T. C.

ORDU ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GENEL LİNEER MODEL ALTINDA EN İYİ LİNEER YANSIZ TAHMİN EDİCİLERİN KARŞILAŞTIRILMASI

MEHMET ÖZKAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ORDU 2024

TEZ BİLDİRİMİ

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan ve kullanılan intihal tespit programının sonuçlarına göre; bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

MEHMET ÖZKAN

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

GENEL LİNEER MODEL ALTINDA EN İYİ LİNEER YANSIZ TAHMİN EDİCİLERİN KARŞILAŞTIRILMASI

MEHMET ÖZKAN

ORDU ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ, 70 SAYFA

(TEZ DANIŞMANI: PROF. DR. SELAHATTİN MADEN)

Bu tez çalışması beş bölüm halinde düzenlenmiştir. Birinci bölümde çalışmanın amacından bahsedilerek bir giriş verilmiştir. İkinci bölümde çalışmamızda gerekli olacak temel tanımlar, teoremler ve genel bilgiler ifade edilmiştir. Üçüncü bölümde genel lineer model ve onun kısıtlamalı modelleri altında çeşitli parametre fonksiyonlarının en iyi lineer yansız tahmin edicileri (BLUE) gözönüne alınmıştır. Ayrıca genel lineer modellerde model matrisleri ve kovaryans matrislerinin yapılarına göre en iyi lineer yansız tahmin edicilerin eşit olması için bazı gerek ve yeter şartlar araştırılmıştır. Dördüncü bölümde sonuç ve öneriler verilmistir. Beşinci bölümde ise tezde yararlanılan kaynaklar listelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Matris, Rank, Genelleştirilmiş İnvers, Genel Lineer Model, Gauss–Markov Modeli, Kovaryans Matrisi, Tahmin Edici, En İyi Lineer Yansız Tahmin Edici, Ortogonal İzdüşüm.

ABSTRACT

COMPARISON OF THE BEST LINEAR UNBIASED ESTIMATORS UNDER GENERAL LINEAR MODEL

MEHMET ÖZKAN

ORDU UNIVERSITY INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

MATHEMATICS

MASTER THESIS, 70 PAGES

(SUPERVISOR: PROF. DR. SELAHATTİN MADEN)

This thesis is organized in five parts. In the first chapter, an introduction is given by mentioning the purpose of the study. In the second part, the basic definitions, theorems and general information that will be required in our study are expressed. In the third section, the best linear unbiased estimator (BLUE) of several parametric functions under a general linear model and its restricted models are considered. Furthermore, some necessary and sufficient conditions are investigated for equalities of best linear unbiased estimators of parametric functions according to structures of model matrices and covariance matrices in general linear models. In the fourth chapter, conclusions and recommendations are given. In the fifth chapter, the sources used in the thesis are listed.

Keywords: Matrix, Rank, Generalized Inverse, General Linear Model, Gauss–Markov Model, Covariance Matrix, Estimator, Best Linear Unbiased Estimator, Orthogonal projector.

TEŞEKKÜR

Tez konusunun belirlenmesinde ve tüm çalışmalarım boyunca her zaman üstün bilgi ve deneyimleriyle bana yol gösteren danışman hocam Sayın Prof. Dr. Selahattin MADEN' e en içten duygularla teşekkür eder, saygılarımı sunarım.

Ayrıca Lisansüstü eğitimim sırasında kendilerinden ders aldığım ve engin tecrübelerinden yararlandığım Ordu Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümündeki tüm değerli hocalarıma teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER ve KISALTMALAR LİSTESİ

$\mathbb{C}$	: Kompleks Sayılar Cismi
$\mathbb{N}$	: Doğal Sayılar Cismi
$\mathbb{R}$	: Reel Sayılar Cismi
$\boldsymbol{K_n^m}, \boldsymbol{K^{mxn}}$	: K Cismi Üzerinde Tanımlı $m \times n$ Boyutlu Tüm Matrislerin Kümesi
I_n	: $n \times n$ Boyutlu Birim Matris
$\boldsymbol{A'}, \boldsymbol{A^T}$	: A Matrsinin Tranzpozu
$\mathbf{Ek}(\boldsymbol{A})$	: A Matrisinin Ek Matrisi
$\lvert\boldsymbol{A}\rvert$	: A Matrisinin Determinantı
$\boldsymbol{A^{-1}}$	: A Matrisinin Inversi
$\boldsymbol{r}(\boldsymbol{A})$	: A Matrisinin Rankı
$\boldsymbol{A}^{\perp}$	: A Matrisinin Ortogonal Komplementi
$\boldsymbol{\mathcal{N}}(\boldsymbol{A})$	: A Matrisinin Sıfır Uzayı
$\boldsymbol{\mathfrak{R}}(\boldsymbol{A})$	: A Matrisinin Ranj (Sütun) Uzayı
$\boldsymbol{A}^{-}$	: A Matrisinin Genelleştirilmiş Inversi (Iç Inversi)
$\boldsymbol{A}^{+}$	: A Matrisinin Moore-Penrose Inversi
$\boldsymbol{OLSE}(\boldsymbol{\beta})$	: β Parametresinin Alışılmış En Küçük Kareler Tahmin Edicisi
$\boldsymbol{BLUE}(\boldsymbol{\beta})$	: β Parametresinin En Iyi Lineer Yansız Tahmin Edici
$\lVert\boldsymbol{u}\rVert$	: u Vektörünün Öklid Normu
$\boldsymbol{boy}(\mathbf{u})$	: u Vektörünün Boyutu
$\boldsymbol{min}\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\}$	: a ve b Sayılarının Minimumu
$\boldsymbol{N}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{V})$	: a ortalamalı V Varyanslı Normal Dağılım
$\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial z}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z})$	: $f(z)$ Fonksiyonunun Türevi
$\boldsymbol{\sigma^2 V}$	: Kovaryans Matrisi
$\boldsymbol{cov}(\boldsymbol{X})$	: X Değişkeninin Kovaryansı
$\boldsymbol{cov}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$	: X ve Y Değişkenleri Arasındaki Kovaryans
$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{X})$	: X Değişkeninin Beklenen Değeri
$\boldsymbol{var}(\boldsymbol{X})$	: X Değişkeninin Varyansı

1. GİRİŞ

Matrisler yardımıyla inşa edilen lineer modeler ve çeşitli uygulamaları bugün artık teorik matematik, istatistik, sosyoloji, kimya, fizik ve elektrik mühendisliği gibi pek çok teknik alanda oldukça önemli hale gelmiştir. Matris hesabı ise uzun yıllardan beri bilinmekte ve kullanılmaktadır. İngiliz matematikçi Sylvester, 1850 yılında matris kavramını ilk kez kullanmıştır. 1853 yılında bir diğer ingiliz bilgini Hamilton '*Lineer and Vector Functions'* isimli eserinde matrislerin bazı özelliklerinden faydalanmış ama matris ismini henüz kullanmamıştır. Yine bir ingiliz matematikçi olan Cayley ise 1858 yılında zamanında çok meşhur olan *'Memorie on the Theory of Matrices*' isimli çalışmasında matris cebirinin temel esaslarını ortaya koymuştur. Daha sonra fransız Laguerre ve alman Frobenius matrislerle ilgili bazı yeni kavramlar ve teoremler üzerinde çalışmalar yapmışlardır.

Singüler bir matrisin inversi fikri ise ilk defa 1920 yılında Moore (1920, 1935) tarafından ortaya atılmıştır. Ancak 1955 yılına kadar bu konuda herhangi bir sistematik çalışmaya rastlanamamaktadır. 1955 yılında, önceki yıllarda yapılan çalışmalardan tamamen bağımsız olarak, Penrose (1955, 1956) biraz daha farklı bir yoldan Moore tarafından verilen invers kavramını tekrar tanımlamıştır. Penrose ile aşağı yukarı aynı zamanlarda yaşayan bilim adamlarından Rao (1967) tarafından tanımlanan ve geliştirilen Pseuda invers ise Moore ve Penrose tarafından verilen kısıtlamaların tümünü sağlamamaktadır. Rao, daha sonraki çalışmalarında lineer denklemlerle ilgili problemlerinin çözümünde yeterli gelen ve Moore ve Penrose' un vermiş olduğu tanımdan daha zayıf bir tanım ortaya koymuştur. Böyle bir invers, bir genelleştirilmiş invers (g-invers) olarak adlandırılmış ve bunun çeşitli uygulamaları Rao (1967)' nun çeşitli çalışmalarında yer almıştır. Genelleştirilmiş inverslerle ilgili önemli gelişmeler ve bunların uygulamaları *Generalized Inverse of Matrices and Its Applications* (Wiley, 1971) isimli kitapta verilmiştir.

Matris rankı ile ilgili bilinen bir gerçek şudur ki aynı mertebeden iki A ve B matrisinin benzer olması, yani $UAV = B$ olacak şekilde iki tersinir U ve V matrisinin mevcut olması için gerek ve yeter şart $r(A) = r(B)$ olmasıdır. Bir matrisin sütunlarının ya da satırlarının doğrusal bağımsızlığını belirlemek için en basit yöntem, matrisin elementer matris işlemler yardımıyla satır veya sütun eşelon formlara indirgenmesidir. İdempotent matrislerden oluşan herhangi bir matris ifadesi için, bu ifade ile ilgili çeşitli rank eşitlikleri kurulabilir ve bu rank eşitliklerinden yararlanılarak verilen ifadenin bazı temel özellikleri elde edilebilir. Bazı rank formülleri ise çeşitli blok matrisler ve elementer blok matris işlemleri yardımıyla oluşturulabilir. Son zamanlarda yapılan çalışmalarda bu yöntemlerle pekçok yeni ve önemli rank eşitlikleri elde edilmiş ve bu rank eşitliklerinden birçok önemli sonuç türetilmiştir.

Olasılık ve özellikle statistik; rasgelelik içeren olaylar, süreçler, sistemler hakkında modeller kurmada, gözlemlere dayanarak bu modellerin geçerliliğini sınamada ve modellerden sonuç çıkarmada gerekli bazı bilgi ve yöntemleri içeren bilim dalıdır. Ayrıca belli bir konu ile ilgili verileri derlemek, düzenlemek, özetlemek, sunmak, analiz etmek ve bu verilerden bir sonuca varmak için kullanılan yöntemlerin her biri istatistiğin konusunu oluşturmaktadır. Gerçek hayatta karşılaşılan karmaşık problemleri anlamak, anlatmak istedikleri olgu ve sistemleri basitleştirmek, bu problemlerin belli varsayımlar altında modellenmesi ile ancak mümkün olabilir. Modellemede kullanılan en güçlü araçlardan biri istatistiktir. Genel olarak modeller deterministik ve olasılıksal olmak üzere ikiye ayrılır. Deterministik modeller fen ve sosyal bilimlerde oldukça fazla kullanılır ve bu modeller bir sistemin gelecekteki tüm davranışlarını sistemin şimdiki durumu ile tam ve kesin olarak ortaya koymaktadır. Olasılıksal modellerde ise, sistem çıktıları değişkenlik gösterebilir. Çünkü model ya rasgele eleman içerir ya da bir şekilde rasgele değişkenler tarafından etki altına alınır.

İstatistikte, lineer modeller kavramı oldukça geniş ve önemli bir yer tutar. Özellikle çok değişkenli lineer modellerde parametre tahminleri, parametrelere ait güven aralıkları ve parametreler üzerine kurulan bazı lineer hipotez testleri ve bunların istatistiksel yorumları literatürde geniş bir uygulama alanı bulur. Ekonometride, bu hipotezlerin ekonometrik anlamlarına yer verilerek elde edilen sonuçlar hakkında yorumlar yapılır. Tüm bunların yanında istatistiksel kavramlara geometrik yorumlarla yaklaşmak bu kavramların çok daha kolay anlaşılmasını sağlamaktadır.

Bir bağımlı değişken ile bir veya daha fazla bağımsız değişken arasındaki ilişkiyi modellemek için kullanılan lineer modeller genel olarak $y = X\beta + \varepsilon$ şeklinde ifade edilir. Bu modelde, y bilinen gözlemlerin $n\times 1$ mertebeli vektörü (rasgele vektör), X $n \times \mathrm{p}(n < \mathrm{p})$ mertebeli bir bilinen katsayı matrisi, β $p\times 1$ mertebeli bilinmeyen parametre vektörü ve $E(\varepsilon)=0$, $Cov(\varepsilon)=\Sigma$ olmak üzere ε ise $n\times 1$ tipinde rasgele değişkenlerin gözlenebilir olmayan bir hata vektörüdür. Bu modeller ekonomi, sağlık, fen ve sosyoloji gibi birçok alanda uygulama alanına sahiptir.

Bu çalışmada, bir genel lineer model ve bu modelden elde edilen bazı alt modeller ele alınarak bu modeler altında bilimeyen parametreler için en iyi lineer yansız tahmin ediciler (BLUE) belirlenecektir. Ele alınan modeller altında, model matrisi ve kovaryans matrisinin yapısındaki farklılıklara bağlı olarak bilinmeyen parametre vektörlerinin tahmin edicileri farklı ifadelere ve özelliklere sahiptir. Ancak bu tahmin ediciler bazı koşullar ve varsayımlar altında benzer özellikler gösterebilirler. Bu nedenle her model için ortak olan bilinmeyen sabit ve rastgele vektörlerin lineer kombinasyonunun BLUE' ları arasındaki ilişki karakterize edilerek BLUE' ların eşitliği ile ilgili gerek ve yeter şartlar incelenmiştir. BLUE' ların denklemleri karmaşık yapıda matris işlemleri içerdiğinden elde edilecek sonuçlar rank metotları kullanılarak elde edilmiştir. Matrisler, matris rankı ve Löwner sıralaması ile ilgili detaylı bilgi için Tian (2002, 2010), Puntanen ve Ark. (2011) ve Tian ve Zhang (2016), Haslett ve Puntanen (2010), Jammalamadaka ve Sengupta (1999,2007), Liu ve Ark. (2017) ve Lu ve Ark. (2015) çalışmalarına bakılabilir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1 Bazı Tanım ve Teoremler

Bu kısımda daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan bazı önemli tanımlar ve teoremler ispatsız olarak verilecektir.

Tanım 2.1

i. K cisim olsun. $m,n \in \mathbb{N}$ ve $1 \le i \le m, 1 \le j \le n$ olmak üzere bütün (i,j) sıralı ikililerin kümesi $A = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ile gösterilsin. $f \to K$ fonksiyonu $(i,j) \to f(i,j) = a_{ij}$ olarak tanımlansın. $a_{ij} \in K$ olacak şekilde seçilen $m.\mathrm{n}$ tane elemanın oluşturduğu tabloya K cismi üzerinde tanımlı $m \times n$ tipinde matris denir. Eğer $K = \mathbb{R}$, reel sayılar kümesi olarak alınırsa matrise reel matris, $K = \mathbb{C}$, kompleks sayılar kümesi olarak alınırsa, matrise kompleks matris denir (Branson R., 1999).

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} \; a_{12} \; .... \; a_{1n} \\ a_{21} \; a_{22} \; .... \; a_{2n} \\ \cdots \; \cdots \; \cdots \; \cdots \\ a_{m1} \; a_{m2} \; ... \; a_{mn} \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

matrisi kısaca $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ şeklinde gösterilir. Burada a_{ij} elemanı A matrisinin i. satır ve j. sütununa karşılık gelen elemanıdır. K cismi üzerinde seçilen bütün $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ biçimindeki matrislerin kümesi $K^{m \times n}$ ile gösterilir.

ii. $A = \left[a_{ij}\right]_{m \times n}$ ve $B = \left[b_{ij}\right]_{m \times n}$ aynı boyutlu iki matris olmak üzere eğer her bir (i,j) için $a_{ij} = b_{ij}$ ise A ve B matrislerine eşit matrisler denir.

iii. $A = \left[a_{ij}\right]_{m \times n}$ matrisinin her bir a_{ij} elemanı sıfır ise, bu takdirde A matrisine bir sıfır matris denir.

iv. $A = \left[a_{ij}\right]_{m \times n}$ ve $B = \left[b_{ij}\right]_{m \times n}$ aynı boyutlu matrisler olmak üzere $A + B$ matrisi

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} ....a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} ....a_{2n} + b_{2n} \\ \cdots & \cdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} ....a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

şeklinde tanımlanır.

v. K cismi üzerinde $s \in K$ bir skaler sayı olmak üzere $sA \in K_n^m$ matrisi

$$kA = \begin{bmatrix} ka_{11}\; ka_{12} \ldots .\; ka_{1n} \\ ka_{21}\; ka_{22} \ldots .\; ka_{2n} \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \ldots \ldots . \\ ka_{m1}\; ka_{m2} \ldots .\; ka_{mn} \end{bmatrix} \tag{2.3}$$

şeklinde tanımlanır.

vi. $A = [a_{ij}]_{m\times p}$ ve $B = [b_{ij}]_{p\times n}$ olmak üzere A ve B matrislerinin çarpımı

$$A.B = \begin{bmatrix} (a_{11}b_{11} + \ldots \ldots + a_{1p}b_{p1}) \ldots & (a_{11}b_{1n} + \ldots \ldots + a_{1p}b_{pn}) \\ (a_{21}b_{11} + \ldots \ldots + a_{2p}b_{p1}) \ldots & (a_{21}b_{1n} + \ldots \ldots + a_{2p}b_{pn}) \\ \ldots \ldots \quad \ldots & \ldots \ldots \ldots \\ (a_{m1}b_{11} + \ldots \ldots + a_{mp}b_{p1}) \ldots & (a_{m1}b_{1n} + \ldots \ldots + a_{mp}b_{pn}) \end{bmatrix} \tag{2.4}$$

biçiminde tanımlanır. Açıkca görüleceği üzere çarpımın tanımlı olabilmesi için birinci matrisin sütun sayısı ile ikinci matrisin satır sayısı eşit olmalıdır. Bu şartlar altında çarpım matrisi $A.B$ veya AB ile gösterilir (Hacısalihoğlu H.H., 1977).

Tanım 2.2

i. Bir $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ matrisinde eğer $m = n$ ise bu durumda A matrisine bir kare matris denir. Bu durumda A matrisindei $a_{11},\ a_{22}, \ldots\ldots\ldots, a_{nn}$ elemanlarına matrisin köşegen (esas köşegen) elemanları denir.

ii. Köşegen elemanları 1 ve diğer elemanları 0 olan bir kare matrise birim matris denir ve birim matris I_n şeklinde gösterilir.

iii. $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ matrisinde aynı numaralı satır ve sütunların yer değiştirilmesi ile elde edilen $A^T = [a_{ji}]_{n\times m}$ matrisine A matrisinin transpozu denir. Bu durumda uygun tipten matrisler için $(A+B)^T = A^T + B^T$ ve $(A.B)^T = B^T A^T$ eşitlikleri sağlanır.

iv. A bir kare matris olmak üzere $A^T = A$ ise, A matrisine simetrik matris denir (Hacısalihoğlu H.H., 1977).

Teorem 2.1 A, B ve C bir K cismi üzerinde tanımlı $m\times n$ boyutlu matrisleri ve $k_1, k_2 \in K$ skaler sayısı için aşağıdaki eşitlikler sağlanır (Hacısalihoğlu H.H., 1977).

i. $(A+B)+C = A+(B+C)$

ii. $A+0=0$

iii. $A+(-A)=0$

iv. $A+B=B+A$

v. $k_1(A+B)=k_1A+k_2A$

vi. $(k_1+k_2)A=k_1A+k_2A$

vii. $(k_1k_2)A=k_1(k_2)A$

viii. $1A=A$ ve $0A=0$

Tanım 2.3 $x_1, x_1, ...x_1 \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ vektörleri için $\sum a_i x_i = 0$ olacak şekilde hepsi birden sıfır olmayan $a_1, a_2, ...a_n$ skaler sayıları bulunuyorsa $x_1, x_1, ...x_1$ vektörlerine lineer bağımlıdır, aksi halde lineer bağımsızdır denir (Hacısalihoğlu H.H., 1977).

Tanım 2.4 A matrisi $m\times n$ boyutlu ve $a_1, a_2, \dots\dots\dots a_n$ sütunlarına sahip olan bir matris olsun. $x' = (x_1, x_1, ...x_1)$ vektörü için $Ax = x_1a_1 + x_2a_2 + ... + x_na_n$ ifadesi A matrisinin sütunlarının bir lineer kombinasyonunu gösterir. Bu durumda A matrisinin sütunlarının lineer kombinasyonu olarak ifade edilebilen bütün vektörlerin kümesine A matrisinin sütun uzayı denir ve $\Re(A)$ ile gösterilir. $\Re(A)$, A matrisinin sütunları tarafından gerilir ve sütun uzayı

$$\Re(A) = \{y \in \mathbb{R}^{m\times 1} : y = Ax, x \in \mathbb{R}^{n\times 1}\} \tag{2.5}$$

ile ifade edilir (Hacısalihoğlu H.H., 1977).

Tanım 2.5 A matrisinin $a_1, a_2, ...a_n$ satırları tarafından üretilen $\mathbb{R}^{n\times 1}$ in alt uzayına A matrisinin satır uzayı denir. A matrisinin satır uzayı $\Re(A')$ olarak gösterilir (Hacısalihoğlu H.H., 1977).

Teorem 2.2 A matrisi $m\times n$ boyutlu ve C matrisi, A matrisinin satır indirgenmiş eşelon biçimi olsun. A matrisinin satır uzayı ile C matrisinin satır uzayı aynıdır (Hacısalihoğlu H.H., 1977).

Tanım 2.6 Bir matrisinin sütun uzayının boyutuna matrisin sütun rankı denir. Bir matrisinin satır uzayının boyutuna ise matrisin satır rankı denir. Bir A matrisinin satır indirgenmiş eşelon biçimindeki sıfırdan farklı satırların sayısına ise matrisin rankı denir ve $r(A)$ ile gösterilir (Hacısalihoğlu H.H., 1977).

Teorem 2.3 A matrisi $m\times n$ boyutlu matris olsun. A matrisinin satır rankı, sütun rankına eşittir (Hacısalihoğlu H.H., 1977).

Teorem 2.4 Uygun boyutlu A, B ve C matrisleri için aşağıdaki ifadeler doğrudur (Hacısalihoğlu H.H., 1977):

i. $\Re(A:B) = \Re(A) + \Re(B)$,

ii. $\Re(AB) \subseteq \Re(A)$,

iii. $\Re(AA') = \Re(A)$,

iv. $\Re(C) \subseteq \Re(A) \Leftrightarrow C$ matrisi AB biçimindedir.

v. $boy(\Re(A)) = r(A)$,

vi. $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ için $r(A) \leq \min\{m, n\}$,

vii. $r(A) = r(A') = r(A'A) = r(AA')$.

Teorem 2.5 A_1 ve A_2 tersi olan matrisler ise, bu durumda herhangi bir A_3 matrisi için A_3, A_1A_3 , A_3A_2 ve $A_1A_3A_2$ matrisleri aynı ranka sahiptir (Hacısalihoğlu H.H., 1977).

Tanım 2.7 Eğer $P^2 = P$ olacak şekilde bir P matrisi varsa P matrisine idempotent matris denir (Hacısalihoğlu H.H., 1977).

Tanım 2.8 A matrisinin sıfır uzayı

$$\mathcal{N}(A) = \{x \in \mathbb{R}^{n\times 1}: Ax = 0\} \subseteq \mathbb{R}^{n\times 1} \tag{2.6}$$

şeklinde tanımlanır (Hacısalihoğlu H.H., 1977).

Tanım 2.9 Eğer $AB = I$ ise, B matrisine A matrisinin sağ tersi denir ve bu ters B^{-R} ile gösterilir. A matrisine ise B matrisinin sol tersi denir ve bu ters A^{-L} ile gösterilir. A matrisinin sağ tersi, A matrisi tam satır ranklı olduğu zaman vardır. Benzer şekilde B matrisinin sol tersi, B matrisi tam sütun ranklı olduğunda vardır. Sağ ters veya sol ters tek olmayabilir. $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ üçgensel matris olmak üzere, rank şartları gösterir ki, $m > n$ olduğunda sağ ters olmayabilir ve $m < n$ olduğunda sol ters olmayabilir. Aslında her iki tersin olması için gerek ve yeter şart A matrisinin kare matris ve tam ranklı olmasıdır. Bu durumda matrisin sağ tersi ile sol tersi eşit olur ve bu matrise, nonsingüler A matrisinin tersi denir. A^{-1} ile gösterilir. O halde A matrisinin tersi vardır ve bu ters tektir ancak ve ancak A matrisi nonsingülerdir. $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ dır. Eğer A ve B matrislerinin her ikisi de nonsingüler ve aynı boyutlu ise $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ dir.

Tanım 2.10 Herhangi bir A matrisi için $ABA = A$ ise, B matrisine A matrisinin genelleştirilmiş inversi denir ve A matrisinin genelleştirilmiş inversi A^- ile gösterilir. Eğer $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ise, $A^- \in \mathbb{R}^{n \times m}$dir. Her matrisin en az bir genelleştirilmiş tersi vardır. Her simetrik matrisin en az bir simetrik genelleştirilmiş tersi vardır. Genel olarak, A^- tek değildir. A^- matrisinin tek olması için gerek ve yeter koşul A matrisinin nonsingüler olmasıdır. Bu durumda $A^- = A^{-1}$ dir.

Tanım 2.11 Herhangi bir A matrisi için,

i. $ABA = A$

ii. $BAB = B$

iii. $(AB)' = AB$ (2.7)

iv. $(BA)' = BA$

koşullarını sağlayan, B matrisine A matrisinin Moore-Penrose tersi (inversi) denir ve A^+ ile gösterilir. Bir matrisin Moore-Penrose inversi tektir. Eğer A matrisi tersi alınabilir bir matris ise bu durumda $A^+ = A^{-1}$ dir.

Teorem 2.6 A, B ve C uygun boyutlu matrisler olmak üzere aşağıdaki ifadeler doğrudur (Hacısalihoğlu H.H., 1977).

i. $(A^+)^+ = A$

ii. AA^+ ve A^+A idempotenttir.

iii. $r(A) = r(A^+) = r(AA^+) = r(A^+A)$,

iv. $A'AA^+ = A' = A^+AA'$ ve $A'(A^+)'A^+ = A^+ = A^+(A^+)'A'$,

v. $A = 0 \Leftrightarrow A^+ = 0$, $AB = 0 \Leftrightarrow B^+A^+ = 0$ ve $A^+B = 0 \Leftrightarrow A'B = 0$,

vi. $r(A) = r(A^-A) = r(AA^-) \leq r(A^-)$,

vii. BA^-C, A matrisinin genelleştirilmiş tersinin seçimine göre değişmez kalır ancak ve ancak $\Re(B') \subseteq \Re(A')$ ve $\Re(C) \subseteq \Re(A)$ dır.

viii. A^-A ve AA^- matrislerinin her biri idempotent matrislerdir. A matrisi simetrik ve idempotent matris ise $I - A$ matrisi de simetrik ve idempotent matristir.

Tanım 2.12 $A = (a_{ij})$ $n \times n$ boyutlu bir kare matris olmak üzere A matrisinin determinantı $|A|$ ile gösterilir ve aşağıdaki gibi tanımlanır (Hacısalihoğlu H.H., 1977).

i. $n=1$ için $|A| = a_{11}$,

ii. $n=2$ için $|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$,

iii. $n>2$ için

$$|A| = a_{11}|A_{11}| - a_{12}|A_{12}| + \text{...........} + (-1)^{1+n}a_{1n}|A_{1n}| = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{1+i}a_{1i}|A_{1i}| \qquad (2.8)$$

dir, burada A_{1i}, $(1,i)$. minördür.

Teorem 2.7 A matrisi köşegen elemanları $a_{11},\text{.......},a_{nn}$ olan $n\times n$ boyutlu matris olmak üzere, eğer A matrisi üst üçgensel, alt üçgensel veya köşegen matris ise bu takdirde $|A| = a_{11}a_{12}\text{........}a_{nn}$ dir (Hacısalihoğlu H.H., 1977).

Sonuç 2.1

i. A matrisi tersinir bir matris olmak üzere $|A| = \frac{1}{|A^{-1}|}$ dir.

ii. I birim matris olmak üzere $|I| = 1$ dir (Hacısalihoğlu H.H., 1977).

Teorem 2.8 A ve B aynı mertebeden kare matrisler olmak üzere $|AB| = |A||B|$ dir (Hacısalihoğlu H.H., 1977).

Tanım 2.13 $y = (y_i) \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ vektörü ve simetrik $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrisi için,

$$Q(y) = y'Ay = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} y_i y_j a_{ij} \qquad (2.9)$$

ifadesine, y_i elemanlarının bir kuadratik formu ve A matrisine de bu kuadratik formun matrisi denir. $y'Ay$ kuadratik formu, simetrik bir A matrisi tarafından karakterize edilir ve bu matrise kuadratik formun matrisi denir (Hacısalihoğlu H.H., 1977). Böyle bir matris için aşağıdakiler söylenebilir.

i. Eğer $\forall y \neq 0$ için $y'Ay > 0$ ise A pozitif tanımlıdır.

ii. Eğer $\forall y \neq 0$ için $y'Ay < 0$ ise A negatif tanımlıdır.

iii. Eğer $\forall y$ için $y'Ay \geq 0$ ise A nonnegatif tanımlıdır.

Sonuç 2.2 Eğer $f(z) = z'Az$ bir kuadratik form, z bir $m\times 1$ tipinde vektör ve A herhangi bir $m\times m$ tipinde simetrik matris ise, bu takdirde

$$\frac{\partial}{\partial z} f(z) = 2Az \qquad (2.10)$$

olacaktır.

2.2 Lineer Modelin Kuruluşu

y gözlemlerin $n\times1$ boyutlu vektörü (rasgele vektör), X $n \times \mathrm{p}(n < \mathrm{p})$ boyutlu bir bilinen katsayı matrisi, β $p\times 1$ boyutlu bilinmeyen parametre vektörü ve $E(\varepsilon)=0$, $Cov(\varepsilon)=\Sigma$ olmak üzere ε ise $n\times1$ boyutlu rasgele değişkenlerin gözlenebilir olmayan bir vektörü olsun. Bu durumda bunlar arasında

$$y = X\beta + \varepsilon \tag{2.11}$$

biçiminde varsayılan bir bağıntıya bir lineer model veya lineer regresyon modeli denir. Bu model bazı özel durumlara sahiptir. Bu özel durumlar, ε rasgele vektörünün dağılımına ve kovaryans matrisine ya da X katsayı matrisinin yapısına ve rankına bağlı olarak ortaya çıkar. Aksi belirtilmedikçe, $r(X) = p$ olduğunu kabul edilecektir, başka bir deyişle modelimizdeki X katsayı matrisi tam sütun ranklı olacaktır, ε hata vektörünün dağılımı hakkında ise üç durum göz önüne alınabilir:

1. Durum: $\varepsilon \sim N(0,\sigma^2 I)$
2. Durum: ε bilinmeyen bir dağılıma sahip olup $E(\varepsilon)$=0 ve $Cov(\varepsilon)=\sigma^2 I$ dır.
3. Durum: $Cov(\varepsilon)=\sigma^2 V$ dir, burada V bilinen pozitif definit bir matristir.

Birinci durumda her bir ε_i rasgele değişkeni 0 ortalamalı, bilinmeyen σ^2 varyanslı normal dağılıma sahip olup ε_i , $i = 1,2,3,\ldots\ldots,N$, ler kendi aralarında bağımsızdır. İkinci durumda, her bir ε_i nin beklenen değeri sıfır ise, ε_i ler ilişkisiz ve ε_i ler bilinmeyen ortak σ^2 varyansına sahiptirler. Birinci ve üçüncü durumdaki varsayımlar altındaki modellere Gauss-Markov modeli denir. İkinci durumdaki modellere ise bazen en küçük kareler modelleri adı verilir. Ayrıca hata terimi normal dağılımlı olduğunda bu modellere hipotez modelleri de denilmektedir.

$y = X\beta + \varepsilon$ lineer modelinde $X\beta$ vektörüne modelin deterministik kısmı, y ve ε vektörlerine ise modelin stokastik kısmı adı verilir. y vektörü bağımlı değişken, tepki değişkeni veya açıklanan değişken adı verilen bir rastgele değişken ile ilgili gözlemler vektörüdür. X matrisine tasarım matrisi, açıklayıcı değişkenlerin matrisi, bağımlı değişkenlerin gözlem matrisi veya model matrisi gibi isimler verilmektedir ve ε vektörüne de hata vektörü denilmektedir. Gerçek yaşamda olayların lineer modeller yardımıyla modellenmesi çalışmalarında $y,\ X,\ \beta$ ve ε değişkenleri birçok değişik şekillerde anlamlandırılmaktadır. Örneğin bazı modellerde y üretim miktarı, bazılarında boy uzunluğu, bazılarında ise bir ekonomik değişken olabilir.

β_0 hızı ile hareketine başlayan ve β_1 ivmesi ile doğrusal hareket eden bir cismin zamana (t'ye) bağlı olarak aldığı yol $S = \beta_0 + \beta_1 t$ formülü ile verilmektedir. Bu şekilde hareket eden bir cismin hızını ve ivmesini bilmek ve daha sonra belli bir zamanda aldığı yol miktarını belirlemek istediğimizi farzedelim. Bu durumda keyfi olarak seçtiğimiz t_i , $i = 1, 2, ..., N,$ zamanlarında yol uzunluklarını gözlemlemeye kalkıştığımızda ölçümlerdeki hatalardan dolayı S_i , $i = 1,2, \dots\dots\dots N,$ gözlemleri için $S_i = \beta_0 + \beta_1 t_i + \varepsilon_i$ gibi bir modelin düşünülmesmi daha uygun görünmektedir. Bu durumda

$$y = \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ \vdots \\ S_N \end{pmatrix}_{N\times 1}, \qquad X = \begin{pmatrix} 1 & t_1 \\ 1 & t_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & t_N \end{pmatrix}_{N\times 2}, \varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_N \end{pmatrix}_{N\times 1} \qquad \beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}_{2\times 1}$$

gösterimleri altında yukarıda belirtilenler

$$y = X\beta + \varepsilon$$

şeklinde bir lineer model olarak ifade edilmektedir. Bu modelde eğer y gözlem vektöründeki gözlemleri veren açıklayıcı ya da bağımlı değişkeni y harfi, X matrisinin ikinci sütunundaki gözlemler ile ilgili bağımsız değişkeni X harfi ve hatayı da ε harfi ile gösterirsek bu değişkenler arasındaki bağıntı

$$y = \beta_0 + \beta_1 X + \varepsilon$$

olarak da ifade edilebilir.

Bir diğer örnek olarak, belli bir cins narenciye meyve suyu miktarını narenciyenin ağırlığına bağlı olarak incelemek isteyelim. Gerçekte bir narenciyedeki meyve suyu miktarı sadece narenciyenin ağırlığına bağlı değildir, ama ağırlık ile meyve suyu arasında bir fonksiyonel bağıntının (bilinmeyen parametrelere göre lineer bir ifade olabilir) varlığını kabul edip, gözlemlerin bunu doğrulayıp doğrulamadığını, gözlemlerden çıkarılan bir bağıntının bulunmasını ve bunların neticesinde ağırlığa bağlı olarak meyve suyu miktarını tahmin etmeyi düşünebiliriz. Bu örnekteki açıklayıcı değişken olan narenciyenin ağırlığı ile açıklanan(bağımlı) değişken olan narenciyedeki meyve suyu miktarı birer rasgele değişken olacaktır. Bu durumda eğer ağırlığı X ile ve meyve suyu miktarını da y ile gösterirsek o zaman X ve y değişkenlerinin bir ortak dağılımı söz konusu olacaktır. Bu durumda $E(y|X=x) = g(x)$ ifadesine y nin X üzerinde bir regresyon denklemi denildiğini ve X ve y değişkenlerinin ortak dağılımının normal olması durumunda bunun

$$E(y|X=x) = g(x) = \beta_0 + \beta_1 x$$

şeklinde verildiğini hatırlatalım. Bu takdirde (X, y) iki boyutlu rastgele değişkeninin ortak dağılımından N birimlik örneklem, (X_i, y_i) , $i = 1,2,\ldots\ldots,N$, olmak üzere

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i, \quad \varepsilon_i \sim (0, \sigma^2 I)$$

veya

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix}_{N\times 1}, \; X = \begin{pmatrix} 1 & X_1 \\ 1 & X_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & X_N \end{pmatrix}_{N\times 2}, \; \varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_N \end{pmatrix}_{N\times 1}, \; \beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}_{2\times 1}$$

matris gösterimi altında

$$y = X\beta + \varepsilon,$$

modeline bir basit lineer regresyon modeli denir. X ve y rasgele değişkenleri arasında bir ortak dağılım düşünmeden sadece y bağımlı değişken ile ilgili gözlemlere dayalı olarak,

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i, \; i = 1,2,\ldots\ldots,N,$$

biçiminde bir ifade söz konusu olduğunda modele basit lineer model denir.

Öte yandan narenciyenin ağırlığı olan X değişkeni ile narenciyedeki meyve suyu miktarı olan y değişkeninin ortak dağılımı normal olmayabilir. Bizim buradaki amacımız X değişkeninin gözlenen değerine bağlı olarak y değişkeninin gözlenen değerini ön görmek olduğuna göre

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i, \; i = 1,2,\ldots\ldots,N,$$

biçiminde bir lineer modeli ele almak daha uygun olacaktır. Bu durumda ε hata terimi, birinci örnekteki yol uzunluğunun ölçülmesi sırasındaki hataya benzer bir hatayı içermekle birlikte, X değişkeninin belli bir değeri için y değişkenindeki rastgeleliği ve ayrıca model belirlemedeki hatayı da içerecektir.

Bir lineer modelde eğer açıklayıcı değişken sayısı birden çok ise bu modele çoklu lineer model (multiple linear model) denir. Bir lineer modelde eğer bağımlı değişken sayısı birden çok ise bu durumda da modele çok değişkenli model (multivariate model) adı verilir. Sıcaklık ve basıncın, sertlik üzerindeki etkisinin fonksiyon biçiminde bir bağıntı ile ifade edilip edilemeyeceği, bu bağıntının biçiminin ne olacağı veya sıcaklık ile basınç değişkenlerinin sertliği ne derece etkileyip etkilemediği gibi sorunlar ilk olarak metalürji biliminin sorunları gibi gözükmektedir. Metalürji biliminin kanunlarına göre sıcaklık ve basıncın sertlik üzerindeki etkisi tam olarak belirlenmiş olabilir veya bağıntı biçimsel olarak belirlenmiş ancak içinde bilinmeyen katsayılar mevcut ya da aralarında bir bağıntı var ama ne olduğu belirlenmemiş olabilir. İlk durumda istatistikçinin yapacağı fazla bir şey kalmamıştır. Belki sadece belirlenmiş olan modelin geçerliliğinin sınanmasında yardımcı olabilir. İkinci ve üçüncü durumlarda ise istatistikçiye önemli görevler düşmektedir. Amaç belirlendikten sonra (Örneğin bu amaç hangi sıcaklık ve basınçta malzemenin sertliği maksimum olmaktadır şeklinde olabilir) gözlemlerin alınacağı en iyi deney tasarımının seçilmesi ve ardından da bir istatistiksel sonuç çıkarımının yapılması istatistik biliminin sorunudur.

Bir diğer örnek olarak belirli bir ürün türünün verimini incelemek istediğimizi varsayalım. Şüphesiz ki verim, toprak ve hava ile ilgili birçok tabiat özelliği yanında sulama, gübreleme, toprağı işleme gibi bazı etkenlere de bağlıdır. Bu nedenle modelleme sırasında, çok karmaşık olan gerçek hayattaki ilişkilerden bazılarını ihmal ederek, verim miktarı (y) için, toplam yağış miktarı (X_1), sıcaklık ortalaması (X_2), gübre miktarı (X_3) ve birim metrekaredeki bitki sayısı (X_4) değişkenlerine bağlı,

$$y = \beta_0 + X_1\beta_1 + X_2\beta_2 + X_3\beta_3 + X_4\beta_4 + \varepsilon$$

biçiminde bir modelin geçerli olduğunu varsayalım. Bu durumda gerek model geçerliliğinin sınanması ve gerekse geçerli olan bir modelde açıklayıcı değişkenlerin etkilerinin yani parametrelerin tahmin edilmesi amacıyla yapılacak araştırmada veri toplama işlemi uygulamada kolay olmayacaktır. Modeldeki yağış miktarı ve sıcaklık ortalaması ile ilgili açıklayıcı değişkenler birer rasgele değişken olmasına rağmen gübre miktarı ile ilgili açıklayıcı değişken bir deterministik değişken olarak görülebilir. Bu nedenle açıklayıcı değişkenlerin birer rasgele değişken olup olmadığına bakılmaksızın, bundan sonra açıklayıcı değişkenler ile ilgili X matrisini, gözlem değerlerinin bir matrisi, yani sabitlerin bir matrisi olarak düşünmek daha mantıklı olacaktır.

2.3 Parametre Tahmini

Şimdi bir denemenin n kez tekrarlandığını ve aşağıdaki verinin elde edildiğini varsayalım.

Gözlem Numarası	y değişkeni	$X_1 \quad X_2 \quad \cdots \quad X_p$ açıklayıcı değişkenleri
1	y_1	$x_{11} \quad x_{12} \quad \cdots \quad x_{1p}$
2	y_2	$x_{21} \quad x_{22} \quad \cdots \quad x_{2p}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots \quad \vdots \quad \ddots \quad \vdots$
n	y_n	$x_{n1} \quad x_{n2} \quad \cdots \quad x_{np}$

Bu durumda modelin

$$y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \cdots + \beta_p X_p + \varepsilon$$

olduğunu kabul ederek, gözlemlerin n- lilerin aynı modele işleyeceği de kabul edilirse onlar arasında

$$y_1 = \beta_0 + \beta_1 x_{11} + \beta_2 x_{12} + \cdots + \beta_p x_{1p} + \varepsilon_1$$

$$y_2 = \beta_0 + \beta_1 x_{21} + \beta_2 x_{22} + \cdots + \beta_p x_{2p} + \varepsilon_2$$

$$\vdots$$

$$y_n = \beta_0 + \beta_1 x_{n1} + \beta_2 x_{n2} + \cdots + \beta_p x_{np} + \varepsilon_n$$

şeklinde bir bağıntı sağlanır. Bu n tane denklem matris formunda

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1p} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{np} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{1p} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

olarak yazılabilir. Genel olarak, p sayıda bağımsız değişken içeren bir basit lineer model $y = X\beta + \varepsilon$ olarak ifade edilebilir. Bu durumda eğer regresyon sabiti mevcut ise, X in birinci sütunu $(1,1,\dots,1)'$ olacaktır.

İstatistiksel çıkarımları ortaya koymak için $y = X\beta + \varepsilon$ modelinde bazı varsayımlara ihtiyaç duyulur. Bu varsayımlar regresyon katsayılarının tahmin edicisinin istatistiksel özelliklerini incelemek için kullanılır ve aşağıdaki gibi sıralanabilir:

(i) $E(\varepsilon) = 0$.

(ii) $E(\varepsilon\varepsilon') = \sigma^2 I_n$.

(iii) $r(X) = p$

(iv) X stokastik (rasgele) olmayan bir matristir.

(v) $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2 I_n)$.

Regresyon katsayı vektörünün tahmini için bir genel yöntem, uygun şekilde seçilen bir M fonksiyonu için,

$$\sum_{i=1}^{n} M(\varepsilon_i) = \sum_{i=1}^{n} M\left(y_i - x_{i1}\beta_1 - x_{i2}\beta_2 - \cdots - x_{ip}\beta_p\right)$$

ifadesini minimumlaştırmaktır. Bu durumda parametrelerin tahmini için $M(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^2$ ile ilgili olan en küçük kareler yöntemi göz önüne alınır. Tüm β vektörlerinin kümesi B ile gösterilsin. Bu durumda eğer özel bir ek bilgi verilmezse, B kümesi $k-$boyutlu reel öklid uzayında olacaktır. Amacımız ε_i hatalarının kareleri toplamını, yani, verilen y ve X için,

$$S(\beta) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = \varepsilon'\varepsilon = (y - X\beta)'(y - X\beta)$$

ifadesini minimum yapan B de bir $b' = (b_1, b_2, \dots, b_p)$ vektörü bulmaktır. Bu takdirde $S(\beta)$ reel değerli, konveks ve diferansiyellenebilir bir fonksiyon olduğunda, bir minimum daima mevcut olacaktır. Bunun için

$$S(\beta) = y'y + \beta'X'X\beta - 2\beta'X'y$$

yazılır ve $S(\beta)$ nın β ya göre türevleri alınırsa Sonuç 2.2 ye göre

$$\frac{\partial S(\beta)}{\partial \beta} = 2X'X\beta - 2X'y$$

$$\frac{\partial^2 S(\beta)}{\partial \beta^2} = 2X'X$$

yazılabilir. Bu durumda normal denklem

$$\frac{\partial S(\beta)}{\partial \beta} = 0 \ \Rightarrow X'X\beta = X'y$$

dır. Bu durumda $r(X) = p$ olduğu kabul edildiğinden, bu durumda $X'X$ pozitif tanımlıdır ve normal denklemin yegane çözümü

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'y$$

dir ki bu β nın alışılmış en küçük kareler tahmin edicisi (OLSE) olarak adlandırılır. X in tam ranklı olmadığı durumda, $(X'X)^{-}$ matrisi $X'X$ matrisinin bir genelleştirilmiş inversi ve ω keyfi bir vektör olmak üzere

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-}X'y + [I - (X'X)^{-}X'X]\omega$$

olacaktır.

Öte yandan X matrisinin tam ranklı olduğu kabulü altında bilinen bir V pozitif tanımlı matrisi için $E(\varepsilon)=0$ ve $D(\varepsilon)=\sigma^2 V$ olarak dikkate alındığında elde edilen normal denklemlere karşılık gelen $X'V^{-1}X\beta = X'V^{-1}y$ normal denkleminin tek çözümü olan $\hat{\beta} = (X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1}y$ tahmini genelleştirilmiş en küçük kareler edicisi olarak bilinir.

Teorem 2.9

i. $\hat{y} = X\hat{\beta}$; y nin deneysel tahmin edicisi olsun. Bu takdirde $\hat{y}$; $X'X\beta = X'y$ nin tüm β çözümleri için aynı değere sahiptir.

ii. $S(\beta)$; $X'X\beta = X'y$ nin herhangi bir çözümü için minimuma ulaşır (Rao, 1973).

İspat. i. b paramatresi

$$b = (X'X)^{-}X'y + \left[I - (X'X)^{-}X'X\right]\omega$$

şeklinde verilmiş olsun. Bu takdirde $X(X'X)^{-}X'X = X$ olduğundan,

$$Xb = X(X'X)^{-}X'y + X[I - (X'X)^{-}X'X]\omega = X(X'X)^{-}X'y$$

olur ki bu ω ya bağlı değildir. Bu ise, $\hat{y}$ nın $X'Xb = X'y$ nin her b çözümü için aynı değere sahip olduğunu belirtir.

iii. Herhangi β için,

$$\begin{aligned} S(\beta) &= [y - Xb + X(b-\beta)]'[y - Xb + X(b-\beta)] \\ &= (y-Xb)'(y-Xb) + (b-\beta)'X'X(b-\beta) + 2(b-\beta)'X'(y-Xb) \\ &= (y-Xb)'(y-Xb) + (b-\beta)'X'X(b-\beta) \\ &\geq (y-Xb)'(y-Xb) = S(b) \\ &= y'y - 2y'Xb + b'X'Xb \\ &= y'y - b'X'Xb \\ &= y'y - \widehat{y}'\hat{y} \end{aligned}$$

olduğuna dikkat edelim.

Eğer $y = X\beta + \varepsilon$ modeli için, $\hat{\beta}$ tahmini β nın herhangi bir tahmin edicisi ise, bu takdirde uydurulan değerler $\hat{y} = X\hat{\beta}$ olarak tanımlanır. Bu durumda $\hat{\beta}$ aşağıdaki özellikleri sağlar.

(i) $\hat{\beta}$ nın tahmin hatası $\hat{\beta} - \beta = \left(X'X\right)^{-1}X'y - \beta = \left(X'X\right)^{-1}X'\varepsilon$ şeklindedir.

(ii) X in rasgele olmadığı kabul edildiğinden ve $E(\varepsilon) = 0$ olduğundan, $E(\hat{\beta} - \beta) = (X'X)^{-1}X'E(\varepsilon) = 0$ olacaktır. Yani OLSE (alışılmış en küçük kareler tahmin edicisi) β nın bir yansız tahmin edicisidir.

(iii) $\hat{\beta}$ nın kovaryans matrisi $Var(\hat{\beta}) = \sigma^2(X'X)^{-1}$ olacaktır.

Teorem 2.10 (Gauss – Markov Teoremi) Alışılmış en küçük kareler tahmin edicisi (OLSE) β nın en iyi lineer yansız tahmin edicisi (BLUE) dir (Rao, 1973).

İspat. β nın OLSE si y nin bir lineer fonksiyonu olan $b = \left(X'X\right)^{-1} X'y$ olsun. Ayrıca a nın elemanları keyfi sabitler olmak üzere, $l'\beta$ lineer parametrik fonksiyonunun bir $b^* = a'y$ keyfi lineer tahmin edicisini göz önüne alalım. Bu takdirde

$$E\left(b^*\right) = E\left(a'y\right) = a'X\beta$$

yazılabilir ve bu nedenle

$$E\left(b^{*}\right)=a'X\beta=l'\beta\Rightarrow a'X=l'$$

olduğunda, b^{*} aynı zamanda $l'\beta$ nın bir yansız tahmin edicisidir. Sadece lineer ve yansız olan tahmin edicileri göz önüne almak istediğimizden dolayı kendimizi $a'X=l'$ için olan tahmin edicilere sınırlayabiliriz. Öte yandan

$$Var\left(a'y\right)=a'Var\left(y\right)a=\sigma^{2}a'a$$

ve

$$Var\left(l'b\right)=l'Var\left(b\right)l=\sigma^{2}a'X\left(X'X\right)^{-1}X'a$$

olduğu kolayca gösterilebilir. Bu durumda

$$\begin{aligned}Var(a'y)-Var(l'b)&=\sigma^{2}[a'a-a'X(X'X)^{-1}X'a]\\&=\sigma^{2}a'(I-H)a\end{aligned}$$

eşitliği göz önüne alınırsa $\left(I-H\right)$ bir pozitif yarı tanımlı matris olduğundan

$$Var\left(a'y\right)-Var\left(l'b\right)\geq 0$$

dır. Bu durum, eğer b^{*} herhangi bir lineer yansız tahmin edici ise, bu takdirde varyansının b nin varyansından daha küçük olmaması gerektiğini ortaya koyar. Sonuç olarak "en iyi b" sıfatı b nin lineer yansız tahmin ediciler içinde etkin olduğu belirtmek üzere, b en iyi lineer yansız tahmin edicidir.

3. GENEL LİNEER MODEL VE KISITLAMALI MODELDE TAHMİN

3.1 Genel Lineer Model Altında Parametre Tahmini

Genel lineer model altında değişik tahmin edicilerin karakterize edilmesinde matris rank metodunun kullanılması oldukça önemlidir.

$$y = X\beta + \varepsilon,\ E(y) = X\beta, cov(y) = \sigma^2\Sigma, \tag{3.1}$$

genel lineer modelinin verildiğini varsayalım, burada $X \in \mathbb{R}^{n\times p}$ keyfi ranklı bir bilinenler matrisi, $y \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ gözlenebilir bir rasgele vektör, $\beta \in \mathbb{R}^{p\times 1}$ bilinmeyen parametre vektörü, $\Sigma \in \mathbb{R}^{n\times n}$ bilinen keyfi ranklı non-negatif definit matris ve σ^2 bilinmeyen bir pozitif parametredir. (3.1) genel lineer modeli genellikle

$$\mathcal{M} = \{y, X\beta, \sigma^2\Sigma\} \tag{3.2}$$

şeklinde gösterilir. ε gözlenemeyen hata vektörü olduğundan Σ kovaryans matrisi hakkında yanlış bir varsayımda bulunmak oldukça kolaydır. Ayrıca X model matrisi veri toplamada yanlış belirlenmiş bir X_0 formuna da sahip olabilir. Bu durumda (3.2) deki $\mathcal{M}$ orjinal modeli alternatif bir model olarak

$$\mathcal{M}_0 = \{y,\ X_0\beta, \sigma^2\Sigma_0\} \tag{3.3}$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu durumda $\mathcal{M}_0$ modeline $\mathcal{M}$ modelinin misspecified (yanlış belirlenmiş) modeli adı verilir. Burada (3.1) modelinin tutarlı olduğu yani bir çözüme sahip olduğu varsayılacaktır. Bunun için 1 olasılıkla

$$y \in \Re[X, \Sigma] \tag{3.3}$$

olmalıdır. Eğer Σ matrisi singüler bir matris ise (3.1) modeline singüler lineer model veya singüler Gauss-Markov modeli de denir. Bu durumda β ve $X\beta$ parametrelerinin (3.2) de verilen genel lineer model altındaki OLSE ve BLUE tahmin edicileri aşağıdaki şekilde verilebilir:

i. β parametresinin (3.2) genel lineer modeli altında OLSE tahmin edicisi

$$\hat{\beta}\text{=argmin}(\mathrm{y} - \mathrm{X}\beta)'(\mathrm{y} - \mathrm{X}\beta) \tag{3.4}$$

dir. Dolayısıyla $X\beta$ nın (3.2) genel linner modeli altında OLSE tahmin edicisi

$$OLSE_M(X\beta) = X.OLSE_M(\beta)$$

şeklinde olacaktır.

ii. $X\beta$ nın (3.2) modeli altındaki BLUE tahmin edicisi, $BLUE_M(X\beta)$ ile gösterilir, bir Gy lineer tahmin edicisi olarak tanımlanır öyle ki E(Gy) = β ve $X\beta$ nin (3.2) altındaki diğer herhangi bir yansız lineer tahmin edicisi Ly ise $Cov(Ly)$– $Cov(Gy)$ farkı nonnegatif definittir.

P_A, Q_A ve F_A matrisleri

$$P_A = AA^+, E_A = I - P_A = I - AA^+ \text{ ve } F_A = I - P_{A'} = I - A^+A$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda P_A matrisistandart iç çarpıma göre $\Re A)$ üzerindeki ortoganal izdüşüm olup E_A ve F_A matrisleri ise sırasıyle A' ve A nisıfır uzayları üzerindeki dik izdüşümleri göstermektedir. (3.4) bağıntısı ile ilgili normal denklem $X'X\beta$=$X'y$ şeklinde olup bu denklemin çözümü aşağıdaki iyi bilinen sonuçtur.

Lemma 3.1 (3.2) modeli altında β ve $X\beta$ parametrelerinin OLSE tahmin edicileri

$$OLSE_{\mathcal{M}}(\beta) = (X'X)^+X'y + (I - X^+XX)v = X^+y + F_Xv$$

$$OLSE_{\mathcal{M}}(X\beta) = XOLSE_{\mathcal{M}}(\beta) = XX^+y = P_X\, y,$$

şeklindedir, burada $v \in \mathbb{R}^{p\times 1}$ keyfi bir vektördür (Tian, 2009).

Tanım 3.1 Bir $K \in \mathbb{R}^{l\times p}$ matrisi için $K\beta$ vektörü $\mathcal{M}$ modeli altında tahmin edilebilir denir şayet $\mathcal{M}$ modeli altında $E(Ly) = K\beta$ olacak şekilde bir L matrisi mevcutsa.

$K\beta$ vektörünün $\mathcal{M}$ modeli altında tahmin edilebilir olması için gerek ve yeter şart $\Re K') \subseteq \Re X')$ olnasıdır(bkz. Tian ve Ark. (2008)). Bu durumda $BLUE_{\mathcal{M}}(K\beta)$ ile gösterilen $K\beta$ vektörünün $\mathcal{M}$ modeli altındaki BLUE tahmin edicisi, bir Gy lineer tahmin edicisi olarak tanımlanır öyle ki $E(Gy)$ = $K\beta$ olup $K\beta$ nin (3.2) altındaki diğer herhangi bir yansız tahmin edicisi Ly ise $Cov(Ly)$– $Cov(Gy)$ farkı nonnegatif definittir. (3.2) genel lineer modeli altında $K\beta$ nın BLUE tahmin edicisinin genel ifadesi Rao(1973) tarafından aşağıdaki lemma da verilmiştir.

Lemma 3.2 $K \in \mathbb{R}^{l\times p}$ matrisi verilsin ve $K\beta$ (3.2) modeli altında tahmin edilebilir olsun. Bir Gy tahmin edicisinin (3.2) altında $K\beta$ nın bir BLUE tahmin edicisi olması için gerek ve yeter şart G matrisinin

$$G[X, \Sigma E_X] = [K, 0] \tag{3.5}$$

lineer matris denklemini sağlamasıdır (Rao, 1973).

Bu denklem daima tutarlıdır, yani $\Re([K,0]') \subseteq \Re([X,\Sigma E_X]')$, veya buna denk olarak,

$$[K,0][K,\Sigma E_X]^{+}[X,\Sigma E_X] = [X,0]$$

eşitliği gerçeklenir. Bu durumda (3.5) denkleminin genel çözümü, $P_{K;X;\Sigma}$ ile gösterilir, $U \in \mathbb{R}^{lxn}$ keyfi bir matris ve $E_{[X,\Sigma E_X]} = I - [X,\Sigma E_X][X,\Sigma E_X]^{+}$ olmak üzere

$$P_{K;X;\Sigma} = [K,0][X,\Sigma E_X]^{+} + UE_{[X,\Sigma E_X]} \tag{3.6}$$

olup (3.2) modeli altında $K\beta$ nın BLUE tahmin edicisi

$$BLUE_{\mathcal{M}}(K\beta) = P_{K;X;\Sigma}y \tag{3.7}$$

şeklindedir. Özel olarak (3.2) modeli altında $X\beta$ nın BLUE tahmin edicisi

$$BLUE_{\mathcal{M}}(X\beta) = P_{X;\Sigma}y \tag{3.8}$$

olacaktır, burada $U \in \mathbb{R}^{lxn}$ keyfi bir matris olmak üzere

$$P_{X;\Sigma} = [X,0][X,\Sigma E_X]^{+} + UE_{[X,\Sigma E_X]} \tag{3.9}$$

dir. Ayrıca $\{P_{K;X;\Sigma}\}$ ve $\{BLUE_{\mathcal{M}}(K\beta)\}$ ile sırasıyla tüm $P_{K;X;\Sigma}$ izdüşümlerinin ve $BLUE_M(K\beta)$ lerin ailesini gösterelim. Öte yandan $T = \Sigma + \mathrm{XUX}'$ ve U da $r(T) = r(\Sigma, \mathrm{X})$ olacak şekilde simetrik bir matris olmak üzere $BLUE_{\mathcal{M}}(K\beta)$ nın bilinen bir gösteriminin

$$BLUE_{\mathcal{M}}(K\beta) = K(X'T^{+}X)^{+}X'T^{+}y$$

şeklinde olduğunu belirtelim. Lineer modeller teorisinde (3.2) modelindeki X matrisinin tam sütun ranklı ve Σ kovaryans matrisinin de pozitif definit olduğu durum en sık rastlanılan durumdur. Bu durumda, (3.2) modeli altında $K\beta$ nın BLUE tahmin edicisi aşağıdaki standart formda tek türlü olarak yazılabilir:

$$BLUE_{\mathcal{M}}(K\beta) = X(X'\Sigma^{-1}X)^{-1}X'\Sigma^{-1}y \tag{3.10}$$

Lemma 3.3 $K\beta$ (3.2) modeli altında tahmin edilebilir ve $P_{K;X;\Sigma}$ ve $BLUE_{\mathcal{M}}(K\beta)$ sırasıyla (3.6) ve (3.7) de verildikleri gibi olsun. Bu takdirde aşağıdakiler sağlanır (Tian, 2009):

(a) $P_{K;X;\Sigma}\Sigma$ çarpımı $P_{K;X;\Sigma}\Sigma = [K,0][X,\Sigma E_X]^{+}\Sigma$ şeklinde tek türlü olarak yazılabilir.

(b) $P_{K;X;\Sigma}\Sigma$ tektir ancak ve ancak $r(X,\Sigma) = \mathrm{n}$ dir.

(c) Eğer $\mathcal{M}$ tutarlı ise $BLUE_{\mathcal{M}}(K\beta)$ 1 olasılıkla tektir.

(d) $cov(BLUE_{\mathcal{M}}(K\beta)) = \sigma^2[K,0][X,\Sigma E_X]^+\Sigma([K,0][X,\Sigma E_X]^+)'$

$r(cov(BLUE_{\mathcal{M}}(K\beta))) = r(K) + r(\Sigma) - r(K,\Sigma) = \dim[\Re(K) \cap \Re(\Sigma)]$.

Lemma 3.4 $K_0 \in \mathbb{R}^{l \times p}$ matrisi verilsin ve $K_0\beta$ (3.3) modeli altında tahmin edilebilir olsun. Bu takdirde $K_0\beta$ nın (3.3) modeli altındaki BLUE tahmin edicisinin genel ifadesi

$$BLUE_{\mathcal{M}_0}(K_0\beta) = P_{K_0;X_0;\Sigma_0}y \tag{3.11}$$

şeklinde verilebilir, burada $P_{K_0;X_0;\Sigma_0}$ izdüşüm matrisi, $U_0 \in \mathbb{R}^{lxn}$ keyfi bir matris ve $E_{[X_0,\Sigma_0 E_{X_0}]} = I - [X_0, \Sigma_0 E_{X_0}][X_0, \Sigma_0 E_{X_0}]^+$ olmak üzere

$$P_{K_0;X_0;\Sigma_0} = [K_0, 0][X_0, \Sigma_0 E_{X_0}]^+ + U_0 E_{[X_0,\Sigma_0 E_{X_0}]} \tag{3.12}$$

şeklindedir. Bu durumda

(a) $P_{K_0;X_0;\Sigma_0}\Sigma_0$ çarpımı $P_{K_0;X_0;\Sigma_0}\Sigma_0 = [K_0, 0][X_0, \Sigma_0 E_{X_0}]^+\Sigma_0$ biçiminde tek türlü olarak yazılabilir.

(b) $P_{K_0;X_0;\Sigma_0}\Sigma_0$ tektir ancak ve ancak $r(X_0, \Sigma_0) = \mathrm{n}$ dir.

(c) $BLUE_{\mathcal{M}_0}(K_0\beta)$ 1 olasılıkla tektir ancak ve ancak $y \in \Re[X_0, \Sigma_0]$ dir.

(d) (3.2) deki varsayım altında aşağıdakiler sağlanır

$$E\left(BLUE_{\mathcal{M}_0}(K_0\beta)\right) = P_{K_0;X_0;\Sigma_0}X\beta$$

$$cov(BLUE_{\mathcal{M}_0}(K_0\beta)) = \sigma^2 P_{K_0;X_0;\Sigma_0}\Sigma P'_{K_0;X_0;\Sigma_0}$$

(e) Özel olarak $X_0\beta$ nın (3.3) modeli altındaki BLUE tahmin edicisi

$$BLUE_{\mathcal{M}_0}(X_0\beta) = P_{X_0;\Sigma_0}y \tag{3.13}$$

şeklidedir, burada $U \in \mathbb{R}^{lxn}$ keyfi bir matris olmak üzere

$$P_{X_0;\Sigma_0} = [X_0, 0][X_0, \Sigma_0 E_{X_0}]^+ + UE_{[X_0,\Sigma_0 E_{X_0}]} \tag{3.14}$$

dir (Tian, 2009).

(3.6) ve (3.12) da verilen $P_{K;X;\Sigma}$ ve $P_{K_0;X_0;\Sigma_0}$ izdüşüm matrisleri (3.2) ve (3.3) modellerinde verilen altı matrisle birlikte onların Moore-Penrose inversleri ve iki de keyfi matris içeren matrislerdir.bu nedenle (3.2) ve (3.3) deki genel varsayımlar altında

$BLUE_{\mathcal{M}}(K\beta)$ ve $BLUE_{\mathcal{M}_0}(K_0\beta)$ arasındaki ilişkileri karakterize etmek önemlidir. Bu nedenle Moore-Penrose inversler ve keyfi matrisler içeren değişik matris ifadelerini sadeleştirmek için bir dizi değişik rank formüllerine ihtiyaç duyulmaktadır. Parçalı matrisler için aşağıdaki rank formülleri Marsaglia & Styan (1974) tarafından verilmiştir.

Lemma 3.5 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{m\times k}$, $C \in \mathbb{R}^{1\times n}$ ve $D \in \mathbb{R}^{1\times k}$ matrisleri verilmiş olsun. Bu takdirde

$$r[A,B] = r(A) + r(E_A B) = r(B) + r(E_B A) \tag{3.15}$$

$$r\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} = r(A) + r(CF_A) = r(C) + r(AF_C) \tag{3.16}$$

rank eşitlikleri sağalnır. Bu nedenle

$$r[A,B] = r(A) \Leftrightarrow AA^{+}B = B \Leftrightarrow \mathfrak{R}(B) \subseteq \mathfrak{R}(A) \tag{3.17}$$

$$r\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} = r(A) \Leftrightarrow CA^{+}A = C \Leftrightarrow \mathfrak{R}(C') \subseteq \mathfrak{R}(A') \tag{3.18}$$

olacaktır (Marsaglia ve Styan, 1974) .

Ayrıca (3.7) ve (3.11) de verilen BLUE tahmin edicileri arasındaki ilişkiyi karakterize etmek için aşağıdaki sonuç kullanılabilir.

Lemma 3.6 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{m\times k}$, $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$ ve $D \in \mathbb{R}^{p\times k}$ matrisleri verilmiş olsun. Bu takdirde

(a) $XA = C$ ve $XB = D$ matris denklem çiftinin ortak bir çözüme sahip olması için gerek ve yeter şart $\mathfrak{R}\begin{pmatrix} C' \\ D' \end{pmatrix} \subseteq \mathfrak{R}\begin{pmatrix} A' \\ B' \end{pmatrix}$ veya buna denk olarak

$$r\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = r(A,B) \tag{3.19}$$

olmasıdır.

(b) $XB = D$ matris denkleminin herhangi bir çözümünün aynı zamanda $XA = C$ matris denkleminin de bir çözümü olması için gerek ve yeter şart

$$r\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = r(B) \tag{3.20}$$

olmasıdır (Tian, 2009).

İspat. $XA = C$ ve $XB = D$ matris denklem çifti ortak olarak $X(A, B) = (C, D)$ şeklinde yazılabilir. Bu denklemin çözülebilir olması için gerek ve yeter şart (3.19) un sağlanmasıdır. $XB = D$ nin genel çözümü U_2 uygun mertebeden keyfi bir matris olmak üzere $X = DB^+ + U_2E_B$ dir. Bunu $XA = C$ denkleminde yerine yazarak $DB^+A + U_2E_BA = C$ elde edilir. Bu eşitliğin her U_2 için sağlanması için gerek ve yeter şart $DB^+A = C$ ve $E_BA = 0$ olmasıdır. Bu ise (3.20) ifadesine denktir.

3.2 Genel ve Yanlış Belirlenmiş Modeller Altında BLUE Tahminlerinin Eşitliği

Bu kısımda genel lineer model ve yanlış belirlenmiş lineer model altında parametre fonksiyonlarının tahminlerinin eşitliği incelenecektir. Bunun için, $X \in \mathbb{R}^{n\times p}$ keyfi ranklı bir bilinenler matrisi, $y \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ gözlenebilir bir rasgele vektör, $\beta \in \mathbb{R}^{p\times 1}$ bilinmeyen parametre vektörü, $\Sigma \in \mathbb{R}^{n\times n}$ bilinen keyfi ranklı non-negatif definit matris ve σ^2 bilinmeyen bir pozitif parametre olmak üzere (3.2) ve (3.3) de verilen

$$\mathcal{M} = \{y, X\beta, \sigma^2\Sigma\} \quad \text{ve} \quad \mathcal{M}_0 = \{y,\ X_0\beta, \sigma^2\Sigma_0\}$$

modellerini göz önüne alalım. Bu durumda $\mathcal{M}_0$ modeli $\mathcal{M}$ modelinin bir yanlış belirlenmiş modeli olduğundan $\mathcal{M}_0$ modelinin tutarlı olduğu varsayılamaz, yani $BLUE_{\mathcal{M}_0}(K_0\beta)$ nn $P_{K_0;X_0;\Sigma_0}$ ın herhangi bir seçimi için 1 olasılıkla tek olması gerekmez.

Bilindiği gibi bir Gy lineer istatistiğinin $K\beta$ tahmin edilebilir parametre fonksiyonu için bir en iyi lineer yansız tahmin edici, BLUE, olması için $cov(Gy)$ kovaryans matrisinin bir minimum olmasıdır. Bu durumda Gy nin $K\beta$ tahmin edilebilir parametre fonksiyonu için bir en iyi lineer yansız tahmin edici olması için gerek ve yeter şart G matrisinin

$$G(X : VX^{\perp}) = (K : 0)$$

matris denklemini sağlaması gerektiğini hatırlayalım (bakınız, e.g., Rao, 1973, p.282).

Ilk olarak (3.2) modeli altında $K\beta$ için yansız bir $BLUE_{\mathcal{M}_0}(K_0\beta)$ nın varlığı ile ilgili olarak aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 3.1 $K, K_0 \in \mathbb{R}^{l\times p}$ matrisleri verilsin ve $K_0\beta$ (3.3) modeli altında tahmin edilebilir, yani $\Re(K_0') \subseteq \Re(X_0')$ olsun. $BLUE_{\mathcal{M}_0}(K_0\beta)$ ve $BLUE_{\mathcal{M}_0}(X_0\beta)$ (3.11) ve (3.13) de verildikleri gibi olsunlar. Bu takdirde

(a) $P_{K_0;X_0;\Sigma_0}X = K$ olacak şekilde bir $P_{K_0;X_0;\Sigma_0}$ izdüşüm matrisinin mevcut olması için gerek ve yeter şart

$$\Re\begin{pmatrix} 0 \\ K' \\ K_0' \end{pmatrix} \subseteq \Re\begin{pmatrix} E_{X_0}\Sigma_0 \\ X' \\ X_0' \end{pmatrix} \tag{3.21}$$

olmasıdır. Bu durumda $BLUE_{\mathcal{M}_0}(K_0\beta) = P_{K_0;X_0;\Sigma_0}y$ tahmin edicisi (3.2) deki $\mathcal{M}$ modeli altında $K\beta$ için yansızdır.

(b) Özel olarak $P_{X_0;\Sigma_0}X = X$ olacak şekilde bir $P_{X_0;\Sigma_0}$ izdüşüm matrisinin mevcut olması için gerek ve yeter şart

$$\Re(X, X_0) \cap \Re\left(E_{X_0}\Sigma_0\right) = \{0\} \tag{3.22}$$

olmasıdır. Bu durumda $BLUE_{\mathcal{M}_0}(X_0\beta) = P_{X_0;\Sigma_0}y$ tahmin edicisi (3.2) deki $\mathcal{M}$ modeli altında $X\beta$ için yansızdır (Tian, 2009).

İspat. (3.12) eşitliğindeki $P_{K_0;X_0;\Sigma_0}$ ifadesi $P_{K_0;X_0;\Sigma_0}X = K$ yerine yazılırsa

$$[K_0, 0]\left[X_0, \Sigma_0 E_{X_0}\right]^{+} X + U_0 E_{[X_0, \Sigma_0 E_{X_0}]} X = K$$

elde edilir. Bu denklemin U_0 için çözülebilir olması için gerek ve yeter şart

$$r\begin{bmatrix} K - [K_0, 0]\left[X_0, \Sigma_0 E_{X_0}\right]^{+} X \\ E_{[X_0, \Sigma_0 E_{X_0}]} X \end{bmatrix} = r\left(E_{[X_0, \Sigma_0 E_{X_0}]} X\right) \tag{3.23}$$

olmasıdır. Bu eşitliğin her iki tarafına (3.15) uygulanır ve elemanter blok matris işlemleriyle gerekli sadeleştirme yapılırsa

$$\begin{aligned} r\begin{bmatrix} K - [K_0, 0]\left[X_0, \Sigma_0 E_{X_0}\right]^{+} X \\ E_{[X_0, \Sigma_0 E_{X_0}]} X \end{bmatrix} &= r\begin{bmatrix} K - [K_0, 0]\left[X_0, \Sigma_0 E_{X_0}\right]^{+} X & 0 \\ X & E_{[X_0, \Sigma_0 E_{X_0}]} \end{bmatrix} \\ &\quad - r\left[X_0, \Sigma_0 E_{X_0}\right] \\ &= r\begin{bmatrix} K & [K_0, 0] \\ X & \left[X_0, \Sigma_0 E_{X_0}\right] \end{bmatrix} - r\left[X_0, \Sigma_0 E_{X_0}\right] \\ &= r\begin{bmatrix} K & K_0 & 0 \\ X & X_0 & \Sigma_0 E_{X_0} \end{bmatrix} - r\left[X_0, \Sigma_0 E_{X_0}\right] \end{aligned}$$

ve

$$r\left(E_{[X_0,\Sigma_0 E_{X_0}]}X\right) = r\left(X, X_0, \Sigma_0 E_{X_0}\right) - r\left(X_0, \Sigma_0 E_{X_0}\right)$$

olduğu görülür. Bu nedenle (3.23) ifadesi

$$r\begin{bmatrix} K & K_0 & 0 \\ X & X_0 & \Sigma_0 E_{X_0} \end{bmatrix} = r\left(X, X_0, \Sigma_0 E_{X_0}\right)$$

eşitliğine denk olacaktır. Yani (3.21) eşitliği sağlanır. Bu durumda (3.2) altında $E(P_{K_0;X_0;\Sigma_0}y) = P_{K_0;X_0;\Sigma_0}X\beta = K\beta$ eşitliği sağlanır. Bu ise $BLUE_{\mathcal{M}_0}(K_0\beta)$ nın (3.2) deki $\mathcal{M}$ modeli altında $K\beta$ için olması demektir. Böylece (a) sağlanmış olur.

$K = X$ ve $K_0 = X_0$ olsun. Bu takdirde (3.21) eşitliği

$$r\left(X, X_0, \Sigma_0 E_{X_0}\right) = r(X, X_0) + r(\Sigma_0 E_{X_0})$$

eşitliğine denk olacaktır. Yani (3.22) sağlanır ve böylece (b) de sağlanmış olur.

Teorem 3.2 $K, K_0 \in \mathbb{R}^{l\times p}$ matrisleri verilsin ve $\mathcal{M}$ ve $\mathcal{M}_0$ modelleri (3.2) ve (3.3) de verildikleri gibi olsun. $K\beta$ ve $K_0\beta$ nın sırasıyla $\mathcal{M}$ ve $\mathcal{M}_0$ modelleri altında tahmin edilebilir olduğunu varsayalım. Bu takdirde

(a) Aşağıdaki ifadeler denktir:

(i) $BLUE_{\mathcal{M}_0}(K_0\beta) \in \{BLUE_{\mathcal{M}}(K\beta)\}$ olacak şekilde $BLUE_{\mathcal{M}_0}(K_0\beta)$ mevcuttur.

(ii) $\Re\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ K' \\ K_0' \end{pmatrix} \subseteq \Re\begin{pmatrix} E_X\Sigma \\ E_{X_0}\Sigma_0 \\ X' \\ X_0' \end{pmatrix}$ dir.

(iii) $\Re\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ K' \\ K_0' \end{pmatrix} \subseteq \Re\begin{pmatrix} \Sigma & X & 0 \\ \Sigma_0 & 0 & X_0 \\ X' & 0 & 0 \\ X_0' & 0 & 0 \end{pmatrix}$ dir.

(iv) $\Re\begin{pmatrix} K' \\ K_0' \end{pmatrix} \subseteq \Re\begin{pmatrix} X'E_N \\ X_0'E_N \end{pmatrix}$, burada $E_N = \left(\Sigma E_X, \Sigma_0 E_{X_0}\right)$ dir.

(b) Özel olarak aşağıdaki ifadeler denktir:

(i) $BLUE_{\mathcal{M}_0}(X_0\beta) \in \{BLUE_{\mathcal{M}}(X\beta)\}$ olacak şekilde $BLUE_{\mathcal{M}_0}(X_0\beta)$ mevcuttur.

(ii) $\Re(X, X_0) \cap \Re\left(\Sigma E_X, \Sigma_0 E_{X_0}\right) = \{0\}$ dir (Tian,2009).

İspat. $K\beta$ ve $K_0\beta$ sırasıyla $\mathcal{M}$ ve $\mathcal{M}_0$ modelleri altında tahmin edilebilir olduğundan Lemma 3.3 ve lemma 3.4 den $K\beta$ ve $K_0\beta$ nın $\mathcal{M}$ ve $\mathcal{M}_0$ altında BLUE tahminleri

$$BLUE_{\mathcal{M}}(K\beta) = P_{K:X:\Sigma}y \quad \text{ve} \quad BLUE_{\mathcal{M}_0}(K_0\beta) = P_{K_0;X_0;\Sigma_0}y \tag{3.24}$$

ile verilir, burada $P_{K;X;\Sigma}$ ve $P_{K_0;X_0;\Sigma_0}$ matrisleri

$$P_{K;X;\Sigma}(X, \Sigma E_X) = (K, 0) \text{ ve } P_{K_0;X_0;\Sigma_0}\big(X_0, \Sigma_0 E_{X_0}\big) = (K_0, 0) \tag{3.25}$$

matris denklemlerinin çözümleridir. Lemma 3.6 a. dan bu denklem çiftinin bir ortak çözüme sahip olması için gerek ve yeter şart

$$\Re\begin{pmatrix} K' \\ 0 \\ K_0' \\ 0 \end{pmatrix} \subseteq \Re\begin{pmatrix} X' \\ E_X\Sigma \\ X_0' \\ E_{X_0}\Sigma_0 \end{pmatrix}$$

olmasıdır, yani a. nın ii. şıkkı veya buna denk olarak

$$r\begin{pmatrix} \Sigma E_X & \Sigma_0 E_{X_0} & X & X_0 \\ 0 & 0 & K & K_0 \end{pmatrix} = r\big(\Sigma E_X, \Sigma_0 E_{X_0}, X, X_0\big) \tag{3.26}$$

eşitliği sağlanır. (3.15) ifadesi (3.26) nin her iki tarafına uygulanırsa

$$r\begin{bmatrix} \Sigma & \Sigma_0 & X & X_0 \\ X & 0 & 0 & 0 \\ 0 & X_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K & K_0 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} \Sigma & \Sigma_0 & X & X_0 \\ X & 0 & 0 & 0 \\ 0 & X_0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} \mathrm{E}_N X & \mathrm{E}_N \mathrm{X}_0 \\ K & K_0 \end{bmatrix} = r[\mathrm{E}_N X, \mathrm{E}_N \mathrm{X}_0]$$

olduğu görülür. Bu ise sırasıyla a. nin iii. ve iv. şıklarına denk gelmektedir. Öte yandan b. de istenilenler ise $K = X$ ve $K_0 = X_0$ alınarak a. şıkkından kolayca elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

İstatistiksel uygulamalarda $\mathcal{M}$ modelinde X model matrisi bilinir Σ kovaryans matrisi isebilinmez veya sıklıkla belirli bir Σ_0 matrisi olarak yanlış belirlenir. Bu durumda Teorem 3.2 den aşağıdaki sonular çıkarılabilir.

Sonuç 3.1 $X = X_0$ olmak üzere $\mathcal{M}$ ve $\mathcal{M}_0$ modelleri (3.2) ve (3.3) de verildikleri gibi olsun. $K\beta$ parametresinin $\mathcal{M}$ ve $\mathcal{M}_0$ modelleri altında tahmin edilebilir olduğunu varsayalım. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktir:

(i) $BLUE_{\mathcal{M}_0}(K\beta) \in \{BLUE_{\mathcal{M}}(K\beta)\}$ olacak şekilde $BLUE_{\mathcal{M}_0}(K\beta)$ mevcuttur.

(ii) $\Re\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ K' \end{pmatrix} \subseteq \Re\begin{pmatrix} E_X\Sigma \\ E_X\Sigma_0 \\ X' \end{pmatrix}$ dir.

(iii) $\Re(K') \subseteq \Re(X'E_N)$, burada $E_N = \big(\Sigma E_X, \Sigma_0 E_{X_0}\big)$ dir (Tian, 2009).

Sonuç 3.2 $X = X_0$ olmak üzere $\mathcal{M}$ ve $\mathcal{M}_0$ modelleri (3.2) ve (3.3) de verildikleri gibi olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktir:

(i) $BLUE_{\mathcal{M}_0}(X\beta) = BLUE_{\mathcal{M}}(X\beta)$ olacak şekilde $BLUE_{\mathcal{M}_0}(X\beta)$ ve $BLUE_{\mathcal{M}}(X\beta)$ tahmin edicileri mevcuttur.

(ii) $r(\Sigma E_X, \Sigma_0 E_X) = r(E_X \Sigma, E_X \Sigma_0)$ dir.

(iii) $r\begin{pmatrix} \Sigma & X & 0 \\ \Sigma_0 & 0 & X \end{pmatrix} = r(\Sigma, \Sigma_0, X) + r(X)$ dir.

(iv) $\Re(X) \cap \Re(\Sigma E_X, \Sigma_0 E_X) = \{0\}$ dir (Tian, 2009).

Sonuç 3.3 $X = X_0$ olmak üzere $\mathcal{M}$ ve $\mathcal{M}_0$ modelleri (3.2) ve (3.3) de verildikleri gibi olsun. Σ nın pozitif definit olduğunu varsayalım. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktir:

(i) $BLUE_{\mathcal{M}_0}(X\beta) = BLUE_{\mathcal{M}}(X\beta)$ olacak şekilde $BLUE_{\mathcal{M}_0}(X\beta)$ ve $BLUE_{\mathcal{M}}(X\beta)$ tahmin edicileri mevcuttur.

(ii) $\Re(\Sigma_0 \Sigma^{-1} X) \subseteq \Re(\mathrm{X})$ dir (Tian, 2009).

İspat. Σ pozitif definit olduğundan Sonuç 3.2 iii. ifadesi $r(\Sigma_0 \Sigma^{-1} X) = r(\mathrm{X})$ eşitliğine dönüşür ve böylece i. ve ii. nin denk olduğu sonucuna ulaşılır.

Sonuç 3.4 $X = X_0$ olmak üzere $\mathcal{M}$ ve $\mathcal{M}_0$ modelleri (3.2) ve (3.3) de verildikleri gibi olsun. Σ ve Σ_0 nın pozitif definit olduğunu varsayalım. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktir (Tian, 2009):

(i) $BLUE_{\mathcal{M}_0}(X\beta) = BLUE_{\mathcal{M}}(X\beta)$ dir.

(ii) $BLUE_{\mathcal{M}_0}(\beta) = BLUE_{\mathcal{M}}(\beta)$ dir.

(iii) $\Re(\Sigma^{-1} X) \subseteq \Re(\Sigma_0^{-1}\mathrm{X})$ dir.

(iv) $r(\Sigma E_X, \Sigma_0 E_X) = r(E_X \Sigma) = \mathrm{r}(E_X \Sigma_0)$ yani $\Re(\Sigma E_X) = \Re(\Sigma_0 E_X)$ dir.

$BLUE_{\mathcal{M}_0}(K_0\beta)$ tahmin edicisi genel olarak tek olmadığından lemma 3.6 (b) den aşağıdaki sonuç kolayca türetilebilir.

Teorem 3.3 $\mathcal{M}$ ve $\mathcal{M}_0$ modelleri (3.2) ve (3.3) deverildikleri gibi olmak üzere $K\beta$ ve $K_0\beta$ sırasıyla $\mathcal{M}$ ve $\mathcal{M}_0$ modelleri altında tahmin edilebilir olun. Bu takdirde

(a) Aşağıdaki ifadeler denktir:

(i) $BLUE_{\mathcal{M}_0}(K_0\beta) \in \{BLUE_{\mathcal{M}}(K\beta)\}$ dir.

(ii) $\Re(X,\Sigma) \subseteq \Re(X_0,\Sigma_0)$ ve $\Re\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ K' \\ K_0' \end{pmatrix} \subseteq \Re\begin{pmatrix} E_X\Sigma \\ E_{X_0}\Sigma_0 \\ X' \\ X_0' \end{pmatrix}$ dir.

(b) Özel olarak aşağıdaki ifadeler denktir:

(i) $\left\{BLUE_{\mathcal{M}_0}(X_0\beta)\right\} \subseteq \{BLUE_{\mathcal{M}}(X\beta)\}$ dir.

(ii) $\Re(\Sigma) \subseteq \Re(X,\Sigma_0)$ ve $\Re\left(\Sigma E_X, \Sigma_0 E_{X_0}\right) \cap \Re(X,\Sigma_0) = \{0\}$ dir (Tian, 2009).

İspat. Lemma 3.6 (b) dan (3.25) deki ikinci denkleminçözümlerinin her birinin (3.25) deki birinci denkleminde çözümü olması için gerek ve yeter şart

$$r\begin{pmatrix} \Sigma E_X & \Sigma_0 E_{X_0} & X & X_0 \\ 0 & 0 & K & K_0 \end{pmatrix} = r\left(\Sigma_0 E_{X_0}, X_0\right) \tag{3.27}$$

olduğu görülür. Bu ise (a) nin (ii) şıkkına denk gelmektedir. Öte yandan (b) de istenilenler ise $K = X$ ve $K_0 = X_0$ alınarak (a) şıkkından kolayca elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 3.5 $X = X_0$ olmak üzere $\mathcal{M}$ ve $\mathcal{M}_0$ modelleri (3.2) ve (3.3) de verildikleri gibi olsun. $K\beta$ parametresinin $\mathcal{M}$ ve $\mathcal{M}_0$ modelleri altında tahmin edilebilir olduğunu varsayalım.

(a) Bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktir:

(i) $BLUE_{\mathcal{M}_0}(K\beta) \subseteq \{BLUE_{\mathcal{M}}(K\beta)\}$ dir.

(ii) $\Re(\Sigma) \subseteq \Re(X,\Sigma_0)$ ve $\Re\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ K' \end{pmatrix} \subseteq \Re\begin{pmatrix} E_X\Sigma \\ E_X\Sigma_0 \\ X' \end{pmatrix}$ dir.

(iii) $\Re(\Sigma) \subseteq \Re(X,\Sigma_0)$ ve $\Re(K') \subseteq \Re(X'E_N)$, burada $E_N = \left(\Sigma E_X, \Sigma_0 E_{X_0}\right)$ dir.

(b) Özel olarak aşağıdaki ifadeler denktir:

(i) $\left\{BLUE_{\mathcal{M}_0}(X_0\beta)\right\} \subseteq \{BLUE_{\mathcal{M}}(X\beta)\}$ dir.

(ii) $\Re(\Sigma) \subseteq \Re(X,\Sigma_0)$ ve $\Re(\Sigma E_X, \Sigma_0 E_X) \cap \Re(X) = \{0\}$ dir.

(iii) $\Re(\Sigma) \subseteq \Re(X,\Sigma_0)$ ve $\Re(\Sigma E_X) \subseteq \Re(\Sigma_0 E_X)$ dir (Tian, 2009).

Ispat. (a) daki (i) ve (ii) nin denkliği Teorem 3.3(a) dan görülebilir. Verilen şartlar altında (3.27) ifadesi

$$r\begin{pmatrix} \Sigma E_X & \Sigma_0 E_X & X \\ 0 & 0 & X \end{pmatrix} = r(\Sigma_0 E_X, X) \tag{3.28}$$

ifadesine dönüşür ki bu da

$$r(\Sigma, X, \Sigma_0) = r(X, \Sigma_0) \quad \text{ve} \quad r(\Sigma E_X, \Sigma_0 E_X) = r(E_X \Sigma_0 E_X) = r(\Sigma_0 E_X)$$

ifadesine denktir. Bu nedenle (3.28) ifadesi (a) nin (iii) şıkkına denktir. (b) deki sonuçlar ise (a) dan direct olarak elde edilebilir. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 3.6 $X = X_0$ olmak üzere $\mathcal{M}$ ve $\mathcal{M}_0$ modelleri (3.2) ve (3.3) de verildikleri gibi olsun. Σ ve Σ_0 nın pozitif definit ve $r(X) = (X_0) = p$ olduğunu varsayalım. $BLUE_{\mathcal{M}_0}(X_0\beta)$ ve $BLUE_{\mathcal{M}}(X\beta)$ daki gibi verilsin ve

$$BLUE_{\mathcal{M}}(X_0\beta) = X_0(X_0'\Sigma^{-1}X_0)^{-1}X_0'\Sigma^{-1}y$$

olsun. Bu takdirde $BLUE_{\mathcal{M}_0}(X\beta) = BLUE_{\mathcal{M}}(X_0\beta)$ olması için gerek ve yeter şart $\Re(X) = \Re(X_0)$ ve $\Re(\Sigma X) = \Re(\Sigma_0 X_0)$ olmasıdır (Tian, 2009).

Özel bir durum olarak eğer (3.2) modeli

$$\mathcal{M}_0 = \{y, X_0\beta, \sigma^2 I\} \tag{3.29}$$

olarak alınırsa, bu takdirde $BLUE_{\mathcal{M}_0}(K_0\beta) = OLSE_{\mathcal{M}_0}(K_0\beta) = K_0X_0^+y$ olacaktır. Bu durumda aşağıdaki sonuçlar verilebilir:

Sonuç 3.7 $\mathcal{M}$ ve $\mathcal{M}_0$ modelleri (3.2) ve (3.29) de verildikleri gibi olsun. $K\beta$ ve $K_0\beta$ sırasıyla $\mathcal{M}$ ve $\mathcal{M}_0$ modelleri altında tahmin edilebilir olsunlar. Bu takdirde

(a) Aşağıdaki ifadeler denktir:

(i) $OLSE_{\mathcal{M}_0}(K_0\beta) \in \{BLUE_{\mathcal{M}}(K\beta)\}$ dir.

(ii) $\Re(\Sigma(K_0X_0^+)') \subseteq \Re(X)$ ve $(K_0X_0^+X = K$ dir.

(iii) $\Re\begin{pmatrix} 0 \\ K' \\ K_0' \end{pmatrix} \subseteq \Re\begin{pmatrix} E_X\Sigma E_{X_0} \\ X'X_0 \\ X_0'X_0 \end{pmatrix}$ dir.

(b) Özel durumda aşağıdaki ifadeler denktir:

(i) $OLSE_{\mathcal{M}_0}(X_0\beta) \in \{BLUE_{\mathcal{M}}(X\beta)\}$ dir.

(ii) $\Re(\Sigma X_0) \subseteq \Re(X)$ ve $\Re(X) \subseteq \Re(X_0)$ dir (Tian, 2009).

$BLUE_{\mathcal{M}_0}(K_0\beta)$ tahmin edicisi genel olarak tek olmadığından lemma 3.6 (b) den aşağıdaki sonuç kolayca türetilebilir.

Sonuç 3.8 $X = X_0$ olmak üzere $\mathcal{M}$ ve $\mathcal{M}_0$ modelleri (3.2) ve (3.29) de verildikleri gibi olsun. $K\beta$ $\mathcal{M}$ ve $\mathcal{M}_0$ modelleri altında tahmin edilebilir olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktir:

(a) $OLSE_{\mathcal{M}_0}(K_0\beta) \in \{BLUE_{\mathcal{M}}(K\beta)\}$ dir.

(b) $\Re((\Sigma K X^+)') \subseteq \Re(X)$ dir.

(c) $\Re\begin{pmatrix} 0 \\ K' \end{pmatrix} \subseteq \Re\begin{pmatrix} E_X \Sigma X \\ X'X \end{pmatrix}$ dir (Tian, 2009).

Sonuç 3.9 $X = X_0$ olmak üzere $\mathcal{M}$ ve $\mathcal{M}_0$ modelleri (3.2) ve (3.29) de verildikleri gibi olsunlar. Bu takdirde $BLUE_{\mathcal{M}_0}(K_0\beta) = BOLSE_{\mathcal{M}}(X\beta)$ olup aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:

(a) $OLSE_{\mathcal{M}}(X\beta) = BLUE_{\mathcal{M}}(X\beta)$ dir.

(b) $\Re(\Sigma X) \subseteq \Re(X)$ dir (Tian, 2009).

3.3 Kısıtlamalı Gauss-Markov ve Yanlış Belirlenmiş Model Altında Tahminler

Bu kısımda Gauss-Markov lineer model ve onun kısıtlamalı modelleri altında parametre fonksiyonlarının tahminlerinin eşitlik durumları incelenecektir. Bunun için, $X \in \mathbb{R}^{n \times p}$ keyfi ranklı bir bilinenler matrisi, $y \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ gözlenebilir bir rasgele vektör, $\beta \in \mathbb{R}^{p \times 1}$ bilinmeyen parametre vektörü, $\Sigma \in \mathbb{R}^{n \times n}$ bilinen keyfi ranklı non-negatif definit matris ve σ^2 bilinmeyen bir pozitif parametre olmak üzere

$$y = X\beta + \varepsilon, \ E(y) = X\beta, cov(y) = \sigma^2\Sigma,$$

genel lineer modelini yeniden gözönüne alalım ve bilinmeyen β parametre vektörü üzerine $A \in \mathbb{R}^{m \times p}$ bilinenler matrisi, $r(A) = m$ ve $b \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ bilinenler vektörü olmak üzere tutarlı bir

$$A\beta = b \tag{3.30}$$

lineer matris denklemi formunda ekstra bir önbilginin verildiğini varsayalım. Bu tip kısıtlamalar sıklıkla örneğin parametre vektörü hakkındaki lineer hipotez testlerinin incelenmesinde karşımıza çıkabilir. (3.30) kısıtlaması ile birlikte (3.2) modeline bir kısıtlamalı Gauss-Markov modeli veya eşitlik kısıtlamalı Gauss-Markov modeli adı verilir. Bu model genellikle

$$M_r = \left\{ \begin{bmatrix} y \\ b \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} X \\ A \end{bmatrix} \beta \, , \sigma^2 \begin{bmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} \tag{3.31}$$

kapalı formunda gösterilir. Kısıtlamalı lineer modeler özellikle istatistikte oldukça sık kullanılır. Bununla beraber (3.31) kısıtlamalı modeli altında β parametre vektörünün tahmin edilmesi (3.2) genel modeli altında tahmin edilmesinden çok daha karmaşıktır. Genel lineer modellerin incelenmesinde (3.31) modeli genellikle çeşitli dönüşümler yardımıyle açık bir kısıtlamalı modele dönüştürülür. Bu husustaki en popüler dönüşümler Lagrange çarpanları yöntemi ve (3.31) de verilen denkleme bir çözüm olacak şekilde yeniden bir parametreleştirme yapmaktır.

$r(X) = p$ ve $r(A) = m$ olması özel durumunda (3.31) modeli altında β parametre vektörünün alışılmış en küçük kareler tahmin edicisi(OLSE) nin

$$OLSE_{M_r}(\beta) = (X'X)^{-1}X'y + (X'X)^{-1}[A(X'X)^{-1}A']^{-1}(A(X'X)^{-1}X'y - b)$$

şeklinde verildiğini belirtelim (bkz. Amemiya, 1985). Öte yandan, eğer $r(X) < p$ ise bu durumda β parametre vektörünün veya $K\beta$ parametre fonksiyonunun OLSE ve BLUE tahmin edicilerinin ifade edilmesinde genelleştirilmiş inversler devreye girecektir.

(3.30) tutarlı matris denkleminin genel çözümü u keyfi bir vektör olmak üzere

$$\beta = A^{+}b + F_A u \tag{3.31a}$$

şeklinde olacaktır, burada $F_A = I - P_{A'} = I - A^{+}A$ dır. Bu durumda eğer β nın bu değeri (3.2) modelinde yerine yazılırsa, bu takdirde $z = y - XA^{+}b$ olmak üzere yeniden parametreleştirilmiş

$$z = X_A u + \varepsilon \tag{3.31b}$$

lineer modeli elde edilir. Bu nedenle (3.31) modeli altındaki tahminler (3.31b) den türetilebilir.

Daha önce de ifade edildiği gibi, eğer $r(X) < p$, yani, model matrisi eksik ranklı ise, bu durumda β parametre vektörünün ve $K\beta$ parametre fonksiyonunun OLSE ve BLUE tahmin edicilerinin ifade edilmesinde genelleştirilmiş inversler işin içine girecektir.

$K \in \mathbb{R}^{l \times p}$ olmak üzere verilen bir $K\beta$ parametre fonksiyonunun (3.2) ve (3.31) de verilen genel lineer modeller altında tahmin edilebilir olması için daha önce de ifade edildiği gibi $E(Ly + c) = K\beta$ olacak şekilde L ve c matrisleri bulunmalıdır. Bu durumda (3.2) de verilen Gauss-Markov modeli altında $K\beta$ parametre fonksiyonunun tahmin edilebilir olması için gerek ve yeter şart $\Re(K') \subseteq \Re(X')$ olmasıdır. Benzer şekilde (3.31) de verilen model altında $K\beta$ parametre fonksiyonunun tahmin edilebilir olması için gerek ve yeter şart $\Re(K') \subseteq \Re(X' : A')$ olmasıdır. Buradan kolayca görülebilir ki $K\beta$ parametre fonksiyonu (3.2) modeli altında tahmin edilebilir ise (3.31) modeli altında da tahmin edilebilir olacaktır. $K\beta$ parametre fonksiyonunun (3.2) ve (3.31) de verilen modeller altındaki OLSE ve BLUE tahminleri farklı kriterlere göre tanımlandığından aynı olmaları gerekmez. Bu nedenle $K\beta$ parametre fonksiyonunun OLSE ve BLUE tahmin edicilerini karşılaştırmak ve özel olarak eşit olmaları için gerek ve yeter şartlar vermek oldukça önemlidir. $K\beta$ parametre fonksiyonunun (3.2) ve (3.31) modelleri altındaki OLSE tahminleri aşağıdaki lemma da verilmiştir.

Lemma 3.7

(a) $\mathcal{M}$ modeli (3.2) deki gibi verilsin ve $K\beta$ fonksiyonu bu model altında tahmin edilebilir olsun. Bu takdirde

$$OLSE_{\mathcal{M}}(K\beta) = KX^{+}y$$

şeklinde tek türlü olarak yazılabilir.

(b) M_r modeli (3.31) deki gibi verilsin ve $K\beta$ parametre fonksiyonu bu model altında tahmin edilebilir olsun. Bu takdirde M_r modeli altında $K\beta$ parametre fonksiyonunun OLSE tahmin edicisi $K_A = KF_A$ ve $X_A = XF_A$ olmak üzere

$$OLSE_{M_r}(K\beta) = \left(KA^{+} - K_A {X_A}^{+} X A^{+}\right)b + K_A {X_A}^{+} y$$

şeklinde tek türlü olarak yazılabilir (Rao, 1973).

İspat. (a) şıkkının ispatı önceki kısımlarda verilmişti. $AX = B$ matris denkleminin tutarlı olabilmesi için gerek ve yeter şart biliyoruz ki $AA^{+}B = B$ olmasıdır. Bu durumda genel çözüm C keyfi bir matris olmak üzere $X = A^{+}B + F_A C$ parametrik formunda yazılabilir. Özel olarak $AX = 0$ denkleminin nonnegatif tanımlı genel çözümü ise $X = F_A CC'F_A$ olarak verilebilir. Öte yandan (3.31b) daki u parametre vektörünün OLSE tahmini v keyfi bir vektör olmak üzere $\hat{u} = {X_A}^{+}z + F_{X_A}v$ olarak yazılabilir. Bu durumda $\hat{u}$ nin bu değeri (3.31a) deki yerine yazılırsa

$$OLSE_{M_r}(\beta) = A^{+}b + F_A{X_A}^{+}z + F_A F_{X_A}u$$

$$= \left(A^{+} - F_A{X_A}^{+}XA^{+}\right)b + F_A{X_A}^{+}y + F_A F_{X_A}u$$

olduğu görülür ve böylece ispat tamamlanır.

Benzer şekilde (3.30) ile birlikte (3.2) yanlış belirlenmiş modeli de

$$M_{0r} = \left\{\begin{bmatrix} y \\ b \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} X_0 \\ A \end{bmatrix}\beta \,, \sigma^2 \begin{bmatrix} \Sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right\} \tag{3.32}$$

şeklinde gösterilebilir.

Bu kısımda $K, K_0 \in \mathbb{R}^{l\times p}$ olmak üzere verilen tahmin edilebilir $K\beta$ ve $K_0\beta$ parametre fonksiyonlarının (3.31) ve (3.32) de verilen kısıtlamalı lineer modeller altındaki tahmin edicileri arasındaki ilişki incelenecektir.

Lemma 3.8 $K, K_0 \in \mathbb{R}^{l\times p}$ olmak üzere $K\beta$ ve $K_0\beta$ parametre fonksiyonları sırasıyla (3.31) ve (3.32) modeleri altında tahmin edilebilir olsun. Bu takdirde

(i) (3.31) modeli altında $K\beta$ nın BLUE tahmin edicisinin genel ifadesi

$$BLUE_{\mathcal{M}_r}(K\beta) = P_{K:\hat{X}:\hat{\Sigma}}\hat{y} \tag{3.33}$$

şeklinde yazılabilir, burada $P_{K:\hat{X}:\hat{\Sigma}}$ ifadesi $G\left(\hat{X}: \hat{\Sigma}E_{\hat{X}}\right) = (K: 0)$ matris denkleminin bir çözümü olup, bu denklemin genel çözümü $U \in \mathbb{R}^{l\times(n+m)}$ matrisi keyfi bir matris ve

$$\hat{y} = \begin{bmatrix} y \\ b \end{bmatrix},\ \hat{X} = \begin{bmatrix} X \\ b \end{bmatrix} \text{ ve } \hat{\Sigma} = \begin{bmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$P_{K:\hat{X}:\hat{\Sigma}} = (K: 0)\left(\hat{X}: \hat{\Sigma}E_{\hat{X}}\right)^{+} + UE_{\left(\hat{X}:\hat{\Sigma}E_{\hat{X}}\right)} \tag{3.34}$$

parametrik formunda yazılabilir.

(ii) (3.32) modeli altında $K_0\beta$ nın BLUE tahmin edicisinin genel ifadesi

$$BLUE_{\mathcal{M}_{r0}}(K_0\beta) = P_{K_0:\hat{X}_0:\hat{\Sigma}_0}\hat{y} \tag{3.35}$$

şeklinde yazılabilir, buradaki $P_{K_0:\hat{X}_0:\hat{\Sigma}_0}$ ifadesi $G\left(\hat{X}_0:\hat{\Sigma}_{0E_{\hat{X}_0}}\right) = (K_0:0)$ matris denkleminin bir çözümü olup, bu denklemin genel çözümü $U \in \mathbb{R}^{l\times(n+m)}$ matrisi keyfi bir matris ve

$$\hat{y} = \begin{bmatrix} y \\ b \end{bmatrix},\ \hat{X}_0 = \begin{bmatrix} X_0 \\ b \end{bmatrix} \text{ ve } \hat{\Sigma}_0 = \begin{bmatrix} \Sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$P_{K_0:\hat{X}_0:\hat{\Sigma}_0} = (K_0:0)\left(\hat{X}_0:\hat{\Sigma}_{0E_{\hat{X}_0}}\right)^{+} + UE_{\left(\hat{X}_0:\hat{\Sigma}_{0E_{\hat{X}_0}}\right)} \tag{3.36}$$

parametrik formunda yazılabilir (Tian, 2009).

Kısım 3.2 deki sonuçlar (3.31) ve (3.32) modellerine uygulanırsa aşağıdaki sonuçlar verilebilir.

Teorem 3.4 $\mathcal{M}_r$ ve $\mathcal{M}_{0r}$ modelleri (3.31) ve (3.32) de verildikleri gibi olmak üzere $K\beta$ ve $K_0\beta$ sırasıyla $\mathcal{M}_r$ ve $\mathcal{M}_{0r}$ modelleri altında tahmin edilebilir olun. Bu takdirde

(a) Aşağıdaki ifadeler denktir:

(i) $BLUE_{\mathcal{M}_{0r}}(K_0\beta) \in \{BLUE_{\mathcal{M}_r}(K\beta)\}$ olacak şekilde bir $BLUE_{\mathcal{M}_{0r}}(K_0\beta)$ tahmin edicisi mevcuttur.

(ii) $\Re\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ K' \\ K_0' \end{pmatrix} \subseteq \Re\begin{pmatrix} E_{XF_A}\Sigma & 0 \\ E_{X_0F_A}\Sigma_0 & 0 \\ X' & A' \\ X_0' & A' \end{pmatrix}$ dir.

(iii) $\Re\begin{pmatrix} K' \\ K_0' \end{pmatrix} \subseteq \Re\begin{pmatrix} X'E_N & A' \\ X_0'E_N & A' \end{pmatrix}$ dir, burada $N = (\Sigma E_{XF_A}, \Sigma_0 E_{X_0F_A})$ dir.

(b) Özel olarak aşağıdaki ifadeler denktir:

(i) $\{BLUE_{\mathcal{M}_{0r}}(X_0\beta)\} \subseteq \{BLUE_{\mathcal{M}_r}(X\beta)\}$ olacak şekilde bir $BLUE_{\mathcal{M}_{0r}}(X_0\beta)$ tahmin edicisi mevcuttur.

(ii) $\Re\begin{pmatrix} X & X_0 \\ A & A \end{pmatrix} \cap \Re\begin{pmatrix} \Sigma E_{XF_A} & \Sigma_0 E_{X_0F_A} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \{0\}$ dir (Tian, 2009).

İspat. (3.15) ve (3.16) eşitliklerinden kolayca gösterilebilir ki

$$\Re\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\K'\\K_0'\end{pmatrix}\subseteq\Re\begin{pmatrix}\Sigma&0&X&0\\0&0&A&0\\\Sigma_0&0&0&X_0\\0&0&0&A\\X'&A'&A'&0\\X_0'&A'&A'&0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\Re\begin{pmatrix}0\\0\\K'\\K_0'\end{pmatrix}\subseteq\Re\begin{pmatrix}E_{XF_A}\Sigma&0\\E_{X_0F_A}\Sigma_0&0\\X'&A'\\X_0'&A'\end{pmatrix}\tag{3.37}$$

dir. Bu durumda (a) şıkkındaki (i) ve (ii) nin denkliği (3.37) ifadesi ve Teorem 3.2 (a) dan elde edilir. Ayrıca (b) şıkkındaki sonuç ise $K = X$ ve $K_0 = X_0$ alınmak suretiyle (a) şıkkından elde edilebilir ve böylece de ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 3.10 $X = X_0$ olmak üzere $\mathcal{M}_r$ ve $\mathcal{M}_{0r}$ modelleri (3.31) ve (3.32) de verildikleri gibi olsun ve $K\beta$ fonksiyonu $\mathcal{M}_r$ ve $\mathcal{M}_{0r}$ modelleri altında tahmin edilebilir olun. Bu takdirde

(a) Aşağıdaki ifadeler denktir:

(i) $BLUE_{\mathcal{M}_{0r}}(K_0\beta) \in \{BLUE_{\mathcal{M}_r}(K\beta)\}$ olacak şekilde bir $BLUE_{\mathcal{M}_{0r}}(K_0\beta)$ tahmin edicisi mevcuttur.

(ii) $\Re\begin{pmatrix}0\\0\\K'\end{pmatrix}\subseteq\Re\begin{pmatrix}E_{XF_A}\Sigma&0\\E_{X_0F_A}\Sigma_0&0\\X'&A'\end{pmatrix}$ dir.

(iii) $\Re(K') \subseteq \Re(X'E_N\,, A')$ dir, burada $N = (\Sigma E_{XF_A}, \Sigma_0 E_{X_0F_A})$ dir.

(b) Özel olarak aşağıdaki ifadeler denktir:

(i) $\{BLUE_{\mathcal{M}_{0r}}(X_0\beta)\} \subseteq \{BLUE_{\mathcal{M}_r}(X\beta)\}$ olacak şekilde bir $BLUE_{\mathcal{M}_{0r}}(X_0\beta)$ tahmin edicisi mevcuttur.

(ii) $\Re\begin{pmatrix}XF_A\\0\\0\end{pmatrix}\cap\Re\begin{pmatrix}\Sigma&\Sigma_0\\(XF_A)'&0\\0&(XF_A)'\end{pmatrix} = \{0\}$ dir.

(iii) $r\big(\Sigma E_{XF_A}, \Sigma_0 E_{X_0F_A}\big) = r\big(E_{XF_A}\Sigma, E_{X_0F_A}\Sigma_0\big)$ dir.

(iv) $\Re(XF_A)\cap\Re\big(\Sigma E_{XF_A}, \Sigma_0 E_{X_0F_A}\big) = \{0\}$ dir.

(v) $r\begin{pmatrix}\Sigma&XF_A&0\\\Sigma_0&0&XF_A\end{pmatrix} = r(\Sigma, \Sigma_0\,, XF_A) + r(XF_A)$ dir (Tian, 2009).

Sonuç 3.11 $X = X_0$ olmak üzere $\mathcal{M}_r$ ve $\mathcal{M}_{0r}$ modelleri (3.31) ve (3.32) de verildikleri gibi olsun ve Σ pozitif definit olsun. Bu takdirde

(a) $BLUE_{\mathcal{M}_{0r}}(X\beta) = BLUE_{\mathcal{M}_r}(X\beta)$ olacak şekilde bir $BLUE_{\mathcal{M}_{0r}}(X\beta)$ tahmin edicisi mevcuttur.

(b) $\Re(\Sigma_0\Sigma^{-1}XF_A) \subseteq \Re(XF_A)$ dir (Tian, 2009).

Sonuç 3.12 $X = X_0$ olmak üzere $\mathcal{M}_r$ ve $\mathcal{M}_{0r}$ modelleri (3.31) ve (3.32) de verildikleri gibi olsun ve Σ ve Σ_0 pozitif definit olsun. Bu takdirde

(a) $BLUE_{\mathcal{M}_{0r}}(X\beta) = BLUE_{\mathcal{M}_r}(X\beta)$ dir.

(b) $\Re(\Sigma^{-1}XF_A) = \Re(\Sigma_0^{-1}XF_A)$ dir.

(c) $\Re\left(\Sigma E_{XF_A}\right) = \Re(\Sigma_0 E_{X_0F_A})$ dir (Tian, 2009).

Eğer (3.32) de verilen kısıtlamalı model özel olarak

$$M_{0r} = \left\{\begin{bmatrix} y \\ b \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} X_0 \\ A \end{bmatrix}\beta\,, \begin{bmatrix} \sigma^2 I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right\} \tag{3.38}$$

olarak alınırsa bu takdirde aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Teorem 3.5 $\mathcal{M}_r$ ve $\mathcal{M}_{0r}$ modelleri (3.31) ve (3.38) de verildikleri gibi olmak üzere $K\beta$ ve $K_0\beta$ sırasıyla $\mathcal{M}_r$ ve $\mathcal{M}_{0r}$ modelleri altında tahmin edilebilir olun. Bu takdirde

(a) $BLUE_{\mathcal{M}_{0r}}(K_0\beta) \in \left\{BLUE_{\mathcal{M}_r}(K\beta)\right\}$ olacak şekilde bir $BLUE_{\mathcal{M}_{0r}}(K_0\beta)$ tahmin edicisi mevcuttur.

(b) $\Re\begin{pmatrix} 0 \\ K' \\ K_0' \end{pmatrix} \subseteq \Re\begin{pmatrix} E_{XF_A}\Sigma X_0F_A & 0 \\ X'X_0F_A & A' \\ X_0'X_0F_A & A' \end{pmatrix}$ dir. (Tian, 2009).

Teorem 3.6 $X = X_0$ olmak üzere $\mathcal{M}_r$ ve $\mathcal{M}_{0r}$ modelleri (3.31) ve (3.38) de verildikleri gibi olmak üzere $K\beta$ fonksiyonu $\mathcal{M}_r$ ve $\mathcal{M}_{0r}$ modelleri altında tahmin edilebilir olun. Bu takdirde

(a) Aşağıdaki ifadeler denktir:

(i) $BLUE_{\mathcal{M}_{0r}}(K\beta) \in \left\{BLUE_{\mathcal{M}_r}(K\beta)\right\}$ olacak şekilde bir $BLUE_{\mathcal{M}_{0r}}(K\beta)$ tahmin edicisi mevcuttur.

(ii) $\Re\begin{pmatrix} 0 \\ (KF_A)' \end{pmatrix} \subseteq \Re\begin{pmatrix} E_{XF_A}\Sigma XF_A \\ (XF_A)'(XF_A) \end{pmatrix}$ dir.

(b) Aşağıdaki ifadeler denktir:

(i) $BLUE_{\mathcal{M}_{0r}}(X\beta) \in \{BLUE_{\mathcal{M}_r}(X\beta)\}$ olacak şekilde bir $BLUE_{\mathcal{M}_{0r}}(X\beta)$ tahmin edicisi mevcuttur.

(ii) $\Re(\Sigma XF_A) \subseteq \Re(XF_A)$ dir (Tian, 2009).

İspat. (a) şıkkının ispatı Teorem 3.5 den görülür. Ayrıca

$$\Re\begin{pmatrix} 0 \\ (KF_A)' \end{pmatrix} \subseteq \Re\begin{pmatrix} E_{XF_A}\Sigma XF_A \\ (XF_A)'(XF_A) \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow r\begin{pmatrix} E_{XF_A}\Sigma XF_A & 0 \\ (XF_A)'(XF_A) & (XF_A)' \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} E_{XF_A}\Sigma XF_A \\ (XF_A)'(XF_A) \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow r\left(E_{XF_A}\Sigma XF_A\right) + r(XF_A) = r(XF_A)$$

$$\Leftrightarrow E_{XF_A}\Sigma XF_A = 0$$

$$\Leftrightarrow \Re(\Sigma XF_A) \subseteq \Re(XF_A) \tag{3.39}$$

olduğu görülür ve böylece de ispat tamamlanmış olur.

3.4 En iyi Lineer Yansız Tahmin Ediciye İzdüşüm Odaklı Bir Yaklaşım

Bu kısımda genel lineer model altında en iyi lineer yansız tahmin ediciye izdüşüm tabanlı bir yaklaşım ele alınacaktır. Bununla ilgili olarak yine

$$y = X\beta + \varepsilon,\ E(y) = X\beta, cov(y) = \sigma^2\Sigma, \tag{3.40}$$

genel lineer modelinin verildiğini varsayalım, burada $X \in \mathbb{R}^{n\times p}$ keyfi ranklı bir bilinenler matrisi, $y \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ gözlenebilir bir rasgele vektör, $\beta \in \mathbb{R}^{p\times 1}$ bilinmeyen parametre vektörü, $\Sigma \in \mathbb{R}^{n\times n}$ bilinen keyfi ranklı non-negatif definit matris ve σ^2 bilinmeyen bir pozitif parametredir. (3.1) genel lineer modeli genellikle

$$\mathcal{M} = \{y, X\beta, \sigma^2\Sigma\} \tag{3.41}$$

şeklinde gösterilir. Burada (3.1) modelinin tutarlı olduğu yani bir çözüme sahip olduğu varsayılacaktır. Bunun için 1 olasılıkla

$$y \in \Re[X, \Sigma]$$

olmalıdır. Bu durumda y vektörünün $X\beta$ sistematik parçasının (3.1) de verilen genel lineer model altındaki BLUE, yani lineer, yansız ve löener anlaminda minimum varyanslı tahmin edicisine izdüşüm odaklı bir yaklaşım verilecektir. Bilindiği gibi bir

Gy lineer istatistiğinin $X\beta$ tahmin edilebilir parametre fonksiyonu için bir en iyi lineer yansız tahmin edici, BLUE, olması için gerek ve yeter şart G matrisinin

$$GX = X \text{ ve } G\Sigma X^{\perp} = 0 \tag{3.42}$$

matris denklemini sağlaması gerektiğini hatırlayalım (bakınız, e.g., Rao, 1973, p.282). Burada $X^{\perp}$ matrisi $\Re(X^{\perp}) = \Re(X)^{\perp}$ olacak şekilde bir matris olup $\Re(X)^{\perp}$ vektörü $\Re(X)$ in orthogonal bütünleyenini göstermektedir. Bu durumda (3.42) ifadesi

$$G(P_X, P_{\Sigma X^{\perp}}) = (P_X, 0) \tag{3.43}$$

olarak da yazılabilir.

Bu kısımdaki amacımıza geçmeden önce izdüşümler ve genelleştirilmiş izdüşümler ile ilgili bazı özellikleri hatırlatmak yararlı olacaktır. $\mathbb{C}_{m,n}$ ile $m \times n$ tipindeki kompleks matrislerin kümesini gösterelim. Daha önce verilenlere ilaveten $L \in \mathbb{C}_{m,n}$ için L^* matrisi L nin eşlenik transpozu ve $\bar{L} = I - L$ olsun. $\mathbb{C}_n^{OP}$ ile

$$\mathbb{C}_n^{OP} = \{L \in \mathbb{C}_{n,n}: L^2 = L = L^*\}$$

kümesini tanımlayalım. Bu durumda bir P orthogonal izdüşümü için $P \in \mathbb{C}_n^{OP}$ olması için gerek ve yeter şart $P = LL^+$ olacak şekilde bir $L \in \mathbb{C}_{m,n}$ matrisinin mevcut olmasıdır. Buradan $P_L = LL^+$ matrisi $\Re(L)$ üzerinde dik izdüşüm olur ve dolayısıyla $\tilde{P}_L = I - P_L$ de $\Re(L)^{\perp}$ üzerinde dik izdüşümdür.

$P \in \mathbb{C}_n^{OP}$ matrisi r ranklı olsun. Bu takdirde öyle bir $U \in \mathbb{C}_{n,n}$ üniter matrisi bulunabilir ki

$$P = U \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^* \tag{3.44}$$

yazılabilir. Öte yandan herhangi bir $Q \in \mathbb{C}_n^{OP}$ orthogonal izdüşümü $A \in \mathbb{C}_{r,r}$ ve $D \in \mathbb{C}_{n-r,n-r}$ Hermityen matrisler olmak üzere

$$Q = U \begin{pmatrix} A & B \\ B^* & D \end{pmatrix} U^* \tag{3.45}$$

şeklinde ifade edilebilir.

Lemma 3.9 $Q \in \mathbb{C}_n^{OP}$ (3.45) deki gibi parçalanmış olsun. Bu takdirde

(i) $A = A^2 + BB^*$ veya buna denk olarak $A\bar{A} = BB^*$ dir.

(ii) $B = AB + BD$ veya buna denk olarak $B^* = B^*A + DB^*$ dir.

(iii) $D = D^2 + B^*B$ veya buna denk olarak $D\overline{D} = B^*B$ dir (Baksalary ve Trenkler 2009).

Lemma 3.10 $Q \in \mathbb{C}_n^{OP}$ (3.45) deki gibi parçalanmış olsun. Bu takdirde

(i) $\bar{A} = \bar{A}^2 + BB^*$, **(ii)** $BD = \bar{A}B$,

(iii) $AB = B\overline{D}$, **(iv)** $\overline{D} = \overline{D}^2 + B^*B$

(v) $\Re(B) \subseteq \Re(A)$, **(vi)** $\Re(B) \subseteq \Re(\bar{A})$,

(vii) $\Re(B^*) \subseteq \Re(D)$, **(viii)** $\Re(B^*) \subseteq \Re(\overline{D})$

(ix) $A^+B = B\overline{D}^+$, **(x)** $\bar{A}^+B = BD^+$

ifadeleri gerçeklenir (Baksalary ve Trenkler 2009).

Lemma 3.11 $Q \in \mathbb{C}_n^{OP}$ (3.45) deki gibi parçalanmış olsun. Bu takdirde

(i) $A - BD^+B^* = \tilde{P}_{\bar{A}}$, **(ii)** $\bar{A} + BD^+B^* = P_{\bar{A}}$,

(iii) $D - B^*A^+B = \tilde{P}_{\overline{D}}$, **(iv)** $\overline{D} + B^*A^+B = P_{\overline{D}}$,

(v) $D + B^*\bar{A}^+B = P_D$, **(vi)** $\overline{D} - B^*\bar{A}^+B = \tilde{P}_D$

(vii) $\bar{A} + B\overline{D}^+B^* = P_A$, **(viii)** $\bar{A} - B\overline{D}^+B^* = \tilde{P}_A$

ifadeleri gerçeklenir (Baksalary ve Trenkler 2009).

Lemma 3.12 $Q \in \mathbb{C}_n^{OP}$ (3.45) deki gibi parçalanmış olsun. Bu takdirde

(i) $r(\bar{A}) = r - r(A) + r(B)$,

(ii) $r(\overline{D}) = n - r + r(B) - r(D)$,

ifadeleri gerçeklenir (Baksalary ve Trenkler 2009).

Lemma 3.13 $P, Q \in \mathbb{C}_n^{OP}$ olsun. Bu takdirde

(i) $P + \bar{P}(\bar{P}Q)^+$, $\Re(P) + \Re(Q)$ üzerinde dik izdüşümdür.

(ii) $P - P(P\bar{Q})^+$, $\Re(P) \cap \Re(Q)$ üzerinde dik izdüşümdür (Baksalary ve Trenkler 2009).

Lemma 3.14 $P, Q \in \mathbb{C}_n^{OP}$ olmak üzere Q matrisi (3.45) deki gibi parçalanmış olsun. olsun. Bu takdirde

(i) $P_{\Re(P)+\Re(Q)} = U\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & P_D \end{pmatrix}U^*$ eşitlşiği sağlanır, burada $dim[\Re(P) + \Re(Q)] = r + r(D)$ dir.

(ii) $P_{\mathcal{N}(P)+\mathcal{N}(Q)} = U\begin{pmatrix} P_{\bar{A}} & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix}U^*$ eşitlşiği sağlanır, burada $dim[\mathcal{N}(P) + \mathcal{N}(Q)] = n - r(A) - r(B)$ dir.

(iii) $P_{\Re(P)\cap\Re(Q)} = U\begin{pmatrix} \tilde{P}_{\bar{D}} & 0 \\ 0 & I_r \end{pmatrix}U^*$ eşitlşiği sağlanır, burada $dim[\Re(P) \cap \Re(Q)] = r(A) - r(B)$ dir.

(iv) $P_{\mathcal{N}(P)\cap\mathcal{N}(Q)} = U\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tilde{P}_D \end{pmatrix}U^*$ eşitlşiği sağlanır, burada $dim[\mathcal{N}(P) \cap \mathcal{N}(Q)] = n - r - r(D)$ dir (Baksalary ve Trenkler (2009)).

İspat. Sadece (i) ve (iii) şıklarının ispatını vereceğiz. Diğerleri de benzer şekilde yapılabilir. Lemma 3.9 ve Lemma 3.10 daki şartlara bağlı olarak

$$\bar{P}Q = U\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B^* & D \end{pmatrix}U^*$$

matrisinin Moore-Penrose inversinin

$$(\bar{P}Q)^+ = U\begin{pmatrix} 0 & BD^+ \\ 0 & P_D \end{pmatrix}U^*$$

şeklinde olacağı kolaylıkla gösterilebilir. Bu nedenle lemma 3.13 deki (i) şıkkından $\Re(P) + \Re(Q)$ üzerindeki izdüşümün (i) şıkkında verilen forma sahip olacağı göülür. Bu şıkkın geri kalan kısmının sağlandığı ise açıktır.

(iii) şıkkını göstermek için Lemma 3.9 un (iii), Lemma 3.10 un (vi) ve (x) şıkları ve Lemma 3.11 in (ii) şıkkı kullanılarak direct bir hesaplamayla

$$P\bar{Q} = U\begin{pmatrix} \bar{A} & -B \\ 0 & 0 \end{pmatrix}U^*$$

matrisinin Moore-Penrose inversinin

$$(P\bar{Q})^+ = U\begin{pmatrix} P_{\bar{A}} & 0 \\ D^+B^* & 0 \end{pmatrix}U^*$$

şeklinde olacağı kolaylıkla gösterilebilir. Bu nedenle lemma 3.13 deki (ii) şıkkından $\Re(P) \cap \Re(Q)$ üzerindeki izdüşümün (iii) şıkkında verilen forma sahip olacağı göülür. Öte yandan $dim[\Re(P) \cap \Re(Q)] = r\left(P_{\Re(P) \cap \Re(Q)}\right)$ olacağından

$$dim[\Re(P) \cap \Re(Q)] = r\left(\tilde{P}_{\bar{A}}\right) = r(I - \bar{A}\bar{A}^{+}) = r - r(\bar{A})$$

olduğu görülür. (iii) şıkkının sağındaki eşitlik ise Lemma 3.12 nin (I) şıkkından kolayca görülebilir ve böylece ispat tamamlanmış olur.

Lemma 3.15 $P, Q \in \mathbb{C}_n^{OP}$ matrisleri verilmiş olsun. Bu takdirde

(i) $\Re(P) \cap \Re(Q) = \{0\} \Leftrightarrow r(A) = r(B)$ dir.

(ii $\Re(P) + \Re(Q) = \mathbb{C}_{n,1} \Leftrightarrow r(D) = n - r$ dir (Baksalary ve Trenkler 2009).

Genelleştirilmiş izdüşüm kavramı ise ilk kez Rao(1974) tarafından ortaya atılmıştır. $\mathcal{F} = \Re(F)$ ve $\mathcal{H} = \Re(H)$ $\mathbb{C}_{n,1}$ uzayının sırasıyla $F, H \in \mathbb{C}_{n,n}$ matrisleriyle üretilen alt uzayları olsun. $\mathcal{F} \cap \mathcal{H} = \{0\}$ ve $\mathcal{F} + \mathcal{H} = \Re(F, H) \subseteq \mathbb{C}_{n,1}$ ve her $u \in \mathcal{F} + \mathcal{H}$ vektörünün $u_F \in \mathcal{F}$ ve $u_H \in \mathcal{H}$ olmak üzere $u = u_F + u_H$ olarak tek türlü yazılabildiğini varsayalım. Bu durumda eğer her $u \in \mathcal{F} + \mathcal{H}$ için $P_{F|H} = u_F$ ise $P_{F|H}$ izdüşümüne $\mathcal{F}$ üzerinde $\mathcal{H}$ boyunca genelleştirilmiş izdüşüm operatörü adı verilir.

$P_{F|H}$ operatörü lineer bir operatör olup

$$P_{F|H}F = F \text{ ve } P_{F|H}H = 0 \qquad (3.46)$$

eşitliklerini sağlar, ancak bu operatörün tek veya idempotent olması gerekmez.

$T \in \mathbb{C}_{n,n}$ matrisi verilsin. $TF = F$ ve $TH = 0$ eşitliklerini göz önüne alalım. Moore-Penrose inversin özelliklerinden (3.46) eşitliklerinni

$$TP = P \text{ ve } TQ = 0 \qquad (3.47)$$

olarak yazılabildiği görülür, burada $P = P_F = FF^{+}$ ve $Q = P_H = HH^{+}$ izdüşümleri sırasıyla $\mathcal{F} = \Re(F)$ ve $\mathcal{H} = \Re(H)$ üzerindeki orthogonal izdüşümlerdir. (3.47) denklemlerinin çözülebilir olması için gerek ve yeter şart aşağıdaki teoremde verilmiştir.

Teorem 3.7 $P, Q \in \mathbb{C}_n^{OP}$ olsun. Bu takdirde (3.47) ifadesinin T ye göre bir çözüme sahip olması için gerek ve yeter şart $\Re(P) \cap \Re(Q) = \{0\}$ olmasıdır (Baksalary ve Trenkler 2009).

İspat. Moore-Penrose inversin özelliklerinden

$$(P,Q)^+ = (P,Q)^*[(P,Q)(P,Q)^*]^+ = \begin{pmatrix} P(P+Q)^+ \\ Q(P+Q)^+ \end{pmatrix}$$

eşitliği yazılabilir. Bu nedenle $T(P,Q) = (P,0)$ eşitliğinin bir çözüme sahip olması için gerek ve yeter şart

$$P(P+Q)^+P = P \text{ ve } P(P+Q)^+Q = 0 \tag{3.48}$$

olmasıdır. Böylece

$$(P+Q)^+ = U\begin{pmatrix} I_r - \frac{1}{2}\tilde{P}_{\bar{A}} & -BD^+ \\ -D^+B^* & 2D^+ - P_D \end{pmatrix}U^* \tag{3.49}$$

gösterimi kullanılırsa (3.48) eşitliklerinin sağlanması için gerek ve yeter şartın $\tilde{P}_{\bar{A}} = 0$ eşitliğinni sağlanması olduğu görülür. Bu ise $\mathfrak{R}(P) \cap \mathfrak{R}(Q) = \{0\}$ olasına denktir ve böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.8 $P, Q \in \mathbb{C}_n^{OP}$ matrisleri $\mathfrak{R}(P) \cap \mathfrak{R}(Q) = \{0\}$ olacak şekilde verilmiş olsun. Bu takdirde (3.47) denklemlerinin genel çözümüm

$$T = (\bar{Q}P)^+ + YP_{\mathcal{N}(P+Q)} \tag{3.50}$$

şeklindedir, burada $Y \in \mathbb{C}_{n,n}$ keyfi bir matris olup $P_{\mathcal{N}(P+Q)}$ ise $P+Q$ nun sıfır uzayı üzerindeki orthogonal izdüşümdür (Baksalary ve Trenkler, 2009).

İspat. Teoremin ispat burada verilmeyecektir. Ancak ispat için Baksalary ve Trenkler (2009) referansına bakılabilir.

(3.42) ifadesinden $X\beta$ parametresinin BLUE tahmin edicsinin G (3.43) eşitliğini sağlayan bir matris olmak üzere Gy şeklinde verildiğini hatırlayalım. Bu durumda $P_X = P$ ve $P_{\Sigma X^\perp} = Q$ olmak üzere (3.43) eşitliği

$$G(P,Q) = (P,0) \tag{3.51}$$

formunda yeniden yazılabilir. Yukarıda verilen sonuçlar kullanılarak (3.51) eşitliğinin tüm çözümleri belirlenebilir. Örneğin $X\beta$ parametresinin BLUE tahmin edicsinin iki önemli gösterimini

$$T_0y = (\bar{Q}P)^+y \quad \text{ve} \quad T_1y = (I - (\bar{P}Q)^+)y$$

olarak yazabiliriz. Bu türden diğer gösterimler Teorem 3.8 den elde edilebilir.

Şimdi BLUE tahmin edicisine izdüşüm tabanlı diğer bir yaklaşım ortaya koyalım. (3.42) deki $X^{\perp}$ için $\bar{P} = I - XX^{+}$ seçilirse

$$GP = P \quad \text{ve} \quad G\Sigma\bar{P} = 0 \tag{3.52}$$

elde edilir. $\Omega \in \mathbb{R}_{n,n}$ matrisinin $\Omega_{11} \in \mathbb{R}_{r,r}$ olmak üzere

$$\Omega = \begin{pmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} \\ \Omega_{12}' & \Omega_{22} \end{pmatrix} \tag{3.53}$$

şeklinde parçalandığını varsayalım, öyle ki Σ nın bir parçalanışı

$$\Sigma = \mathrm{U}\Omega\mathrm{U}' \tag{3.54}$$

formunda olsun. Buna ilaveten G matrisinin $G_{11} \in \mathbb{R}_{r,r}$ olmak üzere

$$G = U\begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{pmatrix}U'$$

olarak parçalandığını varsayalım. Bu takdirde (3.52) deki birinci şartın sağlanması için gerek ve yeter şart $G_{11} = I_r$ ve $G_{21} = 0$ olmasıdır. Bunlar dikkate alınarak

$$G\Sigma\bar{P} = U\begin{pmatrix} 0 & \Omega_{12} + G_{12}\Omega_{22} \\ 0 & G_{22}\Omega_{22} \end{pmatrix}U'$$

olduğu görülebilir. Sonuçta (3.52) deki ikinci eşitliğin sağlanmsı $G_{12}\Omega_{22} = -\Omega_{12}$ ve $G_{22}\Omega_{22} = 0$ olduğuna denk olacaktır. Σ nın nonnegative definit olmasının bir sonucu olarak $\Re(\Omega_{12}) \subseteq \Re(\Omega_{22})$ olduğu dikkate alınırsa (3.52) denklem çiftinin tutarlı olduğu görülür. Eğer G_{22} singüler ise bu takdirde (3.52) denklem çifti sonsuz çoklukta çözüme sahip olacaktır ki iki özel çözüm

$$G_0 = U\begin{pmatrix} I_r & -\Omega_{12}\Omega_{22}^{+} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}U' \quad \text{ve} \quad G_1 = U\begin{pmatrix} I_r & -\Omega_{12}\Omega_{22}^{+} \\ 0 & I_{n-r} - \Omega_{12}\Omega_{22}^{+} \end{pmatrix}U' \tag{3.55}$$

formuna sahiptir. Bu durumda da

$$G_0 = P - P\Sigma\bar{P}(\bar{P}\Sigma\bar{P})^{+} \text{ ve } G_1 = I_n - \Sigma\bar{P}(\bar{P}\Sigma\bar{P})^{+} \tag{3.56}$$

olduğu elde edilir ki hiç şüphesiz bunlar BLUE tahmin edicisinin literatürde iyi bilinen gösterimleridir (bkz. Rao(1978)).

Şimdi G matrisi (3.52) nin herhangi bir çözümü olmak üzere $BLUE(X\beta) = Gy$ tahmin edicisini göz önüne alalım. Bu durumda G matrisi (3.55) de verilen iki matristen herhangi biriyle gösterildiğinde $cov(Gy) = \sigma^2 G\Sigma\mathrm{G}'$ olup

$$cov\big(BLUE(X\beta)\big) = \sigma^2 U \begin{pmatrix} \Omega_{11} - \Omega_{12}\Omega_{22}^{+}\Omega_{12}' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U' \tag{3.57}$$

olduğu görülür. Bu durumda (3.57) matrisinin sıfırdan farklı parçası (3.53) ifadesinde tanımlanan Ω matrisindeki Ω_{22} nin Schur komplementini göstermektedir. Diğer taraftan $OLSE(X\beta) = Py$ nin kovaryans matrisinin

$$cov\big(OLSE(X\beta)\big) = \sigma^2 U \begin{pmatrix} \Omega_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U' \tag{3.58}$$

formunda olduğu gösterilebilir. Bunun sonucu olarak (3.55) de verilen G_0 veya G_1 matrisi kullanılarak

$$cov\big(OLSE(X\beta), BLUE(X\beta)\big) = \sigma^2 U \begin{pmatrix} \Omega_{11} - \Omega_{12}\Omega_{22}^{+}\Omega_{12}' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U' \tag{3.59}$$

elde edilir. Öte yandan (3.57) ve (3.59) ifadelerinden $cov\big(OLSE(X\beta), BLUE(X\beta)\big) = cov\big(BLUE(X\beta)\big)$ olduğu görülür. Dolayısıyla Ω_{22}^{+} nonnegative definit olduğundan $\Omega_{12}\Omega_{22}^{+}\Omega_{12}' = 0 \Leftrightarrow \Omega_{12}\Omega_{22}^{+} = 0$ olduğu elde edilir. Bu durumda $\Re(\Omega_{12}) \subseteq \Re(\Omega_{22})$ içermesine bağlı olarak bu denkliğin sağ tarafında bulunan eşitlik $\Omega_{12} = 0$ olarak sadeleştirilebilir. Yukarıda verilen gösterimler dikkate alınırsa aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.9 $X\beta$ parametre vektörü (3.40) modeli altında tahmin edilebilir, Σ (3.54) deki gibi olmak üzere P de X in sütun uzayı üzerindeki orthogonal izdüşümü göstersin. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktir (Baksalary ve Trenkler, 2009):

(i) $BLUE(X\beta) = OLSE(X\beta)$,

(ii) $cov\big(BLUE(X\beta)\big) = cov\big(OLSE(X\beta)\big)$,

(iii) $cov\big(OLSE(X\beta), BLUE(X\beta)\big) = cov\big(OLSE(X\beta)\big)$,

(iv) $P\Sigma = \Sigma P$,

(v) $\Omega_{12} = 0$

İspat. Öncelikle belirtelim ki (i) ve (iv) de verilen durumların denkliği literatürden bilinmektedir (bkz. Puntanen ve Styan (1989)). Öte yandan (ii)⟺(v) ve (iii)⟺(v) denklikleri sırasıyla (4.56) ve (4.58) formüllerini (4.57) ile birleştirerek kolaylıkla elde edilebilir. (iv)⟺(v) durumu ise açıktır. Böylece ispat tamamlanmış olur.

3.5 Farklı Kovaryans Matrisli İki Lineer Modelde BLUE ların Karşılaştırılması

$$y = X\beta + \varepsilon,\; E(y) = X\beta,\, cov(y) = \Sigma,$$

genel lineer modelinin verildiğini varsayalım, burada $X \in \mathbb{R}^{n\times p}$ keyfi ranklı bir bilinenler matrisi, $y \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ gözlenebilir bir rasgele vektör, $\beta \in \mathbb{R}^{p\times 1}$ bilinmeyen parametre vektörü, $\Sigma \in \mathbb{R}^{n\times n}$ bilinen keyfi ranklı non-negatif definit matristir. (3.1) genel lineer modeli genellikle $\mathcal{M} = \{y, X\beta, \Sigma\}$ şeklinde gösterilir. Daha önce de verildiği gibi $P_A = AA^+$, $H = P_X$ ve $M = I - H$ olsun.

Lemma 3.16 $\mathcal{M} = \{y, X\beta, \Sigma\}$ genel lineer modelini göz önüne alalım. Bu takdirde $OLSE_{\mathcal{M}}(X\beta) = BLUE_{\mathcal{M}}(X\beta)$ olması çin aşağıdaki şartlardan birisinin sağlanmasıdır (Hauke ve Ark., 2012):

(a) $H\Sigma = \Sigma H$ dir.

(b) $H\Sigma M = 0$ dir.

(c) $\Re(\Sigma X) \subseteq \Re(X)$ dir.

(d) N_1 ve N_2 keyfi olmak üzere $\Sigma = HN_1H + MN_2M$ dir.

(e) $\alpha \in \mathbb{R}$, N_3 ve N_4 keyfi olmak üzere $\Sigma = \alpha I + HN_3H + MN_4M$ dir.

Lemma 3.17 $W = \Sigma + XUU'X'$ matrisi $\Re(X, \Sigma) = \Re(W)$ eşitliğini sağlayan keyfi bir matris olsun. Bu takdirde Fy tahmin edicisinin $\mathcal{M} = \{y, X\beta, \Sigma\}$ modeli altında $X\beta$ için lineer olarak yeterli olması için gerek ve yeter şart

$$\Re(X) \subseteq \Re(WF') \tag{3.60}$$

olmasıdır (Hauke ve Ark.,2012).

Ayrıca Fy tahmin edicisi $\mathcal{M} = \{y, X\beta, \Sigma\}$ modeli altında $X\beta$ için lineer olarak yeterli olsun. Bu takdirde $\{Fy, FX\beta, F\Sigma F'\}$ dönüştürülmüş modeli altında $X\beta$ nın her BLUE tahmin edicisi orjinal $\mathcal{M}$ modeli altında $X\beta$ nın bir BLUE tahmin edicisidir ve terside doğrudur. $P_{A:N}$ ile

$$P_{A:N} = A(A'NA)^{-}A'N \tag{3.61}$$

izdüşümünü gösterelim.

Bu kısımdaki amacımız farklı kovaryans matrislerine sahip iki

$$\mathcal{M}_1 = \{y, X\beta, \Sigma_1\} \text{ ve } \mathcal{M}_2 = \{y, X\beta, \Sigma_2\} \tag{3.62}$$

modelleri altında $X\beta$ parametre vektörünün BLUE tahmin edicilerini karşılaştırmaktır. Burada Σ_1 ve Σ_2 matrislerinin nonnegatif definit olduğu kabul edilecektir. Bu tahmin edicileri $BLUE(X\beta|\mathcal{M}_i) = X\tilde{\beta}_i, i = 1,2$ ile gösterelim. Bu durumda nonnegatif definit W_1 ve W_2 matrislerini

$$W_i = \Sigma_i + XU_iU_i'X', \quad \Re(W_i) = \Re(X, \Sigma_i), \; i = 1,2 \tag{3.63}$$

olarak tanımlayalım. Bu takdirde $i = 1,2$ için

$$BLUE(X\beta|\mathcal{M}_i) = X\tilde{\beta}_i = X(X'W_i^+X)^-X'W_i^+y = P_{X:W_i^+}y \tag{3.64}$$

olacaktır. Şimdi ilgi alanımız $X\tilde{\beta}_1$ ve $X\tilde{\beta}_2$ nın farkı üzerine olacaktır. Bu problemin ilk çözümü Σ_1 ve Σ_2 nin her ikisinin de olması şartı altında BLUE tahmin edicilerinin eşitliği durumunda göz önüne alınmıştır. BLUE lar için genel gösterimler L_1 ve L_2 keyfi olmak üzere G_iy dir, burada

$$G_i = P_{X:W_i^+} + L_i(I_n - P_{W_i}) \tag{3.65}$$

dir. Burada $G_i \in \{P_{X|\Sigma_iM}\}$ nin seçimlerinden bağımsız olarak G_iy BLUE tahmin edicilerinin sayısal değerlerinin tek olduğunu hatırlatalım.

$\mathcal{M} = \{y, X\beta, \Sigma\}$ genel modeli altında

$$BLUE(X\beta|\mathcal{M}) := Gy \text{ ve } OLSE(X\beta|\mathcal{M}) = Hy = P_Xy \tag{3.66}$$

tahmin edicilerinin karşılaştırılmasında her $y \in \Re(X, \Sigma)$ için

$$Gy = Hy - H\Sigma M(M\Sigma M)^-My \tag{3.67}$$

ayrışımı yazılabilir. Bu nedenle $BLUE(X\beta)$ ve $OLSE(X\beta)$ arasındaki fark

$$OLSE(X\beta) - BLUE(X\beta) = H\Sigma M(M\Sigma M)^-My \tag{3.68}$$

olacaktır. Örneğin W Lemma 3.17 de tanımlandığı gibi olmak üzere

$$Hy - X(X'W^+X)^-X'W^+y = H\Sigma M(M\Sigma M)^-My \tag{3.69}$$

elde edilir. Ayrıca $\mathcal{M}$ modeli altında BLUE tahmin edicinin rezidüsü

$$y - X(X'W^+X)^-X'W^+y = \Sigma M(M\Sigma M)^-My := \tilde{\varepsilon} \tag{3.70}$$

olarak ifade edilebilir. (3.69) ve (3.70) ifadelerinin her $y \in \Re(W)$ içinsağlanması gerektiğini dolayısıyla (3.69) un bir tür istatistiksel eşitlik olduğunu belirtelim. Öte yandan aşağıdaki matris denklemleri sağlanır.

$$H - X(X'W^{+}X)^{-}X'W^{+} = H\Sigma M(M\Sigma \mathrm{M})^{-}MP_{W}\,, \tag{3.71a}$$

$$= H\Sigma M(M\Sigma \mathrm{M})^{+}M\,, \tag{3.71b}$$

$$I_n - X(X'W^{+}X)^{-}X'W^{+} = H\Sigma M(M\Sigma \mathrm{M})^{+}M + (I_n - P_W). \tag{3.71c}$$

Şimdi $P_{X:W_1^+}y$ ve $P_{X:W_2^+}y$ BLUE tahmin edicileri verildiğinde bu tahmin ediciler arasında (3.68) de verilen OLSE ve BLUE tahmin edicileri arasındaki ilişkiye benzer bir ilişki olup olmadığı sorusu akla gelebilir. Aşağıdaki teorem bu soruya bir cevap niteliğindedir.

Teorem 3.10 $\mathcal{M}_1 = \{y, X\beta, \Sigma_1\}$ ve $\mathcal{M}_2 = \{y, X\beta, \Sigma_2\}$ modelleri verilmiş olsun. W_1 ve W_2 matrisleri (3.63) de tanımlandıkları gibi olsun. Farz edlim ki $\mathcal{M}_2$ modeli $cov(y) = \Sigma_2$ olacak şekilde verilsin ve $y \in \Re(W_2) = \Re(X, \Sigma_2)$ olsun. Bu takdirde

$$\begin{aligned} X\tilde{\beta}_1 - X\tilde{\beta}_2 &= P_{X:W_1^+}y - P_{X:W_2^+}y \\ &= P_{X:W_1^+}\Sigma_2 M(M\Sigma_2\mathrm{M})^{-}My \\ &= P_{X:W_1^+}(y - X\tilde{\beta}_2) \end{aligned} \tag{3.72}$$

dir (Hauke ve Ark., 2012).

İspat. Bu durumda

$$\begin{aligned} P_{X:W_1^+}P_{X:W_2^+}y &= X(X'W_1^{+}X)^{-}X'W_1^{+}X(X'W_2^{+}X)^{-}X'W_2^{+} \\ &= X(X'W_2^{+}X)^{-}X'W_2^{+} \end{aligned} \tag{3.73}$$

olduğundan

$$P_{X:W_1^+} - P_{X:W_2^+} = P_{X:W_1^+}(I - P_{X:W_2^+})$$

özdeşliği ve dolayısıyla her $y \in \mathbb{R}^n$ için

$$P_{X:W_1^+}y - P_{X:W_2^+}y = P_{X:W_1^+}(I - P_{X:W_2^+})y \tag{3.74}$$

yazılabilir. Bu durumda $\mathcal{M}_2$ modeli altında $y - P_{X:W_2^+}y$ vektörü BLUE tahmin edicisinin rezidüsü olup

$$(I - P_{X:W_2^+})y = \Sigma_2 M(M\Sigma_2\mathrm{M})^{-}My \coloneqq \tilde{\varepsilon}_2 \tag{3.75}$$

olarak yazılabilir. Bu durumda (3.75) ifadesi (3.74) eşitliğinde yerine yazılırsa (3.72) elde edilir ve böylece de ispat tamamlanmış olur.

Aşağıdaki eşitliği kullanarak (3.72) de verilen $X\tilde{\beta}_1 - X\tilde{\beta}_2$ farkı için başka birtakım ifadeler de verilebilir.

$$M(M\Sigma_2\mathrm{M})^+M = M(M\Sigma_2\mathrm{M})^+ = (M\Sigma_2\mathrm{M})^+M = (M\Sigma_2\mathrm{M})^+. \tag{3.76}$$

$\mathcal{M} = \{y, X\beta, \Sigma\}$ modeli altında $\|OLSE(X\beta) - BLUE(X\beta)\|$ için bir üst sınır Baksalary ve Kala (1980) tarafından verilmişitr. (3.67) eşitliğine dayanan bu sunuç

$$\|Hy - Gy\| \leq \frac{\sqrt{ch_{max}(H\Sigma M\Sigma \mathrm{H})}}{ch_{min}(M\Sigma\mathrm{M})}\|My\| \tag{3.77}$$

olarak verilir, burada $ch_{max}(A)$ A matrisinin en büyük özdeğerini ve $ch_{minx}(A)$ A matrisinin sıfırdan farklı en küçük özdeğerini göstermektedir. (3.77) de y vektörü karşılık gelen rasgele vektörün bir gerçekleşmesidir. Bu durumda $\|X\tilde{\beta}_1 - X\tilde{\beta}_2\|$ için karşılık gelen sonuç

$$\|X\tilde{\beta}_1 - X\tilde{\beta}_2\| = \|P_{X:W_1^+}\Sigma_2 M(M\Sigma_2\mathrm{M})^+My\|$$

$$\leq \|P_{X:W_1^+}\Sigma_2 M\|\|(M\Sigma_2\mathrm{M})^+\|\|My\| = \frac{\sqrt{a}}{b}\|My\| \tag{3.78}$$

şeklinde olup, burada matris normu $\|A\| = \sqrt{ch_{max}(AA')}$ olarak tanımlanmış ve

$$a = ch_{max}(P_{X:W_1^+}\Sigma_2 M\Sigma_2 P'_{X:W_1^+}) \text{ ve } b = ch_{min}(M\Sigma_2 M) \tag{3.79}$$

olacaktır. Burada (3.78) deki eşitsizlik $\|A\|$ matris normunun tutarlılık ve çarpımsallık özelliğinden kaynaklanmaktadır. Bu durumda eğer $M\Sigma_2 = 0$ ise $\frac{\sqrt{a}}{b} = 0$ olacağından (3.78) eşitsizliğinin sağ tarafının sıfıra eşit olması için gerek ve yeter şart $X\tilde{\beta}_1 = X\tilde{\beta}_2$ olmasıdır.

Öte yandan BLUE tahin edici ile verilen lineer yansız bir tahmin edici arasındaki fark Öklid normu için bir üst sınır Makinen (2002) tarafından verilmiştir. Bu yaklaşımı kullanarak $G_i = P_{X:W_i^+}$, $i = 1,2$, için $\Sigma_2^{+1/2} = (\Sigma_2^{1/2})^+$ olmak üzere

$$X\tilde{\beta}_1 - X\tilde{\beta}_2 = (G_1 - G_2)(I_n - G_2)y$$

$$= (G_1 - G_2)\Sigma_2^{1/2}\Sigma_2^{+1/2}\Sigma_2 M(M\Sigma_2 M)^- My$$

$$= (G_1 - G_2)\Sigma_2^{1/2}\Sigma_2^{+1/2}\tilde{\varepsilon}_2 \tag{3.80}$$

eşitliği yazılabilir. Bu nedenle aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.11 Yukarıda verilen gösterimler altında

$$\|X\tilde{\beta}_1 - X\tilde{\beta}_2\| \leq \|(G_1 - G_2)\Sigma_2^{1/2}\|\|\Sigma_2^{+1/2}\tilde{\varepsilon}_2\| = cSSE(\Sigma_2) \quad (3.81)$$

eşitsizliği gerçeklenir, burada $a = ch_{max}(D)$, $cov(y) = \Sigma_2$,

$$D = G_1\Sigma_2G_1' - G_2\Sigma_2G_2' = (G_1 - G_2)\Sigma_2(G_1'G_2')$$

$$= cov(G_1y) - cov(G_2y) = cov(G_1y - G_2y) \quad (3.82)$$

ve

$$SSE(\Sigma_2) = \tilde{\varepsilon}_2'\Sigma_2^+\tilde{\varepsilon}_2 = y'M(M\Sigma_2M)^-My \quad (3.83)$$

$\mathcal{M}_2$ modeli altında hataların ağırlıklı kareler toplamıdır (Hauke ve Ark., 2012).

Şimdi BLUE tahmin edicilerin genel gösterimlerinin farkı ile ilgili olarak

$$[P_{X:W_1^+} + L_1(I_n - P_{W_1})]y - [P_{X:W_2^+} + L_2(I_n - P_{W_2})]y := d \quad (3.84)$$

ifadesini ele alalım. Bu durumda $\mathcal{M}_2$ modelinin doğru bir model olduğunu varsayarak $y \in \Re(W_2)$ olduğunu dikkkate alarak

$$d = (P_{X:W_1^+} - P_{X:W_2^+})y + L_1(I_n - P_{W_1})y \quad (3.85)$$

yazılabilir. Buradan L_1 matrisinin keyfi olduğu dikkate alınırsa $\Re(W_2) \subset \Re(W_1)$ olmadıkça $\|d\|$ nin bir üst sınıra sahip olamyacağı açıktır.

Şimdi belirli şartlar altında BLUE tahmin edicilerin eşitliğinin özel dönüştürülmüş bir model altında OLSE ve BLUE tahmin edicilerin eşitliği olarak düşünülebilmesine denk olan bir durumdan söz edilecektir. Bu yaklaşım istatistiksel literature oldukça yenidir. Bunun için $\mathcal{M}_1 = \{y, X\beta, \Sigma_1\}$ modeli yerine

$$\mathcal{M}_{1W} = \{y, X\beta, W_1\} \quad (3.86)$$

modelini gözönüne alalım, burada W_1 (3.63) de tanımlanan nonnegative definit matristir. Bu durumda $\mathcal{M}_{1W}$ modeli altında $X\beta$ nın BLUE tahmin edicisinin $\mathcal{M}_1$ altındaki BLUE tahmin edicisi ile aynı olduğu gösterilebilir. Örneğin BLUE tahmin edici (3.64) deki gibi yazılabilir.

W_1 matrisinin $W_1 = Z'\Lambda Z$ şeklinde parçalandığını varsayalım, burada $Z \in \mathbb{R}^{nx\text{w}_1}$ matrisinin sütunları W_1 in sıfırdan farklı $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_{\text{w}_1} > 0$ özdeğerlerine karşılık gelen özvektörler, $\Lambda = \text{köşg}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{\text{w}_1})$ ve $\text{w}_1 = r(W_1)$ dir. $Q = \Lambda^{-1/2} Z' \in \mathbb{R}^{\text{w}_1 xn}$ olarak tanımlanırsa

$$Q^+ = Z\Lambda^{1/2},\ \ Q^+Q = P_{W_1},\ \ Q'Q = W_1^+,\ \ QW_1Q' = I_{w_1} \tag{3.87}$$

eşitlikleri yazılabilir. $\mathcal{M}_{1W}$ modeli Q matrisiyle soldan çarpılırsa

$$\mathcal{M}_1^* = \left\{Qy, QX\beta, I_{w_1}\right\} = \left\{y_*, X_*\beta, I_{w_1}\right\} \tag{3.88}$$

modeli ve $\mathcal{M}_2$ modeli Q matrisiyle soldan çarpılırsa

$$\mathcal{M}_2^* = \{Qy, QX\beta, Q\Sigma_2 Q'\} = \{y_*, X_*\beta, \Sigma_*\} \tag{3.89}$$

modeli elde edilir. Bu durumda Qy nin $\mathcal{M}_2$ modeli altında $X\beta$ için lineer olarak yeterli olabilmesi için gerek ve yeter şart

$$\mathfrak{R}(X) \subset \mathfrak{R}\left(W_2 Z \Lambda^{-1/2}\right) = \mathfrak{R}(W_2 W_1) \tag{3.90}$$

olmasıdır. Böylece

$$P_{X:W_1^+}y = OLSE(X\beta|\mathcal{M}_2^*)\ ,$$

$$BLUE(X\beta|\mathcal{M}_2) = \ BLUE(X\beta|\mathcal{M}_2^*)$$

eşitlikleri yazılabilir. Öte yandan

$$OLSE(QX\beta|\mathcal{M}_2^*) = Q.OLSE(X\beta|\mathcal{M}_2^*)\ ,$$

$$BLUE(QX\beta|\mathcal{M}_2^*) = Q.BLUE(X\beta|\mathcal{M}_2^*)$$

olduğu dikkate alınırsa $OLSE(X_*\beta|\mathcal{M}_2^*) = BLUE(X_*\beta|\mathcal{M}_2^*)$ olması için gerek ve yeter şartın $OLSE(X\beta|\mathcal{M}_2^*) = BLUE(X\beta|\mathcal{M}_2^*)$ olduğu görülebilir. Bunun sonucu olarak da bazı durumlarda $P_{X:W_1^+}y$ ve $BLUE(X\beta|\mathcal{M}_2)$ tahmin edicilerinin karşılaştırılması problemi $OLSE(X\beta|\mathcal{M}_2^*)$ ve $BLUE(X\beta|\mathcal{M}_2^*)$ tahmin edicilerinin karşılaştırılması problemine dönüşebilir. Bununla beraber bu dönüştürme tekniğinin (3.90) bağıntısı sağlandığında geçerli olduğunu ayrıca belirtelim. (3.90) bağıntısı için açık bir ifade $\mathfrak{R}(W_2) \subset \mathfrak{R}(W_1)$ olduğunda gerçekleşir.

Şimdi $P_{X:W_1^+}y$ tahmin edicisinin ne zaman $\mathcal{M}_2$ modeli altında bir BLUE tahmin edici olabileceğini araştıralım. Litertürde bu sorunun cevabı ile ilgili çeşitli yaklaşımlar mevcuttur. Bunlardan bir tanesi $\mathcal{M}_2$ modelinin tutarlı yapan her y vektörü için (3.72) ifadesinin sıfıra eşit olması gerektiğini söylemektedir. Yani

$$P_{X:W_1^+}\Sigma_2 M(M\Sigma_2 \mathrm{M})^- My = 0\,,\ \text{her}\ \ y \in\ \Re(X,\Sigma_2 M)\ \text{için,} \tag{3.91}$$

veya buna denk olarak

$$P_{X:W_1^+}\Sigma_2 M(M\Sigma_2 \mathrm{M})^- M\Sigma_2 M = 0 \tag{3.92}$$

olmasıdır ki bununsağlanması için gerek ve yeter şart

$$X'W_1^+\Sigma_2 M = 0 \tag{3.93}$$

olmasıdır. Bir diğer opsiyon

$$P_{X:W_1^+}(\mathrm{X},\Sigma_2 M) = (X,0) \tag{3.94}$$

eşitliğinin sağlanmasının control edilmesidir ki bu açık olarak (3.93) ifadesine denktir. Üçüncü bir yol ise yukarıda tanımlanan

$$\mathcal{M}_1^* = \{Qy, QX\beta, I_{w_1}\} = \{y_*, X_*\beta, I_{w_1}\} \tag{3.95a}$$

$$\mathcal{M}_2^* = \{Qy, QX\beta, Q\Sigma_2 Q'\} = \{y_*, X_*\beta, \Sigma_*\} \tag{3.95b}$$

dönüştürülmüş modellerini göz önüne almaktır, burada Qy $\mathcal{M}_2$ modeli altında $X\beta$ için lineer olarak yeterli olup $\Re(X) \subset \Re(W_2 W_1)$ içermesi sağlanmaktadır. Bu durumda

$$OLSE(X\beta|\mathcal{M}_2^*) = BLUE(X\beta|\mathcal{M}_2^*) \tag{3.96}$$

eşitliğinni sağlanması için gerek ve yeter şart

$$X_*'\Sigma_*\mathrm{M}_* = 0 \tag{3.97}$$

olmasıdır, burada $\mathrm{M}_* = \Lambda^{1/2}Z'M \in \{X_*^{\perp}\}$ dir. Buradan

$$\begin{aligned} X_*'\Sigma_*\mathrm{M}_* &= X'Z\Lambda^{-1/2}\Lambda^{-1/2}Z'\Sigma_2 Z\Lambda^{-1/2}\Lambda^{1/2}Z'M \\ &= X'W_1^+\Sigma_2 P_{W_1}M \end{aligned} \tag{3.98}$$

elde edilir ve dolayısıyla $\Re(X) \subset \Re(W_2 W_1)$ şartı altında $P_{X:W_1^+}y$ nin $\mathcal{M}_2$ modeli altında bir BLUE tahmin edici olması için gerek ve yeter şart

$$X'W_1^+\Sigma_2 P_{W_1}M = 0 \tag{3.99}$$

olmasıdır. Öte yandan eğer $\Re(W_2) \subset \Re(W_1)$ veya buna denk olarak $\Re(\Sigma_2) \subset \Re(W_1)$ ise bu takdirde (3.99) ifadesi (3.93) halini alacaktır. Böylece $\Re(X) \subset \Re(W_2W_1)$ yeterlilik şartı ile birlikte (3.99) ifadesi (3.93) ifadesini sağlar. Bu durumda $\Re(X) \subset \Re(W_2W_1)$ şartı altında (3.96) eşitliğinin sağlanması için bir gerek ve yeter şart $\Re(QX)$ in $\Sigma_* = Q\Sigma_2Q'$ ortonormal vektörlerinin $r = r(QX) = r(X)$ olmak üzere oluşturduğu bir tabana sahip olmasıdır, yani QX matrisi $r = r(A)$ olan bir A matrisi için

$$QX = T_{W_1xr}A_{rxp} \tag{3.100}$$

olarak ifade edilebilmesidir, burada $T = (t_1, t_2, \dots, t_r)$ sütunları Σ_* matrisinin keyfi ortonormal vektörleridir. Bu nedenle $\Omega = \text{köşg}(w_1, w_2, \dots, w_r)$ ve (w_i, t_i) ise $Q\Sigma_2Q'$ matrisinni özdeğer-özvektör çifti olmak üzere T matrisi

$$Q\Sigma_2Q'T = T\Omega \tag{3.101}$$

denklemini sağlar. (3.101) eşitliği Q' ile soldan çarpılırsa

$$W_1^+\Sigma_2Q'T = Q'T\Omega \tag{3.102}$$

elde edilir. $r = r(Q'T)$ olduğundan $Q'T$ nin sıfırdan farklı olup aynı zamanda $W_1^+\Sigma_2$ nin özvektörleri olacaktır. Öte yandan (3.100) eşitliği Q' ile soldan çarpılırsa

$$W_1^+X = Q'T\mathrm{A} \tag{3.103}$$

elde edilir. Bu ise $\Re(W_1^+X)$ in $W_1^+\Sigma_2$ nin r tane özvektörünün oluşturduğu bir tabana sahip olması demektir. Bunun sonucu olarak aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.12 $r(X) = r$ olmak üzere $\mathcal{M}_1 = \{y, X\beta, \Sigma_1\}$ ve $\mathcal{M}_2 = \{y, X\beta, \Sigma_2\}$ modelleri verilsin. W_1 matrisi daha önce verildiği gibi olmak üzere $P_{X:W_1^+}y$ $\mathcal{M}_1$ modeli altında $X\beta$ nın BLUE tahmin edicisi olsun. G matrisi de $\mathcal{N}(X'W_1^+)$ uzayını geren bir matris olsun. Bu takdirde $P_{X:W_1^+}y$ nin $\mathcal{M}_2$ modeli altında da $X\beta$ nın bir BLUE tahmin edicisi olması için gerek ve yeter şart aşağıdaki denk şartlardan birinin sağlanmasıdır.

(a) $X'W_1^+\Sigma_2M = 0$,

(b) $\Re(\Sigma_2W_1^+X) \subset \Re(X)$,

(c) $\Re(\Sigma_2M) \subset \mathcal{N}(X'W_1^+) = \Re(W_1^+X)^\perp = \Re(G)$,

(d) $\Re(W_1^+X)$ uzayı Σ_2 nin W_1 e göre r tane özvektörü tarafından gerilir,

(e) $\Re(X)$ uzayı $\Sigma_2 W_1^+$ in r tane özvektörü tarafından gerilir,

(f) $P_{X:W_1^+}\Sigma_2$ matrisi simetriktir (Hauke ve Ark., 2012).

Bu teoremde $\mathcal{M}_1$ modeli altında $X\beta$ nın özel bir BLUE tahmin edicisinin ne zaman $\mathcal{M}_2$ modeli altında da bir BLUE tahmin edicisi olabileceğini gözönüne alındı. $\mathcal{M}_1$ modeli altında $X\beta$ nın BLUE tahmin edicisinin her hangi bir gösteriminin $\mathcal{M}_2$ modeli altında da bir BLUE tahmin edicisi olması için ne gerekmektedir sorusu akla gelebilir. Aşağıdaki teorem bu sorunun cevabı olacaktır.

Teorem 3.13 $\mathcal{M}_1 = \{y, X\beta, \Sigma_1\}$ ve $\mathcal{M}_2 = \{y, X\beta, \Sigma_2\}$ modelleri verilmiş olsun. W_1 matrisi daha önce verildiği gibi olsun. Bu takdirde $\mathcal{M}_1$ modeli altında da $X\beta$ nın BLUE tahmin edicisinin her hangi bir gösteriminin $\mathcal{M}_2$ modeli altında da bir BLUE tahmin edicisi olması için gerek ve yeter şart aşağıdaki denk şartlardan herhangi birinin sağlanmasıdır (Hauke ve Ark., 2012):

(a) $\Re(\Sigma_2 X^{\perp}) \subset \Re(\Sigma_1 X^{\perp})$,

(b) $\Sigma_2 = \Sigma_1 + XN_1X' + \Sigma_1 M N_2 M \Sigma_1,\quad N_1$ ve N_2 keyfi matrisler,

(c) $\Sigma_2 = XN_3X' + \Sigma_1 M N_{42} M \Sigma_1,\quad N_3$ ve N_4 keyfi matrisler.

Bu kısımda son olarak Σ_1 ve Σ_2 kovaryans matrislerinin pozitif definit olması durumunu göz önüne alalım. Böyle bir durum süz konusu olduğunda $\mathcal{M}_1$ ve $\mathcal{M}_2$ modelleri altında $X\beta$ parametre vektörünün BLUE tahmin edicisi tek bir gösterime sahip olacaktır ve bu tahmin ediciler arasındaki eşitlik $P_{X:\Sigma_1^{-1}}$ ve $P_{X:\Sigma_2^{-1}}$ çarpanları arasındaki eşitlik olacaktır. Bu durumda $\mathcal{M}_1$ ve $\mathcal{M}_2$ modellerinin dönüştürülmüş versiyonları sırasıyla

$$\mathcal{M}_1^* = \left\{\Sigma_1^{-1/2}y, \Sigma_1^{-1/2}X\beta, I_n\right\} = \{y_*, X_*\beta, I_n\} \tag{3.104a}$$

$$\mathcal{M}_2^* = \left\{\Sigma_1^{-1/2}y, \Sigma_1^{-1/2}X\beta, \Sigma_1^{-1/2}\Sigma_2\Sigma_1^{-1/2}\right\} = \{y_*, X_*\beta, \Sigma_*\} \tag{3.104b}$$

olacaktır. Bu durumda BLUE tahmin edicilerin eşitliği OLSE tahmin edicileri ile $\mathcal{M}_2^*$ modeli altında eşitliği ve $X\beta$ nın BLUE tahmin edicisinin eşitliğine denk olacaktır ve bu nedenle de lemma 3.16 nın (c) şıkkından $\Re\left(\Sigma_1^{-1/2}\Sigma_2\Sigma_1^{-1/2}.\Sigma_1^{-1/2}X\right) = \Re\left(\Sigma_1^{-1/2}X\right)$ yani, $\Re\left(\Sigma_1^{-1/2}X\right) = \Re(X)$ olduğu görülür.

Aşağıdaki teoremde çeşitli denklik şartları sıralanmaktadır. Bunların tamamı Lemma 3.16 ve Teorem 3.12 den elde edilen sonuçlardır.

Teorem 3.14 Σ_1 ve Σ_2 kovaryans matrisleri pozitif definit ve $r(X) = r$ olmak üzere $\mathcal{M}_1 = \{y, X\beta, \Sigma_1\}$ ve $\mathcal{M}_2 = \{y, X\beta, \Sigma_2\}$ modelleri verilmiş olsun. Bu takdirde $BLUE(X\beta|\mathcal{M}_1) = BLUE(X\beta|\mathcal{M}_2)$ olması için gerek ve yeter şart aşağıdaki denk şartlardan herhangi birinin sağlanmasıdır (Hauke ve Ark., 2012):

(a) $P_{X:\Sigma_1^{-1}} = P_{X:\Sigma_2^{-1}}$,

(b) $X'\Sigma_2^{-1}P_{X:\Sigma_1^{-1}} = X'\Sigma_2^{-1}$,

(c) $P'_{X:\Sigma_1^{-1}}\Sigma_2^{-1}P_{X:\Sigma_1^{-1}} = \Sigma_2^{-1}P_{X:\Sigma_1^{-1}}$,

(d) $\Sigma_2^{-1}P_{X:\Sigma_1^{-1}}$ matrisi simetriktir,

(e) $\Sigma_1\Sigma_2^{-1}P_{X:\Sigma_1^{-1}} = \Sigma_2^{-1}\Sigma_1\Sigma_2^{-1}$,

(f) $\Re(\Sigma_1^{-1}X) = \Re(\Sigma_2^{-1}X)$,

(g) $\Re(\Sigma_1 X^{\perp}) = \Re(\Sigma_2 X^{\perp})$,

(h) $\Re(\Sigma_2\Sigma_1^{-1}X) = \Re(X)$,

(i) $X'\Sigma_1^{-1}\Sigma_2 X^{\perp} = 0$,

(j) $\Re\left(\Sigma_1^{-1/2}X\right)$ uzayı $\Sigma_1^{-1/2}\Sigma_2\Sigma_1^{-1/2}$ matrisinin r tane özvektöründen oluşan bir $U = (u_1, u_2, \dots, u_r)$ tabanına sahiptir.

(k) Bir A_{rxp} matrisi için $\Sigma_1^{-1/2}X = UA$ dır, burada $r(A) = r$ ve U (j) deki gibidir.

(l) $X = \Sigma_1^{1/2}UA := TA$ dir, burada A ve U (k) daki gibidir, bu durumda $T = \Sigma_1^{1/2}U$ matrisinin sütunları $\Sigma_2\Sigma_1^{-1}$ matrisinin özvektörleri, yani $\Sigma_1\Sigma_2^{-1}$ matrisinin özvektörleri, yani Σ_2^{-1} e göre Σ_1^{-1} matrisinin özvektörleri olacaktır.

(m) $\Re(X)$ uzayı $\Sigma_2\Sigma_1^{-1/2}$ matrisinin r tane özvektöründen oluşan bir $T = (t_1, t_2, \dots, t_r)$ tabanına sahiptir.

Şimdi $\mathcal{M}_2 = \{y, X\beta, \Sigma_2\}$ modelinin doğru olduğunu ve $cov(y) = \Sigma_2$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $\tilde{\beta}_1$ tahmininin $\tilde{\beta}_2$ tahminine göre etkinliğinin nasıl olacağı sorusu akla gelebilir. Bunun için X matrisinin tam sütun ranklı olduğunu varsayalım. $\tilde{\beta}_1$ tahmininin $\tilde{\beta}_2$ tahminine göre etkinliği kovaryans matrislerinin determinant olarak

$$\alpha = \frac{|cov(\tilde{\beta}_2|\mathcal{M}_2)|}{|cov(\tilde{\beta}_1|\mathcal{M}_2)|} = \frac{|(X'\Sigma_2^{-1}X)^{-1}|}{|(X'\Sigma_1^{-1}X)^{-1}X'\Sigma_1^{-1}\Sigma_2\Sigma_1^{-1}X(X'\Sigma_1^{-1}X)^{-1}|}$$

$$= \frac{|X_*'X_*|^2}{|X_*'\Sigma_*X_*X_*'\Sigma_*^{-1}X_*|} = \mathrm{eff}(\hat{\beta}_*|\mathcal{M}_2^*) \qquad (3.105)$$

şeklinde yazılabilir, burada $X_* = \Sigma_1^{-1/2}X$, $\Sigma_* = \Sigma_1^{-1/2}\Sigma_2\Sigma_1^{-1/2}$ olmak üzere $\hat{\beta}_* = OLSE(\beta|\mathcal{M}_2^*) = BLUE(\beta|\mathcal{M}_2)$ dir. Böylece α aynı zamanda $\hat{\beta}_*$ nın $\mathcal{M}_2^*$ modeli altındaki Watson etkinliğidir(Watson (1955)). Öte yandan $p \leq n/2$ ve Σ_1 ve Σ_2 nin verildiğini varsayalım. Bu takdirde α etkinliği için bir alt sınır

$$\alpha = \frac{|X_*'X_*|^2}{|X_*'\Sigma_*X_*X_*'\Sigma_*^{-1}X_*|} \geq \prod_{i=1}^{p} \frac{4\gamma_i\gamma_{n-i+1}}{(\gamma_i+\gamma_{n-i+1})^2} \qquad (3.106)$$

olacaktır, burada γ_i Σ_* nin i −yinci en büyük öz değeri olup

$$\gamma_i = chi\left(\Sigma_1^{-1/2}\Sigma_2\Sigma_1^{-1/2}\right) = chi(\Sigma_1^{-1}\Sigma_2) \qquad (3.107)$$

ile gösterilir.

4. SONUÇ ve ÖNERİLER

Bu çalışmada bir genel lineer model ve bu modelden elde edilen bazı alt modeller ele alınarak bu modeler altında bilimeyen parametre vektörleri için en iyi lineer yansız tahmin ediciler (BLUE) belirlenmiş ve bu modeler altında β ve $X\beta$ parametre vektörlerinin en iyi lineer yansız tahmin edicilerinin birbirine eşit olması için bir takım gerek ve yeter şartlar verilmiştir. Genel ve yanlış belirlenmiş modeller altında BLUE tahmin edicilerinin eşitliği ve Kısıtlamalı Gauss-Markov ve yanlış belirlenmiş modeller altında BLUE tahmin edicilerinin eşitliği ile ilgili gerek ve yeter şartlar verilmiş ve daha sonra farklı kovaryans matrisli iki lineer model altında BLUE tahmin edicilerin karşılaştırılması problem ele alınmıştır. Ayrıca izdüşümler ve en iyi lineer yansız tahmin ediciye izdüşüm odaklı bir yaklaşım verilmiştir. Bunlara ilaveten

i. Verilen her bir model altında β ve $X\beta$ parametre vektörleri en küçük kareler tahmin edicileri (OLSE) verilerek, bu tahmin edicilerle en iyi lineer yansız tahmin ediciler (BLUE) arasındaki ilişkiler incelenebilir.

ii. Verilen her bir model altında β ve $X\beta$ parametre vektörleri ağırlıklı en küçük kareler tahmin edicileri verilerek, bu tahmin edicilerle en iyi lineer yansız tahmin ediciler (BLUE) arasındaki ilişkiler incelenebilir.

iii. K uygun mertebeden keyfi bir matris olmak üzere $K\beta$ parametre vektörü için adı geçen modeler altında en iyi lineer yansız tahmin ediciler (BLUE) belirlenerek bu tahmin ediciler arasındaki ilişkiler incelenebilir.

iv. Parçalanmış lineer modeler altında en iyi lineer yansız tahmin ediciler (BLUE) belirlenerek bunların toplam ayrışımları araştırılabilir. Başka bir deyişle $\mathcal{M} = \{y, X_1\beta_1 + X_2\beta_2, \sigma^2\Sigma\}$ parçalanmış genel lineer modeli ile bu modelin $\mathcal{M}_i = \{y, X_i\beta_i, \sigma^2\Sigma\}$, $i = 1,2$, alt modelleri için

$$OLSE(X_1\beta_1 + X_2\beta_2|\mathcal{M}) = OLS\mathrm{E}(X_1\beta_1|\mathcal{M}_1) + OLS\mathrm{E}(X_2\beta_2|\mathcal{M}_2)$$

$$BLUE(X_1\beta_1 + X_2\beta_2|\mathcal{M}) = OLS\mathrm{E}(X_1\beta_1|\mathcal{M}_1) + OLS\mathrm{E}(X_2\beta_2|\mathcal{M}_2)$$

$$OLSE(X_1\beta_1 + X_2\beta_2|\mathcal{M}) = BLU\mathrm{E}(X_1\beta_1|\mathcal{M}_1) + BLU\mathrm{E}(X_2\beta_2|\mathcal{M}_2)$$

$$BLUE(X_1\beta_1 + X_2\beta_2|\mathcal{M}) = BLU\mathrm{E}(X_1\beta_1|\mathcal{M}_1) + BLU\mathrm{E}(X_2\beta_2|\mathcal{M}_2)$$

toplam ayrışımlarının sağlanması ile ilgili gerek ve yeter şartlar araştırılabilir.

5. KAYNAKLAR

Baksalary, JK. (1984). A study of the equivalence between Gauss- Markoff model and its augmentation by nuisance parameters. Math. Operationsforsch stat. ser. Stat. 15:3-35.

Baksalary, JK. & Mathew, T. (1986). Linear sufficiency and completeness in an incorrectly specified general Gauss – Markov model. Sankhya Ser. A: 48, 169–180.

Baksalary, JK. & Pordzik, PR. (1992). Implied linear restrictions in the general Gauss-Markov model. J. Stat. Plan Inference. 23: 132-143.

Baksalary, JK. & Trenkler, G. (2009). A projector oriented approach to the best linear unbiased estimator. Stat. Papers. 50: 721-733.

Ben-Israel, A. & Greville, TNE. (2003). Generalized Inverses: Theory and Applications. 2nd ed. New York: Springer.

Gan, S., Lu, C. & Tian, Y. (2020). Computation and comparison of estimators under different linear random effects models. Comm. Stat. and Simul. Comput. 49, no. 5: 1210-222.

Gan, S., Sun, Y. & Tian, Y. (2017) Equivalence of predictors under real and over-parameterized linear models. Comm. Statist. Theory Methods 46, no. 11: 5368-5383.

Groß, J. (2004). The general Gauss–Markov model with possibly singular dispersion matrix. Stat. Pap. 45:311–336.

Groß, J. & Puntanen, S. (2000). Estimation under a general partitioned linear model. Linear Algebra and Its Applications 321, 131–44.

Groß, J. & Trenkler, G. (1998). On the equality linear statistics in General Markov model. In: Mukherjee SP, Basu SK, Sinha BK (eds) Frontiers of Statistics. Narosa Publishing House, New Delhi, pp. 189–194.

Groß, J., Trenkler, G. & Werner HJ. (2001). The equality of linear transforms of the ordinary least squares estimator and the best linear unbiased estimator. *Sankhya Ser* A 63:118–127.

Güler, N., Puntanen, S. & Özdemir, H. (2014). On the BLUEs in two linear models via C.R. Rao’s Pandora’s Box. Communications in Statistics - Theory and Methods, 5, 43, 921–31.

Haslett, SJ. & Puntanen, S. (2010). Effect of adding regressors on the equality of the BLUEs under two linear models, Journal of Statistical Planning and Inference, 140, 104–110.

Haslett, S J., Markiewicz, A. & Puntanen, S. (2020). Properties of BLUEs and BLUPs in full vs. small linear models with new observations. In Recent developments in multivariate and random matrix analysis: Festschrift in honour of Dietrich von Rosen, eds. T. Holgersson and M. Singull, 123–46. Cham: Springer.

Hauke A., Markiewicz, A. & Puntanen, S. (2012). Comparing the BLUEs Under Two Linear Models, Communications in Statistics - Theory and Methods, 41:13-14, 2405-2418.

Isolata, J. & Puntanen, S. (2009). A note on the equality of the OLSE and the BLUE of the parametric function in the general Gauss–Markov model. Stat. Papers, 50:185-193.

Isotalo, J., Puntanen, S. & Styan, GPH. (2008). A useful matrix decomposition and its statistical applications in linear regression. Commun. Statist. Theor. Meth. 37:1436–1457.

Jammalamadaka, SR. & Sengupta, A. (1999). Topics in circular statistics, London: World Scientific, England.

Jammalamadaka, SR. & Sengupta, A. (2007). Inclusion and exclusion of data or parametersin the general linear model. Statistics & Probability Letters 77: 1235–1247.

Kesriklioğlu E. (2013). Genel parçalanmış lineer modeller altında tahmin edicilerin etkinliklerinin karşılaştırılması, Yüksek Lisans Tezi, Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Sakarya.

Liu, S. (2000). Efficiency comparisons between the OLSE and the BLUE in a singular linear model, Journal of Statistical Planning and Inference, 84, 191–200.

Liu, S., Ma, T., Sengupta, A., Shimizu, K. & Wang, MZ. (2017). Influence Diagnostics in Possibly Asymmetric Circular-Linear Multivariate Regression Models, Sankhya, *B*:79. 76–93.

Lu, C., Gan, S. & Tian, Y. (2015). Some remarks on general linear model with new regressors. Statistics & Probability Letters, 97, 16–24.

Mäkinen, J. (2000). Bounds for the difference between a linear unbiased estimate and the best linear unbiased estimate. Phys. Chem. Earth – Part A: Solid Earth and Geodesy 25:693–698.

Mäkinen, J. (2002). A bound for the Euclidean norm of the difference between the best linear unbiased estimator and a linear unbiased estimator. J. Geodesy 76:317–322.

Markiewicz, A. & Puntanen, S. (2019). Further properties of the linear sufficiency in the partitioned linear model. In Matrices, statistics and big data, eds. S. E. Ahmed, F. Carvalho and S. Puntanen, 1–22. Cham: Springer.

Markiewicz, A., Puntanen, S. & Styan, GPH. (2010). A note on the interpretation of the equality of OLSE and BLUE. Pak. J. Statist. 26:127–134.

Marsaglia, G. & Styan, GPH. (1974). Equalities and inequalities for ranks of matrices. Linear and Multilinear Algebra, 2, 269-292.

Mitra, SK., Moore, BJ. (1973). Gauss–Markov estimation with an incorrect dispersion matrix. Sankhya Ser. A, 35, 139–152.

Moore, EH. (1920). On the Reciprocal of the General Algebraic Matrix. (Abstract) Bulletin of American Mathematical Society, 26, 394-395.

Moore, EH. (1935). General Analysis. Memoirs of the American Philosophical Society, I. American Philosophical Society, Philadelphia, Pennsylvania, 1935.

Penrose, R. (1955). A generalized inverse for matrices. Mathematical Proc. Cambridge Philos. Soc. 51:406–413.

Penrose, R. (1956). On best approximate solutions of linear matrix equations. Mathematical Proc. Cambridge Philos. Soc. 52: 17- 19.

Pordzik, PR. (2012). A bound for the Euclidian distance between restricted and unrestricted estimators of parametric functions in the general linear model. Stat. Papers, 53: 299-304.

Puntanen, S. & Styan GPH. (1989). The equality of the ordinary least squares estimator and the best linear unbiased estimator [with comments by Oscar Kempthorne & by Shayle R. Searle and with "Reply" by the authors]. Am Stat 43: 153–164.

Puntanen, S., Styan, GPH. & Tian, Y. (2005). Three rank formulas associated with the covariance matrices of the BLUE and the OLSE in the general linear model. Econometric Theor., 21, 659-664.

Puntanen, S., Styan, GPH. & Isotalo, J. (2011). Matrix Tricks for Linear Statistical Models, Our Personal Top Twenty, Springer, Heidelberg.

Rao, CR. (1967). Least squares theory using an estimated dispersion matrix and its application to measurement of signals. In: Le Cam LM, Neyman J (eds) Proceedings of the 5th Berkeley symposium on mathematical statistics and probability: Berkeley, California, 1965/1966, vol 1. University of California Press, Berkeley, 355–372.

Rao, CR. (1968). A note on a previous lemma in the theory of least squares and some further results. Sankhya Ser A 30:245–252.

Rao, CR. (1971). Unified theory of linear estimation. Sankhya Ser, A 33: 371-394.

Rao, CR. (1972). A nte on the IPM method in the unified theory of linear estimation. Sankhya Ser, A 34: 371-394.

Rao, CR. (1973a). Representations of best linear unbiased estimators in the Gauss-Markoff model with a singular disperison matrix. Journal of Multivariate Anal. 3: 276-292.

Rao, CR. (1973b). Linear statistical inference and its applications, 2nd edn. Wiley, New York

Rao CR. (1974). Projectors, generalized inverses and the BLUE's. J R Stat Soc Ser B Stat Methodol 36: 442–448.

Rao, CR. (1976). Estimation of parameters in a linear model. Ann. Stat. 4:1023–1037.

Rao, CR. (1978). Choice of best linear estimators in the Gauss–Markoff model with a singular dispersion matrix. Comm Stat Theory Methods A 7:1199–1208.

Rao, CR. (1983). A unified approach to inference from linear models. In: Pukkila T, Puntanen S (eds) Proceedings of the first international tampere seminar on linear statistical models and their applications. University of Tampere, Tampere 9–36.

Rao, CR, Yanai, H. (1979). General definition and decomposition of projectors and some applications to statistical problems. J Stat Plann Infer 3:1–17

Rao, CR. & Mitra, SK. (1971a). Further contributions to the theroy of generalized inverse of matrices and its applications. Sankhya, Ser. A 33,289-300.

Rao, CR.& Mitra, SK. (1971b). Generalized Inverse of Matrices and Its Applications. New York: Wiley.

Sengupta, D, & Jammalamadaka, SR. (2003). Linear models: An integrated approach. River Edge: World Scientific.

Tian, Y. (2002). The maximal and minimal ranks of some expressions of generalized inverses of matrices. Southeast Asian Bull. Math, 25,745-755.

Tian, Y. (2009). On equalities for BLUEs under misspecified Gauss–Markov models. Acta Mathematica Sinica, English Series 25:1907–1920.

Tian, Y. (2010). On equalities of estimations of parametric functions under a general linear model and its restricted models. Metrika, 72:313-330.

Tian, Y. & Wiens, DP. (2006). On equality and proportionality of ordinary of least-squares, weighted least-squares and best linear unbiased estimators in the general linear model. Statist. Probab. Lett, 76:1265-1272.

Tian, Y. & Puntanen, S. (2009). On the equivalence of estimations under a general linear model and its transformed models, Linear Algebra and Its Applications. 430, pp. 2622–2641.

Tian, Y. & Zhang, X. (2016). On connections among OLSEs and BLUEs of whole and partial parameters under a general linear model. Statistics & Probability Letters, 112: 105-112.

Tian, Y., Beisiegel, M. Dagenais, E. & Haines, C. (2008). On the natural restrictions in the singular Gauss–Markov model. Stat. Papers. 49:553-564.

Watson, GS. (1951). Serial correlation in regression analysis. Ph.D. Thesis, Dept. of Experimental Statistics, North Carolina State College, Raleigh.

Watson, GS. (1955). Serial correlation in regression analysis, I. Biometrika 42:327–341.

Werner, HJ. & Yapar, C. (1996) A BLUE decomposition in the general linear regression model. Linear Algebra and its Applications, 237-238.

Zyskind, G. (1967). On canonical forms, nonnegative covariance matrices, and best and simple least squares estimators in linear models. Ann. Stat. 38:1092–1110.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler	
Adı Soyadı	Mehmet ÖZKAN
Doğum Yeri	
Doğum Tarihi	
Uyruğu	× T.C. ❐ Diğer:
Telefon	
E-Posta Adresi	

Eğitim Bilgileri	
Lisans	
Üniversite	
Fakülte	
Bölümü	
Mezuniyet Yılı	
Yüksek Lisans	
Üniversite	
Enstitü Adı	
Anabilim Dalı	
Programı	
Mezuniyet Tarihi	
Doktora	
Üniversite	
Enstitü Adı	
Anabilim Dalı	
Programı	
Mezuniyet Tarihi	