T. C.

ORDU ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MENGER KONVEKS METRİK UZAYLARDA SABİT NOKTALAR VE EN İYİ YAKLAŞIM

GİZEM BEDİR YARAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ORDU 2022

TEZ BİLDİRİMİ

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan ve kullanılan intihal tespit programının sonuçlarına göre; bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

GİZEM BEDİR YARAR

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

MENGER KONVEKS METRİK UZAYLARDA SABİT NOKTALAR VE EN İYİ YAKLAŞIM

GİZEM BEDİR YARAR

ORDU ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ, 40 SAYFA

TEZ DANIŞMANI: DR. ÖĞR. ÜYESİ ERDAL ÜNLÜYOL

Bu yüksek lisans tezinde, Metrik uzaylarda M-konveks küme ve konveks fonksiyon kavramı; M-konvekslik, kesin M-konveks ve düzgün M-konveks metrik uzaylar arasındaki bağıntılar; Metrik uzayların M-konveks alt kümelerini için en iyi yaklaşım teoremlerinin incelenmesi; Menger konveks metrik uzayda, sabit noktaların varlığı için gerekli şartların gözden geçirilmesi; Düzgün konveks tam bir metrik uzayın kompakt bir konvesk alt kümesinde genişlemeyen ve kuazi genişlemeyen dönüşümlerin sabit noktalarına yaklaşımı ile ilgili teoremler; Kesin konveks bir metrik uzayda bir sabir nokta için en iyi yaklaşım sonuçları üzerinde çalışmalar yapılmıştır. bulunmaktadır.

Anahtar Sözcükler: Sabit nokta, Menger konveks metrik uzay, en iyi yaklaşım.

ABSTRACT

FIXED POINTS AND BEST APPROXIMATION IN MENGER CONVEX METRIC SPACE

GİZEM BEDİR YARAR

ORDU UNIVERSITY INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

MATHEMATICS

MASTER THESIS, 40 PAGES

SUPERVISOR: ASSIST. PROF. DR. ERDAL ÜNLÜYOL

In this master's thesis, M-convex set and convex function concept in metric spaces; Relationships between M-convexity, definite M-convex and regular M-convex metric spaces; Investigation of best approximation theorems for M-convex subsets of metric spaces; Reviewing the conditions for the existence of fixed points in the Menger convex metric space; Theorems on the approximation of non-expanding and quasi-nonexpanding transformations to fixed points of a properly convex complete metric space in a compact convex subset; The best approximation results for a fixed point in a strictly convex metric space have been studied.

Keywords: Fixed point, Menger convex metric space, best approximation.

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca bilgi ve deneyimleriyle her türlü yanımda olan danışman hocam Sayın Dr. Öğr. Üyesi Erdal ÜNLÜYOL'a en içten duygularımla teşekkürlerimi iletiyorum.

Yüksek lisans eğitim-öğretim süresince değerli bilgilerinden istifade ettiğim Ordu Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü öğretim üyeleri ve araştırma görevlilerine teşekkür ederim.

Eğitim hayatım süresince maddi-manevi desteklerini esirgemeyen annem Çiğdem BEDİR ve babam Latif BEDİR, eşim Enes YARAR, kardeşlerim Zöhrenur, Furkan BEDİR ve arkadaşlarıma teşekkür ediyorum.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER ve KISALTMALAR LİSTESİ

$\mathbb{N}$	:	Doğal Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}_{\mathbf{0}}$	:	$[\mathbf{0}, +\infty)$ aralığı
$\mathbb{R}^{+}$	:	$(0, +\infty)$
$\mathbb{R}$	:	Reel Sayılar Kümesi, $(-\infty, +\infty)$
(X, d)	:	X kümesi üzerinde d fonksiyonuna göre bir metrik uzay
$\|\| x \|\|$	:	x elemanının normu
max	:	Maksimum
min	:	Minimum
sup	:	Supremum
inf	:	İnfimum

1. GİRİŞ

Genişlemeyen dönüşümler, son yıllarda bir çok yazar tarafından çalışılmıştır. Kompakt olmayan kümelerde lineer olmayan genişlemeyen dönüşümler için ilk olarak genel sabit nokta teoremi birbirinden bağımsız şekilde Browder ve Gohde tarafından ispat edilmiştir [22], [26]. Daha sonra, Kirk, daha zayıf iddialar altında aynı sonuçları ispatladı [31]. Genişlemeyen dönüşümlerin sabit nokta teorisindeki bir temel problem, bu dönüşümler için sabit nokta özelliğine sahip olan bir kümeyi bulmaktır. Bu diferansiyel denklemlerle ve Banach uzaylarının geometrisi ile yakından bağlantılıdır. Banach uzaylarının geometrisi ve sabit nokta teorisi arasındaki etkileşim çok güçlü ve verimlidir. Özel olarak, geometrik özellikler metrik sabit nokta problemlerinde önemli bir rol oynamaktadır. Bu sonuçlar esas olarak konvekslik hipotezleri ve Banach uzaylarının geometrik özelliklerinde kullanılır. Daha önce bir alanda elde edilmiş sonuçlar, yeni matematik alanlarının başlangıç noktasıdır. Örneğin, sabit nokta teorisi için Banach uzaylarının geometri teoresine uygulanmasıdır. Normlu uzayda alt kümelerin yakınlığı problemi literatürde yoğun bir şekilde çalışılmıştır. Aranzajn ve Parütchapakdi [16] ve Menger [11] kapalı bir top boyunca metrik uzay üzerinde konvekslik yapısını tanımlamış ve özelliklerini çalışmıştır. Khalil [29] bu konveks metrik uzaylarda sabit noktaların varlığını ve en iyi yaklaşımı çalışmıştır. Biz ise bu yüksek lisans tez çalışmasında, Beg ve Abbas ın makalesini ayrıntılı bir şekilde inceledik, yani bir metrik uzayın konveks yapısı, bu uzayın geometrik özellikleri, sabit noktaların varlığı, sabit noktalar kümesinin yaklaşım sabit noktalarını ve yapısını inceledik. Ayrıca bir konveks metrik uzayda konveks olmayan kümelerin sınıfı üzerinde tanımlı dönüşüm için invaryant yaklaşımı üzerindeki sonuçları inceledik.

2. GENEL BİLGİLER

Bu bölümde tez için gerekli olan bazı tanım ve teoremler verilmiştir.

Tanım 2.0.1 (Metrik Ve Metrik Uzay) X boş olmayan bir küme olsun. $d : X \times X = \big\{(x, y) : x, y \in X\big\} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için

$$\begin{aligned} &\textbf{M1)} \quad d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y, \\ &\textbf{M2)} \quad d(x,y) = d(y,x) \\ &\textbf{M3)} \quad d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) \end{aligned}$$

şartlar sağlanıyorsa d ye X de veya X üzerinde metrik denir. Bu durumda (X, d) ye metrik uzay denir.

Tanım 2.0.2 (Metrik Uzayda Yakınsaklık) (X, d) bir metrik uzayında bir dizi (x_n) olsun. $x \in X$ olmak üzere her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık her $n \in n_0$ için $d(x, x_n) < \varepsilon$ olacak biçimde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ varsa (x_n) dizisi $x \in X$ ye yakınsar denir.

Tanım 2.0.3 (Tam Metrik Uzay) (X, d) bir metrik uzay ve (x_n) bu uzayda bir dizi olsun. Verilmiş herhangi bir $\varepsilon > 0$ ve $m, n \geq n_0$ için

$$d(x_m, x_n) < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $n_0 = n_0(\varepsilon)$ sayısı varsa (x_n) dizisine Couchy dizisi denir. X deki her (x_n) Couchy dizisi yakınsaksa (X, d) metrik uzayına tam metrik uzay veya tam demir.

Tanım 2.0.4 (Metrik Uzayda Açık Yuvar) (X, d) bir metrik uzay, $x_0 \in X$ ve $r > 0$ bir reel sayı olsun.
$D(x_0; r) = \{x \in X : d(x, x_0) < r\}$ kümesine x_0 merkezli ve r yarıçaplı açık yuvar denir.

Tanım 2.0.5 (Metrik Uzayda Kapalı Yuvar) (X, d) bir metrik uzay, $x_0 \in X$ ve $r > 0$ bir reel sayı olsun.
$\overline{D}(x_0; r) = \{x \in X : d(x, x_0) \leq r\}$ kümesine x_0 merkezli ve r yarıçaplı kapalı yuvar denir.

Tanım 2.0.6 (Metrik Uzayda Yuvar Yüzeyi) (X, d) bir metrik uzay, $x_0 \in X$ ve $r > 0$ bir reel sayı olsun.
$S(x_0; r) = \{x \in X : d(x, x_0) = r\}$ kümesine x_0 merkezli ve r yarıçaplı yuvar yüzeyi denir.

Tanım 2.0.7 (Metrik Uzayda Kompaktlık) X metrik uzay olsun. X deki her bir dizinin yakınsak bir alt dizisi varsa X'e kompakt denir.

Tanım 2.0.8 (Süreklilik) (X_1, d_1) ve (X_2, d_2) iki metrik uzay ve $f : X_1 \to X_2$ fonksiyonu verilsin. $x_0 \in X_1$ olmak üzere her $\varepsilon > 0$ sayısı için $d_1(x, x_0) < \delta$ olduğunda $d_2(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa f ye x_0 noktasında süreklidir denir. Eğer f , X_1 in her noktasında sürekli ise f ye X_1 de süreklidir denir.

Tanım 2.0.9 (Norm ve Normlu Uzay) N bir lineer uzay olmak üzere $||.|| : N \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

N1. $||x|| \geq 0, ||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

N2. $||\alpha x|| = |\alpha|.||x||$

N3. $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$

şartlarını sağlıyor ise $||.||$ ye N üzerinde bir norm, $(N, ||.||)$ ikilisine ise normlu uzay denir.

Tanım 2.0.10 (Topoloji) X boş olmayan bir küme ve τ, X in alt kümelerinin bir ailesi olsun. Eğer τ ya X için bir topoloji veya topolojik yapı, (X, τ) e topolojik uzay denir.

Tanım 2.0.11 (Konveks küme) L bir lineer uzay olsun.$A \subseteq L$ ve $p, q \in A$ olmak üzere

$$B = \{z \in L : z = \alpha p + (1 - \alpha)q, 0 \leq \alpha \leq 1\} \subseteq A$$

ise A kümesine konveks küme denir.

Tanım 2.0.12 (Konveks fonksiyon) I, $\mathbb{R}$ de bir aralık, $f : I \to \mathbb{R}$ fonksiyon olsun. Her $x, y \in I$, $\lambda \in [0, 1]$ olmak üzere

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

eşitsizliği geçerli ise f ye I üzerinde konveks fonksiyon denir.

Tanım 2.0.13 (Cauchy Dizisi) (X, d) bir metrik uzay olmak üzere (x_k), X uzayında bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $n, m > n_0$ olduğunda $|x_n - x_m| < \varepsilon$ olacak şekilde bir n_0 sayısı mevcutsa (x_k) dizisine bir Cauchy dizisi denir.
Yakınsak her dizi Cauchy dizisidir. Ancak bu ifadenin tersi doğru değildir. Metrik uzayda alınan bir Cauchy dizisi sınırlıdır ve bu dizinin yakınsak bir alt dizisi varsa kendisi de yakınsaktır.

Tanım 2.0.14 (Banach Uzayı) Bir normlu lineer uzayda alınan her Cauchy dizisi yakınsak ise bu uzaya Banach uzayı denir.
X normlu uzayının reel veya kompleks oluşuna göre Banach uzayı reel veya kompleks Banach uzayı olarak adlandırılır.

Tanım 2.0.15 (Sabit Nokta) X boş kümeden farklı bir küme ve $T : X \to X$ bir fonksiyon olsun.

$$Tx = x$$

eşitliğini sağlayan $x \in X$ noktasına T-nin bir sabit noktası denir.
Bu durumda $x \in X$ olmak üzere $Tx = x$ denkleminin çözümü, T-nin bir sabit noktasıdır ve T dönüşümünün tüm sabit noktalarının kümesi

$$F(T) = \{x \in X : Tx = x\}$$

ile gosterilir.
$T : X \to X$ ile tanımlanan bir T fonksiyonunun herhangi bir sabit noktası olmayabilir veya tek sabit noktası olabilir ya da birden fazla sabit noktası olabilir.

Tanım 2.0.16 (Lipschitzian Dönüşümü) (X, d) bir metrik uzay ve $T : X \to X$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ için;

$$d(Tx, Ty) \leq kd(x, y)$$

olacak şekilde bir $k \geq 0$ sabiti varsa, T ye X üzerinde Lipschitzian dönüşümü adı verilir. Bu eşitsizliğe Lipschitz şartı ve bu şartı sağlayan en küçük k değerine de Lipschitz sabiti denir.

Yukarıdaki tanıma göre her T Lipschitzian dönüşümü düzgün süreklidir. Çünkü, her $\varepsilon > 0$ için $d(x, y) < \delta = \frac{\varepsilon}{k} \Rightarrow kd(x, y) < \delta = \varepsilon$ olduğundan

$$\begin{aligned} d(Tx, Ty) &\leq kd(x, y) \\ &< k\frac{\varepsilon}{k} = \varepsilon \end{aligned}$$

yazılır. Yani T Lipschitzian dönüşümü, tanımlı olduğu küme üzerinde düzgün süreklidir.

Tanım 2.0.17 (Daralma Dönüşümü) (X, d) bir metrik uzay ve $T : X \to X$ bir Lipschitzian dönüşümü olsun. Eğer $d(Tx, Ty) \leq kd(x, y)$ eşitsizliği $k \in [0, 1]$ olması durumunda sağlanıyorsa T ye daralma dönüşümü veya büzülme dönüşümü denir.

Örnek 2.0.1 $Tx = x$ ile tanımlı $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonunu göz önüne alalım. Bu durumda

$$|Tx - Ty| \leq |x - y|$$

eşitsizliği sağlanır. Bütün $x \in \mathbb{R}$ noktaları T dönüşümünün sabit noktalarıdır.

Teorem 2.0.1 (Banach Sabit Nokta Teoremi) X tam metrik uzay ve $T : X \to X$ bir daralma dönüşümü olsun. Bu durumda T dönüşümü X uzayında bir tek sabit noktaya sahiptir.

İspat 2.0.1 $x_0 \in X$keyfi bir nokta olsun.

$$x_1 = Tx_0, x_2 = Tx_1 = T^2x_0, ..., x_n = Tx_{n-1} = T^n x_0, ...$$

biçiminde tanımlı $\{x_n\}$ dizisi göz önüne alınsın. Bu durumda her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+1}) &= d(Tx_{n-1}, Tx_n) \\ &\leq \alpha d(x_{n-1}, x_n) \\ &. \\ &. \\ &. \\ &\leq \alpha^n d(x_0, x_1) \end{aligned}$$

olur. Buradan $m, n \in \mathbb{N}$ ve $m > n$ için

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + ... + d(x_{m-1}, x_m) \\ &\leq \alpha^n d(x_0, x_1) + \alpha^{n+1} d(x_0, x_1) + ... + \alpha^{m-1} d(x_0, x_1) \\ &= [\alpha^n + \alpha^{n+1} + ... + \alpha^{m-1} d(x_0, x_1)] \\ &\leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} d(x_0, x_1) \end{aligned}$$

bulunur ki bu $\{x_n\}$ dizisinin Cauchy dizisi olduğunu gösterir. X tam olduğundan

$$lim_{n \to \infty} x_n = z$$

olacak biçimde bir $z \in X$ noktası vardır. Ayrıca T sürekli olduğundan

$$z = lim_{n \to \infty} x_{n+1} = lim_{n \to \infty} Tx_n = T lim_{n \to \infty} x_n = Tz$$

elde edilir. Bu ise T dönüşümünün sabit noktasının var olduğunu gösterir. Şimdi $w \in X$ noktası T nin başka bir sabit noktası olsun. Bu durumda

$$0 < d(z, w) = d(Tz, Tw) \leq \beta d(z, w) < d(z, w)$$

elde edilir. Fakat bu bir çelişkidir. Yani T nin sabit noktası tektir. Böylece ispat tamamlanır.

3. YAPILAN ÇALIŞMALAR

3.1 M-Konvekslik ve En İyi Yaklaşımlar

Tanım 3.1.1 (X,d) bir metrik uzay olsun. Her $x, y \in X$, $x \neq y$ için

$$d(x,y) = d(x,z) + d(z,y)$$

olacak şekilde x ve y den farklı $z \in X$ var ise bu takdirde (X,d) metrik uzayına M-konveks denir.

Önerme 3.1.1 Her normlu lineer uzay bir M-konveks metrik uzaydır. Bu önermenin tersi genelde doğru değildir. Yani her metrik uzay M-konveks değildir ve aynı zamanda her M-konveks metrik uzay normlu lineer uzay değildir.

Örnek 3.1.1 K, $\mathbb{R}^n$ deki topolojiyle birlikte konveks olmayan kapalı bir alt küme olsun. Bu durumda K, M-konveks olmayan bir metrik uzaydır.

Örnek 3.1.2 U, $\mathbb{R}^2$ deki birim topu göstersin.Yani

$$U = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\right\}$$

bu durumda eğer U alışılmış Öklid metriği ile elde edilen bir uzay ise bu durumda U bir M-konveks metrik uzayıdır. Fakat normlu bir lineer uzay değildir.

Tanım 3.1.2 (X,d) bir metrik uzay olsun. Eğer birbirinden farklı her $x, y, t \in X$ ve $r > 0$ için yine x, y ve t den farklı

$$d(x,y) = d(x,z) + d(z,y) \tag{3.1.1}$$

$$d(x,t) \leq r, \quad d(y,t) \leq r, \quad d(z,t) < r \tag{3.1.2}$$

olacak şekilde bir $z \in X$ var ise, bu (X,d) metrik uzayına kesin M-konveks denir.

Örnek 3.1.3 $X = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\right\} \cup (0,0)$ ve her

$$x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in X$$

için

$$d(x,y) = max\left\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\right\}$$

şeklinde tanımlanan (X,d) nin bir M-konveks olduğunu görmek hiç de zor değildir. Şimdi bunun kesin M-konveks olmadığını gösterelim. Bunun için özel olarak

$$x = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}), \quad y = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$$

$$t = (0,0), \quad r = \frac{2}{3}$$

seçelim. Bu durumda kesin M-konveks tanımına göre X kümesi içerisinde z elemanı yoktur. Dolayısıyla kesin M-konveks değildir.

Tanım 3.1.3 (X,d) bir metrik uzay olsun. Eğer her pozitif ε ve r sayı çifti için onlara uygun pozitif bir δ sayısı var ise yani birbirinden farklı her $x, y, t \in X$ üçlüsü için

$$d(x,y) \geq \varepsilon, \;\; d(x,t) < r + \delta, \;\; d(y,t) < r + \delta$$

olacak şekilde

$$\begin{aligned} d(x,y) &= d(x,z) + d(z,y) \\ d(z,t) &\leq r \end{aligned}$$

özelliklerini sağlayan bir $z \in X$ bulunabiliyorsa bu (X,d) metrik uzayına düzgün M-konveks denir.

Örnek 3.1.4 $d(x,y) = |x - y|$ olacak şekilde (M,d) metrik uzayını göz önüne alalım. Bunun düzgün M-konveks olduğunu göstermek için

$$d(x,y) \geq \varepsilon, \;\; d(x,0) < r^{'}, \;\; d(y,0) < r^{'}$$

şartlarını kontrol ederek, birbirinden farklı x, y, t elemanları için

$$\begin{aligned} d(x,y) &= d(x,z) + d(z,y) \\ d(z,0) &< r \end{aligned}$$

olacak şekilde bir $z \in X$ olduğunu göstermek yeterlidir.

Önerme 3.1.2 Her düzgün M-konveks metrik uzay kesin M-konvekstir. Fakat tersi genelde doğru değildir.

Tanım 3.1.4 (X,d) bir metrik uzay olsun. Bu durumda eğer Xin her sınırlı kapalı alt kümesi kompakt ise bu (X,d) metrik uzayına tamamen tamdır denir.

Teorem 3.1.1 Her tamamen tam kesin M-konveks metrik uzay bir düzgün M-konvekstir.

İspat 3.1.1 (X,d) bir tamamen tam M-konveks metrik uzay olsun. $X \times X$ de tanımlı bir ρ metriği

$$\rho((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \left\{ d^2(x_1,x_2) + d^2(y_1,y_2) \right\}^{\frac{1}{2}}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda $(X \times X, \rho)$ bir tamamen tam metrik uzaydır. Dolayısıyla $S_t = \{(x, y) \in X \times X; d(x, t) \leq r\}$ kümesi $X \times X$ in kapalı ve sınırlı bir alt kümesidir ve böylece her $t \in X$ için kompaktır.

$d(x, y) + d(z, y) = (x, y)$ olsun. Buradan $\Phi_t(x, y) = r - d(z, t)$ şeklinde tanımlanan $\Phi_t : S_t \to \mathbb{R}$ fonksiyonunu göz önüne alalım. Bu durumda Φ, S_t üzerinde sürekli ve pozitiftir. Ayrıca her $t \in X$için

$$r - d(z, t) \geq \rho$$

olacak şekilde bir $\rho > 0$ sayısı mevcuttur, yani $d(z, t) \leq r - \rho < r$ olup ispat tamamlanır.

Tanım 3.1.5 (X, d) bir metrik uzay olsun. Her $x, y \in G$, $x \neq y$ için

$$d(x, z) + d(z, y) = d(x, y)$$

olacak şekilde G kümesinde bir z elemanı var ise (X, d) metrik uzayının bir alt kümesi olan G ye M-konveks denir.

Örnek 3.1.5 $X = \mathbb{R}$ ve her $x, y \in X$ için

$$d(x, y) = \frac{|x - y|}{1 + |x - y|}$$

metriğini tanımlayalım. Bu (X, d) metrik uzayı metrik lineer uzaylarda M-konveks olmayan konveks kümelerin varlığını gösterir. Aşağıdaki örnek ise diğer tarafın doğru olduğunu gösterir.

Örnek 3.1.6 $X = \mathbb{R}^2$ve her $x = (x_1, y_1), y = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ için d metriğini

$$d(x, y) = max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$$

şeklinde tanımlayalım. Ayrıca

$$G = \{(z_1, z_2) : 0 \leq z_1 \leq 2, z_2 = 0\} \cup \{(z_1, z_2) : z_1 = 2, 0 \leq z_2 \leq 1\}$$

kümesini göz önüne alalım. Bu durumda Gnin M-konveks olduğu fakat konveks olmadığı açıktır.

Tanım 3.1.6 (X, d) bir metrik uzay ve G bu metrik uzayın bir alt kümesi olsun. Bu durumda eğer her $x \in X$ için G de en az bir tane ξ elemanı var ise $x \in X$ için G de

$$d(x, \xi) = d(x, G) \equiv \inf_{z \in G} d(x, z)$$

olacak şekilde X in en iyi yaklaşımı olarak yine G içerisinde en az birtane ξ elemanı var ise bu durumda G ye proksiminal denir.
Eğer her $x \in X$ için

$$d(x, \xi) = d(x, G)$$

olacak şekilde tam olarak bir tane $\xi \in G$ mevcut ise G kümesine Chebyshev denir.

Tanım 3.1.7 G içerisinde x elemanlarının en iyi yaklaşımlarının kümesini $\Pi_{G(x)}$ ile göstereceğiz. Buradan $\Pi_G : X \to Y \subset G$ küme değerli fonksiyonunu

$$\Pi_G(x) = \{z \in G : d(x, z) = d(x, G)\}$$

şeklinde tanımlayabiliriz.
Şimdi X kümesi üzerinde $e_G(x) = d(x, G)$ şeklinde tanımlanan başka bir reel değerli fonksiyonu tanımlayabiliriz.
Bu durumda e_G nin düzgün sürekli olduğu açıktır. $\Pi_G(x)$ in sürekliliğine bakılmaksızın eğer G Chebyshev ise Π_G fonksiyonunun G nin her noktasında sürekli olduğu bilinmektedir.

Teorem 3.1.2 Eğer (X, d) bir M-konveks metrik uzay ve G, Xin bir Chebyshev alt kümesi ise bu durumda Xin M-konveks elemanına uygun z elemanı ve $\Pi_G(x)$ için

$$\Pi_G(z) = \Pi_G(x).$$

İspat 3.1.2 z nin tanımından

$$d(x, z) + d(z\Pi_G(x)) = d(x, \Pi_G(x))$$

yazabiliriz.
Şimdi eğer $\xi \in G$ ise bu durumda

$$d(z, \xi) \geq d(x, \xi) - d(x, z)$$

$$d(x, \Pi_G(x)) - d(x, z)$$
$$= d(z, \Pi_G(x))$$

elde ederiz. Bu ise bize $\Pi_G(x)$ in z elemanının bir en iyi yaklaşımı olduğunu gösterir. İddiaya göre G Chebyshev olduğundan $\Pi_G(x) = \Pi_G(z)$ bulunur. Bu ise ispatı tamamlar.

Teorem 3.1.3 Eğer (X, d) bir metrik uzay G, X in bir alt kümesi ve $y_0 \in G$ ise bu durumda $\Pi_G^{-1}(x)$ kapalıdır.
Ayrıca eğer $\Pi_G^{-1}(y_0)$ ve bazı $z \in X$ için

$$d(x, z) + d(z, y_0) = d(x_0, y_0)$$

ise bu durumda $z \in \Pi_G^{-1}(y_0)$.

İspat 3.1.3 Tanımdan dolayı yani

$$\begin{aligned} \Pi_G^{-1}(y_0) &= \{x \in X : d(x, y_0) = d(x, G)\} \\ &= \bigcap_{y \in G} \{x \in X : d(x, y_0) \leq d(x, y)\} \end{aligned}$$

yazabiliriz.
d metriğinin sürekliliğinden dolayı ispatın ilk kısmı açıktır.
Şimdi iddiaya göre $x_0 \in \Pi_G^{-1}(y_0)$ olduğundan her $y \in G$ için

$$d(x_0, y_0) \leq d(x_0, y)$$

yazabiliriz. z elemanı $d(x_0, z) + d(z, y_0) = d(x_0, y_0)$ eşitliğini sağladığından dolayı her $y \in G$ için

$$\begin{aligned} d(x, y_0) &= d(x_0, y_0) - d(x_0, z) \\ &\leq d(x_0, y_0) \leq d(x_0, y) \end{aligned}$$

olacak şekilde $z \in \Pi_G^{-1}(y_0)$ vardır.
Bu ise ispatı tamamlar.

Sonuç 3.1.1 Eğer G X içerisinde Chebyshev ise bu durumda her $x \in X$ için $\Pi_G^{-1}(\Pi_G(x))$ kümesi kapalıdır.

Sonuç 3.1.2 Genel olarak proksiminal kümeler veya Chebyshev kümeleri ne konvekstir nede M-konvekstir. Bunt [6] hangi şartlar altında her Chebyshev kümesinin konveks olacağı hakkında şartları elde edilmiştir. Fakat bu şartlar gereklidir ama yeterli değildir.

Tanım 3.1.8 (X, d) bir metrik uzay ve birbirinden farklı $x, y \in X$ için

$$d(x, z) + d(z, y) = d(x, y)$$

eşitliği sağlanacak şekilde $z \in X$ kümeleri mevcut ise bu kümeye bir Menger kümesi denir ve $M_{<x,y>}$ şeklinde gösterilir.
Başka bir ifadeyle

$$M_{<x,y>} = \{z \in X : d(x, z) + d(z, y) = d(x, y)\}$$

Örnek 3.1.7 $d(x,y) = \dfrac{|x-y|}{1+|x-y|}$ şeklinde tanımlanan $(\mathbb{R}, d)$ metrik uzayı herx, y nokta çifti için Menger kümesine sahiptir. Çünkü $d^*(x,y) = |x-y|$ şeklinde tanımlanan $(\mathbb{R}, d^*)$ metrik uzayı birbirinden farklı her nokta çifti için Menger kümesi sayılamazdır.

Sonuç 3.1.3 Her Menger kümesi kapalıdır.

Tanım 3.1.9 Eğer boş bir metrik uzay birbirinden farklı elemanların her çifti için sadece bir tane tekli Menger kümelerine sahip ise bu metrik uzaya Mengeryan denir.

Teorem 3.1.4 Bir kesin M-konveks Mengeryan metrik uzayı içerisindeki her M-konveks proksimal küme Chebyshev'dir.

İspat 3.1.4 Kabul edelim ki G, (X,d) kesin M-konveks Mengeryan metrik uzayı içerisinde bir M-konveks proksimal küme olsun. Bazı $x_0 \in X$ için muhtemel olan $y_1, y_2 \in G$ en iyi yaklaşım elemanı olsun. Yani

$$\Pi_G(x_0) = \{y_1, y_2\}$$

Bu durumda

$$d(x_0, y_1) = d(x_0, y) = inf_{\xi \in G} d(x, \xi) = r$$

yazabiliriz.

İddiaya göre X kesin M-konveks olduğu için $x \neq z \neq y$ için

$$d(x,z) < r$$

$$d(y_1, z) + d(z, y_2) = d(y_1, y_2)$$

olacak şekilde $z \in X$ elemanları mevcuttur. Fakat G bir M-konveks ve Xde mengeryan olduğu için $z \in G$dir. Fakat bu ise $r$nin tanımı ile çelişir. Bu ise ispatı tamamlar.

Tanım 3.1.10 (X,d) bir metrik uzay olsun. Eğer $lim_n d(x, y_n) = d(x, G)$ bu olacak şekilde G içinde olan her y_n dizisi için Gnin bir elemanına yakınsayan bir y_{n_k} alt dizisi mevcut ise bu durumda bu (X,d) metrik uzayındaki G kümesine yaklaşık olarak kompaktır denir.

Teorem 3.1.5 Bir düzgün M-konveks mengeryan metrik uzaydaki her tam M-konveks kümesi yaklaşık olarak kompaktır.

İspat 3.1.5 G bir (X,d) düzgün M-konveks mengeryan metrik uzayı içerisinde M-konveks tam küme olsun. Daha sonra G içerisinde $lim d(x, y_n) = d(x, G) = r$ olacak şekilde bir y_n dizisini alalım. İddiaya göre X düzgün M-konveks olduğu için aşağıda yazacağımız

eşitlikleri sağlayan bir $\delta > 0$ bulabiliriz.
$lim_n d(x, y_n) = r$ olduğu için $d(x, y_n) > r + \delta$ olacak şekilde $n \geq N$ bir pozitif tam sayısını seçebiliriz. $n, m \geq N$ için

$$d(x, y_n) < r + \delta,$$

$$d(x, y_m) < r + \delta$$

bağıntılarını verebiliriz.

Eğer $d(y_n, y_m) \geq \varepsilon$ ise bu durumda

$$d(y_n, y_0) + d(y_0, y_m) = d(y_n, y_m)$$

ve $d(x, y_0) < r$ olacak şekilde bir $y \in X$ vardır. İddiaya göre X, M-konveks ise mengeryan olduğu için $y \in G$ olup bu ise $r = d(x, G)$ ile çelişir.
Bu çelişkiden keyfi $\varepsilon > 0$ ve $m, n \geq N$ için $d(y_n, y_m) < \varepsilon$ elde edilir. Bu ise bize y_n nin bir Couchy dizisi olduğunu gösterir. Böylece ispat tamamlanır.

Tanım 3.1.11 (X, d) bir metrik uzay olsun. Eğer $lim_n d(p, y_n) = d(p, G)$ sağlayan Xin bir M-konveks G kümesi içerisindeki sabit bir $p \in X$ ve her y_n dizisi bir Couchy alt dizisine sahip ise bu takdirde (X, d) metrik uzayına P-özelliğine sahiptir denir.

Teorem 3.1.6 Bir (X, d) metrik uzayının tam M-konveks P-özelliğini sağlayan G alt kümesi Chebyshevdir.

İspat 3.1.6 $p \in X$ ve $r = d(x, G)$ olsun. Dolayısıyla $lim\, d(p, y_n) = r$ olacak şekilde Gde bir y_n dizisi mevcuttur. P-özelliğinden dolayı y_n, G içerisinde bir y_{n_k} Cauchy alt dizisine sahiptir. G tam olduğu için y_n dizisi $y \in G$ elemanına yakınsar. Metrik uzayın sürekliliğinden $d(p, y) = r$ yazabiliriz. Ayrıca $d(p, y_1) = d(p, y_2) = r$ olacak şekilde $y_1, y_2 \in G$. Buna göre y seçelim. Bu durumda

$$n \text{ çift ise } z_n = y_1$$

$$n \text{ tek ise } z_n = y_2$$

şeklinde z_n dizisini oluşturalım. Buradan $lim_n d(p, z) = d(p, z_1) = r = d(p, z_2)$ buluruz. P-özelliğinde z_n bir z_{n_k} Cauchy alt dizisine sahiptir. Yani $\xi > 0$ için $n_k, m_k \geq N$ olacak şekilde $d(z_{n_k}, z_{m_k}) < \xi$ şartını sağlayan bir N pozitif tam sayısı mevcuttur. ε keyfi olduğu için y_1, y_2 dir. Bu ise bize G nin Chebyshev olduğunu ispatlar.

Sonuç 3.1.4 Her düzgün M-konveks mengeryan metrik uzay P-özelliğine sahiptir. Bu sonuç direk P-özelliğin tanımından açıktır.

3.2 Menger Konveks Metrik Uzaylarda Sabit Noktalar

Tezin giriş kısmında Mengerlik ve sabit noktalar hakkında bilgi verilmiştir. Fakat, biz yine de burada kısaca tekrar hatırlatalım.

Genişlemeyen dönüşümlerin sabit nokta teorisindeki temel problem: bu dönüşümler için sabit nokta özelliği altında kurulmuş koşulları bulmaktır. Bu difaransiyel eşitlikler ve Banach Uzayı geometrisi ile yakından bağlantılıdır. Banach uzayı geometrisi ve sabit nokta teorisi arasındaki etkileşim güçlü ve faydalıdır. Özellikle geometrik özellikler metrik sabit nokta problemlerinde önemli rol oynar. Bu sonuçlar esasen konveks hipotezinde ve Banach uzayı geometrik özelliklerinde kullanılır. Bu sonuçlar matematikte yeni alanlar açmaktadır. Aronszajn, Panitchapakdi [16] ve Menger [11] metrik uzayda konveks yapıları, kapalı top ve onların özelliklerini tanımladılar. Khalil bu konveks metrik uzayında sabit noktaların varlığını ve en iyi yaklaşımı sonraki çalışmalarında tamamladı. Yani konveks metrik uzay içerisinde konveks olmayan kümeler sınıfı olarak tanımlanan dönüşüm için yaklaşım olarak değişmeyen sonuçlarına ulaşıldı.

Tanım 3.2.1 [11] (X, d) metrik uzay olsun. Birbirinden farklı her $x, y \in X$ için $0 \leq r \leq d(x, y)$ olmak üzere

$$B[x, r] \cap B[y, d(x, y) - r] \neq \varnothing$$

oluyorsa bu (X, d) ye Menger konveks metrik uzay denir.
Burada $B[x, r] = \{y \in X : d(x, y) \leq r\}$.

E, herhangi bir metrik uzayın bir alt kümesi olsun. Bu durumda her $x, y \in E$ için $0 \leq r \leq d(x, y)$ olmak üzere

$$B[x, r] \cap B[y, d(x, y) - r] \subseteq E$$

oluyorsa E ye konvekstir denir. Genel olarak konveks metrik uzayda $B[x, r]$ kümesi konveks değildir.

Tanım 3.2.2 (X, d) bir metrik konveks uzay olsun. Eğer her $x, y \in X$ ve $t \in [0, 1]$ için

$$B[x, (1 - t)d(x, y)] \cap B[y, td(x, y)]$$

bu kümesi singleton küme ise bu durumda (X, d) konveks metrik uzayı (A) özelliğine sahiptir denir. Bilindiği üzere tek elemanlı kümelere singleton küme denir. Buradaki singleton kümeyi $M(x,y,t)$ ile göstereceğiz. Eğer x,y ye eşit ise $M(x,y,t)=x$ olduğu açıktır. Yukarıdaki tanımdan (A) özelliğine sahip bir konveks metrik uzayda $B[x,r]$ konveks kümedir.

Tanım 3.2.3 (X,d) konveks metrik uzay olsun. Eğer her $x,y,z\in X$ ve $t\in(0,1)$ için

$$d(m(x,y,z),m(z,y,t))\leq td(x,z)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa bu (X,d) konveks metrik uzayı (B) özelliğine sahiptir denir.

Tanım 3.2.4 (X,d) bir konveks metrik uzay olsun. Eğer bu metrik uzay (A) özelliğine sahip ve her $\varepsilon>0$ için her $r>0$ ve $d(z,y)\leq r$ ve $d(x,y)\geq r\varepsilon$ şartlarını sağlayan her $x,y,z\in X$ için

$$d(z,m(x,y,\frac{1}{2}))\leq r(1-\delta(\varepsilon))<r$$

olacak şekilde $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ mevcut ise (X,d) konveks metrik uzayına düzgün konvekstir denir.

Tanım 3.2.5 [2] (X,d) bir konveks metrik uzay olsun. Eğer birbirinden farklı $x,y\in B[z,r]$ için her $t\in(0,1)$, $z\in X$ ve $r>0$ olmak üzere

$$B[x,(1-t)d(x,y)]\cap B[y,td(x,y)]\subseteq B(z,r)$$

bağıntısı sağlanıyorsa bu (X,d) metrik uzayına kesin konveks denir.
Burada $B(z,r)=\{x\in X:d(x,z)<r\}$.

Sonuç 3.2.1 Düzgün konveks metrik uzayın kesin konveks olduğu yukarıdaki tanımdan açıktır. Fakat tersi doğru genelde değildir.

Tanım 3.2.6 (X,d) bir konveks metrik uzay ve F de bu uzayın bir alt kümesi olsun. Bu durumda Fnin T-regular küme olabilmesi için gerekli ve yeterli koşul her bir $x\in F$ için $T:F\to X$ ve $m(x,T(x),\frac{1}{2})\in F$ olmasıdır.

Sonuç 3.2.2 Bir konveks metrik uzayı içinde T dönüşümü altında her konveks küme bir T-regular kümedir. Fakat bir T-regular kümenin konveks bir küme olması gerekmez.

Tanım 3.2.7 X bir metrik uzay ve $T:X\to X$ bir dönüşüm olsun. $x\in X$ için
a)Eğer $T(x)=x$ fonksiyonel denklemin çözümü ise bu X e T nin sabit noktaları denir.
b)Eğer keyfi $\varepsilon>0$ için $d(X,T(x))<\varepsilon$ ise x e T nin ε-sabit noktası denir.

Açıkça her $\varepsilon>0$ için T nin sabit noktası ε-sabit noktadır. Fakat tersi genelde doğru değildir. Her $\varepsilon>0$ için T nin ε sabit noktasının varlığı bazen T nin sabit noktasının varlığını garanti eder.

Örneğin $T(F)$ ile X metrik uzayının kapalı bir F alt kümesi üzerinde tanımlı bir T sürekli dönüşümü X in bazı kompakt alt kümesini içerir. Yani her $\varepsilon > 0$ için sabit noktaya sahiptir. Bu durumda T sabit nokta içermektedir.

Tanım 3.2.8 (X, d) bir metrik uzay ve $T : X \to X$ olsun. Eğer her $x, y \in X$ için $d(T(x), T(y)) \leq d(x, y)$ oluyorsa bu T dönüşümüne genişlemeyen adı verilir.

Tanım 3.2.9 (X, d) bir metrik uzay ve $T : X \to X$ dönüşümü X de sabit bir noktaya sabit ve eğer x_0, T nin sabit bir noktası ise bu durumda her $x \in X$ için $d(T(x), x_0) \leq d(x, x_0)$ oluyorsa bu durumda T dönüşümüne quasi-genişlemeyen denir.

Sonuç 3.2.3 Genişlemeyen dönüşümlerin sınıfı quasi-genişlemeyen dönüşümlerin sınıfında tamamen yer almaktadır. Şimdi bunu bir örnekle açıklayalım.

Örnek 3.2.1 R öklid uzayı üzerinde bir T dönüşümünü göz önüne alalım. Bu dönüşüm için $x \neq 0$ ve $T(0) = 0$ için $T(x) = \lambda sin(\frac{1}{2})$ açıkça 0, T nin sadece sabit noktasıdır ve T quasi-genişlemeyendir. Eğer $x = \frac{2}{\pi}$ ve $y = \frac{2}{3\pi}$ olarak alınırsa bu durumda

$$|T(x) - T(y)| = \frac{8}{3\pi} > \frac{4}{3\pi} = |x - y|$$

olup T genişlemeyendir.

Tanım 3.2.10 (X, d) bir metrik uzay ve $M \subseteq X$ olsun. Bu durumda her $x \in X$ için $d(x, M) = inf\{d(x, y), y \in M\}$ olacak şekilde

$$P_M(x) = \{z \in M : d(x, z) = d(x, M)\}$$

kümesini tanımlayalım. Bu durumda keyfi $z \in P_M(x)$ M den x için en iyi yaklaşım noktası denir.
Bir X metrik uzayının keyfi kompakt M alt kümesi için $P_M(x)$ kümesi boştan farklıdır. Eğer her $x \in X$ için $P_M(x)$ singleton ise bu durumda her $x \in X$ için M den x için en iyi yaklaşım noktasını belirleyerek en yakın nokta izdüşümü olan $P : X \to M$ tanımlayabiliriz. $P_M(x)$ in (A) özelliğine sahip bir konveks metrik uzayda kapalı konveks M kümesi için konveks olduğu [30] da ispatlanmıştır.

Tanım 3.2.11 K bir tam kapalı konveks metrik uzayın bir alt kümesi ve $\{f_\alpha : \alpha \in K\}$, $[0, 1]$ aralığından K nın içerisine dönüşümlerin bir ailesi ve her $\alpha \in K$ için $f_\alpha(1) = \alpha$ özelliğine sahip olsun. Bu durumda
a) Her $\alpha, \beta \in K$ ve her $t \in (0, 1)$ için $\varphi : (0, 1) \to (0, 1)$ fonksiyonu var ve

$d(f_\alpha(t), f_\beta(t) \leq \varphi(t)d(\alpha, \beta)$ oluyorsa bu aileye büzülme sağlanıyor denir.
b) Eğer $[0,1]$ $t \to t_0$ ve K da $\alpha \to \alpha_0$ için $f_\alpha(t) \to f_{\alpha_0}(t_0)$ oluyorsa bu aileye birleşik sürekli veya ortak sürekli denir.

3.3 Sabit Noktalar ve Yaklaşık Sabit Noktalar

Bu kısımda bir metrik uzayın kompakt bir konveks alt kümesi üzerinde tanımlanan genişlemeyen ve quasi-genişlemeyen dönüşümlerin sabit noktası ve ε sabit noktası hakkında ayrıntılı bilgiler verilecektir.

Teorem 3.3.1 F, (A) ve (B) özelliklerine sahip bir X konveks tam metrik uzayın boştan farklı bir kompakt konveks alt kümesi olsun. Bu durumda F üzerindeki tanımlı genişlemeyen ve kendi üzerine tanımlı genişlemeyen herhangi bir T dönüşümünün sabit bir noktası vardır.

İspat 3.3.1 $T_n(x) = m(T(x), y, \frac{1}{n})$ şeklinde tanımlanan $T_n : F \to F$ dönüşümü için $y \in F$ sabit olsun. Bu durumda

$$d(T_n(x), T_n(z)) = d(m(T(x), y, \frac{1}{n}), m(T(z), y, \frac{1}{n}) \leq \frac{1}{n} d(x, z)$$

bu eşitsizlik bize her bir pozitif n tam sayısı için T_n nin bir daralma olduğunu gösterir. Banach sabit nokta prensibine göre ([12]) her bir n için $T(x_n) = x_n$ olacak şekilde $x_n \in F$ vardır. Şimdi $\{x_n\}$ dizisinin x_0 a yakınsayan bir yakınsak $\{x_{n_j}\}$ bir alt dizisinin olduğunu gösterelim. T_n in sürekliliğinden $T(x_{n_j}) \to T(x_0)$ dır. Böylece

$$d(x_{n_j}, T(x_0)) = d(T_N(x_{n_j}), T(x_0) = d\big(m\big(T(x_{n_j}), y, \frac{1}{n}\big), T(x_0)\big)$$

olup $n \to \infty$, $\{x_{n_j}\} \to T(x_0)$.

Sonuç 3.3.1 Teorem 3.3.1 in genelleştirilmesidir [25].

Aşağıdaki teorem ile, dönüşümün tanım kümesi üzerindeki konvekslik şartını yumuşatıyoruz. Böylece Teorem 3.3.1 i sağlamayan fakat aynı zamanda [23] teki Teorem 1 i de genelleştiriyor.

Teorem 3.3.2 F, bir X tam konveks metrik uzayın bir kompakt alt kümesi olsun. Kabul edelim ki,bir daralma dönüşümü ve F ile bağlantılı ortaklaşa sürekli dönüşümlerin bir ailesi var olsun. Bu durumda F den kendi içine tanımlı keyfi bir genişlemeyen T dönüşümü,F içinde sabit bir noktası vardır.

Tanım 3.3.1 Kabul edelim ki $A_1, A_2, ..., A_n$ ve C topolojik uzay olsun. Bu durumda $f : A_1, A_2, ..., A_n \to C$ dönüşümü, eğer aşağıdaki şartları sağlıyorsa bu $f$ye ortak sürekli fonksiyon(dönüşüm) denir.
1)$f, A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$ çarpım topolojisi yardımıyla süreklidir.
2) X bir topolojik uzay ve $g : X \to A_i$ $i \in \mathbb{N}$ de tüm sürekli dönüşümler olsun. Bu durumda her $x \in X$ için

$$h(x) = f(g_1(x), g_2, (x), ..., g_n(x))$$

şeklinde tanımlanan $h : X \to A_i$ dönüşümü süreklidir.

İspat 3.3.2 Her bir $n \in \mathbb{N}$ için $k_n = \frac{n}{n+1} \in [0, 1]$ olsun. Bu durumda her $x \in F$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $T_n(x) = f_{T(x)}(k_n)$ olacak şekilde bir $T_n : F \to F$ dönüşümü iyi tanımlıdır. Dahası, her $n \in \mathbb{N}$ ve her $x, y \in \mathbb{F}$ için

$$d(T_N(x), T_n(y)) = d(f_{T(x)}(k_n, f_{T(y)}(k_n)) \leq \phi(k_n)d(T(x), T(y)) \leq \phi(k_n d(x, y))$$

Her $n \in \mathbb{N}$ için T_n F üzerinde bir daralma dönüşümüdür.Banach daralma dönüşümüne göre [26] her $n \in \mathbb{N}$ için her bir T_n nin bir tek $x_n \in F$ sabit noktası olduğunu ileride göstereceğiz. F içinde $x_{n_j} \to x_0$ olan $x_n$nin bir x_{n_j} alt dizisi F nin kompaktlığını verir. $T_{n_j}(x_{n_j}) = x_{n_j}$ olduğundan $T_{n_j}(x_{n_j}) \to x_0$ T nin sürekliliğinden $T(x_{n_j}) \to T(x_0)$ ve aynı zamanda ortaklaşa süreklilikten

$$T_{n_j}(x_{n_j}) = f_{T x_{n_j}}(k_{n_j}) \to f_{T(x_0)}(1) = T(x_0)$$

elde ederiz. Bu ise bize x_0ın T-nin bir sabit noktası olduğunu gösterir. Aşağıdaki teorem ile fonksiyonun tanım kümesi üzerindeki kompaktlık şartını düşünüp, böylece teorem 3.3.1 i geliştirmiş olacağız. İlaveten, bu teoremle konveks metrik uzaylar için iyi bilinen genişlemesi olmayan dönüşümlerin Schauder'in sabit nokta teoremi de genişletilir.

Teorem 3.3.3 F, (A)ve (B) özelliklerini sağlayan her konveks metrik uzayın boştan farklı bir kapalı konveks alt kümesi olsun. Bu durumda $T : F \to F$ genişlemeyen bir dönüşümün ve $T(F)$ de F nin kompakt bir alt kümesinin alt kümesi ise, ozaman T sabit bir noktaya sahiptir.

İspat 3.3.3 $x_0 \in F$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $T_n = m(x_0, T(x), \frac{1}{n})$ tanımlayalım. F nin konveksliğinden her $n \in \mathbb{N}$ için

$$
\begin{aligned}
d(T_n(x), T_n(y) &= d(m(x_0, T(x), \frac{1}{n}), m(x_0, T(y), \frac{1}{n})) \\
&\leq \frac{1}{n} d(T(x), T(y)) \leq \frac{1}{n} d(x, y)
\end{aligned}
$$

Banach daralma dönüşümüne göre [26] her $n \in \mathbb{N}$ için T_n nin F içinde x_n gibi bir tek sabit noktası vardır. $x_0 \in F$ için $T(x_{n_j}) \to x_0$ olacak şekilde $(x_n) \subset F$ dizisinin bir (x_{n_j}) alt dizisi vardır.Buradan

$$
x_{n_j} = T_n(x_{n_j}) = m(x_0, T(x_{n_j}), \frac{1}{n}) \to x_0, n \to \infty
$$

olup T-nin sürekliliğinden ispat tamamlanır.

Aşağıdaki teoremde, bir konveks metrik uzayda quasi-genişlemeyen dönüşümün sabit noktası için tekrarlı dizinin yakınsaklığı hakkında gerekli ve yeterli koşul verilecektir.

Teorem 3.3.4 F bir X konveks tam metrik uzayın kapalı bir alt kümesi ve $T : F \to F$ bir quasi-genişlemeyen dönüşüm olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_N = T^n(x_0) \in F$ olacak şekilde bir $x_0 \in F$ noktasının var olduğunu kabul edelim. Bu durumda her $n \in \mathbb{N}$ için x_n dizisinin T-nin sabit noktasına yakınsaması için gerekli ve yeterli koşul $\lim_{n\to\infty}(x_n, Fix(T)) = 0$ olmasıdır. Burada, $Fix(T)$, T nin sabit noktaları kümesidir.

İspat 3.3.4 $d(x_n, Fix(T)) = sup_{x \in Fix(T)} d(x_n, x)$olduğundan

$$
\lim_{n\to\infty}(x_n, Fix(T)) = 0
$$

olduğu n_n yakınsak dizisinin T-nin sabit noktalarına yakınsadığı hemen görülür. Tersine olarak, $\varepsilon > 0$ için her $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ şartını sağlayan bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Buradan $d(x_n, Fix(T)) < \frac{\varepsilon}{2}$

Şimdi $p \in Fix(T)$ ve $m, n \geq n_0$ alalım. Böylece

$$
\begin{aligned}
d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, p) + d(p, x_m) \\
&= d(T^n(x_0, p) + d(p, T^m(x_0)) \\
&\leq 2d(T^{x_0}, p) \leq 2d(x_{n_0}, p) \\
&\leq 2d(x_{n_0}, Fix(T))
\end{aligned}
$$

olup x_n dizisinin F de bir couchy dizisi olduğunu görürüz. F bir tam metrik uzayın kapalı bir alt kümesi olduğundan $x_n \to u$ olacak şekilde bir u-noktası vardır. Böylece $d(u, Fix(T)) = 0$ $Fix(T)$, T-nin quasi-genişlemeyen sabit noktaların kümesi olduğundan $Fix(T)$ kapalıdır. Bu ise $u \in Fix(T)$ olup ispat tamamlanır.

Teorem 3.3.5 F, bir X konveks metrik uzayın kapalı bir alt kümesi olsun. Bu durumda, $T : F \rightarrow X$ kompakt sürekli bir dönüşümün sabit noktasının olabilmesi için gerek ve yeterli koşul her bir $\varepsilon > 0$ için T-nin ε-sabit noktaya sahip olmasıdır.

İspat 3.3.5 Kabul edelim ki, her $\varepsilon > 0$ için $T : F \rightarrow X$ kompakt sürekli dönüşümü ε-sabit noktaya sahip olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için x_n, $\frac{1}{n}$ -sabit noktalı, yani $d(x_n, T(x_n) < \frac{1}{n}$ olsun. T kompakt olduğundan. T(F), xin bir D kompakt alt kümesinde bulunur. F-deki bir $/x_n$ dizisi için $T(x_{n_j}) \rightarrow u$,$n_j \rightarrow \infty$ olmak üzere $x_{n_j} \rightarrow u$, $n_j \rightarrow \infty$ olan bir $u \in F$ ve bir x_{n_j} alt dizisi vardır. Bu ise ispatı tamamlar.

3.4 En İyi Yaklaşım

Bu bölümde, bir konveks metrik uzay içinde yaklaşım teorisine sabit nokta teoremlerinin uygulanmasından söz edeceğiz.

Teorem 3.4.1 M, bir düzgün konveks tam metrik uzayın kapalı konveks bir alt kümesi olsun. Eğer her $x \in X$ için $P_M(x)$ singleton ise, ozaman $P : X \rightarrow M$ en yakın nokta projeksyonu süreklidir.

İspat 3.4.1 Her $n \in \mathbb{N}$ için x_n dizisi $x \in X$ yakınsak ve $P_M(x) = z$ olsun. Tamamen basitlik için $P(x_n)$ yerine u_n yi gösterelim. Şimdi $u_n, u \in \mathbb{N}$ M de bir Couchy dizisidir, eğer değilse o zaman her $k \in \mathbb{N}$ için $m_k > m_k$ ve $d(u_{n_k}, u_{m_k}) \geq \varepsilon$ olacak şekilde $\varepsilon > 0$ ve u_{n_k}, u_{m_k} alt dizileri vardır. $a_k = u_{n_k}, b_k = u_{m_k}$ ve $M_k = maxd(x, a_k), d(x, b_k)$ olarak seçelim. Burada $k \rightarrow \infty$ için $M_k \rightarrow d(x, M)$ olduğu açıktır. Ayrıca

$$d(x, a_k) \leq M_k; d(x, b_k) \leq M_k$$

ve

$$d(a_k, b_k) \geq (\frac{\varepsilon}{M_k})M_k$$

bu ise

$$d\Big(x, m\Big(a_k, b_k, \frac{1}{2})) \geq M_k\Big(1 - \delta\Big(\frac{\varepsilon}{M_k}\Big)\Big) \leq M_k\Big(1 - \delta\Big(\frac{d(a_k, b_k)}{M_k}\Big)\Big)$$

aynı zamanda, $k \rightarrow \infty$ için $J\Big(\frac{\varepsilon}{M_k}\Big) \leq 1 - \frac{d(x,M)}{M_k}$ eşitsizliğinde $J\Big(\frac{\varepsilon}{M_k}\Big) \rightarrow 0$olup ε pozitif olamaz. Dolayısıyla,$P(x_n)$ M de bir Couchy dizisidir ve buradan
$d(x, z) = d(x, M)$ ve $z = P(x)$ olacak şekilde bir $z \in M$ noktasına yakınsar.

Teorem 3.4.2 F, bir düzgün konveks tam metrik uzayın bir sınırlı T-regüler alt kümesi olsun. Ozaman ya her $x \in F$ için $T(x) = x$ ya da $d(x_0, F) < diam(F)$ olacak şekilde F de bir x_0 noktası mevcuttur.

İspat 3.4.2 Bazı $x \in F$ için $x \neq T(x)$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $d(x, T(x) = \varepsilon$ olsun. Şimdi keyfi $y \in F$ için $d(y, T(x)) \leq diam(F)$ ve $d(y, x) \leq diam(F)$. İddiaya göre F bir T-regüler küme olduğundan $m(x, T(x), \frac{1}{2}) \in F$. Şimdi X-in düzgün konveksliğini kullanırsak,

$$d\Big(y, m\Big(x, T(x), \frac{1}{2}\Big)\Big) \leq \Big(1 - J(\varepsilon)\Big) diam(F)$$

olacak şekilde $J(\varepsilon) > 0$ reel sayısı vardır. Buradan,

$$d\Big(F, m\Big(x, T(x), \frac{1}{2}\Big)\Big) \leq \Big(1 - J(\varepsilon)\Big) diam(F)$$

olup böylece istenilen sonuca ulaşılır.

Önerme 3.4.1 X bir kesin konveks metrik uzay $u \in X$ ve M de X in bir alt kümesi olsun. Eğer $x \neq y$ için $x, y \in P_M(u)$ ile o zaman $t \in (0, 1)$ için $m(x, y, t) \notin M$.

İspat 3.4.3 Eğer $m(x, y, t) \in M$ ise ozaman $x, y \in P_M(u)$ için $d(x, u) \leq d(u, m(x, y, t))$ ve $d(y, u) \leq d(u, m(x, y, t))$. X kesin konveks metrik uzay olduğunadan yukarıdaki ifadede bir çelişkidir. Böylece, $m(x, y, t) \notin M$, $t \in (0, 1)$.

Önerme 3.4.2 M, bir kesin konveks metrik uzayın keyfi bir alt kümesi ve $T : M \to M$ olsun. Eğer keyfi $u \in X$ için $P_M(u)$ boştan farklı bir T-regüler küme ise, ozaman $P_M(u)$ nin her bir noktası T-regüler bir sabit noktasıdır.

İspat 3.4.4 Bazı $x \in P_M(u)$lar için $T(x) \neq x$ olduğunu kabul edelim. Önerme 3.4.1'e göre $m(x, T(x), \frac{1}{2}) \notin M$. Böylece $m(x, T(x), \frac{1}{2}) \notin P_M(u)$. $P_M(u)$ bir T-regüler küme olduğundan $x = T(x)$ sağlanmalıdır. Dolayısıyla u-nun her en iyi M-yaklaşımı, T-nin bir sabit noktası olur.

Teorem 3.4.3 M boştan farklı kapalı bir küme ve X kesin konveks metrik uzayın T-regüler alt kümesi olsun. Burada T bir kompakt dönüşüm ve u, M de bir noktadır. Her $x \in M$ için $d(T(x), u) \leq d(x, y)$ olduğunu kabul edelim. O zaman u-ya en iyi yaklaşım olan her $x \in M$ noktası T-nin bir sabit noktasıdır.

İspat 3.4.5 $r = d(u, M)$ olsun, o zaman $lim_{n\to\infty} d(u, y_n) = r$ olacak şekilde M de bir her $n \in \mathbb{N}$ için Y_n minimum dizisi vardır. Bu y_n dizisinin sınırlı olduğu açıktır. T kompakt olduğundan $cl(T(y_n)$, M nin bir kompakt alt kümesidir ve böylece

$$T(y_n), \quad lim_{n\to\infty} T(y_{n_k}) = x \in M$$

olacak şekilde yakınsak bir diziye sahiptir. Buradan

$$r \leq d(u, x) = \lim_{n_k} d(u, T(y_{n_k})) \leq \lim_{n_k} d(u, y_{n_k}) = \lim d(u, y_n) = r$$

olup $x \in P_M(u)$. Aynı zamanda, eğer $y \in P_M(u)$ ve $r \leq d(T(y), u) \leq d(y, v) = r$ için $T(y) \in P_M(u)$. Buradan $y \in P_M$ için $d(T(y), u) = r$. Ayrıca X in kesin konveksliğinden, $r \leq d\Big(m\Big(y, T(y), \frac{1}{2}\Big), u\Big) < r$. Dolayısıyla $m(y, T(y), \frac{1}{2}) \in P_M(u)$. Buradan Önerme 3.4.1 e göre ispat tamamlanır.

Teorem 3.4.4 M boştan farklı kapalı bir küme ve bir X kesin konveks metrik uzayın T-regüler alt kümesi olsun. Burada $T : X \to X$ bir kompakt dönüşümüdür. Eğer u, X/M de T-nin bir sabit noktası ve her $x, y \in X$ için

$$d(T(x), T(y)) \leq \alpha d(x, y) + \beta(d(x, T(x)) + d(y, T(y))) + \gamma(d(x, T(y)) + d(y, T(x)))$$

eşitsizliği sağlanıyorsa o zaman M de her bir en iyi yaklaşım olan u, T-nin bir sabit noktasıdır. Burada α ,β ve γ, $\alpha + 2\beta + \gamma \leq 1$ şartını sağlayan reel sayılardır.

İspat 3.4.6 $x \in X$ için

$$\begin{aligned}
(T(x), T(u)) &\leq \alpha d(x, u) + \beta(d(x, T(x)) + d(u, T(u))) + \gamma(d(x, T(u)) + d(u, T(x))) \\
&= \alpha d(x, u) + \beta(d(x, T(x))) + \gamma(d(x, u)) + d(T(u), T(x)) \\
&\leq \alpha d(x, u) + \beta(d(x, T(x)) + d(T(u), T(x)) + \gamma(d(x, u) + d(T(u), T(x)) \\
&= (\alpha + \beta + \gamma) d(x, u) + (\beta + \gamma) d(T(u), T(x))
\end{aligned}$$

eşitsizliğini göz önüne alalım. Buradan

$$d(T(x), T(u) \leq \Big(\frac{\alpha + \beta + \gamma}{\alpha - \beta - \gamma}\Big) d(x, u)$$

ve $d(T(u), T(x)) \leq d(x, u)$ olup teorem 3.4.3 e göre ispat tamamlanır.

4. SONUÇ VE ÖNERİLER

Menger konveks uzay, bu uzayda sabit nokta teoremi ve en iyi yaklaşım konuları ayrıntılı bir sekilde incelenmiştir. Başka bir ifade ile:

1. Metrik uzaylarda M-konveks küme ve konveks fonksiyon kavramı,
2. M-konvekslik, kesin M-konveks ve düzgün M-konveks metrik uzaylar arasındaki bağıntılar,
3. Metrik uzayların M-konveks alt kümelerini icin en iyi yaklaşım teoremlerinin incelenmesi,
4. Menger konveks metrik uzayda, sabit noktaların varlığı için gerekli sartların gözden geçirilmesi,
5. Düzgün konveks tam bir metrik uzayın kompakt bir konveks alt kümesinde genişlemeyen ve kuazi genişlemeyen dönüsümlerin sabit noktalarına yaklaşımı ile ilgili teoremler,
6. Kesin konveks bir metrik uzayda bir sabit nokta için en iyi yaklaşım sonuçları üzerinde incelemeler yapılmıştır. Referans alınan kaynaklarda yapılan bazı işlem hataları da düzeltilmiştir.

Bu yüksek lisans tez calışmasının Türkiye'de bu alanda calışmak isteyen bilim insanlarına Türkçe bir kaynak olarak faydalı bir eser olacağını düşünüyoruz.

KAYNAKLAR

[1] Browder, F. E., Nonexpansive nonlinear operators in Banach spaces, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 54 (1965) 1041–1044.

[2] Khalil, R., Extreme points of the unit ball of Banach spaces, Math. Rep. Toyama Univ. 4 (1981)

[3] Albinus G., 1966 *Einge Beitrage zur Approximations Theorie in metrishen Vektorraumen*, Wiss Z. d. Tech. Univ., 15: 1-4.

[4] Albinus G., 1966 *Uber Best approximationen in metrischen Vektorraumen*

[5] Albinus G., 1968 *Normartige Metriken auf metrisierbaren lokal konvexen topologischen Vektor- raumen*,Math. Nach., 37: 177-196.

[6] Bunt L.N.M., 1934 *Bijdrage to t de theorie der konvekse puntverzamelingen*,University of Groningen, publ. Amsterdam.

[7] Flomin A.M. 1934 *Some problems of Approximation Theory in locally convex topological vector space*,Thesis, Phy. Math. Sc., Moscow.

[8] Hirschfeld R.A. 1958 *On best approximations in normed vector spaces I and II*,Nieuw. Arch. voor Wisk, 6: 41-51, 99-107.

[9] Iseki K. 1959 *An approximation problem in quasi-normed spaces*, proc. Japan Acad., 35: 465- 466.

[10] Kuratowski C. 1959 *Use condition metrique pour la retraction des ensembles*, Comptes rendus Soc. Sci lettres Varsovie, Cl, III, 28: 156-158.

[11] Menger K. 1928 *Untersuchungen uber allgemeine Metrik*, Math. Ann., 100: 75-103.

[12] Nikolski V.N. 1963 *Best Approximation by elements of convex sets in normed linear spaces*, Kalimin-Gos. Pred. Inst Usen. Pa., 29.

[13] Nitka W. 1961 *Une generalisation du theoreme de Kuratovski sur la caracterisation metrique de la retraction*, Colloq. Math., 8: 35-37.

[14] Singer I. 1970 *Best Approximation in Normed Linear spaces by elements of Linear Subspaces*,Springer-Verlag.

[15] Aksoy A. G. and Khamsi M. A., 1990 *Nonstandard methods in fixed point theory*,Springer, New York, Berlin.

[16] Aronszajn N. and Panitchpakdi P., 1956 *Extension of uniformly continuous transformations and hyper convex metric spaces*, Pacific J. Math. 6: 405- 439.

[17] Ayerbe Toledano J. M., Dominguez Benavides T. and Lopez Acedo G., 1997 *Measures of noncompactness in metric fixed point theory*,Birkhauser, Basel.

[18] Beg I. and Azam, A., 1992 *Fixed points of asymptotically regular multivalued mappings*, J. Austral. Math. Soc. Ser. 53: 313- 326.

[19] Beg I. and Azam, A., 1996 *Common fixed points for commuting and compatible maps*, Discuss. Math. Differential Incl. 16: 121- 135.

[20] Berard A., 1971 *Characterization of metric spaces by the use of their mid sets intervals*, Fund. Math. 73: 1- 7.

[21] Blumenthal L.M., 1953 *Distance Geometry, Clarendon Press*, Oxford.

[22] Browder F.E., 1965 *Nonexpansive nonlinear operators in Banach spaces*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 54: 1041- 1044.

[23] Dotson W.G., 1973 *On fixed points of nonexpansive mappings in non convex sets*, Proc. Amer. Math. Soc. 38: 155- 156.

[24] Goeble K. and Kirk, W. A., 1990 *Topics in metric fixed point theory*, Cambridge Stud. Adv. Math. 28, Cambridge University Press, London.

[25] Goeble K. and Reich, S., 1984 *Uniform convexity, hyperolic geometry, and nonexpansive mappings*,Marcel Dekker, Inc. New York and Basel.

[26] Gohde D., 1995 *Zum Prinzip der kontraktiven Abbildung*, Math. Nachr. 30: 251-258.

[27] Habiniak L., 1984 *Fixed point theorem and invarient approximation*, J. Approx. Theory 56: 241- 244.

[28] Hadzic O., 1996 *Almost fixed point and best approximation theorems in H-Spaces*, Bull. Austral. Math. Soc. 53: 447- 454.

[29] Khalil R., 1981 *Extreme points of the unit ball of Banach spaces*, Math. Rep. Toyama Univ. 4: 41- 45.

[30] Khalil R., 1988 *Best approximation in metric spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. 103: 579- 586.

[31] Kirk W.A., 1965 *A fixed point theorem for mappings which do not increase distances*, Amer.Math. Monthly 72: 1004- 1006.

[32] Prus B. and Smarzewski R.S., 1978 *Strongly unique best approximation and centers in uniformly convex spaces*, J. Math. Anal. Appl. 121: 85- 92.

[33] Veeramani P., 1992 *On some fixed point theorems on uniformly convex Banach spaces*, J. Math. Anal. Appl. 167: 160- 166.