2 adjoint eğrisinin Frenet elemanları ile α eğrisinin Frenet elemanları arasında

$$t_{2\beta_2} = \sin(\varphi + c)n + \cos(\varphi + c)b, \quad \mathrm{n}_{2\beta_2} = t, \quad \mathrm{b}_{2\beta_2} = \cos(\varphi + c)n - \sin(\varphi + c)b,$$

$$\kappa_{2\beta_2} = \frac{-\nu\kappa^3 \sin(\varphi + c)\cos^2(\varphi + c)}{\kappa\tau\sin(\varphi + c) - \kappa'\cos(\varphi + c)}, \quad \tau_{2\beta_2} = \frac{\nu\kappa^3\cos^3(\varphi + c)}{\kappa\tau\sin(\varphi + c) - \kappa'\cos(\varphi + c)}$$

bağıntıları vardır.

İspat:(3.11) ve (3.13) evolüt eğrisinin Frenet vektörlerinin esas eğri cinsinden ifadeleri (3.4) adjoint eğrisinin Frenet vektörleri arasındaki bağıntılarda yerine yazılırsa β_2 adjoint eğrisinin Frenet elemanlarının α eğrisinin Frenet elemanları arasındaki bağıntılar elde edilir.

Teorem 4.2.6 α eğrisinin evolütü α_2, evolüt eğrisinin modifiye ortogonal çatısının adjoint eğrisi γ_2 ve bu eğrinin Frenet elemanları $\{t_{\gamma_2}, n_{\gamma_2}, b_{\gamma_2}, \kappa_{\gamma_2}, \tau_{\gamma_2}\}$ ile gösterilsin. γ_2 adjoint eğrisinin

a) κ göre modifiye ortogonal çatıları ve eğrilikleri arasındaki bağıntılar

$$T_{\gamma_2} = \frac{1}{\kappa_2} B_2, \quad N_{\gamma_2} = -\frac{\nu \tau_2}{\kappa_2^2} N_2, \quad B_{\gamma_2} = \frac{\nu \tau_2}{\kappa_2} T_2,$$

$$\kappa_{\gamma_2} = \frac{\nu \tau_2}{\kappa_2}, \quad \tau_{\gamma_2} = \nu$$

b) τ ya göre modifiye ortogonal çatıları ve eğrilikleri arasındaki bağıntılar

$$T_{\gamma_2} = \frac{1}{\tau_2} B_2, \quad N_{\gamma} = -\frac{\nu \kappa_2}{\tau_2^2} N_2, \quad B_{\gamma_2} = \frac{\nu \kappa_2}{\tau_2} T_2,$$

$$\kappa_{\gamma_2} = \nu, \quad \tau_{\gamma_2} = \frac{\nu \kappa_2}{\tau_2}$$

şeklinde verilir.

İspat: $\gamma_2(s) = \int B_2(s)\, ds$ ifadesinin türevi alınırsa $\frac{d\gamma_2}{ds} = B_2$ olur.

γ_2 yay parametresi $\bar{s}$ olsun. $\frac{d\gamma_2}{ds} = B_2$ ifadesinin $\bar{s}$ ye göre türevi alınırsa $\frac{d\gamma_2}{d\bar{s}} \frac{d\bar{s}}{ds} = B_2$ olur. Bu durumda iç çarpım yapılırsa

$$\left\langle \frac{d\gamma_2}{d\bar{s}}\frac{d\bar{s}}{ds}, \frac{d\gamma_2}{d\bar{s}}\frac{d\bar{s}}{ds} \right\rangle = \left\langle B_2, B_2 \right\rangle$$

$$\Rightarrow \left\langle \frac{d\gamma_2}{d\bar{s}}\frac{d\bar{s}}{ds}, \frac{d\gamma_2}{d\bar{s}}\frac{d\bar{s}}{ds} \right\rangle \left\langle \kappa_2 b_2, \kappa_2 b_2 \right\rangle$$

$$\Rightarrow \left\langle t_{\gamma_2}, t_{\gamma_2} \right\rangle \left(\frac{d\bar{s}}{ds} \right)^2 = \left(\kappa_2\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{d\bar{s}}{ds} = \kappa_2 \tag{4.10}$$

olur. $\frac{d\gamma_2}{d\bar{s}}\frac{d\bar{s}}{ds} = B_2$ ifadesinde (4.10) yerine yazılırsa $\gamma_2'\kappa_2 = B_2$ veya $\gamma_2' = \frac{1}{\kappa_2}B_2$ bulunur. γ_2 eğrisinin teğet vektörü t_{γ_2} ile gösterilirse t_{γ_2} Frenet, adjoint eğri ve modifiye ortogonal çatı tanımından

$$\gamma_2' = b_2 = t_{\gamma_2} = T_{\gamma_2}$$

$$T_{\gamma_2} = \frac{1}{\kappa_2}B_2$$

olur. γ_2 eğrisinin $\bar{s}$ ye göre türevi alınır ve norm hesaplanırsa

$$\frac{d^2\gamma_2}{\left(d\bar{s}\right)^2} = -\frac{\left(\kappa_2\right)'}{\left(\kappa_2\right)^2}B_2 + \frac{1}{\kappa_2}\left(\frac{\left(\kappa_2\right)'}{\kappa_2}B_2 - \nu\tau_2 N_2 \right) = -\frac{\nu\tau_2}{\kappa_2}N_2$$

$$\left\| \frac{d^2\gamma_2}{\left(d\bar{s}\right)^2} \right\| = \left\| -\frac{\nu\tau_2}{\kappa_2}N_2 \right\| = \frac{\nu\tau_2}{\kappa_2}$$

bulunur. Eğrilik tanımından κ_{γ_2} eğriliği

$$\kappa_{\gamma_2} = \frac{\nu\tau_2}{\kappa_2}$$

şeklinde olur. Adjoint eğri tanımından $n_{\gamma_2} = -n_2$ ve modifiye ortogonal çatı tanımından $N_2 = \kappa_2 n_2$ ifadeleri düzenlenir ve $N_{\gamma_2} = \kappa_{\gamma_2} n_{\gamma_2}$ denkleminde yerine yazılırsa γ_2 eğrisinin modifiye ortogonal çatısından elde edilen adjoint eğrinin normal vektörü

$$N_{\gamma_2} = -\frac{\nu\tau_2}{(\kappa_2)^2} N$$

olur. Adjoint eğri tanımından $b_{\gamma_2} = t_2$ ve modifiye ortogonal çatı tanımından $B_2 = \kappa_2 b_2$ ifadeleri düzenlenir ve $B_{\gamma_2} = \kappa_{\gamma_2} b_{\gamma_2}$ denkleminde yerine yazılısa γ_2 eğrisinin modifiye ortogonal çatısından elde edilen adjoint eğrinin binormal vektörü

$$B_{\gamma_2} = \frac{\nu\tau_2}{\kappa_2} T_2$$

olur. Eğrilik tanımından

$$\tau_{\gamma_2} = \left\langle \frac{dn_{\gamma_2}}{d\bar{s}}, b_{\gamma_2} \right\rangle = \frac{dn_{\gamma_2}}{d\bar{s}} \frac{d\bar{s}}{ds} = \frac{d}{ds}\left(-\frac{1}{\kappa_2} N_2 \right)$$

$$\Rightarrow \left(n_{\gamma_2}\right)' \kappa_2 = \frac{(\kappa_2)'}{(\kappa_2)^2} N_2 - \frac{1}{\kappa_2}(N_2)'$$

$$\Rightarrow \tau_{\gamma_2} = \left\langle \nu T_2 + \nu \frac{\tau_1}{(\kappa_2)^2} B_2, T_2 \right\rangle$$

$$\Rightarrow \tau_{\gamma_2} = \nu$$

bulunur. Benzer şekilde adjoint eğrinin τ_2 ye göre modifiye çatı elemanları bulunur.

$\gamma_2(s) = \int B_2(s)\,ds$ ifadesinin türevi alınırsa $\frac{d\gamma_2}{ds} = B_2$ olur. γ_2 yay parametresi $\bar{s}$ olsun. $\frac{d\gamma_2}{ds} = B_2$ ifadesinin $\bar{s}$ ye göre türevi alınırsa $\frac{d\gamma_2}{d\bar{s}} \frac{d\bar{s}}{ds} = B_2$ olur. Bu durumda iç çarpım yapılırsa

$$\frac{d\gamma_2}{d\bar{s}} \frac{d\bar{s}}{ds} = \left\langle \frac{d\gamma_2}{d\bar{s}} \frac{d\bar{s}}{ds}, \frac{d\gamma_2}{d\bar{s}} \frac{d\bar{s}}{ds} \right\rangle = \langle B_2, B_2 \rangle$$

$$\Rightarrow \left\langle \frac{d\gamma_2}{d\bar{s}} \frac{d\bar{s}}{ds}, \frac{d\gamma_2}{d\bar{s}} \frac{d\bar{s}}{ds} \right\rangle = \langle \tau_2 b_2, \tau_2 b_2 \rangle$$

$$\Rightarrow \left\langle t_{\gamma_2}, t_{\gamma_2} \right\rangle \left(\frac{d\bar{s}}{ds} \right)^2 = (\tau_2)^2$$

$$\Rightarrow \frac{d\bar{s}}{ds} = \tau_2 \tag{4.11}$$

olur. $\frac{d\gamma_2}{d\bar{s}}\frac{d\bar{s}}{ds} = B_2$ ifadesinde (4.11) yerine yazılırsa $\gamma_2'\tau_2 = B_2$ veya $\gamma_2{}' = \frac{1}{\tau_2}B_2$ bulunur. γ_2 eğrisinin teğet vektörü t_{γ_2} ile gösterilirse t_{γ_2} Frenet, adjoint eğri ve modifiye ortogonal çatısı tanımlarından

$$\Rightarrow \gamma_2' = b_2 = t_{\gamma_2} = T_{\gamma_2}$$
$$\Rightarrow T_{\gamma_2} = \frac{1}{\tau_2}B_2$$

olur. γ_2 eğrisinin $\bar{s}$ ye göre türevi alınır ve norm hesaplanırsa

$$\frac{d\gamma_2}{d\bar{s}}\frac{d\bar{s}}{ds} = \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\tau_2}B_2\right),$$

$$\frac{d}{d\bar{s}}\frac{d\gamma_2}{ds}\frac{d\bar{s}}{ds} = -\frac{(\tau_2)'}{(\tau_2)}B_2 + \frac{1}{\tau_2}\left(\frac{(\tau_2)'}{\tau_2}B_2 - \nu\tau_2 N_2\right),$$

$$\frac{d^2\gamma_2}{(d\bar{s})^2}\tau_2 = (-\nu\tau_2 N_2),$$

$$\frac{d^2\gamma_2}{(d\bar{s})^2} = -\nu N_2,$$

$$\frac{d\gamma_2}{d\bar{s}}\frac{d\bar{s}}{ds}=\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\tau_2}B_2\right),$$

$$\frac{d}{d\bar{s}}\frac{d\gamma_2}{ds}\frac{d\bar{s}}{ds}=-\frac{(\tau_2)'}{(\tau_2)}B_2+\frac{1}{\tau_2}\left(\frac{(\tau_2)'}{\tau_2}B_2-\nu\tau_2N_2\right),$$

$$\frac{d^2\gamma_2}{(d\bar{s})^2}\tau_2=(-\nu\tau_2N_2),$$

$$\frac{d^2\gamma_2}{(d\bar{s})^2}=-\nu N_2,$$

$$\left\|\frac{d^2\gamma_2}{(d\bar{s})^2}\right\|=\|-\nu N_2\|=\nu,$$

bulunur. Eğrilik tanımından κ_{γ_2} eğriliği

$$\kappa_{\gamma_2}=\nu$$

şeklinde olur. Eğrilik tanımından $\tau_{\gamma_2}=\left\langle\frac{dn_{\gamma_2}}{d\bar{s}},b_{\gamma_2}\right\rangle$ ifadesindeki $\frac{dn_{\gamma_2}}{d\bar{s}}$ hesaplanırsa

$$\frac{dn_{\gamma_2}}{d\bar{s}}=\frac{d}{d\bar{s}}(-n_2)=-\frac{ds}{d\bar{s}}\frac{d}{ds}n_2=-\frac{1}{\tau_2}(-\nu\kappa_2t_2+\nu\tau_2b_2)=\frac{\nu\kappa_2}{\tau_2}-\nu b_2 \qquad (4.12)$$

olur. $\tau_{\gamma_2}=\left\langle\frac{dn_{\gamma_2}}{d\bar{s}},b_{\gamma_2}\right\rangle$ ifadesinde (4.12) yerine yazılırsa γ_2 eğrisinin modifiye ortogonal çatısından elde edilen adjoint eğrinin burulması

$$\tau_{\gamma_2} = \left\langle \frac{dn_{\gamma_2}}{d\bar{s}}, b_{\gamma_2} \right\rangle$$

$$\Rightarrow \tau_{\gamma_2} = \left\langle \frac{\nu\kappa_2}{\tau_2} - \nu b_2, t_2 \right\rangle$$

$$\Rightarrow \tau_{\gamma_2} = \frac{\nu\kappa_2}{\tau_2}$$

şeklinde bulunur. Adjoint eğri tanımından $n_{\gamma_2} = -n_2$ ve modifiye ortogonal çatı tanımından $N_2 = \tau_2 n_2$ ifadeleri düzenlenerek $N_{\gamma_2} = \tau_{\gamma_2} n_{\gamma_2}$ denkleminde yerine yazılırsa

$$N_{\gamma_2} = -\frac{\nu\kappa_2}{\tau_2^2} N_2$$

elde edilir. Adjoint eğri tanımından $b_{\gamma_2} = t_2$ ve modifiye ortogonal çatı tanımından $B_2 = \tau_2 b_2$ ifadeleri düzenlenerek $N_{\gamma_2} = \tau_{\gamma_2} n_{\gamma_2}$ denkleminde yerine yazılırsa

$$B_{\gamma_2} = \frac{\nu\kappa_2}{\tau_2} T_2$$

olur.

Sonuç 4.2.1 γ_2 eğrisi ile α esas eğrisinin Frenet elemanları arasındaki bağıntı

a) κ ya göre modifiye ortogonal çatı ve eğrilikleri

$$T_{\gamma_2} = \sin(\varphi + c) n + \cos(\varphi + c) b,$$

$$N_{\gamma_2} = -\nu \tan(\varphi + c) t,$$

$$B_{\gamma_2} = \nu\left(\sin(\varphi + c) n - \sin(\varphi + c)\tan(\varphi + c) b\right)$$

$$\kappa_{\gamma_2} = \nu \tan(\varphi + c)$$

$$\tau_{\gamma_2} = \nu$$

b) τ ya göre modifiye ortogonal çatı ve eğrilikleri

$$T_{\gamma_2} = \sin(\varphi + c)n + \cos(\varphi + c)b$$

$$N_{\gamma_2} = -\nu \tan(\varphi + c)t$$

$$B_{\gamma_2} = -\nu \tan(\varphi + c)\left(\cos(\varphi + c)n - \sin(\varphi + c)b\right)$$

$$\kappa_{\gamma_2} = \nu$$

$$\tau_{\gamma_2} = -\nu \tan(\varphi + c)$$

ile verilir.

İspat: (4.8) ve (4.8) deki evolüt eğrisinin modifiye çatısı daha sonra (3.11) ve (3.13) ifadelerindeki evolüt eğrisinin Frenet elemanlarının esas eğri cinsinden ifadeleri Teorem 4.2.6 da yerine yazılırsa γ_2 eğrisinin Frenet elemanlarının α esas eğrisi ile arasındaki bağıntılar elde edilir.

4.3 Bertrand Eğrisinin Modifiye Ortogonal Çatıya Göre Adjoint Eğrisi

Teorem 4.3.1 α eğrisinin Bertrand partner eğrisi α_3 olsun. α_3 Bertrand partner eğrisinin

a) κ ya göre modifiye çatı ve türev vektörleri

$$T_3 = t_3, \quad N_3 = \kappa_3 n_3, \quad B_3 = \kappa_3 b_3 \tag{4.13}$$

$$\begin{bmatrix} T_3' \\ N_3' \\ B_3' \end{bmatrix} = \frac{1}{\kappa_3}\begin{bmatrix} 0 & \nu\kappa_3 & 0 \\ -\nu\kappa_3^3 & \kappa_3' & \nu\tau_3\kappa_3 \\ 0 & -\nu\tau_3\kappa_3 & \kappa_3' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} T_3 \\ N_3 \\ B_3 \end{bmatrix}$$

b) τ ya göre modifiye çatı ve türev vekörleri

$$T_3 = t_3, \quad N_3 = \tau_3 n_3, \quad B_3 = \tau_3 b_3 \tag{4.14}$$

$$\begin{bmatrix} T_3' \\ N_3' \\ B_3' \end{bmatrix} = \frac{1}{\tau_3}\begin{bmatrix} 0 & \nu\kappa_3 & 0 \\ -\nu\kappa_3\tau_3^2 & \tau_3' & \nu\tau_3^2 \\ 0 & -\nu\tau_3^2 & \tau_3' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} T_3 \\ N_3 \\ B_3 \end{bmatrix}$$

şeklinde verilir. Burada $\nu = \left\|\alpha_3'\right\|$

İspat: (4.13) deki ifadelerin türevleri alınır ve (2.5) bağıntısındaki Frenet vektörlerinin türev formülleri kullanılırsa Bertrand eğrisinin κ'ya göre modifiye çatısının türev vektörleri

$$T_3' = t_3'$$

$$= \nu\kappa_3 n_3$$

$$= \nu N_3,$$

$$N_3' = \left(\kappa_3 n_3\right)'$$

$$= \kappa_3' n_3 + \kappa_3 n_3'$$

$$= \kappa_3' n_3 + \kappa_3\left(-\kappa_3 t_3 + \tau_3 b_3\right)$$

$$= \frac{\kappa_3'}{\kappa_3} N_3 - \nu\kappa_3^2 T_3 + \nu\tau_3 B_3,$$

$$B_3' = (\kappa_3 b_3)'$$

$$= \kappa_3' b_3 + \kappa_3 b_3'$$

$$= \kappa_3' b_3 - \nu\kappa_3\tau_3 n_3$$

$$= \frac{\kappa_3'}{\kappa_3} B_3 - \nu\tau_3 N_3$$

olur. (4.14) deki ifadelerin türevi alınır ve (2.5) bağıntısındaki Frenet vektörlerinin türev formülleri kullanılırsa Bertrand eğrisinin τ 'ya göre modifiye çatısının türev vektörleri

$$T_3' = t_3'$$

$$= \nu\kappa_3 n_3$$

$$= \frac{\nu\kappa_3 N_3}{\tau_3},$$

$$N_3' = (\tau_3 n_3)'$$

$$= \tau_3' n_3 + \tau_3 n_3'$$

$$= \tau_3' n_3 + \tau_3 (-\kappa_3 t_3 + \tau_3 b_3)$$

$$= \frac{\tau_3'}{\tau_3} N_3 - \nu\kappa_3\tau_3 T_3 + \nu\tau_3 B_3,$$

$$B_3' = (\tau_3 b_3)'$$

$$= \tau_3' b_3 + \tau_3 b_3'$$

$$= \tau_3' b_3 - \nu \tau_3 \tau_3 n_3$$

$$= \frac{\tau_3'}{\tau_3} B_3 - \nu \tau_3 N_3$$

şeklinde bulunur.

Teorem 4.3.2 α_3, α eğrisinin Bertrand partner eğrisi olsun. α_3 eğrisinin α Bertrand eğrisi arasındaki bağıntılar

a) κ ya göre modifiye çatısı

$$T_3 = \cos\theta t - \sin\theta b, \quad N_3 = \frac{x\kappa - \sin^2\theta}{x(1 - x\kappa)} n, \quad B_3 = \frac{x\kappa - \sin^2\theta}{x(1 - x\kappa)} (\sin\theta t + \cos\theta b)$$

b) τ ya göre modifiye çatısı

$$T_3 = \cos\theta t - \sin\theta b, \quad N_2 = \frac{\sin^2\theta}{x^2\tau} n, \quad B_2 = \frac{\sin^2\theta}{x^2\tau} (\sin\theta t + \cos\theta b)$$

şeklinde verilir.

İspat: (3.15) ve (3.16) ifadesinde Bertrand eğri çiftlerinin Frenet elemanları arasındaki bağıntılar (4.13) ve (4.14) ifadelerinde yerine yazılırsa α_3 Bertrand partner eğrisinin modifiye çatısının α eğrisi ile arasındaki bağıntılar elde edilir.

Teorem 4.3.3 β_3 eğrisi, α_3 Bertrand partner eğrisinin adjoint eğrisi olsun. β_3 eğrisinin Frenet vektörleri ile α_3 eğrisinin Frenet vektörleri arasında

$$t_{3\beta_3} = b_3, \quad n_{3\beta_3} = -n_3, \quad b_{3\beta_3} = t_3$$

bağıntısı vardır.

İspat: $\beta_3(s)=\int b_3(s)ds$ ifadesinin birinci, ikinci ve üçüncü türevleri alınır, norm hesaplanır ve Frenet formüllerinde yerine yazılırsa β_3 adjoint eğrisinin Frenet elemanları

$$\beta_3(s)=\int b_3(s)ds,$$

$$\beta_3'=b_3,$$

$$\beta_3''=-\nu\tau_3 n_3,$$

$$\beta_3'''=-\Big(\left(\nu\tau_3\right)' n_3-\nu^2\tau_3\kappa_3 t_3+\nu^2\tau_3{}^2 b_3\Big), \tag{4.15}$$

$$\beta_3'(s)\times\beta_3''(s)=b_3\times\left(-\nu\tau_3 n_3\right)=\nu\tau_3 t_3,$$

$$\left\|\beta_3'(s)\times\beta_3''(s)\right\|=\left\|\tau_3 t_3\right\|=\nu\tau_3$$

$$t_{3\beta_3}=\frac{\beta_3'}{\left\|\beta_3'\right\|}=b_3,$$

$$b_{3\beta_3}=\frac{\beta_3'\times\beta_3''}{\left\|\beta_3'\times\beta_3''\right\|}=t_3,$$

$$n_{3\beta_3}=b_{3\beta_3}\times t_{3\beta_3}=-n_3$$

şeklinde bulunur.

Teorem 4.3.4 β_3 adjoint eğrsinin eğrilik ve burulması

$$\kappa_{3\beta_3}=\nu\tau_3,\qquad \tau_{3\beta_3}=\nu\kappa_3$$

bağıntısılarıyla verilir.

İspat: (4.15) denklemindeki ifadeler Frenet formüllerinde yerine yazılırsa β_3 adjoint eğrisinin eğrilikleri

$$\kappa_{3\beta_3}=\frac{\left\|\beta_3'\times\beta_3''\right\|}{\left\|\beta_3'\right\|^3}=\nu\tau_3,$$

$$\tau_{3\beta_3}=\frac{\det\left(\beta_3'\times\beta_3'',\beta_3'''\right)}{\left\|\beta_3'\times\beta_3''\right\|^2}=\nu\kappa_3$$

şeklinde bulunur.

Teorem 4.3.5 β_3 adjoint eğrisinin Frenet elemanları ile α eğrisinin Frenet elemanları arasında

$$t_{3\beta_3}=\sin\theta t+\cos\theta b,\quad \mathrm{n}_{3\beta_3}=n,\quad \mathrm{b}_{3\beta_3}=\cos\theta t-\sin\theta b,$$

$$\kappa_{3\beta_3}=\frac{\nu\sin^2\theta}{x^2\tau},\qquad \tau_{3\beta_3}=\frac{\nu\left(x\kappa-\sin^2\theta\right)}{x\left(1-x\kappa\right)}$$

bağıntıları vardır.

İspat: (3.15) ve (3.16) Bertrand eğri çiflerinin Frenet elemanları arasındaki bağıntılar (3.4) adjoint eğrisinin Frenet elemanları arasındaki bağıntılarda yerine yazılırsa β_3 adjoint eğrisinin Frenet elemanları ile α eğrisinin Frenet elemanları arasındaki bağıntılar elde edilir.

Teorem 4.3.6 α Bertrand eğrisinin partner eğrisi α_3, Bertrand partner eğrisinin modifiye ortogonal çatıya göre adjoint eğrisi γ_3 ve bu eğrinin Frenet elemanları $\left\{t_{\gamma_3},n_{\gamma_3},b_{\gamma_3},\kappa_{\gamma_3},\tau_{\gamma_3}\right\}$ ile gösterilsin. γ_3 adjoint eğrisinin

a) κ ya göre modifiye ortogonal çatıları ve eğrilikleri arasındaki bağıntılar

$$T_{\gamma_3} = \frac{1}{\kappa_3} B_3, \quad N_{\gamma_3} = -\frac{\nu\tau_3}{\kappa_3^2} N_3, \quad B_{\gamma_3} = \frac{\nu\tau_3}{\kappa_3} T_3,$$

$$\kappa_{\gamma_3} = \frac{\nu\tau_3}{\kappa_3}, \quad \tau_{\gamma_3} = \nu,$$

b) τ ya göre modifiye ortogonal çatıları ve eğrilikleri arasındaki bağıntılar

$$T_{\gamma_3} = \frac{1}{\tau_3} B_3, \quad N_{\gamma_3} = -\frac{\nu\kappa_3}{\tau_3^2} N_3, \quad B_{\gamma_3} = \frac{\nu\kappa_3}{\tau_3} T_3,$$

$$\kappa_{\gamma_3} = \nu, \quad \tau_{\gamma_3} = \frac{\nu\kappa_3}{\tau_3}$$

şeklinde verilir.

İspat: $\gamma_3(s) = \int B_3(s)ds$ ifadesinin türevi alınırsa $\frac{d\gamma_3}{ds} = B_3$ olur.

γ_3 yay parametresi $\bar{s}$ olsun. $\frac{d\gamma_3}{ds} = B_3$ ifadesinin $\bar{s}$ ye göre türevi alınırsa $\frac{d\gamma_3}{d\bar{s}}\frac{d\bar{s}}{ds} = B_3$ olur. Bu durumda iç çarpım yapılırsa

$$\left\langle \frac{d\gamma_3}{d\bar{s}}\frac{d\bar{s}}{ds}, \frac{d\gamma_3}{d\bar{s}}\frac{d\bar{s}}{ds} \right\rangle = \langle B_3, B_3 \rangle$$

$$\Rightarrow \left\langle \frac{d\gamma_3}{d\bar{s}}\frac{d\bar{s}}{ds}, \frac{d\gamma_3}{d\bar{s}}\frac{d\bar{s}}{ds} \right\rangle = \langle \kappa_3 b_3, \kappa_3 b_3 \rangle$$

$$\Rightarrow \langle t_{\gamma_3}, t_{\gamma_3} \rangle \left(\frac{d\bar{s}}{ds}\right)^2 = (\kappa_3)^2$$

$$\Rightarrow \frac{d\bar{s}}{ds} = \kappa_3 \tag{4.16}$$

olur. $\frac{d\gamma_3}{d\bar{s}}\frac{d\bar{s}}{ds} = B_3(s)$ ifadesinde (4.16) yerine yazılırsa $\gamma_3'\kappa_3 = B_3$ veya $\gamma_3' = \frac{1}{\kappa_3} B_3$

bulunur. γ_3 eğrisinin teğet vektörü t_{γ_3} ile gösterilirse Frenet, adjoint eğri ve modifiye ortogonal çatı tanımlarından

$$\gamma_3' = b_3 = t_{\gamma_3} = T_{\gamma_3}$$
$$T_{\gamma_3} = \frac{1}{\kappa_3} B_3$$

olur. γ_3 eğrisinin $\bar{s}$ ye göre türevi alınır ve sonra norm hesaplanırsa

$$\frac{d^2\gamma_3}{(d\bar{s})^2} = -\frac{(\kappa_3)'}{(\kappa_3)^2} B_3 + \frac{1}{\kappa_3}\left(\frac{(\kappa_3)'}{\kappa_3} B_3 - \nu\tau_3 N_3\right) = -\frac{\nu\tau_3}{\kappa_3} N_3,$$

$$\left\| \frac{d^2\gamma_3}{(d\bar{s})^2} \right\| = \left\| -\frac{\nu\tau_3}{\kappa_3} N_3 \right\| = \frac{\nu\tau_3}{\kappa_3},$$

bulunur. Eğrilik tanımından κ_{γ_3} eğriliği

$$\kappa_{\gamma_3} = \frac{\nu\tau_3}{\kappa_3}$$

şeklinde olur. Adjoint eğri tanımından $n_{\gamma_3} = -n_3$ ve modifiye ortogonal çatı tanımından $B_3 = \kappa_3 n_3$ ifadeleri düzenlenerek $N_{\gamma_3} = \kappa_{\gamma_3} n_{\gamma_3}$ denkleminde yerine yazılırsa γ_3 eğrisinin modifiye ortogonal çatısından elde edilen adjoint eğrinin normal vektörü

$$N_{\gamma_3} = -\frac{\nu\tau_3}{(\kappa_3)^2} N_3$$

olur. Adjoint eğri tanımından $b_{\gamma_3} = t_3$ ve modifiye ortogonal çatı tanımdan $B_3 = \kappa_3 b_3$ ifadeleri $B_{\gamma_3} = \kappa_{\gamma_3} b_{\gamma_3}$ denkleminde yerine yazılırsa γ_3 eğrisinin modifiye ortogonal çatısından elde edilen adjoint eğrinin binormal vektörü

$$B_{\gamma_3} = \frac{\nu\tau_3}{\kappa_3} T_3$$

olur. Eğrilik tanımından

$$\tau_{\gamma_3} = \left\langle \frac{dn_{\gamma_3}}{d\overline{s}}, b_{\gamma_3} \right\rangle = \frac{dn_{\gamma_3}}{d\overline{s}}\frac{d\overline{s}}{ds} = \frac{d}{ds}\left(-\frac{1}{\kappa_3}N_3\right)$$

$$\Rightarrow \left(n_{\gamma_3}\right)' \kappa_3 = \frac{\left(\kappa_3\right)'}{\left(\kappa_3\right)^2}N_3 - \frac{1}{\kappa_3}\left(N_3\right)'$$

$$\Rightarrow \tau_{\gamma_3} = \left\langle \nu T_3 + \nu\frac{\tau_3}{\left(\kappa_3\right)^2}B_3, T_3 \right\rangle$$

$$\Rightarrow \tau_{\gamma_3} = \nu$$

bulunur. Benzer şekilde adjoint eğrinin τ_3 e göre modifiye çatı elemanları bulunur. $\gamma_3(s) = \int B_3(s)ds$ ifadesinin türevi alınırsa $\frac{d\gamma_3}{ds} = B_3$ olur. γ_3 yay parametresi $\overline{s}$ olsun. $\frac{d\gamma_3}{ds} = B_3$ ifadesinin $\overline{s}$ ye göre türevi alınırsa $\frac{d\gamma_3}{d\overline{s}}\frac{d\overline{s}}{ds} = B_3$ olur. Bu durumda iç çarpım yapılırsa

$$\left\langle \frac{d\gamma_3}{d\overline{s}}\frac{d\overline{s}}{ds}, \frac{d\gamma_3}{d\overline{s}}\frac{d\overline{s}}{ds} \right\rangle = \left\langle B_3, B_3 \right\rangle$$

$$\Rightarrow \left\langle \frac{d\gamma_3}{d\overline{s}}\frac{d\overline{s}}{ds}, \frac{d\gamma_3}{d\overline{s}}\frac{d\overline{s}}{ds} \right\rangle = \left\langle \tau_3 b_3, \tau_3 b_3 \right\rangle$$

$$\Rightarrow \left\langle t_{\gamma_3}, t_{\gamma_3} \right\rangle \left(\frac{d\overline{s}}{ds}\right)^2 = \left(\tau_3\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{d\overline{s}}{ds} = \tau_3 \tag{4.17}$$

olur. $\frac{d\gamma_3}{d\overline{s}}\frac{d\overline{s}}{ds} = B_3$ ifadesinde (4.17) yerine yazılırsa $\gamma_3{}'\tau_3 = B_3$ veya $\gamma_3{}' = \frac{1}{\tau_3}B_3$ bulunur. γ_3 eğrisinin teğet vektörü t_{γ_3} ile gösterilirse t_{γ_3} Frenet, adjoint eğri ve modifiye ortogonal çatı tanımlarından

$$\Rightarrow \gamma_3' = b_3 = t_{\gamma_3} = T_{\gamma_3}$$
$$\Rightarrow T_{\gamma_3} = \frac{1}{\tau_3} B_3$$

olur. γ_3 eğrisinin $\bar{s}$ türevi alınır ve norm hesaplanırsa

$$\frac{d\gamma_3}{d\bar{s}} \frac{d\bar{s}}{ds} = \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\tau_3} B_3 \right),$$

$$\frac{d}{d\bar{s}} \frac{d\gamma_3}{ds} \frac{d\bar{s}}{ds} = -\frac{(\tau_3)'}{(\tau_3)} B_3 + \frac{1}{\tau_3}\left(\frac{(\tau_3)'}{\tau_3} B_3 - \nu \tau_3 N_3 \right),$$

$$\frac{d^2\gamma_3}{(d\bar{s})^2} \tau_3 = (-\nu \tau_3 N_3),$$

$$\frac{d^2\gamma_3}{(d\bar{s})^2} = -\nu N_3,$$

$$\left\| \frac{d^2\gamma_3}{(d\bar{s})^2} \right\| = \left\| -\nu N_3 \right\| = \nu$$

bulunur. Eğrilik tanımından κ_{γ_3} eğriliği

$$\kappa_{\gamma_3} = \nu$$

şeklinde olur. Eğrilik tanımından $\tau_{\gamma_3} = \left\langle \frac{dn_{\gamma_3}}{d\bar{s}}, b_{\gamma_3} \right\rangle$ ifadesindeki $\frac{dn_{\gamma_3}}{d\bar{s}}$ hesaplanırsa

$$\frac{dn_{\gamma_3}}{d\bar{s}} = \frac{d}{d\bar{s}}(-n_3) = -\frac{ds}{d\bar{s}} \frac{d}{ds} n_3 = -\frac{1}{\tau_3}(-\nu \kappa_3 t_3 + \nu \tau_3 b_3) = \frac{\nu \kappa_3}{\tau_3} - \nu b_3 \tag{4.18}$$

olur. $\tau_{\gamma_3} = \left\langle \frac{dn_{\gamma_3}}{d\bar{s}}, b_{\gamma_3} \right\rangle$ ifadesinde (4.18) yerine yazılırsa γ_3 eğrisinin modifiye ortogonal çatısından elde edilen adjoint eğrinin burulması

$$\tau_{\gamma_3} = \left\langle \frac{dn_{\gamma_3}}{d\bar{s}}, b_{\gamma_3} \right\rangle$$

$$\Rightarrow \tau_{\gamma_3} = \left\langle \frac{\nu\kappa_3}{\tau_3} - \nu b_3, t \right\rangle$$

$$\Rightarrow \tau_{\gamma_3} = \frac{\nu\kappa_3}{\tau_3}$$

şeklinde bulunur. Adjoint eğri tanımından $n_{\gamma_3} = -n_3$ ve modifiye ortogonal çatı tanımından $N_3 = \tau_3 n_3$ ifadeleri düzenlenerek $N_{\gamma_3} = \tau_{\gamma_3} n_{\gamma_3}$ denkleminde yerine yazılırsa

$$N_{\gamma_3} = -\frac{\nu\kappa_3}{\tau_3^2} N_3$$

elde edilir. Adjoint eğri tanımından $b_{\gamma_3} = t_3$ ve modifiye ortogonal çatı tanımından $B_3 = \tau_3 b_3$ ifadeleri düzenlenerek $B_{\gamma_3} = \tau_{\gamma_3} b_{\gamma_3}$ denkleminde yerine yazılırsa

$$B_{\gamma_3} = \frac{\nu\kappa_3}{\tau_3} T_3$$

olur.

Sonuç 4.3.1 γ_3 eğri ile α eğrisi ile arasındaki bağıntı

a) κ ya göre modifiye ortogonal çatı ve eğrilikleri

$$T_{\gamma_3} = \sin\theta t + \cos\theta b,$$

$$N_{\gamma_3} = \frac{-\nu \sin^2\theta}{\lambda^2 \tau\left(\lambda\kappa - \sin^2\theta\right)} n,$$

$$B_{\gamma_3} = \frac{-\nu \sin^2\theta}{\lambda^2 \tau\left(\lambda\kappa - \sin^2\theta\right)} \left(\cos\theta t - \sin\theta b\right),$$

$$\kappa_{\gamma_3} = \frac{-\nu \sin^2\theta}{\lambda^2 \tau\left(\lambda\kappa - \sin^2\theta\right)}$$

$$\tau_{\gamma_3} = \nu$$

b) τ ya göre modifiye ortogonal çatı ve eğrilikleri

$$T_{\gamma_3}=\left(\sin\theta t+\cos\theta b\right)$$

$$N_{\gamma_3}=-\nu\frac{x\kappa-\sin^2\theta}{\left(1-x\kappa\right)}\frac{\sin^2\theta}{x^3\tau}n$$

$$B_{\gamma_3}=\nu\frac{x\kappa-\sin^2\theta}{\left(1-x\kappa\right)}\frac{x\tau}{\sin^2\theta}\left(\cos\theta t-\sin\theta b\right)$$

$$\kappa_{\gamma_3}=\nu$$

$$\tau_{\gamma_3}=\nu\frac{x\kappa-\sin^2\theta}{\left(1-x\kappa\right)}\frac{x\tau}{\sin^2\theta}$$

şeklinde verilir.

İspat: (4.13) ve (4.14) Bertrand eğrisinin modifiye çatısı daha sonra (3.15) ve (3.16) idafelerindeki Bertrand eğri çiflerinin Frenet elemanlarının arasındaki bağıntılar Teorem 4.3.6 da yerine yazılırsa γ_3 eğrisinin Frenet elemanlarının α esas eğrisi ile arasındaki bağıntılar elde edilir.

4.4 Manheim Eğrisinin Modifiye Ortogonal Çatıya Göre Adjoint Eğrisi

Teorem 4.4.1 α eğrisinin Mannheim partner eğrisi α_4 olsun. α_4 Mannheim partner eğrisinin

a) κ ya göre modifiye çatısı ve türev vektörleri

$$T_4=t_4,\quad N_4=\kappa_4 n_4,\quad B_4=\kappa_4 b_4, \tag{4.19}$$

$$\begin{bmatrix}T_4'\\N_4'\\B_4'\end{bmatrix}=\frac{1}{\kappa_4}\begin{bmatrix}0&\nu\kappa_4&0\\-\nu\kappa_4^3&\kappa_4'&\nu\kappa_4\tau_4\\0&-\nu\kappa_4\tau_4&\kappa_4'\end{bmatrix}\begin{bmatrix}T_4\\N_4\\B_4\end{bmatrix}$$

b) τ ya göre modifiye çatısı ve türev vektörleri

$$T_4 = t_4, \quad N_4 = \tau_4 n_4, \quad B_4 = \tau_4 b_4, \tag{4.20}$$

$$\begin{bmatrix} T_4' \\ N_4' \\ B_4' \end{bmatrix} = \frac{1}{\tau_4} \begin{bmatrix} 0 & \nu\kappa_4 & 0 \\ -\nu\kappa_4\tau_4^2 & \tau_4' & \nu\tau_4^2 \\ 0 & -\nu\tau_4^2 & \tau_4' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_4 \\ N_4 \\ B_4 \end{bmatrix}$$

bağıntılarıyla verilir. Burada $\nu = \left\| \alpha_4' \right\|$.

İspat: (4.19) deki ifadelerin türevleri alınır ve (2.5) bağıntısındaki Frenet vektörlerinin türev formülleri kullanılırsa Mannheim eğrisinin κ'ya göre modifiye çatısnın türev vektörleri

$$\begin{aligned} T_4' &= t_4' \\ &= \nu\kappa_4 n_4 \\ &= \nu N_4, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_4' &= \left(\kappa_4 n_4\right)' \\ &= \kappa_4' n_4 + \kappa_4 n_4' \\ &= \kappa_4' n_4 + \kappa_4\left(-\kappa_4 t_4 + \tau_4 b_4\right) \\ &= \frac{\kappa_4'}{\kappa_4} N_4 - \nu\kappa_4^2 T_4 + \nu\tau_4 B_4, \end{aligned}$$

$$B_4' = (\kappa_4 b_4)'$$

$$= \kappa_4' b_4 + \kappa_4 b_4'$$

$$= \kappa_4' b_4 - \nu\kappa_4\tau_4 n_4$$

$$= \frac{\kappa_4'}{\kappa_4} B_4 - \nu\tau_4 N_4,$$

olur. (4.20) deki ifadelerin türevleri alınır ve Frenet vektörlerinin türev formülleri kullanılırsa (2.5) bağıntısındaki Frenet vektörlerinin türev formülleri kullanılırsa Mannheim eğrisinin κ'ya göre modifiye çatısnın türev vektörleri

$$T_4' = t_4'$$

$$= \nu\kappa_4 n_4$$

$$= \frac{\nu\kappa_4 N_4}{\tau_4},$$

$$N_4' = (\tau_4 n_4)'$$

$$= \tau_4' n_4 + \tau_4 n_4'$$

$$= \tau_4' n_4 + \tau_4 (-\kappa_4 t_4 + \tau_4 b_4)$$

$$= \frac{\tau_4'}{\tau_4} N_4 - \nu\kappa_4\tau_4 T_4 + \nu\tau_4 B_4,$$

$$B_4' = (\tau_4 b_4)'$$

$$= \tau_4' b_4 + \tau_4 b_4'$$

$$= \tau_4' b_4 - \nu \tau_4 \tau_4 n_4$$

$$= \frac{\tau_4'}{\tau_4} B_4 - \nu \tau_4 N_4$$

şeklinde bulunur.

Teorem 4.4.2 α_4, α eğrisinin Mannheim partner eğrisi olsun. α_4 eğrisinin α Mannheim eğrisi arasındaki bağıntılar

a) κ ya göre modifiye çatısı

$$T_4 = \cos\theta t - \sin\theta b$$

$$N_4 = -\frac{d\theta}{ds_4}(\sin\theta t + \cos\theta b)$$

$$B_4 = -\frac{d\theta}{ds_4} n$$

b) τ ya göre modifiye çatısı

$$T_4 = \cos\theta t - \sin\theta b$$

$$N_4 = \left(\sin\theta\kappa \frac{ds}{ds_4} - \cos\theta\tau \frac{ds}{ds_4}\right)(\sin\theta t + \cos\theta b)$$

$$B_4 = \left(\sin\theta\kappa \frac{ds}{ds_4} - \cos\theta\tau \frac{ds}{ds_4}\right) n$$

şeklinde verilir.

İspat: (3.18) ve (3.19) Mannheim eğri çiftlerinin Frenet elemanları arasındaki bağıntılar (4.19) ve (4.20) ifadelerinde yerine yazılırsa α_4 Mannheim partner eğrisinin modifiye çatısının α esas eğrisi arasındaki bağıntılar elde edilir.

Teorem 4.4.3 β_4 eğrisi, α_4 Mannheim partner eğrisinin adjoint eğrisi olsun. β_4 eğrisinin Frenet vektörleri ile α_4 Mannheim partner eğrisinin Frenet vektörleri arasında

$$t_{4\beta_4} = b_4, \quad n_{4\beta_4} = -n_4, \quad b_{4\beta_4} = t_4$$

bağıntısı vardır.

İspat: $\beta_4(s) = \int b_4(s)ds$ ifadesinin birinci, ikinci ve üçüncü türevleri alınır, norm hesaplanır ve Frenet formüllerinde yerine yazılırsa β_4 adjoint eğrisinin Frenet elemanları

$$\beta_4(s) = \int b_4(s)ds,$$

$$\beta_4' = b_4,$$

$$\beta_4'' = -v\tau_4 n_4,$$

$$\beta_4''' = -\left((v\tau_4)' n_4 - v^2\tau_4\kappa_4 t_4 + v^2\tau_4{}^2 b_4\right),$$

$$\beta_4'(s) \times \beta_4''(s) = b_4 \times (-v\tau_4 n_4) = v\tau_4 t_4,$$

$$\left\|\beta_4'(s) \times \beta_4''(s)\right\| = \|\tau_4 t_4\| = v\tau_4 \qquad (4.21)$$

$$t_{4\beta_4} = \frac{\beta_4'}{\left\|\beta_4'\right\|} = b_4,$$

$$b_{4\beta_4} = \frac{\beta_4' \times \beta_4''}{\left\|\beta_4' \times \beta_4''\right\|} = t_4,$$

$$n_{4\beta_4} = b_{4\beta_4} \times t_{4\beta_4} = -n_4$$

şeklinde bulunur.

Teorem 4.4.4 β_4 adjoint eğrisinin eğrilik ve burulması

$$\kappa_{4\beta_4} = \nu\tau_4, \qquad \tau_{4\beta_4} = \nu\kappa_4$$

bağıntılarıyla verilir.

İspat: (4.21) ifadeleri Frenet formüllerinde yerine yazılırsa β_4 adjoint eğrisinin eğrilikleri

$$\kappa_{4\beta_4} = \frac{\left\|\beta_4' \times \beta_4''\right\|}{\left\|\beta_4'\right\|^3} = \nu\tau_4,$$

$$\tau_{4\beta_4} = \frac{\det\left(\beta_4' \times \beta_4'', \beta_4'''\right)}{\left\|\beta_4' \times \beta_4''\right\|^2} = \nu\kappa_4$$

şeklinde bulunur.

Teorem 4.4.5 β_4 adjoint eğrisinin Frenet elemanları ile α eğrisinin Frenet elemanları arasında

$$t_{4\beta_4} = n, \quad b_{4\beta_4} = \cos\theta t - \sin\theta b, \quad n_{4\beta_4} = -\sin\theta t - \cos\theta b,$$

$$\kappa_{4\beta_4} = \nu\left(\sin\theta\kappa\frac{ds}{ds_4} - \cos\theta\tau\frac{ds}{ds_4}\right), \quad \tau_{4\beta_4} = -\nu\frac{d\theta}{ds_4}$$

bağıntıları vardır.

İspat: (3.18) ve (3.19) Mannheim eğri çiflerinin Frenet elemanları arasındaki bağıntılar (3.4) adjoint eğrisinin Frenet vektörleri arasındaki bağıntılarda yerine yazılırsa β_4 adjoint eğrisinin Frenet elemanları ile α eğrisinin Frenet elemanları arasındaki bağıntılar elde edilir.

Teorem 4.4.6 α Mannheim eğrisinin partner eğrisi α_4, Mannheim partner eğrisinin modifiye ortogonal çatıya göre adjoint eğrisi γ_4 ve bu eğrinin Frenet elemanları $\left\{t_{\gamma_3}, n_{\gamma_3}, b_{\gamma_3}, \kappa_{\gamma_3}, \tau_{\gamma_3}\right\}$ ile gösterilsin. γ_4 adjoint eğrisinin

a) κ ya göre modifiye ortogonal çatıları ve eğrilikleri arasındaki bağıntılar

$$T_{\gamma_4} = \frac{1}{\kappa_4} B_4, \quad N_{\gamma_4} = -\frac{\nu\tau_4}{\kappa_4^2} N_4, \quad B_{\gamma_4} = \frac{\nu\tau_4}{\kappa_4} T_4,$$

$$\kappa_{\gamma_4} = \frac{\nu\tau_4}{\kappa_4}, \quad \tau_{\gamma_4} = \nu,$$

b) τ ya göre modifiye ortogonal çatıları ve eğrilikleri arasındaki bağıntılar

$$T_{\gamma_4} = \frac{1}{\tau_4} B_4, \quad N_{\gamma_4} = -\frac{\nu\kappa_4}{\tau_4^2} N_4, \quad B_{\gamma_4} = \frac{\nu\kappa_4}{\tau_4} T_4,$$

$$\kappa_{\gamma_4} = \nu, \quad \tau_{\gamma_4} = \frac{\nu\kappa_4}{\tau_4}$$

şeklinde verilir.

İspat: $\gamma_4(s) = \int B_4(s)\,ds$ ifadesinin türevi alınırsa $\dfrac{d\gamma_4}{ds} = B_4$ olur.

γ_4 yay parametresi $\bar{s}$ olsun. Bu durumda $\dfrac{d\gamma_4}{ds} = B_4$ ifadesinin $\bar{s}$ ye göre türevi alınırsa

$\dfrac{d\gamma_4}{d\bar{s}} \dfrac{d\bar{s}}{ds} = B_4$ olur. Bu durumda iç çarpım yapılırsa

$$\left\langle \frac{d\gamma_4}{d\bar{s}} \frac{d\bar{s}}{ds}, \frac{d\gamma_4}{d\bar{s}} \frac{d\bar{s}}{ds} \right\rangle = \left\langle B_4, B_4 \right\rangle$$

$$\Rightarrow \left\langle \frac{d\gamma_4}{d\bar{s}} \frac{d\bar{s}}{ds}, \frac{d\gamma_4}{d\bar{s}} \frac{d\bar{s}}{ds} \right\rangle = \left\langle \kappa_4 b_4, \kappa_4 b_4 \right\rangle$$

$$\Rightarrow \left\langle t_{\gamma_4}, t_{\gamma_4} \right\rangle \left(\frac{d\bar{s}}{ds} \right)^2 = \left(\kappa_4 \right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{d\bar{s}}{ds} = \kappa_4 \tag{4.22}$$

olur. $\frac{d\gamma_4}{d\bar{s}} \frac{d\bar{s}}{ds} = B_4(s)$ ifadesinde (4.22) yerine yazılırsa $\gamma_4' \kappa_4 = B_4$ veya $\gamma_4' = \frac{1}{\kappa_4} B_4$ bulunur. γ_4 eğrisinin teğet vektörü t_{γ_4} ile gösterilirse t_{γ_4} Frenet, adjoint eğri ve modifiye ortogonal çatı tanımından

$$\gamma_4' = b_4 = t_{\gamma_4} = T_{\gamma_4},$$
$$T_{\gamma_4} = \frac{1}{\kappa_4} B_4$$

olur. γ_4 eğrisinin $\bar{s}$ ye göre türevi alınır ve norm hesaplanırsa

$$\frac{d^2\gamma_4}{(d\bar{s})^2} = -\frac{(\kappa_4)'}{(\kappa_4)^2} B_4 + \frac{1}{\kappa_4} \left(\frac{(\kappa_4)'}{\kappa_4} B_4 - \nu\tau_4 N_4 \right) = -\frac{\nu\tau_4}{\kappa_4} N_4$$

$$\left\| \frac{d^2\gamma_4}{(d\bar{s})^2} \right\| = \left\| -\frac{\nu\tau_4}{\kappa_4} N_4 \right\| = \frac{\nu\tau_4}{\kappa_4}$$

bulunur. Eğrilik tanımından κ_{γ_4} eğriliği

$$\kappa_{\gamma_4} = \frac{\nu\tau_4}{\kappa_4}$$

şeklinde olur. Adjoint eğri tanımından $n_{\gamma_4} = -n_4$ ve modifiye ortogonal çatı tanımından $N_4 = \kappa_4 n_4$ ifadeleri düzenlenir ve $N_{\gamma_4} = \kappa_{\gamma_4} n_{\gamma_4}$ denkleminde yerine yazılırsa γ_4 eğrisinin modifiye ortogonal çatısından elde edilen adjoint eğrinin normal vektörü

$$N_{\gamma_4} = -\frac{\nu\tau_4}{(\kappa_4)^2} N_4$$

olur. Adjoint eğri tanımından $b_{\gamma_4} = t_4$ ve modifiye ortogonal çatı tanımından $B_4 = \kappa_4 b_4$ ifadeleri düzenlenir ve $B_{\gamma_4} = \kappa_{\gamma_4} b_{\gamma_4}$ denkleminde yerine yazılırsa γ_4 eğrisinin modifiye ortogonal çatısından elde edilen adjoint eğrinin binormal vektörü

$$B_{\gamma_4} = \frac{\nu\tau_4}{\kappa_4} T_4$$

olur. Eğrilik tanımından

$$\tau_{\gamma_4} = \left\langle \frac{dn_{\gamma_4}}{d\bar{s}}, b_{\gamma_4} \right\rangle = \frac{dn_{\gamma_4}}{d\bar{s}} \frac{d\bar{s}}{ds} = \frac{d}{ds}\left(-\frac{1}{\kappa_4} N_4 \right),$$

$$\left(n_{\gamma_4}\right)' \kappa_4 = \frac{(\kappa_4)'}{(\kappa_4)^2} N_4 - \frac{1}{\kappa_4}(N_4)',$$

$$\tau_{\gamma_4} = \left\langle \nu T_4 + \nu \frac{\tau_4}{(\kappa_4)^2} B_4, T_4 \right\rangle,$$

$$\tau_{\gamma_4} = \nu$$

olur. Benzer şekilde adjoint eğrinin τ_4 ya göre modifiye çatı elemanları bulunur. $\gamma_4(s) = \int B_4(s)\,ds$ ifadesinin türevi alınırsa $\frac{d\gamma_4}{ds} = B_4$ olur. γ_4 yay parametresi $\bar{s}$ olsun. $\frac{d\gamma_4}{ds} = B_4$ ifadesinin $\bar{s}$ ye göre türevi alınırsa $\frac{d\gamma_4}{d\bar{s}} \frac{d\bar{s}}{ds} = B_4$ olur. Bu durumda iç çarpım yapılırsa

$$\left\langle \frac{d\gamma_4}{d\bar{s}} \frac{d\bar{s}}{ds}, \frac{d\gamma_4}{d\bar{s}} \frac{d\bar{s}}{ds} \right\rangle = \langle B_4, B_4 \rangle$$

$$\Rightarrow \left\langle \frac{d\gamma_4}{d\bar{s}} \frac{d\bar{s}}{ds}, \frac{d\gamma_4}{d\bar{s}} \frac{d\bar{s}}{ds} \right\rangle = \langle \tau_4 b_4, \tau_4 b_4 \rangle$$

$$\Rightarrow \left\langle t_{\gamma_4}, t_{\gamma_4} \right\rangle \left(\frac{d\bar{s}}{ds} \right)^2 = (\tau_4)^2$$

$$\Rightarrow \frac{d\bar{s}}{ds} = \tau_4 \tag{4.23}$$

olur. $\frac{d\gamma_4}{d\bar{s}}\frac{d\bar{s}}{ds} = B_4$ ifadesinde (4.23) yerine yazılırsa $\gamma_4{}'\tau_4 = B_4$ veya $\gamma_4{}' = \frac{1}{\tau_4}B_4$ bulunur. γ_4 eğrisinin teğet vektörü t_{γ_4} ile gösterilirse t_{γ_4} Frenet, adjoint eğri ve modifiye ortogonal çatı tanımlarından

$$\gamma_4' = b_4 = t_{\gamma_4} = T_{\gamma_4}$$

$$\Rightarrow T_{\gamma_4} = \frac{1}{\tau_4}B_4$$

olur. γ_4 eğrisinin $\bar{s}$ ye göre türevi alınır ve norm hesaplanırsa

$$\frac{d\gamma_4}{d\bar{s}}\frac{d\bar{s}}{ds} = \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\tau_4}B_4\right),$$

$$\frac{d}{d\bar{s}}\frac{d\gamma_4}{ds}\frac{d\bar{s}}{ds} = -\frac{(\tau_4)'}{(\tau_4)}B_1 + \frac{1}{\tau_4}\left(\frac{(\tau_4)'}{\tau_4}B_4 - \nu\tau_4 N_4\right),$$

$$\frac{d^2\gamma_4}{(d\bar{s})^2}\tau_4 = \left(-\nu\tau_4 N_4\right),$$

$$\frac{d^2\gamma_4}{(d\bar{s})^2} = -\nu N_4,$$

$$\left\|\frac{d^2\gamma_4}{(d\bar{s})^2}\right\| = \left\|-\nu N_4\right\| = \nu$$

bulunur. Eğrilik tanımından κ_{γ_4} eğriliği

$$\kappa_{\gamma_4} = \nu$$

şeklinde olur. Eğrilik tanımından $\tau_{\gamma_4} = \left\langle \frac{dn_{\gamma_4}}{d\bar{s}}, b_{\gamma_4} \right\rangle$ ifadesindeki $\frac{dn_{\gamma_4}}{d\bar{s}}$ hesaplanırsa

$$\frac{dn_{\gamma_4}}{d\bar{s}} = \frac{d}{d\bar{s}}\left(-n_4\right) = -\frac{ds}{d\bar{s}}\frac{d}{ds}n_4 = -\frac{1}{\tau_4}\left(-\nu\kappa_4 t_4 + \nu\tau_4 b_4\right) = \frac{\nu\kappa_4}{\tau_4} - \nu b_4 \qquad (4.24)$$

olur. $\tau_{\gamma_4} = \left\langle \frac{dn_{\gamma_4}}{d\bar{s}}, b_{\gamma_4} \right\rangle$ ifadesinde (4.24) yerine yazılırsa γ_4 eğrisinin modifiye ortogonal çatısından elde edilen adjoint eğrinin burulması

$$\tau_{\gamma_4} = \left\langle \frac{dn_{\gamma_4}}{d\bar{s}}, b_{\gamma_4} \right\rangle$$

$$\Rightarrow \tau_{\gamma_4} = \left\langle \frac{\nu\kappa_4}{\tau_4} - \nu b_4, t \right\rangle$$

$$\Rightarrow \tau_{\gamma_4} = \frac{\nu\kappa_4}{\tau_4}$$

şeklinde bulunur. Adjoint eğri tanımından $n_{\gamma_4} = -n_4$ ve modifiye ortogonal çatı tanımından $N_4 = \tau_4 n_4$ ifadeleri düzenlenerek $N_{\gamma_4} = \tau_{\gamma_4} n_{\gamma_4}$ denkleminde yerine yazılırsa

$$N_{\gamma_4} = -\frac{\nu\kappa_4}{\tau_4^2} N_4$$

elde edilir. Adjoint eğri tanımından $b_{\gamma_4} = t_4$ ve modifiye ortogonal çatı tanımından $B_4 = \tau_4 b_4$ ifadeleri düzenlenerek $N_{\gamma_4} = \tau_{\gamma_4} n_{\gamma_4}$ denkleminde yerine yazılırsa

$$B_{\gamma_4} = \frac{\nu\kappa_4}{\tau_4} T_4$$

olur.

Sonuç 4.4.1: γ_4 eğrisinin α esas eğri ile arasındaki bağıntı

a) κ ya göre modifiye ortogonal çatı ve eğrilikleri

$$T_{\gamma_4} = n$$

$$N_{\gamma_4} = \left(s\text{in}\,\theta\kappa \frac{ds}{ds_4} - \cos\theta\tau \frac{ds}{ds_4} \right) \frac{\nu}{\left(\dfrac{d\theta}{ds_4} \right)} (\sin\theta t + \cos\theta b)$$

$$B_{\gamma_4} = \left(s\text{in}\,\theta\kappa \frac{ds}{ds_4} - \cos\theta\tau \frac{ds}{ds_4} \right) \frac{\nu}{\left(\dfrac{d\theta}{ds_4} \right)} \cos\theta t - \sin\theta b$$

$$\kappa_{\gamma_4} = \left(s\text{in}\,\theta\kappa \frac{ds}{ds_4} - \cos\theta\tau \frac{ds}{ds_4} \right) \frac{\nu}{\left(\dfrac{d\theta}{ds_4} \right)}$$

$$\tau_{\gamma_4} = \nu$$

b) τ ya göre modifiye ortogonal çatı ve eğrilikleri

$$T_{\gamma_4} = n$$

$$N_{\gamma_4} = \nu \frac{d\theta}{ds_4} \frac{1}{\left(\sin\theta\kappa \dfrac{ds}{ds_4} - \cos\theta\tau \dfrac{ds}{ds_4} \right)} (\sin\theta t + \cos\theta b)$$

$$B_{\gamma_4} = \frac{d\theta}{ds_4} \frac{-\nu}{\left(\sin\theta\kappa \dfrac{ds}{ds_4} - \cos\theta\tau \dfrac{ds}{ds_4} \right)} (\cos\theta t - \sin\theta b)$$

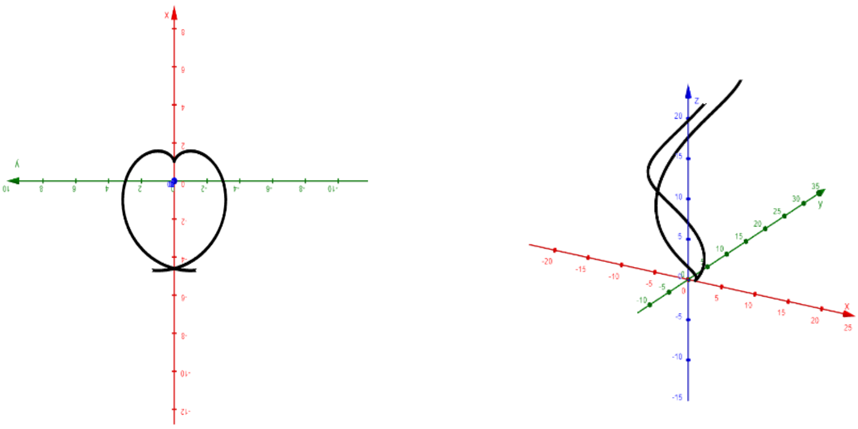
$$\kappa_{\gamma_4} = \nu$$

$$\tau_{\gamma_4} = \frac{d\theta}{ds_4} \frac{-\nu}{\left(\sin\theta\kappa \dfrac{ds}{ds_4} - \cos\theta\tau \dfrac{ds}{ds_4} \right)}$$

şeklinde verilir.

İspat: (4.16) ve (4.17) Mannheim eğrisinin modifiye çatısı daha sonra (3.18) ve (3.19) idafelerindeki Mannheim eğri çiflerinin Frenet elemanlarının arasındaki bağıntılar Teorem 4.4.6 da yerine yazılırsa γ_4 eğrisinin Frenet elemanlarının α esas eğrisi ile arasındaki bağıntılar elde edilir.

Örnek 1.1 $\alpha(s) = \left(s\sin s + \cos s, s\cos s - \sin s, \dfrac{s^2}{2} \right)$ eğrisi verilsin.



Şekil 4.1 α eğrisi

Bu eğrinin türevleri ve normları alınırsa

$$
\begin{aligned}
&\alpha' = \left(s\cos s, -s\sin s, s \right), \quad \alpha'' = \left(\cos s - s\sin s, \sin s + s\cos s, 1 \right),\\
&\alpha''' = \left(-2\sin s - s\cos s, 2\cos s - s\sin s, 0 \right),\\
&\|\alpha'\| = \sqrt{2}\,|s|, \quad \alpha' \times \alpha'' = \left(-s^2\cos s, -s^2\sin s, s^2 \right),\\
&\|\alpha' \times \alpha''\| = \sqrt{2}s^2, \quad \det\left(\alpha', \alpha'', \alpha''' \right) = s^3
\end{aligned}
$$

olur. Frenet vektörleri ve eğrilikleri

$$
t = \left(\frac{s\cos s}{\sqrt{2}|s|}, \frac{s\sin s}{\sqrt{2}|s|}, \frac{s}{\sqrt{2}|s|} \right), \quad n = \left(\frac{s\sin s}{|s|}, \frac{-s\cos s}{|s|}, 0 \right), \quad b = \left(\frac{-\cos s}{\sqrt{2}}, \frac{-\sin s}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)
$$

$$
\kappa = \frac{1}{2|s|}, \quad \tau = \frac{1}{2s}
$$

şeklinde bulunur. α eğrisinin adjoint eğrisi ile β gösterilirse bu eğri

$$\beta(s)=\int\left(\frac{-\cos s}{\sqrt{2}},\frac{-\sin s}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)ds$$
$$=\left(\frac{-\sin s}{\sqrt{2}},\frac{\cos s}{\sqrt{2}},\frac{s}{\sqrt{2}}\right)$$

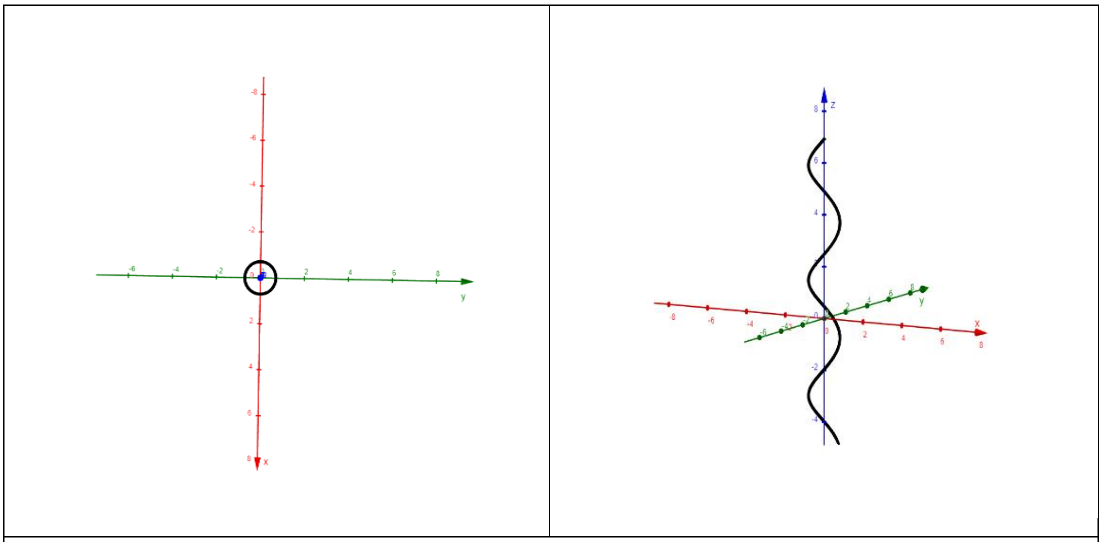
olur. β adjoint eğrisinin türevleri alınır ve gerekli hesaplamalar yapılırsa

$$\beta'=\left(\frac{-\cos s}{\sqrt{2}},\frac{-\sin s}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\quad \beta''=\left(\frac{\sin s}{\sqrt{2}},\frac{-\cos s}{\sqrt{2}},0\right),\quad \beta'''=\left(\frac{\cos s}{\sqrt{2}},\frac{\sin s}{\sqrt{2}},0\right),$$
$$\beta'\times\beta''=\left(\frac{\cos s}{2},\frac{\sin s}{2},\frac{1}{2}\right),\quad \left\|\beta'\times\beta''\right\|=\frac{1}{\sqrt{2}},\quad \det\left(\beta',\beta'',\beta'''\right)=\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

bulunur. β adjoint eğrisinin Frenet elemanları

$$t_\beta=\left(\frac{-\cos s}{\sqrt{2}},\frac{-\sin s}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\quad b_\beta=\left(\frac{\sqrt{2}\cos s}{2},\frac{\sqrt{2}\sin s}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\quad \mathrm{n}_\beta=\left(-\sin s,\frac{\cos s}{2},0\right),$$
$$\kappa_\beta=\frac{1}{\sqrt{2}},\quad \tau_\beta=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

olur.



Şekil 4.2 β adjoint eğrisi

α eğrisin κ ya göre modifiye ortogonal çatısı $\{T_\kappa, N_\kappa, B_\kappa\}$ ile gösterilirse

$$T_\kappa = (s\cos s, s\sin s, s),$$
$$N_\kappa = (s\sin s, -s\cos s, 0),$$
$$B_\kappa = (-s^2\cos s, -s^2\sin s, s^2)$$

olur. κ ya göre modifiye ortogonal çatısından elde edilen adjoint eğri β_κ ile gösterilirse

$$\beta_\kappa = \int(-s^2\cos s, -s^2\sin s, s^2)\,ds$$
$$= \left(\frac{-s^3}{3}\sin s, \frac{s^3}{3}\cos s, \frac{s^3}{3}\right)$$

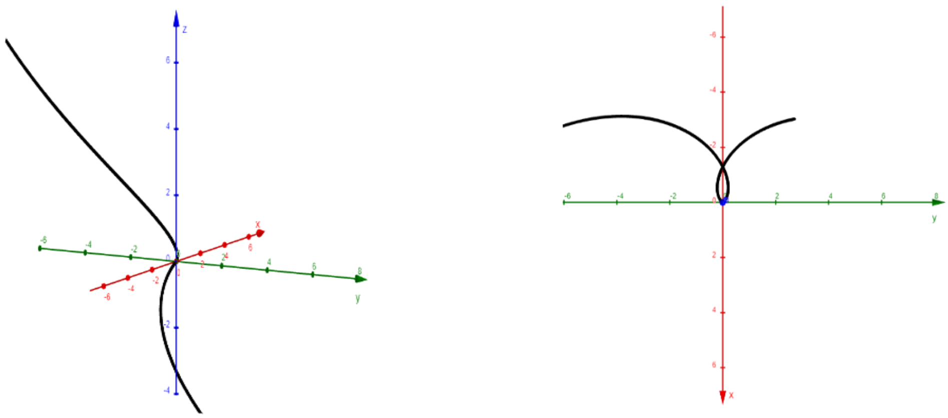
şeklindedir. β_κ eğrisinin türevleri alınır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$\beta_\kappa' = (-s^2\cos s, -s^2\sin s, s^2),$$
$$\beta_\kappa'' = (-2s\cos s + s^2\sin s, -2s\sin s - s^2\cos s, 2s),$$
$$\beta_\kappa''' = (-2\cos s + 4s\sin s + s^2\cos s, s^2\sin s - 4s\cos s - 2\sin s, 2),$$
$$\|\beta_\kappa'\| = \sqrt{2}s^2, \quad \beta_\kappa' \times \beta_\kappa'' = (s^2\cos s, s^2\sin s, s^2), \qquad \|\beta_\kappa' \times \beta_\kappa''\| = \sqrt{2}s^4,$$

$$t_{\beta_\kappa} = \left(\frac{-\cos s}{\sqrt{2}}, \frac{-\sin s}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad \mathrm{n}_{\beta_\kappa} = (-\sin s, \cos s, 0), \quad \mathrm{b}_{\beta_\kappa} = \left(\frac{\cos s}{\sqrt{2}}, \frac{\sin s}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

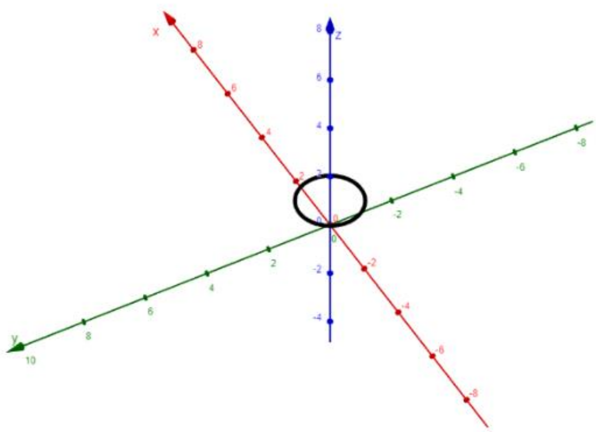
$$\kappa_{\beta_\kappa} = \frac{1}{2s^2}, \qquad \tau_{\beta_\kappa} = \frac{1}{2s^2}$$

olur.



Şekil 4.3 β eğrisinin modifiye çatıya göre adjoint eğrisi

Örnek 1.2 $\alpha = (\cos s, \sin s, 1)$ eğrisi verilsin.



Şekil 4.4 α eğrisi

Bu eğrinin türevleri ve normları alınırsa

$$\alpha' = (-\sin s, \cos s, 0), \quad \alpha'' = (-\cos s, -\sin s, 0), \quad \alpha''' = (\sin s, -\cos s, 0),$$
$$\|\alpha'\| = 1, \quad \|\alpha' \times \alpha''\| = 1, \quad \det(\alpha', \alpha'', \alpha''') = 0$$

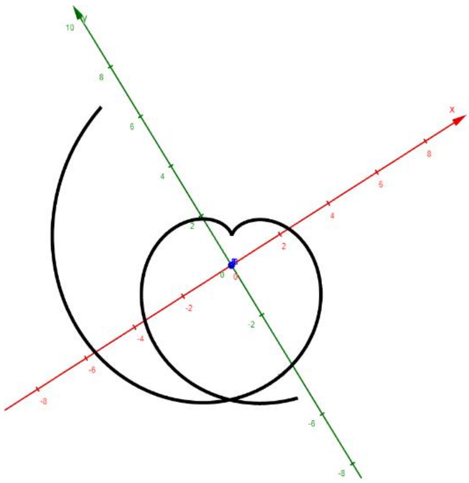
olur. Frenet vektörleri ve eğrilikleri

$$t=(-\sin s,\cos s,0),\quad n=(\cos s,\sin s,0),\quad b=(0,0,1),$$
$$\kappa=1,\quad \tau=0$$

dir. α eğrisinin involütü α_1 ile gösterilirse

$$\alpha_1=(\cos s-(c-s)\sin s,\sin s+(c-s)\cos s,1)$$

olur.



Şekil 4.5 α eğrisinin involüt eğrisi

α_1 involüt eğrisinin türevleri alınır ve gerekli hesaplamalar yapılırsa

$$\alpha_1'=((s-c)\cos s,(s-c)\sin s,0),\alpha_1''=(\cos s-(s-c)\sin s,\sin s+(s-c)\cos s,0),$$
$$\alpha_1'''=(-2\sin s-(s-c)\cos s,2\cos s-(s-c)\sin s,0),$$
$$\|\alpha_1\|=\sqrt{2}|s-c|,\alpha_1'\times\alpha_1''=\left(0,0,(s-c)^2\right),\left\|\alpha_1'\times\alpha_1''\right\|=(s-c)^2.$$

Frenet vektörleri ve eğrilikleri

$$t_1=\left(\frac{\cos s}{\sqrt{2}},\frac{\sin s}{\sqrt{2}},0\right),\quad n_1=\left(\frac{\sin s}{\sqrt{2}},-\frac{\cos s}{\sqrt{2}},0\right),\quad b_1=(0,0,1),$$
$$\kappa_1=\frac{1}{2\sqrt{2}|s-c|},\quad \tau_1=0$$

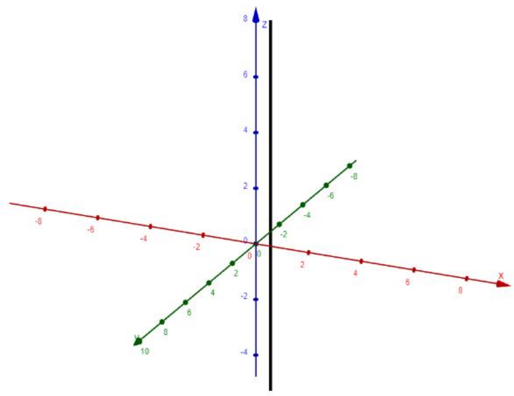
olur. α_1 involüt eğrisinin eğriliğine göre modifiye ortogonal çatısı

$$T_1 = \left(|s-c|\cos s, |s-c|\sin s, 0\right),\ \ N_2 = \left(\frac{|s-c|\sin s}{2}, -\frac{|s-c|\cos s}{2}, 0\right),\ \ B_2 = \left(0, 0, (s-c)^2\right)$$

olur. κ_1 e göre modifiye ortogonal çatısının adjoint eğrisi β_1 ile gösterilirse

$$\begin{aligned}\beta_1 &= \int \left(0, 0, (s-c)^2\right) ds \\ &= \left(c, c, \frac{s^3}{3} - s^2 c + cs\right)\end{aligned}$$

elde edilir.

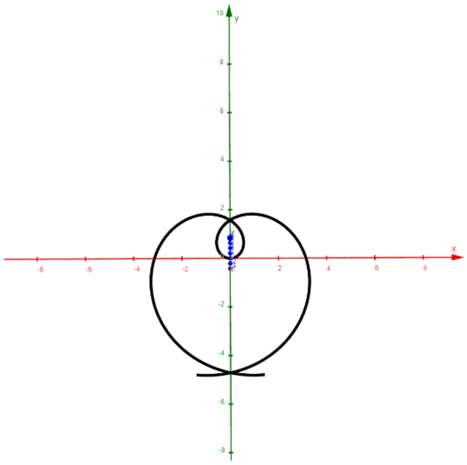


Şekil 4.6 α_1 involüt eğrisinin κ_1 e göre modifiyesi

α eğrisinin evolüt eğrisi α_2 ile gösterilirse

$$\alpha_2 = \left(\cos s + (s-c)\cos s, \sin s + (s-c)\sin s, 0\right)$$

olur.



Şekil 4.7 α eğrisinin evolüt eğrisi

α_2 eğrisinin türevleri alınır ve gerekli hesaplamalar yapılırsa

$$\alpha_2' = \left(-\sin s + \cos s - (s-c)\sin s, \cos s + \sin s + (s-c)\cos s, 0\right),$$
$$\alpha_2'' = \left(-\cos s - 2\sin s - (s-c)\cos s, -\sin s + 2\cos s - (s-c)\sin s, 0\right),$$
$$\alpha_2''' = \left(\sin s - 3\cos s + (s-c)\sin s, -\cos s - 3\sin s - (s-c)\cos s, 0\right),$$
$$\left\|\alpha_2'\right\| = \sqrt{(s-c)^2 + 2(s-c) + 2},$$
$$\alpha_2' \times \alpha_2'' = \left(0, 0, \left((s-c)+1\right)^2\right), \qquad \left\|\alpha_2' \times \alpha_2''\right\| = \left((s-c)+1\right)^2,$$
$$\det\left(\alpha_2', \alpha_2'', \alpha_2'''\right) = 0$$

bulunur. Yukarıdaki ifadeler Frenet vektörleri ve eğrilikleri bağıntılarında yerine yazılırsa

$$t_2 = \left(\frac{-\sin s + \cos s - (s-c)\sin s}{\sqrt{(s-c)^2 + 2(s-c) + 2}}, \frac{\cos s + \sin s + (s-c)\cos s}{\sqrt{(s-c)^2 + 2(s-c) + 2}}, 0 \right),$$
$$n_2 = \left(\frac{\cos s + \sin s + (s-c)\cos s}{\sqrt{(s-c)^2 + 2(s-c) + 2}}, \frac{\sin s - \cos s + (s-c)\sin s}{\sqrt{(s-c)^2 + 2(s-c) + 2}}, 0 \right),$$
$$b_2 = (0,0,1),$$
$$\kappa_2 = \frac{\left((s-c)+1\right)^2}{\left((s-c)^2 + 2(s-c) + 2\right)^{3/2}}, \qquad \tau_2 = 0$$

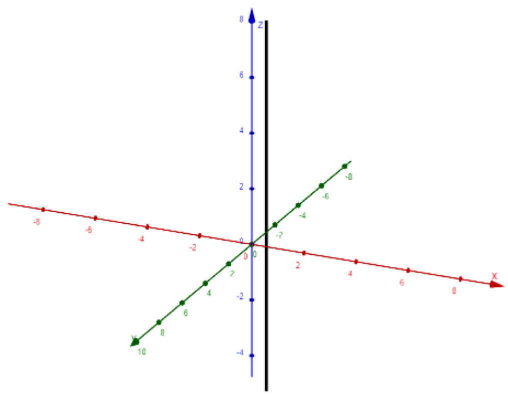
olur. κ_2 e göre modifiye ortogonal çatısı

$$T_2 = \left(-\sin s + \cos s - (s-c)\sin s, \cos s + \sin s + (s-c)\cos s, 0\right),$$
$$N_2 = \left((s-c)+1\right)^2 \left(\cos s + \sin s + (s-c)\cos s, \sin s - \cos s + (s-c)\sin s, 0\right),$$
$$B_2 = \left(0, 0, \left((s-c)+1\right)^2\right)$$

dir. κ_2 e göre modifiye ortogonal çatısının adjoint eğrisi γ ile gösterilirse

$$\gamma = \int \left(0, 0, \left((s-c)+1\right)^2\right) ds$$
$$= \left(c, c, \frac{(s-c)^5}{5} + \frac{2(s-c)^3}{3} + s - c\right)$$

elde edilir.



Şekil 4.8 γ eğrisinden elde edilen adjoint eğri

Örnek 1.3 $\alpha = (\cos s, \sin s, s)$ helis eğrisi verilsin.

Bu eğrinin birinci, ikinci ve üçüncü türevleri alınırsa

$$\alpha' = (-\sin s, \cos s, 1), \quad \alpha'' = (-\cos s, -\sin s, 0), \quad \alpha''' = (\sin s, -\cos s, 0)$$
$$\alpha' \times \alpha'' = (\sin s, -\cos s, 1), \quad \left\|\alpha' \times \alpha''\right\| = \sqrt{2}, \quad \det(\alpha', \alpha'', \alpha''') = 1$$

olur. Frenet formülleri kullanılırsa

$$t=\left(\frac{-\sin s}{\sqrt{2}},\frac{\cos s}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right), b=\left(\frac{\sin s}{\sqrt{2}},\frac{-\cos s}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right), n=\left(\cos s,\sin s,0\right)$$

$$\kappa=\frac{1}{2},\quad \tau=\frac{1}{2}$$

bulunur. α eğrisinin evolüt eğrisi

$$\alpha_1=\left(3\cos s-\frac{2}{\sqrt{2}}\tan\left(\frac{s}{2}+c\right)\sin s, 3\sin s+\frac{2}{\sqrt{2}}\tan\left(\frac{s}{2}+c\right)\cos s, s-\frac{2}{\sqrt{2}}\tan\left(\frac{s}{2}+c\right)\right)$$

olur. $\zeta(s)=\frac{s}{2}+c$ olmak üzere, eğrinin birinci, ikinci ve üçüncü türevleri alınırsa

$$\alpha_1'=\sqrt{2}\tan\zeta(s)n+\left(\sqrt{2}-1-\tan^2\zeta(s)\right)b$$

$$\left\|\alpha_1'\right\|=\sqrt{\left(4-2\sqrt{2}\right)\tan^2\zeta(s)+3-2\sqrt{2}+\tan^4\zeta(s)}$$

$$\alpha_1''=-\tan\zeta(s)t+\left[-1+\sqrt{2}+\sqrt{2}\tan^2\zeta(s)n-\tan^3\zeta(s)b\right]$$

$$\begin{aligned}\alpha_1'\times\alpha_1''=&\left(-\sqrt{2}\tan^4\zeta(s)+\sqrt{2}\tan^3\zeta(s)+\left(\sqrt{2}-1\right)\tan^2\zeta(s)+\left(\sqrt{2}-2\right)\tan\zeta(s)-3\right)t\\&+\left(\left(1-\sqrt{2}\right)\tan\zeta(s)+\tan^3\zeta(s)\right)n+\sqrt{2}\tan^2\zeta(s)b\end{aligned}$$

$$\left\|\alpha_1'\times\alpha_1''\right\|=\sqrt{\begin{aligned}&2\tan^8\zeta(s)-4\tan^7\zeta(s)-\left(1-2\sqrt{2}\right)\tan^6\zeta(s)+2\sqrt{2}\tan^5\zeta(s)\\&-8\tan^4\zeta(s)+\left(8-12\sqrt{2}\right)\tan^3\zeta(s)+\left(19-14\sqrt{2}\right)\tan^2\zeta(s)\\&+\left(12-6\sqrt{2}\right)\tan\zeta(s)+9\end{aligned}}$$

$$\begin{aligned}\alpha_1'''=&\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\tan^2\zeta(s)+\frac{\sqrt{2}}{2}-1-\tan^2\zeta(s)\right)t\\&+\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\tan\zeta(s)+\sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\tan^2\zeta(s)+\frac{\sqrt{2}}{2}\tan^3\zeta(s)\right)n\\&+\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+1-\frac{1}{2}\tan^2\zeta(s)-\frac{3}{2}\tan^4\zeta(s)\right)b\end{aligned}$$

$$\det\left(\alpha_1', \alpha_1'', \alpha_1'''\right) = -\frac{3\sqrt{2}}{2}\tan^6\zeta(s) + \sqrt{2}\tan^5\zeta(s) + \left(3 - \frac{7\sqrt{2}}{2}\right)\tan^4\zeta(s)$$

$$+\left(2\sqrt{2}-2\right)\tan^3\zeta(s) + \left(\frac{19}{2} - \frac{13\sqrt{2}}{2}\right)\tan^2\zeta(s) + \left(\frac{3\sqrt{2}}{2} - 2\right)\tan\zeta(s) + \left(\frac{9}{2} - \frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$$

bulunur. Frenet formülleri kullanılırsa

$$t_1 = \frac{\left(0, \sqrt{2}\tan\zeta(s), \sqrt{2} - 1 - \tan^2\zeta(s)\right)}{\sqrt{\left(4-2\sqrt{2}\right)\tan^2\zeta(s) + 3 - 2\sqrt{2} + \tan^4\zeta(s)}}$$

$$b_1 = \frac{\begin{pmatrix} -\sqrt{2}\tan^4\zeta(s) + \sqrt{2}\tan^3\zeta(s) + (\sqrt{2}-1)\tan^2\zeta(s) + (\sqrt{2}-2)\tan\zeta(s) - 3, \\ (1-\sqrt{2})\tan\zeta(s) + \tan^3\zeta(s), \sqrt{2}\tan^2\zeta(s) \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 2\tan^{10}\zeta(s) - 4\tan^9\zeta(s) - \left(1-2\sqrt{2}\right)\tan^8\zeta(s) + 2\sqrt{2}\tan^7\zeta(s) \\ -8\tan^6\zeta(s) + \left(8-12\sqrt{2}\right)\tan^5\zeta(s) + \left(19-14\sqrt{2}\right)\tan^4\zeta(s) \\ +\left(12-6\sqrt{2}\right)\tan^3\zeta(s) + 9 \end{pmatrix}^{1/2}}$$

$$n_1 = \frac{\begin{pmatrix} -\tan^5\zeta(s) + (4-2\sqrt{2})\tan^3\zeta(s) + (3-2\sqrt{2})\tan\zeta(s), \\ \sqrt{2}\tan^6\zeta(s) - \sqrt{2}\tan^5\zeta(s) - \tan^4\zeta(s) + (4-2\sqrt{2}\tan^3\zeta(s) \\ +(6-2\sqrt{2})\tan^2\zeta(s) + (4-3\sqrt{2})\tan\zeta(s) + 3, \\ 2\tan^5\zeta(s) - 2\tan^4\zeta(s) + (\sqrt{2}-2)\tan^3\zeta(s) \\ +(2\sqrt{2}-2)\tan^2\zeta(s) + 3\sqrt{2}\tan\zeta(s) \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 2\tan^{12}\zeta(s) - 4\tan^{11}\zeta(s) + \left(7-6\sqrt{2}\right)\tan^{10}\zeta(s) + \left(10\sqrt{2}-16\right)\tan^9\zeta(s) \\ +\left(6-10\sqrt{2}\right)\tan^8\zeta(s) + \left(4\sqrt{2}+12\right)\tan^7\zeta(s) + \left(62-22\sqrt{2}\right)\tan^6\zeta(s) \\ +\left(84-76\sqrt{2}\right)\tan^5\zeta(s) + \left(117-110\sqrt{2}\right)\tan^4\zeta(s) + \left(96-28\sqrt{2}\right)\tan^3\zeta(s) \\ +\left(35-54\sqrt{2}\right)\tan^2\zeta(s) + \left(-12-6\sqrt{2}\right)\tan\zeta(s) + \left(-27-18\sqrt{2}\right) \end{pmatrix}^{1/2}}$$

$$\kappa_1 = \frac{\begin{pmatrix} 2\tan^8\zeta(s) - 4\tan^7\zeta(s) - \left(1-2\sqrt{2}\right)\tan^6\zeta(s) + 2\sqrt{2}\tan^5\zeta(s) \\ -8\tan^4\zeta(s) + \left(8-12\sqrt{2}\right)\tan^3\zeta(s) + \left(19-14\sqrt{2}\right)\tan^2\zeta(s) \\ +\left(12-6\sqrt{2}\right)\tan\zeta(s) + 9 \end{pmatrix}^{1/2}}{\left(\left(4-2\sqrt{2}\right)\tan^2\zeta(s) + 3 - 2\sqrt{2} + \tan^4\zeta(s)\right)^{3/2}}$$

$$\tau_1 = \frac{\begin{matrix} -\frac{3\sqrt{2}}{2}\tan^6\zeta(s) + \sqrt{2}\tan^5\zeta(s) + \left(3 - \frac{7\sqrt{2}}{2}\right)\tan^4\zeta(s) + \left(2\sqrt{2}-2\right)\tan^3\zeta(s) \\ +\left(\frac{19}{2} - \frac{13\sqrt{2}}{2}\right)\tan^2\zeta(s) + \left(\frac{3\sqrt{2}}{2} - 2\right)\tan\zeta(s) + \left(\frac{9}{2} - \frac{5\sqrt{2}}{2}\right) \end{matrix}}{\begin{matrix} 2\tan^8\zeta(s) - 4\tan^7\zeta(s) - \left(1-2\sqrt{2}\right)\tan^6\zeta(s) + 2\sqrt{2}\tan^5\zeta(s) - 8\tan^4\zeta(s) \\ +\left(8-12\sqrt{2}\right)\tan^3\zeta(s) + \left(19-14\sqrt{2}\right)\tan^2\zeta(s) + \left(12-6\sqrt{2}\right)\tan\zeta(s) + 9 \end{matrix}}$$

olur.

5. SONUÇ ve ÖNERİLER

Bu çalışmada İnvolüt, Evolüt, Bertrand ve Mannheim eğrileri önce modifiye edilerek Frenet vektörleri ve eğrilikleri hesaplandı. Daha sonra modifiye edilmiş olan bu özel eğrilerden adjoint eğriler elde edildi. Bu eğrilerden elde edilen Modifiye çatı ve adjoint eğrilerinin esas eğri ile arasındaki ilişkiler belirlendi. Tezin son kısmında da yapılan bu işlemler çember ve kardiyoit eğrisi üzerinden hesaplandı ve şekilleri Geogebra programında çizilerek bu çalışmaya eklendi.

Yapılan bu çalışma başka eğriler kullanılarak ya da faklı uzaylarda çalışılarak nasıl sonuç vereceği bulunabilir.

7. KAYNAKLAR

Arıkan, M., & Kaya Nurkan, S. (2020). Adjoint Curve According to Modified Orthogonal Frame with Torsion in 3-Space. *Uşak Üniversitesi Fen Ve Doğa Bilimleri Dergisi*, 4(2), 54-64.

Azak, A. (2021). Involute-Evolute Curves According to Modified Orthogonal Frame. *Journal of Science and Arts. 21(2)*, 385 – 394.

Bükçü, B., & Karacan, M. (2016). On the modified orthogonal frame with curvature and torsion in 3-Space. *Mathematical Sciences and Applications E Notes*, 4(1):184–188.

Bükçü, B., & Karacan, M. (2016). Spherical Curves with Modified Orthogonal Frame. *Journal of New Results in Science*, 5(10): 60-68.

Do Carmo, M. (1976). *Differential Geometry of Curves and Surfaces.* New Jersey: Prentice Hall Inc., Englewood Cliffs.

Fenchel, W. (57 1951). The Differential Geometry of Closed Space Curves, ,. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 44-54.

Gür Mazlum, S., & Bektaş, M. (2022). On the modified orthogonal frames of the non-unit speed curves in Euclidean Space E3. *Turkish Journal of Science*, 7(2), 58-74.

Hacısalihoğlu, H. (1983 a). *Diferensiyel Geometri.* Malatya: İnönü Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Yayınları, No:7.

Lone, M., Es, H., Karacan, M., & Bukcu, B. (2018). Mannheim curves with modified orthogonal frame in Euclidean 3-space. *arXiv e-print*, 1809.

Nurkan, S., Güven, İ., & Karacan, M. (2019). Characterizations Of Adjoint Curves İn Euclidcon 3-Space. *Prc.Natl.Acad.Sci.*, 89(1),155-161.

O'neill, B. (2006). *Elemantary Differential Geometry.* Los Angeles: Revised Second Edition, Elsevier.

Orbay, K., & Kasap, E. (2009). On Mannheim partner curves in E3. *International Journal of Physical Sciences*, 261-264.

Özdemir, M. (2020). *Diferansiyel Geometri.* İzmir: Altın Nokta.

Sabuncuoğlu, A. (2016). *Diferensiyel Geometri.* Ankara: Nobel .

Sasai, T. (36 (1984)). The Fundamental Theorem of Analytic Space Curves And Apparent Singularities of Fuchsian Differential Equations. *Tohoku Math. Journ.*, 17-24.

Wang, F., & Liu, H. (2007). Mannheim Partner Curves in 3-Euclidean Space. *Mathematics in Practice and Theory, vol.37*, 141-143.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler	
Adı Soyadı	Eda ÖZTÜRK
Doğum Yeri	
Doğum Tarihi	
Uyruğu	✓ T.C. ❐ Diğer:
Telefon	
E-Posta Adresi	

Eğitim Bilgileri	
Lisans	
Üniversite	Karadeniz Teknik Üniversitesi
Fakülte	Fen Fakültesi
Bölümü	Matematik
Mezuniyet Yılı	08.07.2013
Yüksek Lisans	
Üniversite	Ordu Üniversitesi
Enstitü Adı	Fen Bilimleri Enstitüsü
Anabilim Dalı	Matematik Anabilim Dalı

Yayınlar

Öztürk, E. & Şenyurt, S. (2023).' İnvolüt Eğrisinin Modifiye Ortogonal Çatısından Elde Edilen Adjoint Eğriler', 978-625-367-512-7(2023)

Konferanslar

Öztürk, E. & Şenyurt, S.' İnvolüt Eğrisinin Modifiye Ortogonal Çatısından Elde Edilen Adjoint Eğriler', 6th Internatıonal Conference on Computational Mathematics and Engineering Science,20-22/05/2022, Ordu/Turkey

Öztürk, E. & Şenyurt, S.'Adjoint Curves Obtained From The Modified Ortogonal Frame Of The Involüte Curve', EuroAsia Congress on Scientific Researches and Recent Trends-XII, 29-30/11/2023, Baku, Azerbaijan

Öztürk, E. & Şenyurt, S.' Adjoint Curves Obtained From The Modified Ortogonal Frame Of The Evolüte Curve', 20th International Geometry Symposium, 18-20/07/2024, Van, Türkiye