T. C.

ORDU ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TERS ÜÇGENSEL MATRİSLERİN DRAZİN İNVERSİ İÇİN BLOK PARÇALANMIŞ GÖSTERİMLER VE UYGULAMALARI

MÜKERREM BARUT

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ORDU 2024

TEZ BİLDİRİMİ

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan ve kullanılan intihal tespit programının sonuçlarına göre; bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

MÜKERREM BARUT

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

TERS ÜÇGENSEL MATRİSLERİN DRAZİN İNVERSİ İÇİN BLOK PARÇALANMIŞ GÖSTERİMLER VE UYGULAMALARI

MÜKERREM BARUT

ORDU ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ, 84 SAYFA

(TEZ DANIŞMANI: PROF. DR. SELAHATTİN MADEN)

Bu tez çalışması beş bölüm halinde düzenlenmiştir. Birinci bölümde tez çalışmasının amacından bahsedilerek kısa bir giriş verilmiştir. İkinci bölümde çalışmada gerekli olacak temel tanımlar, teoremler ve bazı genel bilgiler ifade edilmiştir. Ayrıca bir matris için Moore-Penrose invers tanımı ve bu inversin bazı özellikleri sıralanmıştır. Üçüncü bölümde matrisler için Drazin invers tanımı verilerek bu inversin çeşitli özellikleri ortaya konulmuştur. Ayrıca blok parçalanmış matrislerin Drazin inversleri ile ilgili bazı hesaplanma yöntemleri ve bu inverslerin çeşitli uygulamalarından bahsedilerek ters üçgensel matrislerin Drazin inversleri için çeşitli gösterimler verilmiştir. Dördüncü bölümde sonuç ve öneriler verilmistir. Beşinci bölümde ise tezde yararlanılan kaynaklar listelenmiştir.

Anantara Kelimeler: Matris, Kare Matris, Rank, Blok Parçalanmış Matris, Ters Üçgensel Matris, Bir Matrisin İnversi, Genelleştirilmiş İnvers, Moore-Penrose İnvers, Drazin İnvers.

ABSTRACT

BLOCK PARTITIONED REPRESENTATIONS FOR THE DRAZIN INVERSE OF ANTI-TRIANGULAR MATRICES AND ITS APPLICATIONS

MÜKERREM BARUT

ORDU UNIVERSITY INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

MATHEMATICS

MASTER THESIS, 84 PAGES

(SUPERVISOR: PROF. DR. SELAHATTİN MADEN)

This thesis is organized in five parts. In the first chapter, a short introduction is given by mentioning the purpose of the thesis study. In the second chapter, the basic definitions, theorems and some general informations that will be required in our study are expressed. Also, the definition and some properties of Moore-Penrose inverse for a matrix and are listed. In the third chapter, it is given the definition of the Drazin inverse of a matrix and considered some properties of this inverse. Furthermore, some computational methods and several applications of the Drazin inverses of matrices are and block partitioned representations for the Drazin inverse of anti-triangular matrices are given in this chapter. In the fourth chapter, conclusions and recommendations are given. In the fifth chapter, the references used in the thesis are listed.

Keywords: Matrix, Square Matrix, Rank, Block Partitoned Matrix, İnverse of a Matrix, Anti-Triangular Matrix, Generalized Inverse, Moore-Penrose Inverse, Drazin İnvers.

TEŞEKKÜR

Tez konusunun belirlenmesinde ve tüm çalışmalarım boyunca her zaman üstün bilgi ve deneyimleriyle bana yol gösteren danışman hocam Sayın Prof. Dr. Selahattin MADEN' e en içten duygularla teşekkür eder, saygılarımı sunarım.

Ayrıca Lisansüstü eğitimim sırasında kendilerinden ders aldığım ve engin tecrübelerinden yararlandığım Ordu Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümündeki tüm değerli hocalarıma teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER ve KISALTMALAR LİSTESİ

$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{C}_{\boldsymbol{n}}^{\boldsymbol{m}}$ **veya** $\mathbb{C}_{\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{n}}$	: $\mathbb{C}$ üzerinde tanımlı $m \times n$ tipindeki tüm matrislerin kümesi
$\boldsymbol{I_n}$	: $n \times n$ tipindeki birim matris
$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ **veya** $\boldsymbol{A}'$	: A matrisinin transpoz matrisi
$\overline{\boldsymbol{A}}$	: A matrisinin eşlenik matrisi (eş matrisi)
$\boldsymbol{A}^{*}$	: A matrisinin eşlenik transpoz matrisi (Hermitian matrisi)
$\lvert\boldsymbol{A}\rvert$	: A matrisinin determinantı
$\mathbf{Ek}(\boldsymbol{A})$	: A matrisinin ek matrisi
$\boldsymbol{A_{ij}}$	: A matrisinin bir a_{ij} elemanının kofaktörü
$\boldsymbol{A^{-1}}$	: A matrisinin inversi
$\boldsymbol{ind}(\boldsymbol{A})$	: A matrisinin indeksi
$\boldsymbol{r}(\boldsymbol{A})$	: A matrisinin rankı
$\boldsymbol{tr}(\boldsymbol{A})$	: A matrisinin izi
$\boldsymbol{\mathcal{C}}(\boldsymbol{A})$	: A matrisinin satır uzayı
$\boldsymbol{\mathcal{N}}(\boldsymbol{A})$	: A matrisinin null (sıfır) uzayı
$\boldsymbol{\Re}(\boldsymbol{A})$	: A matrisinin ranj (sütun) uzayı
$\boldsymbol{A^{(1)}}$**veya** $\boldsymbol{A^{-}}$	: A matrisinin genelleştirilmiş inversi (iç inversi)
$\boldsymbol{A^{(2)}}$	: A matrisinin dış inversi
$\boldsymbol{A^{(1,2)}}$	: A matrisinin yansımalı genelleştirilmiş inversi
$\boldsymbol{A}^{\dagger}$	: A matrisinin Moore–Penrose tipi genelleştirilmiş inversi
$\boldsymbol{A}^{\#}$	: A matrisinin Grup inversi
$\boldsymbol{A^{D}}$	: A matrisinin Drazin inversi
$\mathbf{k\ddot{o}\c{s}}(\boldsymbol{A})$	: A matrisinin köşegen elemanları

1. GİRİŞ

Bugün matris teorisi ve onun önemli bir kısmını oluşturan lineer denklem sistemleri, istatistik, sosyoloji, kimya, fizik eğitimi, bilgisayar mühendisliği, kodlama teorisi ve elektrik mühendisliği gibi pek çok teknik alanda gerekli matematiksel temel bilginin ayrılmaz bir parçası haline gelmiştir. Matris hesabı, 19. yüzyıl ortalarından itibaren kullanılmaya başlanmıştır. İngiliz matematikçi Sylvester, ilk kez 1850 yılında matris kavramını kullanmıştır. 1853 yılında ise bir diğer ingiliz bilgini Hamilton '*Lineer and Vector Functions*' isimli eserinde matrislerin bazı özelliklerinden faydalanmış fakat matris ismini henüz kullanmamıştır. Yine bir İngiliz matematikçisi olan Cavley, 1858 yılında zamanında çok meşhur olan '*Memorie on the Theory of Matrices*' isimli eserinde matris cebirinin temel esaslarını ortaya koymuştur. İlerleyen zamanlarda Fransız Laguerre ve Alman Frobenius matrislerle ilgili yeni kavram ve teoremler üzerinde çalışmışlardır.

Bir matrisin bilinen anlamda inversinin olması için matrisin kare ve non-singüler olması gereklidir. Ancak kare olmayan veya kare olduğu halde singüler olan matrislerin de mevcut olduğu ve bu tipten matrislerle uygulamada çok sık karşılaşıldığı da bir gerçektir. Dolayısıyla bu tip matrislerin inverslerine de ihtiyaç duyulmaktadır. Singüler matrisin inversi kavramı ilk kez 1920 yılında Moore tarafından ortaya atılmış olmasına rağmen ta ki 1955 yılına kadar bu konuda herhangi bir sistematik çalışma yapılamamıştır. 1955 yılında, önceki çalışmalardan tamamen habersiz olarak, Penrose (1955) biraz farklı bir yoldan da olsa Moore tarafından singüler matrisler için verilen invers kavramını yeniden tanımlamıştır. Penrose ile aynı dönemlerde yaşayan Rao ise, bir singüler matrisin Pseudo inversi olarak adlandırdığı, en küçük kareler teorisinde, singüler matrisli normal denklemlerin çözümünde ve tahmin edicilerin varyanslarının hesaplanmasında sıkça kullanılan yeni bir invers kavramı ortaya atmıştır. Ancak Rao tarafından geliştirilen Pseuda invers, Moore ve Penrose tarafından ortaya konulan kısıtlamaların tümünü sağlamamaktadır. Bu nedenledir ki bu invers, Moore–Penrose inversten biraz farklıdır. Rao, daha sonra lineer denklemlerle ilgili problemlerinin çözümünde yeterli olan ve Moore ve Penrose' un vermiş olduğu tanımdan daha da zayıf bir tanım ortaya koymuştur. Genelleştirilmiş invers olarak adlandırılan bu inversin çeşitli uygulamaları Rao' nun çalışmalarında yer almıştır.

Genelleştirilmiş inversler üzerinde 1955' li yıllardan itibaren çalışan başlıca bilim adamları arasında Greville, Bjerhammer, Ben-Israel ve Charnes, Chipman, Chipman ve Rao, Scroggs ve Odell sayılabilir. Bott ve Duffin, bir kare matrisin kısıtlı inversini tanımlamışlardır ki bu invers bilinen g–inversten farklıdır ve bazı uygulamalarda oldukça fazla kullanılır. Chernoff, çalışmalarında singüler nonnegatif tanımlı bir matrisin g–inversini ele almıştır ki bu invers, bir g–invers olmamasına rağmen bazı tahmin problemlerinin incelenmesinde yararlıdır. Rao tarafından verilen daha zayıf tanımı sağlayan g–invers tek türlü olmamakla birlikte matris cebirinde ilginç bir çalışma olarak kabul edilir. 1967 yılında bir yayınında Rao, değişik amaçlarla kullanılmak üzere g–inverslerin bir sınıflandırmasını vermiştir. Bu çalışmalar daha sonra genelleştirilmiş inverslerin yeni bir sınıflandırmasını ortaya atan Mitra ve Bhimasankaram (1969, 1970) tarafından geliştirilmiştir. Genelleştirilmiş inverslerin diğer çeşitli uygulamaları Mitra ve Rao (1968a, 1968b, 1969) ve Rao (1968) tarafından yapılan bir dizi çalışmada ele alınmıştır. Genelleştirilmiş inverslerle ilgili sistematik gelişmeler ve onların çeşitli uygulamaları *Generalized Inverse of Matrices and Its Applications* (Wiley, 1971) adlı kitapta verilmiştir.

Bu tez çalışmasında öncelikle kare olmayan ya da kare olduğu halde normal olarak bildiğimiz anlamda inversi mevcut olmayan matrisler için geliştirilen ve özellikle lineer denklem sistemlerinin genel durumda çözümünün mevcut olup-olmadığının araştırılmasında ve mevcut olması durumunda çözümün belirlenmesinde kullanılan ve bilinen anlamdaki invers özelliklerini de sağlayan Moore-penrose invers adı verilen bir genelleştirilmiş invers kavram ele alınmıştır. Bu amaçla öncelikle Moore-Penrose invers tanımı verilerek bu inversin çeşitli özellikleri verilmiştir. Daha sonra bilinen anlamda inversi mevcut olmayan kare matrisler Drazin invers adı verilen yeni bir invers tanımı verilerek bu inversin çeşitli özellikleri verilmiş ve bu tipten inversleri hesaplamada kullanılan bazı yeni yöntemler geliştirilmiştir. Ayrıca blok parçalanmış parçalanmış matrislerin Drazin inversleri için çeşitli gösterimler verilerek özellikle ters üçgensel matrislerin Drazin inversleri detaylı bir şekilde ele alınmıştır.

Drazin inversler singüler diferansiyel veya fark denklemlerinde, Markov zincirlerinde, cryptografyada, tekrarlamalı metotlarda ve nümerik analizde çok çeşitli uygulamalara sahiptir.

2. GENEL BİLGİLER

2.1 Matrislerle İlgili Bazı Temel Kavramlar

Tanım 2.1 i) $\mathbb{K}$ bir cisim, $m, n \in \mathbb{N}$ ve $1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n$ olmak üzere bütün (i, j) sıralı ikililerinin kümesini $S = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ gösterelim. Bir $\mathfrak{f}: S \longrightarrow \mathbb{K}$ fonksiyonu

$$(i, j) \longrightarrow \mathfrak{f}(i, j) = a_{ij}$$

biçiminde tanımlansın. Bu durumda $a_{ij} \in \mathbb{K}$ olmak üzere keyfi seçilen $m.n$ tane elemanın oluşturduğu sayı tablosuna $\mathbb{K}$ cismi üzerinde tanımlı $m \times n$ tipinde bir matris denir ve

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

veya kısaca $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ şeklinde gösterilir. Her bir $(i, j),\ 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n$ ikilisine karşılık gelen a_{ij} elemanına A matrisinin (i, j)–yinci bileşeni denir.

ii) $m \times n$ tipindeki $A = [a_{ij}]$ ve $B = [b_{ij}]$ matrisleri için, eğer her $(i, j),\ 1 \leq i \leq m$ ve $1 \leq j \leq n$ için $a_{ij} = b_{ij}$ ise A ve B matrisleri eşittir denir.

iii) $m \times n$ tipindeki bir $A = [a_{ij}]$ matrisi için eğer her $(i, j),\ 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n$ için $a_{ij} = 0$ ise A matrisine bir sıfır matris denir (Hacısalihoğlu H.H., 1977).

Tanım 2.2 i) $m \times n$ tipindeki $A = [a_{ij}]$ ve $B = [b_{ij}]$ matrisleri verildiğinde, bu iki matrisin toplamı, (i, j)–yinci bileşeni $a_{ij} + b_{ij}$ olan bir matris olup

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + +b_{12} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlanır.

ii) $c \in \mathbb{K}$ bir skaler olmak üzere $cA \in \mathbb{K}_n^m$ matrisi (i, j)–yinci bileşeni ca_{ij} olan bir matris olup

$$cA = \begin{bmatrix} ca_{11} & ca_{12} & \dots & ca_{1n} \\ ca_{21} & ca_{22} & \dots & ca_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ ca_{m1} & ca_{m2} & \dots & ca_{mn} \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlanır.

iii) $A = [a_{ij}] \in \mathbb{K}_p^m$ ve $B = [b_{ij}] \in \mathbb{K}_n^p$ tipindeki A ve B matrislerinin çarpımı $C = [c_{ij}] \in \mathbb{K}_n^m$ tipinde bir matris olup

$$[a_{ij}].[b_{ij}] = [c_{ij}] = \left[\sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}\right], \ 1 \le i \le m, \ \ 1 \le j \le n$$

veya daha açık olarak

$$A.B = \begin{bmatrix} (a_{11}b_{11} + \cdots + a_{1p}b_{p1}) & \dots & (a_{11}b_{1n} + \cdots + a_{1p}b_{pn}) \\ \dots & \dots & \dots \\ (a_{m1}b_{11} + \cdots + a_{mp}b_{p1}) & \dots & (a_{m1}b_{1n} + \cdots + a_{mp}b_{pn}) \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlanır (Hacısalihoğlu H.H., 1977).

Bu durumda iki matrisin çarpımının tanımlı olabilmesi için birinci matrisin sütun sayısı ile ikinci matrisin satır sayısının eşit olması gerekmektedir. Uygun A ve B matrislerinin çarpımı AB ile gösterilir (Hacısalihoğlu H.H., 1977).

Tanım 2.3 i) Eğer bir $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ matrisinde $m = n$ ise, yani A matrisinin satır sayısı sütun sayısına eşit ise, bu takdirde A matrisine bir kare matris denir. Bu durumda $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ elemanlarına ise A matrisinin köşegen elemanları (ya da esas köşegen elemanları adı verilir.

ii) Bir $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ kare matrisinin köşegen elemanları dışındaki diğer tüm elemanları sıfır ise bu A ya bir köşegen matris denir ve $A = \text{Köş}\{a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}\}$ ile gösterilir.

iii) Bir köşegen matriste $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn} = \mathrm{k}, \mathrm{k} \in \mathbb{K}$ ise, matrise skaler matris denir.

iv) Köşegen elemanları 1 ve diğer elemanları 0 olan bir kare matrise birim matris denir ve $n -$ yinci mertebeden bir birim matris I_n ile gösterilir. Herhangi bir $A \in \mathbb{K}_n^m$ matrisi için, $I_m A = A I_n = A$ eşitliği sağlanır (Hacısalihoğlu H.H., 1977).

Tanım 2.4 Bir $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ matrisinden aynı numaralı satır ve sütunların kendi aralarında yer değiştirmesiyle elde edilen matrisi A matrisinin transpozu denir ve $A^T = [a_{ij}]_{n\times m}$ ile gösterilir. Buna göre uygun mertebeden A ve B matrisleri için $(A + B)^T = A^T + B^T$ ve $(AB)^T = B^T A^T$ olduğu kolayca görülür. Eğer A bir reel kare matris olmak üzere $A^T = A$ ise, bu takdirde A matrisine bir simetrik matris denir.

Tanım 2.5 i) $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ matrisinin keyfi bir a_{ij} elemanının $|M_{ij}|$ ile gösterilen minörü, A matrisinden i–yinci satır ve j–yinci sütunun atılması ile oluşan alt kare matrisin determinantıdır.

ii) $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ matrisinin keyfi bir a_{ij} elemanının minörü $|M_{ij}|$ olsun. Bu durumda a_{ij} elemanının A_{ij} ile gösterilen kofaktörü (veya işaretli minörü),

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}.\,|M_{ij}|$$

olarak tanımlanır.

iii) $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ matrisinin determinantı herhangi bir satır (veya sütun) elemanlarının kendi kofaktörleriyle çarpılıp tüm elde edilen çarpanların toplanmasıyla hesaplanır. Başka bir deyişle herhangi i ve j $(i,j = 1,2,3,\dots,n)$ için

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}.A_{ik} = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{i+k} a_{ik}|M_{ik}| \qquad (*)$$

veya

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}.A_{kj} = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+j} a_{kj}|M_{ik}| \qquad (**)$$

olarak tanımlanır. Bu durumda her bir i için, (*) açılımına A matrisinin determinantının i–yinci satıra göre açılımı ve her bir j için, (**) açılımına ise A matrisinin determinantının j–yinci sütuna göre açılımı adı verilir.

iv) $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ matrisi için eğer $|A| = 0$ ise, A matrisine bir singüler matris ve $|A| \neq 0$ ise, A matrisine bir nonsingüler(veya regüler) matris denir(Branson R., 1999).

Tanım 2.6 $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ matrisinde bir a_{ij} elemanının kofaktörü A_{ij} olmak üzere $[A_{ij}]^T = [A_{ji}]$ matrisine A matrisinin ek matrisi denir ve

$$Ek(A) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

ile gösterilir (Hacısalihoğlu H.H., 1977).

Tanım 2.7 Herhangi bir $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ matrisi verildiğinde, eğer $A.B = B.A = I_n$ olacak şekilde bir $B = [b_{ij}]_{n\times n}$ kare matrisi mevcut ise, B matrisine A matrisinin inversi (tersi) denir ve $A^{-1} = B$ ile gösterilir (Hacısalihoğlu H.H., 1977).

Teorem 2.1 Bir $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ matrisi ile ek matrisinin çarpımı bir skaler matris olup,

$$A.\text{Ek}(A) = \text{Ek}(A).A = |A|I_n$$

ile verilir (Hacısalihoğlu H.H., 1977).

Teorem 2.2 Bir $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ nonsingüler matrisinin inversi,

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}.\text{Ek}(A)$$

dır. (Hacısalihoğlu H.H., 1977)

Teorem 2.3 i) Bir $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ nonsingüler matrisi için A^{-1} inversi tektir.

ii) A nonsingüler bir matris ise A^{-1} inversi de nonsingüler olup $(A^{-1})^{-1} = A$ dır.

iii) A ve B çarpıma uygun nonsingüler matrisler ise AB çarpımı da nonsingüler olup $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ dir.

iv) A nonsingüler ise A^T de nonsingüler olup $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ dir (Branson R., 1999).

Tanım 2.8 i) Bir $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ kare matrisi için eğer $A^2 = A$ ise, bu takdirde A matrisine bir idempotent matris denir.

ii) $\mathbb{C}$ kompleks sayılar cismi üzerinde tanımlı bir A matrisinin elemanlarının yerlerine bunların eşlenikleri yazılarak elde edilen matrise A matrisinin eşleniği (eş matrisi) denir ve $\overline{A}$ ile gösterilir.

iii) $\mathbb{C}$ kompleks sayılar cismi üzerinde tanımlı bir A matrisi için eğer $(\overline{A})^T = A$ ise, bu takdirde A matrisine bir hermityen matris denir ve $A^* = (\overline{A})^T$ ile gösterilir.

iv) Bir A matrisi için eğer $AA^* = A^*A$ eşitliği sağlanıyorsa, bu takdirde A matrisine bir normal matris denir.

v) $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ nonsingüler bir matris olmak üzere, $A^{-1} = A^*$ (veya buna denk olarak $AA^* = A^*A = I$) ise A matrisine birimsel (unitary) matris denir.

vi) $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ bir kare matris olmak üzere, eğer $A^{-1} = A^T$ ise, bu takdirde A matrisine bir ortogonal matris denir (Branson R., 1999).

Teorem 2.4 A ve B uygun mertebeden matrisler olmak üzere aşağıdaki eşitlikleri sağlanır(Branson R., 1999).

i) $\left(\overline{A}\right)^T = \overline{(A^T)}$.

ii) $(A^*)^* = A$.

iii) $(A + B)^* = A^* + B^*$.

iv) $(AB)^* = B^*A^*$.

Tanım 2.9 i) $x_1, x_2, \dots, x_n$ vektörler kümesi verilmiş olsun. Eğer $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$ eşitliği ancak $a_1, a_2, \dots, a_n$ skalerlerinin tümü birden sıfır olduğunda sağlanıyorsa bu takdirde $x_1, x_2, \dots, x_n$ vektörlerine lineer bağımsızdır denir. Aksi durumda, yani, $a_1, a_2, \dots, a_n$ skalerlerinden en az biri sıfırdan farklı olmak üzere eğer $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$ eşitliği sağlanıyorsa bu takdirde $x_1, x_2, \dots, x_n$ vektörlerine lineer bağımlıdır denir.

ii) A matrisi $m \times n$ tipinde herhangi bir matris olsun. A matrisinin sütun vektörlerini $A_{*1}, A_{*2}, \dots, A_{*n}$ ile ve satır vektörlerini de $A_{1*}, A_{2*}, \dots, A_{m*}$ ile gösterelim. Bu takdirde A_{i*} , $i = 1, 2, \dots, m$ vektörleri arasından oluşturulan en büyük lineer bağımsız vektörler kümesinin eleman sayısına A matrisinin satır rankı ve A_{*j} , $j = 1, 2, \dots, n$ vektörleri arasından oluşturulan en büyük lineer bağımsız vektör kümesinin eleman sayısına ise A matrisinin sütun rankı denir (Hacısalihoğlu H.H., 1977).

Teorem 2.5 i) Bir matrisin herhangi iki satırının kendi aralarında yer değiştirmesi o matrisin satır rankını değiştirmez

ii) Elemanter işlemler herhangi bir matrisin sütun rankını değiştirmez.

iii) Herhangi bir A matrisi için satır rankı sütun rankına eşittir (Branson R., 1999).

Tanım 2.10 Herhangi bir A matrisinin rankı, satır ve sütun rankı olarak tanımlanır ve $\mathrm{rank}(A)$ veya $r(A)$ şeklinde gösterilir (Branson R., 1999).

Teorem 2.6 A bir matris olmak üzere $r(A) = r(A^T)$ dir (Hacısalihoğlu H.H., 1977).

Tanım 2.11 $n \times n$ tipindeki bir A matrisi için eğer $r(A) = n$ sağlanıyorsa A matrisine nonsingüler matris denir. Aksi durumda yani, $r(A) < n$ ise A matrisine singüler matris denir (Hacısalihoğlu H.H., 1977).

Tanım 2.12 i) $A \in \mathbb{K}_n^m$ matrisi $m \times n$ tipinde bir matris olsun. Bu takdirde $\mathcal{N}(A) = \{x: Ax = 0\}$ kümesine A marisinin null (sıfır) uzayı denir.

ii) $A \in \mathbb{K}_n^m$, $m \times n$ tipinde bir matris olsun. Bu takdirde $\Re(A) = \{y: Ax = y\}$ kümesine A matrisinin ranj (sütun) uzayı denir (Hacısalihoğlu H.H., 1977).

Teorem 2.7 Çarpıma uygun A ve B matrisleri için AB çarpımının rankı A ve B matrislerinin ranklarını geçemez. Başka bir deyişle,

$$r(AB) \leq \min \{r(A)\,,\; r(B)\}$$

dir (Branson R., 1999).

2.2 Matrislerin Moore-Penrose İnversleri ve Özellikleri

Bu kısımda çalışmamız boyunca sık sık isimlerini zikredeceğimiz matrisler için bazı genelleştirilmiş inversler ve çeşitli özellikleri verilecektir.

Tanım 2.13 $\mathbb{C}_n^m$, kompleks sayılar cismi üzerinde tanımlı $m \times n$ tipindeki tüm matrislerin kümesini göstersin. Bir $A \in \mathbb{C}_n^m$ matrisi için aşağıdaki dört şartı (Moore–Penrose şartları) sağlayan bir X matrisine A matrisinin bir Moore–Penrose inversi denir ve A^{+} veya $A^{\dagger}$ sembollerinden birisi ile gösterilir.

(i) $AXA = A,$
(ii) $XAX = X,$
(iii) $(AX)^* = AX,$
(iv) $(XA)^* = XA.$ (2.8)

Bu durumda eğer X matrisi sadece (i) şartını sağlıyorsa, bu X matrisine, A matrisinin bir genelleştirilmiş inversi (iç inversi) denir ve $A^{(1)}$ ile gösterilir. Sadece (ii) şartını sağlayan X matrisine, A matrisinin bir dış inversi denir ve $A^{(2)}$ ile gösterilir. Hem (i) hem de (ii) şartını sağlayan X matrisine ise, A matrisinin bir yansımalı genelleştirilmiş inversi denir ve $A^{(1,2)}$ ile gösterilir.

Bu tanıma göre eğer A nonsingüler bir matris ise A^{-1} matrisinin Moore–Penrose inversin şartlarını sağlayacağı açıktır, yani $A^{-1} = A^{\dagger}$ dir. Bununla birlikte, eğer A matris bir singüler matris veya kare olmayan bir matris ise, bu durumda Moore–Penrose şartlarını sağlayan bir $A^{\dagger}$ matrisinin mevcut olup olmadığı sorusu akla gelebilir. Bu sorunun cevabı her A matrisi için bir $A^{\dagger}$ matrisinin mevcut ve tek olduğu şeklindedir. Aşağıda bu durum gösterilecektir. Ayrıca bu şekilde tanımlanan Moore–Penrose inversin bazı önemli özellikleri verilecektir. Öncelikle belirtelim ki eğer A $m \times n$ tipinde bir sıfır matris ise, $A^{\dagger}$ de $n \times m$ tipinde sıfır matris olacağı açıktır.

Teorem 2.8 Her A matrisi için Moore–Penrose şartlarını sağlayan bir ve yalnız bir tek $A^{\dagger}$ matrisi vardır (Pringle and Rayner., 1971).

İspat: Eğer $A = 0$ ise $A^{\dagger} = 0$ olacağından $A \neq 0$ alınabilir. A matrisi r ranklı bir matris olsun. Bu durumda A matrisi

$$A = BC \qquad (2.9)$$

olarak parçalanabilir, burada B matrisi $m \times r$ tipinde r ranklı bir matris ve C matrisi de $r \times n$ tipinde r ranklı bir matris olup, $B^{*}B$ ve CC^{*} matrisleri nonsingüler matrislerdir. Bu durumda eğer $A^{\dagger}$ matrisi

$$A^{\dagger} = C^{*}(CC^{*})^{-1}(B^{*}B)^{-1}B^{*} \qquad (2.10)$$

olarak alınırsa, A^{+} matrisi istenen Moore–Penrose şartlarını sağlar. Gerçekten

(i) $AA^{\dagger}A = (BC)C^{*}(CC^{*})^{-1}(B^{*}B)^{-1}B^{*}(BC)$

$$= B(CC^{*})(CC^{*})^{-1}(B^{*}B)^{-1}(B^{*}B)C = BC = A,$$

(ii) $A^{\dagger}AA^{\dagger} = C^{*}(CC^{*})^{-1}(B^{*}B)^{-1}B^{*}(BC)C^{*}(CC^{*})^{-1}(B^{*}B)^{-1}B^{*}$

$$= C^{*}(CC^{*})^{-1}(B^{*}B)^{-1}(B^{*}B)(CC^{*})(CC^{*})^{-1}(B^{*}B)^{-1}B^{*}$$

$$= C^{*}(CC^{*})^{-1}(B^{*}B)^{-1}B^{*} = A^{+},$$

(iii) $(AA^{\dagger})^{*} = [(BC)C^{*}(CC^{*})^{-1}(B^{*}B)^{-1}B^{*}]^{*} = B(B^{*}B)^{-1}(CC^{*})^{-1}(CC^{*})B^{*}$

$$= B(B^{*}B)^{-1}B^{*} = B(CC^{*})(CC^{*})^{-1}(B^{*}B)^{-1}B^{*}$$

$$= (BC)C^{*}(CC^{*})^{-1}(B^{*}B)^{-1}B^{*} = AA^{\dagger},$$

(iv) $(A^{\dagger}A)^{*} = [C^{*}(CC^{*})^{-1}(B^{*}B)^{-1}B^{*}(BC)]^{*}$

$$= C^{*}(B^{*}B)(B^{*}B)^{-1}(CC^{*})^{-1}C$$

$$= C^{*}(CC^{*})^{-1}C = C^{*}(CC^{*})^{-1}(B^{*}B)^{-1}(B^{*}B)C$$

$$= C^{*}(CC^{*})^{-1}(B^{*}B)^{-1}B^{*}(BC) = A^{\dagger}A$$

olduğu görülür. Moore–Penrose inversin tek olduğunu göstermek için A matrisinin Moore–Penrose şartlarını sağlayan herhangi iki $A_1^{\dagger}$ ve $A_2^{\dagger}$ Moore–Penrose inversinin mevcut olduğunu varsayalım. Bu durumda,

$$A_1^{\dagger} = A_1^{\dagger}AA_1^{\dagger} = A_1^{\dagger}(AA_1^{\dagger})^{*} = A_1^{\dagger}(A_1^{\dagger})^{*}A^{*} = A_1^{\dagger}(A_1^{\dagger})^{*}(AA_2^{\dagger}A)^{*}$$

$$= A_1^\dagger (A_1^\dagger)^* A^* (A_2^\dagger)^* A^* = A_1^\dagger (AA_1^\dagger)^* (AA_2^\dagger)^* = A_1^\dagger AA_1^\dagger AA_2^\dagger = A_1^\dagger AA_2^\dagger$$

$$= A_1^\dagger A\left(A_2^\dagger AA_2^\dagger\right) = (A_1^\dagger A)^* \left(A_2^\dagger A\right)^* A_2^\dagger = A^* (A_1^\dagger)^* A^* (A_2^\dagger)^* A_2^\dagger$$

$$= (AA_1^\dagger A)^* (A_2^\dagger)^* A_2^\dagger = A^* (A_2^\dagger)^* A_2^\dagger = (A_2^\dagger A)^* A_2^\dagger = A_2^\dagger AA_2^\dagger = A_2^\dagger$$

olur, yani $A^\dagger$ matrisi tektir.

Teorem 2.9 i) $m \times n$ tipinde bir A matrisinin tüm elemanları 1 ise, $A^\dagger = \frac{1}{m.n} A^*$ dir.

ii) $a,\ n \times 1$ tipinde bir sütun vektörü ise, bu durumda $a^\dagger = (a^* a)^{-1} a^*$ şeklindedir.

iii) $a,\ 1 \times n$ tipinde bir satır vektörü ise, bu durumda $a^\dagger$, $a^\dagger = a^* (aa^*)^{-1}$ şeklindedir (Pringle and Rayner., 1971).

Örnek 2.1 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ matrisi verilmiş olsun. Bu durumda $m = 2,\ n = 3$ olup

$$A^* = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

şeklindedir olacağından

$$A^\dagger = \frac{1}{m.n} A^* = \frac{1}{2.3} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 \end{bmatrix}$$

matrisi Moore–Penrose şartlarını sağlar. Gerçekten

(i) $AA^\dagger = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$

$$AA^\dagger A = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = A,$$

(ii) $A^\dagger A = \begin{bmatrix} 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$

$$A^\dagger AA^\dagger = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 \end{bmatrix} = A^\dagger,$$

(iii) $(AA^\dagger)^* = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} = AA^\dagger,$

(iv) $(A^\dagger A)^* = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix} = A^\dagger A$

olduğu görülür.

Örnek 2.2 $a = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ olsun. Bu durumda

$$a^{\dagger} = (a^{*}a)^{-1}a^{*} = \left([-1 \quad 2].\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}\right)^{-1}.[-1 \quad 2]$$

$$= [5]^{-1}.[-1 \quad 2] = [1/5].[-1 \quad 2] = [-1/5 \quad 2/5]$$

matrisi Moore–Penrose şartlarını sağlar. Gerçekten

(i) $aa^{\dagger} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}.[-1/5 \quad 2/5] = \begin{bmatrix} 1/5 & -2/5 \\ -2/5 & 4/5 \end{bmatrix}$

$aa^{v}a = \begin{bmatrix} 1/5 & -2/5 \\ -2/5 & 4/5 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = a,$

(ii) $a^{\dagger}a = [-1/5 \quad 2/5].\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = [1]$

$a^{\dagger}aa^{\dagger} = [1].[-1/5 \quad 2/5] = [-1/5 \quad 2/5] = a^{\dagger},$

(iii) $(aa^{\dagger})^{*} = \begin{bmatrix} 1/5 & -2/5 \\ -2/5 & 4/5 \end{bmatrix}^{*} = \begin{bmatrix} 1/5 & -2/5 \\ -2/5 & 4/5 \end{bmatrix} = aa^{\dagger},$

(iv) $(a^{\dagger}a)^{*} = [1]^{*} = [1] = a^{\dagger}a$

olduğu görülür.

Örnek 2.3 $a = [1 \quad 2 \quad 1]$ alınırsa bu durumda

$$a^{\dagger} = a^{*}(aa^{*})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}.\left([1 \quad 2 \quad -1].\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}.[6]^{-1} = \begin{bmatrix} 1/6 \\ 1/3 \\ -1/6 \end{bmatrix}$$

matrisi Moore–Penrose şartlarını sağlar. Gerçekten

(i) $aa^{\dagger} = [1 \quad 2 \quad -1].\begin{bmatrix} 1/6 \\ 1/3 \\ -1/6 \end{bmatrix} = [1]$

$aa^{\dagger}a = [1].[1 \quad 2 \quad -1] = [1 \quad 2 \quad -1] = a,$

(ii) $a^{\dagger}a = \begin{bmatrix} 1/6 \\ 1/3 \\ -1/6 \end{bmatrix}.[1 \quad 2 \quad -1] = \begin{bmatrix} 1/6 & 1/3 & -1/6 \\ 1/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/6 & -1/3 & 1/6 \end{bmatrix}$

$a^{\dagger}aa^{\dagger} = \begin{bmatrix} 1/6 & 1/3 & -1/6 \\ 1/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/6 & -1/3 & 1/6 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 1/6 \\ 1/3 \\ -1/6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/6 \\ 1/3 \\ -1/6 \end{bmatrix} = a^{\dagger},$

(iii) $(aa^{\dagger})^{*} = [1]^{*} = [1] = aa^{\dagger},$

(iv) $(a^{\dagger}a)^{*} = \begin{bmatrix} 1/6 & 1/3 & -1/6 \\ 1/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/6 & -1/3 & 1/6 \end{bmatrix}^{*} = \begin{bmatrix} 1/6 & 1/3 & -1/6 \\ 1/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/6 & -1/3 & 1/6 \end{bmatrix} = a^{\dagger}a$

olduğu görülür.

Teorem 2.10 A herhangi bir matris olmak üzere

$$(A^{*})^{\dagger} = (A^{\dagger})^{*} \tag{2.11}$$

eşitliği geçerlidir (Pringle and Rayner., 1971).

İspat: (2.9) bağıntısındaki gibi $A = BC$ alınsın. Bu durumda $A^{*} = C^{*}B^{*}$ olduğundan,

$$A^{\dagger} = C^{*}(CC^{*})^{-1}(B^{*}B)^{-1}B^{*}$$

ve

$$(A^{\dagger})^{*} = B(B^{*}B)^{-1}(CC^{*})^{-1}C$$

elde edilir ki, bu da A^{*} matrisinin Moore–Penrose inversidir. Gerçekten,

(i) $A^{*}(A^{*})^{\dagger}A^{*} = C^{*}B^{*}B(B^{*}B)^{-1}(CC^{*})^{-1}CC^{*}B^{*} = C^{*}B^{*} = A^{*}$,

(ii) $(A^{*})^{+}A^{*}(A^{*})^{\dagger} = B(B^{*}B)^{-1}(CC^{*})^{-1}CC^{*}B^{*}B(B^{*}B)^{-1}(CC^{*})^{-1}C$

$= B(B^{*}B)^{-1}(CC^{*})^{-1}C = (A^{*})^{\dagger}$,

(iii) $[A^{*}(A^{*})^{\dagger}]^{*} = [(C^{*}B^{*})B(B^{*}B)^{-1}(CC^{*})^{-1}C]^{*} = [C^{*}(CC^{*})^{-1}C]^{*}$

$= C^{*}(CC^{*})^{-1}C = C^{*}(B^{*}B)(B^{*}B)^{-1}(CC^{*})^{-1}C = A^{*}(A^{*})^{\dagger}$,

(iv) $[(A^{*})^{\dagger}A^{*}]^{*} = [B(B^{*}B)^{-1}(CC^{*})^{-1}C(C^{*}B^{*})]^{*} = [B(B^{*}B)^{-1}B^{*}]^{*}$

$= B(B^{*}B)^{-1}B^{*} = B(B^{*}B)^{-1}(CC^{*})^{-1}(CC^{*})B^{*} = (A^{*})^{\dagger}A^{*}$

olur. Böylece, $(A^{*})^{\dagger} = B(B^{*}B)^{-1}(CC^{*})^{-1}C$ elde edilir. Buradan da

$$(A^{*})^{\dagger} = (A^{\dagger})^{*}$$

olduğu görülür ve ispat tamamlanır.

Sonuç 2.1 Bir matrisin Moore–Penrose inversinin Moore–Penrose inversi matrisin kendisine eşittir. Yani, bir A matrisi için, $(A^{\dagger})^{\dagger} = A$ dirr (Pringle and Rayner., 1971).

Teorem 2.11 Herhangi bir A matrisi için $r(A) = r(A^{\dagger})$ eşitliği gerçeklenir (Pringle and Rayner., 1971).

İspat: Teorem 2.7 $AA^{\dagger}A = A$ ve$A^{\dagger}AA^{\dagger} = A^{\dagger}$ eşitliklerine uygulanırsa sırasıyla

$$r(A) = r(AA^{\dagger}A) \leq \min\{r(A),\ r(A^{\dagger})\} \leq r(A^{\dagger})$$

ve

$$r(A^{\dagger}) = r(A^{\dagger}AA^{\dagger}) \leq \min\{r(A),\ r(A^{\dagger})\} \leq r(A)$$

eşitsizlikleri elde edilir. Bu iki eşitsizlikten istenilen sonuç sağlanır.

Bu teoremin sonucu olarak eğer A matrisinin rankı r ise, bu takdirde $A^{\dagger}$, $AA^{\dagger}$, $A^{\dagger}A$, $AA^{\dagger}A$ ve $A^{\dagger}AA^{\dagger}$ matrislerinin her birinin rankının da r olduğu görülür.

Sonuç 2.2 Eğer A simetrik ve idempotent bir matris ise, bu takdirde $A^{\dagger} = A$ dir (Pringle and Rayner., 1971).

Sonuç 2.3 Eğer $B = \text{Köş}\{b_{11}, b_{22}, \dots, b_{nn}\}$ ise, bu takdirde B matrisinin Moore–Penrose inversi $B^{\dagger}$, i–yinci satır ve i–yinci sütunda yer alan köşegen elemanı $b_{ii} \neq 0$ iken b_{ii}^{-1} ve $b_{ii} = 0$ iken 0 olan bir köşegen matristir (Pringle and Rayner., 1971).

Örnek 2.4 $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ şeklinde verilen D matrisinin Moore-Penrose inversi

$$D^{\dagger} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/2 \end{bmatrix}$$

matrisidir. Bu durumda

$$DD^{\dagger} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ve

$$DD^{\dagger}D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} = D$$

olduğu görülür. Diğer üç şartın sağlandığı da benzer şekilde gösterilebilir.

Teorem 2.12 i) A, $m \times n$ matrisi tam satır ranklı ise, $A^{\dagger} = A^{*}(AA^{*})^{-1}$ ve $AA^{\dagger} = I_m$.

ii) A, $m \times n$ matrisi tam sütun ranklı ise, $A^{\dagger} = (A^{*}A)^{-1}A^{*}$ ve $A^{\dagger}A = I_n$ olur (Pringle and Rayner., 1971).

İspat: Her iki durumda $A^{\dagger}$ matrisinin Moore–Penrose şartlarını sağladığını göstermek yeterlidir. Bu durumda,

i) $AA^{\dagger}A = AA^{*}(AA^{*})^{-1}A = (AA^{*})(AA^{*})^{-1}A = A,$

$$A^{\dagger}AA^{\dagger} = A^{*}(AA^{*})^{-1}AA^{*}(AA^{*})^{-1}$$

$$= A^{*}(AA^{*})^{-1}(AA^{*})(AA^{*})^{-1} = A^{*}(AA^{*})^{-1} = A^{\dagger},$$

$$(AA^{\dagger})^{*} = (AA^{*}(AA^{*})^{-1})^{*} = ((AA^{*})(AA^{*})^{-1})^{*} = I^{*} = I$$

$$= (AA^{*})(AA^{*})^{-1} = AA^{*}(AA^{*})^{-1} = AA^{\dagger},$$

$$(A^{\dagger}A)^{*} = (A^{*}(AA^{*})^{-1}A)^{*} = A^{*}(AA^{*})^{-1}A = A^{\dagger}A$$

olacaktır.

ii) $AA^{\dagger}A = A(A^{*}A)^{-1}A^{*}A = A(A^{*}A)^{-1}(A^{*}A) = A,$

$$A^{\dagger}AA^{\dagger} = (A^{*}A)^{-1}A^{*}A(A^{*}A)^{-1}A^{*}$$

$$= (A^{*}A)^{-1}(A^{*}A)(A^{*}A)^{-1}A^{*} = (A^{*}A)^{-1}A^{*} = A^{\dagger},$$

$$(AA^{\dagger})^{*} = (A(A^{*}A)^{-1}A^{*})^{*} = A(A^{*}A)^{-1}A^{*} = AA^{\dagger},$$

$$(A^{\dagger}A)^{*} = ((A^{*}A)^{-1}A^{*}A)^{*} = ((A^{*}A)^{-1}(A^{*}A))^{*} = I^{*} = I$$

$$= (A^{*}A)^{-1}(A^{*}A) = (A^{*}A)^{-1}A^{*}A = A^{\dagger}A$$

dir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Örnek 2.5 2×3 tipindeki bir $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ matrisi alındığında $r(A) = 2$ olduğu açıktır. Yani A tam satır ranklı bir matristir. O halde Teorem 2.11a' dan dolayı

$$A^{\dagger} = A^{*}(AA^{*})^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} . \left(\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \right)^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 9 & 5 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 9/29 & 5/29 \\ 5/29 & 6/29 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 23/29 & 16/29 \\ -4/29 & -1/29 \\ 28/29 & 22/29 \end{bmatrix}$$

olur.

Örnek 2.6 3×2 tipinde bir $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ matrisi verilmiş olsun. Bu durumda $r(A) = 2$ olduğu açıktır. Yani, A tam sütun ranklı bir matristir. O halde Teorem 2.11b' en dolayı

$$A^{\dagger} = (A^{*}A)^{-1}A^{*} = \left(\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} . \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}^{-1} . \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1/3 \\ 1/3 & 2/9 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 7/3 & -2 & 4/3 \\ 8/9 & -2/3 & 5/9 \end{bmatrix}$$

olduğu görülür.

Teorem 2.13 $B \neq 0$ ve $C \neq 0$ olmak üzere B ve C matrisleri sırasıyla $m \times r$ ve $r \times n$ tipinde olmak üzere $r(B) = r(C) = r$ olsun. Bu takdirde,

$$(BC)^{\dagger} = C^{\dagger}B^{\dagger} \tag{2.12}$$

eşitliği sağlanır (Pringle and Rayner., 1971).

İspat: B matrisi sütun ranklı bir matris ve C matrisi ise satır ranklı bir matris olduğundan Teorem 2.12 ye göre

$C^{\dagger} = C^{*}(CC^{*})^{-1}$ ve $B^{\dagger} = (BB^{*})^{-1}B^{*}$ olacaktır ve buradan da

$$C^{\dagger}B^{\dagger} = C^{*}(CC^{*})^{-1}(BB^{*})^{-1}B^{*}$$

elde edilir. Bu ise zaten $(BC)^{\dagger}$ matrisidir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Tanım 2.14 $\mathbb{C}_{m\times n}^{Pl}$, $\mathbb{C}_n^P$, $\mathbb{C}_n^{OP}$, $\mathbb{C}_n^{TM}$ ve $\mathbb{C}_n^{EP}$ kümeleri ile sırasıyla kısmi izometrilerin, izdüşümlerin (idempotent matrislerin), ortogonal izdüşümlerin, (Hermityen idempotent matrislerin), tripotent matrislerin ve EP (ranj-Hermityen) matrislerin kümelerini gösterelim, yani

$$\mathbb{C}_{m\times n}^{Pl} = \{ A \in \mathbb{C}_n^m : AA^*A = A\} = \{A \in \mathbb{C}_n^m : A^\dagger = A^*\}, \tag{2.13}$$

$$\mathbb{C}_n^P = \{A \in \mathbb{C}_n^n : A^2 = A\}, \tag{2.14}$$

$$\mathbb{C}_n^{OP} = \{A \in \mathbb{C}_n^n : A^2 = A = A^*\} = \{A \in \mathbb{C}_n^n : A^2 = A = A^\dagger\}\,, \tag{2.15}$$

$$\mathbb{C}_n^{TM} = \{A \in \mathbb{C}_n^n : A^3 = A\}, \tag{2.16}$$

$$\mathbb{C}_n^{EP} = \{A \in \mathbb{C}_n^n : AA^\dagger = A^\dagger A\} = \{A \in \mathbb{C}_n^n : \mathfrak{R}(A) = \mathfrak{R}(A^*)\}, \tag{2.17}$$

olsun.

Rankı r olan her $A \in \mathbb{C}_n^n$ matrisi $U \in \mathbb{C}_n^n$ uniter matris olmak üzere,

$$A = U\begin{pmatrix} \Sigma K & \Sigma L \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^* \tag{2.18}$$

biçiminde gösterilebilir, burada $\Sigma = \text{köş}\{\sigma_1 I_{r_1} \ldots\ldots \; \sigma_t I_{r_t}\}$ köşegen matrisi A matrisinin singüler değerlerinden oluşan bir köşegen matris, $\sigma_1 > \sigma_2 > \cdots > \sigma_t > 0$ ve $r_1 + r_2 + \cdots + r_t = r$ olmak üzere $K \in \mathbb{C}_{r,r}$ ve $L \in \mathbb{C}_{r,n-r}$ matrisleri

$$KK^* + LL^* = I_r \tag{2.19}$$

eşitliğini sağlar. Burada önemli olan şudur; eğer A matrisi nonsingüler bir matris ise, yani $r = n$ ise (2.18) deki parçalı matrisin alt satırı ve sağ sütunu yok olur ve $V = UK^*$ olmak üzere $A = U\Sigma V^*$ olacaktır. Bu durumda (2.18) eşitliğinden

$$A^\dagger = U\begin{pmatrix} K^*\Sigma^{-1} & 0 \\ L^*\Sigma^{-1} & 0 \end{pmatrix} U^* \tag{2.20}$$

sonucu çıkmaktadır.

3. TERS ÜÇGENSEL MATRİSLERİN DRAZİN İNVERSLERİ

3.1 Bir Matrisin Drazin İnversi ve Blok Matrislerde Drazin İnvers

$\mathbb{C}_n^m$ $m \times n$ tipindeki kompleks matrislerinin kümesi olsun. A^*, $\mathfrak{R}(A)$ ve $r(A)$ sembolleri bir $A \in \mathbb{C}_n^m$ matrisinin sırasıyla, eşlenik devriğini, ranj uzayını (sütun uzayı) ve rankını göstersin. Ayrıca, I_n, n-yinci mertebeden birim matrisi göstersin.

Bir önceki kısımda verilen bir matris genelleştirilmiş inverslerinden özellikle Moore-Penrose inversinden bahsedilmişti. Bilinen anlamda tersi mevcut olmayan kare matrisler için bir diğer bir önemli genelleştirilmiş invers de Drazin inverstir. Bu inversin mevcut olması için matrisin bir kare matris olması gereklidir. Matrislerin drazin inversleri özellikle ikinci mertebeden singüler diferansiyel denklemlerin uygulamalarında, Markov zincirlerinde, kimyasal graf teorisinde ve benzeri alanlarda oldukça yaygın bir şekilde kullanılmaktadır.

Tanım 3.1 Bir $A \in \mathbb{C}_n^n$ kare matrisinin Drazin inversi aşağıdaki üç denklemi sağlayan ve tek türlü mevcut olan bir $A^D \in \mathbb{C}_n^n$ matrisidir:

$$A^D A A^D = A^D,\ AA^D = A^D A,\ A^{k+1} A^D = A^k , \tag{3.1}$$

burada $k,\ r(A^{k+1}) = r(A^k)$ eşitliğini sağlayan en küçük pozitif tam sayıdır. k sayısına A matrisinin indeksi denir ve $k = ind(A)$ ile gösterilir. Açıkça görülür ki $ind(A) = 0$ olması için gerek ve yeter şart A matrisinin nonsingüler olmasıdır. Özel olarak $k = ind(A) = 1$ olduğunda A^D ye $A \in \mathbb{C}_n^n$ matrisinin grup inversi denir ve $A^\#$ ile gösterilir. $A^\pi = I - AA^D$ gösterimi verilmiş olsun.

Drazin inversler üzerine yapılan çalışmaların büyük bir kısmı özellikle A ve D kare matrisleri olmak üzere

$$M = \begin{pmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ C & E \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

biçiminde 2×2 tipindeki blok parçalanmış matrislerin Drazin inversleriyle ilgilidir.

Bu çalışmalarda M blok parçalanmış matrisinin Drazin inversinin A ve E alt kare matrislerinin Drazin inversleri cinsinden ifadeleri ele alınmıştır. Öte yandan bu çalışmalarda en sık rastlanılan durum ise $B = 0$ veya $C = 0$ durumlarına karşılık gelen blok üçgensel matrislerin ele alınmasıdır. Ayrıca A, B, C ve E alt matrislerinin bazı özel durumlarına göre M^D Drazin inversi için çeşitli gösterimler çalışmanın sonundaki kaynaklarda bulunabilir.

Bizim buradaki amacımız $E = 0$ özel durumuna karşılık gelen $A \in \mathbb{C}_n^n, B \in \mathbb{C}_m^n$ ve $C \in \mathbb{C}_n^m$ olmak üzere

$$N = \begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

üst ters üçgensel blok matrisinin $N^D = \begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix}^D$ ile gösterilen Drazin inversini ele almaktır. Öte yandan

$$\begin{pmatrix} 0 & B \\ C & E \end{pmatrix}^D = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & C \\ B & 0 \end{pmatrix}^D \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \tag{3.4}$$

yazılabileceğinden alt ters üçgensel blok matrislerin Drazin inversleri üst ters üçgensel blok matrislerin Drazin inverslerinden elde edilebilir. Bununla ilgili olarak öncelikle aşağıdaki lemmaları verebiliriz.

Lemma 3.1 (Cline Formülü) $A \in \mathbb{C}_n^m$ ve $B \in \mathbb{C}_m^n$ olmak üzere $(BA)^D = B(AB)^{2D}A$ dir (Cline, 1965).

Lemma 3.2 $P, Q \in \mathbb{C}_n^n$, $r = ind(P)$, $s = ind(Q)$ olsun.

(i) Eğer $PQP = 0$ ve $PQ^2 = 0$ ise bu takdirde

$$\begin{aligned}(P+Q)^D = {} & Q^\pi \textstyle\sum_{i=0}^{s-1} Q^i (P^D)^{i+1} + \sum_{i=0}^{r-1} (Q^D)^{i+1} P^i P^\pi \\ & + Q^\pi \textstyle\sum_{i=0}^{s-1} Q^i (P^D)^{i+2} Q + \sum_{i=0}^{r-2} (Q^D)^{i+3} P^{i+1} P^\pi Q \\ & - Q^D P^D Q - Q^{2D} P P^D Q \end{aligned} \tag{3.5a}$$

olacaktır.

(ii) Eğer $QPQ = 0$ ve $P^2Q = 0$ ise bu takdirde

$$\begin{aligned}(P+Q)^D = {} & Q^\pi \textstyle\sum_{i=0}^{s-1} Q^i (P^D)^{i+1} + \sum_{i=0}^{r-1} (Q^D)^{i+1} P^i P^\pi \\ & + P \textstyle\sum_{i=0}^{r-1} (Q^D)^{i+2} P^i P^\pi + P Q^\pi \sum_{i=0}^{s-2} Q^{i+1} (P^D)^{i+3} P \\ & - P Q^D P^D - P Q Q^D P^{2D} \end{aligned} \tag{3.5b}$$

olacaktır (Yang ve Liu, 2011).

Eğer Lemma 3.2 de Q matrisi bir nilpotent matris olarak alınırsa bu takdirde $Q^D = 0$ ve $Q^\pi = I$ olacaktır. Bu durumda aşağıdaki lemma verilebilir.

Lemma 3.3 Eğer $P, Q \in \mathbb{C}_n^n$ olmak üzere Q matrisi nilpotent, $t = ind(Q)$, $PQP = 0$ ve $PQ^2 = 0$ ise bu takdirde

$$(P+Q)^D = \sum_{i=1}^{t-1} Q^i (P^D)^{i+1} + \sum_{i=1}^{t-1} Q^i (P^D)^{i+2} Q \tag{3.6}$$

olacaktır (Yang ve Liu, 2011).

Lemma 3.4 Eğer $A \in \mathbb{C}_n^n$ olmak üzere T matrisi $T = \begin{pmatrix} \mathrm{A} & 0 \\ C & 0 \end{pmatrix}$ formunda ise bu takdirde

$$T^D = \begin{pmatrix} A^D & 0 \\ C(A^D)^2 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.7}$$

olacaktır (Meyer ve Rose, 1977).

Lemma 3.5 Eğer S matrisi $S = \begin{pmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{pmatrix}$ formunda ise bu takdirde

$$S^D = \begin{pmatrix} 0 & (BC)^D B \\ C(BC)^D & 0 \end{pmatrix} \tag{3.8}$$

formundadır. Ayrıca eğer $ind(BC) = r$ ise bu takdirde $ind(M) \leq 2r+1$ olacaktır (Cantral ve Ark., 2009).

Lemma 3.6 Eğer $A \in \mathbb{C}_n^n$, $B \in \mathbb{C}_m^n$ ve $E \in \mathbb{C}_m^m$ olmak üzere Y ve Z matrisleri sırasıyla $Y = \begin{pmatrix} \mathrm{A} & B \\ 0 & E \end{pmatrix}$ ve $Z = \begin{pmatrix} \mathrm{E} & 0 \\ B & A \end{pmatrix}$ formunda verilmiş olsun. Bu takdirde $r = ind(A)$, $s = ind(E)$ ve

$$X = \sum_{i=0}^{s-1} A^{(i+2)D} BE^i E^\pi + A^\pi \sum_{i=0}^{r-1} A^i BE^{(i+2)D} - A^D BE^D$$

olmak üzere

$$Y^D = \begin{pmatrix} A^D & \mathrm{X} \\ 0 & E^D \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad Z^D = \begin{pmatrix} E^D & 0 \\ X & A^D \end{pmatrix} \tag{3.9}$$

olacaktır (Meyer ve Rose, 1977).

Lemma 3.7 A ve E kare matrisler olmak üzere M matrisi $M = \begin{pmatrix} \mathrm{A} & B \\ C & E \end{pmatrix}$ formunda ve $r = ind(A)$, $t = ind(E)$ olsun. Eğer $BC = 0$, $BEC = 0$ ve $BE^2 = 0$ ise bu takdirde $ind(M) \leq r + t + 2$ ve

$$X_k = E^{2D}\sum_{i=1}^{r-1} E^{(i+k)D}\, CA^i A^\pi + E^\pi \sum_{i=1}^{t-1} E^i CA^{(i+k)D}\, A^{2D}$$
$$-\sum_{i=0}^{k} E^{(i+1)D} CA^{(k-i+1)D}$$

olmak üzere

$$M^D = \begin{pmatrix} A^D & A^{3D}(AB+BE) \\ X_0 & E^D + E^{3D}CB + X_2(AB+BE) \end{pmatrix} \tag{3.10}$$

olacaktır (Dopoza ve Ark., 2010).

3.2 Ters Üçgensel Matrislerin Drazin İnversleri

Bu kısımda özellikle $N = \begin{pmatrix} \mathrm{A} & B \\ C & 0 \end{pmatrix}$ ve $\overline{N} = \begin{pmatrix} \mathrm{A} & B \\ I & 0 \end{pmatrix}$ formunda verilen ters üçgensel matrisler için bazı Drazin invers formülleri geliştirilecektir. N matrisinin Drazin inversi hakkında tezin sonunda verilen kaynaklara bakılabilir. $A^e = AA^D$ ve $A^\pi = I - A^e$ olmak üzere $A^e BC = 0$ ve $BCA^\pi = 0$ varsayımları altında N matrisinin Drazin inversi ile ilgili bazı gösterimler Deng ve Wei (2009) tarafından verilmiştir. Ayrıca Deng (2010) $BCA^\pi = 0$ ve $CA^D B$ matrisinni tersinir veya sıfır olması şartları altında N matrisinin Drazin inversi için bazı formüller geliştirmiştir. Dopoza ve Ark. (2010) ise $A^D BCA = 0$, $BCA^\pi B = 0$ ve $BCA^\pi A = 0$ şartları altında N matrisinin Drazin inversi için bazı ifadeler elde etmişlerdir.

Şimdi A^e idempotent olmak üzere özel bir ters üçgensel blok matrisin Drazin inversi göz önüne alınacaktır. Bunun için tekrar $A^e = AA^D$ ve $A^\pi = I - A^e$ olduğunu hatırlayalım. Bu durumda aşağıdaki lemma verilebilir.

Lemma 3.8 A ve B aynı boyuttan kare matrisler olmak üzere eğer $A^e B A^e = 0$ eşitliği sağlanıyorsa bu takdirde

$$\begin{pmatrix} AA^e & B \\ A^e & 0 \end{pmatrix}^D = \begin{pmatrix} A^D + BA^{3D} & A^{2D}B + BA^{4D}B \\ A^{2D} & A^{3D}B \end{pmatrix}$$

olacaktır (Zhang ve Ark., 2022).

İspat. Öncelikle $\begin{pmatrix} AA^e & B \\ A^e & 0 \end{pmatrix}$ matrisini

$$\begin{pmatrix} AA^e & B \\ A^e & 0 \end{pmatrix} = PQ = \begin{pmatrix} I & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} AA^e & 0 \\ 0 & B \\ A^e & 0 \end{pmatrix} \tag{3.11}$$

şeklinde parçalayalım. Bu durumda

$$\alpha = AA^e, \beta = (AA^e, 0)\ \gamma = \begin{pmatrix} 0 \\ A^e \end{pmatrix} \text{ ve } \delta = \begin{pmatrix} 0 & B \\ A^e & 0 \end{pmatrix} \tag{3.12}$$

olmak üzere $QP = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ alalım. Bu takdirde $0 \leq i \leq 3$ için $\delta^i \neq 0$ fakat $j \geq 4$ için $\delta^j = 0$ ve $\delta^2\gamma = 0$ olduğu gösterilebilir. Öte yandan $\delta^D = 0$ ve $\delta^\pi = I$ olduğunu göstermek için Lemma 3.5 kullanılabilir. Ayrıca $\beta\delta^2 = 0$ ve $\beta\delta\gamma = 0$ olduğunu belirtelim. Bu takdirde Lemma 3.7 uygulanırsa

$$\alpha^D = A^D, \quad \alpha^{3D}(\alpha\beta + \beta\gamma) = (A^D, A^{2D}B),$$

$$X_0 = \begin{pmatrix} BA^{3D} \\ A^{2D} \end{pmatrix}, \qquad X_2(\alpha\beta + \beta\gamma) = \begin{pmatrix} BA^{3D} & BA^{4D}B \\ A^{2D} & A^{3D}B \end{pmatrix}$$

olmak üzere

$$(QP)^D = \begin{pmatrix} \alpha^D & \alpha^{3D}(\alpha\beta + \beta\gamma) \\ X_0 & X_2(\alpha\beta + \beta\gamma) \end{pmatrix}$$

yazılabilir. Buradan basit bir hesaplamayla

$$(QP)^{2D} = \begin{pmatrix} A^{2D} & A^{2D} & A^{3D}B \\ BA^{4D} & BA^{4D} & BA^{5D}B \\ A^{3D} & A^{3D} & A^{4D}B \end{pmatrix}$$

olduğu görülebilir. Bu durumda Cline formülü uygulanarak istenilen sonuç elde edilir ve böylece ispat tamamlanmış olur.

Hatırlatma 3.1 A ve B aynı boyuttan kare matrisler olmak üzere eğer $A^eBA^e = 0$ eşitliği sağlanıyorsa, bu takdirde

$$\begin{pmatrix} AA^e & B \\ A^e & 0 \end{pmatrix}^{iD} = \begin{pmatrix} A^{iD} + BA^{(i+2)D} & A^{(i+1)D}\mathrm{B} + \mathrm{B}A^{(i+3)D}\mathrm{B}) \\ A^{(i+1)D} & A^{(i+2)D}B \end{pmatrix} \tag{3.13}$$

olacaktır (Zhang ve Ark., 2022).

Teorem 3.1 A ve B aynı boyuttan kare matrisler olmak üzere $\overline{N} = \begin{pmatrix} A & B \\ I & 0 \end{pmatrix}$ matrisi verilmiş olsun. Bu durumda eğer $A^eBA^e = 0$, $BA^\pi B = 0$ ve $BA^\pi A = 0$ ise, bu takdirde $ind(A) = k$ ve

$$\psi = \sum_{i=0}^{k-1} A^iBA^{(i+3)D} + A^D \tag{3.14}$$

olmak üzere $\overline{N}^D$ matrisi

$$\overline{N}^D = \begin{pmatrix} \psi(I + A^{2D}B) & \psi A^D B \\ \psi A^D(I + A^{2D}B) & \psi A^{2D}B \end{pmatrix}$$

olacaktır (Zhang ve Ark., 2022).

İspat. Bu durumda öncelikle $\overline{N}$ matrisini

$$\overline{N} = \begin{pmatrix} AA^e & B \\ A^e & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} AA^\pi & B \\ A^\pi & 0 \end{pmatrix} = P + Q \quad (3.15)$$

olarak parçalayalım. Bu takdirde pozitif bir i tam sayısı için $Q^i = \begin{pmatrix} A^i A^\pi & 0 \\ A^{i-1}A^\pi & 0 \end{pmatrix}$ matrisini göz önüne alalım ve $ind(Q)$ yu belirleyelim. $k = ind(A)$ olsun. Bu takdirde k nın $A^k A^\pi = 0$ olacak şekildeki en küçük pozitif tam sayı olacağı görülür. Böylece Q matrisi nilpotent olup $k \leq ind(Q) \leq k + 1$ olacaktır. . $s = ind(Q)$ olsun. Bu durumda $QPQ = 0$ ve . $PQ^2 = 0$ olacağı gösterilebilir. Böylece Lemma 3.3 den

$$\overline{N}^D = (P + Q)^D = \sum_{i=0}^{s} Q^i P^{(i+1)D} + \sum_{i=0}^{s} Q^i P^{(i+2)D} Q$$

$$= P^D + P^{2D}Q + \sum_{i=0}^{s-1} Q^{i+1} P^{(i+2)D} + \sum_{i=0}^{s-1} Q^{i+1} P^{(i+3)D} Q$$

olduğu görülebilir. Bu durumda $s - 1 \leq k \leq s$ ve her $i \geq k$ için $A^i A^\pi = 0$ olduğundan $\overline{N}^D$ matrisi

$$\overline{N}^D = P^D + P^{2D}Q + \sum_{i=0}^{k-1} Q^{i+1} P^{(i+2)D} + \sum_{i=0}^{k-1} Q^{i+1} P^{(i+3)D} Q$$

biçiminde verilebilir. Buradan Lemma 3.8 ve Hatırlatma 3.1 birleştirilerek istenilen sonucun sağlandığı görülür ve böylece ispat tamamlanmış olur.

Ayrıca bazı şartlar altında N^D matrisi ile ilgili açık bir ifade verebilmek için N ve $\overline{N}$ matrisleri arasında bir ilişki verilebilir. Bu yolla literatürde verilen bazı sonuçları genelleştirmek mümkün olacaktır.

Teorem 3.2 A ve BC matrisleri aynı boyuttan kare matrisler olmak üzere olmak üzere $N = \begin{pmatrix} \mathrm{A} & B \\ C & 0 \end{pmatrix}$ matrisi verilmiş olsun. Bu durumda eğer

$$A^e BCA^e = 0,\ BCA^\pi BC = 0 \text{ ve } BCA^\pi A = 0$$

eşitlikleri sağlanıyorsa, bu takdirde $ind(A) = k$ olmak üzere

$$N^D = \begin{pmatrix} \psi A^D \Omega[(I + A^{2D}BC)A + A^D BC] & \psi A^D \Omega(I + A^{2D}BC)B \\ C\psi A^{2D}\Omega[(I + A^{2D}BC)A + A^D BC] & C\psi A^{2D}\Omega(I + A^{2D}BC)B \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

olacaktır, burada

$$\psi = \sum_{i=0}^{k-1} A^i BCA^{(i+3)D} + A^D \tag{3.17}$$

ve

$$\Omega = I + A^D BC \sum_{i=1}^{k-1} A^i BCA^{(i+3)D} + BC \sum_{i=1}^{k-1} A^i BCA^{(i+4)D} \tag{3.18}$$

dir (Zhang ve Ark., 2022).

İspat. N matrisini

$$N = PQ = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ I & 0 \end{pmatrix} \tag{3.19}$$

şeklinde parçalayalım. Bu takdirde $QP = \begin{pmatrix} A & BC \\ I & 0 \end{pmatrix}$ olacaktır. Teorem 3.1 e göre $(QP)^D$ matrisi ψ (3.17) de verildiği gibi olmak üzere

$$(QP)^D = \begin{pmatrix} \psi(I + A^{2D}BC) & \psi A^D BC \\ \psi A^D(I + A^{2D}BC) & \psi A^{2D}BC \end{pmatrix}$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu durumda $\psi^2 = \psi A^D$ olup Ω matrisi (3.18) de verildiği gibi olmak üzere

$$(QP)^{2D} = \begin{pmatrix} \psi A^D \Omega(I + A^{2D}BC) & \psi A^D \Omega A^D BC \\ \psi A^{2D} \Omega(I + A^{2D}BC) & \psi A^{2D} \Omega A^D BC \end{pmatrix}$$

olduğu görülebilir. Bunun sonucu olarak da istenilen sonuç elde edilir ve teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Teorem 3.2 nin özel durumları alarak aşağıdaki sonuçlar verilebilir.

Sonuç 3.1 A ve BC matrisleri aynı boyuttan kare matrisler olmak üzere olmak üzere $N = \begin{pmatrix} \mathrm{A} & B \\ C & 0 \end{pmatrix}$ matrisi verilmiş olsun. Bu durumda eğer $A^D BCA = 0,\ BCA^\pi B = 0$ ve $BCA^\pi A = 0$ eşitlikleri sağlanıyorsa, bu takdirde $ind(A) = k$ ve ψ matrisi (3.17) de verildiği gibi olmak üzere

$$N^D = \begin{pmatrix} \psi A^D(A + A^D BC) & \psi A^D B \\ C\psi A^{2D}(A + A^D BC) & C\psi A^{2D} BC \end{pmatrix}$$

olacaktır (Zhang ve Ark., 2022).

İspat. $BCA^\pi B = 0$ yani $BCB = BCA^e B$ olduğundan $A^D BCB = 0$ olduğu görülür. Ayrıca $A^D \Omega = A^D$ olacaktır. Böylece istenilen sonuç elde edilmiş olur.

Sonuç 3.2 A ve BC matrisleri aynı boyuttan kare matrisler olmak üzere olmak üzere $N = \begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix}$ matrisi verilmiş olsun. Bu durumda eğer $A^e BC = 0$, $BCA^\pi = 0$ ve $BCA^\pi A = 0$ eşitlikleri sağlanıyorsa, bu takdirde $ind(A) = k$ olmak üzere

$$N^D = \begin{pmatrix} A^D + \Delta & (A^D + \Delta)A^D B \\ C(A^D + \Delta)A^D & (A^D + \Delta)A^{2D} B \end{pmatrix} \tag{3.20}$$

olacaktır, burada

$$\Delta = \sum_{i=0}^{k-1} A^i BCA^{(i+3)D} \tag{3.21}$$

dir (Zhang ve Ark., 2022).

Sonuç 3.3 A ve BC matrisleri aynı boyuttan kare matrisler olmak üzere olmak üzere $N = \begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix}$ matrisi verilmiş olsun. Bu durumda eğer $BCB = 0$ ve $BCA = 0$ eşitlikleri sağlanıyorsa, bu takdirde

$$N^D = \begin{pmatrix} A^D(I + A^{2D} BC) & A^{2D} B \\ CA^{2D}(I + A^{2D} BC) & CA^{3D} B \end{pmatrix} \tag{3.22}$$

olacaktır (Zhang ve Ark., 2022).

Sonuç 3.4 A ve BC matrisleri aynı boyuttan kare matrisler olmak üzere olmak üzere $N = \begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix}$ matrisi verilmiş olsun. Bu durumda eğer $BC = 0$ eşitliği sağlanıyorsa, bu takdirde

$$N^D = \begin{pmatrix} A^D & A^{2D} B \\ CA^{2D} & CA^{3D} B \end{pmatrix} \tag{3.23}$$

olacaktır (Zhang ve Ark., 2022).

Şimdi $N = \begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix}$ matrisinin Drazin inversi için yukarıda verilen gösterimlerin bir uygulaması olarak (3.2) de verilen $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & E \end{pmatrix}$ matrisini göz önüne alalım. Bu durumda aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.3 A, E ve BC matrisleri kare matrisler ve A ve BC aynı boyuttan olmak üzere $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & E \end{pmatrix}$ ve $N = \begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix}$ matrisleri verilmiş olsun. Eğer

$$A^e BCA^e = 0,\ BCA^\pi BC = 0,\ BCA^\pi A = 0, BEC = 0 \text{ ve } BE^2 = 0$$

eşitlikleri sağlanıyorsa, bu takdirde $ind(N) = r$, $ind(E) = s$ ve N^D, ψ ve Ω matrisleri sırasıyla (3.16), (3.17) ve (3.18) de verildikleri gibi olmak üzere

$$M^D = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & E^\pi \end{pmatrix} \sum_{i=0}^{s-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}^i N^{(i+1)D} \begin{pmatrix} I & \psi A^D \Omega(I + A^{2D}BC)BE \\ 0 & C\psi A^{2D}\Omega(I + A^{2D}BC)BE \end{pmatrix}$$

$$+ \sum_{i=0}^{r-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E^{(i+1)D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & \mathrm{B} \\ C & 0 \end{pmatrix}^i$$

$$\times \begin{pmatrix} I - (A\psi + BC\psi A^D)A^D\Omega[(I + A^{2D}BC)A + A^DBC] & -(A\psi + BC\psi A^D)A^D\Omega(I + A^{2D}BC)B \\ -C\psi A^D\Omega[(I + A^{2D}BC)A + A^DBC] & I - C\psi A^D\Omega(I + A^{2D}BC)B \end{pmatrix}$$

$$+ \sum_{i=0}^{r-2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E^{(i+3)D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & \mathrm{B} \\ C & 0 \end{pmatrix}^{i+1} \begin{pmatrix} 0 & -(A\psi + BC\psi A^D)A^D\Omega(I + A^{2D}BC)BE \\ 0 & [I - C\psi A^D\Omega(I + A^{2D}BC)B]E \end{pmatrix}$$

$$- \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E^DC\psi A^{2D}\Omega(I + A^{2D}BC)BE + E^{2D}C\psi A^D\Omega(I + A^{2D}BC)BE \end{pmatrix} \tag{3.24}$$

olacaktır (Zhang ve Ark., 2022).

İspat. Bu durumda $N = \begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix}$ ve $Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}$ olmak üzere M matrisi $M = N + Q$ yazılabilir. Bu durumda da

$$Q^D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E^D \end{pmatrix} \text{ ve } Q^\pi = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & E^\pi \end{pmatrix}$$

olacağından Teorem 3.2 ye göre N^D (3.16) daki gibi verilebilir ve

$$N^\pi = \begin{pmatrix} I - (A\psi + BC\psi A^D)A^D\Omega[(I + A^{2D}BC)A + A^DBC] & -(A\psi + BC\psi A^D)A^D\Omega(I + A^{2D}BC)B \\ -C\psi A^D\Omega[(I + A^{2D}BC)A + A^DBC] & I - C\psi A^D\Omega(I + A^{2D}BC)B \end{pmatrix}$$

olacaktır. Öte yandan $NQN = 0$ ve $NQ^2 = 0$ olduğundan Lemma 3.2 ye göre istenilen sonuç elde edilir ve böylece ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 3.5 A, E ve BC matrisleri kare matrisler ve A ve BC aynı boyuttan olmak üzere $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & E \end{pmatrix}$ ve $N = \begin{pmatrix} \mathrm{A} & B \\ C & 0 \end{pmatrix}$ matrisleri verilmiş olsun. Eğer $A^eBC = 0$, $BCA^\pi = 0$, $BEC = 0$ ve $BE^2 = 0$ eşitlikleri sağlanıyorsa, bu takdirde $ind(N) = r$, $ind(E) = s$ ve N^D ve Δ matrisleri sırasıyla (3.20) ve (3.21) de verildikleri gibi olmak üzere

$$M^D = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & E^\pi \end{pmatrix} \sum_{i=0}^{s-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}^i N^{(i+1)D} \begin{pmatrix} I & A^{2D}B + \Delta A^DBE \\ 0 & I + C(A^D + \Delta)A^{2D}BE \end{pmatrix}$$

$$+ \sum_{i=0}^{r-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E^{(i+1)D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix}^i$$

$$\times\begin{pmatrix} I-AC(A^D+\Delta)-BC(A^{2D}+\Delta A^D) & -(A\psi+BC\psi A^D)A^D\Omega(I+A^{2D}BC)B \\ -C(A^D+\Delta) & I-C(A^D+\Delta)A^DB \end{pmatrix}$$

$$+\sum_{i=0}^{r-2}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E^{(i+3)D} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix}^{i+1}\begin{pmatrix} 0 & -[I+A\Delta+BC(A^D+\Delta)A^D]A^DB \\ 0 & [I-C(A^D+\Delta)A^DB]E \end{pmatrix}$$

$$-\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E^D[C(A^D+\Delta)A^D+E^DC(A^D+\Delta)]A^DBE \end{pmatrix} \tag{3.25}$$

olacaktır (Zhang ve Ark., 2022).

Sonuç 3.6 A, E ve BC matrisleri kare matrisler ve A ve BC aynı boyuttan olmak üzere $M=\begin{pmatrix} A & B \\ C & E \end{pmatrix}$ ve $N=\begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix}$ matrisleri verilmiş olsun. Eğer $A^eBC=0$, $BCA^\pi=0$ ve $BE=0$ eşitlikleri sağlanıyorsa, bu takdirde $ind(N)=r$, $ind(E)=s$ ve N^D ve Δ matrisleri sırasıyla (3.20) ve (3.21) de verildikleri gibi olmak üzere

$$M^D=\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & E^\pi \end{pmatrix}\sum_{i=0}^{s-1}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}^i N^{(i+1)D}+\sum_{i=0}^{r-1}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E^{(i+1)D} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix}^i$$

$$\times\begin{pmatrix} I-A(A^D+\Delta)-BC(A^D+\Delta)A^D & -[I+A\Delta+BC(A^D+\Delta)A^D]A^DB \\ -C(A^D+\Delta) & I-C(A^D+\Delta)A^DB \end{pmatrix} \tag{3.26}$$

olacaktır (Zhang ve Ark., 2022).

Sonuç 3.7 A, E ve BC matrisleri kare matrisler ve A ve BC aynı boyuttan olmak üzere $M=\begin{pmatrix} A & B \\ C & E \end{pmatrix}$ ve $N=\begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix}$ matrisleri verilmiş olsun. Eğer $BCA=0$, $BCB=0$, $BEC=0$ ve $BE^2=0$ eşitlikleri sağlanıyorsa, bu takdirde $ind(N)=r$, $ind(E)=s$ ve N^D ve Δ matrisleri sırasıyla (3.20) ve (3.21) de verildikleri gibi olmak üzere

$$M^D=\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & E^\pi \end{pmatrix}\sum_{i=0}^{s-1}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}^i N^{(i+1)D}\begin{pmatrix} I & A^{2D}BE \\ 0 & I+CA^{3D}BE \end{pmatrix}$$

$$+\sum_{i=0}^{r-1}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E^{(i+1)D} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix}^i\begin{pmatrix} A^\pi-A^{2D}BC & -A^DB \\ -CA^D(\mathrm{I}+A^{2D}BC) & I-CA^{2D}B \end{pmatrix}$$

$$+\sum_{i=0}^{r-2}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E^{(i+3)D} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix}^{i+1}\begin{pmatrix} 0 & -A^DBE \\ 0 & (I-CA^{2D})E \end{pmatrix}$$

$$-\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E^D(CA^D+E^DC)A^{2D}BE \end{pmatrix} \tag{3.27}$$

olacaktır (Zhang ve Ark., 2022).

Sonuç 3.8 A, E ve BC matrisleri kare matrisler ve A ve BC aynı boyuttan olmak üzere $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & E \end{pmatrix}$ ve $N = \begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix}$ matrisleri verilmiş olsun. Eğer $BC = 0$ ve $BE = 0$ eşitlikleri sağlanıyorsa, bu takdirde $ind(N) = r$ ve $ind(E) = s$ olmak üzere

$$M^D = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & E^\pi \end{pmatrix} \sum_{i=0}^{s-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}^i \begin{pmatrix} A^D & A^{2D}B \\ CA^{2D} & CA^{3D}B \end{pmatrix}^{i+1}$$

$$+ \sum_{i=0}^{r-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E^{(i+1)D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix}^i \begin{pmatrix} A^\pi & -A^D B \\ -CA^D & I - CA^{2D}B \end{pmatrix}$$

olacaktır (Zhang ve Ark., 2022).

Teorem 3.4 A, E ve BC matrisleri kare matrisler ve A ve BC aynı boyuttan olmak üzere $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & E \end{pmatrix}$ ve $N = \begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix}$ matrisleri verilmiş olsun. Eğer $A^e BCA^e = 0$, $BCA^\pi BC = 0$, $BCA^\pi A = 0$, $ECA = 0$ ve $ECB = 0$ eşitlikleri sağlanıyorsa, bu takdirde $ind(N) = r$, $ind(E) = s$ ve N^D, ψ ve Ω matrisleri sırasıyla (3.16), (3.17) ve (3.18) de verildikleri gibi olmak üzere

$$M^D = \begin{pmatrix} I - (A\psi + BC\psi A^D)A^D\Omega[(I + A^{2D}BC)A + A^D BC] & -(A\psi + BC\psi A^D)A^D\Omega(I + A^{2D}BC)B \\ -C\psi A^D\Omega[(I + A^{2D}BC)A + A^D BC] & I - C\psi A^D \Omega(I + A^{2D}BC)B \end{pmatrix}$$

$$\times \sum_{i=0}^{r-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E^{(i+1)D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & \mathrm{B} \\ C & 0 \end{pmatrix}^i$$

$$+ \sum_{i=0}^{s-1} N^{(i+1)D} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}^i \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & E^\pi \end{pmatrix} + \sum_{i=0}^{s-2} N^{(i+3)D} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ E^{(i+1)}E^\pi C & 0 \end{pmatrix}$$

$$- \begin{pmatrix} -\psi A^D \Omega(I + A^{2D}BC)BE^D C & 0 \\ C\psi A^{2D}\Omega(I + A^{2D}BC)BE^D C & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ EE^D C & 0 \end{pmatrix} \qquad (3.28)$$

olacaktır (Zhang ve Ark., 2022).

İspat. N ve Q matrisleri teorem 3.3. deki gibi olmak üzere $QNQ = 0$ ve $QN^2 = 0$ olduğundan Teorem 3.2 ve Lemma 3.2 uygulanırsa istenilen sonuç elde edilir ve böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.4 uygulanarak bazı varsayımlar altında Mparçalanmış matrisinin Drazin invers formülleri ile ilgili olarak aşağıdaki verilebilir.

Sonuç 3.9 A, E ve BC matrisleri kare matrisler ve A ve BC aynı boyuttan olmak üzere $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & E \end{pmatrix}$ ve $N = \begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix}$ matrisleri verilmiş olsun. Eğer $BCA = 0$, $BCB = 0$,

$ECA = 0$ ve $ECB = 0$ eşitlikleri sağlanıyorsa, bu takdirde $ind(N) = r$, $ind(E) = s$ ve N^D matrisi (3.22) de verildiği gibi olmak üzere

$$M^D = \begin{pmatrix} A^\pi - A^{2D}BC & -A^DBC \\ -CA^D[(I + A^{2D}BC) & I - CA^{2D}B \end{pmatrix}$$

$$\times \sum_{i=0}^{r-1} \begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix}^i \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ E^{(i+2)D}C & E^{(i+1)D} \end{pmatrix}$$

$$+ \sum_{i=0}^{s-1} N^{(i+1)D} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}^i \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & E^\pi \end{pmatrix} + \sum_{i=0}^{s-2} N^{(i+3)D} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ E^{(i+1)}E^\pi C & 0 \end{pmatrix}$$

$$- \begin{pmatrix} -A^{2D}BE^DC & 0 \\ CA^{3D}BE^DC & 0 \end{pmatrix} - N^{2D} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ EE^DC & 0 \end{pmatrix} \tag{3.29}$$

olacaktır (Zhang ve Ark., 2022).

Sonuç 3.10 A, E ve BC matrisleri kare matrisler ve A ve BC aynı boyuttan olmak üzere $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & E \end{pmatrix}$ ve $N = \begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix}$ matrisleri verilmiş olsun. Eğer $A^eBC = 0$, $BCA^\pi = 0$, $ECA = 0$ ve $ECB = 0$ eşitlikleri sağlanıyorsa, bu takdirde $ind(N) = r$, $ind(E) = s$ ve N^D ve Δ matrisleri sırasıyla (3.20) ve (3.21) de verildikleri gibi olmak üzere

$$M^D = \begin{pmatrix} A^\pi - A\Delta - \mathrm{BC}(A^D + \Delta)A^D & -(I - A\Delta + \mathrm{BC}(A^D + \Delta)A^D)A^DB \\ -CA^D(I + \Delta) & I - C(A^DB + \Delta)A^DB \end{pmatrix}$$

$$\times \sum_{i=0}^{r-1} \begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix}^i \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ E^{(i+2)D}C & E^{(i+1)D} \end{pmatrix}$$

$$+ \sum_{i=0}^{s-1} N^{(i+1)D} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}^i \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E^\pi \end{pmatrix} + \sum_{i=0}^{s-2} N^{(i+3)D} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ E^{(i+1)}E^\pi C & 0 \end{pmatrix}$$

$$- \begin{pmatrix} -(I + A\Delta + \mathrm{BC}(A^D + \Delta)A^D)A^DBE^DC & 0 \\ C(A^DB + \Delta A^DB)E^DC & 0 \end{pmatrix} - N^{2D} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ EE^DC & 0 \end{pmatrix} \tag{3.30}$$

olacaktır (Zhang ve Ark., 2022).

Sonuç 3.11 A, E ve BC matrisleri kare matrisler ve A ve BC aynı boyuttan olmak üzere $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & E \end{pmatrix}$ ve $N = \begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix}$ matrisleri verilmiş olsun. Eğer $A^eBC = 0$, $BCA^\pi = 0$ ve $EC = 0$ eşitlikleri sağlanıyorsa, bu takdirde $ind(N) = r$, $ind(E) = s$ ve N^D ve Δ matrisleri sırasıyla (3.20) ve (3.21) de verildikleri gibi olmak üzere

$$M^D = \begin{pmatrix} A^\pi - A\Delta - \mathrm{BC}(A^D + \Delta)A^D & -(I - A\Delta + \mathrm{BC}(A^D + \Delta)A^D)A^DB \\ -CA^D(I + \Delta) & I - C(A^D + \Delta)A^DB \end{pmatrix}$$

$$\times \sum_{i=0}^{r-1} \begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix}^i \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E^{(i+1)D} \end{pmatrix}$$

$$+ \sum_{i=0}^{s-1} N^{(i+1)D} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}^i \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & E^{\pi} \end{pmatrix} \tag{3.31}$$

olacaktır (Zhang ve Ark., 2022).

Sonuç 3.12 A, E ve BC matrisleri kare matrisler ve A ve BC aynı boyuttan olmak üzere $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & E \end{pmatrix}$ ve $N = \begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix}$ matrisleri verilmiş olsun. Eğer $BC = 0$ ve $EC = 0$ eşitlikleri sağlanıyorsa, bu takdirde $ind(N) = r$, $ind(E) = s$ olmak üzere

$$M^D = \begin{pmatrix} A^{\pi} & -A^D B \\ -CA^D & I - C(A^D + \Delta)A^D B \end{pmatrix} \sum_{i=0}^{r-1} \begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix}^i \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E^{(i+1)D} \end{pmatrix}$$

$$+ \sum_{i=0}^{s-1} N^{(i+1)D} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}^i \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E^{\pi} \end{pmatrix}$$

olacaktır (Zhang ve Ark., 2022).

Şimdi yukarıda verilen sonuçların uygulandığı bazı örnekleri göz önüne alalım. İlk olarak Teorem 3.2 nin şartlarının sağlandığı aşağıdaki matrisleri alalım ve M^D Drazin inversini hesaplayalım.

Örnek 3.1 4×4 tipinde A, B ve C matrisleri

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ ve } C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

olarak verilsin. Bu durumda $A^d = 0$ olacağı açıktır. Öte yandan

$$BCA^{\pi} = BC = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$$

ve

$$BCA^{\pi}B = BCB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 12 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$$

olduğu kolayca gösterilebilir. Ayrıca $A^e BCA^e = 0$, $BCA^{\pi}BC = 0$ ve $BCA^{\pi}A = 0$ eşitliklerinin sağlandığı görülebilir. Böylece Teorem 3.2 uygulanırsa

$$N^D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^D = 0$$

olduğu görülür.

Örnek 3.2 Şimdi de Teorem 3.3 ü uygulamak için Örnek 3.1 de verilen A, B ve C matrislerini göz önüne alalım ve E matrisi de

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

olarak verilsin. Bu durumda $BC \neq 0$ olduğu açıktır.

Ayrıca $BE^2 = 0$ ve $BEC = 0$ eşitliklerinin sağlanacağı görülebilir. Bu durumda Teorem 3.3 e göre

$$M^D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}^D = 0$$

olduğu elde edilir.

Örnek 3.3 Şimdi de Teorem 3.3 ü uygulamak için tekrar Örnek 3.1 de verilen 4×4 tipindeki A, B ve C matrislerini göz önüne alalım. Ancak bu sefer E matrisini biraz değiştirelim ve

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

olarak verilsin. Bu takdirde $E = E^2 = E^{\#}$ ve $BE = 0$ eşitliklerinin sağlandığı kolayca gösterilebilir. Dolayısıyla Teorem 3.3 e göre M^D Drazin inversinin

$$M^D = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&2&0&0&0 \\ 1&0&0&0&0&2&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0&2&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 3&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&3&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&3&0&1&1&1&1 \end{pmatrix}^D = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 24&3&3&0&7&7&1&1 \end{pmatrix}$$

olduğu elde edilir. Öte yandan $M^D = M^4$ ve $ind(M^4) = 4$ olup

$$M^\pi = \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&1&0 \\ -24&-3&-3&0&-7&-7&-1&0 \end{pmatrix}$$

olduğu görülebilir.

3.3 Ters Üçgensel Matrislerin Drazin İnversi için Bazı Karakterizasyonlar

Bu kısımda $A \in \mathbb{C}_n^n$, $B \in \mathbb{C}_m^n$ ve $C \in \mathbb{C}_n^m$ olmak üzere aşağıdaki şekilde verilen M üst ters üçgensel blok matrisinin Drazin inversi için bazı karakterizasyonlar verilecektir:

$$N = \begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix} \tag{3.32}$$

Bununa ilgili olarak öncelikle N^D inversinin A^D ve $(BC)^D$ inversleri cinsinden bazı ifadeleri verilecektir. Daha sonra A matrisinin drazin inversi cinsinden M^D için açık ifadeler verilecek ve son olarak alışılmış invers için bilinen bazı formüller Drazin inverslere genişletilecektir. Aşağıdaki teoremi vererek başlayabiliriz.

Teorem 3.5 N matrisi (3.32) formunda verilmiş olsun. Bu takdirde eğer $ABCA^\pi = 0$ ve $AA^DBC = 0$ eşitlikleri sağlanıyorsa, bu takdirde $ind(A) = r,\ ind(BC) = s$ ve $\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor$ de $\frac{r}{2}$ sayısının tam kısmı olmak üzere

$$N^D = \begin{pmatrix} \psi A & \psi B \\ C\psi & C\psi A^D B \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (BC)^D \Phi ABC & 0 \\ 0 & C(BC)^D \Phi (A - BCA^D) B \end{pmatrix} \tag{3.33}$$

olacaktır, burada

$$\psi = (A^D)^2 + \sum_{j=1}^{s}(BC)^j(BC)^\pi\Gamma(A^D)^{2j+2} + \Phi(\mathrm{I}-\Gamma) - (BC)^D\Phi ABCA^D,$$

$$\Gamma = \sum_{n=0}^{r-1} A^n BC(A^D)^{n+2},$$

$$\Phi = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor}((BC)^D)^{k+1}A^{2k}A^\pi \tag{3.34}$$

dir (Zhang ve Ark., 2022).

İspat. Bu durumda M matrisini

$$N = \begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ CAA^D & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A^\pi & 0 \end{pmatrix} := P + Q$$

olarak yazalım. $Q^2 = 0$ olacağı görülür. Öte yandan $ABCA^\pi = 0$ olduğundan $P^2Q = 0$ olacaktır. Bu nedenledir ki

$$\begin{aligned}(P+Q)^D &= \sum_{j=0}^{\upsilon_1-1}\left((PQ)^j(PQ)^\pi + \mathrm{Q}(PQ)^j(PQ)^\pi P^D\right)(P^D)^{2j+1} \\ &\quad + \sum_{k=0}^{\upsilon_2-1}(((PQ)^D)^{k+1}P + Q((PQ)^D)^{k+1})\, P^{2k}P^\pi \\ &= (X_1+X_2)P + Q(X_1+X_2)\end{aligned} \tag{3.35}$$

yazılabilir, burada $\upsilon_1 = ind(PQ)$, $\upsilon_2 = ind(P^2)$ olmak üzere

$$X_1 = \sum_{j=0}^{\upsilon_1-1}(PQ)^j(PQ)^\pi(P^D)^{2j+1}, X_2 = \sum_{k=0}^{\upsilon_2-1}((PQ)^D)^{k+1}\, P^{2k}P^\pi \tag{3.36}$$

dir. İspatın devamı için $AA^DBC = 0$ eşitliğinden direkt olarak türetilen $A^DBC = 0$, $A^D(BC)^D = 0$, $A^\pi BC = BC$ ve $A^\pi(BC)^D = (BC)^D$ eşitlikleri kullanılacaktır. Açıkça görülür ki PQ çarpımı $PQ = \begin{pmatrix} BCA^\pi & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ olarak yazılabilir. Buradan Cline formülüne göre $(BCA^\pi)^D = BC((A^\pi BC)^2)^DA^\pi = BC((BC)^2)^DA^\pi = (BC)^DA^\pi$ eşitliği ve bunun sonucunda da

$$((PQ)^D)^k = \begin{pmatrix} ((BC)^D)^kA^\pi & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ k \geq 1 \tag{3.37}$$

elde edilir. Ayrıca $(BCA^\pi)^\pi = I - BC(BC)^DA^\pi$ yazılabileceğinden

$$(PQ)^\pi = \begin{pmatrix} I - BC(BC)^DA^\pi & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix},$$

$$(PQ)^i(PQ)^\pi = \begin{pmatrix} (BC)^j(BC)^\pi A^\pi & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, j \geq 1 \tag{3.38}$$

olduğu görülür. Şimdi P^D yi elde edebiliriz. Öncelikle P nin ters üçgensel olduğunu belirtelim. Bu durumda $\tilde{C} = CAA^D$ olmak üzere $B\tilde{C}A^{\pi} = 0$ ve $AA^DB\tilde{C} = 0$ olduğundan P nin Γ (3.34) de verildiği gibi olmak üzere

$$P^D = \begin{pmatrix} (I+\Gamma)A^D & (I+\Gamma)(A^D)^2B \\ C(A^D)^2 & C(A^D)^3B \end{pmatrix}$$

şeklinde olacağı görülür. Öte yandan tümevarımla

$$(P^D)^j = \begin{pmatrix} (I+\Gamma)(A^D)^j & (I+\Gamma)(A^D)^{j+1}B \\ C(A^D)^{j+1} & C(A^D)^{j+2}B \end{pmatrix}, j \geq 1 \tag{3.39}$$

olduğu gösterilebilir. Ayrıca gerekli hesaplamalar yapılarak

$$P^{\pi} = \begin{pmatrix} A^{\pi} - \Gamma & -(I+\Gamma)A^DB \\ -CA^D & I - C(A^D)^2B \end{pmatrix}$$

$$P^{2k}P^{\pi} = \begin{pmatrix} A^{2k-1}(AA^{\pi} - \Gamma\mathrm{A}) & A^{2k-2}(AA^{\pi} - \Gamma\mathrm{A})\mathrm{B} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, k \geq 1 \tag{3.40}$$

olduğu gösterilebilir. (3.38) ve (3.39) ifadeleri (3.36) da X_1 için verilen ifadede yerine yazılırsa

$$ind(BC) = s \text{ ve } \Lambda = \sum_{j=0}^{s-1}(BC)^j(BC)^{\pi}\Gamma(A^D)^{2j}$$

olmak üzere

$$X_1 = \begin{pmatrix} (I+\Lambda)(A^D)^2 & (I+\Lambda)(A^D)^3B \\ C(A^D)^3 & C(A^D)^4B \end{pmatrix} \tag{3.41}$$

olduğu görülür. Benzer şekilde (3.37), (3.40) ve $\Gamma A = BCA^D + A\Gamma$ eşitliği dikkate alınırsa (3.36) da verilen X_2 değeri Γ, Φ yukarıda verildiği gibi olmak üzere

$$X_2 = \begin{pmatrix} \Phi(I-\Gamma) - (BC)^D\Phi BCA^D & ((BC)^D\Phi(A - (BC + ABCA^D)A^D - \Phi\Gamma A^D)B \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.42}$$

olduğu elde edilir. Buradan $\Phi A^D = 0$ olduğundan (3.41) ve (3.42) den ψ (3.34) de verildiği gibi olmak üzere

$$X_1 + X_2 = \begin{pmatrix} \psi & (\psi - (BC)^D\Phi BC)A^DB + (BC)^D\Phi AB \\ C(A^D)^3 & C(A^D)^4B \end{pmatrix} \tag{3.43}$$

olduğu görülür. Bu durumda (3.43) eşitliği (3.35) de yerine yazılıp $(A^D)^2 + A^{\pi}\psi = \psi$ eşitliği kullanılırsa istenilen sonuç elde edilir ve böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 3.13 N matrisi (3.32) formunda verilmiş olsun.

(i) Eğer $ABC = 0$ eşitliği sağlanıyorsa, bu takdirde $ind(A) = r$, $ind(BC) = s$, $\Phi = \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor} \left((BC)^D\right)^{k+1} A^{2k} A^{\pi}$ ve $\psi = \sum_{j=0}^{s-1} (BC)^j (BC)^{\pi} \Gamma (A^D)^{2j+2}$ olmak üzere

$$N^D = \begin{pmatrix} \psi A & \psi B \\ C\psi & C\psi^2 AB \end{pmatrix}$$

olacaktır.

(ii) BCA^{π} matrisi nilpotent bir matris olsun ve $ABCA^{\pi} = 0$ ve $AA^D BC = 0$ eşitlikleri sağlansın. Bu takdirde $ind(A) = r$, $ind(BC) = s$, $\Phi = \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor} \left((BC)^D\right)^{k+1} A^{2k} A^{\pi}$ ve $\psi = (A^D)^2 + \sum_{j=0}^{s-1} (BC)^j \Gamma (A^D)^{2j+2}$ olmak üzere

$$N^D = \begin{pmatrix} \psi A & \psi B \\ C\psi & C\psi A^D B \end{pmatrix} \tag{3.44}$$

olacaktır.

(iii) Eğer $BCA^{\pi} = 0$ ve $AA^D BC = 0$ ise, bu takdirde $ind(A) = r$, $ind(BC) = s$, $\Phi = \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor} \left((BC)^D\right)^{k+1} A^{2k} A^{\pi}$ ve $\psi = (I + \Gamma)(A^D)^2$ olmak üzere N^D (3.44) de verildiği gibidir (Zhang ve Ark., 2022).

Teorem 3.6 N matrisi (3.32) formunda verilmiş olsun. Bu takdirde eğer $A^{\pi} BCA = 0$ ve $BCAA^D = 0$ eşitlikleri sağlanıyorsa, bu takdirde $ind(A) = r$, $ind(BC) = s$ olmak üzere

$$N^D = \begin{pmatrix} A\widehat{\psi} & \widehat{\psi} B \\ C\widehat{\psi} & CA^D \widehat{\psi} B \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} BCA\widehat{\Phi}(BC)^D & 0 \\ 0 & C(A - A^D BC)\widehat{\Phi}(BC)^D B \end{pmatrix}$$

olacaktır, burada

$$\widehat{\psi} = (A^D)^2 + \sum_{j=1}^{s} (A^D)^{2j+2} \widehat{\Gamma} (BC)^j (BC)^{\pi} + \left(\mathrm{I} - \widehat{\Gamma}\right)\widehat{\Phi} - A^D BCA\widehat{\Phi}(BC)^D ,$$

$$\widehat{\Gamma} = \sum_{n=0}^{r-1} (A^D)^{n+2} BCA^n,$$

$$\widehat{\Phi} = \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor} A^{2k} A^{\pi} \left((BC)^D\right)^{k+1}$$

dir (Zhang ve Ark., 2022).

Teorem 3.7 N matrisi (3.32) deki gibi verilmiş olsun. Eğer $BCAA^{\pi} = 0$, $BCA^{\pi}B = 0$ ve $A^D BCA = 0$ eşitlikleri sağlanıyorsa, bu takdirde $ind(A) = r$ olmak üzere

$$N^D = \begin{pmatrix} \psi A(I + (A^D)^2)BC & \psi B \\ C\psi(I + (A^D)^2)BC & C\psi A^D B \end{pmatrix} \tag{3.45}$$

olacaktır, burada

$$\psi = (A^D)^2 + \sum_{n=0}^{r-1} A^n BC(A^D)^{n+4} \tag{3.46}$$

dir (Zhang ve Ark., 2022).

İspat. Bu durumda N matrisini

$$N = \begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ CAA^D & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A^\pi & 0 \end{pmatrix} := P + Q$$

olarak yazalım. $Q^2 = 0$ olacağı görülür. Öte yandan $BCA^\pi A = 0$ ve $BCA^\pi B = 0$ olduğundan $PQP = 0$ olacaktır. Bu nedenledir ki

$$N^D = P^D + Q(P^D)^2 + (P^D)^2 Q + Q(P^D)^3 Q \tag{3.47}$$

yazılabilir. Şimdi P^D yi elde edebiliriz. Öncelikle P nin ters üçgensel olduğunu belirtelim. Bu durumda $\tilde{C} = CAA^D$ olmak üzere $B\tilde{C}A^\pi = 0$ ve $AA^D B\tilde{C} = 0$ olduğundan P matrisinin

$$\psi = (A^D)^2 + \sum_{n=0}^{r-1} A^n BC(A^D)^{n+4} \text{ ve } ind(A) = r$$

olmak üzere

$$P^D = \begin{pmatrix} \psi A & \psi B \\ C(A^D)^2 & C(A^D)^3 B \end{pmatrix}$$

şeklinde olacağı görülür. Öte yandan tümevarımla

$$(P^D)^j = \begin{pmatrix} \psi(A^D)^{j-1} & \psi(A^D)^{j-1}B \\ C(A^D)^{j+1} & C(A^D)^{j+2}B \end{pmatrix}, j \geq 1$$

olduğu gösterilebilir. Ayrıca gerekli hesaplamalar yapılarak

$$Q(P^D)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ CA^\pi \psi & CA^\pi \psi A^D B \end{pmatrix}, \quad (P^D)^2 Q = \begin{pmatrix} \psi A^D BC & 0 \\ C(A^D)^4 BC & 0 \end{pmatrix}$$

$$Q(P^D)^3 Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ CA^\pi \psi (A^D)^2 BC & 0 \end{pmatrix}$$

olduğu görülür. Bu ifadeler (3.47) de yerlerine istenilen sonuç elde edilir ve böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 3.14 N matrisi (3.32) formunda verilmiş olsun.

(i) Eğer $CAA^{\pi} = 0, CA^{\pi}B = 0$ ve $A^{D}BCA = 0$ eşitlikleri sağlanıyorsa, bu takdirde ψ (3.46) tanımlandığı gibi olmak üzere

$$N^{D} = \begin{pmatrix} \psi A(I + (A^{D})^{2}BC) & \psi B \\ C(A^{D})^{2}(I + (A^{D})^{2}BC) & C(A^{D})^{3}B \end{pmatrix}$$

olacaktır.

(ii) $CAA^{\pi} = 0$, $CA^{\pi}B = 0$ ve $A^{D}BC = 0$ bu bu takdirde ψ (3.46) tanımlandığı gibi olmak üzere

$$N^{D} = \begin{pmatrix} \psi A & \psi B \\ C(A^{D})^{2} & C(A^{D})^{3}B \end{pmatrix}$$

olacaktır.

(iii) $CA^{\pi} = 0$ ve $AA^{D}B = 0$ bu takdirde $ind(A) = r$ olmak üzere

$$N^{D} = \begin{pmatrix} A^{D} + \sum_{n=0}^{r-1} A^{n}BC\left(A^{D}\right)^{n+3} & 0 \\ C(A^{D})^{2} & 0 \end{pmatrix}$$

olacaktır (Zhang ve Ark., 2022).

Teorem 3.8 N matrisi (3.32) formunda verilmiş olsun. Bu takdirde eğer $AA^{\pi}BC = 0$, $CA^{\pi}BC = 0$ ve $ABCA^{D} = 0$ eşitlikleri sağlanıyorsa, bu takdirde

$ind(A) = r$ ve $\hat{\psi} = (A^{D})^{2} + \sum_{n=0}^{r-1}(A^{D})^{n+2}BCA^{n}$

olmak üzere

$$N^{D} = \begin{pmatrix} (I + BC(A^{D})^{2})A\hat{\psi} & (I + BC(A^{D})^{2})\hat{\psi}B \\ C\hat{\psi} & CA^{D}\hat{\psi}B \end{pmatrix}$$

olacaktır (Zhang ve Ark., 2022).

Teorem 3.9 N matrisi (3.32) formunda verilmiş olsun. Bu takdirde

$$N^{D} = \begin{pmatrix} 0 & (BC)^{D}B \\ C(BC)^{D} & -C(BC)^{D}A(BC)^{D}B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & B(CB)^{D}B \\ (CB)^{D}C & -(CB)^{D}CAB(CB)^{D} \end{pmatrix} \quad (3.48)$$

olması için gerek ve yeter şart

$$(BC)^{\pi}A(BC)^{D}B = 0, \quad C(BC)^{D}A(BC)^{\pi} = 0 \quad (3.49)$$

ve $\begin{pmatrix} A(BC)^{\pi} & (BC)^{\pi}B \\ C(BC)^{\pi} & 0 \end{pmatrix}$ nın bir nilpotent matris olmasıdır (Zhang ve Ark., 2022).

İspat. $X = \begin{pmatrix} 0 & (BC)^D B \\ C(BC)^D & -C(BC)^D A(BC)^D B \end{pmatrix}$ matrisi verilmiş olsun. Bu durumda

$$NX = \begin{pmatrix} BC(BC)^D & (BC)^\pi A(BC)^D B \\ 0 & C(BC)^D B \end{pmatrix}$$

ve

$$XN = \begin{pmatrix} BC(BC)^D & 0 \\ C(BC)^D A(BC)^\pi & C(BC)^D B \end{pmatrix}$$

olduğu görülür. Bu takdirde $NX = XN$ olması için gerek ve yeter şart (3.49) eşitliklerinin sağlanmasıdır. Buradan basit bir hesaplamayla $XNX = X$ olduğu görülür. Öte yandan (3.49) daki şartlar altında

$$N - N^2X = \begin{pmatrix} A(BC)^\pi & (BC)^\pi B \\ C(BC)^\pi & 0 \end{pmatrix} \tag{3.50}$$

olduğu gösterilebilir. Bu nedenle $N - N^2X$ in bir nilpotent matris olması için gerek ve yeter şart (3.50) nin sağ tarafındaki matrisin nilpotent olmasıdır. Dolayısıyla $X = N^D$ olduğu görülür.

Şimdi X için verilen ifadeden ve $(BC)^D B = B(CB)^D$ ve $C(BC)^D = (CB)^D C$ eşitliklerini de dikkate alarak (3.48) ifadesinde verilen M^D nin $(CB)^D$ cinsinden ifadesi türetilebilir. Bu ise ispatı tamamlar.

Sonuç 3.15 N matrisi (3.32) formunda verilmiş olsun. Bu takdirde eğer $(BC)^\pi A = 0$ ve $A(BC)^\pi = 0$ eşitlikleri sağlanıyorsa M^D Drazin inversi (3.48) deki forma sahiptir (Zhang ve Ark., 2022).

Sonuç 3.16 A, B matrisleri kare matrisler olsun. Bu takdirde eğer $ABA^\pi = 0$ ve $AA^D B = 0$ eşitlikleri sağlanıyorsa, bu takdirde $ind(A) = r,\ ind(B) = s$ olmak üzere

$$\begin{pmatrix} A & B \\ I & 0 \end{pmatrix}^D = \begin{pmatrix} \psi A + B^D \Phi AB & \Phi B \\ -\psi & CB^D \Phi AB \end{pmatrix}$$

olacaktır, burada

$$\psi = (A^D)^2 + \sum_{j=1}^{s} (-1)^{j+1} B^j B^\pi \Gamma (A^D)^{2j+2} + \Phi(\mathrm{I} + \Gamma) - B^D \Phi ABA^D \ ,$$

$$\Gamma = \sum_{n=0}^{r-1} A^n B (A^D)^{n+2},$$

$$\Phi = \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor} (-1)^{k+1} (B^D)^{k+1} A^{2k} A^\pi$$

dir (Zhang ve Ark., 2022).

Sonuç 3.17 $A^2 = A$ olmak üzere N matrisi (3.32) de verildiği gibi olsun. Bu takdirde eğer $BCA^{\pi}B = 0$ ve $ABCA = 0$ eşitlikleri sağlanıyorsa, bu

$$N^D = \begin{pmatrix} (A+BC)^2 & (\mathrm{A}+\mathrm{BC})B \\ C(A+BC)^2 & C(\mathrm{A}+\mathrm{BC})B \end{pmatrix}$$

olacaktır (Zhang ve Ark., 2022).

3.4 Ters Üçgensel Matrisin Drazin İnversi için Bazı Sonuçlar

Bu kısımda $A \in \mathbb{C}_n^n$, $B \in \mathbb{C}_m^n$ ve $C \in \mathbb{C}_n^m$ olmak üzere aşağıdaki şekilde verilen M ters üçgensel blok matrisinin Drazin inversi için bazı yeni gösterimler verilecektir.

$$N = \begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}_{n+m}^{n+m} \tag{3.51}$$

Bunun için öncelikle B matrisinin singüler değer ayrışımını tekrar verelim. Bu durumda $r = r(B)$ ve $\Delta \in \mathbb{C}_r^r$ olmak üzere

$$UBV^* = \begin{pmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.52}$$

olacak şekilde $U \in \mathbb{C}_n^n$ ve $V \in \mathbb{C}_m^m$ üniter matrislerinin mevcut olduğu bilinmektedir. $B^{\Omega} = I - BB^{\dagger}$ ve $B^{\mathrm{Z}} = I - B^{\dagger}B$ gösterimleri verilsin. $A_1, C_1 \in \mathbb{C}_r^r$ olmak üzere

$$UAU^* = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}, \quad VAU^* = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix} \tag{3.53}$$

olduğunu varsayalım. Bu takdirde

$$N = \Phi\widetilde{N}\Phi^*, \; M^D = \Phi(\widetilde{N})^D\Phi^* \tag{3.54}$$

yazılabilir, burada

$$\widetilde{N} = \begin{pmatrix} A_1 & \Delta & A_2 & 0 \\ C_1 & 0 & C_2 & 0 \\ A_3 & 0 & A_4 & 0 \\ C_3 & 0 & C_4 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.55}$$

olup

$$\Phi = \begin{pmatrix} U^* & 0 \\ 0 & V^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{pmatrix}$$

matrisi bir üniter matristir. Şimdi aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.10 N matrisi (3.51) formunda verilsin. Eğer $r(BCB) = r(B)$ ve $B^{\Omega} = I - BB^{\dagger}$ olmak üzere $B^{\Omega}AB = 0$ ise bu takdirde

$$N^{D} = \begin{pmatrix} F & E \\ B^{\dagger} + B^{Z}CEB^{\dagger} + B^{Z}CF^{2} & -B^{Z}CEB^{\dagger}AE - B^{\dagger}AE \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B^{Z}C & 0 \end{pmatrix} Y \begin{pmatrix} F & E \\ B^{\dagger} & -B^{\dagger}AE \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} I & 0 \\ B^{Z}CF & B^{Z}CE + I \end{pmatrix} Y + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B^{Z}C & 0 \end{pmatrix} Y^{2}$$

dir, burada $E = (B^{\dagger}BCBB^{\dagger})^{\dagger}$, $F = (B^{\Omega}A)^{D},\ l = ind(B^{\Omega}A)$ ve

$$Y = \sum_{i=0}^{l-1} \begin{pmatrix} 0 & E \\ B^{\dagger} & -B^{\dagger}AE \end{pmatrix}^{i+2} \begin{pmatrix} BB^{\dagger}A(B^{\Omega}A)^{i}(B^{\Omega}A)^{\pi}B^{\Omega} & 0 \\ B^{\dagger}BC(B^{\Omega}A)^{i}(B^{\Omega}A)^{\pi}B^{\Omega} & 0 \end{pmatrix}$$

$$- \begin{pmatrix} ECF & 0 \\ B^{\dagger}AF - B^{\dagger}AECF & 0 \end{pmatrix}$$

şeklindedir (Bu ve Ark., 2013).

İspat. $B^{\Omega}AB = 0$ ve $r(BCB) = r(B)$ olduğundan (3.52) ve (3.53) ifadeleri dikkate alınırsa $A_3 = 0$ ve C_1 matrisinin tersinir olduğu görülür. Öte yandan (3.55) e göre $\widetilde{M}$

$$A_0 = \begin{pmatrix} A_1 & \Delta & A_2 \\ C_1 & 0 & C_2 \\ 0 & 0 & A_4 \end{pmatrix} \text{ ve } B_0 = (C_3 \quad 0 \quad C_4)$$

olmak üzere

$$\widetilde{N} = \begin{pmatrix} A_1 & \Delta & A_2 & 0 \\ C_1 & 0 & C_2 & 0 \\ A_3 & 0 & A_4 & 0 \\ C_3 & 0 & C_4 & 0 \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} A_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B_0 & 0 \end{pmatrix} =: \tilde{A} + \tilde{B}$$

olarak parçalanabilir. Bu durumda Lemma 3.4 uygulanırsa

$$(\widetilde{N})^{D} = \begin{pmatrix} A_0 & 0 \\ B_0 & 0 \end{pmatrix}^{D} = (\tilde{A})^{D} + \tilde{B}((\tilde{A})^{D})^{2}, \qquad (3.56)$$

olduğu görülür. Şimdi A_0 matrisini

$$N_1 = \begin{pmatrix} A_1 & \Delta \\ C_1 & 0 \end{pmatrix},\ N_2 = \begin{pmatrix} A_2 \\ C_2 \end{pmatrix} \text{ ve } N_4 = A_4$$

olmak üzere

$$A_0 = \begin{pmatrix} A_1 & \Delta & A_2 \\ C_1 & 0 & C_2 \\ 0 & 0 & A_4 \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} N_1 & N_2 \\ 0 & N_4 \end{pmatrix}$$

şeklinde parçalayalım. Bu durumda C_1 tersinir olduğundan N_1 de tersinir olacaktır. Bu durumda Lemma 3.5 uygulanırsa $l = ind(N_4)$ ve

$$X = \sum_{i=0}^{l-1} (N_1^{-1})^{i+2} N_2 N_4^i N_4^\pi - N_1^{-1} N_2 N_4^D$$

olmak üzere

$$(A_0)^D = \begin{pmatrix} N_1^{-1} & X \\ 0 & N_4^D \end{pmatrix}^D$$

olduğu görülebilir. Buradan da

$$(\tilde{A})^D = \begin{pmatrix} A_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^D = \begin{pmatrix} N_1^{-1} & X & 0 \\ 0 & N_4^D & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

elde edilir. Bu durumda (3.54) ve (3.56) eşitliklerinden

$$N^D = \Phi(\widetilde{N})^D \Phi^* = \Phi(\tilde{A})^D \Phi^* + \Phi(\tilde{B})((\tilde{A})^D)^2 \Phi^* \tag{3.57}$$

yazılabilir. Öte yandan $\Phi(\tilde{A})^D \Phi^*$ ifadesini

$$\Phi(\tilde{A})^D \Phi^* = \Phi \begin{pmatrix} N_1^{-1} & X & 0 \\ 0 & N_4^D & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Phi^* = \widetilde{N_1} + \tilde{X} + \overline{N_4} \tag{3.58}$$

olarak yeniden yazalım, burada

$$\tilde{X} = \sum_{i=0}^{l-1} \left(\widetilde{N_1}\right)^{i+2} \widetilde{N_2} \left(\widetilde{N_4}\right)^i \widehat{N_4} - \widetilde{N_1} \widetilde{N_2} \overline{N_4} \tag{3.59}$$

$$\widetilde{N_1} = \Phi \begin{pmatrix} N_1^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Phi^*, \widetilde{N_2} = \Phi \begin{pmatrix} 0 & N_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Phi^*, \ \widetilde{N_4} = \Phi \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Phi^*,$$

$$\overline{N_4} = \Phi \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (N_4)^D & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Phi^*, \ \widehat{N_4} = \Phi \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (N_4)^\pi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Phi^*$$

şeklindedir. Bu takdirde basit hesaplamalarla kolaylıkla gösterilebilir ki $E = (B^\dagger BCBB^\dagger)^\dagger$, $F = (B^\Omega A)^D$ olmak üzere

$$\widetilde{N_1} = \begin{pmatrix} 0 & E \\ B^\dagger & -B^\dagger AE \end{pmatrix}, \ \widetilde{N_2} = \begin{pmatrix} BB^\dagger AB^\Omega & 0 \\ B^\dagger BCB^\Omega & 0 \end{pmatrix}, \ \widetilde{N_4} = \begin{pmatrix} B^\Omega A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overline{N_4} = \begin{pmatrix} F & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \widehat{N_4} = \begin{pmatrix} (B^{\Omega}A)^{\pi}B^{\Omega} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

şeklindedir. Öte yandan $B^{\Omega}AB = 0$ olduğundan $(B^{\Omega}A)^D = (B^{\Omega}AB^{\Omega})^D$ olacaktır. Elde edilen bu ifadeler (3.58) deki yerlerine yazılırsa

$$\Phi(\tilde{A})^D\Phi^* = \begin{pmatrix} F & E \\ B^{\dagger} & -B^{\dagger}AE \end{pmatrix} + Y$$

olduğu görülür, burada $l = ind(B^{\Omega}A)$ ve

$$Y = \sum_{i=0}^{l-1} \begin{pmatrix} 0 & E \\ B^{\dagger} & -B^{\dagger}AE \end{pmatrix}^{i+2} \begin{pmatrix} BB^{\dagger}A(B^{\Omega}A)^i(B^{\Omega}A)^{\pi}B^{\Omega} & 0 \\ B^{\dagger}BC(B^{\Omega}A)^i(B^{\Omega}A)^{\pi}B^{\Omega} & 0 \end{pmatrix}$$

$$- \begin{pmatrix} ECF & 0 \\ B^{\dagger}AF - B^{\dagger}AECF & 0 \end{pmatrix}$$

dir. Benzer şekilde

$$\Phi(\tilde{B})^D\Phi^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B^Z C & 0 \end{pmatrix} \tag{3.61}$$

ve

$$\Phi(\tilde{B})((\tilde{A})^D)^2\Phi^* = \Phi(\tilde{B})\Phi^*\Phi(\tilde{A})^D\Phi^*\Phi(\tilde{A})^D\Phi^* \tag{3.62}$$

yazılabileceğinden (3.60) ve (3.61) ifadeleri (3.62) de yerlerine yazılırsa

$$\Phi(\tilde{B})((\tilde{A})^D)^2\Phi^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B^Z C & 0 \end{pmatrix} Y \begin{pmatrix} F & E \\ B^{\dagger} & -B^{\dagger}AE \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} I & 0 \\ B^Z CF & B^Z CE + I \end{pmatrix} Y$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B^Z C & 0 \end{pmatrix} Y^2 + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B^Z CEB^{\dagger} + B^Z CF^2 & -B^Z CEB^{\dagger}AE \end{pmatrix} \tag{3.63}$$

olduğu görülür. Böylece (3.60) ve (3.63) ifadeleri (3.57) deki yerlerine yazılarak

$$N^D = \begin{pmatrix} F & E \\ B^{\dagger} + B^Z CEB^{\dagger} + B^Z CF^2 & -B^Z CEB^{\dagger}AE - B^{\dagger}AE \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B^Z C & 0 \end{pmatrix} Y \begin{pmatrix} F & E \\ B^{\dagger} & -B^{\dagger}AE \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} I & 0 \\ B^Z CF & B^Z CE + I \end{pmatrix} Y + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B^Z C & 0 \end{pmatrix} Y^2$$

olduğu elde edilir ki bu da ispatı tamamlar.

$C = B^*$ olması özel durumunda $N = \begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix}$ matrisi için Teorem 3.10 dan aşağıdaki sonuç elde edilebilir.

Sonuç 3.18 $N = \begin{pmatrix} A & B \\ B^* & 0 \end{pmatrix}$ matrisi verilsin. Eğer $B^\Omega AB = 0$ ise bu takdirde

$$N^D = \sum_{i=0}^{l-1} \begin{pmatrix} 0 & (B^*)^\dagger \\ B^\dagger & -B^\dagger A(B^*)^\dagger \end{pmatrix}^{i+2} \begin{pmatrix} BB^\dagger A(B^\Omega A)^i (B^\Omega A)^\pi B^\Omega & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} (B^\Omega A)^D & (B^*)^\dagger \\ B^\dagger + B^\dagger A(B^\Omega A)^D & -B^\dagger A(B^*)^\dagger \end{pmatrix} \tag{3.64}$$

olacaktır, burada $l = ind(B^\Omega A)$ dir (Bu ve Ark., 2013).

Sonuç 3.18 den aşağıdaki sonuç kolaylıkla elde edilebilir.

Sonuç 3.19 $N = \begin{pmatrix} A & B^* \\ B & 0 \end{pmatrix}$ matrisi verilsin. Eğer $(B^*)^\Omega A = 0$ ise bu takdirde

$$N^D = \begin{pmatrix} 0 & B^\dagger \\ (B^*)^\dagger & -(B^*)^\dagger AB^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{I} & 0 \\ (B^*)^\dagger A(B^*)^\Omega & I \end{pmatrix} \tag{3.65}$$

olacaktır (Bu ve Ark., 2013).

Teorem 3.9 da verilen gösterimi açıklamak için bir örnek verilebilir.

Örnek 3.4 N matrisi

$$N = \begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0.5 & 0 & 2.5 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

olsun. Burada

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

ve

$$C = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 2.5 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \end{pmatrix}$$

şeklindedir. Bu durumda gerekli hesaplamalar yapılırsa

$$Y = \begin{pmatrix} -0.5 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.5 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0.25 & 0 & -0.25 & 0 & 0 \\ -0.25 & 0 & 0.25 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

olduğu gösterilebilir. Buradan da Teorem 3.9 kullanılarak

$$N^D = \begin{pmatrix} -0.5 & 0 & 0.5 & 0.5 & -0.5 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ -0.5 & 0 & 0.5 & 0.5 & -0.5 \\ 1.5 & 0 & 0 & -1.5 & 1.5 \\ 0.5 & 0 & 0 & -0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$$

elde edilir.

Bu kısmın devamında $N = \begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix}$ ve $\overline{N} = \begin{pmatrix} A & B \\ I & 0 \end{pmatrix}$ biçiminde verilen ters üçgensel matrisler için bazı Drazin inversleri için bazı yeni şartlar altında bazı formüller geliştirilecektir. N^D Drazin inversin gösterimlerini ortaya koymak için ilk olarak $A^3B = 0$, $BAB = 0$ ve $BA^2B = 0$ şartları altında $\overline{N}$ matrisinin Drazin inversi elde edilecektir. Bununla ilgili olarak aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.11 A ve B aynı boyuttan kare matrisler olmak üzere $ind(A) = r$ ve $ind(B) = s$ olsun ve $\overline{N} = \begin{pmatrix} A & B \\ I & 0 \end{pmatrix}$ matrisi verilsin. Eğer

$$A^3B = 0,\ BAB = 0 \ \text{ ve } \ BA^2B = 0$$

eşitlikleri sağlanıyorsa, bu takdirde

$$\overline{N}^D = \begin{pmatrix} E_1 & A^2B^D + BB^D \\ E_3 & AB^D \end{pmatrix} \tag{3.66}$$

olacaktır, burada

$$E_1 = AB^\pi \sum_{i=0}^{s-1} B^i A^{(2i+2)D} + A^2B^\pi \sum_{i=0}^{s-1} B^i A^{(2i+3)D} + B^\pi \sum_{i=0}^{s-1} B^i A^{(2i+1)D}$$

$$+A^2 \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor} B^{(i+1)D} A^{2i-1} A^\pi + A \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor} B^{(i+1)D} A^{2i} A^\pi + \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor} B^{iD} A^{2i-1} A^\pi$$

$$-A^2B^DA^D - 2A^D$$

$$E_3 = B^\pi \sum_{i=0}^{s-1} B^i A^{(2i+2)D} + AB^\pi \sum_{i=0}^{s-1} B^i A^{(2i+3)D} + A^2B^\pi \sum_{i=0}^{s-1} B^i A^{(2i+4)D}$$

$$+\sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor} B^{(i+1)D} A^{2i} A^\pi + A \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor} B^{(i+1)D} A^{2i-1} A^\pi + A^2 \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor} B^{(i+2)D} A^{2i} A^\pi$$

$$-AB^DA^D - A^2B^DA^{2D} - 2A^{2D}$$

dir (Zhang ve Ark., 2022a).

İspat. İspat için öncelikle $\overline{N}^2$ matrisini

$$\overline{N}^2 = \begin{pmatrix} A^2 + B & AB \\ A & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^2 & 0 \\ A & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B & AB \\ 0 & B \end{pmatrix} \coloneqq P + Q$$

şeklinde parçalayalım. Bu durumda Lemma 3.6 ya göre

$$P^D = \begin{pmatrix} A^{2D} & 0 \\ A^{3D} & 0 \end{pmatrix} \text{ ve } Q^D = \begin{pmatrix} B^D & AB^D \\ 0 & B^D \end{pmatrix}$$

olduğu görülür. Bu takdirde

$$P^\pi = \begin{pmatrix} A^\pi & 0 \\ -A^D & I \end{pmatrix} \text{ ve } Q^\pi = \begin{pmatrix} B^\pi & -AB^e \\ 0 & B^\pi \end{pmatrix}$$

yazılabilir. Öte yandan $n \geq 1$ için

$$P^n = \begin{pmatrix} A^{2n} & 0 \\ A^{2n-1} & 0 \end{pmatrix} \text{ ve } Q^n = \begin{pmatrix} B^n & AB^n \\ 0 & B^n \end{pmatrix}$$

ve

$$P^{nD} = \begin{pmatrix} A^{(2n)D} & 0 \\ A^{(2n-1)D} & 0 \end{pmatrix} \text{ ve } Q^{nD} = \begin{pmatrix} B^{nD} & AB^{nD} \\ 0 & B^{nD} \end{pmatrix}$$

olduğu tümevarımla gösterilebilir.

Ayrıca $ind(A) = r$ ve $ind(B) = s$ olduğundan r ve s sayıları sırasıyla $A^r A^\pi = 0$ ve $B^s B^\pi = 0$ olacak şekildeki en küçük pozitif tam sayılardır. Bu nedenle herhangi bir negatif olmayan r tamsayısı için

$$r - 2 \leq 2\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor - 1 \leq r - 1, \; r - 1 \leq 2\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor \leq r \text{ ve } r \leq 2\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor + 1 \leq r + 1$$

eşitsizlikleri gerçeklenir.

Öte yandan $i \geq 1$ olmak üzere

$$P^i P^\pi = \begin{pmatrix} A^{2i} & 0 \\ A^{2i-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^\pi & 0 \\ -A^D & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{2i} A^\pi & 0 \\ A^{2i-1} A^\pi & 0 \end{pmatrix}$$

ve

$$Q^i Q^\pi = \begin{pmatrix} B^i & AB^i \\ 0 & B^i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B^\pi & -AB^e \\ 0 & B^\pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^i B^\pi & AB^i B^\pi \\ 0 & B^i B^\pi \end{pmatrix}$$

olacaktır. Dolayısıyla $ind(P) = \left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor$ ve $ind(Q) = s$ olduğu görülür. Bu durumda Lemma 3.2 nin $P^2 Q = 0$ ve $QPQ = 0$ varsayımları sağlandığından (3.5b) deki gibi aşağıdaki terimler hesaplanabilir:

$$Q^{\pi}\sum_{i=0}^{s-1}Q^{i}P^{(i+1)D}$$

$$=\begin{pmatrix} B^{\pi}\sum_{i=0}^{s-1}B^{i}A^{(2i+2)D}+A\sum_{i=1}^{s-1}B^{i}A^{(2i+3)D}-AB^{e}\sum_{i=0}^{s-1}B^{i}A^{(2i+3)D} & 0\\ B^{\pi}\sum_{i=0}^{s-1}B^{i}A^{(2i+3)D} & 0\end{pmatrix},$$

$$\sum_{i=0}^{\left\lfloor\frac{r}{2}\right\rfloor}Q^{(i+1)D}P^{i}P^{\pi}$$

$$=\begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{\left\lfloor\frac{r}{2}\right\rfloor}B^{(i+1)D}A^{2i}A^{\pi}+A\sum_{i=1}^{\left\lfloor\frac{r}{2}\right\rfloor}B^{(i+1)D}A^{2i-1}A^{\pi}-AB^{D}A^{D} & AB^{D}\\ B^{\pi}\sum_{i=1}^{\left\lfloor\frac{r}{2}\right\rfloor}B^{(i+1)D}A^{2i}A^{\pi} & 0\end{pmatrix},$$

$$P\sum_{i=0}^{\left\lfloor\frac{r}{2}\right\rfloor}Q^{(i+2)D}P^{i}P^{\pi}$$

$$=\begin{pmatrix} A^{2}\sum_{i=0}^{\left\lfloor\frac{r}{2}\right\rfloor}B^{(i+2)D}A^{2i}A^{\pi} & 0\\ A\sum_{i=0}^{\left\lfloor\frac{r}{2}\right\rfloor}B^{(i+2)D}A^{2i}A^{\pi}+A^{2}\sum_{i=1}^{\left\lfloor\frac{r}{2}\right\rfloor}B^{(i+2)D}A^{2i-1}A^{\pi}-A^{2}B^{2D}A^{D} & A^{2}B^{2D}\end{pmatrix},$$

$$PQ^{\pi}\sum_{i=0}^{s-2}Q^{i+1}P^{(i+3)D}$$

$$=\begin{pmatrix} A^{2}B^{\pi}\sum_{i=1}^{s-2}B^{i+1}A^{(2i+6)D} & 0\\ AB^{\pi}\sum_{i=0}^{s-2}B^{i+1}A^{(2i+6)D}+A^{2}B^{\pi}\sum_{i=0}^{s-2}B^{i+1}A^{(2i+7)D} & 0\end{pmatrix},$$

$$PQ^{D}P^{D}=\begin{pmatrix} A^{2}B^{D}A^{2D} & 0\\ AB^{D}A^{2D}+A^{2}B^{D}A^{3D} & 0\end{pmatrix}$$

ve

$$PQQ^{D}P^{2D}=\begin{pmatrix} A^{2}BB^{D}A^{4D} & 0\\ ABB^{D}A^{4D}+A^{2}BB^{D}A^{5D} & 0\end{pmatrix}.$$

Bu durumda elde edilen bu ifadeler (3.5b) eşitliğindeki yerlerine yazılırsa

$$\overline{N}^{2D}=(P+Q)^{D}=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$$

elde edilir, burada

$$\alpha=B^{\pi}\sum_{i=0}^{s-1}B^{i}A^{(2i+2)D}+A\sum_{i=1}^{s-1}B^{i}A^{(2i+3)D}$$

$$-AB^{e}\sum_{i=0}^{s-1}B^{i}A^{(2i+3)D}+A^{2}B^{\pi}\sum_{i=0}^{s-2}B^{i+1}A^{(2i+6)D}$$

$$+A\sum_{i=0}^{\left\lfloor\frac{r}{2}\right\rfloor}B^{(i+1)D}A^{2i-1}A^{\pi}+A^{2}\sum_{i=1}^{\left\lfloor\frac{r}{2}\right\rfloor}B^{(i+2)D}A^{2i}A^{\pi}+\sum_{i=1}^{\left\lfloor\frac{r}{2}\right\rfloor}B^{(i+1)D}A^{2i}A^{\pi}$$

$$-A^{2}B^{D}A^{2D}-A^{2}BB^{D}A^{4D}-AB^{D}A^{D},$$

$$\beta = AB^D,$$

$$\gamma = B^\pi \sum_{i=0}^{s-1} B^i A^{(2i+3)D} + AB^\pi \sum_{i=1}^{s-2} B^{i+1} A^{(2i+6)D} + A^2 B^\pi \sum_{i=0}^{s-2} B^{i+1} A^{(2i+7)D}$$

$$+ \sum_{i=1}^{\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor} B^{(i+1)D} A^{2i-1} A^\pi + A \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor} B^{(i+2)D} A^{2i} A^\pi + A^2 \sum_{i=1}^{\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor} B^{(i+2)D} A^{2i-1} A^\pi$$

$$-AB^D A^{2D} - A^2 B^D A^{3D} - ABB^D A^{4D} - A^2 BB^D A^{5D} - A^2 B^{2D} A^D - B^D A^D ,$$

$$\delta = B^D + A^2 B^{2D}$$

olacaktır. Buradan $\bar{N}^D = \bar{N}\bar{N}^{2D}$ matrisi hesaplanırsa

$$\bar{N}^D = \begin{pmatrix} E_1 & E_3 \\ E_3 & E_4 \end{pmatrix}$$

elde edilir, burada E_1, E_2, E_3 ve E_4 matrisleri

$$E_1 = AB^\pi \sum_{i=1}^{s-1} B^i A^{(2i+2)D} + A^2 \sum_{i=1}^{s-1} B^i A^{(2i+3)D} - A^2 B^e \sum_{i=0}^{s-1} B^i A^{(2i+3)D}$$

$$+B^\pi \sum_{i=0}^{s-1} B^{i+1} A^{(2i+3)D} + A^2 \sum_{i=1}^{\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor} B^{(i+1)D} A^{2i-1} A^\pi + \sum_{i=1}^{\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor} B^{iD} A^{2i-1} A^\pi$$

$$+A \sum_{i=1}^{\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor} B^{(i+1)D} A^{2i} A^\pi - A^2 B^D A^D + B^e A^D ,$$

$$E_2 = A^2 B^D + BB^D ,$$

$$E_3 = B^\pi \sum_{i=0}^{s-1} B^i A^{(2i+2)D} + A \sum_{i=1}^{s-1} B^i A^{(2i+3)D} - AB^e \sum_{i=0}^{s-1} B^i A^{(2i+3)D}$$

$$+A^2 B^\pi \sum_{i=0}^{s-1} B^{i+1} A^{(2i+3)D} + A \sum_{i=1}^{\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor} B^{(i+1)D} A^{2i-1} A^\pi + A^2 \sum_{i=1}^{\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor} B^{(i+2)D} A^{2i} A^\pi$$

$$+ \sum_{i=1}^{\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor} B^{(i+1)D} A^{2i} A^\pi - A^2 B^D A^{2D} - A^2 BB^D A^{4D} - AB^D A^D ,$$

$$E_4 = AB^D$$

şeklindedir. Bu durumda karşılık gelen toplamların alt ve üst sınırları uygun bir şekilde düzenlenerek istenilen sonuç elde edilir ve böylece de ispat tamamlanır.

Direkt olarak gerekli hesaplamalar yapılarak Teorem 3.11 den aşağıdaki sonuç kolaylıkla elde edilir.

Sonuç 3.20 A ve B aynı boyuttan kare matrisler olmak üzere $ind(A) = r$ ve $ind(BC) = s$ olsun ve $\bar{N} = \begin{pmatrix} A & B \\ I & 0 \end{pmatrix}$ matrisi verilsin. Eğer $A^2 B = 0$ ve $BAB = 0$ ise, bu takdirde

$$\overline{N}^D = \begin{pmatrix} E_1 & BB^D \\ E_3 & AB^D \end{pmatrix} \tag{3.67}$$

olacaktır, burada

$$E_1 = AB^\pi \sum_{i=0}^{s-1} B^i A^{(2i+2)D} + B^\pi \sum_{i=0}^{s-1} B^i A^{(2i+1)D}$$

$$+A \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor} B^{(i+1)D} A^{2i} A^\pi + \sum_{i=1}^{\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor} B^{iD} A^{2i-1} A^\pi - A^D$$

$$E_3 = B^\pi \sum_{i=0}^{s-1} B^i A^{(2i+2)D} + AB^\pi \sum_{i=0}^{s-1} B^i A^{(2i+3)D}$$

$$+ \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor} B^{(i+1)D} A^{2i} A^\pi + A \sum_{i=1}^{\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor} B^{(i+1)D} A^{2i-1} A^\pi - AB^D A^D - A^{2D}$$

dir (Zhang ve Ark., 2022a).

$\overline{N}$ matrisinin Drazin inversinden yararlanarak N matrsinin Drazin inversi için yeni bir ifade aşağıdaki teoremde verilmiştir.

Teorem 3.12 A ve BC aynı boyuttan kare matrisler olmak üzere $ind(A) = r$ ve $ind(BC) = s$ olsun ve $N = \begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix}$ matrisi verilsin. Bu durumda eğer

$$A^3BC = 0, BCABC = 0 \text{ ve } BCA^2BC = 0$$

eşitlikleri sağlanıyorsa, bu takdirde

$$N^D = \begin{pmatrix} F_1 & F_3 \\ F_3 & F_4 \end{pmatrix} \tag{3.68}$$

olacaktır, burada

$$F_1 = A(BC)^\pi \sum_{i=0}^{s-1} (BC)^i A^{(2i+2)D} + A^2 (BC)^\pi \sum_{i=0}^{s-1} (BC)^i A^{(2i+3)D}$$

$$+(BC)^\pi \sum_{i=0}^{s-1} (BC)^i A^{(2i+1)D} + A^2 \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor} (BC)^{(i+2)D} A^{2i+1} A^\pi$$

$$+A \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor} (BC)^{(i+1)D} A^{2i} A^\pi + \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor} (BC)^{(i+1)D} A^{2i+1} A^\pi - A^2 (BC)^D A^D - 2A^D,$$

$$F_2 = A(BC)^\pi \sum_{i=0}^{s-1} (BC)^i A^{(2i+3)D} + (BC)^\pi \sum_{i=0}^{s-1} (BC)^i A^{(2i+2)D} B$$

$$+A^2 (BC)^\pi \sum_{i=0}^{s-1} (BC)^i A^{(2i+4)D} + A \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor} (BC)^{(i+1)D} A^{2i-1} A^\pi B$$

$$+A^2 \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor} (BC)^{(i+2)D} A^{2i} A^\pi B + \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor} (BC)^{(i+1)D} A^{2i} A^\pi B$$

$$-2A^{2D}B - A^2(BC)^D A^{2D}B - A(BC)^D A^D B,$$

$$F_3 = CA(BC)^\pi \sum_{i=0}^{s-1}(BC)^i A^{(2i+3)D} + CA^2 \sum_{i=0}^{s-1}(BC)^i (BC)^\pi A^{(2i+4)D}$$

$$+C(BC)^\pi \sum_{i=0}^{s-1}(BC)^i A^{(2i+2)D} + C\sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor}(BC)^{(i+1)D} A^{2i} A^\pi$$

$$+CA\sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor}(BC)^{(i+2)D} A^{2i+1} A^\pi + CA^2 \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor}(BC)^{(i+2)D} A^{2i} A^\pi$$

$$-CA(BC)^D A^D - CA^2(BC)^D A^{2D} - 2CA^{2D},$$

$$F_4 = CA(BC)^\pi \sum_{i=0}^{s-1}(BC)^i A^{(2i+4)D} B + CA^2 \sum_{i=0}^{s-1}(BC)^i (BC)^\pi A^{(2i+5)D} B$$

$$+C(BC)^\pi \sum_{i=0}^{s-1}(BC)^i A^{(2i+3)D} B + C\sum_{i=1}^{\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor}(BC)^{(i+1)D} A^{2i-1} A^\pi B$$

$$+CA\sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor}(BC)^{(i+2)D} A^{2i} A^\pi B + CA^2 \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor}(BC)^{(i+2)D} A^{2i-1} A^\pi B$$

$$-2CA^{3D}B - C(BC)^D A^D B - CA(BC)^D A^{2D} B$$

$$-CA^2(BC)^{2D} A^D B - CA^2(BC)^{2D} A^{3D} B$$

dir (Zhang ve Ark., 2022a).

İspat. P ve Q matrisleri

$$N = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ I & 0 \end{pmatrix} =: PQ$$

ile tanımlanmış olsun. Bu durumda

$$QP = \begin{pmatrix} A & BC \\ I & 0 \end{pmatrix}$$

olacağından Teorem 3.11 uygulanırsa

$$(QP)^D = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ \upsilon & \xi \end{pmatrix}$$

elde edilir, burada $ind(A) = r$, $ind(BC) = s$ olup

$$\lambda = A(BC)^\pi \sum_{i=0}^{s-1}(BC)^i A^{(2i+2)D} + A^2(BC)^\pi \sum_{i=0}^{s-1}(BC)^i A^{(2i+3)D}$$

$$+(BC)^\pi \sum_{i=0}^{s-1}(BC)^i A^{(2i+1)D} + A^2 \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor}(BC)^{(i+2)D} A^{2i-1} A^\pi$$

$$+A\sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor}(BC)^{(i+1)D} A^{2i} A^\pi + \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor}(BC)^{(i+1)D} A^{2i-1} A^\pi - A^2(BC)^D A^D - 2A^D,$$

$\mu = A^2(BC)^D + BC(BC)^D,$

$\upsilon = (BC)^\pi \sum_{i=0}^{s-1}(BC)^i A^{(2i+2)D} + A^2(BC)^\pi \sum_{i=0}^{s-1}(BC)^i A^{(2i+4)D}$

$+A(BC)^\pi \sum_{i=0}^{s-1}(BC)^i A^{(2i+3)D} + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor}(BC)^{(i+1)D} A^{2i} A^\pi$

$+A\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor}(BC)^{(i+1)D} A^{2i-1} A^\pi + A^2 \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor}(BC)^{(i+2)D} A^{2i} A^\pi$

$-A(BC)^D A^D - A^2(BC)^D A^{2D} - 2A^{2D},$

$\xi = A(BC)^D$

şeklindedir. Bu durumda Cline formülüne göre

$$N^D = P(QP)^{2D}Q = \begin{pmatrix} \lambda^2 A + \mu\upsilon A + \lambda\mu + \mu\xi & \lambda^2 B + \mu\upsilon B \\ C\upsilon\lambda A + C\xi\upsilon A + C\upsilon\mu + C\xi^2 & C\upsilon\lambda B + C\xi\upsilon B \end{pmatrix} \qquad (3.69)$$

yazılabilir. Buradan direkt hesaplamalar yapılırsa

$\xi^2 = 0,$

$\mu\xi = 0$

$\lambda^2 = A(BC)^\pi \sum_{i=0}^{s-1}(BC)^i A^{(2i+3)D} + A^2 \sum_{i=0}^{s-1}(BC)^i A^{(2i+4)D}$

$-A^2(BC)^e \sum_{i=0}^{s-1}(BC)^i A^{(2i+4)D} + A^2 \sum_{i=0}^{s-1}(BC)^{(i+1)}(BC)^\pi A^{(2i+4)D} A^\pi$

$+A\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor}(BC)^{(i+1)D} A^{2i-1} A^\pi - A(BC)^D A^D - A^2(BC)^D A^{2D} - (BC)^e A^{2D},$

$\mu\upsilon = A^2 \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor}(BC)^{(i+2)D} A^{2i} A^\pi + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor}(BC)^{(i+1)D} A^{2i} A^\pi ,$

$\lambda\mu = A(BC)^D,$

$\upsilon\lambda = A(BC)^\pi \sum_{i=0}^{s-1}(BC)^i A^{(2i+4)D} + A^2 \sum_{i=0}^{s-1}(BC)^i (BC)^\pi A^{(2i+5)D}$

$+(BC)^\pi \sum_{i=0}^{s-1}(BC)^i A^{(2i+3)D} + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor}(BC)^{(i+1)D} A^{2i-1} A^\pi$

$+A^2 \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor}(BC)^{(i+2)D} A^{2i-1} A^\pi - 2A^{3D} - (BC)^D A^D$

$-A(BC)^D A^{2D} - A^2(BC)^{2D} A^D - A^2(BC)^D A^{3D},$

$\upsilon\mu = (BC)^D + A^2(BC)^{2D},$

$$\xi\upsilon = A\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor}(BC)^{(i+2)D}A^{2i}A^{\pi}$$

olduğu görülür. Elde edilen bu ifadeler (3.69) eşitliğinde yerlerine yazılırsa istenilen sonuç elde edilir ve böylece ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 3.21 A ve BC aynı boyuttan kare matrisler olmak üzere $ind(A) = r$ ve $ind(BC) = s$ olsun ve $N = \begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix}$ matrisi verilsin. Eğer $A^2BC = 0$ ve $BCABC = 0$ ise, bu takdirde

$$N^D = \begin{pmatrix} F_1 & F_3 \\ F_3 & F_4 \end{pmatrix} \tag{3.70}$$

olacaktır, burada

$$F_1 = A(BC)^{\pi}\sum_{i=0}^{s-1}(BC)^i A^{(2i+2)D} + (BC)^{\pi}\sum_{i=0}^{s-1}(BC)^i A^{(2i+1)D}$$

$$+A\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor}(BC)^{(i+2)D}A^{2i+1}A^{\pi}$$

$$+A\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor}(BC)^{(i+1)D}A^{2i}A^{\pi} + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor}(BC)^{(i+1)D}A^{2i+1}A^{\pi} - A^D,$$

$$F_2 = A(BC)^{\pi}\sum_{i=0}^{s-1}(BC)^i A^{(2i+3)D}B + (BC)^{\pi}\sum_{i=0}^{s-1}(BC)^i A^{(2i+2)D}B$$

$$+A\sum_{i=1}^{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor}(BC)^{(i+1)D}A^{2i-1}A^{\pi}B + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor}(BC)^{(i+1)D}A^{2i}A^{\pi}B$$

$$-A(BC)^D A^{2D}B - A^{2D}B,$$

$$F_3 = C(BC)^{\pi}\sum_{i=0}^{s-1}(BC)^i A^{(2i+2)D} + C\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor}(BC)^{(i+1)D}A^{2i}A^{\pi}$$

ve

$$F_4 = C(BC)^{\pi}\sum_{i=0}^{s-1}(BC)^i A^{(2i+3)D}B + C\sum_{i=1}^{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor}(BC)^{(i+1)D}A^{2i-1}A^{\pi}B - C(BC)^D A^D B$$

dir (Zhang ve Ark., 2022a).

Sonuç 3.22 A ve BC aynı boyuttan kare matrisler olmak üzere $ind(A) = r$ ve $ind(BC) = s$ olsun ve $N = \begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix}$ matrisi verilsin. Eğer $A^2B = 0$ ve $CAB = 0$ ise, bu takdirde

$$N^D = \begin{pmatrix} F_1 & (BC)^D B \\ F_3 & 0 \end{pmatrix}$$

olacaktır, burada

$$F_1 = A(BC)^\pi \sum_{i=0}^{s-1}(BC)^i A^{(2i+2)D} + (BC)^\pi \sum_{i=0}^{s-1}(BC)^i A^{(2i+1)D}$$

$$+A\sum_{i=0}^{\left\lfloor\frac{r}{2}\right\rfloor}(BC)^{(i+1)D}A^{2i}A^\pi + \sum_{i=0}^{\left\lfloor\frac{r}{2}\right\rfloor}(BC)^{(i+1)D}A^{2i+1}A^\pi - A^D,$$

$$F_3 = C(BC)^\pi \sum_{i=0}^{s-1}(BC)^i A^{(2i+2)D} + C\sum_{i=0}^{\left\lfloor\frac{r}{2}\right\rfloor}(BC)^{(i+1)D}A^{2i}A^\pi$$

dir (Zhang ve Ark., 2022a).

Sonuç 3.23 A ve BC aynı boyuttan kare matrisler olmak üzere $ind(A) = r$ ve $ind(BC) = s$ olsun ve $N = \begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix}$ matrisi verilsin.

(i) Eğer $ABC = 0$ ise, bu takdirde

$$N^D = \begin{pmatrix} XA & XB \\ CX & C[XA^D + (BC)^D(XA - A^D)]B \end{pmatrix}$$

olacaktır,

(ii) Eğer $AB = 0$ ise, bu takdirde

$$N^D = \begin{pmatrix} XA & (BC)^D B \\ CX & 0 \end{pmatrix}$$

olacaktır, burada

$$X = (BC)^\pi \sum_{i=0}^{s-1}(BC)^i A^{(2i+2)D} + \sum_{i=0}^{\left\lfloor\frac{r}{2}\right\rfloor}(BC)^{(i+1)D}A^{2i}A^\pi$$

dir (Zhang ve Ark., 2022a).

Şimdi bazı yeni şartlar altında ters üçgensel blok matrislerin Drazin inversleri için yukarıda verilen formülleri uygulayarak $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & E \end{pmatrix}$ tipinde verilen matrislerin Drazin inversleri için çeşitli gösterimler elde edilecektir.

Teorem 3.13 A ve BC aynı boyuttan olmak üzere A, E ve BC kare matrisler, $N = \begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix}$, $ind(N) = r$ ve $ind(E) = s$ olsun. Eğer

$$BEC = 0,\ BE^2 = 0,\ A^3BC = 0, BCABC = 0, BCA^2BC = 0$$

eşitlikleri sağlanıyorsa, bu takdirde $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & E \end{pmatrix}$ matrisinin Drazin inversi N^D ve $F_n, n = 1,2,3,4$ ler (3.68) tanımlandıkları gibi olmak üzere

$$M^D = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & E^\pi \end{pmatrix} \sum_{i=0}^{s-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}^i N^{(i+)D}$$

$$+ \sum_{i=0}^{r-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E^{(i+1)D} \end{pmatrix} N^i \begin{pmatrix} (BC)^\pi - F_1A - A^2(BC)^D & -F_1B \\ -F_3A - CA(BC)^D & I - F_3B \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & E^\pi \end{pmatrix} \sum_{i=0}^{s-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}^i N^{(i+2)D} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}$$

$$+ \sum_{i=0}^{r-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E^{(i+3)D} \end{pmatrix} N^{i+1} \begin{pmatrix} 0 & F_1BE \\ 0 & (I - F_3B)E \end{pmatrix}$$

$$- \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E^DF_4E + E^{2D}CF_2E \end{pmatrix} \tag{3.71}$$

olacaktır (Zhang ve Ark., 2022a).

İspat. $Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}$ ve $N = \begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix}$ olmak üzere $M = N + Q$ yazılabilir. Bu durumda Teorem 3.12 kullanılarak N^D nin (3.68) de verildiği gibi olduğu ve dolayısıyla N^π nin

$$N^\pi = \begin{pmatrix} I - F_1A - F_2C & -F_1B \\ -F_3A - F_4C & I - F_3B \end{pmatrix}$$

şeklinde olduğu görülebilir. Bunun sonucu olarak

$$F_2C = A^2(BC)^D + (BC)^DBC \text{ ve } F_4C = CA(BC)^D$$

eşitlikleri dikkate alınırsa

$$N^\pi = \begin{pmatrix} I - F_1A - A^2(BC)^D - (BC)^DBC & -F_1B \\ -F_3A - CA(BC)^D & I - F_3B \end{pmatrix}$$

yazılabilir. Öte yandan $NQN = 0$ ve $NQ^2 = 0$ olduğundan ispatın geri kalan kısmı Lemma 3.2(i) nin bir sonucu olacaktır ve böylece ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 3.24 A ve BC aynı boyuttan olmak üzere A, E ve BC kare matrisler, $N = \begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix}$, $ind(N) = r$ ve $ind(E) = s$ olsun. Eğer $BEC = 0$, $BE^2 = 0$, $A^2BC = 0$ ve $CABC = 0$ ise, bu takdirde $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & E \end{pmatrix}$ matrisinin Drazin inversi N^D ve $F_n, n = 1,2,3,4$ ler Sonuç 3.21 de tanımlandıkları gibi olmak üzere

$$M^D = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & E^\pi \end{pmatrix} \sum_{i=0}^{s-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}^i N^{(i+)D}$$

$$+\sum_{i=0}^{r-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E^{(i+1)D} \end{pmatrix} N^i \begin{pmatrix} (BC)^\pi - F_1A & -F_1B \\ -F_3A & I - F_3B \end{pmatrix}$$

$$+\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & E^\pi \end{pmatrix} \sum_{i=0}^{s-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}^i N^{(i+2)D} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} \tag{3.72}$$

$$+\sum_{i=0}^{r-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E^{(i+3)D} \end{pmatrix} N^{i+1} \begin{pmatrix} 0 & F_1BE \\ 0 & (I - F_3B)E \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E^DF_4E + E^{2D}CF_2E \end{pmatrix}$$

olacaktır (Zhang ve Ark., 2022a).

Sonuç 3.25 A ve BC aynı boyuttan olmak üzere A, E ve BC kare matrisler, $N = \begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix}$, $ind(N) = r$ ve $ind(E) = s$ olsun. Eğer $BC = 0$, $BE^2 = 0$ ve $BEC = 0$ ise, bu takdirde $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & E \end{pmatrix}$ matrisinin Drazin inversi

$$M^D = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & E^\pi \end{pmatrix} \sum_{i=0}^{s-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}^i \begin{pmatrix} A^D & A^{2D}B \\ CA^{2D} & CA^{3D}B \end{pmatrix}^{i+1}$$

$$+\sum_{i=0}^{r-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E^{(i+1)D} \end{pmatrix} N^i \begin{pmatrix} A^\pi & -A^DB \\ -CA^D & I - CA^{2D}B \end{pmatrix}$$

$$+\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & E^\pi \end{pmatrix} \sum_{i=0}^{s-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}^i \begin{pmatrix} A^D & A^{2D}B \\ CA^{2D} & CA^{3D}B \end{pmatrix}^{i+1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}$$

$$+\sum_{i=0}^{r-2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E^{(i+3)D} \end{pmatrix} N^{i+1} \begin{pmatrix} 0 & -A^DBE \\ 0 & (I - CA^{2D}B)E \end{pmatrix}$$

$$-\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E^DCA^{3D}BE + E^{2D}CA^{2D}BE \end{pmatrix} \tag{3.73}$$

olacaktır (Zhang ve Ark., 2022a).

Sonuç 3.26 A ve BC aynı boyuttan olmak üzere A, E ve BC kare matrisler, $N = \begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix}$, $ind(N) = r$ ve $ind(E) = s$ olsun. Eğer $CAB = 0$, $A^2B = 0$, $BE^2 = 0$ ve $BEC = 0$ ise, bu takdirde $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & E \end{pmatrix}$ matrisinin Drazin inversi F_1, F_3 ve N^D matrisleri Sonuç 3.22 de verildikleri gibi olmak üzere

$$M^D = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & E^\pi \end{pmatrix} \sum_{i=0}^{s-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}^i N^{(i+1)D}$$

$$+\sum_{i=0}^{r-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E^{(i+1)D} \end{pmatrix} N^i \begin{pmatrix} (BC)^\pi - F_1A & -F_1B \\ -F_3A & I - F_3B \end{pmatrix}$$

$$+\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & E^{\pi} \end{pmatrix} \sum_{i=0}^{s-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}^{i} N^{(i+2)D} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} \tag{3.74}$$

$$+\sum_{i=0}^{r-2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E^{(i+3)D} \end{pmatrix} N^{i+1} \begin{pmatrix} 0 & -F_1BE \\ 0 & (I-F_3B)E \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E^{2D}C(BC)^{D}BE \end{pmatrix}$$

olacaktır (Zhang ve Ark., 2022a).

Sonuç 3.27 A ve BC aynı boyuttan olmak üzere A, E ve BC kare matrisler olsun. Eğer $ABC = 0,\ BE = 0$ ve $BC = 0$ ise, bu takdirde $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & E \end{pmatrix}$ matrisinin Drazin inversi X matrisi

$$X = (BC)^{\pi} \sum_{i=0}^{s-1} (BC)^{i} A^{(2i+2)D} + \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor} (BC)^{(i+1)D} A^{2i} A^{\pi} \tag{3.75}$$

şeklinde olmak üzere

$$M^{D} = \begin{pmatrix} X\mathrm{A} & XB \\ CX & C[XA^{D} + (BC)^{D}(XA - A^{D})]B \end{pmatrix} \tag{3.76}$$

formundadır (Zhang ve Ark., 2022a).

Sonuç 3.28 A ve BC aynı boyuttan olmak üzere A, E ve BC kare matrisler olsun. Eğer $A = 0$ ve $E = 0$ ise, bu takdirde $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & E \end{pmatrix}$ matrisinin Drazin inversi

$$M^{D} = \begin{pmatrix} 0 & (BC)^{D}B \\ C(BC)^{D} & 0 \end{pmatrix} \tag{3.77}$$

formundadır (Zhang ve Ark., 2022a).

Aşağıdaki formül Teorem 3.13 ün bir değişik versiyonudur ve ispatı da benzer şekilde yapılabilir.

Teorem 3.14 A ve BC aynı boyuttan olmak üzere A, E ve BC kare matrisler, $N = \begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix}$, $ind(N) = r$ ve $ind(E) = s$ olsun. Eğer

$$ECA = 0,\ ECB = 0,\ A^{3}BC = 0, BCABC = 0 \text{ ve } BCA^{2}BC = 0$$

eşitlikleri sağlanıyorsa, bu takdirde $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & E \end{pmatrix}$ matrisinin Drazin inversi N^{D} ve $F_n, n = 1,2,3,4$ ler (3.68) tanımlandıkları gibi olmak üzere

$$M^{D} = \sum_{i=0}^{s-1} N^{(i+1)D} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}^{i} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & E^{\pi} \end{pmatrix} + \sum_{i=0}^{s-2} N^{(i+3)D} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ E^{i+1}E^{\pi}C & 0 \end{pmatrix}$$

$$+\begin{pmatrix} (BC)^{\pi}-F_1A-A^2(BC)^D & -F_1B \\ -F_3A-CA(BC)^D & I-F_3B \end{pmatrix}\sum_{i=0}^{r-1}N^i\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ E^{(i+2)D}C & E^{(i+1)D} \end{pmatrix}$$

$$-\begin{pmatrix} F_2E^DC & 0 \\ F_4E^DC & 0 \end{pmatrix}-N^{2D}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ EE^DC & 0 \end{pmatrix} \tag{3.78}$$

olacaktır (Zhang ve Ark., 2022a).

İspat. Bu durumda Q ve N matrisleri Teorem 3.13 ün ispatında verildikleri gibi olmak üzere $QNQ=0$ ve $QN^2=0$ eşitlikleri sağlanır. Dolayısıyla Teorem 3.13 ün ispatında olduğu gibi Teorem 3.12 ve Lemma 3.2 nin (i) şıkkı kullanılarak istenilen sonucun sağlandığı gösterilebilir ve böylece ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 3.29 A ve BC aynı boyuttan olmak üzere A, E ve BC kare matrisler, $N=\begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix}$, $ind(N)=r$ ve $ind(E)=s$ olsun. Eğer $ECA=0$, $ECB=0$, $A^2BC=0$ ve $CABC=0$ ise, bu takdirde $M=\begin{pmatrix} A & B \\ C & E \end{pmatrix}$ matrisinin Drazin inversi N^D ve $F_n, n=1,2,3,4$ ler Sonuç 3.21 de tanımlandıkları gibi olmak üzere

$$M^D=\sum_{i=0}^{s-1}N^{(i+1)D}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}^i\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & E^{\pi} \end{pmatrix}+\sum_{i=0}^{s-2}N^{(i+3)D}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ E^{i+1}E^{\pi}C & 0 \end{pmatrix}$$

$$+\begin{pmatrix} (BC)^{\pi}-F_1A & -F_1B \\ -F_3A & I-F_3B \end{pmatrix}\sum_{i=0}^{r-1}N^i\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ E^{(i+2)D}C & E^{(i+1)D} \end{pmatrix}$$

$$-\begin{pmatrix} F_2E^DC & 0 \\ F_4E^DC & 0 \end{pmatrix}-N^{2D}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ EE^DC & 0 \end{pmatrix} \tag{3.79}$$

olacaktır (Zhang ve Ark., 2022a).

Şimdi yukarıda elde edilen sonuçların açıklandığı bir örnek verilebilir. Bu örnekte A, B, C ve E matrisleri Teorem 3.12 nin varsayımlarını sağlamak üzere $N=\begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix}$ ve $M=\begin{pmatrix} A & B \\ C & \mathrm{E} \end{pmatrix}$ matrislerinin Drazin inversleri elde edilecektir.

Örnek 3.5 $0 \notin \{a,b,c,d,e,f,g,u,v,t\}$ olmak üzere A, B, C ve E matrisleri

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ e & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g & 0 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ u & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ d & d & d & 1 \end{pmatrix}$$

olarak verilmiş olsun. Bu durumda gerekli hesaplamalar yapılırsa

$$BC = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ fu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & gv & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0, \quad AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ be & 0 & 0 & 0 \\ 0 & cf & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$$

$$ABC = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ cfu & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$$

olduğu gösterilebilir. Buradan da $A^2BC = 0, CABC = 0$ ve $BE = 0$ eşitliklerinin sağlandığı ve dolayısıyla Teorem 3.12 (veya Sonuç 3.21) kullanılarak

$$N^D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 & e & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 & 0 & 0 & g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ u & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^D = 0$$

elde edilir. Diğer taraftan $E = E^2 = E^{\#}$ olacağı kolaylıkla gösterilebilir. Bu durumda Teorem 3.13 (veya Sonuç 3.24) uygulanarak

$$x = d(u + va) + t(ba + fu), y = d + (dv + tb)e,$$

ve

$$z = dv + tb \ \text{ ve } \ w = d + tf$$

olmak üzere

$$M^D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 & e & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 & 0 & 0 & g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ u & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & 0 & d & d & d & 1 \end{pmatrix}^D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x & z & t & 0 & y & w & d & 1 \end{pmatrix}$$

elde edilir.

3.5 Ters Üçgensel Matrisin Drazin İnversi için Açık Formüller

Bu kısımda ters üçgensel blok matrisler ve ve bazı varsayımlar altında elde edilen Drazin inversleri için elde edilecek yeni ve kesin ifadeler arasındaki indeks ilişkileri ele alınacaktır. Bununla ilgili olarak daha önce de verildiği gibi $A^e = AA^D$ ve $A^\pi = I - A^e$ gösterimlerini hatırlayalım. Bu durumda

$$\overline{N} = \begin{pmatrix} A & B \\ I & 0 \end{pmatrix},\ \widehat{N} = \begin{pmatrix} A & B \\ I & 0 \end{pmatrix},\ N = \begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix} \text{ ve } M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & E \end{pmatrix} \tag{3.80}$$

matrislerini göz önüne alalım. Bu takdirde $\overline{N}$ ve $\widehat{N}$ matrislerinin Drazin inversleri arasında basit bir hesaplamayla $R = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & -A \end{pmatrix}$ olmak üzere

$$\widehat{N}^D = (R\overline{N}R^{-1})^D = R\overline{N}^D R^{-1} \tag{3.81}$$

şeklinde bir ilişkinin var olduğu gösterilebilir.

Şimdi aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.15 A ve B aynı boyuttan kare matrisler olmak üzere $ind(A) = r$ ve $ind(B) = s$ olsun ve $\overline{N} = \begin{pmatrix} A & B \\ I & 0 \end{pmatrix}$ matrisi verilsin. Eğer

$$AB^2 = 0,\ A^2BA = 0, ABA^2 = 0 \text{ ve } (AB)^2 = 0 \tag{3.82}$$

eşitlikleri sağlanıyorsa, bu takdirde

$$\overline{N}^D = \begin{pmatrix} E_1 & E_2 \\ E_3 & E_4 \end{pmatrix}$$

olacaktır, burada

$$E_1 = -B^DA^DB + \sum_{i=0}^{s-1} B^\pi B^i A^{(2i+3)D} B + \sum_{i=0}^{s-1} B^\pi B^i A^{(2i+1)D}$$

$$+ \sum_{i=0}^{\left\lfloor\frac{r}{2}\right\rfloor-1} B^{(i+2)D} A^{2i+1} A^\pi B + \sum_{i=0}^{\left\lfloor\frac{r}{2}\right\rfloor} B^{(i+1)D} A^{2i} A^\pi B\ ,$$

$$E_2 = \sum_{i=0}^{s-1} B^\pi B^i A^{(2i+2)D} B + \sum_{i=0}^{\left\lfloor\frac{r}{2}\right\rfloor} B^{(i+1)D} A^{2i} A^\pi B\ ,$$

$$E_3 = B^{3D}ABA - B^DA^{2D}B - B^D + \sum_{i=0}^{s-1} B^\pi B^i A^{(2i+2)D} + \sum_{i=0}^{s-1} B^\pi B^i A^{(2i+4)D} B$$

$$+ \sum_{i=0}^{\left\lfloor\frac{r}{2}\right\rfloor} B^{(i+1)D} A^{2i} A^\pi + \sum_{i=0}^{\left\lfloor\frac{r}{2}\right\rfloor} B^{(i+2)D} A^{2i} A^\pi B\ ,$$

$$E_4 = -B^DA^DB + \sum_{i=0}^{s-1} B^\pi B^i A^{(2i+3)D} B + \sum_{i=0}^{\left\lfloor\frac{r}{2}\right\rfloor} B^{(i+2)D} A^{2i+1} A^\pi B\ ,$$

dir (Zhang ve Ark., 2022b).

İspat. İspat için öncelikle $\overline{N}^2$ matrisini

$$\overline{N}^2 = \begin{pmatrix} A^2 + B & AB \\ A & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^2 & 0 \\ A & A^e B \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B & AB \\ 0 & A^\pi B \end{pmatrix} := P + Q \qquad (3.83)$$

şeklinde parçalayalım. Bu durumda direkt olarak

$$(A^e B)^D = 0,\ (A^\pi B)^n = B^{n-1} A^\pi B, n \geq 1$$

olduğu ve buradan da

$$\begin{aligned}(A^\pi B)^D &= A^\pi B[(A^\pi B)^D]^2 = A^\pi B[(A^\pi B)^2]^D \\ &= A^\pi B[B(A^\pi B)]^D = A^\pi B^2[(A^\pi B)B]^{2D} A^\pi B \\ &= A^\pi B^2 (B^2)^D A^\pi B = B^{2D} A^\pi B\end{aligned}$$

eşitlikleri yazılabilir. Öte yandan Lemma 3.2 (ii) den

$$P^D = \begin{pmatrix} A^{2D} & 0 \\ A^{3D} & 0 \end{pmatrix} \text{ ve } Q^D = \begin{pmatrix} B^D & B^{2D} AB \\ 0 & B^{2D} A^\pi B \end{pmatrix}$$

olduğu görülür. Bu takdirde

$$P^\pi = \begin{pmatrix} A^\pi & 0 \\ -A^D & I \end{pmatrix} \text{ ve } Q^\pi = \begin{pmatrix} B^\pi & -B^D AB \\ 0 & I - B^D A^\pi B \end{pmatrix}$$

yazılabilir. Öte yandan her $n \geq 2$ için

$$P^n = \begin{pmatrix} A^{2n} & 0 \\ A^{2n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

ve her $n \geq 1$ için

$$Q^n = \begin{pmatrix} B^n & B^{n-1} AB \\ 0 & B^{n-1} A^\pi B \end{pmatrix}, P^{nD} = \begin{pmatrix} A^{(2n)D} & 0 \\ A^{(2n-1)D} & 0 \end{pmatrix} \text{ ve } Q^{nD} = \begin{pmatrix} B^{nD} & B^{(n+1)D} AB \\ 0 & B^{(n+1)D} A^\pi B \end{pmatrix}$$

olduğu tümevarımla gösterilebilir.

$ind(A) = r$ ve $ind(B) = s$ olsun. Bu durumda $i \geq 2$ olmak üzere $P^i P^\pi$ ve $i \geq 1$ olmak üzere $Q^i Q^\pi$ ifadeleri dikkate alınırsa

$$P^i P^\pi = \begin{pmatrix} A^{2i} & 0 \\ A^{2i-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^\pi & 0 \\ -A^D & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{2i} A^\pi & 0 \\ A^{2i-1} A^\pi & 0 \end{pmatrix}$$

ve

$$Q^iQ^\pi = \begin{pmatrix} B^i & B^{i-1}AB \\ 0 & B^{i-1}A^\pi B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B^\pi & -B^DAB \\ 0 & I - B^DA^\pi B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^iB^\pi & B^{i-1}B^\pi AB \\ 0 & B^{i-1}B^\pi A^\pi B \end{pmatrix}$$

olacaktır. Dolayısıyla $ind(P) = \left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor + 1$ ve $ind(Q) = s + 1$ olduğu görülür. Bu durumda Lemma 3.2 nin $P^2Q = 0$ ve $QPQ = 0$ varsayımları sağlandığından (3.5b) deki gibi aşağıdaki terimler hesaplanabilir:

$$Q^\pi \sum_{i=0}^{s-1} Q^iP^{(i+1)D} = \begin{pmatrix} B^\pi \sum_{i=0}^{s} B^iA^{(2i+2)D} & 0 \\ B^\pi \sum_{i=0}^{s} B^iA^{(2i+3)D} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor} Q^{(i+1)D}P^iP^\pi = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor} B^{(i+1)D}A^{2i}A^\pi + B^{3D}ABA & B^{2D}AB \\ \sum_{i=1}^{\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor} B^{(i+1)D}A^{2i-1}A^\pi - B^DA^D & B^D \end{pmatrix},$$

$$\sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor - 1} Q^{(i+2)D}P^{i+1}P^\pi Q = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor - 1} B^{(i+3)D}A^{2i+2}A^\pi B & \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor - 1} B^{(i+3)D}A^{2i+3}A^\pi B \\ \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor - 1} B^{(i+3)D}A^{2i+1}A^\pi B & \sum_{i=1}^{\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor - 1} B^{(i+3)D}A^{2i+21}A^\pi B \end{pmatrix},$$

$$Q^\pi \sum_{i=0}^{s} Q^iP^{(i+2)D} = \begin{pmatrix} B^\pi \sum_{i=1}^{s} B^iA^{(2i+4)D}B & B^\pi \sum_{i=1}^{s} B^iA^{(2i+3)D}B \\ B^\pi \sum_{i=0}^{s} B^iA^{(2i+5)D}B & B^\pi \sum_{i=0}^{s} B^{i+1}A^{(2i+4)D}B \end{pmatrix},$$

$$Q^DP^DQ = \begin{pmatrix} B^DA^{2D}B & B^DA^DB \\ B^DA^{3D}B & B^DA^{2D}B \end{pmatrix}$$

ve

$$(Q^D)^2PP^DQ = \begin{pmatrix} B^{2D}A^eB & B^{2D}A^eAB \\ B^{2D}A^DB & B^{2D}A^eB \end{pmatrix}.$$

Bu durumda elde edilen bu ifadeler (3.5b) eşitliğindeki yerlerine yazılırsa

$$\overline{N}^{2D} = (P + Q)^D = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

elde edilir, burada $ind(A) = r$ ve $ind(B) = s$ olmak üzere

$$\alpha = B^{3D}ABA - B^DA^{2D}B - B^{2D}A^eB + \sum_{i=0}^{s} B^\pi B^iA^{(2i+2)D}$$

$$+ \sum_{i=0}^{s} B^\pi B^iA^{(2i+4)D}B + \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor} B^{(i+1)D}A^{2i}A^\pi + \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor - 1} B^{(i+3)D}A^{2i+2}A^\pi B,$$

$$\beta = B^{2D}AB - B^DA^DB - B^{2D}A^eAB$$

$$+ \sum_{i=0}^{s} B^\pi B^iA^{(2i+3)D}B + \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor - 1} B^{(i+3)D}A^{2i+3}A^\pi B,$$

$$\gamma = -B^D A^D - B^D A^{3D} B - B^{2D} A^D B + \sum_{i=0}^{s} B^\pi B^i A^{(2i+5)D} B$$

$$+\sum_{i=0}^{s} B^\pi B^i A^{(2i+3)D} + \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor -1} B^{(i+3)D} A^{2i+1} A^\pi B + \sum_{i=1}^{\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor -1} B^{(i+1)D} A^{2i-1} A^\pi ,$$

$$\delta = B^D - B^D A^{2D} B - B^{2D} A^e B + \sum_{i=0}^{s} B^\pi B^i A^{(2i+4)D} B$$

$$+\sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor -1} B^{(i+3)D} A^{2i+2} A^\pi B$$

olacaktır. Buradan $\bar{N}^D = \bar{N}\bar{N}^{2D}$ matrisi hesaplanırsa $\bar{N}^D = \begin{pmatrix} E_1 & E_3 \\ E_3 & E_4 \end{pmatrix}$ elde edilir, burada $E_1,\ E_2,\ E_3$ ve E_4 matrisleri $ind(A) = r$, $ind(B) = s$ olmak üzere

$$E_1 = B^\pi A^D + B^\pi A^{3D} B - B^D A^D B + \sum_{i=0}^{s} B^\pi B^{i+1} A^{(2i+5)D} B$$

$$+\sum_{i=0}^{s} B^\pi B^i A^{(2i+3)D} + \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor -1} B^{(i+2)D} A^{2i+1} A^\pi B + \sum_{i=1}^{\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor} B^{iD} A^{2i-1} A^\pi,$$

$$E_2 = B^\pi A^{2D} + B^D A^\pi B + \sum_{i=0}^{s} B^\pi B^{i+1} A^{(2i+4)D} B + \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor -1} B^{(i+2)D} A^{2i+2} A^\pi B,$$

$$E_3 = B^{3D} ABA - B^D A^{2D} B - B^{2D} A^e \mathrm{B} + \sum_{i=0}^{s} B^\pi B^i A^{(2i+2)D}$$

$$+\sum_{i=0}^{s} B^\pi B^i A^{(2i+4)D} B + \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor} B^{(i+1)D} A^{2i} A^\pi + \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor -1} B^{(i+3)D} A^{2i+2} A^\pi B,$$

$$E_4 = B^{2D} A^\pi AB - B^D A^D B + \sum_{i=0}^{s} B^\pi B^i A^{(2i+3)D} B + \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor -1} B^{(i+3)D} A^{2i+3} A^\pi B$$

şeklindedir. Bu durumda r ve s sayıları sırasıyla $A^r A^\pi = 0$ ve $B^s B^\pi = 0$ olacak şekildeki en küçük pozitif tam sayılardır. Bu nedenle herhangi bir negatif olmayan r tamsayısı için

$$r - 2 \le 2\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor - 1 \le r - 1,\ r - 1 \le 2\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor \le r \ \text{ ve } \ r \le 2\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor + 1 \le r + 1$$

eşitsizlikleri gerçeklenir. Dolayısıyla karşılık gelen toplamların alt ve üst sınırları uygun bir şekilde düzenlenerek istenilen sonuç elde edilir ve böylece de ispat tamamlanır.

Şimdi belirli şartlar altında N matrisinin Drazin inversiniin açık bir ifadesini elde etmek için N ve $\bar{N}$ arasında bir ilişki kurulacaktır.

Teorem 3.16 A ve BC aynı boyuttan kare matrisler olmak üzere $ind(A) = r$ ve $ind(BC) = s$ olsun ve $N = \begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix}$ matrisi verilsin. Bu durumda eğer

$$A(BC)^2 = 0, A^2BCA = 0,\ ABCA^2 = 0 \text{ ve } (ABC)^2 = 0$$

eşitlikleri sağlanıyorsa, bu takdirde

$$N^D = \begin{pmatrix} F_1 & F_3 \\ F_3 & F_4 \end{pmatrix} \tag{3.84}$$

olacaktır, burada

$$F_1 = \sum_{i=0}^{s-1}(BC)^{\pi}(BC)^i A^{(2i+1)D} + \sum_{i=0}^{s-1}(BC)^{\pi}(BC)^i A^{(2i+3)D}\, BC$$

$$+\sum_{i=0}^{\left\lfloor\frac{r}{2}\right\rfloor-1}(BC)^{(i+1)D}A^{2i+1}\, A^{\pi} + \sum_{i=0}^{\left\lfloor\frac{r}{2}\right\rfloor-1}(BC)^{(i+2)D}A^{2i+1}\, A^{\pi}BC - (BC)^D A^D BC,$$

$$F_2 = \sum_{i=0}^{s-1}(BC)^{\pi}(BC)^i A^{(2i+2)D} + \sum_{i=0}^{s-1}(BC)^{\pi}(BC)^i A^{(2i+4)D}BCB$$

$$+\sum_{i=0}^{\left\lfloor\frac{r}{2}\right\rfloor}(BC)^{(i+1)D}A^{2i}\, A^{\pi}B \sum_{i=0}^{\left\lfloor\frac{r}{2}\right\rfloor}(BC)^{(i+2)D}A^{2i}\, A^{\pi}BCB$$

$$+(BC)^D A^{2D}BCB - (BC)^D B,$$

$$F_3 = C\sum_{i=0}^{s-1}(BC)^{\pi}(BC)^i A^{(2i+2)D} + C\sum_{i=0}^{s-1}(BC)^{\pi}(BC)^i A^{(2i+4)D}\, BC$$

$$+C\sum_{i=0}^{\left\lfloor\frac{r}{2}\right\rfloor}(BC)^{(i+1)D}A^{2i}\, A^{\pi}C\sum_{i=0}^{\left\lfloor\frac{r}{2}\right\rfloor}(BC)^{(i+2)D}A^{2i}\, A^{\pi}BC$$

$$-C(BC)^D A^{2D}BC - C(BC)^D,$$

$$F_4 = C\sum_{i=0}^{s-1}(BC)^{\pi}(BC)^i A^{(2i+3)D}\, B + C\sum_{i=0}^{s-1}(BC)^{\pi}(BC)^i A^{(2i+5)D}BCB$$

$$+C\sum_{i=0}^{\left\lfloor\frac{r}{2}\right\rfloor-1}(BC)^{(i+1)D}A^{2i+1}\, A^{\pi}B + C\sum_{i=0}^{\left\lfloor\frac{r}{2}\right\rfloor}(BC)^{(i+3)D}A^{2i+1}\, A^{\pi}BCB$$

$$-C(BC)^D A^D B - C(BC)^D A^{3D}BCB - C(BC)^{2D}A^D BCB$$

dir (Zhang ve Ark., 2022b).

İspat. P ve Q matrisleri

$$N = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ I & 0 \end{pmatrix} =: PQ \tag{3.85}$$

ile tanımlanmış olsun. Bu durumda

$$QP = \begin{pmatrix} A & BC \\ I & 0 \end{pmatrix}$$

olacağından Teorem 3.15 uygulanırsa

$$(QP)^D = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ \upsilon & \xi \end{pmatrix}$$

elde edilir, burada $ind(A) = r$, $ind(BC) = s$ olup

$$\lambda = \sum_{i=0}^{s-1}(BC)^{\pi}(BC)^{i}A^{(2i+2)D} + \sum_{i=0}^{s-1}(BC)^{\pi}(BC)^{i}A^{(2i+4)D}BC$$

$$+\sum_{i=0}^{\left\lfloor\frac{r}{2}\right\rfloor-1}(BC)^{(i+2)D}A^{2i+1}A^{\pi}BC + \sum_{i=0}^{\left\lfloor\frac{r}{2}\right\rfloor-1}(BC)^{(i+1)D}A^{2i+1}A^{\pi} - (BC)^{D}A^{D}BC,$$

$$\mu = \sum_{i=0}^{s-1}(BC)^{\pi}(BC)^{i}A^{(2i+2)D} + \sum_{i=0}^{\left\lfloor\frac{r}{2}\right\rfloor}(BC)^{(i+1)D}A^{2i}A^{\pi}BC,$$

$$\upsilon = \sum_{i=0}^{s-1}(BC)^{\pi}(BC)^{i}A^{(2i+2)D} + \sum_{i=0}^{s-1}(BC)^{\pi}(BC)^{i}A^{(2i+4)D}BC$$

$$+\sum_{i=0}^{\left\lfloor\frac{r}{2}\right\rfloor}(BC)^{(i+1)D}A^{2i}A^{\pi} + \sum_{i=0}^{\left\lfloor\frac{r}{2}\right\rfloor}(BC)^{(i+2)D}A^{2i}A^{\pi}BC$$

$$+(BC)^{3D}ABCA - (BC)^{D}A^{2D}BC - (BC)^{D},$$

$$\xi = \sum_{i=0}^{s-1}(BC)^{\pi}(BC)^{i}A^{(2i+3)D}BC + \sum_{i=0}^{\left\lfloor\frac{r}{2}\right\rfloor}(BC)^{(i+2)D}A^{2i+1}A^{\pi}BC - (BC)^{D}A^{D}BC$$

şeklindedir. Bu durumda Cline formülüne göre N^D

$$N^D = P(QP)^{2D}Q = \begin{pmatrix} \lambda^2 A + \mu\upsilon A + \lambda\mu + \mu\xi & \lambda^2 B + \mu\upsilon B \\ C\upsilon\lambda A + C\xi\upsilon A + C\upsilon\mu + C\xi^2 & C\upsilon\lambda B + C\xi\upsilon B \end{pmatrix} \qquad (3.86)$$

şeklinde yazılabilir. Buradan direkt hesaplamalar yapılırsa

$$\xi^2 = 0,$$

$$\mu\xi = 0$$

$$\lambda^2 = \sum_{i=0}^{s-1}(BC)^{\pi}(BC)^{i}A^{(2i+2)D} + \sum_{i=0}^{s-1}(BC)^{\pi}(BC)^{i}A^{(2i+4)D}BC,$$

$$\mu\upsilon = \sum_{i=0}^{\left\lfloor\frac{r}{2}\right\rfloor}(BC)^{(i+2)D}A^{2i}A^{\pi}BC + \sum_{i=0}^{\left\lfloor\frac{r}{2}\right\rfloor}(BC)^{(i+1)D}A^{2i}A^{\pi}$$

$$+(BC)^{3D}ABCA - (BC)^{D}A^{2D}BC - (BC)^{D},$$

$$\lambda\mu = \sum_{i=0}^{s-1}(BC)^{\pi}(BC)^{i}A^{(2i+3)D}BC,$$

$$\upsilon\lambda = \sum_{i=0}^{s-1}(BC)^{\pi}(BC)^{i}A^{(2i+3)D} + \sum_{i=0}^{s-1}(BC)^{\pi}(BC)^{i}A^{(2i+5)D}BC$$

$$+\sum_{i=0}^{\left\lfloor\frac{r}{2}\right\rfloor-1}(BC)^{(i+2)D}A^{2i+1}A^{\pi} + \sum_{i=0}^{\left\lfloor\frac{r}{2}\right\rfloor-1}(BC)^{(i+3)D}A^{2i+1}A^{\pi}BC$$

$$-(BC)^D A^D - (BC)^D A^{3D} BC - (BC)^{2D} A^D BC,$$

$$\upsilon\mu = \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor} (BC)^{(i+2)D} A^{2i} A^{\pi} BC + \sum_{i=0}^{s-1} (BC)^{\pi} (BC)^{i} A^{(2i+4)D} BC - (BC)^D A^{2D} BC,$$

$$\mu\xi = \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor} (BC)^{(i+2)D} A^{2i+1} A^{\pi} BC - (BC)^D A^D BC$$

olduğu görülür. Elde edilen bu ifadeler (3.86) eşitliğinde yerlerine yazılırsa istenilen sonuç elde edilir ve böylece ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 3.30 A ve BC aynı boyuttan kare matrisler olmak üzere $ind(A) = r$ ve $ind(BC) = s$ olsun ve $N = \begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix}$ matrisi verilsin. Eğer $ABC = 0$ ise, bu takdirde

$$N^D = \begin{pmatrix} XA & XB \\ CX & C[XA^D + (BC)^D (XA - A^D)]B \end{pmatrix}$$

olacaktır, burada

$$X = \sum_{i=0}^{s-1} (BC)^{\pi} (BC)^{i} A^{(2i+2)D} + \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor} (BC)^{(i+1)D} A^{2i} A^{\pi} \tag{3.87}$$

dir (Zhang ve Ark., 2022b).

İspat. Teorem 3.16 ve

$$XA = \sum_{i=0}^{s-1} (BC)^{\pi} (BC)^{i} A^{(2i+1)D} + \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor - 1} (BC)^{(i+1)D} A^{2i+1} A^{\pi},$$

$$XA = \sum_{i=0}^{s-1} (BC)^{\pi} (BC)^{i} A^{(2i+2)D} B + \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor} (BC)^{(i+1)D} A^{2i} A^{\pi} B,$$

$$CX = C \sum_{i=0}^{s-1} (BC)^{\pi} (BC)^{i} A^{(2i+2)D} + C \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor} (BC)^{(i+1)D} A^{2i} A^{\pi}$$

ve

$$C[XA^D + (BC)^D (XA - A^D)]B$$

$$= C \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor - 1} (BC)^{(i+2)D} A^{2i+1} A^{\pi} B + \sum_{i=0}^{s-1} (BC)^{\pi} (BC)^{i} A^{(2i+3)D} B - C(BC)^D A^D B$$

eşitlikleri dikkate alınırsa istenilen sonuç elde edilir.

Sonuç 3.31 A ve BC aynı boyuttan kare matrisler olmak üzere $ind(A) = r$ ve $ind(BC) = s$ olsun ve $N = \begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix}$ matrisi verilsin. Eğer $AB = 0$ ise, bu takdirde

$$N^D = \begin{pmatrix} XA & (BC)^D B \\ CX & 0 \end{pmatrix}$$

olacaktır, burada

$$X = (BC)^\pi \sum_{i=0}^{s-1} (BC)^i A^{(2i+2)D} + \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor} (BC)^{(i+1)D} A^{2i} A^\pi$$

dir (Zhang ve Ark., 2022a).

Örnek 3.6 $0 \notin \{a, b, c\}$ olmak üzere A, B ve C matrisleri

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & 0 \\ a & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ ve } C = \begin{pmatrix} 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

olarak verilmiş olsun. Bu durumda gerekli hesaplamalar yapılırsa

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ab & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ab \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0 \text{ ve } ABC = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & abc \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$$

olduğu gösterilebilir. Buradan da $ABCA = 0$ ve $ABCB = 0$ eşitliklerinin sağlandığı ve dolayısıyla Teorem 3.16 kullanılarak

$$N^D = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^D = 0$$

elde edilir.

Şimdi belirli kısıtlamalar altında ters üçgensel blok matrislerin Drazin inversleri için yukarıda verilen formülleri uygulayarak $N = \begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix}$ ve $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & E \end{pmatrix}$ blok parçalanmış matrislerinin Drazin inversleri arasındaki ilişkileri ifade eden çeşitli gösterimler elde edilecektir.

Teorem 3.17 A ve BC aynı boyuttan olmak üzere A, E ve BC kare matrisler, $N = \begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix}$, $ind(N) = r$ ve $ind(E) = s$ olsun. Eğer

$$A(BC)^2 = 0,\ A^2BCA = 0,\ ABCA^2 = 0, (ABC)^2 = 0,\ BEC = 0 \text{ ve } AE^2 = 0,$$

eşitlikleri sağlanıyorsa, bu takdirde $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & E \end{pmatrix}$ matrisinin Drazin inversi N^D (3.84) de ve X (3.87) de tanımlandıkları gibi olmak üzere

$$M^D = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & E^\pi \end{pmatrix} \sum_{i=0}^{s-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}^i N^{(i+1)D} \begin{pmatrix} I & F_2E \\ 0 & I - F_4E \end{pmatrix}$$

$$+ \sum_{i=0}^{r-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E^{(i+1)D} \end{pmatrix} N^i \begin{pmatrix} I - XA^2 - (BC)^{2D}ABCA - XBC & -F_1B \\ -CX - C[XA^D + (BC)^D(XA - A^D)]BC & I - F_3B \end{pmatrix}$$

$$+ \sum_{i=0}^{r-2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E^{(i+3)D} \end{pmatrix} N^{i+1} \begin{pmatrix} 0 & F_1BE \\ 0 & (I - F_3B)E \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E^D(F_4 + E^DF_3B)E \end{pmatrix}$$

olacaktır (Zhang ve Ark., 2022b).

İspat. $Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}$ ve $N = \begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix}$ olmak üzere $M = N + Q$ yazılabilir. Bu durumda $NQN = 0$ ve $NQ^2 = 0$ olacaktır. Teorem 3.16 kullanılarak N^D nin (3.84) de verildiği gibi olduğu ve dolayısıyla N^π nin

$$N^\pi = \begin{pmatrix} I - F_1A - F_2C & -F_1B \\ -F_3A - F_4C & I - F_3B \end{pmatrix}$$

şeklinde olduğu görülebilir. Bunun sonucu olarak

$$F_1A = XA^2 + (BC)^{2D}ABCA,$$

$$F_2C = XBC\ ,$$

$$F_3A = CXA,$$

$$F_4C = C[XA^D + (BC)^D(XA - A^D)]BC$$

eşitlikleri dikkate alınırsa

$$N^\pi = \begin{pmatrix} I - XA^2 - (BC)^{2D}ABCA - XBC & -F_1B \\ -CX - C[XA^D + (BC)^D(XA - A^D)]BC & I - F_3B \end{pmatrix}$$

yazılabilir. Öte yandan $Q^D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E^D \end{pmatrix}$ ve $Q^\pi = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E^\pi \end{pmatrix}$ olduğundan ispatın geri kalan kısmı Lemma 3.2(i) nin bir sonucu olacaktır ve böylece ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 3.32 A ve BC aynı boyuttan olmak üzere A, E ve BC kare matrisler, $N = \begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix}$, $ind(N) = r$ ve $ind(E) = s$ olsun. Eğer $BEC = 0$, $BE^2 = 0$ ve $ABC = 0$

ise, bu takdirde $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & E \end{pmatrix}$ matrisinin Drazin inversi N^D (3.84) de ve X (3.87) de tanımlandıkları gibi olmak üzere

$$M^D = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & E^\pi \end{pmatrix} \sum_{i=0}^{s-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}^i N^{(i+)D} \begin{pmatrix} I & XBE \\ 0 & I + C[XA^D + (BC)^D(XA - A^D)]BE \end{pmatrix}$$

$$+ \sum_{i=0}^{r-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E^{(i+1)D} \end{pmatrix} N^i \begin{pmatrix} (BC)^\pi - XA^2 & -XAB \\ -CXA & I - CXB \end{pmatrix}$$

$$+ \sum_{i=0}^{r-2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E^{(i+3)D} \end{pmatrix} N^{i+1} \begin{pmatrix} 0 & -XABE \\ 0 & (I - CXB)E \end{pmatrix}$$

$$- \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E^D\left[C\left(XA^D + (BC)^D(XA - A^D)\right)\right] + E^D CXBE \end{pmatrix}$$

olacaktır (Zhang ve Ark., 2022b).

Sonuç 3.33 A ve BC aynı boyuttan olmak üzere A, E ve BC kare matrisler, $N = \begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix}$, $ind(N) = r$ ve $ind(E) = s$ olsun. Eğer $ABC = 0$ ve $BE = 0$ ise, bu takdirde $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & E \end{pmatrix}$ matrisinin Drazin inversi N^D matrisi (3.84) de ve X matrisi (3.87) de tanımlandıkları gibi olmak üzere

$$M^D = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & E^\pi \end{pmatrix} \sum_{i=0}^{s-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}^i N^{(i+)D}$$

$$+ \sum_{i=0}^{r-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E^{(i+1)D} \end{pmatrix} N^i \begin{pmatrix} (BC)^\pi - XA^2 & -XAB \\ -CXA & I - CXB \end{pmatrix}$$

olacaktır (Zhang ve Ark., 2022b).

Sonuç 3.34 A ve BC aynı boyuttan olmak üzere A, E ve BC kare matrisler, $N = \begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix}$, $ind(N) = r$ ve $ind(E) = s$ olsun. Eğer $AB = 0$ ve $BE = 0$ ise, bu takdirde $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & E \end{pmatrix}$ matrisinin Drazin inversi N^D matrisi (3.84) de ve X matrisi (3.87) de tanımlandıkları gibi olmak üzere

$$M^D = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & E^\pi \end{pmatrix} \sum_{i=0}^{s-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}^i N^{(i+)D}$$

$$+ \sum_{i=0}^{r-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E^{(i+1)D} \end{pmatrix} N^i \begin{pmatrix} (BC)^\pi - XA^2 & 0 \\ -CXA & I - C(BC)^D B \end{pmatrix}$$

olacaktır (Zhang ve Ark., 2022b).

Teorem 3.18 A ve BC aynı boyuttan olmak üzere A, E ve BC kare matrisler, $N = \begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix}$, $ind(N) = r$ ve $ind(E) = s$ olsun. Eğer

$$A(BC)^2 = 0,\ A^2BCA = 0,\ ABCA^2 = 0, (ABC)^2 = 0,\ ECA = 0 \text{ ve } ECB = 0,$$

eşitlikleri sağlanıyorsa, bu takdirde $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & E \end{pmatrix}$ matrisinin Drazin inversi N^Dmatrisi (3.84) de ve X matrisi (3.87) de tanımlandıkları gibi olmak üzere

$$M^D = \sum_{i=0}^{s-1} N^{(i+1)D} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}^i \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & E^\pi \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} I - XA^2 - (BC)^{2D}ABCA - XBC & -F_1B \\ -CX - C[XA^D + (BC)^D(XA - A^D)]BC & I - F_3B \end{pmatrix} \sum_{i=0}^{r-1} N^i \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ E^{(i+2)D}C & E^{(i+1)D} \end{pmatrix}$$

$$+ \sum_{i=0}^{s-2} N^{(i+3)D} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ E^{i+1}E^\pi C & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} F_2E^DC & 0 \\ F_4E^DC & 0 \end{pmatrix} - N^D \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ E^eC & 0 \end{pmatrix}$$

olacaktır (Zhang ve Ark., 2022b).

İspat. $Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}$ ve $N = \begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix}$ olmak üzere $M = N + Q$ yazılabilir. Bu durumda Teorem 3.17 kullanılarak $QNQ = 0$ ve $QN^2 = 0$ olduğu gösterilebilir. Öte yandan $Q^D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E^D \end{pmatrix}$ ve $Q^\pi = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E^\pi \end{pmatrix}$ olduğundan ispatın geri kalan kısmı Lemma 3.2(ii) nin bir sonucu olacaktır ve böylece ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 3.35 A ve BC aynı boyuttan olmak üzere A, E ve BC kare matrisler olsun. Eğer $ABC = 0$, $ECB = 0$ ve $ECA = 0$ ise, bu takdirde $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & E \end{pmatrix}$ matrisinin Drazin inversi X matrisi

$$X = (BC)^\pi \sum_{i=0}^{s-1} (BC)^i A^{(2i+2)D} + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor} (BC)^{(i+1)D} A^{2i} A^\pi$$

şeklinde olmak üzere

$$M^D = \sum_{i=0}^{s-1} N^{(i+1)D} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}^i \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & E^\pi \end{pmatrix} + \sum_{i=0}^{s-2} N^{(i+3)D} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ E^{i+1}E^\pi C & 0 \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} (BC)^\pi - XA^2 & -XAB \\ -CXA & I - CXB \end{pmatrix} \sum_{i=0}^{r-1} N^i \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ E^{(i+2)D}C & E^{(i+1)D} \end{pmatrix}$$

$$- \begin{pmatrix} XBE^DC & 0 \\ C[XA^D + (BC)^D(XA - A^D)]BE^DC & 0 \end{pmatrix} - N^{2D} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ E^eC & 0 \end{pmatrix}$$

olacaktır (Zhang ve Ark., 2022b).

Sonuç 3.36 A ve BC aynı boyuttan olmak üzere A, E ve BC kare matrisler olsun. Eğer $ABC = 0$, $ECB = 0$ ve $ECA = 0$ ise, bu takdirde $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & E \end{pmatrix}$ matrisinin Drazin inversi X matrisi

$$X = (BC)^{\pi} \sum_{i=0}^{s-1} (BC)^{i} A^{(2i+2)D} + \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor} (BC)^{(i+1)D} A^{2i} A^{\pi}$$

şeklinde olmak üzere

$$M^{D} = \sum_{i=0}^{s-1} N^{(i+1)D} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}^{i} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & E^{\pi} \end{pmatrix}$$
$$+ \begin{pmatrix} I - XA^{2} - (BC)^{D}BC & -XAB \\ -CXA & I - CXB \end{pmatrix} \sum_{i=0}^{r-1} N^{i} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E^{(i+1)D} \end{pmatrix}$$

olacaktır (Zhang ve Ark., 2022b).

Sonuç 3.37 A ve BC aynı boyuttan olmak üzere A, E ve BC kare matrisler olsun. Eğer $AB = 0$ ve $EC = 0$ ise, bu takdirde $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & E \end{pmatrix}$ matrisinin Drazin inversi X matrisi

$$X = (BC)^{\pi} \sum_{i=0}^{s-1} (BC)^{i} A^{(2i+2)D} + \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor} (BC)^{(i+1)D} A^{2i} A^{\pi}$$

şeklinde olmak üzere

$$M^{D} = \sum_{i=0}^{s-1} N^{(i+1)D} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}^{i} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & E^{\pi} \end{pmatrix}$$
$$+ \begin{pmatrix} (BC)^{\pi} - XA^{2} & 0 \\ -CXA & I - CXB \end{pmatrix} \sum_{i=0}^{r-1} N^{i} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E^{(i+1)D} \end{pmatrix}$$

olacaktır (Zhang ve Ark., 2022b).

Örnek 3.7 $0 \notin \{a, b, c\}$ olmak üzere A, B ve C matrisleri Örnek 3.6 da verildikleri gibi olsunlar ve

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

olarak verilmiş olsun. Bu durumda $E = E^{2} = E^{\#}$ olduğu ve Örnek 3.6 dan $N^{D} = 0$ olduğu görülmektedir. Dolayısıyla Teorem 3.17 kullanılarak

$$x = c + ca + ca^2 + cbc,\ y = 1 + cb + cab,$$

ve

$$z = c + ca \text{ ve } \ w = 1 + cb$$

olmak üzere

$$M^D = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & z & x & 1 & 1 & w & y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

elde edilir.

4. SONUÇ ve ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında ilk olarak bir Giriş verilerek Genel Bilgiler başlığı altında matrisler ile ilgili önemli tanım ve teoremler verilmiştir. Kare olmayan ya da kare olduğu halde normal olarak bildiğimiz anlamda inversi mevcut olmayan matrisler için geliştirilen ve özellikle lineer denklem sistemlerinin çözümünün olup-olmadığının araştırılmasında ve çözüm mevcut olması durumunda çözümün belirlenmesinde kullanılan ve bilinen anlamdaki invers özelliklerini de sağlayan genelleştirilmiş adı verilen bir invers kavram ele alınmıştır. Bu amaçla öncelikle bir matrisin Moore-Penrose inversi tanımı verilerek bu inversin çeşitli özellikleri detaylı bir şekilde ortaya konulmuştur. Daha sonra keyfi mertebeden bir matris için Drazin invers tanımı verilerek bu inversin bazı temel özellikleri ortaya konulmuştur.

Tezin temel kısmında keyfi mertebeden bir ters üçgensel blok parçalanmış matrisin Drazin inversinin bazı temel özellikleri incelenmiştir. Ayrıca bu inversleri hesaplamada kullanılan bazı yeni yöntemler verilerek ters üçgensel matrislerin Drazin inversleri için bazı yeni gösterimler verilmiştir. Ayrıca 2x2 tipinde blok parçalanmış matrislerin Drazin inverslerinin ters üçgensel blok parçalanmış matrislerin Drazin inversleri cinsinden ifadeleri elde edilmiştir.

Tezde yapılan çalışmalar dikkate alınarak keyfi mertebeden bir matris çeşitli alt matrisler şeklinde parçalanarak verilen matrisin Drazin inversinin bu alt matrislerin Drazin inversleri yardımıyla nasıl ifade edilebileceği araştırılabilir. Ayrıca tıpkı diğer genelleştirilmiş inverslerde olduğu gibi Drazin inversleri hesaplamada kullanılmak üzere çeşitli algoritmalar ve bilgisayar programları geliştirilebilir. Özellikle matrislerin inverslerinin kullanıldığı çeşitli mühendislik uygulamalarında Drazin inverslerin de kullanılıp-kullanılamayacağı ve eğer kullanılabiliyorsa diğer inverslere göre daha uygulanabilir olup olmadığı araştırılabilir.

5. KAYNAKLAR

Baksalary, OM., Styan, GPH. & Trenkler, G. (2009). On a matrix decomposition of Hartwig and Spindelböck. Linear Algebra and Its Appl., 430: 2798–2812.

Ben-Israel A & Greville TNE. Generalized Inverses, Theory and Applications, second edition, Canadian Mathematical Society, Springer, New York, Berlin, Heidelberg, Hong Kong, London, Milan, Paris, Tokyo, 2003.

Bjerhammer, A. (1958). A generalized matrix algebra, Kungl. Tekn. Hogsk. Handl. Stockholm. No. 124, 1-32.

Bu, C. & Zhang, K. (2010). The explicit representations of the Drazin inverses of a class of block matrices. Electron. J. Linear Algebra. 20, 406–418.

Bu, C., Feng, C. & Bai, S. (2012). Representations for the Drazin inverses of the sum of two matrices and some block matrices. Appl. Math. Comput. 218, 10226–10237.

Bu, C., Feng, C. & Dong, P. (2012). A note on computational formulas for the Drazin inverse of certain block matrices. J. Appl. Math. Comput. 38, 631–640.

Bu, C., Zhang, K. & Zhao, J. (2011). Representation of the Drazin inverse on solution of a class singular differential equations. Linear Multilinear Algebra 59, 863–877.

Bu, C., Zhao, J. &Tang, J. (2011). Representation of the Drazin inverse for special block matrix. Appl. Math. Comput. 217, 4935–4943.

Bu, C., Lizhu, S., Zhao, J. &Wei, Y. (2013). Some results on the Drazin inverse of anti-triangular matrices. Linear and multilinear Algebra. 61(11), 1568-1576.

Catral, M., Olesky, D.D. & Van Den Driessche, P. (2009). Block representations of the Drazin inverse of a bipartite matrix. Electron. J. Linear Algebra 18, 98–109.

Campbell, S.L. (1983). The Drazin inverse and systems of second order linear differential equations. Linear Multilinear Algebra 14, 195–198.

Campbell, SL & Meyer, CD. (1979). Generalized inverse of linear transformations. London: Pitman.

Campbell, S.L., Meyer, C.D. & Rose, N.J. (1976). Applications of the Drazin inverse to linear systems of differential equations. SIAM J. Appl. Math. 31, 411–425.

Castro-Gonzlez, N.& Dopazo, E. (2005). Representations of the Drazin inverse for a class of block matrices. Linear Algebra Appl. 400, 253–269.

Cline, R.E. (1965). An application of representation for the generalized inverse of a matrix, MRC Technical Report 592.

Cvetkovic, AS. & Milovanovic, GV. (2011). On Drazin inverse of operator matrices. J. Math. Anal. Applications. 375 331–335.

Cvetkovic-Ilic, D.S. (2008). A note on the representation for the Drazin inverse of 2 × 2 block matrices. Linear Algebra Appl. 429, 242–248.

Cvetkovic-Ilic, DS. & Wei, Y. (2017). Algebraic properties of generalized inverses. Singapore: Springer.

Cvetkovic-Ilic, D.S., Chen, J.& Xu, Z. (2009). Explicit representations of the Drazin inverse of block matrix and modified matrix. Linear Multilinear Algebra. 57, 355-364.

Deng, CY. (2010). Generalized Drazin inverses of anti-triangular block matrices. J. Math. Anal. Appl. 368, 1–8.

Deng, CY. (2012). A comment on some recent results concerning the Drazin inverse of an anti-triangular block matrix, Filomat. 26, 341–351.

Deng, CY. & Wei, Y. (2009). A note on the Drazin inverse of an anti-triangular matrix. Linear Algebra Appl. 431, 1910–1922.

Djordjevic, DS. & Stanimirovic, PS. (2001). On the generalized Drazin inverse and generalized resolvent. Czechoslovak Math. J., 51, 617–634.

Dopazo, E. & Martinez-Serrano, M.F. (2010). Further results on the representation of the Drazin inverse of a 2×2 block matrix. Linear Algebra and Its Applications. 432, 1896–1904.

Dopazo, E., Martínez-Serrano, M.F.& Robles, J. (2016). Block representations for the Drazin inverse of anti-triangular matrices. Filomat 30:14, 3897–3906.

Guo, L., Chen, J. & Zou, H. (2019). Representations for the Drazin inverse of the sum of two matrices and its applications. Bull. Iran. Math. Soc., 45, 683–699.

Hartwig, RE., & Shoaf, JM. (1977). Group inverses and Drazin inverses of bidiagonal and triangular Toeplitz matrices, J. Aust. Math. Soc. 24, 10–34,

Hartwig, RE., Li, X. & Wei, Y. (2006). Representations for the Drazin inverse of a 2×2 block matrix. SIAM J. Matrix Anal. Appl. 27, 757–771.

Huang, J., Shi, Y. & Chen, A. (2014). The representation of the Drazin inverse of anti-triangular operator matrices based on resolvent expansions, Appl. Math. Comput., 242, 196–201.

Kyrchei, I. (2013). Explicit formulas for determinantal representations of the Drazin inverse solutions of some matrix and differential matrix equations, Appl. Math. Comput., 219), 7632–7644.

Kyrchei, I. (2014). Determinantal representations of the Drazin inverse over the quaternion skew field with applications to some matrix equations, Appl. Math. Comput., 238, 193–207.

Liu, X. & Yang, H. (2012). Further results on the group inverses and Drazin inverses of anti-triangular block matrices. Appl. Math. Comput. 218, 8978–8986.

Ljubisavljevic,J. & Cvetkovic-Ilic, DS. (2013). Representations for Drazin inverse of block matrix, J. Comput. Anal. Appl. 15, 481–497.

Lu, TT. & Shiou, SH. (2002). Inverses of 2 × 2 block matrices, Comput. Math. Appl. 43, 119–129.

Malik, SB. & N. Thome, N. (2014). On a new generalized inverse for matrices of an arbitrary index. Applied Mathematics and Computation. 226: 575-580.

Mastronardi, N. & Van Dooren, P. (2013). The antitriangular factorization of symmetric matrices, SIAM J. Matrix Anal. Appl., 34, 173–196.

Martinez-Serrano, MF. & Castro-Gonzalez, N. (2009). On the Drazin inverse of block matrices and generalized Schur complement, Applied Math. Computations. 215, 2733–2740.

Meyer, C.D. (1975). The role of the group generalized inverse in the theory of finite Markov chains. SIAM Rev. 17, 443–464 (1975).

Meyer, C.D. & Plemmons, R.J. (1977). Convergent powers of a matrix with applications to iterative methods for singular systems of linear systems. SIAM J. Numer. Anal. 14, 699–705.

Meyer, C.D. & Rose, N.J. (1977). The index and the Drazin inverse of block triangular matrices. SIAM J. Appl. Math. 33, 1–7.

Mitra, SK. (1987). On group inverses and the sharp order. Linear Algebra and Its Applications, 92: 17–37.

Mitra, SK. & Rao, CR. (1968). A note on a previous lemma in the theory of least squares and some further results. Sankhya Ser. A. Vol. 30, 245-252.

Moore, E H. (1920). On the reciprocal of the general algebraic matrix (abstract), Bull. Amer. Math. Soc., Vol. 26, 394-395.

Mosic, D. & Djordjevic, DS. (2018). Block representations of the generalized Drazin inverse, Appl. Math. Comput. 331, 200–209.

Penrose, R. (1955). A generalized inverse for matrices, Proceeding Cambridge Philos. Soc., Vol. 51, 406-413.

Penrose, R. (1956). On best approximate solutions of linear matrix equations, Proc. Cambridge Philos. Soc., Vol. 52, 17-19.

Pringle, RM., Rayner AA. (1970). Expressions for generalized inverses of a bordered matrix with application to the theory of constrained linear models, SIAM Rev. 12, 107-115.

Pringle, RM., Rayner AA. (1971). Generalized Inverse Matrices, Griffin,London.

Rao, CR. (1962). A note on a generalized inverse of a matrix with applications to problems in mathematical statistics, Journal of Roy. Statist. Soc. Ser. B. Vol. 24, 152-158.

Rao, CR. (1966). Generalized inverse for matrices and its applications in mathematical statistics, Research papers in Statistics, Festschrift for Journal Neyman, New York, Wiley.

Rao, CR. (1967). Calculus of generalized inverse of matrices. Part 1: General theory, Sankhya Ser. A, Vol. 29, 317-342 s.

Rao, CR., Mitra, SK. (1971). Generalized inverse if matrices and its Applications, Wiley, New York.

Sendra, JR. & Sendra, J. (2016). Symbolic computation of Drazin inverses by specializations, J. Comput. Anal. Applications. 301, 201–212.

Stanimirovic, PS., Petkovic, MD. & Gerontitis, D. (2018). Gradient neural network with nonlinear activation for computing inner inverses and the Drazin inverse, Neural Process Lett, 48, 109–133.

Stanimirovic, PS., Pappas, D., Katsikis, VN. & Stanimirovic, IP. (2012). Full-rank representations of outer inverses based on the QR decomposition, Appl. Math. Comput. 218, 10321–10333.

Xu, S. (2019). Core invertibility of triangular matrices over a ring, Indian Journal of Pure and Applied Mathematics 50: 837 – 847.

Xu, Q., Wei, Y. & Song, C. (2012). Explicit characterization of the Drazin index, Linear Algebra Appl. 436, 2273–2298.

Xu, Q., Song, C. & He, L. (2018). Representations for the Drazin inverse of an anti-triangular block operator matrix E with ind(E) ≤ 2, Linear Multilinear Algebra, 66, 1026–1045.

Wang, G., Wei, Y. & Qian, S. (2018). Generalized inverses: Theory and computations, in Developments in Mathematics, 53, Springer and Beijing, Science Press.

Wang, H. (2016). Core-EP decomposition and its applications. Linear Algebra and Its Applications, 508: 289–300.

Wang, H., Chen, J. & Yan, G. (2018). Generalized Cayley–Hamilton theorem for core-EP inverse matrix and DMP inverse matrix, J. Southeast Univ. English Edition 34: 135–138.

Wang, H., Li, X. (2015). Characterizations of the core inverse and the core partial ordering. Linear Multilinear Algebra, 63: 1829–1836.

Wang, H., Li, X. (2016). Partial orders based on core-nilpotent decomposition. Linear Algebra and its Applications. 488: 235-248.

Yang, H. & Liu, X. (2011). The Drazin inverse of the sum of two matrices and its applications. J. Comput. Appl. Math. 235, 1412–1417.

Zhang, D. & Mosic, D. (2018). Explicit formulae for the generalized Drazin inverse of block matrices over a Banach algebra. Filomat. 32, 5907–5917.

Zhang, D., Mosic, D. & Guo, L. (2020). The Drazin inverse of the sum of four matrices and its applications. Linear Multilinear Algebra. 68, 133–151.

Zhang, D., Mosic, D. & Chen, L. (2022). On The Drazin inverse of anti-triangular block matrices. Electronic research archive. 30(17), 2428-2445.

Zhang, D., Mosic, D. & Jin, Y. (2022). Explicit formulae for The Drazin inverse of anti-triangular block matrices. Filomat, 36(18), 6215-6229.

Zhang, D., Jin, Y. & Mosic, D. (2022). The Drazin inverse of anti-triangular block matrices. Journal of Applied Mathematics and Computations. 68, 2699-2716.

Zhou, J., Bu, C. & Wei, Y. (2012). Some block matrices with signed Drazin inverses. Linear Algebra Appl. 437, 1779–1792.

Zhou, M., Chen, J., Li, TT. & Wang, D. (2018). Three limit representation of the core-EP inverse, Filomat ,32(17): 5887 – 5894.

Zuo, KZ. & Cheng, YJ. (2019). Three new revisition of core-EP inverse of matrices, Filomat, 33(10): 3061 – 3072.

Zuo, KZ., Yu, L. & Gaojun L. (2020). A new generalized inverse of matrices from core-EP decomposition. https://doi.org/10.48550/arXiv.2007.02364.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler	
Adı Soyadı	Mükerrem BARUT
Doğum Yeri	
Doğum Tarihi	
Uyruğu	■ T.C. ❒ Diğer:
Telefon	
E-Posta Adresi	

Eğitim Bilgileri	
Lisans	
Üniversite	Ordu Üniversitesi
Fakülte	Fen Edebiyat Fakültesi
Bölümü	Matematik Bölümü
Mezuniyet Yılı	2013
Yüksek Lisans	
Üniversite	
Enstitü Adı	
Anabilim Dalı	
Programı	
Mezuniyet Tarihi	
Doktora	
Üniversite	
Enstitü Adı	
Anabilim Dalı	
Programı	
Mezuniyet Tarihi	