



T. C.

ORDU ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BİR HİPERKÜP VARYANTINDA YAPISAL
BAĞLANTILILIK İLE GÜVENİRLİK ANALİZİ

MUHAMMED TÜRKMEN

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

ORDU 2024

TEZ BİLDİRİMİ

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan ve kullanılan intihal tespit programının sonuçlarına göre; bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

Muhammed TÜRKMEN

Bu tez, 122F276 numaralı TÜBİTAK 1002-A projesi ile desteklenmiştir.

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

BİR HİPERKÜP VARYANTINDA YAPISAL BAĞLANTILILIK İLE GÜVENİRLİK ANALİZİ

MUHAMMED TÜRKMEN

ORDU ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ, 64 SAYFA

(TEZ DANIŞMANI: DOÇ. DR. CANAN ÇİFTÇİ)

(İKİNCİ TEZ DANIŞMANI: DOÇ. DR. GÜLNAZ BORUZANLI EKİNCİ)

Bir iletişim ağındaki temel problemlerden biri, veri akışının devamlılığının sağlanmasıdır. Günümüzde çeşitli uygulamalarda kullanılan iletişim ağlarının modellenmesinde sıklıkla karşılaşılan yöntemlerden biri de çizge teorisi. Ağlar üzerinde herhangi bir merkezde ya da merkezler arasındaki bağlantılarda hasar meydana geldiğinde, geriye kalan ağıdaki iletişimin ne durumda olacağını belirlemek oldukça önemli bir problemdir. Etkin ağ topolojisi seçimi yapabilmek için bu ölçümlerin önceden yapılması gerekir. Bu amaçla, çizgeler üzerinde çeşitli zedelenebilirlik parametreleri tanımlanmıştır. Bu parametrelerden en eski olanı, bağlantılılık sayısıdır; hasar gördüğünde çizgeyi bağlantısız hale getiren minimum tepe sayısını verir. Ancak, bağlantılılık sayısı tanımında, herhangi bir tepenin bütün komşularının aynı anda hasar görebileceği kabul edilmektedir ve bu analiz özellikle büyük boyutlu ağlarda elverişli sonuçlar sunamamaktadır. Literatürde, bu eksikliğin giderilmesi amacıyla tanımlanmış farklı zedelenebilirlik parametreleri mevcuttur. Diğer yandan ağ dayanıklılığı konusunda şimdiye kadar yapılmış olan çalışmaların birçoğu, tepelerin çevreden bağımsız bir şekilde hasar gördükleri kabul edilerek yapılmaktadır. Halbuki, birçok gerçek dünya problemde, hasarlı bir tepenin komşularının daha zedelenebilir olması ya da hasar görme olasılığının daha yüksek olması beklenmektedir. 2016 yılında Lin ve ark. tarafından tanımlanmış yapısal bağlantılılık yaklaşımında, hasarın her bileşeninin belirli bir yapıya sahip olduğu veya belirli bir yapının altyapısı olduğu durumlar ele alınmaktadır.

Bu tez çalışmasında, regüler ve sonsuz bir çizge sınıfı olan katlı divide-and-swap küpler ele alınmıştır ve bu sınıf yapısal bağlantılılık ve altyapısal bağlantılılık açısından incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Çizge Teorisi, Çizgelerde Güvenirlik, Çizgelerde Hata Toleransı, Yapısal Bağlantılılık, Altyapısal Bağlantılılık, Regüler Çizge

ABSTRACT

RELIABILITY ANALYSIS WITH STRUCTURE CONNECTIVITY IN A HYPERCUBE VARIANT

MUHAMMED TÜRKMEN

ORDU UNIVERSITY INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED
SCIENCES

MATHEMATICS

MASTER THESIS, 64 PAGES

SUPERVISOR: ASSOC. PROF. CANAN ÇİFTÇİ

CO-SUPERVISOR: ASSOC. PROF. GÜLNAZ BORUZANLI EKİNCİ

One of the main problems in a communication network is the continuity of data flow. Modeling with graph theory is a common method for addressing problems in communication networks used in various applications. It is an important problem to determine the state of communication in the remaining network when damage occurs in any center on the network or in the connections between the centers. These measurements must be conducted in advance to determine an effective network topology. For this purpose, several vulnerability parameters have been defined on graphs. Connectivity is one of the oldest vulnerability parameters; it determines the minimum number of vertices whose deletion results in a disconnected graph. However, in the definition of connectivity, it is assumed that all the neighbors of any vertex can be damaged at the same time, and this analysis cannot yield favorable results. In the literature, there are several vulnerability parameters defined to compensate for this deficiency. On the other hand, most studies on network vulnerability so far have assumed that vertices are damaged independently of their neighborhoods. However, in many real-world problems, the neighbors of a damaged vertex will be more vulnerable, or, more likely to be damaged. In 2016, Lin et al. proposed the structure connectivity, to consider the cases where each component of the damage has a specific structure or is a substructure of a specific structure.

In this thesis, we addressed a regular infinite graph class, namely folded divide-and-swap cubes and investigated this class in terms of structure and substructure connectivity.

Keywords: Graph Theory, Reliability in Graphs, Fault Tolerance in Graphs, Structure Connectivity, Substructure Connectivity, Regular Graphs

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitim süresince aldığım dersler, tez konunun belirlenmesi, çalışmanın yürütülmesi ve yazımı esnasında ve diğer tüm konularda gösterdiği ilgi ve alakadan dolayı danışman hocam Doç. Dr. Canan ÇİFTÇİ'ye ve tez çalışmam esnasında her türlü yardımlarından dolayı ikinci danışman hocam Doç. Dr. Gülnaz BORUZANLI EKİNCİ'ye teşekkürü borç bilirim.

TÜBİTAK 1002-A kodlu Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Projelerini Destekleme Programı 122F276 numaralı bilimsel araştırma projesi çerçevesinde 01.11.2022-01.10.2023 tarihleri arasında 11 ay süreyle sağladığı bursiyer desteği için Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu'na (TÜBİTAK) teşekkür ederim.

Yüksek lisans eğitimi boyunca 2210 Yurtiçi Yüksek Lisans Burs Programı kapsamında verdiği destekten dolayı TÜBİTAK Bilim İnsanı Destek Programları Başkanlığı'na (BİDEB) teşekkür ederim.

Hayatım boyunca hep yanımda olan ve beni destekleyen aileme teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
TEZ BİLDİRİMİ.....	I
ÖZET.....	II
ABSTRACT.....	III
TEŞEKKÜR.....	IV
İÇİNDEKİLER.....	V
ŞEKİL LİSTESİ.....	VI
ÇİZELGE LİSTESİ.....	VII
SİMGELER ve KISALTMALAR LİSTESİ.....	VIII
1. GİRİŞ.....	1
2. YAPISAL BAĞLANTILILIK.....	4
3. KATLI DİVİDE-AND-SWAP KÜP.....	7
4. ELDE EDİLEN SONUÇLAR.....	13
4.1 Yıldız-Yapı Bağlantılılık ve Yıldız-Altyapı Bağlantılılık.....	14
4.2 Çevre-Yapı Bağlantılılık ve Çevre-Altyapı Bağlantılılık.....	35
5. TARTIŞMA VE SONUÇ.....	51
6. KAYNAKLAR.....	52
ÖZGEÇMİŞ.....	55

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil 2.1 \mathcal{H} -yapı kesim ve \mathcal{H} -altyapı kesim küme	5
Şekil 3.1 $FDSC_2$ ve $FDSC_4$ çizgeleri ve $FDSC_8$ çizgesinin kısmi görünümü.....	10
Şekil 4.1 $FDSC_2$ ve $FDSC_4$ için $K_{1,1}$ -yapı-kesim küme.....	16
Şekil 4.2 $ A_1 + A_2 = d$ olacak şekilde en fazla bozulmuş modülün olabileceği durum	18
Şekil 4.3 Yardımcı Teorem 4.1.5 için (F1) gözlemi ve bu durum için bozulmuş olan en fazla modül	19
Şekil 4.4 Yardımcı Teorem 4.1.5 için (F2) gözlemi ve bu durum için bozulmuş olan en fazla modül	19
Şekil 4.5 Yardımcı Teorem 4.1.5 için (F3) ve (F4) gözlemleri	20
Şekil 4.6 $ P_1 + Q_1 = d - 1$ olduğunda en fazla bozulmuş modülün olabileceği durum	20
Şekil 4.7 $FDSC_n$ çizgesi için bir $K_{1,1}$ -yapı-kesim küme.....	22
Şekil 4.8 Yardımcı Teorem 4.1.7 için açıklama	26
Şekil 4.9 w_{d+1} tepesinin F_i altçizgesinin yaprak tepesi (1) ve merkez tepesi (2) olduğu durumlar	29
Şekil 4.10 Yardımcı Teorem 4.1.8 için (a) d tek, (b) d çift durumlarının açıklaması	31
Şekil 4.11 $FDSC_4$ çizgesi için bir $K_{1,4}$ -yapı-kesim küme	33
Şekil 4.12 Yardımcı Teorem 4.1.11 için (a) d tek, (b) d çift durumlarının açıklaması.....	34
Şekil 4.13 $FDSC_4$ çizgesi için bir C_4 -yapı-kesim küme	35
Şekil 4.14 $FDSC_8$ çizgesi için bir C_4 -yapı-kesim küme	36
Şekil 4.15 Yardımcı Teorem 4.2.2 için C_4 -yapı-kesim küme durumları	38
Şekil 4.16 $n \geq 16$ olmak üzere $FDSC_n$ çizgesi için bir C_4 -yapı-kesim küme.....	43
Şekil 4.17 $d = 1$ ve $d = 2$ olduğunda $FDSC_n$ çizgesi için bir C_4 -altyapı kesim küme	44
Şekil 4.18 $FDSC_n - \mathcal{F}$ çizgesinde en fazla bozulmuş modülün olabileceği durum	45
Şekil 4.19 (2) durumu için G_1 modülü dışında $FDSC_n - \mathcal{F}$ çizgesinde en fazla bozulmuş modül içerecek durum	46
Şekil 4.20 (2) durumu için G_1 modülü dışındaki herhangi bir modülün en fazla hatalı tepe içereceği durum	46

ÇİZELGE LİSTESİ

Sayfa

Çizelge 3.1 DSC_n , $FDSC_n$ ve diğer hiperküp çeşitlerinin tepe sayısı, derece, çap ve ağ maliyeti açısından karşılaştırılması ($n = s + t + 1$)	8
--	---

SİMGELER ve KISALTMALAR LİSTESİ

$A_{n,k}$: Sıralama çizgesi
BH_n	: Dengeli hiperküp
B_i	: $FDSC_n$ çizgesindeki bir modülün adresi
\overline{B}_i	: B_i adresinin tümleyeni
C_n	: n tepeli çevre çizge
CQ_n	: Çapraz hiperküp
$deg_G(u)$: G çizgesinde u tepesinin derecesi
DSC_n	: Divide-and-swap küp
$E(G)$: G çizgesinin ayrıtlar kümesi
$FDSC_n$: Katlı divide-and-swap küp
$FDSC_{\frac{n}{2}}$: $FDSC_n$ çizgesindeki bir modül
FQ_n	: Katlı hiperküp
$G - H$: $V(G) - V(H)$ tepeleri tarafından etkilenmiş altçizge
$G[X]$: G çizgesinin X tepeler kümesi tarafından etkilenmiş altçizgesi
H_n	: Bükümlü hiperküp
K_n	: n tepeli tam çizge
$K_{1,n}$: $n+1$ tepeli yıldız çizge
$\kappa(G)$: G çizgesinin bağlantılılık değeri
$\kappa(G; \mathcal{H})$: G çizgesinin \mathcal{H} -yapı bağlantılılık değeri
$\kappa'(G)$: G çizgesinin süper bağlantılılık değeri
$\kappa^s(G; \mathcal{H})$: G çizgesinin \mathcal{H} -altyapı bağlantılılık değeri
$[m]$: $\{1, 2, \dots, m\}$
N	: $\{1, 2, \dots, 2^{\frac{n}{2}}\}$
S_n^2	: Bölünmüş yıldız çizge
$Q_{n,k}$: k -lı n -küp (geliştirilmiş-hiperküp)
$V(G)$: G çizgesinin tepeler kümesi
$\lambda(G)$: G çizgesinin ayrıt bağlantılılık değeri
$ S $: S kümesinin eleman sayısı
(u, v)	: u ve v tepelerini birleştiren ayrıt
\cong	: İki çizge arasındaki izomorfizma
$\lceil \]$: Üst tam değer fonksiyonu
$\lfloor \]$: Alt tam değer fonksiyonu

1. GİRİŞ

Çeşitli kaynakların ve bu kaynaklar arasındaki iletişim bilgisinin oluşturduğu ağlara iletişim ağları denir. Ulaşım ağları, sosyal ağlar, kaynak dağıtım ağları, bilgisayar ağları gibi birçok iletişim ağı çeşidi vardır. Gelişen teknolojinin de etkisiyle, kullanılan ağ modellerinin optimize edilmesi, ağ üzerinde çeşitli algoritma ve yöntemlerin geliştirilmesi, ağ üzerinde belirli özellikteki rotaların belirlenmesi gibi ihtiyaçlar gittikçe önem kazanmaktadır ve bu alanda birçok güncel çalışma yapılmaktadır.

Çizge teorisi iletişim ağlarının matematiksel modellemesinde kullanılan etkin yöntemlerden biridir. Bu yaklaşımda, iletişim ağının merkezleri çizgenin tepelerine, merkezler arasındaki ilişkileri de çizgenin ayrıtlarına karşılık gelecek şekilde modelleme yapılmaktadır. Bu sebeple, çizgeler üzerinde, iletişim ağlarının çeşitli özelliklerini temsil edebilecek farklı kavramlar tanımlanmış, önemli ağ problemlerine karşılık gelen birçok ölçüm, algoritma ve yöntem ortaya atılmıştır.

Bir iletişim ağındaki temel problemlerden biri, veri akışının devamlılığının sağlanmasıdır. Ağın merkezlerinde ya da merkezler arasındaki bağlantılarda meydana gelebilecek olası hasarlardan sonra geriye kalan ağda herhangi iki merkez arasında iletişimin devam edip etmeyeceği oldukça önemlidir. Bu ve benzeri problemlerin incelenmesi için çizgeler üzerinde bağlantılılık kavramı ortaya atılmış, zaman içinde çeşitli versiyonları da incelenmiştir. Çizgelerin hasarlar karşısındaki dayanıklılığının incelenmesi literatürde oldukça önemli bir araştırma problemi haline gelmiştir. Farklı hasar senaryolarını incelemek için ya da geriye kalan ağın çeşitli özelliklerini belirlemek için zaman içinde birçok farklı güvenilirlik parametresi tanımlanmıştır. Bu parametrelerle elde edilen ölçümler, hem üzerinde çalışılan ağ modelinin çeşitli özellikleri konusunda bilgi verir hem de henüz tasarım aşamasında iken etkin ağ modelinin seçilebilmesi konusunda önemli katkılar sağlar.

Klasik bağlantılılık sayısı bilinen en eski güvenilirlik ölçümlerinden biridir ve ağın bağlantısız hale gelmesine sebep olabilecek (diğer bir deyişle aralarında iletişim olmayan en az iki merkez oluşmasına sebebiyet verebilecek) bir hasarın minimum boyutu ile ilgilenir. Bu kavramın tanımında, herhangi bir tepenin bütün

komşularının aynı anda hasar görebileceği kabul edilmiştir ve bu analiz özellikle büyük boyutlu ağlarda etkin sonuçlar sunamamaktadır. Literatürde, bu eksikliğin giderilmesi amacıyla tanımlanmış farklı güvenilirlik parametreleri mevcuttur. Ancak ağ dayanıklılığı konusunda şimdiye kadar yapılmış olan çalışmaların birçoğu, tepelerin çevreden bağımsız bir şekilde hasar gördükleri gözetilerek yapılmaktadır. Halbuki, birçok gerçek dünya probleminde, hasarlı bir tepenin komşularının daha zedelenebilir olması ya da hasar görme olasılığının daha yüksek olması beklenmektedir. Ayrıca, gittikçe yaygınlaşan donanım ağları ve bunların alt-ağlarının yongalar üzerinde gerçekleştirildiği göz önünde bulundurulduğunda, bir tepe hasar gördüğünde, yonga üzerindeki diğer tepelerin de hasar göreceği (ya da işlevsiz hale geleceği) dikkate alınarak planlama yapılması gereksinimi doğmaktadır. 2016 yılında Lin ve ark. tarafından tanımlanmış yapısal bağlantılılık yaklaşımında, hasarın her bileşenin belirli bir yapıya sahip olduğu veya belirli bir yapının altyapısı olduğu durumlar ele alınmaktadır (Lin, Zhang, Fan, & Wang, 2016).

Tez boyunca kullanılan tanım ve teoremlere aşağıda yer verilmiştir.

G çizgesi, tepeler kümesi $V(G)$, ayrıtlar kümesi $E(G)$ ile gösterilen basit ve yönsüz bir çizge olsun. Bir çizge genellikle $G = (V(G), E(G))$ olarak veya kısaca G ile gösterilmektedir. İki $u, v \in V(G)$ tepesi için $(u, v) \in E(G)$ ise u, v tepesine komşu tepeler denir ya da u tepesi v tepesinin komşusu olarak adlandırılır. Bir $u \in V(G)$ tepesine komşu olan tepelerin kümesi $N_G(u)$ ile gösterilir ve u tepesinin G çizgesindeki komşuluğu olarak adlandırılır. Ayrıca $N_G(u)$ kümesinin eleman sayısı u tepesinin derecesini verir ve $deg_G(u)$ ile gösterilir. Bir tepenin derecesi sıfır ise izole tepedir. Bir G çizgesinde her $u \in V(G)$ tepesi için $deg_G(u) = r$ ise, G çizgesine r -regüler veya regüler çizge denir. Bir G çizgesinin H altçizgesi için $V(H) \subseteq V(G)$ ve $E(H) \subseteq E(G)$ sağlanır. Üstelik bir altçizge sadece tepe silinerek elde edilmişse etkilenmiş altçizgedir ve geriye kalan X tepe kümesi tarafından etkilenmiş altçizge $G[X]$ ile gösterilir. Bir G çizgesinin herhangi iki tepesi arasında daima bir yol var ise bağlantılı; aksi halde bağlantısız çizge denir.

İki G ve G' çizgesi için $\psi : V(G) \rightarrow V(G')$ olacak şekilde birebir-örten bir fonksiyon var ve her $x, y \in V(G)$ için $(x, y) \in E(G) \Leftrightarrow (\psi(x), \psi(y)) \in E(G')$

şartı sağlanıyorsa G ile G' çizgeleri izomorf olarak adlandırılır ve $G \cong G'$ şeklinde gösterilir.

H çizgesi, G çizgesinin bir altçizgesi olmak üzere G çizgesinin $V(G) - V(H)$ tepeleri tarafından etkilenmiş altçizgesi $G - H$ ile gösterilir. $\mathcal{F} = \{F_1, \dots, F_n\}$ olmak üzere her F_i çizgesi G çizgesinin bağlantılı bir altçizgesine izomorf olsun. G çizgesinin $V(G) - V(F_1) - \dots - V(F_n)$ tepeleri tarafından etkilenmiş altçizgesi $G - \mathcal{F}$ ile gösterilir.

$k \geq 3$ olmak üzere bir $C = \langle v_1, v_2, \dots, v_k, v_1 \rangle$ çevresi ardışık her iki tepesi komşu olan, birbirinden farklı v_1, v_2, \dots, v_k tepe dizisinden oluşmaktadır ve n tepeli çevre C_n şeklinde isimlendirilir. n tepeli ve her tepe çifti birbiri ile komşu olan çizgeye n tepeli tam çizge denir ve K_n ile gösterilir. Yıldız çizge ise, merkez olarak isimlendirilen bir tepesi diğer tüm tepelere bağlı iken diğer tepelerinin başka komşusu olmayan çizgedir ve $n + 1$ tepeli yıldız çizge $K_{1,n}$ ile gösterilir. Yıldız çizgede derecesi 1 olan tepelere yaprak denir.

Bir G çizgesinin $S \subseteq V(G)$ altkümesindeki tepeler silindiğinde geriye kalan çizge bağlantısız ise S kümesine G çizgesi için bir kesim küme denir. Bir G çizgesinin bağlantılılık değeri, minimum elemanlı bir kesim kümesinin eleman sayısına eşittir ve $\kappa(G)$ ile gösterilir. Bir G çizgesinin $F \subseteq V(G)$ altkümesindeki tepeler silindiğinde geriye kalan çizge bağlantısız ise ve geriye izole tepe kalmamışsa F kümesi G çizgesinin bir süper-kesim kümesidir. G çizgesinin süper-bağlantılılık değeri, eğer varsa, bir minimum süper-kesim kümenin eleman sayısına eşittir ve $\kappa'(G)$ ile gösterilir. Her süper-kesim küme aynı zamanda bir kesim küme olduğundan, bağlantılılık ve süper bağlantılılık arasında $\kappa(G) \leq \kappa'(G)$ eşitsizliği sağlanır.

Çizgedeki bir u tepesi eğer hasar görmediyse, diğer bir deyişle hatalı tepeler kümesinde değilse, u tepesine hatasız tepe denir. Eğer bir $e = (u, v)$ ayrıtının iki uç tepesi de hatasız ise e ayrıtına hatasız ayrıt denir.

Bölüm 2'de yapısal ve altyapısal bağlantılılık kavramları ile ilgili temel tanım ve teoremler verilmiştir; Bölüm 3'te bu çalışmada yapısal ve altyapısal bağlantılılığı incelenen ve bir hiperküp varyantı olan katlı divide-and-swap-küp yapısının özellikleri sunulmuştur. Çalışma boyunca elde edilen sonuçlara ise Bölüm 4'te yer verilmiştir.

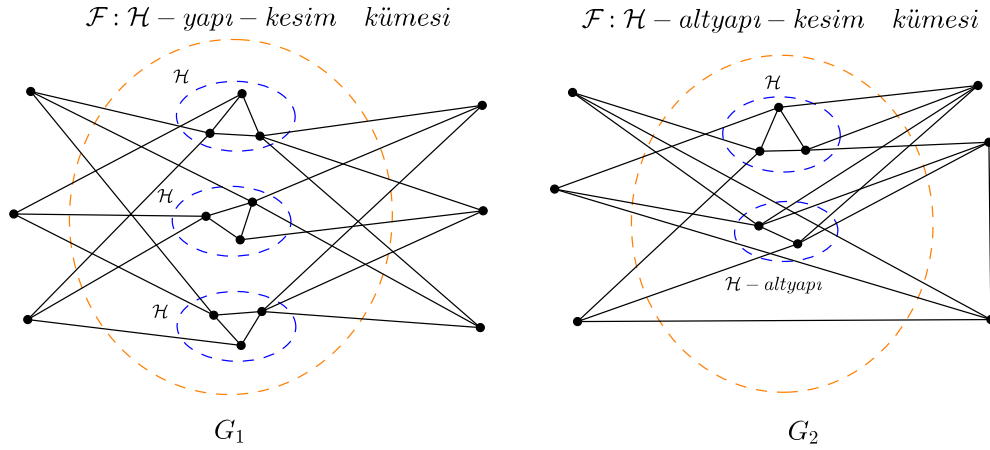
2. YAPISAL BAĞLANTILILIK

G çizgesinin bağlantılı bir \mathcal{H} altçizgesi ele alınsın. $\mathcal{F} = \{F_1, F_2, \dots, F_n\}$, her $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ için F_i elemanı \mathcal{H} altçizgesine izomorf olan bir altçizge kümesi olsun. Eğer $G - \mathcal{F}$ bağlantısız bir çizge ise veya tek bir izole tepeden oluşan çizgeye izomorf ise \mathcal{F} kümesi G çizgesinin bir \mathcal{H} -yapı-kesim kümedir. G çizgesinin \mathcal{H} -yapı bağlantılılık değeri, minimum elemanlı bir \mathcal{H} -yapı-kesim kümenin eleman sayısına eşittir ve $\kappa(G; \mathcal{H})$ ile gösterilir.

G çizgesinin bağlantılı bir \mathcal{H} altçizgesini ele alalım. $\mathcal{F} = \{F_1, F_2, \dots, F_n\}$, her $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ için F_i elemanı \mathcal{H} altçizgesinin bağlantılı bir altçizgesine izomorf olan bir altçizge kümesi olsun. Eğer $G - \mathcal{F}$ bağlantısız bir çizge ise veya tek bir izole tepeden oluşan çizgeye izomorf ise \mathcal{F} kümesi G çizgesinin bir \mathcal{H} -altyapı-kesim kümedir. G çizgesinin \mathcal{H} -altyapı bağlantılılık değeri, minimum elemanlı bir \mathcal{H} -altyapı-kesim kümenin eleman sayısına eşittir ve $\kappa^s(G; \mathcal{H})$ ile gösterilir.

Tanım itibariyle \mathcal{H} -yapı-kesim veya \mathcal{H} -altyapı-kesim kümesindeki iki altçizge ayrı olmak zorunda değildir. Ayrıca, herhangi bir G çizgesi ve bağlantılı bir \mathcal{H} altçizgesi için $\kappa^s(G; \mathcal{H}) \leq \kappa(G; \mathcal{H})$ olduğu kolaylıkla görülebilmektedir. Şekil 2.1 ile \mathcal{H} altçizgesi K_3 olmak üzere \mathcal{H} -yapı-kesim ve \mathcal{H} -altyapı-kesim kümeleri gösterilip G_1 ve G_2 çizgeleri için \mathcal{H} -yapı bağlantılılık ve \mathcal{H} -altyapı bağlantılılık değerleri bulunmuştur. G_1 ve G_2 çizgelerinden şekilde mavi ile belirtilen sırasıyla 3 yapı ve 2 altyapı silindiğinde bağlantısız çizgeler elde edilir. Dolayısıyla, $\kappa(G_1; K_3)=3$ ve $\kappa^s(G_2; K_3) = 2$ elde edilir.

Bu kavram tanımlandıktan sonra, iletişim ağlarının modellenmesinde sıklıkla kullanılan çizgelerin yapısal bağlantılılık sayılarını inceleyen ve uluslararası saygın dergilerde yayınlanan çalışmalar yapılmıştır. 2016 yılında, $\mathcal{H} \in \{K_1, K_{1,1}, K_{1,2}, K_{1,3}, C_4\}$ olmak üzere, Q_n hiperküp çizgesinin \mathcal{H} -altyapı bağlantılılık sayısı ve \mathcal{H} -yapı bağlantılılık sayısı belirlenmiştir (Lin et al., 2016). Daha sonra, k -lı n -küp $Q_{n,k}$ çizgesinin \mathcal{H} -altyapı bağlantılılık sayısı ve \mathcal{H} -yapı bağlantılılık sayısı çalışılmıştır (Lv, Fan, Hsu, & Lin, 2018). Sabir ve Meng tarafından, $3 \leq k \leq n$ ve $T \in \{P_k, C_{2k}, K_{1,4}\}$ olmak üzere, Q_n hiperküp çizgesinin T -altyapı bağlantılılık



Şekil 2.1 \mathcal{H} -yapı-kesim ve \mathcal{H} -altyapı-kesim küme

sayısı ve T -yapı bağlantılılık sayısı; $2 \leq k \leq n$, $n \geq 7$ ve $T \in \{P_k, C_{2k}, K_{1,3}\}$ olmak üzere, FQ_n katlı-hiperküp çizgesinin T -altyapı bağlantılılık sayısı ve T -yapı bağlantılılık sayısı belirlenmiştir (Sabir & Meng, 2018). $\mathcal{H} \in \{P_1, P_2\}$ olmak üzere, $Q_{n,k}$ geliştirilmiş-hiperküp çizgesinin \mathcal{H} -altyapı bağlantılılık sayısı ve \mathcal{H} -yapı bağlantılılık sayısı belirlenmiştir (Jin & Liu, 2018). Lv ve Xu tarafından torus ağların $K_{1,1}$ -altyapı bağlantılılık sayısı ve $K_{1,1}$ -yapı bağlantılılık sayısı belirlenmiştir (Lv & Xu, 2017). Yine 2018 yılında $\mathcal{H} \in \{K_1, K_{1,1}, K_{1,2}\}$ olmak üzere, alternatif grup çizgelerinin \mathcal{H} -altyapı bağlantılılık sayısı ve \mathcal{H} -yapı bağlantılılık sayısı belirlenmiştir (You et al., 2018). Ayrıca, $3 \leq r \leq 4$, $1 \leq k \leq n$ ve $T \in \{P_k, K_{1,r}\}$ olmak üzere, H_n bükümlü-hiperküp çizgesinin T -altyapı bağlantılılık sayısı ve T -yapı bağlantılılık sayısı belirlenmiştir (D. Li, Hu, & Liu, 2019). $\mathcal{H} \in \{K_{1,m}, C_3, C_4, K_4\}$ olmak üzere genelleştirilmiş hiperküpün \mathcal{H} -altyapı bağlantılılık sayısı ve \mathcal{H} -yapı bağlantılılık sayısı belirlenmiştir (Wang, Lin, Cheng, Fan, & Fan, 2019). Yine 2019 yılında, dolanır çizgeler ve hiperküp için çeşitli sonuçlar elde edilmiştir (Chelvam & Sivagami, 2021).

Ayrıca, kabarcık-sıralama yıldız çizgeleri (Zhang & Wang, 2019) ve n -boyutlu yıldız çizgelerin (C. Li, Lin, & Li, 2020) yapısal bağlantılılığı çalışılmıştır. 2020 yılında, $\mathcal{H} \in \{K_{1,1}, K_{1,3}, P_k, C_m\}$ olmak üzere, CQ_n çapraz hiperküp çizgesinin (Z. Pan & Cheng, 2020), $\mathcal{H} \in \{K_{1,n}, P_m\}$ olmak üzere, $A_{n,k}$ sıralama çizgesinin (Lei & Meng, 2020), $\mathcal{H} \in \{K_1, K_{1,m}, C_4\}$ olmak üzere, BH_n dengeli hiperküp çizgesinin (Lü & Wu, 2020) yapısal bağlantılılığı çalışılmıştır. $3 \leq k \leq 2n - 1$ ve $\mathcal{H} \in \{P_k, C_k\}$ olmak üzere hiperküp çizgesinin \mathcal{H} -altyapı bağlantılılık sayısı ve \mathcal{H} -yapı

bağlantılılık sayısı belirlenmiştir. $\mathcal{H} \in \{K_{1,1}, K_{1,2}, K_{1,3}\}$ iken (Lin et al., 2016), $\mathcal{H} \cong K_{1,4}$ iken Sabir ve Meng (2018) tarafından elde edilen sonuçlar, 2020 yılında Ba ve Zhang tarafından geliştirilmiştir; hiperküp ve katlı-hiperküpün yıldız-yapı ve yıldız-altyapı bağlantılılık sayısını belirlemişlerdir (Ba & Zhang, 2022b). 2021 yılında, Li ve ark. (2021) \mathcal{H} -yapısı alternatif grup çizgeleri için elde edilen sonuçları (You et al., 2018) $K_{1,t}, P_\ell, C_k$ yapılarına izomorf iken genelleştirmiştir. Ayrıca Feng ve Wang tarafından 2021 yılında \mathcal{H} -yapısı P_n yapısına izomorf iken tekerlek ağların yapısal ve altyapısal bağlantılılık değerleri belirlenmiştir (Feng & Wang, 2021). Yine 2021 yılında, $\mathcal{H} \in \{K_1, K_{1,1}, K_{1,m}, C_4\}$ olmak üzere divide-and-swap küplerinde yapısal ve altyapısal bağlantılılık çalışılmıştır (Zhou, Zhou, Liu, & Liu, 2021). 2022 yılında, Ba ve Zhang çapraz hiperküplerin çevre-yapı bağlantılılık sayısını incelemiştir (Ba & Zhang, 2022a). 2023 yılında Pan ve ark. transpozisyon ağaçları tarafından oluşturulan cayley çizgelerinin yıldız yapı bağlantılılığı üzerine çalışmışlardır (K. Pan & Cheng, 2023). Wu ve Zhang tarafından n - boyutlu katlanmış hiperküpler ve artırılmış küpler için yıldız yapı bağlantılılık değeri belirlenmiştir (Ba, Wu, & Zhang, 2023). $4 \leq \ell \leq 3n - 5$, $6 \leq k \leq 3n - 5$ ve $\mathcal{H} \in \{P_\ell, C_k\}$ olmak üzere S_n^2 bölünmüş yıldız çizgesinin \mathcal{H} -yapı bağlantılılık sayısı ve \mathcal{H} -altyapı bağlantılılık sayısı belirlenmiştir (L. Zhao & Wang, 2023). Son olarak, Ba ve Zang n -portlu anahtarlara sahip m boyutlu DCell ağı ve n boyutlu BCDC ağı üzerine çalışmışlar ve veri merkezi ağlarının yapısal bağlantılılığını yıldız, yol, çevre, tam çizge gibi bazı ortak yapılar üzerinde incelemişlerdir (Ba & Zhang, 2023).

3. KATLI DIVIDE-AND-SWAP KÜP

Bu tezde sadece katlı divide-and-swap küp yapısı ele alınmış olmasına rağmen, bu küp divide-and-swap küp çizgesinde her tepeye bir ayrıt daha eklenerek elde edildiği için öncelikle divide-and-swap küp yapısının tanımına yer verilmiş, daha sonra katlı divide-and-swap küp yapısının tanımına yer verilmiştir. Notasyon kolaylığı için $[m] = \{1, 2, \dots, m\}$ ve $N = \lfloor 2^{\frac{n}{2}} \rfloor$ gösterimleri kullanılmıştır.

Mevcut literatür incelendiğinde de, yapısal bağlantılılık üzerine şimdiye kadar en detaylı çalışmaların yapılmış olduğu regüler çizge sınıflarının klasik hiperküp ve onun çeşitli varyantları olduğu görülmüştür; hatta yapısal bağlantılılık kavramının ilk tanımlandığı çalışma dahi klasik hiperküp üzerinde yürütülmüştür (Lin et al., 2016). Bu tez çalışmasında literatürde nispeten yeni ancak performans açısından cazip özelliklere sahip olan katlı divide-and-swap küp sınıfı ele alınmıştır.

Hiperküp yapısı, iyi bir ara bağlantı ağı topolojisi olduğundan literatürde oldukça detaylı şekilde çalışılmıştır. Q_n ile gösterilen n -boyutlu hiperküp çizgesi, 2^n tepeli ve $n2^{n-1}$ ayrıta sahiptir. Q_n çizgesinin her tepesi elemanları 0 ve 1 olan n boyutlu dizi ile gösterilmektedir. Q_n çizgesindeki u ve v tepelerini gösteren diziler arasında sadece bir basamak fark var ise u ve v tepeleri komşudur. Literatürde özellikle performans analizi ve güvenilirlik analizi açısından incelendiği birçok çalışma mevcuttur. Zamanla klasik hiperküp tanımının çeşitli varyantları da tanımlanmış ve bu varyantlar da detaylı şekilde çalışılmıştır. Hiperküp varyantlarının en çok bilinenlerinden biri de katlı hiperküptür. Katlı hiperküp, kısalan çap avantajı ile literatürde oldukça önemli bir yer edinmiştir. Ayrıca literatürde birçok iyi bilinen hiperküp varyantının katlı versiyonu da mevcuttur. Kim ve ark. DSC_n çizgesinde her tepeye bir ayrıt ekleyerek çapı kısmen azaltmış ve katlı divide-and-swap küp tanımını yapmıştır (Kim, Kim, Qiu, & Lee, 2019). Divide-and-swap küp ve katlı divide-and-swap küp ağ maliyeti oldukça düşük hiperküp alternatifleri olarak tanımlanmıştır. Ağ maliyeti, tepe derecesi ve çapın çarpımı ile hesaplanır ve ağın performans ölçümlerinde oldukça önemli bir yere sahiptir. Klasik hiperküp ve literatürde mevcut olan farklı hiperküp varyantları için ağ maliyeti $O(n^2)$ iken DSC_n ve $FDSC_n$ küpleri için ağ maliyeti $O(n \log n)$ kadardır. Bu açıdan, her iki küp

Çizelge 3.1 DSC_n , $FDSC_n$ ve diğer hiperküp çeşitlerinin tepe sayısı, derece, çap ve ağ maliyeti açısından karşılaştırılması ($n = s + t + 1$) (Kim ve ark., 2019)

İletişim Ağı	Tepe Sayısı	Derece	Çap	Ağ Maliyeti
Hiperküp	2^n	n	n	$O(n^2)$
Katlı hiperküp	2^n	$n + 1$	$\lceil \frac{n}{2} \rceil$	$O(n^2)$
Bükülmüş küp	2^n	n	$\lceil \frac{n+1}{2} \rceil$	$O(n^2)$
Çapraz küp	2^n	n	$\lceil \frac{n+1}{2} \rceil$	$O(n^2)$
Möbius küp	2^n	n	$\lceil \frac{n+1}{2} \rceil$ veya $\lceil \frac{n+2}{2} \rceil$	$O(n^2)$
Artırılmış küp	2^n	$2n - 1$	$\lceil \frac{n}{2} \rceil$	$O(n^2)$
Yerel olarak bükülmüş küp	2^n	n	$\lceil \frac{n+3}{2} \rceil$	$O(n^2)$
Shuffle küp	2^n	n	$\lceil \frac{n}{4} \rceil + 3$	$O(n^2)$
Dikenli küp	2^n	n	$\lceil \frac{n}{3} \rceil + 3$	$O(n^2)$
Değiştirilmiş hiperküp	2^n	$s + 1$ veya $t + 1$	$s + t + 1$	$O(n^2)$
Değiştirilmiş çapraz hiperküp	2^n	$s + 1$ veya $t + 1$	$\lceil \frac{s+1}{2} \rceil + \lceil \frac{t+1}{2} \rceil + 2$	$O(n^2)$
DSC_n	2^n	$\log n + 1$	$\frac{5n}{4} - 1$	$O(n \log n)$
$FDSC_n$	2^n	$\log n + 2$	$n - 1$	$O(n \log n)$

yapısı da arabağlantı ağı topolojisi olmak üzere çok uygun ağ yapılarıdır. Çizelge 3.1’de $FDSC_n$ ve DSC_n çizgelerinin diğer hiperküp varyantları ile tepe sayısı, derece, çap ve ağ maliyeti açısından karşılaştırılması verilmiştir. Ayrıca, hiperküplerle karşılaştırıldığında, DSC_n ve $FDSC_n$ çizgeleri çift üstel ölçeklenebilirliğe sahiptir. Örneğin, $d = 5$ olduğunda $FDSC_{2^d}$ çizgesindeki tepe sayısı dört milyardan fazladır. Bu nedenlerle, her iki küp varyantı da hiyerarşik yapıları ve cazip performans özellikleri sayesinde literatürde hızlıca dikkat çekmiş ve çeşitli açılardan incelenmeye başlanmıştır.

Tanım 3.0.1 (Kim et al., 2019) $d \geq 1$ tamsayı olmak üzere $n = 2^d$ için DSC_n ile gösterilen n -boyutlu divide-and-swap küp, her $i \in [n]$ için $s_i \in \{0, 1\}$ olmak üzere $V(DSC_n) = \{0, 1\}^n = \{u \mid u = s_1 s_2 \dots s_{n-1} s_n\}$ tepeler kümesinden oluşan çizgedir. Bir $u \in V(DSC_n)$ tepesi $1 \leq k \leq \log_2 n = d$ için

$$m_1 = s_1 s_2 \dots s_{\frac{n}{2^k}} \quad m_2 = s_{\frac{n}{2^k}+1} s_{\frac{n}{2^k}+2} \dots s_{\frac{n}{2^{k-1}}} \quad m_3 = s_{\frac{n}{2^{k-1}}+1} s_{\frac{n}{2^{k-1}}+2} \dots s_n$$

olmak üzere üç parçalı olarak $u = s_1 s_2 \dots s_{n-1} s_n = m_1 m_2 m_3$ şeklinde etiketlenebilir. Eğer $k = 1$ olursa m_3 boş dizi olacaktır, yani $m_1 = s_1 s_2 \dots s_{\frac{n}{2}}$ ve $m_2 =$

$s_{\frac{n}{2}+1}s_{\frac{n}{2}+2} \cdots s_n$ olur.

Bir v tepesi aşağıdaki koşullardan birini sağlıyorsa DSC_n çizgesinde u tepesi ile komşudur denir.

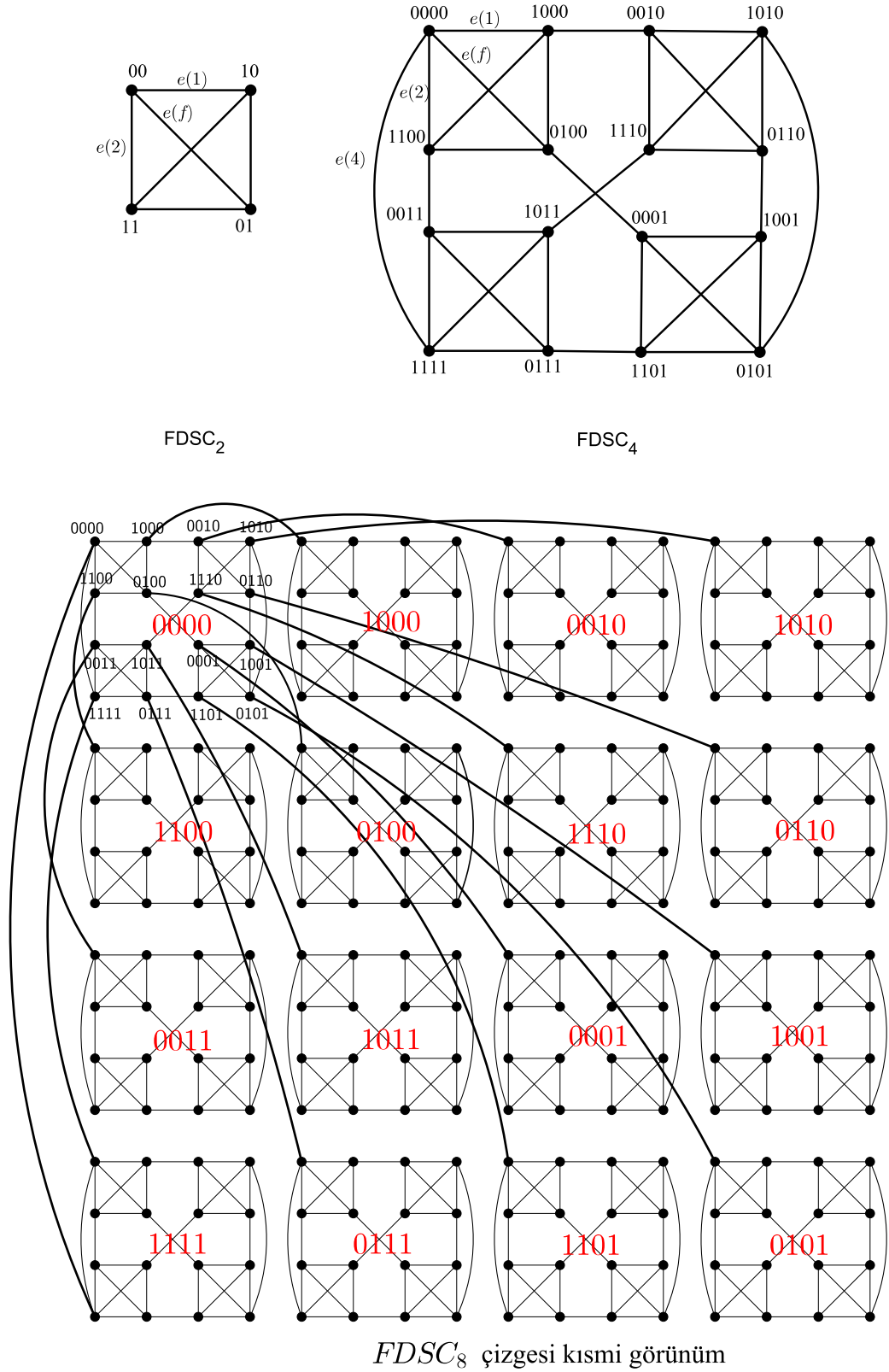
- (1) $v = \bar{s}_1 s_2 s_3 \cdots s_n$. Burada \bar{s}_1, s_1 sayısının tümleyeni olmak üzere bu tip bir ayrıt $e(1)$ -ayrıttır.
- (2) $m_1 = m_2$ ise $v = \bar{m}_1 \bar{m}_2 m_3$ sağlanır, aksi halde $v = m_2 m_1 m_3$ sağlanır. Bu tip ayrıt ise $e(\frac{2n}{2^k})$ -ayrıt olarak adlandırılır.

Tanım 3.0.2 (Kim et al., 2019) $d \geq 1$ tamsayı olmak üzere $n = 2^d$ için $FDSC_n$ ile gösterilen n -boyutlu katlı divide-and-swap küp, DSC_n çizgesine $E_f = \{(u, v) \mid u = s_1 s_2 s_3 \cdots s_n \text{ ve } v = s_1 \bar{s}_2 s_3 \cdots s_n\}$ kümesindeki ayrıtların eklenmesiyle oluşturulmuştur. Burada, $V(FDSC_n) = V(DSC_n)$ ve $E(FDSC_n) = E(DSC_n) \cup E_f$ şeklindedir. Her $(u, v) \in E_f$ ayrıtı $e(f)$ -ayrıt şeklinde isimlendirilmektedir.

$FDSC_n$ çizgesindeki herhangi bir $u = s_1 s_2 s_3 \cdots s_n$ tepesi için u_f notasyonu $s_1 \bar{s}_2 s_3 \cdots s_n$ tepesi için kullanılmaktadır. Şekil 3.1'de $FDSC_2$ ve $FDSC_4$ çizgeleri ve $FDSC_8$ çizgesinin sadece 0000 adresli modülü ile diğer tüm modüller arasındaki ayrıtları kalın çizgilerle gösteren kısmi bir gösterimi verilmiştir.

$FDSC_n$ çizgesindeki her bir $FDSC_{\frac{n}{2}}$ altçizgesi bir modül olarak adlandırılır. Bir modüldeki keyfi bir $u = s_1 s_2 \cdots s_{\frac{n}{2}} s_{\frac{n}{2}+1} s_{\frac{n}{2}+2} \cdots s_n$ tepesi, $A_i = s_1 s_2 \cdots s_{\frac{n}{2}}$ tepenin modül içindeki adresini ve $B_i = s_{\frac{n}{2}+1} s_{\frac{n}{2}+2} \cdots s_n$ modülün adresini göstermek üzere $u = A_i B_i$ şeklinde ifade edilebilir. B_i adresli bir modül G_i şeklinde gösterilmektedir. Bir modül içindeki ayrıt iç ayrıt olarak adlandırılırken, iki farklı modülü bağlayan ayrıt ise çapraz ayrıt olarak adlandırılır. Yani $i \in \{1, \frac{2n}{2^d}, \frac{2n}{2^{d-1}}, \dots, \frac{2n}{2^4}, \frac{2n}{2^3}, \frac{2n}{2^2}\}$ için $e(i)$ -ayrıt ve $e(f)$ -ayrıt iç ayrıt, tüm $e(n)$ -ayrıtları ise çapraz ayrıttır. Bu çalışmada u ve v uç tepelerinin ikisi de hatasız ise $(u, v) \in E(FDSC_n)$ ayrıtı hatasız olarak adlandırılır.

Eğer (u, v) ayrıtı bir $e(1)$ -ayrıt ise v tepesine u tepesinin 1-komşusu denir ve $v = u_1$ şeklinde gösterilir. Benzer şekilde (u, v) ayrıtı, $2 \leq k \leq d$ için $e(\frac{2n}{2^k})$ -ayrıt ise v tepesi u tepesinin k -komşusu (iç komşu) olarak adlandırılır ve $v = u_k$ ile gösterilir.



Şekil 3.1 $FDSC_2$, $FDSC_4$ çizgeleri ve $FDSC_8$ çizgesinin kısmi görünümü

Son olarak (u, v) ayrıtı, $k = 1$ olmak üzere $e(\frac{2n}{2^k})$ -ayrıt ise v tepesine u tepesinin $(d + 1)$ -komşusu (dış komşu) denir ve $v = u_{d+1}$ olarak gösterilir.

Divide-and-swap küpün hata toleransı literatürde çeşitli çalışmalarda incelenmiştir. Ning $d \geq 1$ için $n = 2^d$ olmak üzere DSC_n çizgesinin (ayrıt) bağlantılılık değerinin $d + 1$ ve süper (ayrıt) bağlantılılık değerinin $2d$ olduğunu kanıtlamıştır (Ning, 2020). Süper (ayrıt) bağlantılılık, ayrıt bağlantılılığın değişik bir türü olup çizgeyi izole tepe olmaksızın bağlantısız yapmak için silinmesi gereken tepe (ayrıt) sayısına eşittir. Daha sonra, Zhou ve ark. DSC_n çizgesinin $\mathcal{H} \in \{K_1, K_{1,1}, K_{1,m} (2 \leq m \leq d + 1), C_4\}$ için \mathcal{H} -yapı ve \mathcal{H} -altyapı bağlantılılık değerini belirlemiştir (Zhou et al., 2021). Zhou ve ark. DSC_n çizgesinin r -bileşen bağlantılılık ve teşhis edilebilirliğini incelemiştir (Zhou, Zhou, Liu, & Yu, 2022). Yakın zamanda ise Zhao ve Chang $k \in \{3, 4\}$ için DSC_n çizgesinin genelleştirilmiş k -bağlantılılık değerini belirlemiştir (S.-L. Zhao & Chang, 2023b).

Chang ve ark. $FDSC_n$ küpünün veri merkezi ağı olmak üzere uygun bir topoloji adayı olduğunu göstermişlerdir (Chang, Pai, Hsu, Yang, & Chang, 2021). Aynı çalışmada, tamamen ayrık rekürsif iki geren ağaç inşasını da yapmışlardır. Daha sonra, Zhao ve Chang $FDSC_n$ çizgesinin güvenilirliğini incelemiş ve (ayrıt) bağlantılılık değerinin $d + 2$ olduğunu ispatlamışlardır (S.-L. Zhao & Chang, 2023a). Ayrıca $FDSC_n$ çizgesinin genelleştirilmiş 3-bağlantılılık değerini belirlemiştir. Yakın geçmişte You ve ark. $FDSC_n$ çizgesinin süper dallanmış bağlantılılık değerini belirlemiştir (You, Jiang, & Han, 2023). Xue ve ark. ise $FDSC_n$ çizgesinin genelleştirilmiş 4-bağlantılılık değeri için bir üst ve alt sınır belirlemiştir (Xue, Zhou, & Zhang, 2023). Şu anda $FDSC_n$ çizgesinin güvenilirliği konusunda bilinen başka bir çalışma yoktur.

Bu tez kapsamında, katlı divide-and-swap küplerin güvenilirlik araştırması, yapısal ve altyapısal bağlantılılık göz önünde bulundurularak incelenmiştir. $n = 2^d$ olmak üzere $FDSC_n$ çizgesinin $\mathcal{H} \in \{K_1, K_{1,1}, K_{1,m} (2 \leq m \leq d + 1), C_4\}$ için \mathcal{H} -yapı bağlantılılık ve \mathcal{H} -altyapı bağlantılılık değerleri belirlenmiş ve çeşitli çizge teorisi yöntemleri kullanılarak ispatlanmıştır.

Öncelikle, bu bölüm kapsamında tezde elde edilen sonuçların ispatlarında

doğrudan kullanılan bazı sonuçlara yer verilmiştir.

Teorem 3.0.3 (S.-L. Zhao & Chang, 2023a) $d \geq 1$ tamsayısı için $n = 2^d$ olmak üzere $\kappa(FDSC_n) = d + 2$ eşitsizliği sağlanır.

Teorem 3.0.4 (S.-L. Zhao & Chang, 2023a) $d \geq 1$ tamsayısı için $n = 2^d$ olmak üzere $\kappa'(FDSC_n) = 2d$ eşitsizliği sağlanır.

Yardımcı Teorem 3.0.5 (Kim et al., 2019) Herhangi bir $d \geq 1$ tamsayısı için $n = 2^d$ olmak üzere aşağıdaki sonuçlar geçerlidir:

- (1) $FDSC_n$ çizgesi $(d + 2)$ -regülerdir.
- (2) $|V(FDSC_n)| = 2^n$ ve $|E(FDSC_n)| = 2^{n-1}(d + 2)$ sağlanır.
- (3) $FDSC_n$ çizgesi $2^{\frac{n}{2}}$ tane $FDSC_{\frac{n}{2}}$ altçizge olacak şekilde modüllere parçalanabilir.
- (4) $FDSC_n$ çizgesindeki minimum uzunluklu çevrenin boyutu 3'e eşittir.
- (5) $FDSC_n$ çizgesindeki her bir $FDSC_{\frac{n}{2}}$ modülü bir süper tepe olarak temsil edilirse, $K_{2^{\frac{n}{2}}}$ tam çizgesi elde edilir.

Yardımcı Teorem 3.0.6 (Kim et al., 2019) Her $i \in N$ için $FDSC_n$ çizgesinin G_i modülünün adresi B_i olsun. Eğer $i, j \in N$ ve $i \neq j$ olmak üzere $B_i = \overline{B_j}$ ise G_i ve G_j modülleri $(B_i B_i, B_j B_j)$ ve $(B_j B_i, B_i B_j)$ şeklindeki iki ayrıtı ile bağlıdır. Aksi halde $B_i \neq \overline{B_j}$ ise G_i ve G_j modülleri sadece $(B_j B_i, B_i B_j)$ ayrıtı ile bağlıdır.

Yardımcı Teorem 3.0.7 (You et al., 2023) $G_1, G_2, \dots, G_{2^{\frac{n}{2}}}$, $FDSC_n$ çizgesinin her biri $2^{\frac{n}{2}}$ tepeli $2^{\frac{n}{2}}$ tane modülü olsun. Keyfi $1 \leq i \leq 2^{\frac{n}{2}}$ için G_i modülünden $u = B_i B_i$ tepesi ele alınsın. $V(G_i) - \{u\}$ kümesindeki her tepe, $1 \leq i \neq j \leq 2^{\frac{n}{2}}$ olmak üzere bir G_j modülüne $e(n)$ -ayrıtı ile bağlıdır. G_i modülünden $v = \overline{B_i} B_i$ tepesi ele alınsın. u ve v tepeleri $i \neq j \neq k$ olmak üzere $\overline{B_i}$ adresli G_k modülündeki farklı iki tepeye $e(n)$ -ayrıtları ile bağlıdır.

4. ELDE EDİLEN SONUÇLAR

Bu bölümde, bir hiperküp varyantı olan katlı-divide-and-swap küpün yapısal bağlantılılık ve altyapısal bağlantılılık açısından güvenilirlik analizi yapılmıştır. İlk olarak, ispatlarda kolaylık sağlayacak iki yardımcı teorem verilmiştir.

Yardımcı Teorem 3.0.6 gereğince $B_i = \overline{B}_j$ ise $B_j B_j = \overline{B}_i \overline{B}_i$ ve $B_i B_j = B_i \overline{B}_i$, sırasıyla $B_i B_i$ ve $B_j B_i = \overline{B}_i B_i$ tepelerinin dış komşularıdır. Böylece Yardımcı Teorem 3.0.6 ve Yardımcı Teorem 3.0.7 sayesinde aşağıdaki yardımcı teorem kolaylıkla elde edilir.

Yardımcı Teorem 4.0.1 $i \in N$ olmak üzere $FDSC_n$ çizgesindeki B_i adresli herhangi bir G_i modülü için aşağıdaki sonuçlar geçerlidir.

- (1) G_i modülündeki her tepenin $i \neq j$ olmak üzere G_j modülünde sadece bir dış komşusu vardır.
- (2) $B_i B_i$ ve $\overline{B}_i B_i$ tepelerinin dış komşuları sırasıyla \overline{B}_i adresli aynı modüldeki $\overline{B}_i \overline{B}_i$ ve $B_i \overline{B}_i$ tepeleridir.
- (3) $V(G_i) - \{B_i B_i, \overline{B}_i B_i\}$ tepeler kümesinden herhangi iki tepenin dış komşuları farklı modüldedir.
- (4) Farklı iki modül arasındaki çapraz ayrıt sayısı 1 veya 2'dir.

Yardımcı Teorem 4.0.2 $u = B_i B_i$ (sırasıyla $u = \overline{B}_i \overline{B}_i$) ve $v = \overline{B}_i B_i$ (sırasıyla $v = B_i \overline{B}_i$) tepelerinin B_i (sırasıyla \overline{B}_i) adresli G_i modülünde ortak komşuları yoktur.

İspat. Genelliği kaybetmeden $u = B_i B_i$ ve $v = \overline{B}_i B_i$ olsun. Bu tepelerin açık komşulukları $N(u) = \{u_1, u_2, \dots, u_{d+1}, u_f\}$ ve $N(v) = \{v_1, v_2, \dots, v_{d+1}, v_f\}$ kümeleri olsun. Her $j, k \in \{1, 2, \dots, d+1, f\}$ için $u_j \neq v_k$ olduğunu göstermek yeterlidir. Yardımcı Teorem 4.0.1 (1,2) ile u ve v tepelerinin dış komşuları için $u_{d+1} \neq v_{d+1}$ sağlanır. Bu nedenle u ve v tepelerinin iç komşuları ele alınsın. C ve D , $\frac{n}{4}$ uzunluğunda ikili dizi olmak üzere $B_i = CD$ olsun. Böylece $u = CDB_i$ ve $v = \overline{C} \overline{D} B_i$ olarak yazılır. $FDSC_n$ tanımından, bazı $j, k \in \{1, 2, \dots, d, f\} - \{2\}$ için u_j ve v_k tepelerinin en sağ $\frac{3n}{4}$ basamağı sırasıyla DB_i ve $\overline{D} B_i$ şeklindedir. $D \neq \overline{D}$ olduğundan $j, k \in \{1, 2, \dots, d, f\} - \{2\}$ için $u_j \neq v_k$ elde edilir. $j = k = 2$ olsun.

Eğer $C = D$ ise $u_2 = \overline{C} \overline{D} B_i = v$ ve $v_2 = C D B_i = u$ olmaktadır. Yani $u_2 \neq v_2$ eşitsizliğine ulaşılır. Eğer $C \neq D$ ise $u_2 = D C B_i$ ve $v_2 = \overline{D} \overline{C} B_i$ şeklindedir. $D C \neq \overline{D} \overline{C}$ olduğundan dolayı $u_2 \neq v_2$ elde edilir. Böylelikle u ve v tepelerinin ortak komşularının olmadığı görülür. \square

4.1 Yıldız-Yapı Bağlantılılık ve Yıldız-Altyapı Bağlantılılık

Bu bölümde $1 \leq m \leq d + 2$ olmak üzere $FDSC_n$ çizgesinin $K_{1,m}$ -yapı bağlantılılık ve $K_{1,m}$ -altyapı bağlantılılık sayıları incelenecektir. İlk olarak $FDSC_n$ çizgesinin K_1 -yapı bağlantılılık ve K_1 -altyapı bağlantılılık değeri üzerinde durulacaktır. $\kappa(FDSC_n) = d + 2$ (Zhao ve Chang, 2023) eşitliği bilindiği ve herhangi bir G çizgesi için $\kappa(G; K_1) = \kappa^s(G; K_1) = \kappa(G)$ olduğundan aşağıdaki teorem yazılabilir.

Teorem 4.1.1 $d \geq 1$ tamsayı ve $n = 2^d$ olmak üzere $\kappa(FDSC_n; K_1) = \kappa^s(FDSC_n; K_1) = d + 2$ eşitliği sağlanır.

Genel teoreme geçmeden önce $n = 2^d$ olmak üzere $d \in \{1, 2\}$ yani $n \in \{2, 4\}$ için $FDSC_n$ çizgesinin $K_{1,1}$ -yapı bağlantılılık ve $K_{1,1}$ -altyapı bağlantılılık değeri incelenecektir.

Yardımcı Teorem 4.1.2 $n \in \{2, 4\}$ için $A_1 \subseteq \{x \mid x \in V(FDSC_n)\}$ ve $A_2 \subseteq \{\{y, z\} \mid (y, z) \in E(FDSC_n)\}$ olmak üzere $|A_1| + |A_2| \leq 1$ olduğunda $FDSC_n - (A_1 \cup A_2)$ çizgesi bağlantılıdır.

İspat. Teorem 3.0.3 ile $FDSC_n$ çizgesinin bağlantılılık sayısı $d + 2$ olduğundan, $|A_2| = 0$ ise $FDSC_n - (A_1 \cup A_2)$ çizgesinin bağlantılı olduğu kolaylıkla görülmektedir. O halde, $|A_1| = 0$ ve $|A_2| = 1$ olsun. $\{y, z\} \in A_2$ olarak alınsın.

- (a) $FDSC_n$ çizgesi $n = 2$ için K_4 tam çizgesine izomorf olduğundan $FDSC_2 - (A_1 \cup A_2)$ çizgesi bir bileşene sahiptir ve bu bileşen $K_{1,1}$ çizgesine izomorftur. Bu nedenle, $FDSC_2 - (A_1 \cup A_2)$ çizgesi bağlantılıdır.
- (b) $FDSC_n$ çizgesi $n = 4$ için her biri K_4 çizgesine izomorf olacak şekilde 4 tane G_1, G_2, G_3 ve G_4 modülünü içermektedir.

İspatın devamında iki durum söz konusudur:

- Herhangi bir $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ için $y \in V(G_i)$ ve $z \in V(G_i)$ olsun. Genelliği kaybetmeden $i = 1$ olarak alınsın. Eğer $FDSC_4 - (A_1 \cup A_2)$ çizgesindeki G_1 modülü gözardı edilirse, $\bigcup_{i=2}^4 G_i$ tarafından etkilenmiş altçizge Yardımcı Teorem 3.0.5 (5) ile K_3 tam çizgesine izomorftur. Yani, $\bigcup_{i=2}^4 G_i$ tarafından etkilenmiş altçizge bağlantılıdır.

$G_1 - \{y, z\}$ çizgesi $K_{1,1}$ çizgesine izomorftur ve $K_{1,1}$ çizgesinin her tepesi bazı $i \in \{2, 3, 4\}$ için G_i modülündeki bir tepe ile bağlıdır. Dolayısıyla, $FDSC_4 - (A_1 \cup A_2)$ çizgesi bağlantılıdır.

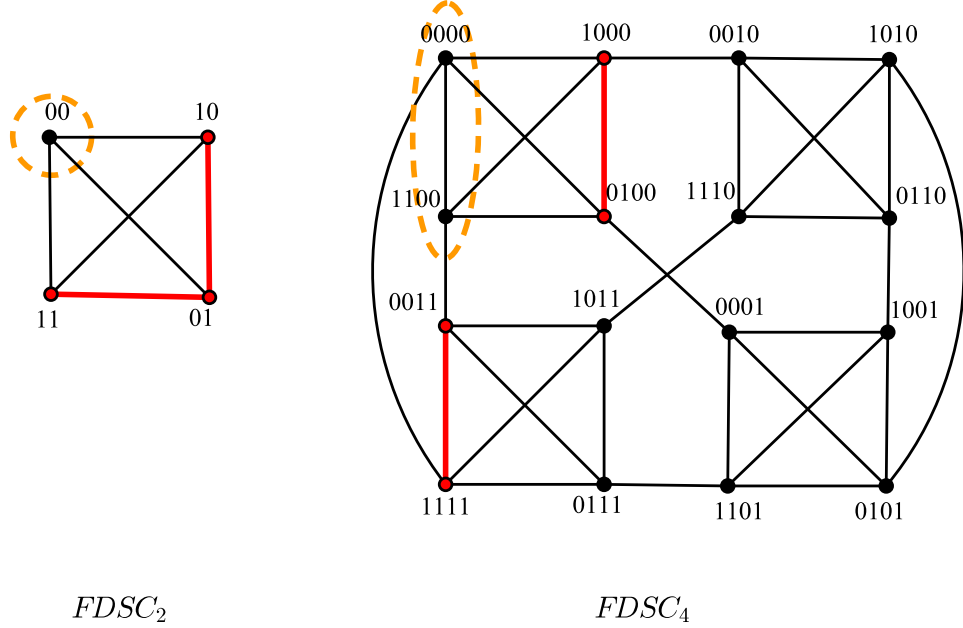
- $i \neq j$ olmak üzere herhangi $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$ için $y \in G_i$ ve $z \in G_j$ olsun. Genelliği kaybetmeden $i = 1$ ve $j = 2$ olarak alınsın. Eğer $FDSC_4 - (A_1 \cup A_2)$ çizgesindeki G_1 ve G_2 modülleri gözardı edilirse, $G_3 \cup G_4$ tarafından etkilenmiş altçizge Yardımcı Teorem 3.0.5 (5) ile $K_{1,1}$ çizgesine izomorf olup bağlantılıdır. Eğer G_i ve G_j modülleri arasında iki tane çapraz ayrıt var ise, $FDSC_4[V(G_i) \cup V(G_j) - \{y, z\}]$ çizgesi bağlantılıdır ve K_3 çizgesine izomorf olan bir altçizgesi vardır. Eğer G_i ve G_j modülleri arasında bir tane çapraz ayrıt var ise, $FDSC_4[V(G_i) \cup V(G_j) - \{y, z\}]$ çizgesi her biri K_3 çizgesine izomorf olan iki tane bileşene sahiptir. Her iki bileşendeki her tepenin $i \in \{3, 4\}$ olmak üzere bazı G_i modülünde tam olarak 1 tane dış komşusu olduğundan, $FDSC_4 - (A_1 \cup A_2)$ çizgesi bağlantılıdır. \square

Yardımcı Teorem 6 ile $\kappa^s(FDSC_n; K_{1,1}) \geq 2$ eşitsizliği elde edilir. $\kappa(FDSC_n; K_{1,1}) \geq \kappa^s(FDSC_n; K_{1,1})$ eşitsizliğinden ise $\kappa(FDSC_n; K_{1,1}) \geq 2$ eşitsizliği elde edilir.

Yardımcı Teorem 4.1.3 $n \in \{2, 4\}$ için $\kappa(FDSC_n; K_{1,1}) \leq 2$ ve $\kappa^s(FDSC_n; K_{1,1}) \leq 2$ eşitsizliği sağlanır.

İspat. $n = 2$ için $FDSC_2$ çizgesi K_4 tam çizgesine izomorftur. $\mathcal{F} = \{\{10, 01\}, \{11, 01\}\}$ olarak alınsın. $n = 4$ için $FDSC_4$ çizgesi her biri K_4 tam çizgesine izomorf olan 4 tane modülden oluşmaktadır. $\mathcal{F} = \{\{0011, 1111\}, \{1000, 0100\}\}$ olarak alınsın (Bkz. Şekil 4.1). Her iki durum için $FDSC_n - \mathcal{F}$ çizgesi bağlantısızdır. Bu nedenle, $\kappa(FDSC_n; K_{1,1}) \leq 2$

olup $\kappa(FDSC_n; K_{1,1}) \geq \kappa^s(FDSC_n; K_{1,1})$ eşitsizliğinden $\kappa^s(FDSC_n; K_{1,1}) \leq 2$ eşitsizliği elde edilir. \square



Şekil 4.1 $FDSC_2$ ve $FDSC_4$ için $K_{1,1}$ -yapı-kesim küme

Yukarıdaki iki yardımcı teorem birleştirilerek $n \in \{2, 4\}$ için $\kappa(FDSC_n; K_{1,1}) = \kappa^s(FDSC_n; K_{1,1}) = 2$ sonucuna ulaşılır.

Şimdi ise $d \geq 3$ olmak üzere $FDSC_n$ çizgesinin $K_{1,1}$ -yapı bağlantılılık ve $K_{1,1}$ -altyapı bağlantılılık değeri üzerine ilk ana sonucu ispatlamak için aşağıdaki kullanışlı iki yardımcı teorem gösterilecektir.

Yardımcı Teorem 4.1.4 $\{x \mid x \in V(FDSC_n)\}$ kümesinin bir altkümesi A_1 ve $\{\{y, z\} \mid (y, z) \in E(FDSC_n)\}$ kümesinin bir altkümesi A_2 olmak üzere $d \geq 3$ için $|A_1| + |A_2| \leq d$ ve $|A_2| \leq d - 1$ olduğunda $FDSC_n - (A_1 \cup A_2)$ çizgesi bağlantılıdır.

İspat. $FDSC_n - (A_1 \cup A_2)$ çizgesinin bağlantısız olduğu kabul edilsin ve geriye kalan çizgenin en küçük bileşeni C olsun. $FDSC_n$ çizgesinin süper bağlantılılık değerinin $2d$ olduğu bilinmektedir. Yani, $FDSC_n$ çizgesini izole tepe olmaksızın bağlantısız yapmak için en az $2d$ tepe silinmelidir. $|V(A_1 \cup A_2)| \leq 2d - 1$ eşitsizliğinden ve $FDSC_n - (A_1 \cup A_2)$ çizgesi bağlantısız olduğundan $|V(C)| = 1$ elde edilir. Bu nedenle $V(C) = \{u\}$ olsun. $FDSC_n$ çizgesinin tanımı gereğince herhangi $v, w \in N_{FDSC_n}(u)$

tepeleri için $|N_{FDSC_n}(v) \cap N_{FDSC_n}(w) - \{u\}| \leq 1$ eşitsizliği sağlanır. $N_{FDSC_n}(u)$ kümesinde üç tane p, q, r tepeleri vardır. $\{p, q, r\}$ tarafından etkilenmiş altçizgesi K_3 çizgesine izomorf ve $N_{FDSC_n}(u) - \{p, q, r\}$ kümesi bağımsız bir kümedir. Böylece $|N_{FDSC_n}(u) \cap V(A_1)| \leq |A_1|$ ve $|N_{FDSC_n}(u) \cap V(A_2)| \leq |A_2| + 1$ eşitsizlikleri elde edilir.

$$\begin{aligned} |N_{FDSC_n}(u) \cap V(A_1 \cup A_2)| &\leq |N_{FDSC_n}(u) \cap V(A_1)| + |N_{FDSC_n}(u) \cap V(A_2)| \\ &\leq |A_1| + |A_2| + 1 \\ &\leq d + 1 \\ &< d + 2 = |N_{FDSC_n}(u)| \end{aligned}$$

olduğundan, $N_{FDSC_n}(u) - V(A_1 \cup A_2)$ kümesinde bir t tepesi mevcuttur. Bu ise $|V(C)| = 1$ olmasıyla çelişir. Bu nedenle, $FDSC_n - (A_1 \cup A_2)$ çizgesi bağlantılıdır. \square

Yardımcı Teorem 4.1.5 $\{x \mid x \in V(FDSC_n)\}$ kümesinin bir alt kümesi A_1 ve $\{\{y, z\} \mid (y, z) \in E(FDSC_n)\}$ kümesinin bir alt kümesi A_2 olmak üzere $d \geq 3$ için $|A_1| + |A_2| \leq d$ olduğunda $FDSC_n - (A_1 \cup A_2)$ çizgesi bağlantılıdır.

İspat. Bu ifade n üzerinde tümevarım ile ispatlanacaktır. $FDSC_8$ için ifadenin doğruluğunu kontrol etmek basittir. Kabul edilsin ki bu ifade $FDSC_{\frac{n}{2}}$ için doğru olsun.

Yardımcı Teorem 4.1.4 ile $|A_2| \leq d - 1$ olduğunda geriye kalan $FDSC_n - (A_1 \cup A_2)$ çizgesinin bağlantılı olduğu bilinmektedir. Bu nedenle ispatı tamamlamak için $|A_2| = d$ ve $|A_1| = 0$ durumunu incelemek yeterlidir.

$i \in N$ olmak üzere, $FDSC_n$ çizgesinin bir G_i modülü dikkate alınarak

$$P_i = \{x \mid \{x, y\} \in A_2, x \in V(G_i), y \notin V(G_i)\},$$

$$Q_i = \{\{y, z\} \mid \{y, z\} \in A_2, y \in V(G_i), z \in V(G_i)\}$$

ve

$$R_i = \{\{p_1, p_2\} \mid \{p_1, p_2\} \in A_2 \text{ ve } p_1 \in P_i\} \cup \{\{q_1, q_2\} \mid \{q_1, q_2\} \in Q_i\}$$

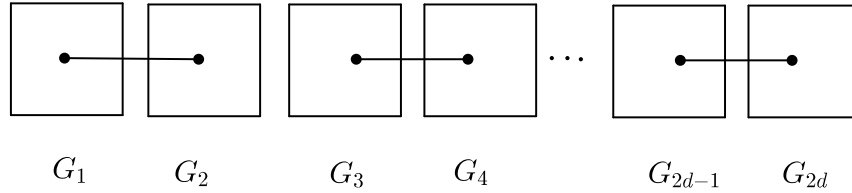
olduğu kabul edilsin. Her $i \in N$ için $|P_i| + |Q_i| \leq |A_1| + |A_2| = d$ olduğu açıktır.

Herhangi $i \in N$ için $|P_i| + |Q_i| = 0$ ise $FDSC_n - (A_1 \cup A_2)$ çizgesindeki G_i modülü bozulmamış modül olarak isimlendirilir. Yardımcı Teorem 4.0.1 (4) ile $FDSC_n - (A_1 \cup A_2)$ çizgesindeki tüm bozulmamış modüllerin geriye kalan çizgede aynı C bileşeninde bulunduğu görülür.

İspatın tamamlanması için aşağıdaki iki durumun incelenmesi gerekmektedir:

(1) Her $i \in N$ için $|P_i| + |Q_i| \leq d - 2$ olsun.

$|P_k| + |Q_k| > 0$ olan herhangi bir G_k modülü ele alınsın. Tümevarım hipotezinden $G_k - (P_k \cup Q_k)$ çizgesi bağlantılıdır. $|A_1| + |A_2| = d$ olduğundan Şekil 4.2'den $FDSC_n - (A_1 \cup A_2)$ çizgesinde en fazla $2d$ tane bozulmuş modül olduğu bilinmektedir. Yani, $FDSC_n - (A_1 \cup A_2)$ çizgesinde herhangi bir G_k modülü dışında bozulmuş olan en fazla $2d - 1$ tane modül vardır.



Şekil 4.2 $|A_1|+|A_2| = d$ olacak şekilde en fazla bozulmuş modülün olabileceği durum

$d \geq 3$ olmak üzere her G_k modülü için

$$|V(G_k)| - |V(P_k \cup Q_k)| \geq 2^{\frac{n}{2}} - 2(d - 2) > 2d - 1$$

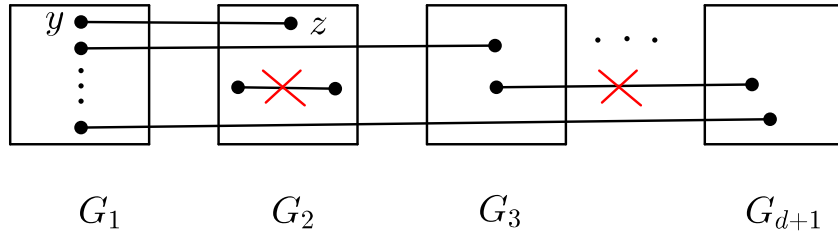
olduğundan $G_k - (P_k \cup Q_k)$ çizgesindeki bir tepe ile C bileşeninde bulunan bozulmamış modüldeki bir tepelyi bağlayan bir ayrıt vardır. Bu nedenle geriye kalan $FDSC_n - (A_1 \cup A_2)$ çizgesi bağlantılıdır.

(2) Bazı $i \in N$ değeri için $|P_i| + |Q_i| \geq d - 1$ olsun.

Genelliği kaybetmeden, $|P_1| + |Q_1| \geq d - 1$ ve $|P_1| + |Q_1| = \max\{|P_i| + |Q_i| \mid i \in N\}$ olduğu kabul edilsin. Ele alınması gereken iki alt durum vardır:

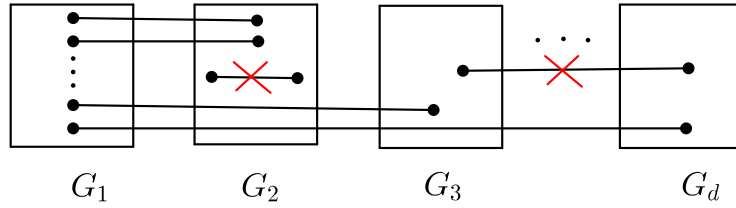
(a) Eğer $|P_1| + |Q_1| = d$ ise aşağıdaki gözlemler geçerlidir.

(F1) Her $z \in V(A_2) - V(P_1 \cup Q_1)$ tepesi için $\{y, z\} \in A_2$ olacak şekilde bir $y \in P_1$ tepesi vardır. Yani $i \neq j$ olmak üzere her $i, j \in N - \{1\}$ için $|Q_i| = 0$ ve $R_i \cap R_j = \emptyset$ olur (Bkz. Şekil 4.3).



Şekil 4.3 Yardımcı Teorem 4.1.5 için (F1) gözlemi ve bu durum için bozulmuş olan en fazla modül

(F2) Yardımcı Teorem 4.0.1 (2) ile, G_1 modülünde dış komşuları aynı modülde olan tam olarak iki tepenin var olduğu bilinmektedir. Genelliği kaybetmeden, bu tepelerin dış komşularının G_2 modülünde olduğu varsayalım. (F1) yardımıyla $|Q_2| = 0$ olduğu için $|P_2| \leq 2$ eşitsizliği sağlanır (Bkz. Şekil 4.4).



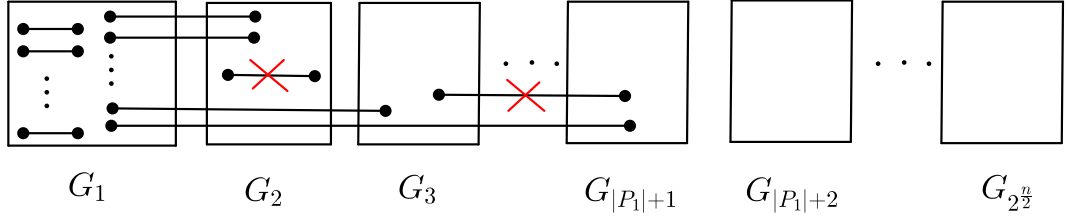
Şekil 4.4 Yardımcı Teorem 4.1.5 için (F2) gözlemi ve bu durum için bozulmuş olan en fazla modül

(F3) (F1) yardımıyla $|Q_i| = 0$ olduğundan her $i \in \{3, \dots, |P_1| + 1\}$ için $|P_i| \leq 1$ eşitsizliği sağlanır (Bkz. Şekil 4.4).

(F4) Her $i \in \{|P_1| + 2, \dots, 2^{\frac{n}{2}}\}$ için $|P_i| + |Q_i| = 0$ eşitliği geçerlidir (Bkz. Şekil 4.4).

Tümevarım hipotezinden, her $i \in N - \{1\}$ için $G_i - (P_i \cup Q_i)$ çizgesi bağlantılıdır ve en az $2^{\frac{n}{2}} - 2$ tepe içerir. Şekil 4.3'de görüldüğü üzere $FDSC_n - (A_1 \cup A_2)$ çizgesinde en fazla $d + 1$ tane bozulmuş modül vardır. $d \geq 3$ olmak üzere her $i \in N - \{1\}$ için

$$|V(G_i)| - |V(P_i \cup Q_i)| \geq 2^{\frac{n}{2}} - 2 > d$$

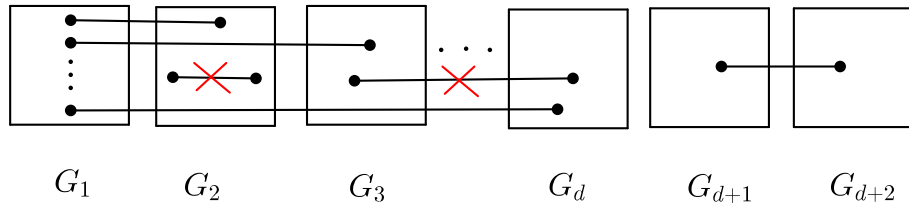


Şekil 4.5 Yardımcı Teorem 4.1.5 için (F3) ve (F4) gözlemleri

olduğundan, $G_i - (P_i \cup Q_i)$ çizgesindeki bir tepeyi C bileşenindeki bozulmamış modüldeki bir tepe ile birleştiren bir ayrıtı vardır. Dolayısıyla, $FDSC_n - G_1 - (A_1 \cup A_2)$ çizgesi bağlantılıdır.

$FDSC_n - (A_1 \cup A_2)$ çizgesinin bağlantılı olduğunu göstermek için $G_1 - (P_1 \cup Q_1)$ çizgesindeki her bileşenindeki bir tepenin bağlantılı olan $FDSC_n - G_1 - (A_1 \cup A_2)$ çizgesindeki bir tepeye komşu olduğunu göstermek yeterlidir. $G_1 - (P_1 \cup Q_1)$ çizgesinde bir u tepesi ele alınsın. u tepesinin dış komşusu olan u_{d+1} tepesi $FDSC_n - G_1 - (A_1 \cup A_2)$ çizgesindedir ve $u_{d+1} \in V(A_1 \cup A_2)$ olsun. (F1) gözlemine göre her $i \in N - \{1\}$ için $|Q_i| = 0$ olduğundan $u_{d+1} \in A_1$ olur. Bu durum $|A_1| = 0$ olması ile çelişir. O halde, $u_{d+1} \notin V(A_1 \cup A_2)$ olur. Bu durumda, $FDSC_n - G_1 - (A_1 \cup A_2)$ çizgesi ile u tepesini içeren bileşen hatasız (u, u_{d+1}) ayrıtı ile bağlıdır. $G_1 - (P_1 \cup Q_1)$ çizgesindeki her bileşen için aynı durum söz konusu olduğundan $FDSC_n - (A_1 \cup A_2)$ çizgesi bağlantılıdır.

- (b) $|P_1| + |Q_1| = d-1$ olsun. $|P_1| + |Q_1| = d-1$ ve $|A_2| = d$ olduğundan $|A_2| - |R_1| = 1$ elde edilir. Bu durumda, ya $i \in N - \{1\}$ için $|Q_i| = 1$ olacak şekilde tam olarak bir tane G_i modülü ya da $i, j \in N - \{1\}$ ve $i \neq j$ için $R_i \cap R_j \neq \emptyset$ olacak şekilde tam olarak iki tane G_i ve G_j modülü vardır. Her $i \in N$ için $|P_i| + |Q_i| \leq d-1$



Şekil 4.6 $|P_1| + |Q_1| = d-1$ olduğunda en fazla bozulmuş modülün olabileceği durum

olduğundan, tümevarım hipotezi gereğince $G_i - (P_i \cup Q_i)$ çizgesinin bağlantılı olduğu açıktır.

$|P_i| + |Q_i| \neq 0$ olan herhangi bir G_i modülü için $G_i - (P_i \cup Q_i)$ çizgesi en az

$$|V(G_i)| - |V(P_i \cup Q_i)| \geq 2^{\frac{n}{2}} - 2(d-1)$$

tepeye sahiptir. Şekil 4.6'den de görüldüğü üzere en fazla $d+2$ tane bozulmuş modül vardır. Bozulmuş modüllerin geriye kalan tepelerinin dış komşuları dikkate alınsın. Bu durumda $d \geq 3$ iken her G_i modülü için

$$2^{\frac{n}{2}} - 2(d-1) > d+1$$

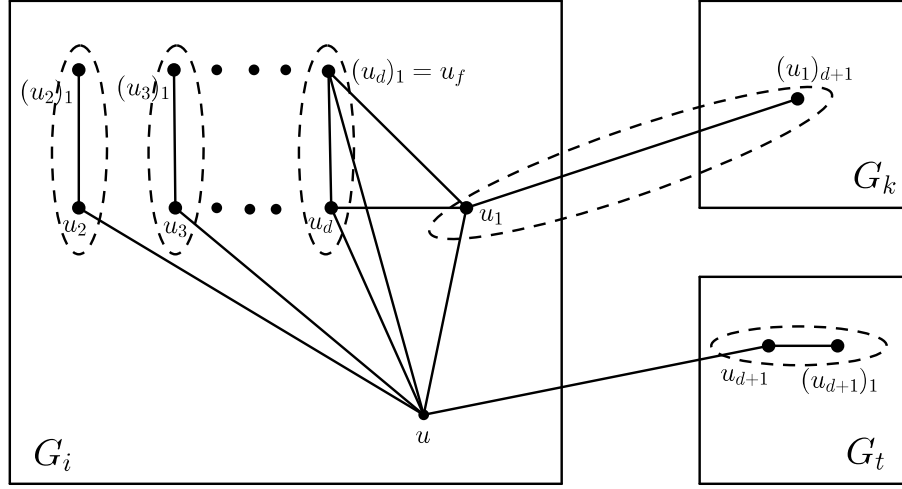
ve bir modüldeki her tepenin bir dış komşusu olduğundan $G_i - (P_i \cup Q_i)$ çizgesindeki bir tepenin dış komşusu muhakkak bozulmamış bir modülde olur. Bu nedenle, $G_i - (P_i \cup Q_i)$ çizgesindeki bir tepelyi C bileşenindeki bozulmamış modülün bir tepesine birleştiren bir ayrıt vardır. Dolayısıyla, geriye kalan $FDSC_n - (A_1 \cup A_2)$ çizgesi bağlantılıdır. \square

Aşağıdaki teoremden $d \geq 3$ olmak üzere $n = 2^d$ için $\kappa(FDSC_n; K_{1,1})$ ve $\kappa^s(FDSC_n; K_{1,1})$ değerleri belirlenmiştir.

Teorem 4.1.6 $d \geq 3$ ve $n = 2^d$ için $\kappa(FDSC_n; K_{1,1}) = \kappa^s(FDSC_n; K_{1,1}) = d+1$ eşitliği sağlanır.

İspat. $FDSC_n$ çizgesinin herhangi bir G_i modülündeki bir u tepesi ele alınsın ve $N_{FDSC_n}(u) = \{u_1, u_2, \dots, u_{d+1}, u_f\}$ olsun. $j \in \{2, \dots, d+1\}$ olmak üzere $FDSC_n[u_j, (u_j)_1]$ etkilenmiş altçizgesi F_j ile gösterilsin. Burada $(u_d)_1 = u_f$ olduğu açıktır. $FDSC_n[u_1, (u_1)_{d+1}]$ etkilenmiş altçizgesi F_1 ile gösterilsin. Her $j \in \{1, \dots, d+1\}$ için $F_j \cong K_{1,1}$ olduğu açıktır (Bkz. Şekil 4.7). Eğer $\mathcal{F} = \{F_1, F_2, \dots, F_{d+1}\}$ olarak alınırsa $FDSC_n - \mathcal{F}$ çizgesi bağlantısızdır. Bu nedenle, $\kappa(FDSC_n; K_{1,1}) \leq d+1$ eşitsizliği elde edilir.

Yardımcı Teorem 4.1.5 ile herhangi bir $K_{1,1}$ -altyapı-kesim kümesinin d 'den fazla elemana sahip olduğu bilinmektedir. Yani, $\kappa^s(FDSC_n; K_{1,1}) \geq d+1$ eşitsizliği sağlanır. $\kappa(FDSC_n; K_{1,1}) \geq \kappa^s(FDSC_n; K_{1,1})$ eşitsizliği ispatı bitirir. \square



Şekil 4.7 $FDSC_n$ çizgesi için bir $K_{1,1}$ -yapı-kesim küme

Bu bölümün geri kalanında $2 \leq m \leq d + 2$ olmak üzere $FDSC_n$ çizgesinin $K_{1,m}$ -yapı bağlantılılık ve $K_{1,m}$ -altyapı bağlantılılık değeri ele alınacaktır. İlk olarak bir alt sınır elde etmek amacıyla, aşağıdaki yardımcı teorem ispatlanmıştır.

Yardımcı Teorem 4.1.7 $d \geq 1$ tamsayı olmak üzere $n = 2^d$ için $2 \leq m \leq d + 2$ olduğunda $\kappa^s(FDSC_n; K_{1,m}) \geq \lfloor \frac{d}{2} \rfloor + 1$ eşitsizliği sağlanır.

İspat. $d = 1$ ve $d = 2$ olduğunda ifadenin geçerli olduğu kolaylıkla kontrol edilebilir. Ardından $d \geq 3$ durumunda ispata tümevarım ile devam edilmektedir. Baz adım olarak, $2 \leq m \leq 5$ için $\kappa^s(FDSC_8; K_{1,m}) \geq 2$ olduğu kolaylıkla görülür. İfadenin $FDSC_{\frac{n}{2}}$ için doğru olduğu kabul edilsin.

$FDSC_n$ çizgesinin, $|\mathcal{F}| \leq \lfloor \frac{d}{2} \rfloor$ olacak şekilde bir \mathcal{F} $K_{1,m}$ -altyapı-kesim kümesinin olduğu varsayalım. $\mathcal{F} = \{F_1, F_2, \dots, F_x\}$ kümesi, her bir F_i çizgesi $K_{1,m}$ çizgesinin bağlantılı bir altçizgesine izomorf ve $x \leq \lfloor \frac{d}{2} \rfloor$ olacak şekilde $FDSC_n$ çizgesinin altçizgelerinin bir kümesi olsun.

Her $i \in N$ için $FDSC_{\frac{n}{2}}^i$ çizgesi $FDSC_n$ çizgesinin bir modülü olmak üzere $\mathcal{F}^i = \bigcup_{F_j \in \mathcal{F}} F_j \cap FDSC_{\frac{n}{2}}^i$ olsun. Burada \mathcal{F}^i kümesinin herhangi bir elemanının $K_{1,m}$ çizgesinin bağlantılı altçizgesine izomorf olduğu açıktır. Tanım 3.0.2 yardımıyla, $|\mathcal{F}^i| \leq |\mathcal{F}| \leq \lfloor \frac{d}{2} \rfloor$ eşitsizliği sağlanır.

$T = \{i \mid \mathcal{F} \cap G_i \neq \emptyset\}$ ve $G_T = \bigcup_{i \in T} G_i$ olarak alınsın. İspat boyunca,

eğer $\mathcal{F} \cap G_i = \emptyset$ ise G_i modülü bozulmamış modül olarak adlandırılacaktır. Burada G_T kümesi, geriye kalan $FDSC_n - \mathcal{F}$ çizgesindeki bozulmuş modüllerin birleşimini gösterir. Yardımcı Teorem 4.0.1 (4) ile $FDSC_n - G_T$ çizgesinin bağlantılı olduğu görülmektedir.

İncelenmesi gereken iki durum bulunmaktadır.

Durum 1. Her $i \in N$ için $G_i - \mathcal{F}^i$ çizgesi bağlantılı olsun.

$|\mathcal{F}| \leq \lfloor \frac{d}{2} \rfloor$ olduğundan Yardımcı Teorem 4.0.1 ile $FDSC_n - \mathcal{F}$ çizgesinde en fazla $2\lfloor \frac{d}{2} \rfloor$ bozulmuş modül mevcuttur. Herhangi bir $i \in T$ için $G_i - \mathcal{F}^i$ çizgesindeki tepelerin dış komşuları dikkate alınsın. Bu durumda $d \geq 3$ olmak üzere her $i \in T$ için

$$\begin{aligned} |V(G_i - \mathcal{F}^i)| &\geq |V(G_i)| - |V(K_{1,m})| \times |\mathcal{F}^i| \\ &\geq 2^{\frac{n}{2}} - (m+1)\lfloor \frac{d}{2} \rfloor \\ &> 2\lfloor \frac{d}{2} \rfloor - 1 \end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır. Bu nedenle, her $i \in T$ için $G_i - \mathcal{F}^i$ çizgesindeki bir tepenin dış komşusu $FDSC_n - G_T$ çizgesinde olup $G_i - \mathcal{F}^i$ çizgesi ile $FDSC_n - G_T$ çizgesini bağlayan hatasız bir ayrıt vardır. Dolayısıyla, $FDSC_n - \mathcal{F}$ çizgesi bağlantılıdır, bu ise kabul ile çelişir.

Durum 2. Bazı $i \in N$ için $G_i - \mathcal{F}^i$ çizgesi bağlantısız olsun ve $i = 1$ olarak alınsın.

Tümevarım hipotezinden $|\mathcal{F}^1| \geq \lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor + 1$ eşitsizliği elde edilir. Kabulden ve Tanım 3.0.2'den dolayı $|\mathcal{F}^1| \leq |\mathcal{F}| \leq \lfloor \frac{d}{2} \rfloor$ olduğundan $\lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor + 1 \leq \lfloor \frac{d}{2} \rfloor$ eşitsizliği sadece d çift olduğunda geçerlidir. O halde ispatın devamında d çift olduğu kabul edilsin. Böylece d çift olduğunda $\lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor + 1 = \lfloor \frac{d}{2} \rfloor$ olduğundan, $d \geq 4$ olduğunda $|\mathcal{F}^1| = |\mathcal{F}| = \frac{d}{2}$ eşitliği sağlanır. Bu durumda her $F_i \in \mathcal{F}$ için $F_i \cap G_1 \neq \emptyset$ olur ve G_1 modülü haricinde en fazla $\frac{d}{2}$ bozulmuş modül vardır.

Yardımcı Teorem 4.0.1 ile ve her $F_i \in \mathcal{F}$ için $F_i \cap G_1 \neq \emptyset$ olduğundan, $i \in T - \{1\}$ için $|\mathcal{F}^i|$ değeri 1 ya da 2 olur. Ayrıca her $F_i \in \mathcal{F}$ için $F_i \cap G_1 \neq \emptyset$ olduğundan $i \in T - \{1\}$ için $|\mathcal{F}^i| = 2$ durumunu sağlayan en fazla bir modül vardır. Genelliği kaybetmeden, $|\mathcal{F}^2|$ değerinin 1 veya 2 olduğu kabul edilsin. Bu nedenle $i \in T - \{1, 2\}$ için $|\mathcal{F}^i| = 1$ olur. Belirtmek gerekir ki, herhangi bir $i \in T - \{1\}$ için G_i modülünde en fazla $2m$ tane hatalı tepe mevcuttur. Yani herhangi bir $i \in T - \{1\}$ için $|V(\mathcal{F}^i)| \leq 2m$ eşitsizliği sağlanır.

Şimdi geriye kalan $FDSC_n - \mathcal{F}$ çizgesindeki her bir modülün bağlantılılığı dikkate alınsın.

Her $i \in T - \{1\}$ için $|\mathcal{F}^i| \leq 2$ olduğu bilinmektedir. Diğer taraftan tümevarım hipotezinden $\kappa^s(FDSC_{\frac{n}{2}}; K_{1,m}) \geq \lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor + 1$ olur ve $d > 4$ için $\lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor + 1 > 2$ eşitsizliği sağlanır. Böylelikle $d \geq 6$ olduğunda her $i \in T - \{1\}$ için $G_i - \mathcal{F}^i$ çizgesi bağlantılıdır.

Eğer $d \geq 6$ ise, her $i \in T - \{1\}$ için

$$|V(G_i - \mathcal{F}^i)| \geq 2^{\frac{n}{2}} - 2m > \frac{d}{2}$$

sağlanır. $FDSC_n - \mathcal{F}$ çizgesinde G_1 modülü haricinde en fazla $\frac{d}{2}$ bozulmuş modül olduğundan, her $i \in T - \{1\}$ için $G_i - \mathcal{F}^i$ çizgesindeki bir tepenin dış komşusu $FDSC_n - G_T$ çizgesindedir. Yani, $G_i - \mathcal{F}^i$ çizgesi ile $FDSC_n - G_T$ çizgesini bağlayan hatasız bir ayrıt vardır. Dolayısıyla, $FDSC_n - G_1 - \mathcal{F}$ çizgesi bağlantılıdır.

$d = 4$ olsun. O halde, tümevarım hipotezinden $\kappa^s(FDSC_{\frac{n}{2}}; K_{1,m}) \geq \lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor + 1 = 2$ elde edilir. Eğer $|\mathcal{F}^2| = 1$ ise, her $i \in T - \{1\}$ için $|\mathcal{F}^i| \leq 1$ olup $G_i - \mathcal{F}^i$ çizgesi bağlantılıdır. $|\mathcal{F}| \leq 2$ ve her $F_i \in \mathcal{F}$ için $F_i \cap G_1 \neq \emptyset$ olduğundan, $FDSC_n - \mathcal{F}$ çizgesinde G_1 modülü haricinde en fazla 2 tane bozulmuş modül vardır. Bu modüller G_2 ve G_3 olsun. Her $i \in \{2, 3\}$ için

$$|V(G_i - \mathcal{F}^i)| \geq 2^{\frac{n}{2}} - m = 2^8 - m > 2$$

olduğundan, $G_i - \mathcal{F}^i$ çizgesindeki bir tepenin dış komşusu $FDSC_n - G_T$ çizgesindedir. Yani $FDSC_n - G_1 - \mathcal{F}$ çizgesi bağlantılıdır. Eğer $|\mathcal{F}^2| = 2$ ise $G_2 - \mathcal{F}^2$ çizgesi bağlantılı olabilir veya olmayabilir. $|\mathcal{F}| \leq 2$ ve her $F_i \in \mathcal{F}$ için $F_i \cap G_1 \neq \emptyset$ olduğundan, G_1 ve G_2 dışındaki modüller bozulmamıştır. Yani, $FDSC_n - G_1 - G_2$ çizgesi bağlantılıdır. $G_2 - \mathcal{F}^2$ çizgesinde herhangi bir u tepesi ele alınsın. u tepesinin dış komşusu olan u_{d+1} tepesi $FDSC_n - G_1 - G_2$ çizgesindedir. Dolayısıyla, $FDSC_n - G_1 - G_2$ çizgesi ile u tepesini içeren bileşen hatasız (u, u_{d+1}) ayrıtı ile bağlıdır. $G_2 - \mathcal{F}^2$ çizgesindeki her bileşen için aynı durum söz konusu olduğundan $FDSC_n - G_1 - \mathcal{F}$ çizgesi bağlantılıdır.

İspatı tamamlamak için G_1 çizgesinin tepeleri dikkate alınsın. $u = B_1B_1$ ve $v = \overline{B_1}B_1$ tepeleri G_1 modülünde B_1 adresli iki tepe olsun. Yardımcı Teorem 4.0.1

(2) ile u_{d+1} ve v_{d+1} tepelerinin aynı modülde oldukları açıktır. Bu modül G_2 olsun. $G_1 - \mathcal{F}^1$ çizgesindeki C bileşeni için $|V(C)| > 1$ ve $|V(C)| = 1$ durumları ayrı ayrı incelenecektir. Burada, C bileşeni ile $FDSC_n - G_1 - \mathcal{F}$ çizgesini bağlayan hatasız bir ayrıtın olduğunu göstermek yeterlidir.

(1) $|V(C)| > 1$ olsun. Bu durumda üç ihtimal vardır.

(a) Hem u hem de v tepesi C bileşenindedir.

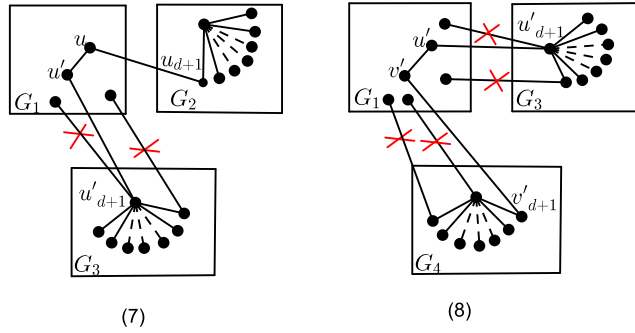
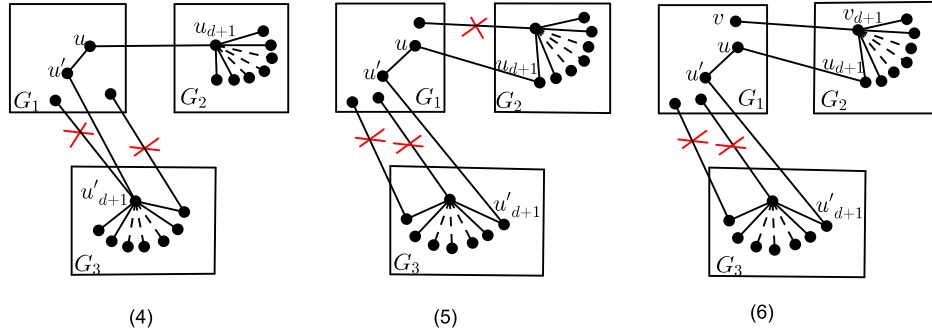
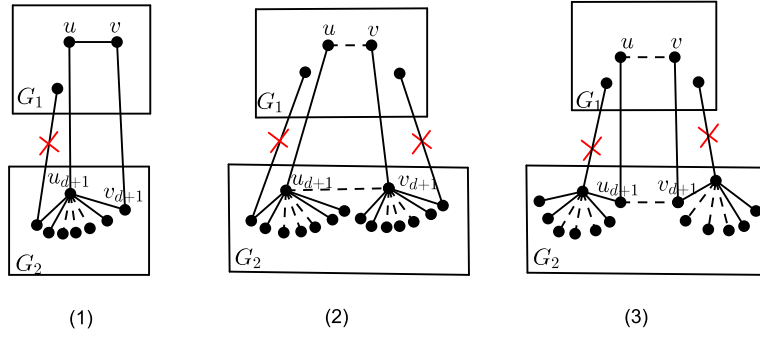
Eğer C bileşeninde w_{d+1} dış komşusu $V(\mathcal{F})$ kümesinde olmayan bir w tepesi varsa C bileşeni ile $FDSC_n - G_1 - \mathcal{F}$ çizgesi hatasız (w, w_{d+1}) ayrıtı ile bağlı olur. Bu sebeple, hem u_{d+1} hem de v_{d+1} tepesi $V(\mathcal{F})$ kümesindedir.

(i) u_{d+1} ve v_{d+1} tepeleri aynı $F_i \in \mathcal{F}$ hatalı alt kümesinde olsun.

Yardımcı Teorem 4.0.2'e göre u_{d+1} ve v_{d+1} tepeleri ortak komşu tepeye sahip olamayacağından, hem u_{d+1} hem de v_{d+1} tepesi F_i çizgesinin yaprak tepeler kümesinde olamaz. Genelliği kaybetmeden, F_i çizgesinin merkez tepesi u_{d+1} ve yaprak tepesi v_{d+1} olsun. Böylece, u_{d+1} ve v_{d+1} tepeleri komşu olup bu u ve v tepelerinin de komşu olduğu anlamına gelir. Yardımcı Teorem 4.0.1 ile u tepesinin tek dış komşu tepesinin u_{d+1} tepesi olduğu bilinmektedir. Bu nedenle, F_i çizgesindeki tüm tepeler G_2 modülündedir. Ayrıca Yardımcı Teorem 4.0.1 (4) ile u_{d+1} tepesinin v_{d+1} dışındaki hiçbir komşusunun G_1 modülünde bir dış komşusu olmayacağı görülür (Bkz. Şekil 4.8 (1)). Böylece $F_i \cap G_2 \neq \emptyset$ ve $F_i \cap G_1 = \emptyset$ olur. Bu da $|\mathcal{F}^1| = |\mathcal{F}| = \frac{d}{2}$ olmasıyla çelişir.

(ii) u_{d+1} ve v_{d+1} tepeleri sırasıyla \mathcal{F} kümesindeki farklı F_i ve F_j hatalı altkümelerinde bulunsun. O halde iki durum mevcuttur.

- Eğer u_{d+1} tepesi F_i altçizgesinin merkez tepesi ise, Yardımcı Teorem 4.0.1 (1) ile F_i çizgesindeki tüm tepelerin G_2 modülünde olduğu açıktır. Ayrıca, Yardımcı Teorem 4.0.1 ile u_{d+1} tepesinin v_{d+1} (eğer u_{d+1} ve v_{d+1} komşu tepeler ise) dışındaki komşularının G_1 modülünde bir dış komşusu olamaz. Benzer şekilde, v_{d+1} tepesinin F_j çizgesinde merkez tepe ya da yaprak tepe olması durumunda F_j çizgesindeki tüm tepeler G_2 modülündedir ve F_j çizgesindeki v_{d+1} tepesi dışındaki tüm tepelerin G_1 modülünde bir dış komşusu olamaz (F_j çizgesindeki v_{d+1} tepesinin olası iki durumundan biri için bkz. Şekil 4.8 (2)).



Şekil 4.8 Yardımcı Teorem 4.1.7 için açıklama

• Eğer u_{d+1} tepesi F_i altçizgesinin bir yaprak tepesi ise Yardımcı Teorem 4.0.1 ile F_i çizgesindeki diğer tepelerin G_1 modülünde olamayacağı görülür. Ayrıca Yardımcı Teorem 4.0.1'den F_i altçizgesinin merkez tepesinin ve merkez tepenin hiçbir komşusunun G_1 modülünde bir dış komşusu olamaz. Benzer şekilde, v_{d+1} tepesinin F_j çizgesinde merkez tepe ya da yaprak tepe olması durumunda F_j çizgesindeki tüm tepeler G_2 modülündedir ve F_j çizgesindeki v_{d+1} tepesi dışında tüm tepelerin G_1 modülünde bir dış komşusu olamaz (F_j çizgesindeki v_{d+1} tepesinin olası iki durumundan biri için bkz. Şekil 4.8 (3)). Böylece her iki durumda da $F_i \cap G_2 \neq \emptyset$ ve $F_i \cap G_1 = \emptyset$ olur, bu $|\mathcal{F}^1| = |\mathcal{F}| = \frac{d}{2}$ olmasıyla çelişir.

(b) u ve v tepelerinin tam olarak bir tanesi C bileşeninde bulunsun.

Genelliği kaybetmeden $u \in V(C)$ olduğu kabul edilsin. v tepesi C bileşeninde olmadığından v tepesinin $V(\mathcal{F})$ kümesinde olduğu açıktır. Fakat, v_{d+1} tepesi $V(\mathcal{F})$ kümesinde olmak zorunda değildir. $|V(C)| > 1$ olduğu için C bileşeninde u ile komşu başka bir u' tepesi vardır. Eğer C bileşeninde $w_{d+1} \notin V(\mathcal{F})$ olan bir w tepesi varsa C bileşeni ile $F D S C_n - G_1 - \mathcal{F}$ çizgesi hatasız (w, w_{d+1}) ayrıtı ile bağlıdır. Bu nedenle, hem u_{d+1} hem de u'_{d+1} tepeleri $V(\mathcal{F})$ kümesindedir. Ayrıca Yardımcı Teorem 4.0.1, u_{d+1} ve u'_{d+1} tepelerinin farklı modül ve farklı hatalı altkümelerde olduğunu ifade eder. Bu modüller sırasıyla G_2 ve G_3 , hatalı altkümeler ise sırasıyla F_i ve F_j olsun. u_{d+1} ve u'_{d+1} tepelerinin durumlarına göre dört olasılık vardır.

(i) u_{d+1} tepesi F_i altçizgesinin merkez tepesi olsun.

Yardımcı Teorem 4.0.1 ile F_i altçizgesinin hiçbir tepesinin G_1 modülünde olmadığı görülür. Bu durumda v_{d+1} tepesi F_i altçizgesinin yaprak tepesi olabilir. Böylece, Yardımcı Teorem 4.0.1 (2-4) ile u_{d+1} tepesinin v_{d+1} dışındaki hiçbir komşusunun G_1 modülünde bir dış komşusu olamayacağı görülür (u'_{d+1} tepesinin F_j çizgesindeki olası iki durumundan biri için bkz. Şekil 4.8 (4)). Buradan $F_i \cap G_2 \neq \emptyset$ ve $F_i \cap G_1 = \emptyset$ elde edilir ve bu $|\mathcal{F}^1| = |\mathcal{F}| = \frac{d}{2}$ olmasıyla çelişir.

(ii) u_{d+1} tepesi F_i altçizgesinin yaprak tepesi olsun.

v_{d+1} tepesi F_i altçizgesinin merkez tepesi olabilir veya olmayabilir. Eğer v_{d+1} tepesi F_i altçizgesinin merkez tepesi değil ise Yardımcı Teorem 4.0.1 ile F_i altçizgesinin hiçbir tepesinin G_1 modülünde olmadığı ve F_i altçizgesinin merkez tepesinin u_{d+1} dışındaki hiçbir komşusunun G_1 modülünde bir dış komşusu olamayacağı görülür (Bkz. Şekil 4.8 (5)). Eğer v_{d+1} tepesi F_i altçizgesinin merkez tepesi ise, v_{d+1} tepesinin dış komşusu olan v tepesi G_1 modülünde olup F_i altçizgesindedir (Bkz. Şekil 4.8 (6)). Yani, bu durum için $F_i \cap G_1 \neq \emptyset$ ve $F_i \cap G_2 \neq \emptyset$ olur. Bu durum için F_i altçizgesinde tepelerin durumları çelişki oluşturmaz. O halde, v_{d+1} tepesinin her iki durumu için u'_{d+1} tepesinin F_j çizgesindeki olası iki durumu incelenmelidir.

- u'_{d+1} tepesi F_j altçizgesinin yaprak tepesi olsun.

Yardımcı Teorem 4.0.1 ile F_j altçizgesinin hiçbir tepesinin G_1 modülünde

olmadığı görülür. Ayrıca, F_j altçizgesinin merkez tepesinin u'_{d+1} dışındaki hiçbir komşusunun G_1 modülünde bir dış komşusu olamayacağı görülür (Bkz. Şekil 4.8 (5,6)). Böylece, $F_j \cap G_3 \neq \emptyset$ ve $F_j \cap G_1 = \emptyset$ olur ve bu $|\mathcal{F}^1| = |\mathcal{F}| = \frac{d}{2}$ olmasıyla çelişir.

- u'_{d+1} tepesi F_j altçizgesinin merkez tepesi olsun.

Yardımcı Teorem 4.0.1 ile F_j altçizgesinin hiçbir tepesinin G_1 modülünde olmadığı ve u'_{d+1} tepesinin hiçbir komşusunun G_1 modülünde bir dış komşusu olamayacağı görülür (Bkz. Şekil 4.8 (7)). Böylece, $F_j \cap G_3 \neq \emptyset$ ve $F_j \cap G_1 = \emptyset$ olur ve bu $|\mathcal{F}^1| = |\mathcal{F}| = \frac{d}{2}$ olmasıyla çelişir.

(c) Ne u ne de v tepesi C bileşeninde olsun.

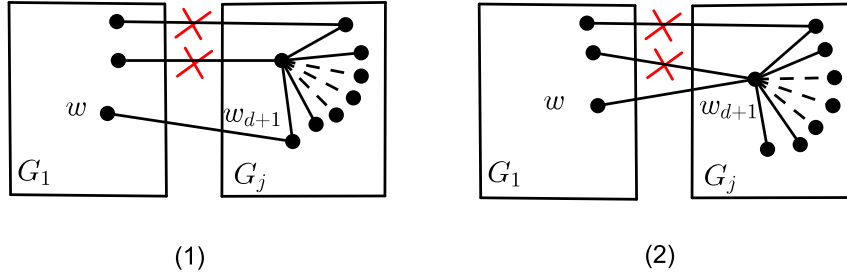
Bu durumda C bileşeninde $u = B_1B_1$ ve $v = \overline{B_1}B_1$ tepelerinden farklı komşu iki u' ve v' tepeleri mevcuttur. Eğer C bileşeninde $w_{d+1} \notin V(\mathcal{F})$ şeklinde bir w tepesi varsa C bileşeni ile $FDSC_n - G_1 - \mathcal{F}$ çizgesi hatasız (w, w_{d+1}) ayrıtı ile bağlıdır. Bu nedenle, hem u'_{d+1} hem de v'_{d+1} tepesi $V(\mathcal{F})$ kümesindedir. Ayrıca Yardımcı Teorem 4.0.1 gereğince, u'_{d+1} ve v'_{d+1} tepeleri farklı modül ve farklı hatalı altkümelerdedir. Bu modüller sırayla G_3 ve G_4 , hatalı altkümeler ise sırasıyla F_i ve F_j olsun. u'_{d+1} tepesi F_i altçizgesinin merkez tepesi veya yaprak tepesi olabilirken v'_{d+1} tepesi de F_j altçizgesinin merkez tepesi veya yaprak tepesi olabilir. Bu dört olası durumun her birinde Yardımcı Teorem 4.0.1 ile F_i ve F_j altçizgelerinin tepelerinin hiçbirinin G_1 modülünde olmadığı görülür (u'_{d+1} ve v'_{d+1} tepelerinin sırasıyla F_i ve F_j çizgesindeki rollerine bağlı olası durumlarından biri için bkz. Şekil 4.8 (8)). Böylelikle bu dört olasılığın her birinde $F_i \cap G_1 = \emptyset$ ve $F_j \cap G_1 = \emptyset$ olur ve bu $|\mathcal{F}^1| = |\mathcal{F}| = \frac{d}{2}$ olmasıyla çelişir.

Dolayısıyla yukarıdaki üç durumda da u_{d+1} ve v_{d+1} tepelerinden en az biri $V(\mathcal{F})$ kümesinde değildir. Yani, C bileşenindeki bir tepe ile $FDSC_n - G_1 - \mathcal{F}$ çizgesindeki bir tepeyi bağlayan hatasız bir ayrıtı vardır.

(2) $|V(C)| = 1$ olsun. $V(C) = \{w\}$ olduğu kabul edilsin.

(a) $w \notin \{u, v\}$ olsun. w_{d+1} tepesinin bazı $F_i \in \mathcal{F}$ hatalı altkümesinde olduğu kabul edilsin. Yardımcı Teorem 4.0.1 (1) ile $w_{d+1} \notin V(G_1)$ olduğu açıktır. O halde, $j \in T - \{1\}$ için $w_{d+1} \in V(G_j)$ olsun. Yardımcı Teorem 4.0.1 (2-4) ile G_1 ile G_j arasında sadece bir tane çapraz ayrıtı vardır ve bu ayrıtı (w, w_{d+1}) ayrıtıdır.

w_{d+1} tepesi F_i altçizgesinin ya merkez tepesi ya da yaprak tepesidir. Fakat, her iki durum için de Yardımcı Teorem 4.0.1 (2-4) ile F_i altçizgesinin hiçbir tepesinin G_1 modülünde olmadığı ve F_i altçizgesinin w_{d+1} tepesi dışındaki hiçbir tepesinin G_1 modülünde bir dış komşusu olmadığı görülür (Bkz. Şekil 4.9). Yani $F_i \cap G_j \neq \emptyset$ ve $F_i \cap G_1 = \emptyset$ olur ve bu durum $|\mathcal{F}^1| = |\mathcal{F}| = \frac{d}{2}$ olmasıyla çelişir. Bu nedenle, $w_{d+1} \notin V(\mathcal{F})$ olur. Dolayısıyla, C bileşeni ile $FDSC_n - G_1 - \mathcal{F}$ çizgesi hatasız (w, w_{d+1}) ayrıtı ile bağlıdır.



Şekil 4.9 w_{d+1} tepesinin F_i altçizgesinin yaprak tepesi (1) ve merkez tepesi (2) olduğu durumlar

(b) $w \in \{u, v\}$ olsun. $w = u$ (sırasıyla $w = v$) olduğu varsayalım.

Eğer u ve v tepeleri G_1 modülünde komşu ise, $|V(C)| = 1$ olduğundan $v = \overline{B_1}B_1 \in V(\mathcal{F}^1)$ (sırasıyla $u = B_1B_1 \in V(\mathcal{F}^1)$) olur. Eğer w_{d+1} tepesi hatalı ise, tümevarım hipotezinden u (sırasıyla v) tepesinin $FDSC_{\frac{n}{2}}$ içindeki komşuları ele alındığında, d çift olduğunda

$$|\mathcal{F}| \geq (\lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor + 1) + 1 = \frac{d}{2} + 1,$$

eşitsizliğine ulaşılır ki bu $|\mathcal{F}| = \frac{d}{2}$ olması ile çelişir. Böylece, w_{d+1} hatasız bir tepedir ve bu sebeple C bileşeni ve $FDSC_n - G_1 - \mathcal{F}$ çizgesi hatasız (w, w_{d+1}) ayrıtı ile bağlıdır.

Eğer u ve v tepeleri G_1 modülünde komşu değilse, u_{d+1} ve v_{d+1} tepeleri de komşu değildir. w_{d+1} tepesinin herhangi bir $F_i \in \mathcal{F}$ altçizgesinde olduğu kabul edilsin. Yardımcı Teorem 4.0.1 (1) ile $w_{d+1} \notin V(G_1)$ olur. $j \in T - \{1\}$ için $w_{d+1} \in V(G_j)$ olsun. Yardımcı Teorem 4.0.1 ile F_i çizgesindeki hiçbir tepenin G_1 modülünde olmadığı ve F_i altçizgesinin w_{d+1} tepesi dışındaki hiçbir tepesinin G_1 modülünde bir dış komşusu olmadığı anlaşılır. Yani, $F_i \cap G_j \neq \emptyset$ ve $F_i \cap G_1 = \emptyset$ olur ve bu da

$|\mathcal{F}^1| = |\mathcal{F}| = \frac{d}{2}$ olmasıyla çelişir. Bu sebeple, w_{d+1} hatasız bir tepedir ve böylece C bileşeni ile $FDSC_n - G_1 - \mathcal{F}$ çizgesi hatasız (w, w_{d+1}) ayrıtı ile bağlıdır.

Böylelikle $G_1 - \mathcal{F}^1$ modülündeki herhangi bir C bileşeni ile $FDSC_n - G_1 - \mathcal{F}$ çizgesi bağlıdır. Yani, $FDSC_n - \mathcal{F}$ çizgesi bağlantılıdır, bu ise \mathcal{F} çizgesinin $K_{1,m}$ -altyapı-kesim küme olmasıyla çelişir. Sonuç olarak $d \geq 1$ olmak üzere $2 \leq m \leq d + 2$ için $\kappa^s(FDSC_n; K_{1,m}) \geq \lfloor \frac{d}{2} \rfloor + 1$ elde edilir. \square

Yardımcı Teorem 4.1.8 $d \geq 1$ tamsayısı ve $n = 2^d$ için $2 \leq m \leq d + 1$ olduğunda $\kappa(FDSC_n; K_{1,m}) \leq \lfloor \frac{d}{2} \rfloor + 1$ eşitsizliği sağlanır.

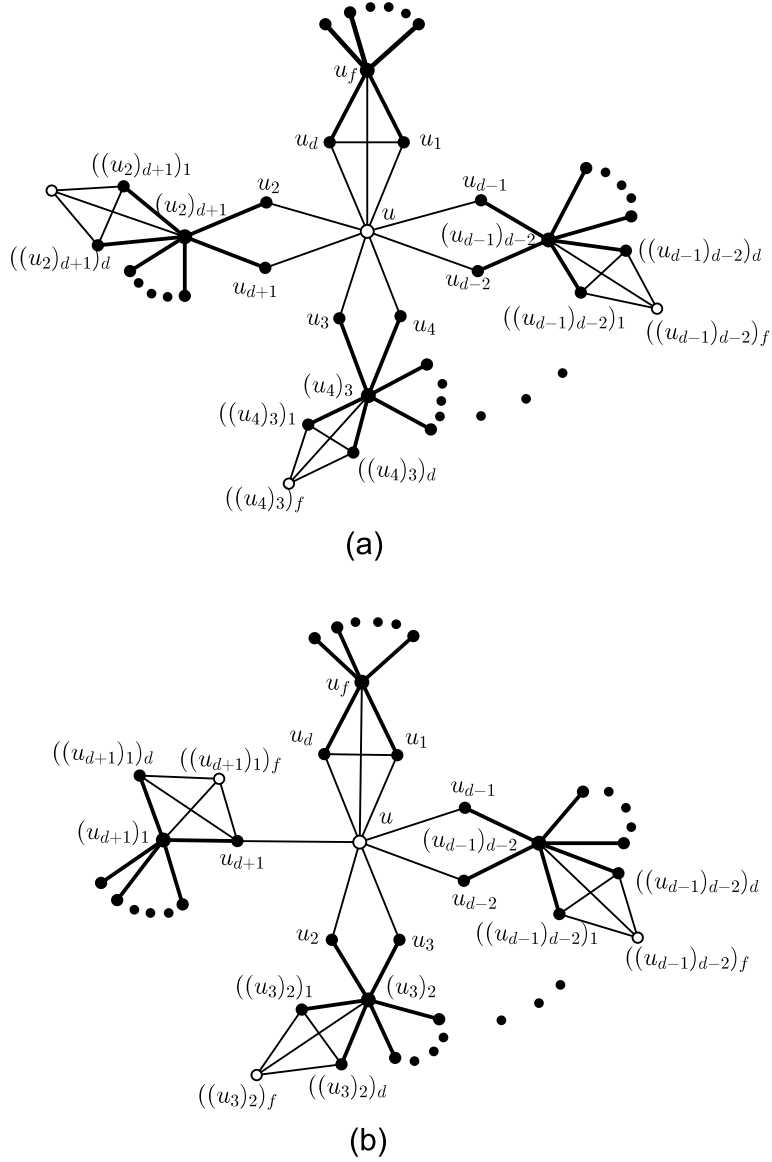
İspat. İspat $d = 1$ durumunda açıktır. O halde, $d \geq 2$ olsun. İspatı tamamlamak için $\lfloor \frac{d}{2} \rfloor + 1$ elemanlı bir $K_{1,m}$ -yapı-kesim kümesi oluşturmak yeterlidir. $B_1 = 00 \dots 0$ adresli G_1 modülünden $u = \overline{B_1}B_1$ ve $u_2 = B_1B_1$ tepeleri alınsın. Burada iki durum ele alınacaktır.

d tek olsun. Merkez tepesi $(u_2)_{d+1}$ ve yaprak tepeler kümesi $N_{FDSC_n}((u_2)_{d+1}) - \{u_2, u_{d+1}, ((u_2)_{d+1})_f\}$ kümesindeki herhangi $m - 2$ tane tepe ile $\{u_2, u_{d+1}\}$ tepelerinin birleşiminden oluşan $K_{1,m}$ altçizgesi F_1 olsun. Aynı şekilde, her çift $j \in \{4, 6, \dots, d - 1\}$ tamsayısı için merkez tepesi $(u_j)_{j-1}$ ve yaprak tepeler kümesi $N_{FDSC_n}((u_j)_{j-1}) - \{u_j, u_{j-1}, ((u_j)_{j-1})_f\}$ kümesindeki herhangi $m - 2$ tane tepe ile $\{u_j, u_{j-1}\}$ tepelerinin birleşiminden oluşan $K_{1,m}$ altçizgesi $F_{\frac{j}{2}}$ olsun. Merkez tepesi u_f ve yaprak tepeler kümesi $\{u_1, u_d\} \cup \{(u_f)_j \mid j \in [m + 1] - \{1, d, f\}\}$ olan $K_{1,m}$ altçizgesi $F_{\frac{d-1}{2}+1}$ olsun (Bkz. Şekil 4.10 (a)). Eğer $\mathcal{F} = \{F_1, \dots, F_{\frac{d-1}{2}+1}\}$ olarak alırsa

$$|\mathcal{F}| = \frac{d-1}{2} + 1 = \lfloor \frac{d}{2} \rfloor + 1$$

eşitliği elde edilir.

d çift olsun. Her tek $j \in \{3, 5, \dots, d - 1\}$ tamsayısı için merkez tepesi $(u_j)_{j-1}$ ve yaprak tepeler kümesi $N_{FDSC_n}((u_j)_{j-1}) - \{u_j, u_{j-1}, ((u_j)_{j-1})_f\}$ kümesindeki $m - 2$ tane tepe ile $\{u_j, u_{j-1}\}$ kümesindeki tepelerin birleşiminden oluşan $K_{1,m}$ altçizgesi $F_{\lfloor \frac{j}{2} \rfloor}$ olsun. Merkez tepesi $(u_{d+1})_1$ ve yaprak tepeler kümesi $N_{FDSC_n}((u_{d+1})_1) - \{u_{d+1}, (u_{d+1})_d, ((u_{d+1})_1)_f\}$ kümesindeki herhangi $m - 2$ tane tepe ile $\{u_{d+1}, ((u_{d+1})_1)_d\}$ kümesindeki tepelerin birleşimi olan $K_{1,m}$ altçizgesi



Şekil 4.10 Yardımcı Teorem 4.1.8 için (a) d tek, (b) d çift durumlarının açıklaması

$F_{\lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor + 1}$ olsun. Merkez tepesi u_f ve yaprak tepeler kümesi $\{u_1, u_d\} \cup \{(u_f)_j \mid j \in [m+1] - \{1, d, f\}\}$ olan $K_{1,m}$ altçizgesi $F_{\lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor + 2}$ olsun (Bkz. Şekil 4.10 (b)). Eğer $\mathcal{F} = \{F_1, \dots, F_{\lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor + 2}\}$ olarak alınırsa

$$|\mathcal{F}| = \lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor + 2 = \frac{d}{2} + 1$$

eşitliği elde edilir.

Her iki durumda $|\mathcal{F}| = \lfloor \frac{d}{2} \rfloor + 1$ olup $FDSC_n - \mathcal{F}$ çizgesindeki u tepesi izole tepedir. Bu nedenle, \mathcal{F} kümesi $FDSC_n$ çizgesi için bir $K_{1,m}$ -yapı-kesim kümedir. Yani, $d \geq 1$ ve $n = 2^d$ olmak üzere $2 \leq m \leq d+1$ için $\kappa(FDSC_n; K_{1,m}) \leq \lfloor \frac{d}{2} \rfloor + 1$

eşitsizliği elde edilir. □

Yardımcı Teorem 4.1.7 ve Yardımcı Teorem 4.1.8 ile $\kappa(FDSC_n; K_{1,m}) \geq \kappa^s(FDSC_n; K_{1,m})$ eşitsizliği kullanılarak aşağıdaki sonuç elde edilir.

Teorem 4.1.9 $d \geq 1$ tamsayısı ve $n = 2^d$ için $2 \leq m \leq d + 1$ olduğunda $\kappa(FDSC_n; K_{1,m}) = \kappa^s(FDSC_n; K_{1,m}) = \lfloor \frac{d}{2} \rfloor + 1$ eşitliği sağlanır.

$m \in \{2, \dots, d + 1\}$ olmak üzere $K_{1,m}$ çizgesi $K_{1,d+2}$ çizgesinin bağlantılı bir altçizgesi olduğundan $\kappa^s(FDSC_n; K_{1,d+2}) \leq \kappa^s(FDSC_n; K_{1,m})$ eşitsizliği elde edilir. $F D S C_n$ çizgesinin $K_{1,m}$ -altyapı bağlantılılık sayısı, yukarıdaki eşitsizlik ile birlikte Yardımcı Teorem 4.1.7 ve Teorem 4.1.9'un birleştirilmesiyle tüm $2 \leq m \leq d + 2$ değerleri için aşağıdaki teorem ile verilir.

Teorem 4.1.10 $d \geq 1$ ve $n = 2^d$ için $2 \leq m \leq d + 2$ olduğunda $\kappa^s(FDSC_n; K_{1,m}) = \lfloor \frac{d}{2} \rfloor + 1$ eşitliği sağlanır.

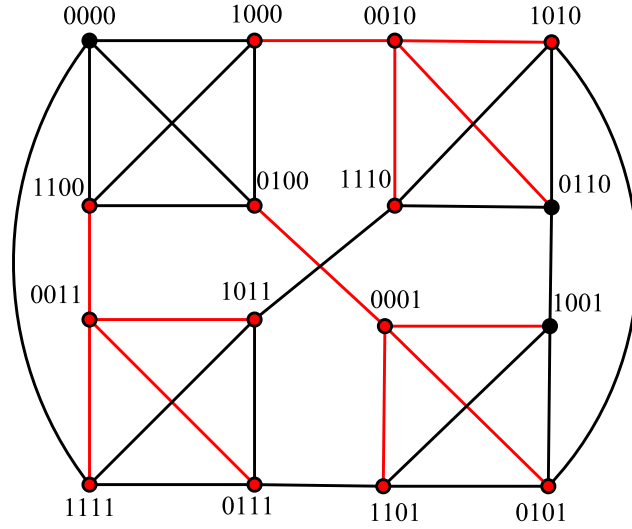
$m \in \{2, \dots, d + 2\}$ tamsayısının tüm değerleri için $K_{1,m}$ -yapı bağlantılılık ve $K_{1,m}$ -altyapı bağlantılılık değerleri dikkate alındığında incelenmesi gereken tek durum $m = d + 2$ olduğunda $F D S C_n$ çizgesinin $K_{1,m}$ -yapı bağlantılılık sayısıdır. $d = 1$ için $\kappa(FDSC_n; K_{1,d+2})$ değeri bulunamaz ve $d = 2$ için $\kappa(FDSC_n; K_{1,d+2}) = 3$ (Bkz. Şekil 4.11) olduğu kolaylıkla görülebilir. Bu nedenle $n = 2^d$ olmak üzere $d \geq 3$ için $\kappa(FDSC_n; K_{1,d+2})$ değeri incelenecektir.

Yardımcı Teorem 4.1.11 $d \geq 3$ ve $n = 2^d$ için

$$\kappa(FDSC_n; K_{1,d+2}) \leq \lfloor \frac{d+1}{2} \rfloor + 2$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. Eğer $\lfloor \frac{d+1}{2} \rfloor + 2$ elemanlı bir $K_{1,m}$ -yapı-kesim kümesi oluşturulabilirse ispat tamamlanır. $B_1 = 00 \dots 0$ olmak üzere B_1 adresli G_1 modülünden $u = \overline{B_1}B_1$ ve $u_2 = B_1B_1$ tepeleri alınsın. O halde incelenmesi gereken iki durum vardır. d tek olsun. Merkez tepesi $(u_{d+1})_1$ ve yaprak tepeler kümesi $N_{FDSC_n}((u_{d+1})_1)$ olan $K_{1,d+2}$ altçizgesi F_1 olsun. Aynı şekilde her tek $j \in \{3, 5, \dots, d - 2\}$ için merkez tepesi $(u_j)_{j-1}$ ve yaprak tepeler kümesi $N_{FDSC_n}((u_j)_{j-1})$ olan $K_{1,d+2}$ altçizgesi $F_{\lfloor \frac{j}{2} \rfloor + 1}$



Şekil 4.11 $FDSC_4$ çizgesi için bir $K_{1,4}$ -yapı-kesim küme

olsun. $F_{\lfloor \frac{d-2}{2} \rfloor + 2}$, $F_{\lfloor \frac{d-2}{2} \rfloor + 3}$, $F_{\lfloor \frac{d-2}{2} \rfloor + 4}$ sırasıyla merkezleri $(u_1)_2$, $(u_f)_2$, $(u_d)_{d-1}$ ve yaprak tepeler kümesi $N_{FDSC_n}((u_1)_2)$, $N_{FDSC_n}((u_f)_2)$, $N_{FDSC_n}((u_d)_{d-1})$ olan $K_{1,d+2}$ altçizgesi olsun (Bkz. Şekil 4.12 (a)). Eğer $\mathcal{F} = \{F_1, F_2, \dots, F_{\lfloor \frac{d-2}{2} \rfloor + 4}\}$ olarak alınırsa

$$|\mathcal{F}| = \lfloor \frac{d-2}{2} \rfloor + 4 = \lfloor \frac{d+1}{2} \rfloor + 2$$

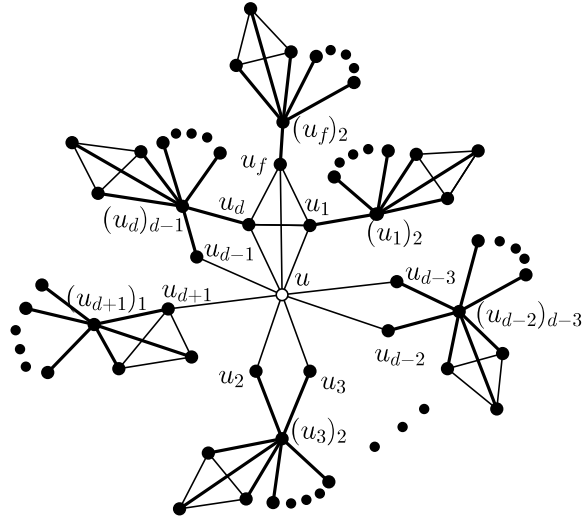
eşitliği elde edilir.

d çift olsun. Merkez tepesi $(u_2)_{d+1}$ ve yaprak tepeler kümesi $N_{FDSC_n}((u_2)_{d+1})$ olan $K_{1,d+2}$ altçizgesi F_1 olsun. Aynı şekilde, merkez tepesi $(u_1)_2$ ve yaprak tepeler kümesi $N_{FDSC_n}((u_1)_2)$ olan $K_{1,d+2}$ altçizgesi F_2 , merkez tepesi $(u_f)_2$ ve yaprak tepeler kümesi $N_{FDSC_n}((u_f)_2)$ olan $K_{1,d+2}$ altçizgesi F_3 ve merkez tepesi $(u_d)_{d-1}$ ve yaprak tepeler kümesi $N_{FDSC_n}((u_d)_{d-1})$ olan $K_{1,d+2}$ altçizgesi F_4 olsun. Her çift $j \in \{4, 6, \dots, d-2\}$ tamsayısı için merkez tepesi $(u_j)_{j-1}$ ve yaprak tepeler kümesi $N_{FDSC_n}((u_j)_{j-1})$ olan $K_{1,d+2}$ altçizgesi $F_{\frac{j}{2}+3}$ olsun (Bkz. Şekil 4.12 (b)). Eğer $\mathcal{F} = \{F_1, F_2, \dots, F_{\frac{d-2}{2}+3}\}$ olarak alınırsa

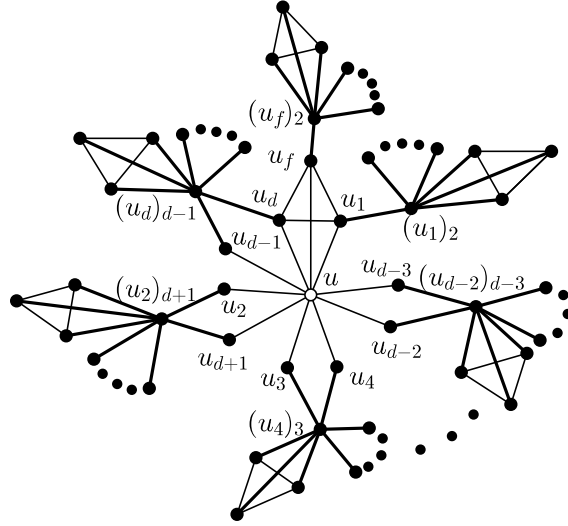
$$|\mathcal{F}| = \frac{d-2}{2} + 3 = \lfloor \frac{d+1}{2} \rfloor + 2$$

eşitliği elde edilir.

Yukarıdaki her iki durum için $|\mathcal{F}| = \lfloor \frac{d+1}{2} \rfloor + 2$ olup $FDSC_n - \mathcal{F}$ çizgesi bağlantısızdır. Bu nedenle, \mathcal{F} kümesi $\lfloor \frac{d+1}{2} \rfloor + 2$ elemanlı bir $K_{1,d+2}$ -yapı-kesim



(a)



(b)

Şekil 4.12 Yardımcı Teorem 4.1.11 için (a) d tek, (b) d çift durumlarının açıklaması

kümedir, bu da ispatı sonlandırır. □

Teorem 4.1.10, Yardımcı Teorem 4.1.11 ve $\kappa(FDSC_n; K_{1,d+2}) \geq \kappa^s(FDSC_n; K_{1,d+2})$ eşitsizliği ile aşağıdaki sonuç elde edilir.

Teorem 4.1.12 $n = 2^d$ olmak üzere $d \geq 3$ olsun. Eğer d çift ise

$$\lfloor \frac{d}{2} \rfloor + 1 \leq \kappa(FDSC_n; K_{1,d+2}) \leq \lfloor \frac{d}{2} \rfloor + 2,$$

eğer d tek ise

$$\lfloor \frac{d}{2} \rfloor + 1 \leq \kappa(FDSC_n; K_{1,d+2}) \leq \lfloor \frac{d}{2} \rfloor + 3$$

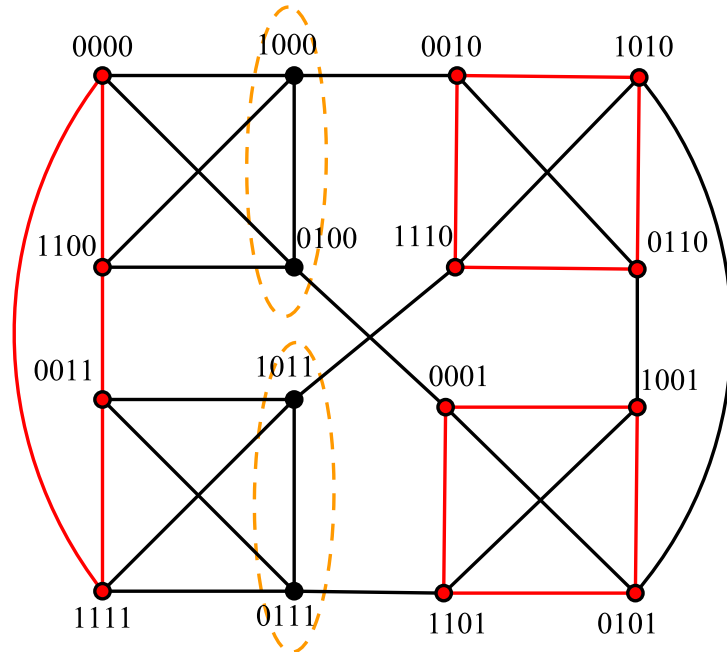
eşitsizlikleri sağlar.

4.2 Çevre-Yapı Bağlantılılık ve Çevre-Altyapı Bağlantılılık

Bu bölümde $FDSC_n$ çizgesinin C_4 -yapı bağlantılılık ve C_4 -altyapı bağlantılılık sayıları incelenecektir. İlk olarak $4 \leq n \leq 8$ olmak üzere $FDSC_n$ çizgesinin C_4 -yapı bağlantılılık sayısı için bir üst sınır verilmiştir.

Yardımcı Teorem 4.2.1 $4 \leq n \leq 8$ ve $n = 2^d$ olmak üzere $\kappa(FDSC_n; C_4) \leq 3 + 2(d - 2)$ eşitsizliği sağlanır.

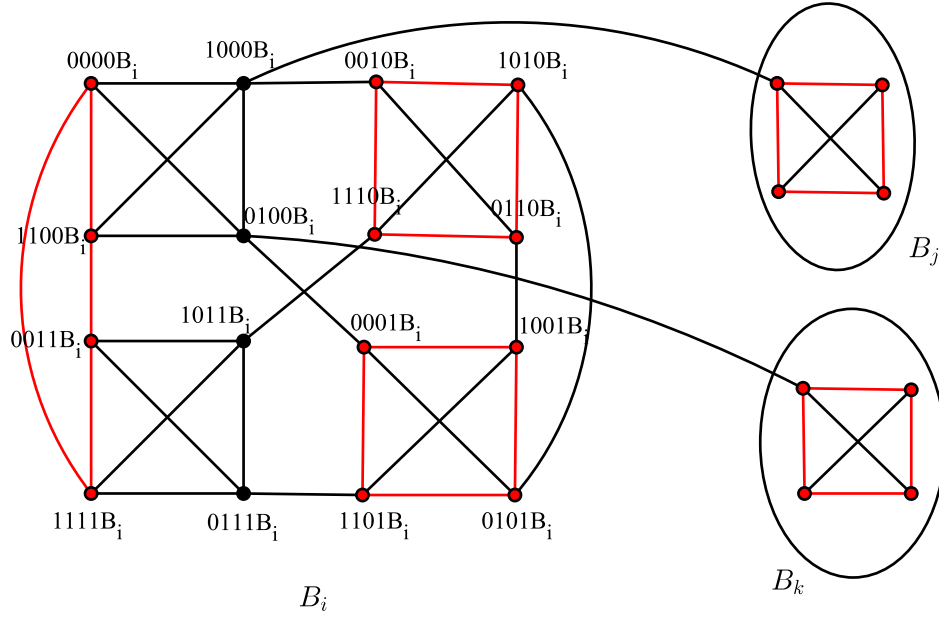
İspat. $n = 4$ olsun. $FDSC_4$ çizgesinin $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ olmak üzere dört tane G_i modülü vardır ve bu modüllerin adresleri sırasıyla $B_1 = 00$, $B_2 = 10$, $B_3 = 01$ ve $B_4 = 11$ olsun. Her G_i modülünün K_4 tam çizgesine izomorf olduğu açıktır. G_2 ve G_3 modüllerinin tepelerinin oluşturduğu C_4 çevresi sırasıyla F_1 ve F_2 ile gösterilsin. $\{0000, 1100, 0011, 1111\}$ kümesindeki tepelerin oluşturduğu C_4 çevresi F_3 ile gösterilsin. Eğer $\mathcal{F} = \{F_1, F_2, F_3\}$ olarak alırsa $|\mathcal{F}| = 3$ olup $FDSC_4 - \mathcal{F}$ çizgesi her bir bileşeni $K_{1,1}$ çizgesine izomorf olan bağlantısız bir çizgedir (Bkz. Şekil 4.13). Yani, $\kappa(FDSC_4; C_4) \leq 3 = 3 + 2(d - 2)$ elde edilir.



Şekil 4.13 $FDSC_4$ çizgesi için bir C_4 -yapı-kesim küme

$n = 8$ olsun. $FDSC_8$ çizgesinde B_i adresli bir G_i modülünden $u = 0000B_i$ ve $v = 0011B_i$ tepeleri ele alınsın. $u_1 = 1000B_i$, $u_f = 0100B_i$

ve $v_1 = 1011B_i$, $v_f = 0111B_i$ olup $(u_1, u_f) \in E(FDSC_8)$ ve $(v_1, v_f) \in E(FDSC_8)$ olduğu açıktır. Ayrıca, $i, j \in \{1, f\}$ olmak üzere $(u_i, v_j) \notin E(FDSC_8)$ olduğu açıktır. $\{(u_1)_{d+1}, ((u_1)_{d+1})_1, ((u_1)_{d+1})_d, ((u_1)_{d+1})_f\}$ kümesindeki tepelerin oluşturduğu C_4 çevresi F_1 ile $\{(u_f)_{d+1}, ((u_f)_{d+1})_1, ((u_f)_{d+1})_d, ((u_f)_{d+1})_f\}$ kümesindeki tepelerin oluşturduğu C_4 çevresi F_2 ile gösterilsin. Ayrıca, $\{0010B_i, 1010B_i, 1110B_i, 0110B_i\}$ kümesindeki tepelerin oluşturduğu C_4 çevresi F_3 ile $\{0001B_i, 1001B_i, 1101B_i, 0101B_i\}$ kümesindeki tepelerin oluşturduğu C_4 çevresi F_4 ile $\{0000B_i, 1100B_i, 0011B_i, 1111B_i\}$ kümesindeki tepelerin oluşturduğu C_4 çevresi ise F_5 ile gösterilsin. Eğer $\mathcal{F} = \{F_1, F_2, F_3, F_4, F_5\}$ olarak alınırsa $FDSC_8 - \mathcal{F}$ çizgesi bağlantısız bir çizgedir (Bkz. Şekil 4.14). Yani, $\kappa(FDSC_8; C_4) \leq 5 = 3 + 2(d - 2)$ elde edilir. \square



Şekil 4.14 $FDSC_8$ çizgesi için bir C_4 -yapı-kesim küme

Yardımcı Teorem 4.2.2 $4 \leq n \leq 8$ ve $n = 2^d$ olmak üzere $\kappa(FDSC_n; C_4) \geq 3 + 2(d - 2)$ eşitsizliği sağlanır.

İspat. $n = 4$ iken $|\mathcal{F}| \leq 2 = 2 + 2(d - 2)$ olduğunda $FDSC_4 - \mathcal{F}$ çizgesinin bağlantılı olduğu kolaylıkla kontrol edilebilir. Bu nedenle, $\kappa(FDSC_4; C_4) \geq 3 + 2(d - 2) = 3$ eşitsizliği sağlanır.

$n = 8$ olsun. $FDSC_8$ çizgesinin $|\mathcal{F}| \leq 2 + 2(d - 2)$ olacak şekilde bir \mathcal{F}

C_4 -yapı-kesim kümesi olduğu varsayalım. Herhangi bir $F_i \in \mathcal{F}$ çizgesi C_4 çizgesine izomorf olsun. Her $i \in N$ için $FDSC_{\frac{n}{2}}^i$ çizgesi $FDSC_n$ çizgesinin bir modülü olmak üzere $\mathcal{F}^i = \bigcup_{F_j \in \mathcal{F}} F_j \cap FDSC_{\frac{n}{2}}^i$ olsun. Burada \mathcal{F}^i kümesinin herhangi bir elemanının C_4 çizgesinin bağlantılı altçizgesine izomorf olduğu açıktır. Yani \mathcal{F}^i kümesinin herhangi bir elemanı $K_{1,1}$ veya C_4 çizgesine izomorftur. Bu nedenle,

$$|\mathcal{F}| \leq 2 + 2(d-2) = 4$$

olduğundan, $i \in N$ olmak üzere $|\mathcal{F}^i| \leq |\mathcal{F}| \leq 4$ eşitsizliği sağlanır. Ayrıca, $FDSC_8$ çizgesindeki herhangi bir G_i modülü $FDSC_4$ çizgesine izomorf ve teoremin ifadesi $FDSC_4$ için doğru olduğundan $|\mathcal{F}^i| \leq 2$ ise $FDSC_8$ çizgesindeki her bir G_i modülü için $G_i - \mathcal{F}^i$ çizgesinin bağlantılı olduğu açıktır.

$T = \{i \mid \mathcal{F} \cap G_i \neq \emptyset\}$ ve $G_T = \bigcup_{i \in T} G_i$ olarak alınsın. İspat boyunca, eğer $\mathcal{F} \cap G_i = \emptyset$ ise G_i modülü bozulmamış modül olarak adlandırılacaktır. Burada G_T kümesi, geriye kalan $FDSC_8 - \mathcal{F}$ çizgesindeki bozulmuş modüllerin birleşimini gösterir. Yardımcı Teorem 4.0.1 (4) ile $FDSC_8 - G_T$ çizgesinin bağlantılı olduğu görülmektedir.

İncelenmesi gereken iki durum bulunmaktadır.

Durum 1. Herhangi bir $i \in N$ için $|\mathcal{F}^i| \leq 2$ olsun.

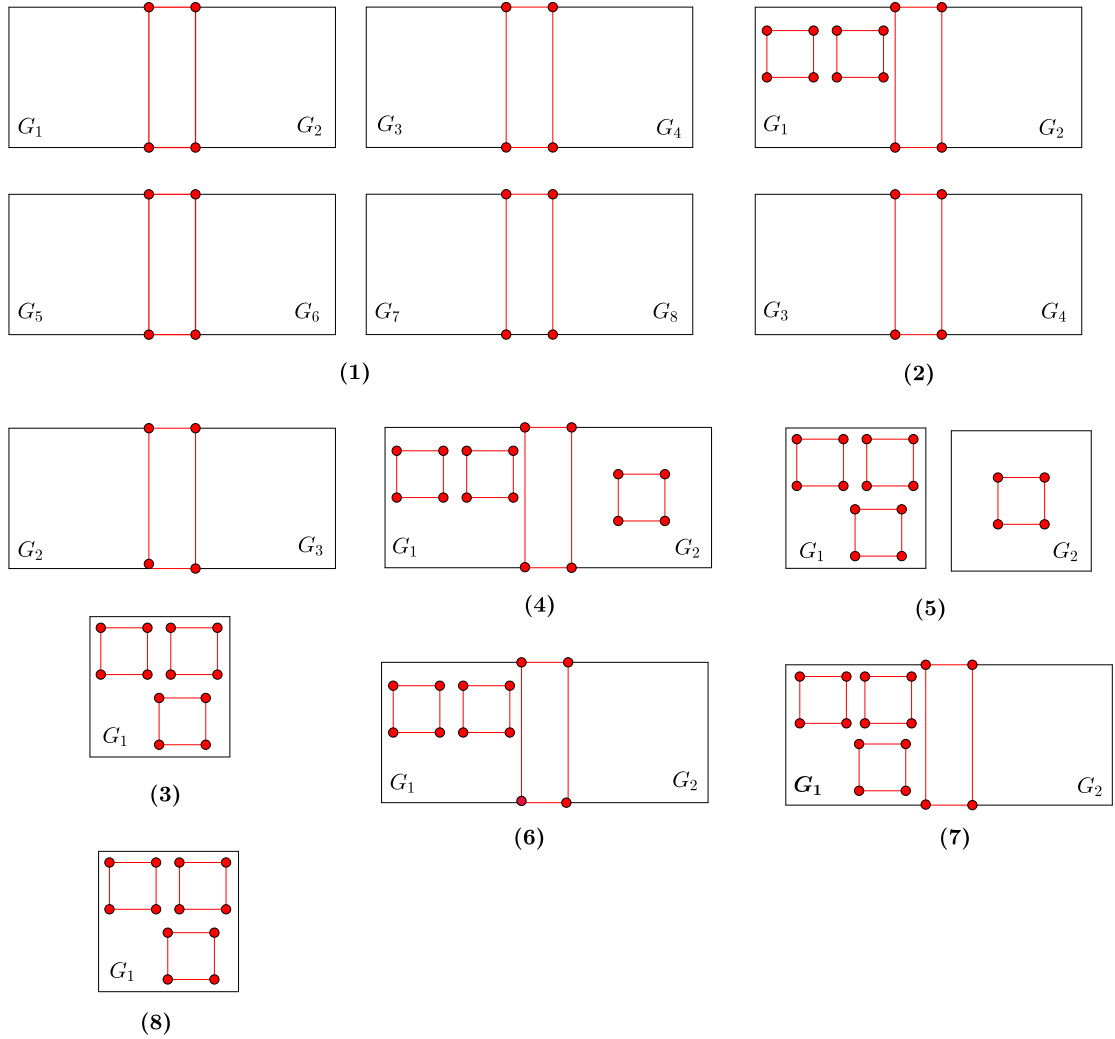
Herhangi bir $i \in N$ için $|\mathcal{F}^i| \leq 2$ olduğundan $G_i - \mathcal{F}^i$ çizgesi bağlantılıdır. Yardımcı Teorem 3.0.6 ile $FDSC_n$ çizgesinin G_i ve G_j modülleri $(B_i B_i, \overline{B_i} \overline{B_i})$ ve $(\overline{B_i} B_i, B_i \overline{B_i})$ şeklindeki iki ayrıt ile bağlı olduğu bilinmektedir. Bu ayrıtların C_4 çizgesini oluşturabilmesi için $n = 8$ için B_i adresi 0000, 1100, 1010 ya da 0110 olabilir. Bu nedenle, $FDSC_8 - \mathcal{F}$ çizgesinde hatalı tepe içerebilecek en fazla 8 modül olabileceği görülmektedir (Bkz. Şekil 4.15 (1)).

Her $j \in T$ için

$$\begin{aligned} |V(G_j - \mathcal{F}^j)| &\geq |V(G_j)| - 2 \times |V(C_4)| \\ &= 2^{\frac{n}{2}} - 8 \\ &> 6 \end{aligned}$$

olduğundan $G_j - \mathcal{F}^j$ çizgesindeki bir tepe ile $FDSC_8 - G_T$ çizgesindeki bir tepelyi bağlayan hatasız bir ayrıt vardır. Bu nedenle $FDSC_8 - \mathcal{F}$ çizgesi bağlantılıdır. Bu ise

\mathcal{F} kümesinin C_4 -yapı-kesim küme olmasıyla çelişir.



Şekil 4.15 Yardımcı Teorem 4.2.2 için C_4 -yapı-kesim küme durumları

Durum 2. Bazı $i \in N$ için $|\mathcal{F}^i| \geq 3$ olsun ve $i = 1$ olarak alınsın. Bu durumda incelenmesi gereken iki ihtimal vardır.

(1) $|\mathcal{F}| = 3$ olsun. O halde, $|\mathcal{F}^1| = 3$ olur.

Bu durumda $FDSC_8 - \mathcal{F}$ çizgesinde hatalı tepe içeren en fazla iki modül vardır (Bkz. Şekil 4.15 (6,8)). Yani $1 \leq |T| \leq 2$ olur.

- Eğer $|T| = 1$ ise Yardımcı Teorem 4.0.1 (1) ile $G_1 - \mathcal{F}^1$ çizgesindeki her tepenin bağlantılı $FDSC_8 - G_T$ çizgesinde bir dış komşusu vardır. Dolayısıyla, $FDSC_8 - \mathcal{F}$ çizgesi bağlantılıdır (Bkz. Şekil 4.15 (8)). Bu ise \mathcal{F} kümesinin C_4 -yapı-kesim küme olmasıyla çelişir.

- Eğer $|T| = 2$ ise $FDSC_8 - \mathcal{F}$ çizgesinde bozulmuş modüller G_1 ve G_2 olsun. O halde $|\mathcal{F}^2| = 1$ ve $\mathcal{F}^2 \cong K_{1,1}$ olduğu açıktır (Bkz. Şekil 4.15 (6)). $G_2 \cong FDSC_4$ ve $\kappa(FDSC_4; C_4) \geq 3$ olduğundan $G_2 - \mathcal{F}^2$ çizgesi bağlantılıdır. $G_2 - \mathcal{F}^2$ çizgesinde geriye kalan tepelerin sayısı dikkate alınırsa,

$$\begin{aligned} |V(G_2 - \mathcal{F}^2)| &\geq |V(G_2)| - |V(K_{1,1})| \\ &= 2^{\frac{n}{2}} - 2 \\ &> 1 \end{aligned}$$

olduğundan $G_2 - \mathcal{F}^2$ çizgesindeki bir tepe ile $FDSC_8 - G_T$ çizgesindeki bir tepelyi bağlayan hatasız bir ayrıt vardır. Bu nedenle, $FDSC_8 - G_1 - \mathcal{F}^2$ çizgesi bağlantılıdır.

O halde $G_1 - \mathcal{F}^1$ çizgesi ile $FDSC_8 - G_1 - \mathcal{F}^2$ çizgesinin bağlantılılık durumu incelenmelidir. $G_1 - \mathcal{F}^1$ çizgesi bağlantılı ya da bağlantısız bir çizge olabilir.

$$\begin{aligned} |V(G_1 - \mathcal{F}^1)| &\geq |V(G_1)| - (2 \times |V(C_4)| + |V(K_{1,1})|) \\ &= 2^{\frac{n}{2}} - 10 \\ &> 1 \end{aligned}$$

olup Yardımcı Teorem 4.0.1(1) ve Yardımcı Teorem 3.0.6 ile $G_1 - \mathcal{F}^1$ çizgesindeki her tepenin $FDSC_8 - G_1 - \mathcal{F}^2$ çizgesinde bir dış komşusu vardır. Dolayısıyla, $FDSC_8 - \mathcal{F}$ çizgesi bağlantılıdır. Bu ise \mathcal{F} kümesinin C_4 -yapı-kesim küme olmasıyla çelişir.

(2) $|\mathcal{F}| = 4$ olsun. İncelenmesi gereken iki durum vardır.

(a) $|\mathcal{F}^1| = 3$ olsun. Bu durumda hatalı tepe içeren en fazla dört modül vardır ve $2 \leq |T| \leq 4$ eşitsizliği mevcuttur (Bkz. Şekil 4.15 (2-5)). Herhangi bir $j \in T - \{1\}$ için $|\mathcal{F}^j| \leq 2$ olduğundan $G_j - \mathcal{F}^j$ çizgesi bağlantılıdır. Ayrıca her $j \in T - \{1\}$ için

$$\begin{aligned} |V(G_j - \mathcal{F}^j)| &\geq |V(G_j)| - (|V(K_{1,1})| + |V(C_4)|) \\ &= 2^{\frac{n}{2}} - (2 + 4) \\ &> 3 \end{aligned}$$

olduğundan $G_j - \mathcal{F}^j$ çizgesindeki her tepenin $FDSC_8 - G_T$ çizgesinde bir dış komşusu vardır. Böylece $FDSC_8 - G_1 - \cup_{i \in T - \{1\}} \mathcal{F}^i$ çizgesi bağlantılıdır.

O halde $G_1 - \mathcal{F}^1$ çizgesi ile $FDSC_8 - G_1 - \cup_{i \in T - \{1\}} \mathcal{F}^i$ çizgesinin bağlantılılık durumu incelenmelidir. $G_1 - \mathcal{F}^1$ çizgesinin bağlantılı ya da bağlantısız bir çizge olmasına göre iki durum vardır.

(i) $G_1 - \mathcal{F}^1$ çizgesi bağlantılı olsun.

$$\begin{aligned} |V(G_1 - \mathcal{F}^1)| &\geq |V(G_1)| - 3 \times |V(C_4)| \\ &= 2^{\frac{n}{2}} - 3 \times 4 \\ &> 2 \end{aligned}$$

olup Yardımcı Teorem 4.0.1 ile $G_1 - \mathcal{F}^1$ çizgesindeki bir tepe ile $FDSC_8 - G_T$ çizgesindeki bir tepelyi bağlayan hatasız bir ayrıt vardır. Böylece $FDSC_8 - \mathcal{F}$ çizgesi bağlantılıdır. Bu ise \mathcal{F} kümesinin C_4 -yapı-kesim küme olmasıyla çelişir.

(ii) $G_1 - \mathcal{F}^1$ çizgesi bağlantısız ve herhangi bir bağlantılı bileşeni C olsun.

$|V(C)| = 1$ olsun. $C = \{u\}$ alalım. $deg_{FDSC_n}(u) = 5$ olduğundan u tepesinin $G_1 - \mathcal{F}^1$ çizgesinde izole tepe olması için tüm komşuları C_4 çizgesine izomorf olan bir $F_i \in \mathcal{F}$ çizgesinde olmalıdır. Fakat, u tepesinin C_4 çevresinde bulunamayan bir komşusu vardır. Bu ise bir çelişkidir. O halde, $|V(C)| \geq 2$ olmalıdır.

- $|T| = 2$ olsun. Eğer $|V(C)| > 2$ ise C bileşenindeki bir tepe ile $FDSC_8 - G_T$ çizgesindeki bir tepelyi bağlayan hatasız bir ayrıt vardır. Dolayısıyla, C bileşeni ile $FDSC_8 - G_1 - \cup_{i \in T - \{1\}} \mathcal{F}^i$ çizgesi hatasız bir ayrıt ile bağlı olur (Bkz. Şekil 4.15 (4,5)).

$|V(C)| = 2$ olsun. $u = B_1B_1$ ve $v = \overline{B_1}B_1$ tepeleri G_1 modülünde B_1 adresli iki tepe olsun. Eğer u ve v tepelerinin her ikisi de C bileşeninde bulunurlarsa, $N_{G_1}(u) \cup N_{G_1}(v)$ kümesindeki tepelerin C_4 çevresine izomorf olan bir $F_i \in \mathcal{F}$ çizgesinde olduğu anlamına gelir. Bu ise Tanım 3.0.2 ve Yardımcı Teorem 3.0.6 ile çelişir. O halde, u ve v tepelerinin her ikisi de C bileşeninde bulunamaz. Böylece, Yardımcı Teorem 4.0.1 ile C bileşeni ile

$FDSC_8 - G_T$ çizgesi arasındaki bağlantıyı sağlayan hatasız bir ayrıt olduğu görülür. Dolayısıyla, C bileşeni ile $FDSC_8 - G_1 - \cup_{i \in T - \{1\}} \mathcal{F}^i$ çizgesi hatasız bir ayrıt ile bağlı olur (Bkz. Şekil 4.15 (4,5)).

Böylelikle $G_1 - \mathcal{F}^1$ çizgesindeki herhangi bir C bileşeni ile $FDSC_8 - G_1 - \cup_{i \in T - \{1\}} \mathcal{F}^i$ çizgesi bağlıdır. Bu durum $G_1 - \mathcal{F}^1$ çizgesindeki her bileşen için geçerli olduğundan $FDSC_8 - \mathcal{F}$ çizgesi bağlantılıdır. Bu ise \mathcal{F} kümesinin C_4 -yapı-kesim küme olmasıyla çelişir.

- Eğer $3 \leq |T| \leq 4$ ise Yardımcı Teorem 4.0.1 ile $G_1 - \mathcal{F}^1$ çizgesindeki herhangi bir tepe $FDSC_8 - G_1 - \cup_{i \in T - \{1\}} \mathcal{F}^i$ çizgesindeki bir tepeye bağlıdır (Bkz. Şekil 4.15 (2,3)). Bu nedenle $FDSC_8 - \mathcal{F}$ çizgesi bağlantılıdır. Bu ise \mathcal{F} kümesinin C_4 -yapı-kesim küme olmasıyla çelişir.

(b) $|\mathcal{F}^1| = 4$ olsun. Bu durumda hatalı tepe içeren modül sayısı en fazla 2 olup $1 \leq |T| \leq 2$ eşitsizliği mevcuttur.

Eğer $|T| = 1$ ise Yardımcı Teorem 4.0.1 ile $V(G_1 - \mathcal{F}^1) \neq \emptyset$ olmak üzere $G_1 - \mathcal{F}^1$ çizgesindeki herhangi bir tepe $FDSC_8 - G_T$ çizgesindeki bir tepe ile bağlıdır. Dolayısıyla, $FDSC_8 - \mathcal{F}$ çizgesi bağlantılıdır. Bu ise \mathcal{F} kümesinin C_4 -yapı-kesim küme olmasıyla çelişir.

Eğer $|T| = 2$ ise $FDSC_8 - \mathcal{F}$ çizgesinde bozulmuş modüller G_1 ve G_2 olsun. O halde, $|\mathcal{F}^2| = 1$ ve $\mathcal{F}^2 \cong K_{1,1}$ olduğu açık olup $G_2 - \mathcal{F}^2$ çizgesi bağlantılıdır (Bkz. Şekil 4.15 (7)). Ayrıca

$$\begin{aligned} |V(G_2 - \mathcal{F}^2)| &\geq |V(G_2)| - |V(K_{1,1})| \\ &= 2^{\frac{n}{2}} - 2 \\ &> 1 \end{aligned}$$

olduğundan $G_2 - \mathcal{F}^2$ çizgesindeki bir tepe ile $FDSC_8 - G_T$ çizgesindeki bir tepeli bağlayan hatasız bir ayrıt vardır. Böylece $FDSC_8 - G_1 - \mathcal{F}^2$ çizgesi bağlantılıdır. Yardımcı Teorem 4.0.1 ile de $G_1 - \mathcal{F}^1$ çizgesindeki herhangi bir tepe $FDSC_8 - G_1 - \mathcal{F}^2$ çizgesindeki bir tepe ile bağlıdır. Dolayısıyla, $FDSC_8 - \mathcal{F}$ çizgesi bağlantılıdır. Bu ise \mathcal{F} kümesinin C_4 -yapı-kesim küme olmasıyla çelişir.

Buradan $4 \leq n \leq 8$ ve $n = 2^d$ olmak üzere $\kappa(FDSC_n; C_4) \geq 3 + 2(d - 2)$ eşitsizliği elde edilir. \square

Yardımcı Teorem 4.2.1 ve Yardımcı Teorem 4.2.2 ile aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 4.2.3 $4 \leq n \leq 8$ ve $n = 2^d$ olmak üzere $\kappa(FDSC_n; C_4) = 3 + 2(d - 2)$ eşitliği sağlanır.

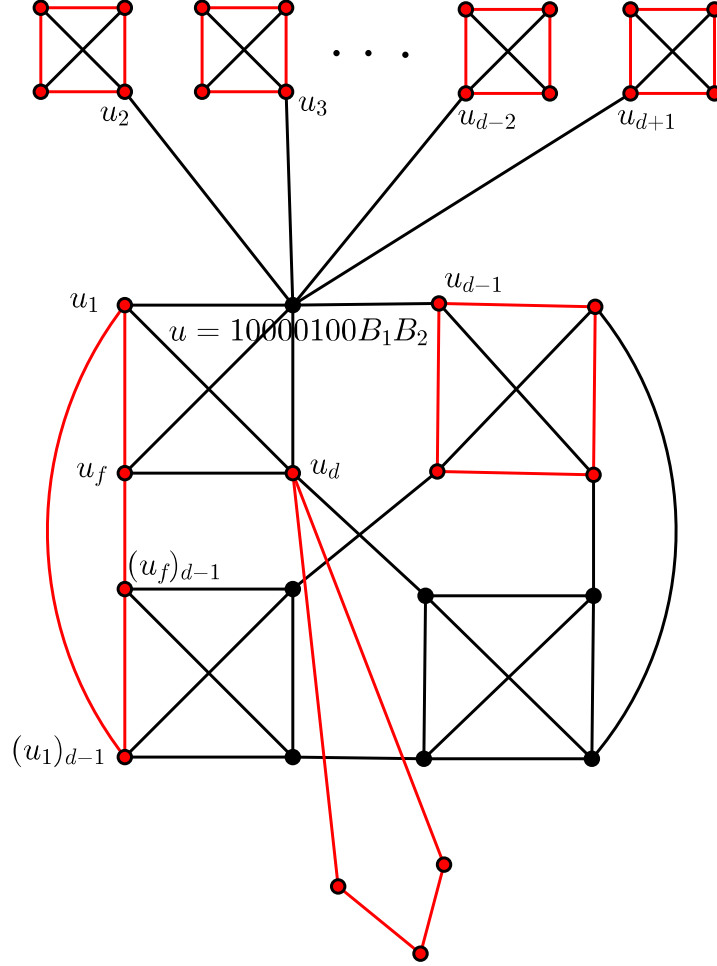
Aşağıdaki yardımcı teorem ile $n \geq 16$ olmak üzere C_4 -yapı bağlantılılık sayısı için bir üst sınır verilmiştir.

Yardımcı Teorem 4.2.4 Herhangi $d \geq 4$ tamsayısı için $n = 2^d$ olmak üzere $\kappa(FDSC_n; C_4) \leq d + 1$ eşitsizliği sağlanır.

İspat. $FDSC_n$ çizgesi yapısı gereği $FDSC_n$ çizgesindeki her u tepesini içeren bir K_4 tam çizgesi dolayısıyla bir C_4 çizgesi bulunmaktadır.

$FDSC_n$ çizgesinde $B_1 = 01000100$ olmak üzere $u = 10000100B_1B_2$ tepesini ele alalım. $|N_{FDSC_n}(u)| = d + 2$ olup $N_{FDSC_n}(u) = \{u_1, u_2, \dots, u_d, u_{d+1}, u_f\}$ olsun. Tanım 3.0.2 ile $FDSC_n[\{u, u_1, u_d, u_f\}]$ etkilenmiş altçizgesi bir K_4 tam çizgesine izomorf olduğu ve u tepesinin u_1, u_d, u_f komşuları dışında kalan $d - 1$ tane komşusunun her birini içeren bir K_4 tam çizgesi dolayısıyla bir C_4 çizgesinin olduğu bilinmektedir. $i \in \{2, 3, \dots, d - 1\} \cup \{d + 1\}$ olmak üzere her bir u_i tepesinin içinde bulunduğu C_4 çizgesi F_i ile gösterilsin. Ayrıca, $u_1, u_f, (u_f)_{d-1}, (u_1)_{d-1}$ tepelerinin oluşturduğu C_4 çevresi F_1 ile gösterilsin. $u_d = 01000100B_1B_2 = B_1B_1B_2$ tepesi için eğer $d = 4$ ise B_2 boş bir dizidir. Böylece, $u_d = B_1B_1$ olup $(u_d)_{d+1} = \overline{B_1} \overline{B_1}$, $(u_d)_2 = \overline{B_1}B_1$, $((u_d)_2)_{d+1} = B_1\overline{B_1}$ ve $((u_d)_{d+1})_2 = ((u_d)_2)_{d+1}$ olduğu açıktır. Bu ise $d = 4$ için u_d tepesini içeren $FDSC_n[u_d, \overline{B_1}B_1, B_1\overline{B_1}, \overline{B_1} \overline{B_1}]$ etkilenmiş altçizgesinin C_4 çizgesine izomorf olduğu anlamına gelir. Her $d \geq 5$ için $FDSC_n$ çizgesi $FDSC_{\frac{n}{2}}$ modülünü içerdiğinden $d = 4$ için u_d tepesini içeren C_4 çevresi $d \geq 5$ için her $FDSC_n$ çizgesinde bulunur. Dolayısıyla $d \geq 4$ olmak üzere $FDSC_n[u_d, \overline{B_1}B_1B_2, B_1\overline{B_1}B_2, \overline{B_1} \overline{B_1}B_2]$ etkilenmiş altçizgesinin oluşturduğu C_4 çizgesi F_d ile gösterilsin (Bkz. Şekil 4.16).

Eğer $\mathcal{F} = \{F_1, F_2, \dots, F_{d+1}\}$ alınırsa $FDSC_n - \mathcal{F}$ çizgesinde u tepesi izole bir tepe olup $FDSC_n - \mathcal{F}$ çizgesi bağlantısız bir çizgedir. Böylece $d \geq 4$ tamsayısı için $n = 2^d$ olmak üzere $\kappa(FDSC_n, C_4) \leq d + 1$ elde edilir. \square



Şekil 4.16 $n \geq 16$ olmak üzere $FDSC_n$ çizgesi için bir C_4 yapı-kesim küme

$d \geq 1$ olmak üzere $FDSC_n$ çizgesinin C_4 -altyapı bağlantılılık değeri için öncelikle bir alt sınır ispatlanmıştır.

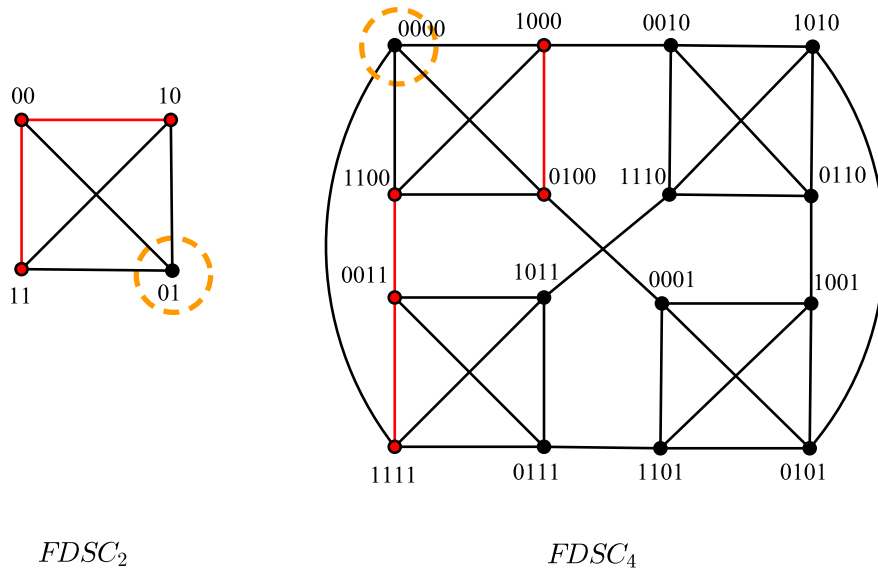
Yardımcı Teorem 4.2.5 Herhangi $d \geq 1$ tamsayısı için $n = 2^d$ olmak üzere $\kappa^s(FDSC_n, C_4) \leq \lfloor \frac{d}{2} \rfloor + 1$ eşitsizliği sağlanır.

İspat. $K_{1,2}$ çizgesi C_4 çizgesinin bağlantılı bir altçizgesi olduğundan $\kappa^s(FDSC_n, C_4) \leq \kappa^s(FDSC_n, K_{1,2})$ eşitsizliği sağlanır. Teorem 4.1.10 yardımıyla $\kappa^s(FDSC_n, K_{1,2}) = \lfloor \frac{d}{2} \rfloor + 1$ olduğu bilinmektedir. Teorem 4.1.10 ve verilen eşitsizlikten $\kappa^s(FDSC_n, C_4) \leq \lfloor \frac{d}{2} \rfloor + 1$ elde edilir. \square

Aşağıda $d \geq 1$ olmak üzere $FDSC_n$ çizgesinin C_4 -altyapı bağlantılılık değeri için bir alt sınır ispatlanmıştır.

Yardımcı Teorem 4.2.6 Herhangi $d \geq 1$ tamsayısı için $n = 2^d$ olmak üzere $\kappa^s(FDSC_n, C_4) \geq \lfloor \frac{d}{2} \rfloor + 1$ eşitsizliği sağlanır.

İspat. Eşitsizlik n üzerinde tümevarım ile ispat edilecektir. $d = 1$ ve $d = 2$ olduğunda ifadenin geçerli olduğu kolaylıkla kontrol edilebilir. İfadenin $FDSC_{\frac{n}{2}}$ için doğru olduğu kabul edilsin.



Şekil 4.17 $d = 1$ ve $d = 2$ olduğunda $FDSC_n$ çizgesi için bir C_4 -altyapı-kesim küme

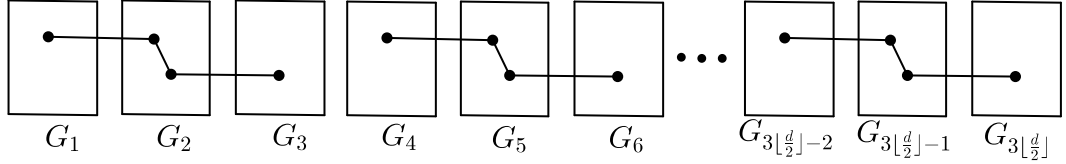
$FDSC_n$ çizgesinin, $|\mathcal{F}| \leq \lfloor \frac{d}{2} \rfloor$ olacak şekilde bir \mathcal{F} C_4 -altyapı-kesim kümesi olduğu ve her $F_j \in \mathcal{F}$ çizgesinin C_4 çizgesinin bağlantılı altçizgesine izomorf olduğu varsayalım.

Her $i \in N$ için $FDSC_{\frac{n}{2}}^i$ çizgesi $FDSC_n$ çizgesinin bir modülü olmak üzere $\mathcal{F}^i = \bigcup_{F_j \in \mathcal{F}} F_j \cap FDSC_{\frac{n}{2}}^i$ olsun. Burada \mathcal{F}^i kümesinin herhangi bir elemanının C_4 çizgesinin bağlantılı altçizgesine izomorf olduğu açıktır. Tanım 3.0.2 ve $|\mathcal{F}| \leq \lfloor \frac{d}{2} \rfloor$ olduğundan, her $i \in N$ için $|\mathcal{F}^i| \leq \lfloor \frac{d}{2} \rfloor$ eşitsizliği sağlanır. Ayrıca

$$|V(\mathcal{F})| \leq |V(C_4)| \times |\mathcal{F}| \leq 4 \lfloor \frac{d}{2} \rfloor$$

olduğu açıktır.

$T = \{i \mid \mathcal{F} \cap G_i \neq \emptyset\}$ ve $G_T = \cup_{i \in T} G_i$ olarak alınsın. İspat boyunca, eğer $\mathcal{F} \cap G_i = \emptyset$ ise G_i modülü bozulmamış modül olarak adlandırılacaktır. Burada G_T kümesi, geriye kalan $FDSC_n - \mathcal{F}$ çizgesindeki bozulmuş modüllerin birleşimini gösterir. Yardımcı Teorem 4.0.1 (4) ile $FDSC_n - G_T$ çizgesinin bağlantılı olduğu görülmektedir. İncelenmesi gereken iki durum bulunmaktadır.



Şekil 4.18 $FDSC_n - \mathcal{F}$ çizgesinde en fazla bozulmuş modülün olabileceği durum

Durum 1. Herhangi bir $i \in N$ için $|\mathcal{F}^i| \leq \lfloor \frac{d}{2} \rfloor - 1$ olsun.

Bu durumda her $i \in N$ için $|\mathcal{F}^i| \leq \lfloor \frac{d}{2} \rfloor - 1 \leq \lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor$ eşitsizliği sağlanır ve tümevarım hipotezi gereğince $G_i - \mathcal{F}^i$ çizgesinin bağlantılı olduğu sonucuna varılır.

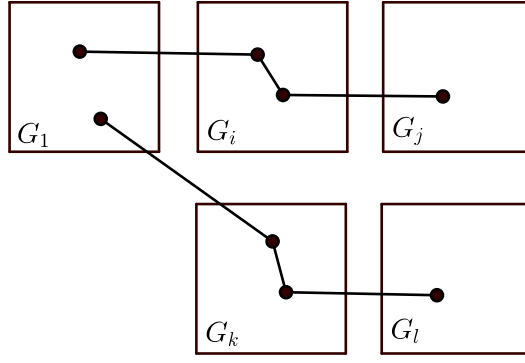
$|\mathcal{F}| \leq \lfloor \frac{d}{2} \rfloor$ olduğundan Yardımcı Teorem 4.0.1 ile $FDSC_n - \mathcal{F}$ çizgesinde en fazla $3\lfloor \frac{d}{2} \rfloor$ bozulmuş modül mevcuttur (Bkz. Şekil 4.18). Herhangi bir $i \in T$ için $G_i - \mathcal{F}^i$ çizgesindeki tepelerin dış komşuları dikkate alınsın. Bu durumda $d \geq 3$ olmak üzere her $i \in T$ için

$$\begin{aligned} |V(G_i - \mathcal{F}^i)| &\geq |V(G_i)| - |V(\mathcal{F})| \\ &\geq 2^{\frac{n}{2}} - 4\lfloor \frac{d}{2} \rfloor \\ &> 3\lfloor \frac{d}{2} \rfloor - 1 \end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır. Bu nedenle, her $i \in T$ için $G_i - \mathcal{F}^i$ çizgesindeki bir tepenin dış komşusu $FDSC_n - G_T$ çizgesinde olup $G_i - \mathcal{F}^i$ çizgesi ile $FDSC_n - G_T$ çizgesini bağlayan hatasız bir ayrıntı vardır. Dolayısıyla, $FDSC_n - \mathcal{F}$ çizgesi bağlantılıdır. Bu ise \mathcal{F} kümesinin C_4 -altyapı-kesim küme olmasıyla çelişir.

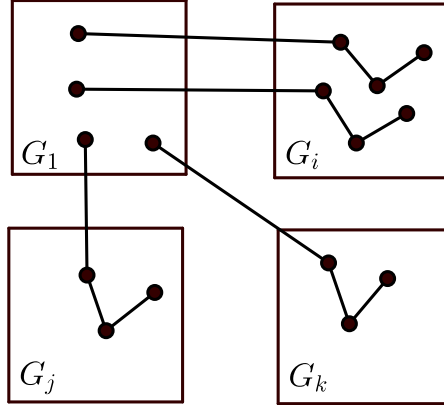
Durum 2. Bazı $i \in N$ için $|\mathcal{F}^i| = \lfloor \frac{d}{2} \rfloor$ olsun ve $i = 1$ olarak alınsın.

Bu durumda $|\mathcal{F}^1| = |\mathcal{F}| = \lfloor \frac{d}{2} \rfloor$ olduğundan, Yardımcı Teorem 4.0.1 ile G_1 dışında en fazla $2\lfloor \frac{d}{2} \rfloor$ bozulmuş modül vardır ve bu modüller \mathcal{F}^1 kümesindeki tepelerin dış komşularını içerir (Bkz. Şekil 4.19).



Şekil 4.19 (2) durumu için G_1 modülü dışında $FDSC_n - \mathcal{F}$ çizgesinde en fazla bozulmuş modül içerecek durum

Yardımcı Teorem 4.0.1 ile $i \in T - \{1\}$ için $|\mathcal{F}^i|$ değeri 1 ya da 2 olur. Ayrıca her $F_i \in \mathcal{F}$ için $F_i \cap G_1 \neq \emptyset$ olduğundan $i \in T - \{1\}$ için $|\mathcal{F}^i| = 2$ durumunu sağlayan en fazla bir modül vardır. Genelliği kaybetmeden, $|\mathcal{F}^2|$ değerinin 1 veya 2 olduğu kabul edilsin. Bu nedenle her $i \in T - \{1, 2\}$ için $|\mathcal{F}^i| = 1$ olur. Belirtmek gerekir ki, herhangi bir $i \in T - \{1\}$ için G_i çizgesinde en fazla 6 tane hatalı tepe mevcuttur (Bkz. Şekil 4.20).



Şekil 4.20 (2) durumu için G_1 modülü dışındaki herhangi bir modülün en fazla hatalı tepe içereceği durum

Şimdi geriye kalan $FDSC_n - \mathcal{F}$ çizgesindeki her bir modülün bağlantılılık durumu dikkate alınsın.

Her $i \in T - \{1\}$ için $|\mathcal{F}^i| \leq 2$ olduğu bilinmektedir. Diğer taraftan tümevarım hipotezinden $\kappa^s(FDSC_{\frac{n}{2}}; C_4) \geq \lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor + 1$ olur ve $d \geq 5$ için $\lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor + 1 > 2$ eşitsizliği

sağlanır. Böylelikle $d \geq 5$ olduğunda her $i \in T - \{1\}$ için $G_i - \mathcal{F}^i$ çizgesi bağlantılıdır.

Eğer $d \geq 5$ ise, her $i \in T - \{1\}$ için

$$|V(G_i - \mathcal{F}^i)| \geq 2^{\frac{n}{2}} - 6 > 2 \lfloor \frac{d}{2} \rfloor$$

sağlanır. $FDSC_n - \mathcal{F}$ çizgesinde G_1 modülü haricinde en fazla $2 \lfloor \frac{d}{2} \rfloor$ bozulmuş modül olduğundan, her $i \in T - \{1\}$ için $G_i - \mathcal{F}^i$ çizgesindeki bir tepenin dış komşusu $FDSC_n - G_T$ çizgesindedir. Yani, $G_i - \mathcal{F}^i$ çizgesi ile $FDSC_n - G_T$ çizgesini bağlayan hatasız bir ayrıt vardır. Dolayısıyla, $FDSC_n - G_1 - \mathcal{F}$ çizgesi bağlantılıdır.

$d \in \{3, 4\}$ olsun. O halde, tümevarım hipotezinden $\kappa^s(FDSC_{\frac{n}{2}}; C_4) \geq \lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor + 1 = 2$ elde edilir. Eğer $|\mathcal{F}^2| = 1$ ise, her $i \in T - \{1\}$ için $|\mathcal{F}^i| \leq 1$ olup $G_i - \mathcal{F}^i$ çizgesi bağlantılıdır. Buradan $FDSC_n - G_1 - \mathcal{F}$ çizgesinin bağlantılı olduğu kolaylıkla görülür. Eğer $|\mathcal{F}^2| = 2$ ise her $i \in T - \{1, 2\}$ için $|\mathcal{F}^i| \leq 1$ olup $G_i - \mathcal{F}^i$ çizgesi bağlantılıdır. Fakat, $G_2 - \mathcal{F}^2$ çizgesi bağlantılı olabilir veya olmayabilir. $|\mathcal{F}| \leq 2$ ve her $F_i \in \mathcal{F}$ için $F_i \cap G_1 \neq \emptyset$ olduğundan, G_1 ve G_2 dışında bozulmuş en fazla 2 modül vardır. Bu modüller G_3 ve G_4 olsun. Yani, $FDSC_n - \bigcup_{i=1}^4 G_i$ çizgesi bağlantılıdır. $G_2 - \mathcal{F}^2$ çizgesinde herhangi bir u tepesi ele alınsın. u tepesinin dış komşusu olan u_{d+1} tepesi $FDSC_n - \bigcup_{i=1}^4 G_i$ çizgesindedir. Ayrıca, $i \in \{3, 4\}$ için $|V(G_i) \cap V(\mathcal{F}^i)| \leq 1$ olduğu açıktır. Bu nedenle, $i \in \{3, 4\}$ için $G_i - \mathcal{F}^i$ çizgesindeki herhangi bir v tepesinin $FDSC_n - \bigcup_{i=1}^4 G_i$ çizgesinde v_{d+1} dış komşusu vardır. Dolayısıyla, her $i \in \{2, 3, 4\}$ için $G_i - \mathcal{F}^i$ ve $FDSC_n - \bigcup_{i=1}^4 G_i$ çizgelerini bağlayan hatasız ayrıt vardır. Böylece, $FDSC_n - G_1 - \mathcal{F}$ çizgesi bağlantılıdır.

İspatı tamamlamak için $d \geq 3$ olmak üzere $G_1 - \mathcal{F}^1$ çizgesinin tepeleri dikkate alınsın.

(i) $G_1 - \mathcal{F}^1$ çizgesi bağlantılı olsun. $d \geq 3$ olmak üzere

$$\begin{aligned} |V(G_1 - \mathcal{F}^1)| &\geq |V(G_1)| - |V(C_4)| \times |\mathcal{F}^1| \\ &\geq 2^{\frac{n}{2}} - 4 \lfloor \frac{d}{2} \rfloor \\ &> 2 \lfloor \frac{d}{2} \rfloor \end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır. G_1 dışında en fazla $2\lfloor \frac{d}{2} \rfloor$ bozulmuş modül olduğundan, $G_1 - \mathcal{F}^1$ çizgesindeki bir tepenin dış komşusu $FDSC_n - G_1 - \mathcal{F}$ çizgesindedir. Yani, $G_1 - \mathcal{F}^1$ çizgesi ile $FDSC_n - G_1 - \mathcal{F}$ çizgesini bağlayan hatasız bir ayrıt vardır. Dolayısıyla, $FDSC_n - \mathcal{F}$ çizgesi bağlantılıdır. Bu ise \mathcal{F} kümesinin C_4 -altyapı-kesim küme olmasıyla çelişir.

(ii) $G_1 - \mathcal{F}^1$ çizgesi bağlantısız olsun.

$u = B_1 B_1$ ve $v = \overline{B_1} B_1$ tepeleri G_1 modülünde B_1 adresli iki tepe olsun. Yardımcı Teorem 4.0.1 (2) ile u_{d+1} ve v_{d+1} tepelerinin aynı modülde oldukları açıktır. Bu modül G_2 olsun. $G_1 - \mathcal{F}^1$ çizgesindeki bir C bileşeni için $|V(C)| > 1$ ve $|V(C)| = 1$ durumları ayrı ayrı incelenecektir.

- $|V(C)| > 1$ olsun.

Eğer C bileşeninde $w_{d+1} \notin V(\mathcal{F})$ olan bir w tepesi varsa C bileşeni ile $FDSC_n - G_1 - \mathcal{F}$ çizgesi hatasız (w, w_{d+1}) ayrıtı ile bağlıdır. O halde, C bileşenindeki her w tepesinin w_{d+1} dış komşusunun $V(\mathcal{F})$ kümesinde olduğu yani bazı $F_i \in \mathcal{F}$ çizgesinde olduğu kabul edilsin. Yardımcı Teorem 4.0.1 ile $j \in T - \{1\}$ için $w_{d+1} \in V(G_j)$ olduğu açıktır. u ve v tepelerinin C bileşeninde olup olmama durumları göz önüne alındığında hiçbir tepesinin G_1 modülünde olmadığı bir F_i altçizgesi vardır. Yani, $F_i \cap G_j \neq \emptyset$ ve $F_i \cap G_1 = \emptyset$ olur ve bu durum $|\mathcal{F}^1| = |\mathcal{F}| = \lfloor \frac{d}{2} \rfloor$ olmasıyla çelişir. Bu nedenle, C bileşeninde $w_{d+1} \notin V(\mathcal{F})$ olan bir w tepesi vardır. Dolayısıyla, C bileşeni ile $FDSC_n - G_1 - \mathcal{F}$ çizgesi hatasız (w, w_{d+1}) ayrıtı ile bağlıdır.

- $|V(C)| = 1$ olsun. $V(C) = \{w\}$ alınsın.

$w \notin \{u, v\}$ olsun. w_{d+1} tepesinin bazı $F_i \in \mathcal{F}$ çizgesinde olduğu kabul edilsin. Yardımcı Teorem 4.0.1 (1) ile $w_{d+1} \notin V(G_1)$ olduğu açıktır. O halde, $j \in T - \{1\}$ için $w_{d+1} \in V(G_j)$ olsun. Yardımcı Teorem 4.0.1 ile F_i altçizgesinin hiçbir tepesinin G_1 modülünde olmadığı ve F_i altçizgesinin w_{d+1} tepesi dışındaki hiçbir tepesinin G_1 modülünde bir dış komşusu olmadığı görülür. Yani $F_i \cap G_j \neq \emptyset$ ve $F_i \cap G_1 = \emptyset$ olur ve bu durum $|\mathcal{F}^1| = |\mathcal{F}| = \lfloor \frac{d}{2} \rfloor$ olmasıyla çelişir. Bu nedenle, $w_{d+1} \notin V(\mathcal{F})$ olur. Dolayısıyla, C bileşeni ile $FDSC_n - G_1 - \mathcal{F}$ çizgesi hatasız (w, w_{d+1}) ayrıtı ile bağlıdır.

$w \in \{u, v\}$ olsun. $w = u$ (sırasıyla $w = v$) olduğu varsayalım. Eğer u ve v tepeleri G_1 modülünde komşu ise, $|V(C)| = 1$ olduğundan $v = \overline{B_1}B_1 \in V(\mathcal{F}^1)$ (sırasıyla $u = B_1B_1 \in V(\mathcal{F}^1)$) olur. Eğer w_{d+1} tepesi hatalı ise, tümevarım hipotezinden u (sırasıyla v) tepesinin $FDSC_{\frac{n}{2}}$ içindeki komşuları ele alındığında,

$$|\mathcal{F}| \geq \begin{cases} \lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor + 1 = \lfloor \frac{d}{2} \rfloor + 1, & d \text{ tek ise} \\ (\lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor + 1) + 1 = \lfloor \frac{d}{2} \rfloor + 1, & d \text{ çift ise} \end{cases}$$

eşitsizliğine ulaşılır ki bu $|\mathcal{F}| = \lfloor \frac{d}{2} \rfloor$ olması ile çelişir. Böylece, w_{d+1} hatasız bir tepedir ve bu yüzden C bileşeni ve $FDSC_n - G_1 - \mathcal{F}$ çizgesi hatasız (w, w_{d+1}) ayrıtı ile bağlıdır.

Eğer u ve v tepeleri G_1 modülünde komşu değilse, u_{d+1} ve v_{d+1} tepeleri de komşu değildir. w_{d+1} tepesinin herhangi bir $F_i \in \mathcal{F}$ altçizgesinde olduğu kabul edilsin. Yardımcı Teorem 4.0.1 (1) ile $w_{d+1} \notin V(G_1)$ olur. $j \in T - \{1\}$ için $w_{d+1} \in V(G_j)$ olsun. Yardımcı Teorem 4.0.1 ile F_i çizgesindeki hiçbir tepenin G_1 modülünde olmadığı ve F_i altçizgesinin w_{d+1} tepesi dışındaki hiçbir tepesinin G_1 modülünde bir dış komşusu olmadığı anlaşılır. Yani, $F_i \cap G_j \neq \emptyset$ ve $F_i \cap G_1 = \emptyset$ olur ve bu da $|\mathcal{F}^1| = |\mathcal{F}| = \lfloor \frac{d}{2} \rfloor$ olmasıyla çelişir. Bu sebeple, w_{d+1} hatasız bir tepedir ve böylece C bileşeni ile $FDSC_n - G_1 - \mathcal{F}$ çizgesi hatasız (w, w_{d+1}) ayrıtı ile bağlıdır.

Böylelikle $G_1 - \mathcal{F}^1$ çizgesindeki herhangi bir C bileşeni ile $FDSC_n - G_1 - \mathcal{F}$ çizgesi bağlıdır. Yani, $FDSC_n - \mathcal{F}$ çizgesi bağlantılıdır. Bu ise \mathcal{F} kümesinin C_4 -altyapı-kesim küme olmasıyla çelişir.

Sonuç olarak $d \geq 1$ olmak üzere $\kappa^s(FDSC_n; C_4) \geq \lfloor \frac{d}{2} \rfloor + 1$ elde edilir. \square

Yardımcı Teorem 4.2.5 ve Yardımcı Teorem 4.2.6 ile aşağıdaki sonuç elde edilir.

Teorem 4.2.7 Herhangi bir $d \geq 1$ tamsayısı için $n = 2^d$ olmak üzere $\kappa^s(FDSC_n; C_4) = \lfloor \frac{d}{2} \rfloor + 1$ eşitliği sağlanır.

Yardımcı Teorem 4.2.7 ve $\kappa(FDSC_n; C_4) \geq \kappa^s(FDSC_n; C_4)$ eşitsizliğinden yararlanarak $d \geq 4$ olmak üzere $FDSC_n$ çizgesinin C_4 -yapı bağlantılılık değeri için bir alt sınır elde edilir.

Yardımcı Teorem 4.2.8 Herhangi bir $d \geq 4$ için $n = 2^d$ olmak üzere $\kappa(FDSC_n; C_4) \geq \lfloor \frac{d}{2} \rfloor + 1$ eşitliği sağlanır.

Yardımcı Teorem 4.2.4 ve Yardımcı Teorem 4.2.8 ile aşağıdaki sonuç verilebilir.

Teorem 4.2.9 Herhangi bir $d \geq 4$ için $n = 2^d$ olmak üzere $\lfloor \frac{d}{2} \rfloor + 1 \leq \kappa(FDSC_n; C_4) \leq d + 1$ eşitliği sağlanır.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tez çalışmasında katlı divide-and-swap küplerinde olası tüm yıldız yapıları için yıldız-yapı ve yıldız-altyapı bağlantılılık değerleri belirlenmiştir. İlk olarak $FDSC_n$ çizgesinin $K_{1,1}$ -yapı bağlantılılık ve $K_{1,1}$ -altyapı bağlantılılık değerlerinin $d \geq 3$ ve $n = 2^d$ olmak üzere $d + 1$ olduğu gösterilmiştir. Ardından $2 \leq m \leq d + 2$ için $FDSC_n$ çizgesinin $K_{1,m}$ -altyapı bağlantılılık değeri $\lfloor \frac{d}{2} \rfloor + 1$ olarak ispatlanmış ve böylece $K_{1,m}$ -altyapı bağlantılılık değeri m tamsayısının tüm değerleri için bir eşitlik olarak elde edilmiştir. $d \geq 3$ ve $n = 2^d$ olmak üzere $2 \leq m \leq d + 1$ için $FDSC_n$ çizgesinin $K_{1,m}$ -yapı bağlantılılık değeri $\lfloor \frac{d}{2} \rfloor + 1$ olarak ispat edilmiştir. $d \geq 3$ ve $n = 2^d$ olmak üzere $m = d + 2$ olduğunda ise $K_{1,m}$ -yapı bağlantılılık değeri için d çift iken $\lfloor \frac{d}{2} \rfloor + 1 \leq \kappa(FDSC_n; K_{1,d+2}) \leq \lfloor \frac{d}{2} \rfloor + 2$ ve d tek iken $\lfloor \frac{d}{2} \rfloor + 1 \leq \kappa(FDSC_n; K_{1,d+2}) \leq \lfloor \frac{d}{2} \rfloor + 3$ olarak bir alt ve üst sınır belirlenmiştir.

Ardından, $FDSC_n$ çizgesinin C_4 -yapı bağlantılılık ve C_4 -altyapı bağlantılılık değerleri belirlenmiştir. $4 \leq n \leq 8$ ve $n = 2^d$ olmak üzere $\kappa(FDSC_n; C_4) = 3 + 2(d - 2)$ olarak belirlenmiştir. $n \geq 16$ ve $n = 2^d$ olmak üzere C_4 -yapı bağlantılılık değeri $\lfloor \frac{d}{2} \rfloor + 1 \leq \kappa(FDSC_n; C_4) \leq d + 1$ eşitsizliği ile verilmiştir. Herhangi bir $d \geq 1$ tamsayısı için $FDSC_n$ çizgesinin C_4 -altyapı bağlantılılık değeri ise $\lfloor \frac{d}{2} \rfloor + 1$ eşitliği ile verilmiştir.

Bu çalışmadaki sonuçlar TÜBİTAK 1002-A kodlu Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Projelerini Destekleme Programı 122F276 numaralı bilimsel araştırma projesi çerçevesinde elde edilmiştir.

6. KAYNAKLAR

- Ba, L., Wu, H., & Zhang, H. (2023). Star-structure connectivity of folded hypercubes and augmented cubes. *The Journal of Supercomputing*, 79(3), 3257–3276.
- Ba, L., & Zhang, H. (2022a). The cycle-structure connectivity of crossed cubes. *Theoretical Computer Science*, 922, 335–345.
- Ba, L., & Zhang, H. (2022b). The star-structure connectivity and star-substructure connectivity of hypercubes and folded hypercubes. *The Computer Journal*, 65(12), 3156–3166.
- Ba, L., & Zhang, H. (2023). Structure connectivity of data center networks. *Applied Mathematics and Computation*, 451, 128022.
- Chang, Y.-H., Pai, K.-J., Hsu, C.-C., Yang, J.-S., & Chang, J.-M. (2021). Constructing dual-cists of folded divide-and-swap cubes. *Theoretical Computer Science*, 856, 75–87.
- Chelvam, T. T., & Sivagami, M. (2021). Structure and substructure connectivity of circulant graphs and hypercubes. *Arab J. Math. Sci.*, 27(1), 94–103.
- Feng, W., & Wang, S. (2021). Structure connectivity and substructure connectivity of wheel networks. *Theoretical Computer Science*, 850, 20–29.
- Jin, D., & Liu, H.-m. (2018). The structure fault-tolerance of enhanced hypercube networks. *DEStech Transactions on Engineering and Technology Research (ECAR 2018)*, 94–103.
- Kim, J.-S., Kim, D., Qiu, K., & Lee, H.-O. (2019). The divide-and-swap cube: a new hypercube variant with small network cost. *The Journal of Supercomputing*, 75, 3621–3639.
- Lei, Y., & Meng, J. (2020). Structure fault-tolerance of arrangement graphs. *Applied Mathematics and Computation*, 381, 125287.
- Li, C., Lin, S., & Li, S. (2020). Structure connectivity and substructure connectivity of star graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 284, 472–480.
- Li, D., Hu, X., & Liu, H. (2019). Structure connectivity and substructure connectivity of twisted hypercubes. *Theoretical Computer Science*, 796, 169–179.
- Lin, C.-K., Zhang, L., Fan, J., & Wang, D. (2016). Structure connectivity and

- substructure connectivity of hypercubes. *Theoretical Computer Science*, 634, 97–107.
- Lü, H., & Wu, T. (2020). Structure and substructure connectivity of balanced hypercubes. *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, 43(3), 2659–2672.
- Lv, Y., Fan, J., Hsu, D. F., & Lin, C.-K. (2018). Structure connectivity and substructure connectivity of k-ary n-cube networks. *Information Sciences*, 433, 115–124.
- Lv, Y., & Xu, Y. (2017). K_{1,1}-structure connectivity and k_{1,1}-substructure connectivity of torus networks. In *2017 29th chinese control and decision conference (ccdc)* (pp. 5998–6003).
- Ning, W. (2020). Connectivity and super connectivity of the divide-and-swap cube. *Theoretical Computer Science*, 842, 1–5.
- Pan, K., & Cheng, D. (2023). Star structure connectivity of cayley graphs generated by transposition trees. *The Journal of Supercomputing*, 79(4), 4398–4411.
- Pan, Z., & Cheng, D. (2020). Structure connectivity and substructure connectivity of the crossed cube. *Theoretical Computer Science*, 824, 67–80.
- Sabir, E., & Meng, J. (2018). Structure fault tolerance of hypercubes and folded hypercubes. *Theoretical Computer Science*, 711, 44–55.
- Wang, G., Lin, C.-K., Cheng, B., Fan, J., & Fan, W. (2019). Structure fault-tolerance of the generalized hypercube. *The Computer Journal*, 62(10), 1463–1476.
- Xue, C., Zhou, S., & Zhang, H. (2023). The bounds of generalized 4-connectivity of folded divide-and-swap cubes. *Journal of Interconnection Networks*, 2350016.
- You, L., Han, Y., Wang, X., Zhou, C., Gu, R., & Lu, C. (2018). Structure connectivity and substructure connectivity of alternating group graphs. In *2018 ieee international conference on progress in informatics and computing (pic)* (pp. 317–321).
- You, L., Jiang, J., & Han, Y. (2023). Super spanning connectivity of the folded divide-and-swapcube. *Mathematics*, 11(11), 2581.
- Zhang, G., & Wang, D. (2019). Structure connectivity and substructure connectivity of bubble-sort star graph networks. *Applied Mathematics and Computation*, 363, 124632.

- Zhao, L., & Wang, S. (2023). Structure connectivity and substructure connectivity of split-star networks. *Discrete Applied Mathematics*, 341, 359–371.
- Zhao, S.-L., & Chang, J.-M. (2023a). Connectivity, super connectivity and generalized 3-connectivity of folded divide-and-swap cubes. *Information Processing Letters*, 182, 106377.
- Zhao, S.-L., & Chang, J.-M. (2023b). Reliability assessment of the divide-and-swap cube in terms of generalized connectivity. *Theoretical Computer Science*, 943, 1–15.
- Zhou, Q., Zhou, S., Liu, J., & Liu, X. (2021). Structure and substructure connectivity of divide-and-swap cube. *Theoretical Computer Science*, 880, 20–36.
- Zhou, Q., Zhou, S., Liu, X., & Yu, Z. (2022). Reliability of divide-and-swap cube based on r-component connectivity and diagnosability. *Journal of Interconnection Networks*, 22(01), 2142021.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Muhammed Türkmen

Doğum Yeri ve Tarihi :

Lisans Üniversite : Ege Üniversitesi

Yüksek Lisans Üniversite : Ordu Üniversitesi

İletişim Adresi :

Yayın Listesi

1. Türkmen, M., Çiftçi, C., Ekinci, G. B. (2023). Structure and substructure connectivity of folded divide-and-swap cube. arXiv preprint arXiv:2311.11323.

Proje

1. Regüler Çizgelerde Yapısal Bağlantılılık, Tübitak 1002-A Hızlı Destek,
Yürütücü:Gülnaz Boruzanlı Ekinci, Araştırmacı:Canan Çiftçi,
Bursiyerler:Muhammed Türkmen, Dilek Bilbay, 01/10/2022-01/10/2023.

Uluslararası Konferanslarda Sunulan Bildirileri

1. Türkmen, M., Çiftçi, C., Boruzanlı Ekinci, G., Reliability Assessment of Folded Divide-and-Swap Cube in terms of Structure and Substructure Connectivity, 6th International Conference on Mathematical and Related Sciences, 2023.