T. C.

ORDU ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HERMİTE-HADAMARD-FEJER TİPLİ EŞİTSİZLİKLERİN VE BAZI KONVEKSLİK ÇEŞİTLERİNİN NEWTONYEN OLMAYAN ANALİZDE ELDE EDİLMESİ

YETER ERDAŞ

DOKTORA TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ORDU 2022

TEZ BİLDİRİMİ

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan ve kullanılan intihal tespit programının sonuçlarına göre; bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

Yeter ERDAŞ

İMZALAYINIZ

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

HERMİTE-HADAMARD-FEJER TİPLİ EŞİTSİZLİKLERİN VE BAZI KONVEKSLİK ÇEŞİTLERİNİN NEWTONYEN OLMAYAN ANALİZDE ELDE EDİLMESİ

YETER ERDAŞ

ORDU ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DOKTORA TEZİ, 75 SAYFA

TEZ DANIŞMANI: Dr. Öğr. Üyesi Erdal ÜNLÜYOL

1967-1970 yılları arasında M. Grossman ve R. Katz klasik analize (Newtonyen analiz) alternatif bir analiz inşaa etmişlerdir. “"Newtonyen Olmayan Analiz”" adı verilen bu matematiksel yapı, temelinde tanım kümesi veya değer kümesinden en az biri üreteç olan fonksiyonlar yardımıyla elde edilir. Örneğin, Çarpımsal(multiplikatif) analiz, klasik analizde bilinen toplama ve çarpma işlemleri ile çıkarma ve bölme işlemlerinin birebir değiştirilmesini sağlayan bijektif dönüşümlerle üretilmiştir. Ayrıca tanım ve değer kümesi üreteç olan "* Analiz" adı verilen matematiksel yapıyı içerir. Dolayısıyla Newtonyen olmayan analiz, bir fonksiyonun tanım veya değer kümesi bijektif olan sonsuz tane dönüşüm yardımıyla üretilen bir sistemdir. Bu doktora tez çalışmasında klasik analizde bilinen Hermite-Hadamard-Fejer eşitsizliğini, bu eşitsizlik yardımıyla elde edilen eşitsizlikleri ve konveks, p-konveks fonksiyonları Newtonyen olmayan analiz (N-N) yardımıyla genelleştirdik.

Anahtar Kelimeler: Newtonyen Olmayan (N-N) Analiz, $*$-Analiz, (N-N) Hermite-Hadamard-Fejer Eşitsizliği, (N-N)Konveks Fonksiyon, (N-N)p-konveks Fonksiyon, (N-N) m-konveks Fonksiyon.

ABSTRACT

HERMITE-HADAMARD-FEJER INEQUALITY AND SOME KINDS OF CONVEXITY OBTAINED IN NON-NEWTONIAN CALCULUS

YETER ERDAŞ

ORDU UNIVERSITY INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

MATHEMATICS

PHD THESIS, 75 PAGES

SUPERVISOR: Assist. Prof. Dr. Erdal ÜNLÜYOL

Between 1967 and 1970, M. Grossman and R. Katz constructed an alternative analysis to classical analysis (Newtonian analysis). This mathematical structure, called "Non-Newtonian Analysis", is obtained with the help of functions whose basis is the domain or value set, at least one of which is a generator. For example, multiplicative analysis is produced with bijective transformations that allow one-to-one replacement of addition and multiplication, subtraction and division operations known in classical analysis. It also includes a mathematical structure called "* Analysis", which is a definition and value set generator. Therefore, non-Newtonian analysis is a system produced with the help of an infinite number of transformations whose definition or value set is bijective. In this doctoral thesis, we generalized the Hermite-Hadamard-Fejer inequality known in classical analysis, the inequalities obtained with the help of this inequality, and the convex, p-convex functions with the help of non-Newtonian analysis (N-N).

Keywords: Non-Newtonian Analysis (N-N) Analiz, $*$- Analysis, (N-N) Hermite-Hadamard-Fejer inequality, (N-N) Convex Functions, (N-N)p-convex Function, (N-N) m- convex Function.

TEŞEKKÜR

Tez konumun belirlenmesinde ve çalışmalarım boyunca her zaman bilgi ve deneyimleriyle yoluma ışık tutan başta danışman hocam Sayın Dr. Öğr. Üyesi Erdal ÜNLÜYOL'a en içten şükranlarımı sunuyorum.

Ayrıca çalışmalarım boyunca desteklerini esirgemeyen sayın Prof. Dr. Selahattin MADEN ve tüm Matematik Bölümü öğretim üyelerine çok teşekkür ediyorum.

Doktora eğitimim boyunca maddi desteğini esirgemeyen 2211-A BİDEB Yutiçi Doktora Burs Programı ve Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu (TÜBİTAK)'na teşekkür ederim.

Aynı zamanda, maddi ve manevi desteklerini her an üzerimde hissettiğim babam ve anneme teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER ve KISALTMALAR LİSTESİ

$\mathbb{R}$	:	Reel sayılar kümesi
α, β	:	Üreteçler
$\dot{<}, \ddot{<}$	:	Newtonyen olmayan küçüktür
$\dot{>}, \ddot{>}$	:	Newtonyen olmayan büyüktür
$\dot{+}, \ddot{+}$	:	Newtonyen olmayan toplama işlemi
$\dot{-}, \ddot{-}$	:	Newtonyen olmayan çıkarma işlemi
$\dot{\times}, \ddot{\times}$	:	Newtonyen olmayan çarpma işlemi
$\dot{\backslash}, \ddot{\backslash}$	:	Newtonyen olmayan bölme işlemi
ι(iota)	:	Newtonyen olmayan analizde üreteç arası geçiş fonksiyonu
$\mathbb{R}_{\alpha}$	:	Newtonyen olmayan reel sayılar kümesi
Id	:	Birim fonksiyon
$L[a,b]_{\alpha}$	:	$f:[a,b]_{\alpha} \subseteq \mathbb{R}_{\alpha} \rightarrow \mathbb{R}$ $[a,b]_{\alpha}$ aralığı üzerinde Id_{α}-integrallenebilen fonksiyonların kümesi
	:	$f:[a,b]_{\alpha} \subseteq \mathbb{R}_{\alpha} \rightarrow \mathbb{R}_{\alpha}$ $[a,b]_{\alpha}$ aralığı üzerinde α_{α}- integrallenebilen fonksiyonların kümesi
	:	$f:[a,b]_{\alpha} \subseteq \mathbb{R}_{\alpha} \rightarrow \mathbb{R}_{\beta}$ $[a,b]_{\alpha}$ aralığı üzerinde $*$- integrallenebilen fonksiyonların kümesi

1. GİRİŞ VE LİTERATÜR TARAMASI

1600-1700 yılları arası matematikte önemli gelişmelerin olduğu yıllardır. Bu asrın en önemli gelişmelerinden biri de I. Newton (1643-1727) ve G. Leibniz (1646-1716) tarafından birbirlerinden bağımsız olarak, türev ile integral arasındaki ilişkinin bulunmasıdır. Bunun bir sonucu olarak, İntegral kavramı önem kazanmıştır.

L. Euler ise fonksiyon kavramına merkezi bir yer vererek günümüzde kullanılan hesaplama yöntemlerinin temelini attı. Bu gelişmelerle o güne kadar kullanım alanı sınırlı olan matematiğin önünü açmış ve matematiği evrensel bir bilim konumuna getirmiştir. Türev ve integral analizin temelini teşkil eder. Gerçekten de bu iki işlem, toplama ve çıkarmanın sonsuz versiyonları gibidir. Bilindiği üzere matematikte herhangi bir problemin çözümü o an ki matematik bilgisine göre yapılamayabilir. Fakat bu bize o problemin çözümünün olmadığı anlamına gelmez.

1967-1970 yılları arasında M. Grossman ve R. Katz klasik analize bir alternatif olarak yeni bir analiz inşaa ettiler. İlerleyen yıllarda Grossman bu yapıları genişleterek geometrik, kuadratik ve harmonik analiz sınıflarını elde etmiştir. Bu ilerleme sürecinde M. Grossman ve R. Katz' ın bulduğu bu analiz, klasikte bilinen toplama ve çıkarma işlemlerinin; çarpma ve bölme işlemleri ile birebir rollerinin değişmesi esasına dayanan bir analiz olup buna Newtonyen Olmayan Analiz denir.

Newtonyen Olmayan Analizin temel yapılarını oluşturmak amacıyla bir çok çalışmalar yapılmıştır. Aşağıda yapılan bu çalışmaların kısa bir literatür taraması verilmiştir.

M. Grosmann ve R. Katz' ın, Non-Newtonian Calculus [21] isimli kitabı bu alanda yazılmış en önemli kitaptır.

M. Grossman [22], iki tam sıralı cisimden keyfi bir Newtonyen olmayan analizin oluşumu- nu açıklamış ve daha sonra Newtonyen olmayan analizin bazı özelliklerini vermiştir.

A. E. Bashirov ve arkadaşları [4], M. Grossman ve R. Katz'ın, toplama ve çıkarmanın rollerini, çarpma ve bölme ile değiştiren ve adı çarpımsal(multiplicative) olarak adlandırılan analizde integral ve türevin yeni tanımının kullanışlılığını göstermiş ve Newtonyen olmayan analize dikkat çekmek istemişlerdir.

M. Rıza ve arkadaşları [47], çarpımsal türev denklemlerin ve Volterra diferansiyel denklemlerinin sayısal çözümü için sonlu fark şemalarını çarpımsal analize dayalı elde etmişlerdir. Bu yeni yaklaşımları kullanılarak örnek problemler çözmüşlerdir.

A. Uzer [54], reel değerli fonksiyonlar için çarpımsal bir analizi, kompleks değerli fonksiyonlarla ilgili çarpımsal bir kompleks analize genişletmiştir. Bazı temel teoremleri verip klasik analizde olanlar ile arasındaki benzerliği araştırmıştır.

A. E. Bashirov ve M. Rıza [5], kompleks değerli fonksiyonlar için çarpımsal türevi ele almıştır. Karmaşık çarpımsal türevin özelliklerini inceleyip Cauchy-Riemann şartlarını elde etmişlerdir.

A. E. Bashirov ve arkadaşları [6], Newtonyen analizin yerine, çarpımsal analzi kullanarak farklı alanlarda çeşitli problemlerin daha verimli bir şekilde modellenebileceğini göstermişlerdir. Üstel aritmetik, çarpımsal analiz ve çarpımsal türev eşitlikleri gibi onun bazı prensiplerini finansal, tarımsal, ekonomik, sigorta istatikleri ve sosyal bilim örneklerini çarpımsal analizi kullanarak çözüme kavuşturmuşlardır.

M. Mora ve arkadaşları [44], çarpımsal analizi kullanarak Newton tipi olmayan yeni bir operatör tanımlamış ve bu operatör yardımı ile haritalamada kullanılan yükseklik çizgisinin tespitinde geleneksel yolla elde edilen operatörden daha etkili olduğunu kanıtlamışlardır.

A. F. Çakmak ve F. Başar [11], Newtonyen olmayan metrik kavramını ve Newtonyen olmayan reel sayılar cismini elde etmişlerdir. Ayrıca Newtonyen olmayan analizde Minkowski ve üçgen eşitsizliğini ispat etmişlerdir.

D. Filip ve C. Piatecki [18], L. Pacioli tarafından on beşinci yüzyılda tanıtılan çift girişli defter tutma yöntemiyle muhasebe tutma modelini Newtonyen olmayan analiz yardımıyla ele almışlardır.

M. Özavşar ve A. C. Çevikel [46], çarpımsal metrik uzay ile ilgili bazı topolojik özellikler vererek çarpımsal metrik dönüşümünü ele aldılar. Çalışmanın bir sonucu olarak, pozitif gerçek sayı kümesinin çarpımsal mutlak değer fonksiyonuna göre tam bir çarpımsal metrik uzay olduğunu gösterdiler. Ek olarak çarpımsal büzülme dönüşümü kavramını verdiler ve çarpımsal metrik uzay tanımı üzerinde böyle dönüşümlerin bazı sabit nokta teoremlerini ispatladılar.

A. E. Bashirov [7] klasik analizdeki iki katlı integralleri, Newtonyen olmayan analiz açısından elde edip bunlarla ilgili teoremleri ispatlamıştır.

S. Tekin ve F. Başar [51], kompleks diziler uzayı olan w kümesi üzerinde, l_∞, c, c_0, l_p şeklinde ifade edilen ve sırasıyla tüm sınırlı, yakınsak, sıfıra yakınsak ve p-mutlak toplanabilir dizi uzaylarını Newtonyen olmayan analize taşımışlardır. Yani, w^* Newtonyen olmayan kompleks diziler kümesi üzerinde l_∞^*, c^*, c_0^* ve l_p^* uzaylarını tanımlamış ve bu uzaylar için bazı sonuçlar vermişleridr.

A. F. Çakmak ve F. Başar [12], klasik anlamdaki komleks sayılar ve kompleks fonksiyonların bazı karakteristik özelliklerini Newtonyen olmayan analiz açısından incelemişlerdir. $*$-kompleks sayılar cismi ve $*$-metrik uzay kavramını elde etmişlerdir. Aynı zamanda $*$-sınırlılık ve $*$-sürekliliğin bazı önemli tanımları ve bazı önemli özelliklerini elde etmişlerdir. Daha sonra $\mathbb{C}^*(\Omega)$ $*$-sürekli fonksiyonları ve bu küme üzerinde tanımlanan Newtonyen olmayan toplam ve skalerle çarpma işlemine göre bir vektör uzayı olduğunu ayrıca $\mathbb{C}^*(\Omega)$ nın bir Banach uzayı olduğunu ispat etmişlerdir.

U. Kadak ve M. Özlük [27], diferansiyel denklemler için Runge-Kutta metodunu farklı üreteç fonksiyonlar için Newtonyen olmayan analizde elde ettiler ve bu sonuçları klasik analizdeki durum ile karşılaştırdılar.

U. Kadak ve H. Efe [28], Newtonyen olmayan analiz açısından $\mathbb{R}^*$ ve C^* kümeleri üzerinde vektör uzayı, iç çarpım ve Hilbert uzayı tanımlarını vermişlerdir. Daha sonra Non-Newtonyen öklid geometri düzlemi için non-Newtonyen kartezyen düzlemini tanımlayıp öklidyen, üniter ve dizi uzayları tanımını vermiştir. Son olarak Newtonyen olmayan kompleks yapıların norm özelliğini kullanarak Cauchy Schwarz ve üçgen eşitsizliklerini incelemişlerdir.

U. Kadak [29], sınırlı, yakınsak, sıfıra yakınsak ve p-sınırlı varyasyonlu dizilerin $\mathbb{C}^*$ kompleks sayılar cismi üzerindeki tanımı ve tam olduklarının ispatını vermişlerdir. Daha sonra Köthe-Toeplitz duallerini Newtonyen olmayan analiz açısından inceleyip klasik durumla karşılaştırmışlardır.

U. Kadak ve H. Efe [30], $\mathbb{C}^*$ cismi üzerinde dizi uzaylarının matris dönüşümü tanımını ve Newtonyen olmayan analize göre sonsuz matrislerin bazı karakteristik sınıflarını incelemişlerdir. Aynı zamanda $\mathbb{C}^*$ üzerideki klasik kümelerden birini diğerine dönüştüren sonsuz bir matris üzerinde gerekli ve yeterli koşulları elde etmişlerdir. Ayrıca, diziden diziye ve seriden seriye toplanabilirlik yöntemini örneklerle açıklamışlardır.

D. Filip ve C. Piatecki [19], neoklasik olmayan büyüme modelini Newtonyen olmayan analiz açısından yeniden ifade ve ispatını vermişlerdir.

D. Filip ve C. Piatecki [20], Newtonyen olmayan analizi kullanarak klasik ekonomi teorisini, özellikle de ekonomik büyümeyi, istatistiğin maksimum olasılık yönteminde inceleyerek yeni bir bakış açısı kazandırmışlardır.

M. Abbas ve arkadaşları [1], çarpımsal metrik uzaylar üzerinde kapalı bir topun yarı-zayıf değişmeli dönüşümlerin sabit nokta sonuçlarını elde etmişler ve bu sonuçları örneklerle desteklemişlerdir. Daha sonra çarpımsal sınır değer probleminin çözümünün varlığı için şartları ortaya koymuşlardır. Böylelikle literatürde var olan sonuçları genişleterek ilerletmişlerdir.

M. Rıza ve B. Eminaga [48], Newtonyen olmayan analizin bir dalı olan bigeometrik analizi kullanarak Runge-Kutta yöntemini yeniden ifade edip belirli başlangıç değer problemleri altınde çözümünü araştırmış, bu çözümü klasik yöntemle kıyaslamışlardır.

M. Rıza ve H. Aktöre [49], klasik anlamdaki Runge-Kutta problemini geometrik çarpımsal analizi kullanarak ifade edip çözümünü araştırmıştır. Yine bu çözümü klasik durum ile karşılaştırmıştır.

U. Kadak ve arkadaşları [31], Newtonyen olmayan kompleks cisim üzerinde paranormlu dizi uzayları ve bunların duallerini elde etmişleridr.

U. Kadak [32], Newtonyen olmayan kompleks cisim üzerinde *Cesáro* tipi toplanabilir dizi uzaylarını elde etmiştir.

A. Uzer [55], çarpımsal analizi kullanarak yarı düzlemde silindirik dalga problemini incelemiştir.

U. Kadak [33], 2015 yılında yapmış olduğu "Newtonyen olmayan analiz ve çeşitli uygulamaları" isimli doktora tezinde Newtonyen olmayan analizin temel özelliklerini ve bu yapının klasik analizle ilişkilerini incelemistir. İlk önce tek bir üretece bağlı fonksiyonel analizin bazı önemli eşitsizliklerini vermiştir. Newtonyen olmayan analiz yöntemlerinden biri olan ve $*$-aritmetik adı verilen analiz tarzı kullanılarak kompleks cisim üzerinde tanımlı bazı dizi uzaylarını ve duallerini tanımlamıştır. Bunun yanında sonsuz matris yapısı inşa edilerek tanımlanan dizi uzayları arasındaki bazı matris dönüşümlerinin sınıflandırmasını yapmıştır. Vektör uzayı ve iç çarpım uzayının Newtonyen olmayan anlamda karşılıklarını ve bazı geometrik özellikleri göstermiştir. Özellikle klasik analizde iyi bilinen ağırlıklı ortalama kavramlarını genelleştirerek farklı üreteçlere bağlı olarak yeni türde ağırlıklı ortalamalar elde etmiştir.

N. Yalçın ve arkadaşları [61], çarpımsal analizi kullanarak klasik anlamdaki Laplace dönüşümünü elde edip bazı temel tanım ve özelliklerini vermişlerdir. Elde ettikleri bu çarpımsal Laplace dönüşümü yardımı ile bazı çarpımsal diferansiyel denklemlerin çözümlerini elde etmişlerdir.

U. Kadak ve Y. Gürefe [34], ağırlıklı ortalamaların ve konveks fonksiyonların bazı karakteristik özelliklerini, Newtonyen olmayan analiz açısından incelemişlerdir. Bu göstermiştir ki üretilen fonksiyonların seçimine bağlı olarak, bu tür ağırlıklı ortalamaların ve konveks fonksiyonların bir çok kullanışlı çeşitleri vardır. Dahası, klasik ağırlıklı ortalama ve onun Newtonyen olmayan versiyonu arasındaki bazı ilişkileri karşılaştırmış ve konveks fonksiyonların bazı geometrik yorumlarını Newtonyen olmayan eğime göre vermişlerdir. Son olarak, çarpımsal sürekli konveks fonksiyonları kullanarak bir uygulama vermişlerdir.

K. Boruah ve B. Hazarika [8], Newtonyen olmayan analizi kullanarak G-Calculus olarak adlandırılacak yeni bir tür analizi elde etmişlerdir.

Y. Gürefe ve arkadaşları [23], klasik analizin bazı temel teoremlerini ve kavramlarını çarpımsal analize taşımış ve onlar arasındaki benzerlikleri ortaya çıkarmışlardır.

M. Erdoğan'ın [15], "Newtonyen olmayan reel sayı serileri ve has olmayan integraller" isimli yüksek lisans tezinde Newtonyen olmayan reel sayı serileri ile has olmayan integraller incelenmiş ve onların yakınsaklık koşulları araştırılmıştır. Yani, Newtonyen olmayan reel sayı serileri ve has olmayan integraller için gerekli olan temel tanımlara, teoremlere ve özelliklere yer verilip onların yakınsaklık koşullarına dair testler verilmiştir. Ayrıca, Newtonyen olmayan reel sayılarda ara değer teoremi ve ortalama değer teoremi gibi temel teoremler incelenmiştir.

F. Erdoğan' ın [16], "Newtonyen olmayan reel sayılarda fonksiyon dizi ve serileri" isimli yüksek lisans tezinde Newtonyen olmayan reel sayılarda fonksiyon dizi ve serileri incelenmiştir. Ayrıca Newtonyen olmayan reel sayılar cismi üzerinde $*$-fonksiyon dizisi tanıtılıp, bazı tanım ve teoremler verilerek $*$-fonksiyon serisi, $*$-noktasal yakınsama, $*$-düzgün yakınsama kavramları tanıtılmış ve $*$-noktasal yakınsama ile $*$-düzgün yakınsamanın önemli farklarını ortaya çıkaran teoremler ispatlanmıştır. Ayrıca $*$-düzgün yakınsaklık için $*$-Cauchy kriteri, $*$-Weierstrass M-kriteri gibi $*$-yakınsaklık testleri elde edilip sırasıyla $*$-düzgün yakınsaklığın $*$-süreklilik, $*$-integral ve $*$-türev ile arasındaki ilişki irdelenmiştir. $*$-Abel ve $*$-Dirichlet testleri tanımlanıp $*$-kuvvet serileri tanıtılarak, bunun bir uygulaması olan *Cesáro* ve Abel anlamında toplanabilme özellikleri elde edilmiştir.

K. Boruah [9], çarpımsal reel dizi kavramını ve onların temel özelliklerini vermiştir.

M. Kirişçi [37], Newtonyen olmayan metrik uzayların bazı özelliklerini ve bazı Newtonyen olmayan metrik uzayların topolojik yapılarını vermiştir.

E. Ünlüyol ve arkadaşları [56], konveks fonksiyonlar ve bazı eşitsizlikleri Newtonyen olmayan analiz yardımıyla elde etmişlerdir. Daha sonra Newtonyen ve Newtonyen olmayan analiz ile kıyaslamışlardır.

E. Ünlüyol ve arkadaşları [57], bazı operatörleri, Newtonyen olmayan analize taşımışlardır. Ayrıca onları Newtonyen ve Newtonyen olmayan analize göre kıyaslamışlardır.

T. Yaying ve B. Hazarika [62], aritmetik yakınsak diziler ve aritmetik toplanabilirliği Newtonyen olmayan analizde inşa etmişlerdir.

M. Waseem ve arkadaşları [60], çarpımsal analizi kullanarak lineer olmayan bazı denklemlerin çözümlerini elde edip bu çözümleri klasik anlamdaki çözüm ile kıyaslamışlardır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1 Konveks Fonksiyon Çeşitleri ve Hermite-Hadamard-Fejer Eşitsizliği

Tanım 2.1.1 I $\mathbb{R}$ de bir aralık ve $f : I \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere her $x, y \in I$ ve $t \in [0,1]$ için

$$f(tx + (1-t)y) \;\; \leq \;\; tf(x) + (1-t)f(y) \tag{2.1.1}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa bu f fonksiyonuna konveks fonksiyon denir.

Tanım 2.1.2 $I \subset (0, \infty)$ bir aralık ve $p \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ olsun. $f : I \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere her $x, y \in I$ ve $t \in [0,1]$ için

$$f([tx^p + (1-t)y^p]^{\frac{1}{p}}) \;\; \leq \;\; tf(x) + (1-t)f(y) \tag{2.1.2}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa bu f fonksiyonuna p-konveks fonksiyon denir[26].

Tanım 2.1.3 $f : [0, b] \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Her $x, y \in [0, b]$, $t \in [0,1]$ ve $m \in [0,1]$ için

$$f(tx + m(1-t)y) \;\; \leq \;\; tf(x) + m(1-t)f(y) \tag{2.1.3}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa bu f fonksiyonuna m-konveks fonksiyon denir[13].

Tanım 2.1.4 $I \subset \mathbb{R}\backslash\{0\}$ bir aralık ve $f : I \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere her $x, y \in I$ ve $t \in [0,1]$ için

$$f\left(\frac{xy}{tx + (1-t)y}\right) \;\; \leq \;\; tf(y) + (1-t)f(x) \tag{2.1.4}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa bu f fonksiyonuna harmonik konveks fonksiyon denir[24].

Tanım 2.1.5 $w : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere her $x \in [a, b]$ için

$$w(x) \;\; = \;\; w(a + b - x) \tag{2.1.5}$$

bağıntısı sağlanıyorsa bu w fonksiyonuna $\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$ ye göre simetrik fonksiyon denir.

Tanım 2.1.6 $w : [a, b] \subset \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere her $x \in [a, b]$ için

$$w(x) \;\; = \;\; w\left(\frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{x}}\right) \tag{2.1.6}$$

bağıntısı sağlanıyorsa bu w fonksiyonuna $\left(\dfrac{2ab}{a+b}\right)$ ye göre harmonik simetrik fonksiyon denir[41].

Tanım 2.1.7 $w : [a,b] \subset (0,\infty \to \mathbb{R})$ bir fonksiyon ve $p \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ olsun. w fonksiyonu her $x \in [a,b]$ için

$$w(x) = w\big([a^p + b^p - x^p]^{\frac{1}{p}}\big)$$

eşitliğini sağlıyorsa bu w fonksiyonuna $\left[\frac{a^p+b^p}{2}\right]^{\frac{1}{p}}$ ye göre p-simetrik fonksiyon denir[40].

Tanım 2.1.8 $I \subseteq \mathbb{R} \setminus \{0\}$ bir aralık olsun. Eğer $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu her $x, y \in I$ ve $t \in (0,1)$ için,

$$f\left(\frac{xy}{tx + (1-t)y}\right) \leq (\geq) \frac{f(x)f(y)}{(1-t)f(y) + tf(x)} \tag{2.1.7}$$

eşitsizliğini sağlıyorsa, f fonksiyonuna H-H konveks(konkav) fonksiyon denir[2].

Tanım 2.1.9 $I \subseteq \mathbb{R} \setminus \{0\}$ bir aralık olsun. Eğer $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu her $x, y \in I$ ve $t \in (0,1)$ için,

$$f\left(\frac{xy}{tx + (1-t)y}\right) \leq (\geq) tf(x) + (1-t)f(y) \tag{2.1.8}$$

eşitsizliğini sağlıyorsa, f fonksiyonuna H-A konveks(konkav) fonksiyon denir[14].

Tanım 2.1.10 $I \subseteq \mathbb{R} \setminus \{0\}$ bir aralık olsun. Eğer $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu her $x, y \in I$ ve $t \in (0,1)$ için,

$$f\Big(tx + (1-t)y\Big) \leq (\geq) \frac{f(x)f(y)}{(1-t)f(y) + tf(x)} \tag{2.1.9}$$

eşitsizliğini sağlıyorsa, f fonksiyonuna A-H konveks(konkav) fonksiyon denir[2].

Sonuç 2.1.1 $f : I \subseteq (0,\infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu G-A konveks fonksiyon, $a, b \in I$ ve $a < b$ olsun. $w : [a,b] \to (0,\infty)$ fonksiyonu sürekli, pozitif ve $\sqrt{ab}$'ye göre geometrik simetrik fonksiyon olmak üzere

$$f\left(\sqrt{ab}\right) \int_a^b \frac{w(x)}{x} dx \leq \int_a^b \frac{f(x)w(x)}{x} dx \leq \frac{f(a) + f(b)}{2} \int_a^b \frac{w(x)}{x} dx$$

eşitsizliği sağlanır[42].

Tanım 2.1.11 $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konveks bir fonksiyon ve $w : [a,b] \to \mathbb{R}$ ise negatif olmayan, integrallenebilen ve $\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$ ye göre simetrik bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \int_a^b w(x)dx \leq \int_a^b f(x)w(x)dx \leq \frac{f(a) + f(b)}{2} \int_a^b w(x)dx$$

eşitsizliğine Hermite-Hadamard-Fejer eşitsizliği denir[17].

2.2 Aritmetik Sistem

Aritmetik, tanım kümesi reel sayıların bir alt kümesi olan tam sıralı bir cisimdir. Aritmetik sistem ise bu cisim üzerinde tanımlı cebirsel işlemlerle elde edilen yapıya denir. Aslında bu cisim, reel sayı cisminin farklı bir yorumu olarak da düşünülebilir öyle ki sayılabilir sayıda sonsuz tam sıralı cisim oluşturulabilir ve bu yapılar birbiriyle denk ya da izomorfiktir. Aritmetik sistemleri oluşturmaya yarayan üreteç(doğurucu) fonksiyonu, tanım kümesi reel sayılar ve değer kümesi reel sayıların bir alt kümesi olan bire-bir ve örten bir dönüşümdür. I birim fonksiyonu ve e^x(*exp(x)*) üstel fonksiyonu üreteç fonksiyonuna birer örnektir. Her bir üreteç tek bir aritmetik ürettiği gibi her aritmetik de tek bir üreteç yardımıyla üretilebilir [33].

2.2.1 α-Aritmetik

α, tanım kümesi $A \subseteq \mathbb{R}$ olan ve değer kümesi $\mathbb{R}_\alpha = \{\alpha(a) : a \in A\}$ olan bir üreteç(doğurucu) olsun. $\mathbb{R}_\alpha$ üzerinde tanımlı $\dot{+}, \dot{-}, \dot{\times}, \dot{/}$ işlemleri ve $\dot{<}$ sıralama bağıntısı aşağıdaki gibi olan aritmetiğe bir α aritmetik denir. Her $x, y \in \mathbb{R}_\alpha$ için

$$\begin{aligned}
\alpha - \texttt{toplam} \quad & x \dot{+} y = && \alpha\{\alpha^{-1}(x) + \alpha^{-1}(y)\}, \\
\alpha - \texttt{fark} \quad & x \dot{-} y = && \alpha\{\alpha^{-1}(x) - \alpha^{-1}(y)\}, \\
\alpha - \texttt{çarpım} \quad & x \dot{\times} y = && \alpha\{\alpha^{-1}(x) \times \alpha^{-1}(y)\}, \\
\alpha - \texttt{bölüm} \quad & x \dot{/} y = && \alpha\{\alpha^{-1}(x) / \alpha^{-1}(y)\}, \\
\alpha - \texttt{sıralama} \quad & x \dot{<} y \Longleftrightarrow && \alpha^{-1}(x) < \alpha^{-1}(y).
\end{aligned} \tag{2.2.1}$$

Bu işlemler altında $(\mathbb{R}_\alpha, \dot{+}, \dot{-}, \dot{\times}, \dot{/}, \dot{<})$ tam sıralı bir cisimdir yani bir aritmetiktir. Bu aritmetiği α fonksiyonu ürettiği için buna α-aritmetik denir[21].

Her bir üreteç fonksiyonu yalnız bir aritmetik üretir ya da her bir aritmetik yalnız bir üreteç vasıtasıyla üretilir.

Doğurucu fonksiyon $\alpha = exp$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_{exp} \qquad & \qquad \alpha^{-1} : \mathbb{R}_{exp} \longrightarrow \mathbb{R} \\
x \rightarrow \alpha(x) = e^x \qquad & \qquad e^x \rightarrow \ln(e^x) = x
\end{aligned} \tag{2.2.2}$$

şeklinde verilsin. Her $x, y \in \mathbb{R}^+$ için aşağıdaki cebirsel işlemler geçerlidir.

$$\begin{array}{rrl} \texttt{geometrik toplam} & x\dot{+}y = & e^{\{\ln x + \ln y\}} = x.y, \\ \texttt{geometrik fark} & x\dot{-}y = & e^{\{\ln x \times \ln y\}} = x/y, \\ \texttt{geometrik çarpım} & x\dot{\times}y = & e^{\{\ln x \ln y\}} = x^{\ln y} = y^{\ln x}, \\ \texttt{geometrik oran} & x\dot{/}y = & e^{\{\ln x / \ln y\}} = x^{\frac{1}{\ln y}}, \\ \texttt{geometrik sıralama} & x\dot{<}y \Longleftrightarrow & ln(x) < ln(y). \end{array} \tag{2.2.3}$$

Şimdi ise başka bir üretici fonksiyon örneği verelim.

$q_p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_q \subseteq \mathbb{R}$ fonksiyonu ve tersi olan q_p^{-1} fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanır $(p \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$:

$$q_p(x) = \begin{cases} x^{\frac{1}{p}}, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -(-x)^{\frac{1}{p}}, & x < 0 \end{cases}, \quad q_p^{-1}(x) = \begin{cases} x^p, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -(-x)^p, & x < 0. \end{cases} \tag{2.2.4}$$

Sonsuz sayıda q_p-aritmetik verebiliriz. Özel olarak $p = 2$ ve $p = -1$ için bu aritmetiğe sırasıyla kuadratik aritmetik ve harmonik aritmetik denir [33].

Tanım 2.2.1 Klasik aritmetikteki her bir işlemin doğal karşılığını α-aritmetikte bulmak mümkündür. Her $p \in \mathbb{Z}$ için $\alpha(p) = \dot{p}$ olmak üzere $y \in \mathbb{R}_\alpha$, $y\dot{+}\dot{0} = y$ ve $y\dot{\times}\dot{1} = y$ ise $\dot{0}$ (α-sıfır) ve $\dot{1}$ (α-bir) sayılarına, sırasıyla α-toplama göre etkisiz ve α-çarpmaya göre birim eleman denir [33].

Tanım 2.2.2 Her $n \in \mathbb{Z}$ için $\dot{-}\dot{n} = \dot{0}\dot{-}\dot{n} = \alpha(-n)$ olmak üzere $\mathbb{Z}_\alpha$ tamsayılar kümesi

$$\mathbb{Z}_\alpha = \left\{ \ldots, \dot{-}\dot{2}, \dot{-}\dot{1}, \dot{0}, \dot{1}, \dot{2} \ldots \right\} = \left\{ \ldots, \alpha(-2), \alpha(-1), \alpha(0), \alpha(1), \alpha(2), \ldots \right\}.$$

şeklinde tarif edilir. Buna göre α-tamsayıların $\mathbb{Z}_\alpha$ kümesi,

$$\mathbb{Z}_\alpha = \left\{ \dot{n} : \dot{n} = \alpha(n),\ n \in \mathbb{Z} \right\}$$

şeklindedir [33].

Tanım 2.2.3 Keyfi $x \in \mathbb{R}_\alpha$ sayısı için x'in α-karesi $x\dot{\times}x$ şeklindedir ve $x^{\dot{2}}$ ile gösterilir. Yani, $x^{\dot{2}} = x\dot{\times}x = \alpha\{[\alpha^{-1}(x)]^2\}$ dir [33].

2.3 $*$-Analiz

α, β keyfi seçilen üreteçler ve $*$(star) sıralı aritmetik çiftidir, yani α-aritmetik ve β-aritmetik. Bu çalışma boyunca aşağıdaki notasyonlar kullanılacaktır.

	α-Aritmetik	β-Aritmetik
Gösterim	A	B
Toplam	$\dot{+}$	$\ddot{+}$
Fark	$\dot{-}$	$\ddot{-}$
Çarpım	$\dot{\times}$	$\ddot{\times}$
Bölüm	$\dot{/}$	$\ddot{/}$
Sıralama	$\dot{<}$	$\ddot{<}$

α-aritmetik için verilen bütün tanımlar β-aritmetik için de geçerlidir. $*$-analizde α-aritmetik tanım kümesinin elemanları, β-aritmetik değer kümesinin elemanları için kullanılır [21].

Uyarı 2.3.1 α ve β üreteçlerini birim fonksiyon olarak seçebiliriz, peki ya aynı değilse? Bu durumda, M. Grossman ve R. Katz, bu soruyla ilgili izomorfizmin tanımını vermiştir [21].

Tanım 2.3.1 α-aritmetikten β-aritmetiğe tanımlanan izomorfizma dönüşümü

1) ι fonksiyonu, bire-birdir,

2) ι fonksiyonu, $\mathbb{R}_\alpha$'dan $\mathbb{R}_\beta$ üzerinedir,

3) $\mathbb{R}_\alpha$'dan seçilmiş herhangi u ve v'ler için,

$$\begin{aligned}
\iota(u\dot{+}v) &= \iota(u)\ddot{+}\iota(v),\\
\iota(u\dot{-}v) &= \iota(u)\ddot{-}\iota(v),\\
\iota(u\dot{\times}v) &= \iota(u)\ddot{\times}\iota(v),\\
\iota(u\dot{/}v) &= \iota(u)\ddot{/}\iota(v),\ v \neq \dot{0},\\
u\dot{<}v &\Leftrightarrow \iota(u)\ddot{<}\iota(v)
\end{aligned}$$

bağıntılarına sahip bir tek ι(iota) fonksiyonudur. Burada α ve β'nın değer kümesi sırasıyla $\mathbb{R}_\alpha$ ve $\mathbb{R}_\beta$ olmak üzere tüm $x \in \mathbb{R}_\alpha$ için

$$\iota(x) = \beta\{\alpha^{-1}(x)\}.$$

Bu durumda her n tamsayısı için

$$\iota(\dot{n}) = \ddot{n}$$

ifadesi geçerlidir. Örneğin,

$$u\dot{+}v = \iota^{-1}\{\iota(u)\ddot{+}\iota(v)\}$$

şeklindedir [21].

Tanım 2.3.2 α bir üreteç ve $x, y \in \mathbb{R}_\alpha$ olsun. Bu durumda aşağıdaki şekilde ifade edilen kümelere, α-aralıklar denir [58],

1. $\dot{(}x, y\dot{)} := \{z \in \mathbb{R}_\alpha : x\dot{<}z\dot{<}y\}$,
2. $\dot{(}x, y\dot{]} := \{z \in \mathbb{R}_\alpha : x\dot{<}z\dot{\leq}y\}$,
3. $\dot{[}x, y\dot{)} := \{z \in \mathbb{R}_\alpha : x\dot{\leq}z\dot{<}y\}$,
4. $\dot{[}x, y\dot{]} := \{z \in \mathbb{R}_\alpha : x\dot{\leq}z\dot{\leq}y\}$,
5. $\dot{(}x, \dot{+}\dot{\infty}\dot{)} := \{z \in \mathbb{R}_\alpha : x\dot{<}z\dot{<}\dot{+}\dot{\infty}\}$,
6. $\dot{(}\dot{-}\dot{\infty}, y\dot{)} := \{z \in \mathbb{R}_\alpha : \dot{-}\dot{\infty}\dot{<}z\dot{<}y\}$,
7. $\dot{[}x, \dot{+}\dot{\infty}\dot{)} := \{z \in \mathbb{R}_\alpha : x\dot{\leq}z\dot{<}\dot{+}\dot{\infty}\}$,
8. $\dot{(}\dot{-}\dot{\infty}, y\dot{]} := \{z \in \mathbb{R}_\alpha : \dot{-}\dot{\infty}\dot{<}z\dot{\leq}y\}$.

Uyarı 2.3.2 Yukarıda sekiz tane tanımı verilen α-aralıklarını kısaca aşağıdaki gibi gösterebiliriz [58];

$$(x, y)_\alpha, (x, y]_\alpha, [x, y)_\alpha, [x, y]_\alpha, (x, +\infty)_\alpha, (-\infty, y)_\alpha, [x, +\infty)_\alpha, (-\infty, y]_\alpha.$$

Uyarı 2.3.3 Ayrıca $[x, y]_\alpha, (x, y)_\alpha$ aralıklarına sırasıyla α-kapalı aralık ve α-açık aralık denir [58].

Tanım 2.3.3 $f : A \subseteq \mathbb{R}_\alpha \to B \subseteq \mathbb{R}_\beta$ bir fonksiyon ve $a \in \mathbb{R}_\alpha$ olsun. O halde

$$\begin{aligned} {}^*\lim_{x \longrightarrow a} = b \iff & \forall \varepsilon\ddot{>}\ddot{0},\ \exists \delta\dot{>}\dot{0} : \forall x \in \mathbb{R}_\alpha, \\ & |x\dot{-}a|_\alpha\dot{<}\delta, \quad |f(x)\ddot{-}b|_\beta\ddot{<}\varepsilon \end{aligned}$$

olacak şekilde bir $b \in \mathbb{R}_\beta$ elemanı vardır ve bu b sayısına f fonksiyonun $*$-limiti denir. ${}^*\lim_{x\longrightarrow a} = b$ şeklinde gösterilir [51].

Tanım 2.3.4 Bir $f : A \subseteq \mathbb{R}_\alpha \to B \subseteq \mathbb{R}_\beta$ fonksiyonuna,

$$^{*}\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

olması durumunda $a \in A$ noktasında $*$-süreklidir denir. f, A'nın her noktasında $*$-sürekli ise o zaman f, A üzerinde $*$-süreklidir denir [33].

Tanım 2.3.5 $X \subset \mathbb{R}(N)_\alpha$, $f : X \to X \subset \mathbb{R}(N)_\beta$ fonksiyonu ve $a \in X$ noktası verilsin. Herhangi $\varepsilon \ddot{>} \ddot{0}$ sayısına karşılık $|x \dot{-} a|_\alpha \dot{<} \delta$ olan her $x \in X$ için $|f(x) \ddot{-} f(a)|_\beta \ddot{<} \varepsilon$ olacak şekilde en az bir $\delta = \delta(\varepsilon) \dot{>} \dot{0}$ sayısı bulunabiliyorsa f fonksiyonuna $a \in X$ noktasında $*$-süreklidir denir [16].

Tanım 2.3.6 Bir f fonksiyonunun $a \in X$ noktasında $*$-sürekli olması için gerekli ve yeterli koşul $a \in X$ noktasının f fonksiyonunun tanım kümesinin elemanı ve $^{*}\lim_{x \to x_a} f(x) = f(a)$ olmasıdır [12].

Tanım 2.3.7 Verilen bir fonksiyonun aşağıdaki gibi $*$-limiti varsa, bu ifade $f^*(a)$ ile gösterilir ve f fonksiyonunun a'da $*$-türevi olarak adlandırılır. Yani, f fonksiyonunun a'da $*$-türevi

$$\begin{aligned} ^{*}\lim_{x \longrightarrow a} \frac{f(x) \ddot{-} f(a)}{\imath(x) \ddot{-} \imath(a)} \ddot{} &= \lim_{x \longrightarrow a} \beta \left\{ \frac{\beta^{-1}(f(x)) - \beta^{-1}(f(a))}{\alpha^{-1}(x) - \alpha^{-1}(a)} \right\} \qquad (2.3.1) \\ &= \lim_{x \longrightarrow a} \beta \left\{ \frac{\beta^{-1}(f(x)) - \beta^{-1}(f(a))}{x - a} \frac{x - a}{\alpha^{-1}(x) - \alpha^{-1}(a)} \right\} \\ &= \beta \left\{ \frac{(\beta^{-1} o f(x))'(a)}{(\alpha^{-1})'(a)} \right\} \end{aligned}$$

şeklindedir [33].

Tanım 2.3.8 f fonksiyonu $[r, s]$ üzerinde tanımlı bir fonksiyon olmak üzere $L \in \mathbb{R}_\alpha$ ve $\epsilon \dot{>} \dot{0}$ için verilen aralıkta en az bir $\wp_\epsilon$ bölüntüsü vardır öyle ki

$$d_\alpha(N(f; \wp), L) \dot{\leq} \epsilon$$

koşulu her $\wp \subset \wp_\epsilon$ için sağlanırsa f fonksiyonuna Riemann anlamında α integrallenebilir denir ve

$$\int_r^s f(x)^{dx}$$

şeklinde gösterilir. Açıkça görülür ki f fonksiyonu klasik anlamda Riemann integrallenebilr ise aynı aralıkta α integrallenebilirdir. Ayrıca α üretecinin tanımından eğer f klasik anlamda Rieman integrallenebilir ise $(\alpha^{-1} \circ f)$ bileşke fonksiyonu da Riemann integrallenebilirdir ve

$$\int_r^s f(x)^{dx} = \alpha \left\{ \int_r^s (\alpha^{-1} \circ f)(x) dx \right\}$$

elde edilir. Tersine olarak f Riemann integrallenebilir ise

$$\int_r^s f(x)dx \;=\; \alpha^{-1}\Big\{\int_r^s (\alpha(f(x))^{dx}\Big\}$$

sağlanır. Buradan da klasik yapı ile bu yapı arasında birebir ilişki kurulur. Şimdi, klasik anlamda belirsiz integral yapısına denk olan ve α-antitürev adını vereceğimiz temel integral yapısını inceleyeceğiz. $\int f(x)^{dx} = F(x)$ ifadesinin anlamı $F^*_\alpha(x) = f(x)$'dir. Diğer bir ifadeyle verilen bir f fonksiyonu klasik anlamda integrallenebilir olmak üzere

$$\int f(x)^{dx} \;=\; \alpha\Big\{\int(\alpha^{-1}\circ f)(x)dx\Big\}\dot{+}C$$

elde edilir ve bu integrale f'nin α-belirsiz integrali denir. Burada α üretecinin tersi sürekli integrallenebilir ve f de integrallenebilir olduğundan $(\alpha^{-1}\circ f)$ bileşke fonksiyonu da integrallenebilirdir[33].

Tanım 2.3.9 f fonksiyonu $[r,s]$ üzerinde tanımlı bir fonksiyon olmak üzere her $\epsilon \ddot{>} \ddot{0}$ için verilen aralıkta en az bir $\wp_\epsilon$ bölüntüsü vardır öyle ki

$$d_\beta(N_*(f;\wp),P)\ddot{\leq}\epsilon$$

koşulu her $\wp \subset \wp_\epsilon$ için sağlanırsa f fonksiyonuna Riemann yıldız integrallenebilir $(*-integral)$ denir ve

$$_*\int_r^s f(x)dx$$

şeklinde gösterilir. Açıkça görülür ki f fonksiyonu klasik anlamda Riemann integrallenebilr ise aynı aralıkta yıldız integrallenebilirdir ve

$$_*\int_r^s f(x)dx \;=\; \beta\Big\{\int_r^s(\beta^{-1}\circ f)(x)dx\Big\}$$

yazılır. Tersine f Riemann integrallenebilir ise

$$\int_r^s f(x)dx \;=\; \beta^{-1}\Big\{{}_*\int_r^s \beta(f(x))dx\Big\}$$

elde edilir. Temel olarak $_*\int f(x)dx = F(x)$ ifadesinin anlamı $F^*(x) = f(x)$'dir. Diğer bir ifade ile verilen bir f fonksiyonunun klasik antitürevi $\int f(x)dx$ olmak üzere f'nin $*$-antitürevi

$$_*\int \beta\{f(x)\}dx \;=\; \beta\Big\{\int f(x)dx\Big\}\ddot{+}C$$

ve buradan da

$$_*\int f(x)dx \;=\; \beta\Big\{\int(\beta^{-1}\circ f)(x)dx\Big\}\ddot{+}C$$

olur. Ayrıca β üreteci sürekli olduğundan integrallenebilirdir ve f klasik anlamda integrallenebilir olduğundan bileşke fonksiyon $\beta^{-1}\circ f$ integrallenebilirdir[33].

Bu tezdeki bazı teorik alt yapılar için yani aralığın Newtonyen olmayan parçalanışı, Newtonyen olmayan alt ve üst toplamlar, bunların özellikleri, $*$-integral vb. kavram ve tanımlar için Grosmann ve Katz'ın [21] kitabına ve Kadak'ın [33] doktora tezine bakılabilir.

NOT: Biz bu tez boyunca kullanılan α-integral ve $*$-integral ifadelerini aşağıdaki gibi kabul edeceğiz,

$$\begin{aligned} \int_r^s f(\alpha(t)\dot{\times}a\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}b)^{dt} &= \alpha\left\{\int_{\alpha^{-1}(r)}^{\alpha^{-1}(s)}(\alpha^{-1}\circ f)(\alpha(t)\dot{\times}a\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}b)dt\right\} \quad (2.3.2)\\ &= \alpha\left\{\int_{\alpha^{-1}(r)}^{\alpha^{-1}(s)}(\alpha^{-1}\circ f\circ\alpha)(t\alpha^{-1}(a)+(1-t)\alpha^{-1}(b))dt\right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}_*\int_r^s f(\alpha(t)\dot{\times}a\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}b)dt &= \beta\left\{\int_{\alpha^{-1}(r)}^{\alpha^{-1}(s)}(\beta^{-1}\circ f)(\alpha(t)\dot{\times}a\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}b)dt\right\} \quad (2.3.3)\\ &= \beta\left\{\int_{\alpha^{-1}(r)}^{\alpha^{-1}(s)}(\beta^{-1}\circ f\circ\alpha)(t\alpha^{-1}(a)+(1-t)\alpha^{-1}(b))dt\right\}. \end{aligned}$$

Tanım 2.3.10 $I_\alpha \subseteq \mathbb{R}_\alpha\backslash\{\dot{0}\}$ bir α-aralık olsun. Eğer bir $f : I_\alpha \to \mathbb{R}_\beta$ fonksiyonu her $a, b \in I_\alpha$ için

$$f(\lambda_1\dot{\times}a\dot{+}\lambda_2\dot{\times}b)\ddot{\leq}\theta_1\ddot{\times}f(a)\ddot{+}\theta_2\ddot{\times}f(b) \quad (2.3.4)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa bu f fonksiyona $*$-konveks fonksiyon denir. Burada $\lambda_1, \lambda_2 \in [0,1]_\alpha$, $\theta_1, \theta_2 \in [0,1]_\beta$, $\lambda_1\dot{+}\lambda_2 = \dot{1}$ ve $\theta_1\ddot{+}\theta_2 = \ddot{1}$[34].

Tanım 2.3.11 $f : I_\alpha \subseteq \mathbb{R}_\alpha \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Bu fonksiyon her $a, b \in I_\alpha$ ve $t \in [0,1]$ için aşağıdaki eşitsizliği sağlıyorsa f fonksiyonuna Id_α-konveks fonksiyon denir [58],

$$f(\alpha(t)\dot{\times}a\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}b) \leq tf(a) + (1-t)f(b) \quad (2.3.5)$$

Teorem 2.3.1 (α-kısmi integrasyon) $(a,b)_\alpha$ bir α-aralık, $v^*, u^* : (a,b)_\alpha \longrightarrow \mathbb{R}_\alpha$ birinci dereceden α-türevli, α-türevi de α-sürekli iki fonksiyon ve $a, b \in (a,b)_\alpha$ olsun. O zaman

$$\int_a^b u(x)\dot{\times}v^*(x)^{dx} = u(x)\dot{\times}v(x)|_a^b\dot{-}\int_a^b v(x)\dot{\times}u^*(x)^{dx} \quad (2.3.6)$$

ya da ($v^*(x)^{dx} =^{dv}$ ve $u^*(x)^{dx} =^{du}$ için)

$$\int u^{dv} = u\dot{\times}v\dot{-}\int v^{du} \quad (2.3.7)$$

eşitlikleri doğrudur[58].

3. YAPILAN ÇALIŞMALAR

3.1 α Hermite-Hadamard-Fejer ve $p_\alpha-$Konveks Fonksiyonlar için Hermite-Hadamard-Fejer Eşitsizliği

Tanım 3.1.1 $w : [a,b]_\alpha \to \mathbb{R}$ fonksiyonu,

$$w(x) = w(a\dot{+}b\dot{-}x) \tag{3.1.1}$$

eşitliğini sağlıyorsa, w fonksiyonuna $\left(\frac{a\dot{+}b}{\alpha(2)}\dot{}\right)$ ye göre Newtonyen olmayan simetrik fonksiyon denir.

Tanım 3.1.2 $g : [a,b]_\alpha \subseteq \mathbb{R}_\alpha \setminus \{\dot{0}\} \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer g fonksiyonu her $x \in [a,b]_\alpha$ için,

$$g(x) = g\left(\frac{\alpha(1)}{\frac{\alpha(1)}{a}\dot{}\dot{+}\frac{\alpha(1)}{b}\dot{}\dot{-}\frac{\alpha(1)}{x}\dot{}}\dot{}\right) \tag{3.1.2}$$

eşitliğini sağlıyorsa bu g fonksiyonuna $\left(\frac{\alpha(2)\dot{\times}a\dot{\times}b}{a\dot{+}b}\dot{}\right)$ ye göre Newtonyen olmayan harmonik simetrik fonksiyon denir.

Tanım 3.1.3 $w : [a,b]_\alpha \subset (0,\infty)_\alpha \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ olsun. Eğer w fonksiyonu her $x \in [a,b]_\alpha$ için

$$w(x) \quad = \quad w[a^{\dot{p}}\dot{+}b^{\dot{p}}\dot{-}x^{\dot{p}}]^{\frac{\dot{1}}{\dot{p}}\dot{}} \tag{3.1.3}$$

eşitliğini sağlıyorsa bu w fonksiyonuna $\left[\frac{a^{\dot{p}}\dot{+}b^{\dot{p}}}{\alpha(2)}\dot{}\right]^{\frac{\dot{1}}{\dot{p}}\dot{}}$ ye göre p_α-simetrik fonksiyon denir.

Sonuç 3.1.1 (3.1.3) eşitliğinde p nin seçilen değerlerine göre indirgendiği tanımları görebiliriz.

1. $p = 1$ için Newtonyen olmayan simetrik fonksiyon

2. $p = -1$ için Newtonyen olmayan harmonik simetrik fonksiyon elde edilir.

Tanım 3.1.4 $f : \mathbb{R}_\alpha \to \mathbb{R}$ fonksiyonu, eğer her $x \in \mathbb{R}_\alpha$ için $f(x) \geq 0$ eşitsizliğini sağlıyorsa bu f fonksiyonuna Id_α-negatif olmayan fonksiyon denir.

Teorem 3.1.1 $f : [a,b]_\alpha \subset \mathbb{R}_\alpha \to \mathbb{R}$ bir Id_α-konveks fonksiyon ve $w : [a,b]_\alpha \subset \mathbb{R}_\alpha \to \mathbb{R}$ negatif olmayan, integrallenebilen ve $\left(\frac{a\dot{+}b}{\alpha(2)}.\right)$ ye göre Newtonyen olmayan simetrik fonksiyon olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a\dot{+}b}{\alpha(2)}.\right)\int_{\alpha^{-1}(a)}^{\alpha^{-1}(b)}(w\circ\alpha)(x)dx &\leq \int_{\alpha^{-1}(a)}^{\alpha^{-1}(b)}(f\circ\alpha)(x)(w\circ\alpha)(x)dx \\ &\leq \frac{f(a)+f(b)}{2}\int_{\alpha^{-1}(a)}^{\alpha^{-1}(b)}(w\circ\alpha)(x)dx \qquad (3.1.4) \end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. 3.1.1 Her $t \in [0,1]$ için eşitsizliğini yazabiliriz.

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a\dot{+}b}{\alpha(2)}.\right) &= f\left(\frac{\alpha(t)\dot{\times}a\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}b\dot{+}\alpha(t)\dot{\times}b\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}a}{\alpha(2)}.\right) \\ &\leq \frac{f(\alpha(t)\dot{\times}a\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}b)}{2}+\frac{f(\alpha(t)\dot{\times}b\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}a)}{2} \qquad (3.1.5) \end{aligned}$$

(3.1.5) eşitsizliğinin her iki tarafı

$$w(f(\alpha(t)\dot{\times}b\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}a))$$

ifadesi ile çarpılıp ardından $[0,1]$ üzerinde t ye göre integrali alınırsa,

$$\begin{aligned} &\int_0^1 f\left(\frac{a\dot{+}b}{\dot{2}}.\right)w(\alpha(t)\dot{\times}b\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}a)dt \\ &\leq \int_0^1\left[\frac{f(\alpha(t)\dot{\times}a\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}b)}{2}w(\alpha(t)\dot{\times}b\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}a)dt\right] \\ &+\int_0^1\left[\frac{f(\alpha(t)\times b\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}a)}{2}w(\alpha(t)\dot{\times}b\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}a)dt\right] \\ &\Rightarrow f\left(\frac{a\dot{+}b}{\dot{2}}.\right)\int_0^1 w(\alpha(t)\dot{\times}b\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}a)dt \\ &\leq \int_0^1\frac{(f\circ\alpha)(t\alpha^{-1}(a)+(1-t)\alpha^{-1}(b))(w\circ\alpha)(t\alpha^{-1}(b)+(1-t)\alpha^{-1}(a))}{2}dt \\ &+\int_0^1\frac{(f\circ\alpha)(t\alpha^{-1}(b)+(1-t)\alpha^{-1}(a))(w\circ\alpha)(t\alpha^{-1}(b)+(1-t)\alpha^{-1}(a))}{2}dt \qquad (3.1.6) \end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır. Eğer (3.1.6) eşitsizliğinde $x = t\alpha^{-1}(b)+(1-t)\alpha^{-1}(a)$ olarak alınır ve g fonksiyonunun $\left(\frac{a\dot{+}b}{\dot{2}}.\right)$ ye göre Newtonyen olmayan simetrik fonksiyon olduğu göz önünde bulundurulursa

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a\dot{+}b}{\dot{2}}.\right)\int_{\alpha^{-1}(a)}^{\alpha^{-1}(b)}(w\circ\alpha)(x)dx &\leq \int_{\alpha^{-1}(a)}^{\alpha^{-1}(b)}\frac{(f\circ\alpha)(x)(g\circ\alpha)(x)}{2}dx \\ &+\int_{\alpha^{-1}(a)}^{\alpha^{-1}(b)}\frac{(f\circ\alpha)(x)(w\circ\alpha)(x)}{2}dx \\ \Rightarrow f\left(\frac{a\dot{+}b}{\dot{2}}.\right)\int_{\alpha^{-1}(a)}^{\alpha^{-1}(b)}(w\circ\alpha)(x)dx &\leq \int_{\alpha^{-1}(a)}^{\alpha^{-1}(b)}(f\circ\alpha)(x)(g\circ\alpha)(x)dx. \end{aligned}$$

eşitsizliğini yazabiliriz. Böylece (3.1.4) eşitsizliğinin sol tarafı ispatlanmış oldu. Şimdi ise ikinci kısmını ispatlayalım.

f, α-konveks fonksiyon olduğundan

$$f(\alpha(t)\dot{\times}a\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}b) + f(\alpha(t)\dot{\times}b\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}a) \leq f(a) + f(b) \tag{3.1.7}$$

eşitsizliği sağlanır. (3.1.7) eşitsizliğinin her iki tarafı,

$$w(f(\alpha(t)\dot{\times}b\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}a))$$

ile çarpılıp, ardından $[0,1]$ üzerinde t ye göre integrali alınırsa

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 f(\alpha(t)\dot{\times}a\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}b)w(\alpha(t)\dot{\times}b\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}a)dt \\
+ & \int_0^1 f(\alpha(t)\dot{\times}b\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}a)w(\alpha(t)\dot{\times}b\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}a)dt \\
\leq & \int_0^1 [f(a)+f(b)]w(\alpha(t)\dot{\times}b\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}a)dt
\end{aligned} \tag{3.1.8}$$

ve

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 (f\circ\alpha)(t\alpha^{-1}(a)+(1-t)\alpha^{-1}(b))(w\circ\alpha)(t\alpha^{-1}(b)+(1-t)\alpha^{-1}(a))dt \\
+ & \int_0^1 (f\circ\alpha)(t\alpha^{-1}(b)+(1-t)\alpha^{-1}(a))(w\circ\alpha)(t\alpha^{-1}(b)+(1-t)\alpha^{-1}(a))dt \\
\leq & \int_0^1 [f(a)+f(b)](w\circ\alpha)(t\alpha^{-1}(b)+(1-t)\alpha^{-1}(a))dt
\end{aligned} \tag{3.1.9}$$

eşitsizliklerini yazabiliriz. (3.1.9) eşitsizliğinde $x = t\alpha^{-1}(b)+(1-t)\alpha^{-1}(a)$ olarak seçilir ve g fonksiyonunun $\left(\frac{a\dot{+}b}{\dot{2}}.\right)$ ye göre Newtonyen olmayan simetrik fonksiyon olduğu göz önüne alınırsa

$$\int_{\alpha^{-1}(a)}^{\alpha^{-1}(b)} (f\circ\alpha)(x)(w\circ\alpha)(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}\int_{\alpha^{-1}(a)}^{\alpha^{-1}(b)} (w\circ\alpha)(x)dx.$$

eşitsizliği elde edilir. Bu ise Teoremin ikinci kısmının ispatıdır. Sonuç olarak

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{a\dot{+}b}{\dot{2}}.\right)\int_{\alpha^{-1}(a)}^{\alpha^{-1}(b)} (w\circ\alpha)(x)dx & \leq \int_{\alpha^{-1}(a)}^{\alpha^{-1}(b)} (f\circ\alpha)(x)(w\circ\alpha)(x)dx \\
& \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}\int_{\alpha^{-1}(a)}^{\alpha^{-1}(b)} (w\circ\alpha)(x)dx
\end{aligned}$$

eşitsizliği ispat edilmiş olur.

Elde edilen (3.1.4) eşitsizliğine Id_α-Hermite-Hadamard-Fejer eşitsizliği denir.

Sonuç 3.1.2 (3.1.4) eşitsizliğinde $\alpha = Id$ olarak seçilirse

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b w(x)dx \;\; \leq \;\; \int_a^b f(x)w(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}\int_a^b w(x)dx \quad (3.1.10)$$

Hermite-Hadamard-Fejer eşitsizliği elde edilir[17].

Sonuç 3.1.3 (3.1.4) eşitsizliğinde $\alpha = exp$ olarak seçilirse

$$\begin{aligned} f\left(\sqrt{ab}\right)\int_{\ln a}^{\ln b} w(e^x)dx \;\; &\leq \;\; \int_{\ln a}^{\ln b} f(e^x)w(e^x)dx \\ &\leq \;\; \frac{f(a)+f(b)}{2}\int_{\ln a}^{\ln b} w(e^x)dx \end{aligned} \quad (3.1.11)$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 3.1.4 (3.1.11) eşitsizliğinde $e^x = u$ dönüşümü yapılırsa

$$f\left(\sqrt{ab}\right)\int_a^b \frac{w(x)}{x}dx \leq \int_a^b \frac{f(x)w(x)}{x}dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}\int_a^b \frac{w(x)}{x}dx$$

eşitsizliği elde edilir[42].

Tanım 3.1.5 $I_\alpha \subseteq \mathbb{R}_\alpha \backslash \{\dot{0}\}$ bir α-aralık olsun. Eğer bir $f : I_\alpha \to \mathbb{R}$ fonksiyonu her $x, y \in I_\alpha$ ve $t \in [0,1]$ için

$$f\left(\frac{x \dot{\times} y}{\alpha(t)\dot{\times}x\dot{+}\left[\alpha(1)\dot{-}\alpha(t)\right]\dot{\times}y}\dot{}\right) \leq tf(y) + (1-t)f(x) \quad (3.1.12)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa bu f fonksiyonuna Id_α-harmonik konveks fonksiyon denir.

Teorem 3.1.2 $I_\alpha := [a,b]_\alpha$, $a\dot{\leq}b$ ve $f : [a,b]_\alpha \subset \mathbb{R}_\alpha \setminus \{\dot{0}\} \to \mathbb{R}$ bir Id_α-harmonik konveks fonksiyon olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\alpha(2)\dot{\times}a\dot{\times}b}{a\dot{+}b}\dot{}\right) \;\; &\leq \;\; \frac{\alpha^{-1}(a)\alpha^{-1}(b)}{\alpha^{-1}(b)-\alpha^{-1}(a)}\int_{\alpha^{-1}(a)}^{\alpha^{-1}(b)} \frac{(f\circ\alpha)(x)}{x^2}dx \\ &\leq \;\; \frac{f(a)+f(b)}{2} \end{aligned} \quad (3.1.13)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. 3.1.2 f fonksiyonu Id_α-harmonik konveks fonksiyon olduğundan her $t \in [0,1]$ ve her $u, v \in \mathbb{R}_\alpha$ için

$$f\left(\frac{u\dot{\times}v}{\alpha(t)\dot{\times}u\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}v}\dot{}\right) \;\; \leq \;\; tf(v) + (1-t)f(u) \quad (3.1.14)$$

eşitsizliğini yazabiliriz. Özel olarak (3.1.14) de $t = \frac{1}{2}$ olarak alınırsa

$$f\left(\frac{\dot{2}\dot{\times}u\dot{\times}v}{u\dot{+}v}\dot{}\right) \;\; \leq \;\; \frac{f(u)+f(v)}{2} \quad (3.1.15)$$

eşitsizliği elde edilir. Diğer yandan

$$u = \frac{a\dot{\times}b}{\alpha(t)\dot{\times}a\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}b}.$$

ve

$$v = \frac{a\dot{\times}b}{\alpha(t)\dot{\times}b\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}a}.$$

olarak seçilip (3.1.15) eşitsizliğinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\dot{2}\dot{\times}u\dot{\times}v}{u\dot{+}v}.\right) = f\left(\frac{\dot{2}\dot{\times}a\dot{\times}b}{a\dot{+}b}.\right) &\leq \frac{1}{2}\left[f\left(\frac{a\dot{\times}b}{\alpha(t)\dot{\times}a\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}b}.\right)\right. \\ &+ \left. f\left(\frac{a\dot{\times}b}{\alpha(t)\dot{\times}b\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}a}.\right)\right] \end{aligned} \tag{3.1.16}$$

eşitsizliği elde edilir. (3.1.16) eşitsizliğinin $[0,1]$ üzerinde t ye göre integrali alınırsa

$$\begin{aligned} \int_0^1 f\left(\frac{\dot{2}\dot{\times}u\dot{\times}v}{u\dot{+}v}.\right) &\leq \frac{1}{2}\left[\int_0^1 (f\circ\alpha)\left(\frac{\alpha^{-1}(a)\alpha^{-1}(b)}{t\alpha^{-1}(a)+(1-t)\alpha^{-1}(b)}\right)dt\right. \\ &+ \left.\int_0^1 (f\circ\alpha)\left(\frac{\alpha^{-1}(a)\alpha^{-1}(b)}{t\alpha^{-1}(b)+(1-t)\alpha^{-1}(a)}\right)dt\right] \end{aligned} \tag{3.1.17}$$

eşitsizliği elde edilir. (3.1.17) eşitsizliğinde,

$$x = \frac{\alpha^{-1}(a)\alpha^{-1}(b)}{t\alpha^{-1}(a)+(1-t)\alpha^{-1}(b)}$$

olarak alınırsa

$$f\left(\frac{\dot{2}\dot{\times}u\dot{\times}v}{u\dot{+}v}.\right) \leq \frac{\alpha^{-1}(a)\alpha^{-1}(b)}{\alpha^{-1}(b)-\alpha^{-1}(a)}\int_{\alpha^{-1}(a)}^{\alpha^{-1}(b)}\frac{(f\circ\alpha)(x)}{x^2}dx$$

bulunur. (3.1.15) eşitsizliğinde $u = a$ ve $v = b$ olarak yazılırsa

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\alpha(2)\dot{\times}a\dot{\times}b}{a\dot{+}b}.\right) &\leq \frac{\alpha^{-1}(a)\alpha^{-1}(b)}{\alpha^{-1}(b)-\alpha^{-1}(a)}\int_{\alpha^{-1}(a)}^{\alpha^{-1}(b)}\frac{(f\circ\alpha)(x)}{x^2}dx \\ &\leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \end{aligned} \tag{3.1.18}$$

eşitsizliği sağlanır. Bu ise ispatı tamamlar.

Sonuç 3.1.5 (3.1.13) eşitsizliğinde $\alpha = Id$ olarak seçilirse

$$f\left(\frac{2ab}{a+b}\right) \leq \frac{ab}{b-a}\int_a^b \frac{f(x)}{x^2}dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{3.1.19}$$

eşitsizliği elde edilir[24].

Sonuç 3.1.6 (3.1.13) eşitsizliğinde $\alpha = exp$ olarak seçilirse

$$f\left(e^{\frac{\ln 2\ln a\ln b}{\ln ab}}\right) \leq \frac{\ln a\ln b}{\ln b-\ln a}\int_{\ln a}^{\ln b}\frac{f(e^x)}{x^2}dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

eşitsizliği elde edilir.

Teorem 3.1.3 $I_\alpha \subset \mathbb{R}_\alpha$, $a\dot{\leq} b$ ve $f : I_\alpha \subset \mathbb{R}_\alpha \setminus \{\dot{0}\} \to \mathbb{R}$ bir Id_α-harmonik konveks fonksiyon olsun. $f \in L[a,b]$ ve $w : [a,b]_\alpha \subset \mathbb{R}_\alpha \setminus \{\dot{0}\} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu negatif olmayan, integrallenebilen ve $w(x) = w\big(\frac{a\dot{\times}b}{a\dot{+}b\dot{-}x}..\big)$ şartını sağlayan bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$f\left(\frac{\alpha(2)\dot{\times}a\dot{\times}b}{a\dot{+}b}.\right)\int_{\alpha^{-1}(a)}^{\alpha^{-1}(b)}\frac{(w\circ\alpha)(x)}{x^2}dx \leq \int_{\alpha^{-1}(a)}^{\alpha^{-1}(b)}\frac{(f\circ\alpha)(x)(w\circ\alpha)(x)}{x^2}dx$$
$$\leq \frac{f(a)+f(b)}{2}\int_{\alpha^{-1}(a)}^{\alpha^{-1}(b)}\frac{(w\circ\alpha)(x)}{x^2}dx \tag{3.1.20}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. 3.1.3 f Id_α-harmonik konveks fonksiyon olduğundan

$$f\left(\frac{\dot{2}\dot{\times}u\dot{\times}v}{u\dot{+}v}.\right) \leq \frac{f(u)+f(v)}{2} \tag{3.1.21}$$

eşitsizliği yazılabilir. Öte yandan (3.1.21) eşitsizliğinde

$$u = \frac{a\dot{\times}b}{\alpha(t)\dot{\times}a\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}b}.$$

ve

$$v = \frac{a\dot{\times}b}{\alpha(t)\dot{\times}b\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}a}.$$

olarak alınırsa

$$f\left(\frac{\dot{2}\dot{\times}u\dot{\times}v}{u\dot{+}v}.\right) = f\left(\frac{\dot{2}\dot{\times}a\dot{\times}b}{a\dot{+}b}.\right) \leq \frac{1}{2}\Bigg[f\left(\frac{a\dot{\times}b}{\alpha(t)\dot{\times}a\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}b}.\right)$$
$$+ f\left(\frac{a\dot{\times}b}{\alpha(t)\dot{\times}b\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}a}.\right)\Bigg] \tag{3.1.22}$$

eşitsizliği elde edilir. (3.1.22) eşitsizliğinin her iki tarafı

$$w\left(\frac{a\dot{\times}b}{\alpha(t)\dot{\times}b\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}a}.\right)$$

ifadesi ile çarpılıp, ardından $[0,1]$ üzerinde t ye göre integrali alınırsa

$$\int_0^1 f\left(\frac{\dot{2}\dot{\times}a\dot{\times}b}{a\dot{+}b}.\right)w\left(\frac{a\dot{\times}b}{\alpha(t)\dot{\times}b\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}a}.\right)dt \tag{3.1.23}$$
$$\leq \frac{1}{2}\Bigg[\int_0^1 f\left(\frac{a\dot{\times}b}{\alpha(t)\dot{\times}a\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}b}.\right)w\left(\frac{a\dot{\times}b}{\alpha(t)\dot{\times}b\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}a}.\right)dt$$
$$+ \int_0^1 f\left(\frac{a\dot{\times}b}{\alpha(t)\dot{\times}b\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}a}.\right)w\left(\frac{a\dot{\times}b}{\alpha(t)\dot{\times}b\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}a}.\right)dt\Bigg]$$

$\Rightarrow$

$$f\left(\frac{\dot{2}\dot{\times}a\dot{\times}b}{a\dot{+}b}.\right)\int_0^1 (w\circ\alpha)\left(\frac{\alpha^{-1}(a)\alpha^{-1}(b)}{t\alpha^{-1}(b)+(1-t)\alpha^{-1}(a)}\right)dt \tag{3.1.24}$$
$$\leq \frac{1}{2}\Bigg[\int_0^1 (f\circ\alpha)\left(\frac{\alpha^{-1}(a)\alpha^{-1}(b)}{t\alpha^{-1}(a)+(1-t)\alpha^{-1}(b)}\right)(w\circ\alpha)\left(\frac{\alpha^{-1}(a)\alpha^{-1}(b)}{t\alpha^{-1}(b)+(1-t)\alpha^{-1}(a)}\right)dt$$
$$+ \int_0^1 (f\circ\alpha)\left(\frac{\alpha^{-1}(a)\alpha^{-1}(b)}{t\alpha^{-1}(b)+(1-t)\alpha^{-1}(a)}\right)(w\circ\alpha)\left(\frac{\alpha^{-1}(a)\alpha^{-1}(b)}{t\alpha^{-1}(b)+(1-t)\alpha^{-1}(a)}dt\right]$$

eşitsizliği elde edilir. (3.1.24) eşitsizliğinde,

$$x = \left(\frac{\alpha^{-1}(a)\alpha^{-1}(b)}{t\alpha^{-1}(b) + (1-t)\alpha^{-1}(a)}\right)$$

olarak seçilirse

$$f\left(\frac{\alpha(2)\dot{\times}a\dot{\times}b}{a\dot{+}b}\dot{}\right)\int_{\alpha^{-1}(a)}^{\alpha^{-1}(b)}\frac{(w\circ\alpha)(x)}{x^2}dx \leq \int_{\alpha^{-1}(a)}^{\alpha^{-1}(b)}\frac{(f\circ\alpha)(x)(w\circ\alpha)(x)}{x^2}dx.$$

eşitsizliği sağlanır. Burada (3.1.21) eşitsizliğinde $u = a$ ve $v = b$ olarak alınırsa

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\alpha(2)\dot{\times}a\dot{\times}b}{a\dot{+}b}\dot{}\right)\int_{\alpha^{-1}(a)}^{\alpha^{-1}(b)}\frac{(w\circ\alpha)(x)}{x^2}dx &\leq \int_{\alpha^{-1}(a)}^{\alpha^{-1}(b)}\frac{(f\circ\alpha)(x)(w\circ\alpha)(x)}{x^2}dx \\ \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}\int_{\alpha^{-1}(a)}^{\alpha^{-1}(b)}\frac{(w\circ\alpha)(x)}{x^2}dx. \end{aligned} \tag{3.1.25}$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 3.1.7 (3.1.20) eşitsizliğinde $\alpha = Id$ olarak seçilirse

$$\begin{aligned} f\left(\frac{2ab}{a+b}\right)\int_a^b\frac{w(x)}{x^2}dx &\leq \int_a^b\frac{f(x)w(x)}{x^2}dx \\ &\leq \frac{f(a)+f(b)}{2}\int_a^b\frac{w(x)}{x^2}dx \end{aligned} \tag{3.1.26}$$

eşitsizliği elde edilir[10].

Sonuç 3.1.8 (3.1.20) eşitsizliğinde $\alpha = exp$ olarak seçilirse

$$f\left(e^{\frac{\ln 2\ln a\ln b}{\ln ab}}\right)\int_{\ln a}^{\ln b}\frac{w(e^x)}{x^2}dx \leq \int_{\ln a}^{\ln b}\frac{f(e^x)w(e^x)}{x^2}dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}\int_{\ln a}^{\ln b}\frac{w(e^x)}{x^2}dx$$

eşitsizliği elde edilir.

Tanım 3.1.6 $I_\alpha \subset (0,\infty)_\alpha$ bir α-aralık ve $p \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ olsun. $f : I_\alpha \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$f([\alpha(t)\dot{\times}x^{\dot{p}}\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}y^{\dot{p}}]^{\frac{\dot{1}}{p}\dot{}}) \leq tf(x) + (1-t)f(y) \tag{3.1.27}$$

eşitsizliğini sağlıyorsa bu f fonksiyonuna $(\alpha; p)$ veya p_α-konveks fonksiyon denir.

Sonuç 3.1.9 (3.1.27) eşitsizliğinde p'nin aldığı değerlere göre indirgendiği yapıları görebiliriz;

1. $p = 1$ için Id_α-konveks fonksiyonu,

2. $p = -1$ için Id_α-harmonik konveks fonksiyonu elde edilir.

Teorem 3.1.4 $f : I_\alpha \subset (0,\infty)_\alpha \to \mathbb{R}$ bir p_α-konveks fonksiyon, $p \in \mathbb{R}_\alpha \dot{\setminus} \{\dot{0}\}$, $a, b \in I_\alpha$ ve $a \dot{<} b$ olsun. Eğer $f \in L[a,b]$ ve $w : [a,b]_\alpha \to \mathbb{R}$ fonksiyonu negatif olmayan, integrallenebilen ve $\left[\frac{a^{\dot{p}} \dot{+} b^{\dot{p}}}{\alpha(2)} \dot{}\right]$ ye göre p_α-simetrik fonksiyon ise o zaman

$$f\left(\left[\frac{a^{\dot{p}} \dot{+} b^{\dot{p}}}{\dot{2}} \dot{}\right]^{\frac{\dot{1}}{\dot{p}} \dot{}}\right) \int_{\alpha^{-1}(a)}^{\alpha^{-1}(b)} \frac{(w \circ \alpha)(x)}{x^{1-p}} dx \leq \int_{\alpha^{-1}(a)}^{\alpha^{-1}(b)} \frac{(f \circ \alpha)(w \circ \alpha)(x)}{x^{1-p}} dx$$
$$\leq \frac{f(a) + f(b)}{2} \int_{\alpha^{-1}(a)}^{\alpha^{-1}(b)} \frac{(w \circ \alpha)(x)}{x^{1-p}} dx \tag{3.1.28}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. 3.1.4 $f : I_\alpha \subset (0,\infty)_\alpha \to \mathbb{R}$ fonksiyou p_α-konveks fonksiyon olduğundan, her $x, y \in I_\alpha$ için (3.1.27) eşitsizliğinde $t = \frac{1}{2}$ olarak alınırsa

$$f\left(\left[\frac{x^{\dot{p}} \dot{+} y^{\dot{p}}}{\dot{2}}\right]^{\frac{\dot{1}}{\dot{p}} \dot{}}\right) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2} \tag{3.1.29}$$

eşitsizliği elde edilir. (3.1.29) eşitsizliğinde

$$x = [\alpha(t) \dot{\times} a^{\dot{p}} \dot{+} \alpha(1-t) \dot{\times} b^{\dot{p}}]^{\frac{\dot{1}}{\dot{p}} \dot{}}$$

ve

$$y = [\alpha(t) \dot{\times} b^{\dot{p}} \dot{+} \alpha(1-t) \dot{\times} a^{\dot{p}}]^{\frac{\dot{1}}{\dot{p}} \dot{}}$$

olarak seçilirse

$$f\left(\left[\frac{a^{\dot{p}} \dot{+} b^{\dot{p}}}{\dot{2}}\right]^{\frac{\dot{1}}{\dot{p}} \dot{}}\right) \leq \frac{f([\alpha(t) \dot{\times} a^{\dot{p}} \dot{+} \alpha(1-t) \dot{\times} b^{\dot{p}}]^{\frac{\dot{1}}{\dot{p}} \dot{}})}{2} + \frac{f([\alpha(t) \dot{\times} b^{\dot{p}} \dot{+} \alpha(1-t) \dot{\times} a^{\dot{p}}]^{\frac{\dot{1}}{\dot{p}} \dot{}})}{2} \tag{3.1.30}$$

aşağıdaki eşitsizliği sağlanır. (3.1.30) eşitsizliğinin her iki tarafı

$$w\big([\alpha(t) \dot{\times} a^{\dot{p}} \dot{+} \alpha(1-t) \dot{\times} b^{\dot{p}}]^{\frac{\dot{1}}{\dot{p}} \dot{}}\big)$$

ifadesi ile çarpılıp, ardından $[0,1]$ üzerinde t ye göre integrali alınırsa

$$\int_0^1 f\left(\left[\frac{a^{\dot{p}} \dot{+} b^{\dot{p}}}{\dot{2}}\right]^{\frac{\dot{1}}{\dot{p}} \dot{}}\right) w([\alpha(t) \dot{\times} a^{\dot{p}} \dot{+} \alpha(1-t) \dot{\times} b^{\dot{p}}]^{\frac{\dot{1}}{\dot{p}} \dot{}}) dt$$
$$\leq \int_0^1 \frac{f([\alpha(t) \dot{\times} a^{\dot{p}} \dot{+} \alpha(1-t) \dot{\times} b^{\dot{p}}]^{\frac{\dot{1}}{\dot{p}} \dot{}}) w([\alpha(t) \dot{\times} a^{\dot{p}} \dot{+} \alpha(1-t) \dot{\times} b^{\dot{p}}]^{\frac{\dot{1}}{\dot{p}} \dot{}})}{2} dt$$
$$+ \int_0^1 \frac{f([\alpha(t) \dot{\times} b^{\dot{p}} \dot{+} \alpha(1-t) \dot{\times} a^{\dot{p}}]^{\frac{\dot{1}}{\dot{p}} \dot{}}) w([\alpha(t) \dot{\times} a^{\dot{p}} \dot{+} \alpha(1-t) \dot{\times} b^{\dot{p}}]^{\frac{\dot{1}}{\dot{p}} \dot{}})}{2} dt$$

ve

$$
\begin{aligned}
& f\left(\left[\frac{a^p\dot{+}b^p}{\dot{2}}\right]^{\dot{\frac{1}{p}}}\right)\int_0^1 (w\circ\alpha)([t\alpha^{-1}(a)^{\alpha^{-1}(p)}+(1-t)\alpha^{-1}(b)^{\alpha^{-1}(p)}]^{\frac{1}{\alpha^{-1}(p)}})dt \\
\leq\ & \frac{1}{2}\int_0^1 (f\circ\alpha)([t\alpha^{-1}(a)^{\alpha^{-1}(p)}+(1-t)\alpha^{-1}(b)^{\alpha^{-1}(p)}]^{\frac{1}{\alpha^{-1}(p)}}) \\
& \times(w\circ\alpha)([t\alpha^{-1}(a)^{\alpha^{-1}(p)}+(1-t)\alpha^{-1}(b)^{\alpha^{-1}(p)}]^{\frac{1}{\alpha^{-1}(p)}})dt \\
+\ & \frac{1}{2}\int_0^1 (f\circ\alpha)([t\alpha^{-1}(b)^{\alpha^{-1}(p)}+(1-t)\alpha^{-1}(a)^{\alpha^{-1}(p)}]^{\frac{1}{\alpha^{-1}(p)}}) \\
& \times(w\circ\alpha)([t\alpha^{-1}(a)^{\alpha^{-1}(p)}+(1-t)\alpha^{-1}(b)^{\alpha^{-1}(p)}]^{\frac{1}{\alpha^{-1}(p)}})dt. \qquad (3.1.31)
\end{aligned}
$$

eşitsizlikleri elde edilir. (3.1.31) eşitsizliğinde,

$$x=[t\alpha^{-1}(a)^{\alpha^{-1}(p)}+(1-t)\alpha^{-1}(b)^{\alpha^{-1}(p)}]^{\frac{1}{\alpha^{-1}(p)}}$$

olarak alınırsa

$$f\left(\left[\frac{a^{\dot{p}}\dot{+}b^{\dot{p}}}{\dot{2}}\right]^{\dot{\frac{1}{\dot{p}}}}\right)\int_{\alpha^{-1}(a)}^{\alpha^{-1}(b)}\frac{(w\circ\alpha)(x)}{x^{1-p}}dx\leq\int_{\alpha^{-1}(a)}^{\alpha^{-1}(b)}\frac{(f\circ\alpha)(w\circ\alpha)(x)}{x^{1-p}}dx$$

eşitsizliği sağlanır. Böylece (3.1.28) eşitsizliğinin sol tarafı ispatlanmış olur. Şimdi ikinci kısmını ispatlayalım. Aşağıdaki eşitsizliğin sağlandığını biliyoruz

$$
\begin{aligned}
\frac{f([\alpha(t)\dot{\times}a^{\dot{p}}\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}b^{\dot{p}}]^{\dot{\frac{1}{\dot{p}}}})}{2} &+ \frac{f([\alpha(t)\dot{\times}b^{\dot{p}}\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}a^{\dot{p}}]^{\dot{\frac{1}{\dot{p}}}})}{2} \\
&\leq \frac{f(a)+f(b)}{2}. \qquad (3.1.32)
\end{aligned}
$$

(3.1.32) eşitsizliğinin her iki tarafı

$$w([\alpha(t)\dot{\times}a^{\dot{p}}\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}b^{\dot{p}}]^{\dot{\frac{1}{\dot{p}}}})$$

ifadesi ile çarpılıp, ardından $[0,1]$ üzerinde t ye göre intagrali alınır ve

$$x=[\alpha(t)\dot{\times}a^{\dot{p}}\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}b^{\dot{p}}]^{\dot{\frac{1}{\dot{p}}}}$$

değişken değişimi uygulanırsa

$$\int_{\alpha^{-1}(a)}^{\alpha^{-1}(b)}\frac{(f\circ\alpha)(w\circ\alpha)(x)}{x^{1-p}}dx\leq\frac{f(a)+f(b)}{2}\int_{\alpha^{-1}(a)}^{\alpha^{-1}(b)}\frac{(w\circ\alpha)(x)}{x^{1-p}}dx$$

eşitsizliği sağlanır. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 3.1.10 (3.1.28) eşitsizliğinde $\alpha=Id$ olarak seçilirse

$$
\begin{aligned}
f\left(\left[\frac{a^p+b^p}{2}\right]^{\frac{1}{p}}\right)\int_a^b\frac{w(x)}{x^{1-p}}dx &\leq \int_a^b\frac{f(x)w(x)}{x^{1-p}}dx \\
&\leq \frac{f(a)+f(b)}{2}\int_a^b\frac{w(x)}{x^{1-p}}dx \qquad (3.1.33)
\end{aligned}
$$

eşitsizliği elde edilir[40].

Sonuç 3.1.11 (3.1.28) eşitsizliğinde $\alpha = Id$ ve $w(x) = Id$ olarak seçilirse

$$f\left(\left[\frac{a^p + b^p}{2}\right]^{\frac{1}{p}}\right) \leq \frac{p}{b^p - a^p}\int_a^b \frac{f(x)}{x^{1-p}}dx \leq \frac{f(a) + f(b)}{2} \tag{3.1.34}$$

eşitsizliği elde edilir[25].

Sonuç 3.1.12 (3.1.28) eşitsizliğinde $\alpha = exp$ olarak seçilirse

$$\begin{aligned} f(((a+b)\ln p)^{\frac{1}{p}})\int_{\ln a}^{\ln b}\frac{w(e^x)}{x^{1-p}}dx &\leq \int_{\ln a}^{\ln b}\frac{f(e^x)w(e^x)}{x^{1-p}}dx \\ &\leq \frac{f(a)+f(b)}{2}\int_{\ln a}^{\ln b}\frac{w(e^x)}{x^{1-p}}dx \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 3.1.13 (3.1.28) eşitsizliğinde p ve w fonksiyonunun seçildiği değere göre indirgendiği eşitsizlikleri aşağıda görebiliriz;

1. $p = 1$ ve $(w \circ \alpha)(x) = 1$ için

   $$f\left(\alpha\left(\frac{1}{2}\right)\dot{\times}(a\dot{+}b)\right) \leq \int_0^1 f(\alpha(t)\dot{\times}a\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}b)dt \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

   eşitsizliği elde edilir [58].

2. $p = 1$ için

   $$\begin{aligned} f\left(\frac{a\dot{+}b}{\dot{2}}.\right)\int_{\alpha^{-1}(a)}^{\alpha^{-1}(b)}(g\circ\alpha)(x)dx &\leq \int_{\alpha^{-1}(a)}^{\alpha^{-1}(b)}(f\circ\alpha)(x)(g\circ\alpha)(x)dx \\ &\leq \frac{f(a)+f(b)}{2}\int_{\alpha^{-1}(a)}^{\alpha^{-1}(b)}(g\circ\alpha)(x)dx \end{aligned}$$

   eşitsizliği(3.1.4) elde edilir.

3. $\alpha = Id$ ve $p = 1$ için

   $$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}\int_a^b g(x)dx$$

   eşitsizliği elde edilir[17].

4. $p = -1$ ve $(w \circ \alpha)(x) = 1$ için

   $$f\left(\frac{\alpha(2)\dot{\times}a\dot{\times}b}{a\dot{+}b}.\right) \leq \frac{\alpha^{-1}(a)\alpha^{-1}(b)}{\alpha^{-1}(b)-\alpha^{-1}(a)}\int_{\alpha^{-1}(a)}^{\alpha^{-1}(b)}\frac{(f\circ\alpha)(x)}{x^2}dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

   eşitsizliği(3.1.13) elde edilir.

5. $\alpha = Id$, $p = -1$ ve $w(x) = 1$ için

$$f\left(\frac{2ab}{a+b}\right) \leq \frac{ab}{b-a}\int_a^b \frac{f(x)}{x^2}dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

eşitsizliği elde edilir[24].

6. $p = -1$ için

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\alpha(2)\dot{\times}a\dot{\times}b}{a\dot{+}b}.\right)\int_{\alpha^{-1}(a)}^{\alpha^{-1}(b)} \frac{(w\circ\alpha)(x)}{x^2}dx &\leq \int_{\alpha^{-1}(a)}^{\alpha^{-1}(b)} \frac{(f\circ\alpha)(x)(w\circ\alpha)(x)}{x^2}dx \\ &\leq \frac{f(a)+f(b)}{2}\int_{\alpha^{-1}(a)}^{\alpha^{-1}(b)} \frac{(w\circ\alpha)(x)}{x^2}dx \end{aligned}$$

(3.1.20) eşitsizliği elde edilir.

7. $\alpha = Id$ ve $p = -1$ için

$$f\left(\frac{2ab}{a+b}\right)\int_a^b \frac{w(x)}{x^2}dx \leq \int_a^b \frac{f(x)w(x)}{x^2}dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}\int_a^b \frac{w(x)}{x^2}dx.$$

eşitsizliği elde edilir[10].

8. $\alpha = Id$ ve $w(x) = 1$ için

$$f\left(\left[\frac{a^p+b^p}{2}\right]^{\frac{1}{p}}\right) \leq \frac{p}{b^p-a^p}\int_a^b \frac{f(x)}{x^{1-p}}dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

eşitsizliği elde edilir[25].

9. $\alpha = Id$, $p = 1$ ve $(w\circ\alpha)(x) = 1$ için Hermite-Hadamard eşitsizliği elde edilir.

3.2 α_α Hermite-Hadamard-Fejer ve p_{α_α} Konveks Fonksiyon için Hermite-Hadamard-Fejer Eşitsizliği

Tanım 3.2.1 $w : [a,b]_\alpha \to \mathbb{R}_\alpha$ fonksiyonu,

$$w(x) = w(a\dot{+}b\dot{-}x) \tag{3.2.1}$$

eşitliğini sağlıyorsa, w fonksiyonuna $\left(\frac{a\dot{+}b}{\alpha(2)}.\right)$ ye göre Newtonyen olmayan simetrik fonksiyon denir.

Tanım 3.2.2 $g : [a,b]_\alpha \subseteq \mathbb{R}_\alpha \setminus \{\dot{0}\} \to \mathbb{R}_\alpha$ bir fonksiyon olsun. Eğer g fonksiyonu her $x \in [a,b]_\alpha$ için,

$$g(x) = g\left(\frac{\alpha(1)}{\frac{\alpha(1)}{a}.\dot{+}\frac{\alpha(1)}{b}.\dot{-}\frac{\alpha(1)}{x}.}.\right) \tag{3.2.2}$$

eşitliğini sağlıyorsa bu g fonksiyonuna $\frac{\alpha(2)\dot{\times}a\dot{\times}b}{a\dot{+}b}.$ ye göre Newtonyen olmayan harmonik simetrik fonksiyon denir.

Tanım 3.2.3 $p \in \mathbb{R}_\alpha \setminus \{0\}$ olsun. $w : [a,b]_\alpha \subset (0,\infty)_\alpha \to \mathbb{R}_\alpha$ fonksiyonu her $x \in [a,b]_\alpha$ için

$$w(x) = w([a^{\dot{p}} \dot{+} b^{\dot{p}} \dot{-} x^{\dot{p}}]^{\frac{\dot{1}}{\dot{p}}\cdot})$$

eşitliğini sağlıyorsa bu w fonksiyonuna $\left[\frac{a^{\dot{p}} \dot{+} b^{\dot{p}}}{\alpha(2)}.\right]^{\frac{\dot{1}}{\dot{p}}}$'ye göre p_{α_α}-simetrik fonksiyon denir.

Tanım 3.2.4 $f : \mathbb{R}_\alpha \to \mathbb{R}_\alpha$ fonksiyonu, eğer her $x \in \mathbb{R}_\alpha$ için $f(x) \dot{\geq} \dot{0}$ eşitsizliğini sağlıyorsa bu f fonksiyonuna α_α-negatif olmayan fonksiyon denir.

Tanım 3.2.5 $I_\alpha \subseteq \mathbb{R}_\alpha \backslash \{\dot{0}\}$ bir α-aralık olsun. Eğer bir $f : I_\alpha \to \mathbb{R}_\alpha$ fonksiyonu her $a, b \in I_\alpha$ ve $t \in [0,1]$ için,

$$f(\alpha(t) \dot{\times} a \dot{+} [\alpha(1) \dot{-} \alpha(t)] \dot{\times} b) \dot{\leq} \alpha(t) \dot{\times} f(a) \dot{+} [\alpha(1) \dot{-} \alpha(t)] \dot{\times} f(b) \tag{3.2.3}$$

eşitsizliğini sağlıyorsa bu f fonksiyonuna α_α-konveks fonksiyon denir.

Teorem 3.2.1 $f : [a,b]_\alpha \subset \mathbb{R}_\alpha \to \mathbb{R}_\alpha$ bir α_α-konveks fonksiyon ve $w : [a,b]_\alpha \subset \mathbb{R}_\alpha \to \mathbb{R}_\alpha$ ise α_α-negatif olmayan, α_α-integrallenebilir ve $\left(\frac{a \dot{+} b}{\alpha(2)}.\right)$ ye göre Newtonyen olmayan simetrik bir fonksiyon olsun. Bu şartlar altında,

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a \dot{+} b}{\alpha(2)}.\right) \dot{\times} \int_a^b (w \circ \alpha)(x)^{dx} &\dot{\leq} \int_a^b [(f \circ \alpha) \dot{\times} (w \circ \alpha)]^{dx} \\ &\dot{\leq} \left[\frac{f(a) \dot{+} f(b)}{\alpha(2)}.\right] \dot{\times} \int_a^b (w \circ \alpha)^{dx} \end{aligned} \tag{3.2.4}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. 3.2.1 Teoremin iddiasına göre, aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz,

$$f\left(\frac{a \dot{+} b}{\alpha(2)}.\right) \dot{\leq} \frac{f\Big(\alpha(t) \dot{\times} a \dot{+} [\alpha(1) \dot{-} \alpha(t)] \dot{\times} b\Big)}{\alpha(2)}. \dot{+} \frac{f\Big([\alpha(1) \dot{-} \alpha(t)] \dot{\times} a \dot{+} \alpha(t) \dot{\times} b.\Big)}{\alpha(2)}. \tag{3.2.5}$$

(3.2.5) eşitsizliğinin her iki tarafı,

$$w(\alpha(t) \dot{\times} b \dot{+} [\alpha(1) \dot{-} \alpha(t)] \dot{\times} a)$$

ifadesi ile α_α-çarpılıp daha sonra $[0,1]_\alpha$ aralığı üzerinde t ye göre α_α-integrali alınırsa aşağıdaki eşitsizlik elde edilir,

$$\begin{aligned} & f\left(\frac{a \dot{+} b}{\alpha(2)}.\right) \dot{\times} \int_{\dot{0}}^{\dot{1}} w\big(\alpha(t) \dot{\times} b \dot{+} [\alpha(1) \dot{-} \alpha(t)] \dot{\times} a\big)^{dt} \\ \dot{\leq} & \int_{\dot{0}}^{\dot{1}} \left[\frac{f(\alpha(t) \dot{\times} a \dot{+} [\alpha(1) \dot{-} \alpha(t)] \dot{\times} b)}{\alpha(2)}. \dot{\times} w(\alpha(t) b \dot{+} [\alpha(1) \dot{-} \alpha(t)] \dot{\times} a)\right]^{dt} \\ \dot{+} & \int_{\dot{0}}^{\dot{1}} \left[\frac{f([\alpha(1) \dot{-} \alpha(t)] \dot{\times} a \dot{+} \alpha(t) \dot{\times} b)}{\alpha(2)}. \dot{\times} w(\alpha(t) \dot{\times} b \dot{+} [\alpha(1) \dot{-} \alpha(t)] \dot{\times} a)\right]^{dt}. \end{aligned}$$

Buradan,

$$f\left(\frac{a\dot{+}b}{\alpha(2)}\dot{\ }\right)\dot{\times}\int_{\dot{0}}^{\dot{1}}(w\circ\alpha)(t\alpha^{-1}(b)+(1-t)\alpha^{-1}(a))^{dt} \tag{3.2.6}$$

$$\begin{aligned}&\dot{\leq}\ \int_{\dot{0}}^{\dot{1}}\frac{(f\circ\alpha)(t\alpha^{-1}(a)+(1-t)\alpha^{-1}(b)}{\alpha(2)}\dot{\ }\dot{\times}(w\circ\alpha)(t\alpha^{-1}(b)+(1-t)\alpha^{-1}(a))^{dt}\\ &\dot{+}\ \int_{\dot{0}}^{\dot{1}}\frac{(f\circ\alpha)(t\alpha^{-1}(a)+(1-t)\alpha^{-1}(b)}{\alpha(2)}\dot{\ }\dot{\times}(w\circ\alpha)(t\alpha^{-1}(b)+(1-t)\alpha^{-1}(a))^{dt}.\end{aligned}$$

(3.2.6) eşitsizliğinde $x=t\alpha^{-1}(b)+(1-t)\alpha^{-1}(a)$ olarak alınırsa aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz,

$$\begin{aligned}\frac{\dot{1}}{b\dot{-}a}\dot{\ }\dot{\times}f\left(\frac{a\dot{+}b}{\alpha(2)}\dot{\ }\right)\ &\dot{\times}\ \int_a^b(w\circ\alpha)(x)^{dx}\\ &\dot{\leq}\ \frac{\dot{1}}{b\dot{-}a}\dot{\ }\dot{\times}\int_a^b\left[\frac{(f\circ\alpha)(x)\dot{\times}(w\circ\alpha)(x)}{\alpha(2)}\dot{\ }\right]^{dx}\\ &\dot{+}\ \left[\frac{\dot{1}}{b\dot{-}a}\dot{\ }\dot{\times}\int_a^b\left(\frac{f[\alpha(1)\dot{-}\alpha(t)]\dot{\times}a\dot{+}\alpha(t)\dot{\times}b}{\alpha(2)}\dot{\ }\right)\dot{\times}(w\circ\alpha)(x)\right]^{dx}.\end{aligned}$$

w fonksiyonu $\left(\frac{a\dot{+}b}{\alpha(2)}\dot{\ }\right)$ ye göre Newtonyen olmayan simetrik fonksiyon olduğundan,

$$f\left(\frac{a\dot{+}b}{\dot{2}}\dot{\ }\right)\dot{\times}\int_a^b(w\circ\alpha)(x)^{dx}\ \dot{\leq}\ \alpha(2)\dot{\times}\int_a^b\left[\frac{(f\circ\alpha)(x)\dot{\times}(w\circ\alpha)(x)}{\alpha(2)}\dot{\ }\right]^{dx} \tag{3.2.7}$$

eşitsizliği elde edilir ve buradan

$$f\left(\frac{a\dot{+}b}{\alpha(2)}\dot{\ }\right)\dot{\times}\int_a^b(w\circ\alpha)(x)^{dx}\ \dot{\leq}\ \int_a^b\Big[(f\circ\alpha)(x)\dot{\times}(w\circ\alpha)(x)\Big]^{dx} \tag{3.2.8}$$

eşitsizliği sağlanır. Böylece Teoremin sol tarafının ispatı tamamlanmış olur.

Şimdi eşitsizliğin sağ tarafının ispatını yapalım. f fonksiyonu α_α-konveks olduğundan

$$f(\alpha(t)\dot{\times}a\dot{+}[\alpha(1)\dot{-}\alpha(t)]\dot{\times}b)\dot{+}f([\alpha(1)\dot{-}\alpha(t)]\dot{\times}a\dot{+}\alpha(t)\dot{\times}b)\ \dot{\leq}\ f(a)\dot{+}f(b) \tag{3.2.9}$$

eşitsizliği yazılabilir. (3.2.9) eşitsizliğinin her iki tarafı,

$$w(\alpha(t)\dot{\times}b\dot{+}[\alpha(1)\dot{-}\alpha(t)]\dot{\times}a)$$

ifadesi ile α_α-çarpılıp daha sonra $[0,1]_\alpha$ üzerinde t ye göre α_α-integrali alınırsa aşağıdaki eşitsizlik elde edilir,

$$\begin{aligned}&\int_{\dot{0}}^{\dot{1}}(w\circ\alpha)(t\alpha^{-1}(b)+(1-t)\alpha^{-1}(a))\dot{\times}(f\circ\alpha)(t\alpha^{-1}(a)+(1-t)\alpha^{-1}(b))^{dt}\\ \dot{+}\ &\int_{\dot{0}}^{\dot{1}}(w\circ\alpha)(t\alpha^{-1}(b)+(1-t)\alpha^{-1}(a))\dot{\times}(f\circ\alpha)(t\alpha^{-1}(b)+(1-t)\alpha^{-1}(a))^{dt}\\ \dot{\leq}\ &\Big(f(a)\dot{+}f(b)\Big)\dot{\times}\int_{\dot{0}}^{\dot{1}}(w\circ\alpha)(t\alpha^{-1}(b)+(1-t)\alpha^{-1}(a))^{dt}.\end{aligned} \tag{3.2.10}$$

Buradan,

$$x = t\alpha^{-1}(b) + (1-t)\alpha^{-1}(a)$$

değişken değişimi yapılırsa aşağıdaki eşitsizlik yazılabilir,

$$\int_a^b [(f\circ\alpha)(x)\dot{\times}(w\circ\alpha)(x)]^{dx} \quad \dot{\leq} \quad \frac{f(a)\dot{+}f(b)}{\alpha(2)}.\dot{\times}\int_a^b (w\circ\alpha)(x)^{dx}.$$

Böylece teoremin sol tarafı da ispatlanmış olur. Sonuç olarak,

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a\dot{+}b}{\alpha(2)}.\right)\dot{\times}\int_a^b (w\circ\alpha)(x)^{dx} \quad &\dot{\leq} \quad \int_a^b [(f\circ\alpha)(x)\dot{\times}(w\circ\alpha)(x)]^{dx} \\ &\dot{\leq} \quad \frac{f(a)\dot{+}f(b)}{\dot{2}}.\dot{\times}\int_a^b (w\circ\alpha)(x)^{dx} \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilmiş olur. Bundan sonra (3.2.4) eşitsizliğine α_α-Hermite-Hadamard-Fejer eşitsizliği diyeceğiz.

Sonuç 3.2.1 (3.2.4) eşitsizliğinde $\alpha = Id$ alınırsa,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b w(x)dx \leq \int_a^b f(x)w(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}\int_a^b w(x)dx$$

klasik anlamdaki Hermite-Hadamard-Fejer eşitsizliği elde edilir[17].

Sonuç 3.2.2 (3.2.4) eşitsizliğinde $\alpha = exp$ alınırsa,

$$\begin{aligned} \ln f\big(\sqrt{ab}\big)\int_{\ln a}^{\ln b} \ln w(e^x)dx \quad &\leq \quad \int_{\ln a}^{\ln b} \ln f(e^x)\ln w(e^x)dx \\ &\leq \quad \sqrt{f(a)f(b)}\int_{\ln a}^{\ln b} \ln w(e^x)dx \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

Tanım 3.2.6 $I_\alpha \subseteq \mathbb{R}_\alpha\backslash\{\dot{0}\}$ bir α-aralık olsun. Eğer bir $f : I_\alpha \to \mathbb{R}_\alpha$ fonksiyonu her $x, y \in I_\alpha$ ve $t \in [0,1]$ için aşağıdaki eşitsizliği sağlıyorsa bu f fonksiyonuna α_α-harmonik konveks fonksiyon denir,

$$f\left(\frac{x\dot{\times}y}{\alpha(t)\dot{\times}x\dot{+}\big[\alpha(1)\dot{-}\alpha(t)\big]\dot{\times}y}.\right)\dot{\leq}\alpha(t)\dot{\times}f(y)\dot{+}\big[\alpha(1)\dot{-}\alpha(t)\big]\dot{\times}f(x). \tag{3.2.11}$$

Teorem 3.2.2 $f : I_\alpha \subseteq \mathbb{R}_\alpha\backslash\{\dot{0}\} \to \mathbb{R}_\alpha$ bir α_α-harmonik konveks fonksiyon olsun. Bu durumda her $a, b \in \mathbb{R}_\alpha$ için

$$f\left(\frac{\dot{2}\dot{\times}a\dot{\times}b}{a\dot{+}b}.\right)\dot{\leq}\ \frac{a\dot{\times}b}{b\dot{-}a}.\dot{\times}\int_a^b \left[\frac{f(x)}{x^{\dot{2}}}.\right]^{dx} \quad \dot{\leq} \quad \frac{f(a)\dot{+}f(b)}{\dot{2}}. \tag{3.2.12}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. 3.2.2 Her $t \in [0,1]$, $u, v \in \mathbb{R}_\alpha$ ve f, α_α-harmonik konveks fonksiyon olduğu için

$$f\left(\frac{u\dot{\times}v}{\alpha(t)\dot{\times}u\dot{+}[\alpha(1)\dot{-}\alpha(t)]\dot{\times}v}\dot{.}\right)\dot{\leq}\alpha(t)\dot{\times}f(v)\dot{+}[\alpha(1)\dot{-}\alpha(t)]\dot{\times}f(u) \tag{3.2.13}$$

eşitsizliği yazılabilir. (3.2.13) de $t = 1/2$ olarak alınırsa $\alpha(\frac{1}{2}) = \frac{\dot{1}}{\dot{2}}\dot{.}$ olup,

$$f\left(\frac{u\dot{\times}v}{\frac{u\dot{+}v}{\alpha(2)}\dot{.}}\dot{.}\right) = f\left(\frac{\alpha(2)\dot{\times}u\dot{\times}v}{u\dot{+}v}\dot{.}\right)$$

eşitliği sağlanır. Böylece,

$$f\left(\frac{\alpha(2)\dot{\times}u\dot{\times}v}{u\dot{+}v}\dot{.}\right) \dot{\leq} \frac{f(u)\dot{+}f(v)}{\alpha(2)}\dot{.} \tag{3.2.14}$$

eşitsizliği yazılabilir. Burada,

$$u = \frac{a\dot{\times}b}{\alpha(t)\dot{\times}a\dot{+}[\alpha(1)\dot{-}\alpha(t)]\dot{\times}b}\dot{.}, \quad v = \frac{a\dot{\times}b}{\alpha(t)\dot{\times}b\dot{+}[\alpha(1)\dot{-}\alpha(t)]\dot{\times}a}\dot{.}$$

ifadeleri (3.2.14) de yerine yazılırsa,

$$f\left(\frac{\dot{2}\dot{\times}a\dot{\times}b}{a\dot{+}b}\dot{.}\right)\dot{\leq}\left(\frac{\dot{1}}{\dot{2}}\dot{.}\right)\dot{\times}\left[f\left(\frac{a\dot{\times}b}{\alpha(t)\dot{\times}a\dot{+}[\alpha(1)\dot{-}\alpha(t)]\dot{\times}b}\dot{.}\right)\dot{+}f\left(\frac{a\dot{\times}b}{\alpha(t)\dot{\times}b\dot{+}[\alpha(1)\dot{-}\alpha(t)]\dot{\times}a}\dot{.}\right)\right]$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizliğin $[0,1]_\alpha$ üzerinde t ye göre α_α-integrali alınırsa,

$$\begin{aligned}
\int_{\dot{0}}^{\dot{1}} f\left(\frac{\dot{2}\dot{\times}a\dot{\times}b}{a\dot{+}b}\dot{.}\right)^{dt} &\dot{\leq} \left(\frac{\dot{1}}{\dot{2}}\dot{.}\right)\dot{\times}\int_{\dot{0}}^{\dot{1}} f\left(\frac{a\dot{\times}b}{\alpha(t)\dot{\times}a\dot{+}[\alpha(1)\dot{-}\alpha(t)]\dot{\times}b}\dot{.}\right)^{dt} \\
&\dot{+} \left(\frac{\dot{1}}{\dot{2}}\dot{.}\right)\dot{\times}\int_{\dot{0}}^{\dot{1}} f\left(\frac{a\dot{\times}b}{\alpha(t)\dot{\times}b\dot{+}[\alpha(1)\dot{-}\alpha(t)]\dot{\times}a}\dot{.}\right)^{dt} \\
&= \left(\frac{\dot{1}}{\dot{2}}\dot{.}\right)\dot{\times}\int_{\dot{0}}^{\dot{1}} (f\circ\alpha)\left(\frac{\alpha^{-1}(a)\alpha^{-1}(b)}{t\alpha^{-1}(a)+(1-t)\alpha^{-1}(b)}\right)^{dt} \\
&\dot{+} \left(\frac{\dot{1}}{\dot{2}}\dot{.}\right)\dot{\times}\int_{\dot{0}}^{\dot{1}} (f\circ\alpha)\left(\frac{\alpha^{-1}(b)\alpha^{-1}(a)}{t\alpha^{-1}(b)+(1-t)\alpha^{-1}(a)}\right)^{dt}
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlikte

$$x = \frac{\alpha^{-1}(b)\alpha^{-1}(a)}{t\alpha^{-1}(b)+(1-t)\alpha^{-1}(a)}$$

yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
\int_a^b f\left(\frac{\dot{2}\dot{\times}a\dot{\times}b}{a\dot{+}b}\dot{.}\right)^{dt} &\dot{\leq} \left(\frac{\dot{1}}{\dot{2}}\dot{.}\right)\dot{\times}\left[\int_a^b \left[(f\circ\alpha)(x)\dot{\times}\left(\frac{\alpha^{-1}(a)\alpha^{-1(b)}}{(\alpha^{-1}(b)-\alpha^{-1}(a))x^2}\right)\right]^{dt}\right. \\
&\dot{+} \left(\frac{\dot{1}}{\dot{2}}\dot{.}\right)\dot{\times}\left[\int_a^b \left[(f\circ\alpha)(x)\dot{\times}\left(\frac{\alpha^{-1}(a)\alpha^{-1(b)}}{(\alpha^{-1}(b)-\alpha^{-1}(a))x^2}\right)\right]^{dt}\right.
\end{aligned} \tag{3.2.15}$$

ifadesi elde edilir. (3.2.14) de $u = a, v = b$ alındığında,

$$f\left(\frac{\dot{2}\dot{\times}a\dot{\times}b}{a\dot{+}b}\dot{.}\right)\dot{\leq}\left(\frac{a\dot{\times}b}{b\dot{-}a}\dot{.}\right)\dot{\times}\int_a^b\left(\frac{(f\circ\alpha)(x)}{x^{\dot{2}}}\dot{.}\right)^{dx}\dot{\leq}\frac{f(a)\dot{+}f(b)}{\alpha(2)}\dot{.} \tag{3.2.16}$$

eşitsizliği sağlanıp ispat tamamlanır.

Sonuç 3.2.3 (3.2.12) eşitsizliğinde $\alpha = Id$ alınırsa,

$$f\left(\frac{2ab}{a+b}\right) \leq \frac{ab}{b-a}\int_a^b \frac{f(x)}{x^2}dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

eşitsizliği elde edilir[24].

Sonuç 3.2.4 (3.2.12) eşitsizliğinde $\alpha = exp$ alınırsa,

$$\begin{aligned}\ln(f(e^{\frac{\ln 2\ln a\ln b}{\ln a+\ln b}})) &\leq \frac{\ln a\ln b}{\ln b-\ln a}\int_{\ln a}^{\ln b}\ln\left(\frac{f(e^x)}{x\ln 2}\right)dx \\ &\leq \frac{\ln f(a)+\ln f(b)}{2}\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

Teorem 3.2.3 $f : I_\alpha \subseteq \mathbb{R}_\alpha\backslash\{\dot{0}\} \to \mathbb{R}_\alpha$ α_α-harmonik konveks fonksiyon, $a, b \in I_\alpha$ ve $a\dot{<}b$ olsun. $f \in L[a, b]_\alpha$ ve $w : [a, b]_\alpha \subseteq \mathbb{R}_\alpha\backslash\{\dot{0}\} \to \mathbb{R}_\alpha$ fonksiyonu α_α-negatif olmayan, α_α-integrallenebilen ve $w(x) = w\left(\frac{a\dot{\times}b}{a\dot{+}b\dot{-}x}\dot{.}\right)$ şartını sağlayan bir fonksiyon ise,

$$\begin{aligned}f\left(\frac{\dot{2}\dot{\times}a\dot{\times}b}{a\dot{+}b}\dot{.}\right)\dot{\times}\int_a^b\left[\frac{(w\circ\alpha)(x)}{x^{\dot{2}}}\dot{.}\right]^{dx} &\dot{\leq} \int_a^b\left(\frac{(f\circ\alpha)(x)\dot{\times}(w\circ\alpha)(x)}{x^{\dot{2}}}\dot{.}\right)^{dx} \\ &\dot{\leq} \left(\frac{f(a)\dot{+}f(b)}{\alpha(2)}\dot{.}\right)\dot{\times}\int_a^b\left[\frac{(w\circ\alpha)(x)}{x^{\dot{2}}}\dot{.}\right]^{dx}\end{aligned} \tag{3.2.17}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. 3.2.3 Teoremin iddiaları altında her $u, v \in \mathbb{R}_\alpha$ için

$$f\left(\frac{\dot{2}\dot{\times}u\dot{\times}v}{u\dot{+}v}\dot{.}\right) \dot{\leq} \frac{f(u)\dot{+}f(v)}{\alpha(2)}\dot{.} \tag{3.2.18}$$

eşitsizliği sağlanır. (3.2.18) eşitsizliğinde,

$$u = \frac{a\dot{\times}b}{\alpha(t)\dot{\times}a\dot{+}[\alpha(1)\dot{-}\alpha(t)]\dot{\times}b}\dot{.}$$

ve

$$v = \frac{a\dot{\times}b}{\alpha(t)\dot{\times}b\dot{+}[\alpha(1)\dot{-}\alpha(t)]\dot{\times}a}\dot{.}$$

olarak alınıp yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\dot{2}\dot{\times}a\dot{\times}b}{a\dot{+}b}.\right) &\dot{\leq} \left(\frac{\dot{1}}{\dot{2}}.\right)\dot{\times}f\left(\frac{a\dot{\times}b}{\alpha(t)\dot{\times}a\dot{+}[\alpha(1)\dot{-}\alpha(t)]\dot{\times}b}.\right) \\ &\dot{+} \left(\frac{\dot{1}}{\dot{2}}.\right)\dot{\times}f\left(\frac{a\dot{\times}b}{\alpha(t)\dot{\times}b\dot{+}[\alpha(1)\dot{-}\alpha(t)]\dot{\times}a}.\right) \end{aligned} \tag{3.2.19}$$

eşitsizliği elde edilir. w fonksiyonunun aşağıdaki eşitsizliği sağladığını biliyoruz.

$$w(x) = w\left(\frac{a\dot{\times}b}{a\dot{+}b\dot{-}x}.\right)$$

(3.2.19) eşitsizliğini her iki tarafı,

$$w\left(\frac{a\dot{\times}b}{\alpha(t)\dot{\times}b\dot{+}[\alpha(1)\dot{-}\alpha(t)]\dot{\times}a}.\right)$$

ifadesi ile α_α-çarpılıp t'ye göre $[0,1]_\alpha$ üzerinde α_α-integrali alınırsa,

$$\begin{aligned} &\int_{\dot{0}}^{\dot{1}}\left[f\left(\frac{\dot{2}\dot{\times}a\dot{\times}b}{a\dot{+}b}.\right)\dot{\times}\left(\omega\left(\frac{a\dot{\times}b}{\alpha(t)\dot{\times}b\dot{+}[\alpha(1)\dot{-}\alpha(t)]\dot{\times}a}.\right)\right)\right]^{dt} \\ \dot{\leq}\ &\left(\frac{\dot{1}}{\dot{2}}.\right)\dot{\times} \\ &\int_{\dot{0}}^{\dot{1}}\left[f\left(\frac{a\dot{\times}b}{\alpha(t)\dot{\times}a\dot{+}[\alpha(1)\dot{-}\alpha(t)]\dot{\times}b}.\right)\dot{\times}\omega\left(\frac{a\dot{\times}b}{\alpha(t)\dot{\times}b\dot{+}[\alpha(1)\dot{-}\alpha(t)]\dot{\times}a}.\right)\right]^{dt} \\ &\dot{+}\left(\frac{\dot{1}}{\dot{2}}.\right)\dot{\times} \\ &\int_{\dot{0}}^{\dot{1}}\left[f\left(\frac{a\dot{\times}b}{\alpha(t)\dot{\times}b\dot{+}[\alpha(1)\dot{-}\alpha(t)]\dot{\times}a}.\right)\dot{\times}\omega\left(\frac{a\dot{\times}b}{\alpha(t)\dot{\times}b\dot{+}[\alpha(1)\dot{-}\alpha(t)]\dot{\times}a}.\right)\right]^{dt} \\ =\ &\left(\frac{\dot{1}}{\dot{2}}.\right)\dot{\times} \\ &\int_{\dot{0}}^{\dot{1}}\left[(f\circ\alpha)\left(\frac{\alpha^{-1}(b)\alpha^{-1}(a)}{t\alpha^{-1}(b)+(1-t)\alpha^{-1}(a)}\right)\dot{\times}(\omega\circ\alpha)\left(\frac{\alpha^{-1}(b)\alpha^{-1}(a)}{t\alpha^{-1}(b)+(1-t)\alpha^{-1}(a)}\right)\right]^{dt} \\ &\dot{+}\left(\frac{\dot{1}}{\dot{2}}.\right)\dot{\times} \\ &\int_{\dot{0}}^{\dot{1}}\left[(f\circ\alpha)\left(\frac{\alpha^{-1}(b)\alpha^{-1}(a)}{t\alpha^{-1}(b)+(1-t)\alpha^{-1}(a)}\right)\dot{\times}(\omega\circ\alpha)\left(\frac{\alpha^{-1}(b)\alpha^{-1}(a)}{t\alpha^{-1}(b)+(1-t)\alpha^{-1}(a)}\right)\right]^{dt} \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada,

$$x = \left(\frac{\alpha^{-1}(b)\alpha^{-1}(a)}{t\alpha^{-1}(b)+(1-t)\alpha^{-1}(a)}\right)$$

olup değişken değişimi yapılırsa,

$$f\left(\frac{\dot{2}\dot{\times}a\dot{\times}b}{a\dot{+}b}\dot{/}\right)\dot{\times}\int_a^b\left[(\omega\circ\alpha)(x)\dot{\times}\left(\frac{\alpha^{-1}(a)\alpha^{-1}(b)}{(\alpha^{-1}(b)-\alpha^{-1}(a))x^2}\right)\right]^{dx} \tag{3.2.20}$$

$$\begin{aligned}&\dot{\leq}\ \left(\frac{\dot{1}}{\dot{2}}\dot{/}\right)\dot{\times}\int_a^b\left[(f\circ\alpha)(x)\dot{\times}(\omega\circ\alpha)(x)\dot{\times}\left(\frac{\alpha^{-1}(a)\alpha^{-1}(b)}{(\alpha^{-1}(b)-\alpha^{-1}(a))x^2}\right)\right]^{dx}\\ &\dot{+}\ \left(\frac{\dot{1}}{\dot{2}}\dot{/}\right)\dot{\times}\int_a^b\left[(f\circ\alpha)(x)\dot{\times}(\omega\circ\alpha)(x)\dot{\times}\left(\frac{\alpha^{-1}(a)\alpha^{-1}(b)}{(\alpha^{-1}(b)-\alpha^{-1}(a))x^{\dot{2}}}\right)\right]^{dx}\end{aligned} \tag{3.2.21}$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan,

$$f\left(\frac{\dot{2}\dot{\times}a\dot{\times}b}{a\dot{+}b}\dot{/}\right)\dot{\times}\int_a^b\left[\frac{\omega(x)}{x^{\dot{2}}}\dot{/}\right]^{dx}\dot{\leq}\int_a^b\left[\frac{(f(x)\dot{\times}\omega(x)}{x^{\dot{2}}}\dot{/}\right]^{dx} \tag{3.2.22}$$

eşitsziliği sağlanır. (3.2.18) eşitsizliğinde $u = a$ ve $v = b$ olarak alınırsa,

$$\begin{aligned}f\left(\frac{\dot{2}\dot{\times}a\dot{\times}b}{a\dot{+}b}\dot{/}\right)\dot{\times}\int_a^b\left[\frac{(w\circ\alpha)(x)}{x^{\dot{2}}}\dot{/}\right]^{dx} &\dot{\leq}\int_a^b\left(\frac{(f\circ\alpha)(x)\dot{\times}(w\circ\alpha)(x)}{x^{\dot{2}}}\dot{/}\right)^{dx}\\ &\dot{\leq}\left(\frac{f(a)\dot{+}f(b)}{\alpha(2)}\dot{/}\right)\dot{\times}\int_a^b\left[\frac{(w\circ\alpha)(x)}{x^{\dot{2}}}\dot{/}\right]^{dx}\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 3.2.5 (3.2.17) eşitsizliğinde $\alpha = Id$ alınırsa,

$$f\left(\frac{2ab}{a+b}\right)\int_a^b\frac{w(x)}{x^2}dx\leq\int_a^b\left(\frac{f(x)w(x)}{x^2}dx\right)\leq\frac{f(a)+f(b)}{2}\int_a^b\frac{w(x)}{x^2}dx$$

eşitsizliği elde edilir[10].

Sonuç 3.2.6 (3.2.17) eşitsizliğinde $\alpha = exp$ alınırsa,

$$\begin{aligned}\ln\left(f\left(e^{\frac{\ln 2\ln a\ln b}{\ln a+\ln b}}\right)\int_{\ln a}^{\ln b}\ln\left(\frac{\ln\omega(e^x)}{x\ln 2}\right)\right. &\leq\int_{\ln a}^{\ln b}\frac{\ln f(e^x)\ln\omega(e^x)}{x\ln 2}\\ &\leq\frac{\ln f(a)+\ln f(b)}{2}\int_{\ln a}^{\ln b}\ln\left(\frac{\ln\omega(e^x)}{x\ln 2}\right)dx\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

Tanım 3.2.7 $I_\alpha\subset(0,\infty)_\alpha$ bir α-aralık ve $p\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ olsun. $f : I_\alpha\to\mathbb{R}_\alpha$ fonksiyonu her $a, b\in\mathbb{R}_\alpha$ için

$$f([\alpha(t)\dot{\times}a^{\dot{p}}\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}b^{\dot{p}}]^{\frac{\dot{1}}{\dot{p}}\dot{/}})\dot{\leq}\alpha(t)\dot{\times}f(x)\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}f(y) \tag{3.2.23}$$

eşitsizliğini sağlıyorsa bu f fonksiyonuna p_{α_α}-konveks fonksiyon denir.

Teorem 3.2.4 $f : I_\alpha \subset (0,\infty)_\alpha \to \mathbb{R}_\alpha$ bir p_{α_α}-konveks fonksiyon, $p \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $a,b \in I_\alpha$ ve $a\dot{<}b$ olsun. $f \in L[a,b]_\alpha$ ve $w : [a,b]_\alpha \to \mathbb{R}_\alpha$ fonksiyonu α_α negatif olmayan, α_α integrallenebilir ve $\left[\frac{a^{\dot{p}}\dot{+}b^{\dot{p}}}{\alpha(2)}\dot{}\right]$' ye göre p_{α_α}-simetrik fonksiyon ise

$$f\left(\left[\frac{a^{\dot{p}}\dot{+}b^{\dot{p}}}{\alpha(2)}\dot{}\right]^{\frac{\dot{1}}{\dot{p}}\dot{}}\right)\dot{\times}\int_a^b\left[\frac{(w\circ\alpha)(x)}{x^{\dot{1}\dot{-}\dot{p}}}\dot{}\right]^{dx}\dot{\leq}\int_a^b\left[\frac{(f\circ\alpha)(x)\dot{\times}(w\circ\alpha)(x)}{x^{\dot{1}\dot{-}\dot{p}}}\dot{}\right]^{dx}$$
$$\dot{\leq}\quad\frac{f(a)\dot{+}f(b)}{\alpha(2)}\dot{}\dot{\times}\int_a^b\left[\frac{(w\circ\alpha)(x)}{x^{\dot{1}\dot{-}\dot{p}}}\dot{}\right]^{dx} \tag{3.2.24}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. 3.2.4 $f : I_\alpha \subset (0,\infty)_\alpha \to \mathbb{R}_\alpha$ bir p_{α_α}-konveks fonksiyon olduğundan her $x,y \in I_\alpha$ için

$$f([\alpha(t)\dot{\times}a^{\dot{p}}\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}b^{\dot{p}}]^{\frac{\dot{1}}{\dot{p}}\dot{}})\dot{\leq}\alpha(t)\dot{\times}f(x)\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}f(y) \tag{3.2.25}$$

eşitsizliğini yazabiliriz. (3.2.25) eşitsizliğinde $\alpha(t)=\alpha\left(\frac{1}{2}\right)$ alırsak

$$f\left(\left[\frac{x^{\dot{p}}\dot{+}y^{\dot{p}}}{\dot{2}}\dot{}\right]^{\frac{\dot{1}}{\dot{p}}\dot{}}\right)\quad\dot{\leq}\quad\frac{f(x)\dot{+}f(y)}{\dot{2}}\dot{} \tag{3.2.26}$$

eşitsizliğini elde ederiz. (3.2.26) eşitsizliğinde

$$x=[\alpha(t)\dot{\times}a^{\dot{p}}\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}b^{\dot{p}}]^{\frac{\dot{1}}{\dot{p}}\dot{}}$$

ve

$$y=[\alpha(t)\dot{\times}b^{\dot{p}}\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}a^{\dot{p}}]^{\frac{\dot{1}}{\dot{p}}\dot{}}$$

olarak seçilirse

$$f\left(\left[\frac{a^{\dot{p}}\dot{+}b^{\dot{p}}}{\dot{2}}\right]^{\frac{\dot{1}}{\dot{p}}\dot{}}\right)\quad\dot{\leq}\quad\frac{f([\alpha(t)\dot{\times}a^{\dot{p}}\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}b^{\dot{p}}]^{\frac{\dot{1}}{\dot{p}}\dot{}})}{\dot{2}}\dot{}$$
$$\dot{+}\quad\frac{f([\alpha(t)\dot{\times}b^{\dot{p}}\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}a^{\dot{p}}]^{\frac{\dot{1}}{\dot{p}}\dot{}})}{\dot{2}}\dot{} \tag{3.2.27}$$

eşitsizliği sağlanır. (3.2.27) eşitsizliğinin her iki yanını

$$w\big([\alpha(t)\dot{\times}a^{\dot{p}}\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}b^{\dot{p}}]^{\frac{\dot{1}}{\dot{p}}}\big)$$

ile α_α-çarpıp, $[0,1]_\alpha$ üzerinde t ye göre α_α-integralini alırsak ve

$$\int_{\dot{0}}^{\dot{1}}\left[f\left(\left[\frac{a^{\dot{p}}\dot{+}b^{\dot{p}}}{\dot{2}}\right]^{\frac{\dot{1}}{\dot{p}}\dot{}}\right)\dot{\times}w([\alpha(t)\dot{\times}a^{\dot{p}}\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}b^{\dot{p}}]^{\frac{\dot{1}}{\dot{p}}})\right]^{dt}$$
$$\dot{\leq}\quad\int_{\dot{0}}^{\dot{1}}\left[\frac{f([\alpha(t)\dot{\times}a^{\dot{p}}\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}b^{\dot{p}}]^{\frac{\dot{1}}{\dot{p}}\dot{}})\dot{\times}w([\alpha(t)\dot{\times}a^{\dot{p}}\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}b^{\dot{p}}]^{\frac{\dot{1}}{\dot{p}}})}{\dot{2}}\dot{}\right]^{dt}$$
$$\dot{+}\quad\int_{\dot{0}}^{\dot{1}}\left[\frac{f([\alpha(t)\dot{\times}b^{\dot{p}}\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}a^{\dot{p}}]^{\frac{\dot{1}}{\dot{p}}\dot{}})\dot{\times}w([\alpha(t)\dot{\times}a^{\dot{p}}\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}b^{\dot{p}}]^{\frac{\dot{1}}{\dot{p}}})}{\dot{2}}\dot{}\right]^{dt}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Burada α üretecinin özelleklikleri kullanarak

$$\int_{\dot{0}}^{\dot{1}} \left[f\left(\left[\frac{a^{\dot{p}} \dot{+} b^{\dot{p}}}{\dot{2}} \right]^{\frac{\dot{1}}{\dot{p}}.} \right) \dot{\times} (w \circ \alpha)[t\alpha^{-1}(a)^p + (1-t)\alpha^{-1}(b)^p]^{\frac{1}{p}} \right]^{dt} \tag{3.2.28}$$

$$\dot{\leq} \int_{\dot{0}}^{\dot{1}} \left[\frac{(f \circ \alpha)\left([t\alpha^{-1}(a)^p + (1-t)\alpha^{-1}(b)^p]^{\frac{1}{p}} \dot{\times} (w \circ \alpha)[t\alpha^{-1}(a)^p + (1-t)\alpha^{-1}(b)^p]^{\frac{1}{p}} \right)}{2}. \right]^{dt}$$

$$\dot{+} \int_{\dot{0}}^{\dot{1}} \left[\frac{(f \circ \alpha)\left([t\alpha^{-1}(b)^p + (1-t)\alpha^{-1}(a)^p]^{\frac{1}{p}} \dot{\times} (w \circ \alpha)[t\alpha^{-1}(a)^p + (1-t)\alpha^{-1}(b)^p]^{\frac{1}{p}} \right)}{2}. \right]^{dt}$$

eşitsizliğini yazabiliriz. (3.2.28) eşitsizliğinde,

$$x = [t\alpha^{-1}(b)^p + (1-t)\alpha^{-1}(a)^p]^{\frac{1}{p}}$$

olarak seçip değişken değişimi yaparsak

$$f\left(\left[\frac{a^p \dot{+} b^p.}{\dot{2}}. \right]^{\frac{\dot{1}}{\dot{p}}.} \right) \dot{\times} \int_a^b \left[\frac{(w \circ \alpha)(x)}{x^{\dot{1} \dot{-} \dot{p}}} \right]^{dx} \dot{\leq} \int_a^b \left[\frac{(f \circ \alpha)(x) \dot{\times} (w \circ \alpha)(x)}{x^{\dot{1} \dot{-} \dot{p}}} \right]^{dx}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Böylece (3.2.24) eşitsizliğinin sol tarafı ispatlanmış olur. Şimdi ikinci kısmın ispatını yapalım. Aşağıdaki eşitsizliğin doğru olduğunu biliyoruz,

$$\begin{aligned} \frac{f([\alpha(t) \dot{\times} a^p \dot{+} \alpha(1-t) \dot{\times} b^p]^{\frac{\dot{1}}{\dot{p}}.})}{\dot{2}}. &\dot{+} \frac{f([\alpha(t) \dot{\times} b^p \dot{+} \alpha(1-t) \dot{\times} a^p]^{\frac{\dot{1}}{\dot{p}}.})}{\dot{2}}. \\ &\dot{\leq} \frac{f(a) \dot{+} f(b)}{\dot{2}}. \end{aligned} \tag{3.2.29}$$

(3.2.29) eşitsizliğinin her iki tarafını

$$w([\alpha(t) \dot{\times} a^p \dot{+} \alpha(1-t) \dot{\times} b^p]^{\frac{\dot{1}}{\dot{p}}.})$$

ile α_α-çarpıp $[0,1]$ üzerinde t ye göre α_α-integrali alınıp,

$$x = [t\alpha^{-1}(b)^p + (1-t)\alpha^{-1}(a)^p]^{\frac{1}{p}}$$

değişken değişimi yapılırsa

$$\int_a^b \left[\frac{(f \circ \alpha)(x) \dot{\times} (w \circ \alpha)(x)}{x^{\dot{1} \dot{-} \dot{p}}}. \right]^{dx} \dot{\leq} \frac{f(a) \dot{+} f(b)}{\alpha(2)}. \dot{\times} \int_a^b \left[\frac{(w \circ \alpha)(x)}{x^{\dot{1} \dot{-} \dot{p}}}. \right]^{dx}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Lemma 3.2.1 $f : I_\alpha^\circ \subset \mathbb{R}_\alpha \to \mathbb{R}_\alpha$ fonksiyonu I_α° üzerinde α_α-diferansiyellenebilen bir fonksiyon, $a, b \in I_\alpha^\circ$ ve $a \dot{<} b$ olsun. Eğer $f^* \in L[a,b]_\alpha$ ise

$$\begin{aligned} &\frac{\alpha(1)}{b \dot{-} a}. \dot{\times} \int_a^b (f(x)^{dx} \dot{-} f\left(\frac{a \dot{+} b}{2}. \right) \\ = \ &[b \dot{-} a] \dot{\times} \left[\int_{\dot{0}}^{\frac{\dot{1}}{\dot{2}}.} t \dot{\times} f^*(t \dot{\times} a \dot{+} (1 \dot{-} t) \dot{\times} b)^{dt} \right. \\ \dot{+} \ &\left. \int_{\frac{\dot{1}}{\dot{2}}.}^{\dot{1}} (t-1) \dot{\times} f^*(t \dot{\times} a \dot{+} (1 \dot{-} t) \dot{\times} b)^{dt} \right] \end{aligned} \tag{3.2.30}$$

eşitliğini elde ederiz.

İspat. 3.2.5 İspat için aşağıdaki iki denklemi ele alalım:

$$\int_{\dot{0}}^{\frac{\dot{1}}{\dot{2}}} t\dot{\times} f^*(t\dot{\times}a\dot{+}(1\dot{-}t)\dot{\times}b)^{dt} \quad \dot{+} \quad \int_{\frac{\dot{1}}{\dot{2}}}^{\dot{1}} (t-1)\dot{\times} f^*(t\dot{\times}a\dot{+}(1\dot{-}t)\dot{\times}b)^{dt}.$$

Burada verilen integrali

$$I_1 = \int_{\dot{0}}^{\frac{\dot{1}}{\dot{2}}} t\dot{\times} f^*(t\dot{\times}a\dot{+}(1\dot{-}t)\dot{\times}b)^{dt}$$

ve

$$I_2 = \int_{\frac{\dot{1}}{\dot{2}}}^{\dot{1}} (1\dot{-}t)\dot{\times} f^*(t\dot{\times}a\dot{+}(1\dot{-}t)\dot{\times}b)^{dt}$$

olarak ifade edelim. İntegralin hesabı için yukarıda verilen ifadelerden birini ele alalım.

$$I_1 = \int_{\dot{0}}^{\frac{\dot{1}}{\dot{2}}} t\dot{\times} f^*(t\dot{\times}a\dot{+}(1\dot{-}t)\dot{\times}b)^{dt}$$

(3.2.31) eşitliğinde α-kısmı integrasyon uygulanırsa

$$u := t \text{ ve } {}^{dv} := f^*(t\dot{\times}a\dot{+}(1\dot{-}t)\dot{\times}b)^{dt}$$

$${}^{du} := \dot{1} \text{ ve } v := f(t\dot{\times}a\dot{+}(\dot{1}\dot{-}t)\dot{\times}b)\dot{\times}\frac{\dot{1}}{a\dot{-}b}.$$

yazabiliriz. Daha sonra ifadeleri yerine yazarsak

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\dot{0}}^{\frac{\dot{1}}{\dot{2}}} t\dot{\times} f^*(t\dot{\times}a\dot{+}(1\dot{-}t)\dot{\times}b)^{dt} \\ &= \frac{\dot{1}}{\dot{2}}\dot{\times}\frac{\dot{1}}{a\dot{-}b}\dot{\times} f(\frac{a\dot{+}b}{\dot{2}}.)\dot{-}\frac{\dot{1}}{b\dot{-}a}\dot{\times}\int_{\frac{a\dot{+}b}{\dot{2}}.}^{b} f(x)^{dx} \end{aligned}$$

eşitliğini elde ederiz ve burada

$$x = t\dot{\times}a\dot{+}(1\dot{-}t)b$$

olarak seçip değişken değişimi yapılırsa

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\dot{0}}^{\frac{\dot{1}}{\dot{2}}} t\dot{\times} f^*(t\dot{\times}a\dot{+}(1\dot{-}t)\dot{\times}b)^{dt} \\ &= (\frac{\dot{1}}{b\dot{-}a})^2\dot{\times}\int_{\frac{a\dot{+}b}{\dot{2}}.}^{b} f(x)^{dx}\dot{-}\frac{\dot{1}}{\dot{2}}\dot{\times}\frac{\dot{1}}{b\dot{-}a}\dot{\times} f(\frac{a\dot{+}b}{\dot{2}}.) \end{aligned}$$

eşitliğini elde ederiz. Benzer şekilde

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{\dot{0}}^{\frac{\dot{1}}{\dot{2}}} (1\dot{-}t)\dot{\times} f^*(t\dot{\times}a\dot{+}(1\dot{-}t)\dot{\times}b)^{dt} \\ &= (\frac{\dot{1}}{b\dot{-}a})^2\dot{\times}\int_{a}^{\frac{a\dot{+}b}{\dot{2}}.} f(x)^{dx}\dot{-}\frac{\dot{1}}{\dot{2}.}\dot{\times}\frac{\dot{1}}{b\dot{-}a}\dot{\times} f\left(\frac{a\dot{+}b}{\dot{2}.}\right) \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar.

Sonuç 3.2.7 (3.2.30) eşitliğinde $\alpha = Id$ olarak alınırsa

$$\begin{aligned}\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right) &= (b-a)\Bigg[\int_0^{\frac{1}{2}} tf'(ta+(1-t)b)dt\\ &+ \int_{\frac{1}{2}}^1 (t-1)f'(ta+(1-t)b)dt\Bigg]\end{aligned}$$

elde edilir[35].

Teorem 3.2.5 $f : I_\alpha^\circ \subset \mathbb{R}_\alpha \to \mathbb{R}_\alpha$ fonksiyonu I_α° üzerinde α_α-diferansiyellenebilir, $a\dot{<}b$ ve $a, b \in I_\alpha^\circ$ olsun. Eğer $|f^*|$ fonksiyonu $[a, b]_\alpha$ üzerinde α_α-konveks fonksiyon ise

$$\left|\frac{\dot{1}}{b\dot{-}a}\dot{\times}\int_a^b f(x)^{dx}\dot{-}f\left(\frac{a\dot{+}b}{\dot{2}.}\right)\right|\dot{\leq}\frac{b\dot{-}a}{\dot{8}}.\dot{\times}\left[|f^*(a)|\dot{+}|f^*(b)|\right] \tag{3.2.31}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. 3.2.6 Lemma 3.2.1 den ve $|f^*|$ fonksiyonu α_α-konveks olduğundan

$$\begin{aligned}&\left|\frac{\dot{1}}{b\dot{-}a}.\dot{\times}\int_a^b (x)^{d_\alpha x}\dot{-}f\left(\frac{a\dot{+}b}{2}.\right)\right|\\ =\ & |[b\dot{-}a]|\dot{\times}\Bigg[\int_{\dot{0}}^{\frac{\dot{1}}{2}.} |t\dot{\times}f^*(t\dot{\times}a\dot{+}(1\dot{-}t)\dot{\times}b)|^{dt}\\ & \dot{+}\int_{\frac{\dot{1}}{2}.}^{\dot{1}} |(t\dot{-}1)\dot{\times}f'(t\dot{\times}a\dot{+}(1\dot{-}t)\dot{\times}b))|^{dt}\Bigg]\\ \dot{\leq}\ & [b\dot{-}a]\dot{\times}\Bigg[\int_{\dot{0}}^{\frac{\dot{1}}{2}.} |t|\dot{\times}|f^*(t\dot{\times}a\dot{+}(1\dot{-}t)\dot{\times}b)|^{dt}\\ & \dot{+}\int_{\frac{\dot{1}}{2}.}^{\dot{1}} |(t-1)|\dot{\times}|f^*(t\dot{\times}a\dot{+}(1\dot{-}t)\dot{\times}b)|^{dt}\Bigg]\end{aligned} \tag{3.2.32}$$

eşitsizliğini yazabiliriz. (3.2.32) eşitsizliğinde elde edilen integralleri aşığıdaki şekilde parça parça hesaplayabiliriz;

$$\begin{aligned}J_1 &= \int_{\dot{0}}^{\frac{\dot{1}}{2}.} |t|\dot{\times}|f^*(t\dot{\times}a\dot{+}(1\dot{-}t)\dot{\times}b)|^{dt},\\ J_2 &= \int_{\frac{\dot{1}}{2}.}^{\dot{1}} |(t-1)|\dot{\times}|f^*(t\dot{\times}a\dot{+}(1\dot{-}t)\dot{\times}b)|^{dt}.\end{aligned}$$

İlk parçayı hesaplayacak olursak

$$\begin{aligned}J_1 &= \int_{\dot{0}}^{\frac{\dot{1}}{2}.} |t|\dot{\times}|f^*(t\dot{\times}a\dot{+}(1\dot{-}t)\dot{\times}b)|^{dt}\\ &= \int_{\dot{0}}^{\frac{\dot{1}}{2}.} t^{\dot{2}}\dot{\times}|f^*(a)|\dot{+}(t\dot{\times}(1-t)\dot{\times}|f^*(b)|^{dt}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{\dot 0}^{\frac{\dot 1}{\dot 2}} [t^{\dot 2} \dot\times |f^*(a)|^{dt} \dot+ \int_{\dot 0}^{\frac{\dot 1}{\dot 2}} (t \dot\times (1-t) \dot\times |f^*(b)|^{dt} \\
&= |f^*(a)| \dot\times \alpha \left\{ \int_{\alpha^{-1}(\dot 0)}^{\alpha^{-1}(\frac{\dot 1}{\dot 2})} \alpha^{-1} \circ (t)^{\dot 2} \right\} \dot+ |f^*(b)| \dot\times \alpha \left\{ \int_{\alpha^{-1}(\dot 0)}^{\alpha^{-1}(\frac{\dot 1}{\dot 2})} \alpha^{-1} \circ (t \dot\times (1-t) \right\} \\
&= \frac{|f^*(a)|}{\dot{24}} \dot+ \frac{|f^*(b)|}{\dot{12}}.
\end{aligned}
$$

eşitliğini elde ederiz. Benzer şekilde J_2 integralinide hesaplayacak olursak

$$
\begin{aligned}
J_2 &= \int_{\frac{\dot 1}{\dot 2}}^{\dot 1} |(t-1)| \dot\times |f'(t \dot\times a \dot+ (1 \dot- t)|^{dt} \\
&= \frac{|f^*(a)|}{\dot{12}} \dot+ \frac{|f^*(b)|}{\dot{24}}.
\end{aligned}
$$

eşitliğini elde ederiz. Böylece $J_1 \dot+ J_2$ toplamından

$$
\left| \frac{\dot 1}{b \dot- a} \dot\times \int_a^b f(x)^{dx} \dot- f\left(\frac{a \dot+ b}{\dot 2} \right) \right| \dot\leq \frac{b \dot- a}{\dot 8} \dot\times [|f^*(a)| \dot+ |f^*(b)|]
$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 3.2.8 (3.2.31) eşitsizliğinde $\alpha = Id$ olarak alınırsa

$$
\left| \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx - f\left(\frac{a+b}{2} \right) \right| \leq \frac{b-a}{4} \left(\frac{|f^*(a)| + |f^*(b)|}{2} \right)
$$

eşitsizliğini elde ederiz[36].

Lemma 3.2.2 $f : I_\alpha^\circ \subset \mathbb{R}_\alpha \to \mathbb{R}_\alpha$ fonksiyonu I_α° üzerinde α_α-diferansiyellenebilen bir fonksiyon, $a, b \in I_\alpha^\circ$ ve $a \dot< b$ olsun. $w : [a,b]_\alpha \to [0,\infty)_\alpha$ fonksiyonu α_α-diferansiyellenebilen bir fonksiyon olmak üzere eğer $f^* \in L[a,b]_\alpha$ ise

$$
\begin{aligned}
&\frac{\dot 1}{b \dot- a} \dot\times \int_a^b (w(x) \dot\times f(x)) dx \dot- \frac{\dot 1}{b \dot- a} \dot\times f\left(\frac{a \dot+ b}{\dot 2} \right) \dot\times \int_a^b w(x)^{dx} \\
&= [b \dot- a] \dot\times \left[\int_{\dot 0}^{\dot 1} k(t) \dot\times f^*(t \dot\times a \dot+ (1-t) \dot\times b)^{dt} \right] \qquad (3.2.33)
\end{aligned}
$$

eşitliği elde edilir. Burada $k(t)$ fonksiyonu her $t \in [0,1]_\alpha$ için

$$
k(t) = \begin{cases} \int_{\dot 0}^t w(s \dot\times a \dot+ (1-s) \dot\times b)^{ds}, & t \in [\dot 0, \frac{\dot 1}{\dot 2})_\alpha \\ \dot- \int_t^{\dot 1} w(s \dot\times a \dot+ (1-s) \dot\times b)^{ds}, & t \in [\frac{\dot 1}{\dot 2}, \dot 1]_\alpha \end{cases}
$$

şeklinde tanımlanır.

İspat. 3.2.7 (3.2.33) eşitliğinin sağ tarafında bulunan integrali Lemmanın iddialarına göre yazarsak

$$
\begin{aligned}
Q &= \int_{\dot 0}^{\dot 1} k(t) \dot\times f^*(t \dot\times a \dot+ (1-t) \dot\times b)^{dt} \\
&= \int_{\dot 0}^{\frac{\dot 1}{\dot 2}} \left(\int_{\dot 0}^t w(s \dot\times a \dot+ (1-s) \dot\times b)^{ds} \right) \dot\times f^*(t \dot\times a \dot+ (1-t) \dot\times b)^{dt} \\
&\dot+ \int_{\frac{\dot 1}{\dot 2}}^{\dot 1} \left(\dot- \int_t^{\dot 1} w(s \dot\times a \dot+ (1-s) \dot\times b)^{ds} \right) \dot\times f^*(t \dot\times a \dot+ (1-t) \dot\times b)^{dt}
\end{aligned}
$$

eşitliği elde edilir. Yukarıdaki bu integrali aşağıdaki şekilde iki kısma ayırırsak

$$Q_1 = \int_{\dot{0}}^{\frac{\dot{1}}{\dot{2}}} \left(\int_{\dot{0}}^{t} w(s \dot{\times} a \dot{+} (1-s) \dot{\times} b)^{ds} \right) \dot{\times} f^*(t \dot{\times} a \dot{+} (1-t) \dot{\times} b)^{dt},$$

$$Q_2 = \int_{\frac{\dot{1}}{\dot{2}}}^{\dot{1}} \left(\dot{-} \int_{t}^{\dot{1}} w(s \dot{\times} a \dot{+} (1-s) \dot{\times} b)^{ds} \right) \dot{\times} f^*(t \dot{\times} a \dot{+} (1-t) \dot{\times} b)^{dt}$$

yazabiliriz.

$$u := \int_{\dot{0}}^{t} w(s \dot{\times} a \dot{+} (1-s) \dot{\times} b)^{ds} \text{ ve } {}^{dv} := f^*(t \dot{\times} a \dot{+} (1 \dot{-} t) \dot{\times} b)^{dt}$$

$${}^{du} := w(t \dot{\times} a \dot{+} (1 \dot{-} t) \dot{\times} b) \text{ ve } v := f(t \dot{\times} a \dot{+} (\dot{1} \dot{-} t) \dot{\times} b) \dot{\times} \frac{\dot{1}}{a \dot{-} b}.$$

Buradan Q_1 integralini hesaplarsak

$$\begin{aligned} Q_1 &= \left(\int_{\dot{0}}^{t} w(s \dot{\times} a \dot{+} (1 \dot{-} s) \dot{\times} b \right)^{ds} \dot{\times} \frac{f(t \dot{\times} a \dot{+} (\dot{1} \dot{-} t) \dot{\times} b)}{a \dot{-} b} \Big|_{\dot{0}}^{\frac{\dot{1}}{\dot{2}}} \\ &\dot{-} \int_{\dot{0}}^{\frac{\dot{1}}{\dot{2}}} w(t \dot{\times} a \dot{+} (1 \dot{-} t) \dot{\times} b) \dot{\times} \frac{f(t \dot{\times} a \dot{+} (\dot{1} \dot{-} t) \dot{\times} b)}{a \dot{-} b} \Big|_{\dot{0}}^{\frac{\dot{1}}{\dot{2}}} dt \\ &= \left(\int_{\dot{0}}^{\frac{\dot{1}}{2}} w(s \dot{\times} a \dot{+} (1-s) \right)^{ds} \dot{\times} \frac{f\left(\frac{a \dot{+} b}{\dot{2}}\right)}{a \dot{-} b} \\ &\dot{-} \int_{\dot{0}}^{\frac{\dot{1}}{\dot{2}}} w(t \dot{\times} a \dot{+} (1 \dot{-} t) \dot{\times} b) \dot{\times} \frac{f(t \dot{\times} a \dot{+} (\dot{1} \dot{-} t) \dot{\times} b)}{a \dot{-} b} dt \end{aligned}$$

eşitliğini elde ederiz. Benzer şekilde Q_2 integralini de hesaplarsak

$$\begin{aligned} Q_2 &= \left(\int_{\frac{\dot{1}}{2}}^{\dot{1}} w(s \dot{\times} a \dot{+} (1-s) \right)^{ds} \dot{\times} \frac{f\left(\frac{a \dot{+} b}{\dot{2}}\right)}{a \dot{-} b} \\ &\dot{-} \int_{\frac{\dot{1}}{2}}^{\dot{1}} w(t \dot{\times} a \dot{+} (1 \dot{-} t) \dot{\times} b) \dot{\times} \frac{f(t \dot{\times} a \dot{+} (\dot{1} \dot{-} t) \dot{\times} b)}{a \dot{-} b} dt \end{aligned}$$

eşitliğini elde ederiz. Böylece $Q_1 \dot{+} Q_2$ den

$$\begin{aligned} &\frac{\dot{1}}{b \dot{-} a} \dot{\times} \int_{a}^{b} (w(x) \dot{\times} f(x)) dx \dot{-} \frac{\dot{1}}{b \dot{-} a} \dot{\times} f\left(\frac{a \dot{+} b}{2} \right) \dot{\times} \int_{a}^{b} w(x)^{dx} \\ &= [b \dot{-} a] \dot{\times} \left[\int_{\dot{0}}^{\dot{1}} k(t) \dot{\times} f^*(t \dot{\times} a \dot{+} (1-t) \dot{\times} b)^{dt} \right] \end{aligned} \tag{3.2.34}$$

bulunur. Bu ise ispatı tamamlar.

Sonuç 3.2.9 Eğer (3.2.33) eşitliğinde $w(x) = \dot{1}$ olarak alınırsa (3.2.33) eşitliği (3.2.30) eşitliğine indirgenir.

Sonuç 3.2.10 Eğer (3.2.33) eşitliğinde $\alpha = Id$ olarak alınırsa

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)w(x)dx - \frac{1}{b-a}f\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b w(x)dx \\
= \;& (b-a)\left[\int_0^1 k(t)f'(ta+(1-t)b)dt\right. \qquad (3.2.35)
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $k(t)$ fonksiyonu her $t \in [0,1]$ için

$$k(t) = \begin{cases} \int_0^t w(as+(1-s)b)ds, & t \in [0, \frac{1}{2}) \\ -\int_t^1 w(as+(1-s)b)ds, & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır[50].

Teorem 3.2.6 $f : I_\alpha^\circ \subset \mathbb{R}_\alpha \to \mathbb{R}_\alpha$ fonksiyonu I_α° üzerinde α_α-diferansiyellenebilir bir fonksiyon, $a, b \in I_\alpha^\circ$ ve $a\dot{<}b$ olsun. $w : [a,b]_\alpha \to [0,\infty)_\alpha$ fonksiyonu α_α-diferansiyellenebilir ve $\left(\frac{a\dot{+}b}{\alpha(2)}.\right)$ ye göre Newtonyen olmayan simetrik bir fonksiyon olsun. Eğer $|f^*|$ fonksiyonu $[a,b]_\alpha$ üzerinde α_α-konveks ise

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{\dot{1}}{b\dot{-}a}.\dot{\times}\int_a^b w(x)\dot{\times}f(x)^{dx}\dot{-}\frac{\dot{1}}{b\dot{-}a}.\dot{\times}f\left(\frac{a\dot{+}b}{\dot{2}}.\right)\dot{\times}\int_a^b w(x)^{dx}\right| \\
\dot{\le}\;& \frac{\dot{1}}{(b\dot{-}a)^{\dot{2}}}.\dot{\times}\int_{\frac{a\dot{+}b}{\dot{2}}.}^{b} w(x)\dot{\times}[(x\dot{-}a)^{\dot{2}}\dot{-}(b\dot{-}x)^{\dot{2}}]^{dx}\dot{\times}\frac{|f^*(a)|\dot{+}|f^*(b)|}{\dot{2}}. \qquad (3.2.36)
\end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. 3.2.8 Lemma 3.2.2 ve $|f^*|$ fonksiyonunun α_α-konveksliğinden

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{\dot{1}}{b\dot{-}a}.\dot{\times}\int_a^b w(x)\dot{\times}f(x)^{dx}\dot{-}\frac{\dot{1}}{b\dot{-}a}.\dot{\times}f\left(\frac{a\dot{+}b}{\dot{2}}.\right)\dot{\times}\int_a^b w(x)^{dx}\right| \\
\dot{\le}\;& (b\dot{-}a)\dot{\times}\int_{\dot{0}}^{\frac{\dot{1}}{\dot{2}}.}\left(\int_{\dot{0}}^{t} w(s\dot{\times}a\dot{+}(1\dot{-}s)\dot{\times}b)\right)\dot{\times}[t\dot{\times}|f^*(a)|\dot{+}(1\dot{-}t)|f^*(b)|]^{dt} \qquad (3.2.37) \\
\dot{+}\;& (b\dot{-}a)\dot{\times}\int_{\frac{\dot{1}}{\dot{2}}.}^{\dot{1}}\left(\int_{t}^{\dot{1}} w(s\dot{\times}a\dot{+}(1\dot{-}s)\dot{\times}b)\right)\dot{\times}[t\dot{\times}|f^*(a)|\dot{+}(1\dot{-}t)|f^*(b)|]^{dt}
\end{aligned}$$

eşitsizliğini yazabiliriz. (3.2.37) eşitsizliğindeki integrali

$$R_1 = \int_{\dot{0}}^{\frac{\dot{1}}{\dot{2}}.}\left(\int_{\dot{0}}^{t} w(s\dot{\times}a\dot{+}(1\dot{-}s)\dot{\times}b)\right)\dot{\times}[t\dot{\times}|f^*(a)|\dot{+}(1\dot{-}t)|f^*(b)|]^{dt}$$

ve

$$R_2 = \int_{\frac{\dot{1}}{\dot{2}}.}^{\dot{1}}\left(\int_{t}^{\dot{1}} w(s\dot{\times}a\dot{+}(1\dot{-}s)\dot{\times}b)\right)\dot{\times}[t\dot{\times}|f^*(a)|\dot{+}(1\dot{-}t)|f^*(b)|]^{dt}$$

şeklinde iki kısıma ayırıp hesaplayalım. İlk olarak R_1 integralini hesaplayacak olursak

$$\begin{aligned} R_1 &= \int_{\dot{0}}^{\frac{\dot{1}}{\dot{2}}} \left(\int_{\dot{0}}^{t} w(s \dot{\times} a \dot{+} (1 \dot{-} s) \dot{\times} b) \right) \dot{\times} [t \dot{\times} |f^*(a)| \dot{+} (1 \dot{-} t) |f^*(b)|]^{dsdt} \\ &= \int_{\dot{0}}^{\frac{\dot{1}}{\dot{2}}} \left(\int_{s}^{\frac{\dot{1}}{\dot{2}}} w(s \dot{\times} a \dot{+} (1 \dot{-} s) \dot{\times} b) \right) \dot{\times} [t \dot{\times} |f^*(a)| \dot{+} (1 \dot{-} t) |f^*(b)|]^{dtds} \\ &= \int_{\dot{0}}^{\frac{\dot{1}}{\dot{2}}} w(s \dot{\times} a \dot{+} (1 \dot{-} s) \dot{\times} b) \dot{\times} \left[\left(\frac{\dot{1}}{\dot{8}} \dot{-} \frac{s^{\dot{2}}}{\dot{2}} \right) \dot{\times} |f^*(a)| \right. \\ &\quad \left. \dot{+} \left(\frac{(1 \dot{-} s)^{\dot{2}}}{\dot{2}} \dot{-} \frac{\dot{1}}{\dot{8}} \right) \dot{\times} |f^*(b)| \right]^{ds} \end{aligned} \tag{3.2.38}$$

eşitliğini elde ederiz. (3.2.38) eşitliğinde

$$x = s\alpha^{-1}(a) \dot{+} (1 - s)\alpha^{-1}(b)$$

olarak seçilip değişken değişimi yapılırsa

$$\begin{aligned} R_1 = \frac{\dot{1}}{\dot{8}} \;\dot{\times}\; \frac{\dot{1}}{[b \dot{-} a]^{\dot{3}}} \dot{\times} \int_{\frac{a \dot{+} b}{\dot{2}}}^{b} w(x) \dot{\times} &\left[\left[(b \dot{-} a)^{\dot{2}} \dot{-} \dot{4} \dot{\times} (b \dot{-} x)^{\dot{2}} \right] \dot{\times} |f^*(a)| \right. \\ &\left. \ddot{+} \left[4 \dot{\times} (x \dot{-} a)^{\dot{2}} \dot{-} (b \dot{-} a)^{\dot{2}} \right] \dot{\times} |f^*(b)| \right]^{dt} \end{aligned} \tag{3.2.39}$$

eşitliğini elde ederiz. Benzer şekilde R_2 integralini de hesaplarsak

$$\begin{aligned} R_2 = \frac{\dot{1}}{\dot{8}} \;\dot{\times}\; \frac{\dot{1}}{[b \dot{-} a]^{\dot{3}}} \dot{\times} \int_{a}^{\frac{a \dot{+} b}{\dot{2}}} w(x) \dot{\times} &\left[\left[\dot{4} \dot{\times} (b \dot{-} x)^{\dot{2}} \dot{-} (b \dot{-} a)^{\dot{2}} \right] \dot{\times} |f^*(a)| \right. \\ &\left. \dot{+} \left[(b \dot{-} a)^{\dot{2}} \dot{-} \dot{4} \dot{\times} (x \dot{-} a)^{\dot{2}} \right] \dot{\times} |f^*(b)| \right]^{dt} \end{aligned}$$

eşitliğini buluruz. $w(x)$ fonksiyonu

$$x = \left(\frac{a \dot{+} b}{\alpha(2)} \right)$$

ifadesine göre Newtonyen olmayan simetrik fonksiyon olduğundan

$$w(x) = w(a \dot{+} b \dot{-} x)$$

eşitliği sağlanır. Böylece

$$R_1 = R_2 \tag{3.2.40}$$

bağıntısı bulunur. (3.2.37), (3.2.38), (3.2.39) ve (3.2.40) bağıntılarından (3.2.36) eşitsizliğini elde ederiz. Böylece ispatı tamamlamış oluruz.

Sonuç 3.2.11 Eğer (3.2.36) eşitsizliğinde $w(x) = \dot{1}$ olarak alınırsa (3.2.36) eşitsizliği (3.2.31) eşitsizliğine indirgenir.

Sonuç 3.2.12 Eğer (3.2.36) eşitsizliğinde $\alpha = Id$ olarak alınırsa (3.2.36) eşitsizliği

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| \leq \left(\frac{1}{(b-a)^2}\int_{\frac{a+b}{2}}^b w(x)\left[(x-a)^2-(b-x)^2\right]dx\right) \times \left(\frac{|f'(a)|+|f'(b)|}{2}\right) \quad (3.2.41)$$

eşitsizliğine indirgenir[50].

3.3 $*-$Hermite-Hadamard-Fejer ve p_* Konveks Fonksiyon için Hermite-Hadamard-Fejer Eşitsizliği

Tanım 3.3.1 $w : [a,b]_\alpha \to \mathbb{R}_\beta$ fonksiyonu,

$$w(x) = w(a\dot{+}b\dot{-}x) \quad (3.3.1)$$

eşitliğini sağlıyorsa, w fonksiyonuna $\left(\frac{a\dot{+}b}{\alpha(2)}.\right)$ ye göre Newtonyen olmayan simetrik fonksiyon denir.

Tanım 3.3.2 $g : [a,b]_\alpha \subseteq \mathbb{R}_\alpha \setminus \{\dot{0}\} \to \mathbb{R}_\beta$ bir fonksiyon olsun. Eğer g fonksiyonu her $x \in [a,b]_\alpha$ için,

$$g(x) = g\left(\frac{\alpha(1)}{\frac{\alpha(1)}{a}.\dot{+}\frac{\alpha(1)}{b}.\dot{-}\frac{\alpha(1)}{x}.}.\right) \quad (3.3.2)$$

eşitliğini sağlıyorsa bu g fonksiyonuna $\frac{\alpha(2)\dot{\times}a\dot{\times}b}{a\dot{+}b}.$ ye göre Newtonyen olmayan harmonik simetrik fonksiyon denir.

Tanım 3.3.3 $p \in \mathbb{R}_\alpha \setminus \{0\}$ olsun. $w : [a,b]_\alpha \subset (0,\infty)_\alpha \to \mathbb{R}_\beta$ fonksiyonu her $x \in [a,b]_\alpha$ için

$$w(x) = w([a^p\dot{+}b^p\dot{-}x^p]^{\frac{\dot{1}}{p}.})$$

eşitliğini sağlıyorsa bu w fonksiyonuna $\left[\frac{a^p\dot{+}b^p}{\alpha(2)}.\right]^{\frac{\dot{1}}{p}}$'ye göre p_*-simetrik fonksiyon denir.

Tanım 3.3.4 $f : \mathbb{R}_\alpha \to \mathbb{R}_\beta$ fonksiyonu, eğer her $x \in \mathbb{R}_\alpha$ için $f(x)\ddot{\geq}\ddot{0}$ eşitsizliğini sağlıyorsa bu f fonksiyonuna $*$-negatif olmayan fonksiyon denir.

Uyarı 3.3.1 Literatüre bakıldığında $*$-konvekslik tanımı [34]'da (2.3.4) olarak verilmektedir. Fakat bu tanım hatalıdır. Doğru tanımı, Ordu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı doktora öğrencisi Seren SALAŞ ile birlikte aşağıdaki şekilde verdik:

Tanım 3.3.5 $I_\alpha \subseteq \mathbb{R}_\alpha \backslash \{\dot{0}\}$ bir α-aralık olsun. Eğer bir $f : I_\alpha \to \mathbb{R}_\beta$ fonksiyonu her $a, b \in I_\alpha$ ve $t \in [0,1]$ için

$$f(\alpha(t)\dot{\times}a\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}b) \quad \ddot{\leq}(\ddot{\geq}) \quad \beta(t)\ddot{\times}f(a)\ddot{+}\beta(1-t)\ddot{\times}f(b) \tag{3.3.3}$$

eşitsizliğini sağlıyorsa bu f'ye $*$-konveks($*$-konkav) fonksiyon denir.

Sonuç 3.3.1 Yukarıda yapılan $*$-konveks($*$-konkav) fonksiyon tanımı, literatürdeki en geniş konveks(konkav) tanımıdır. Dolayısıyla buradan aşağıdaki sonuçları elde ederiz:

1.) (3.3.3) $*$-konkav eşitsizliğinde $\alpha\left(\frac{1}{x}\right) = x$ ve $\beta\left(\frac{1}{x}\right) = x$ olarak alınırsa H-H konveks fonksiyon tanımına indirgenir.

2.) (3.3.3) $*$-konkav eşitsizliğinde $\alpha\left(\frac{1}{x}\right) = x$ ve $\beta = Id$ olarak alınırsa H-A konkav fonksiyon tanımına indirgenir.

3.) (3.3.3) $*$-konkav eşitsizliğinde $\alpha = Id$ ve $\left(\frac{1}{x}\right) = x$ olarak alınırsa A-H konveks fonksiyon tanımına indirgenir.

4.) (3.3.3) $*$-konveks eşitsizliğinde $\alpha\left(\frac{1}{x}\right) = x$ ve $\beta\left(\frac{1}{x}\right) = x$ olarak alınırsa H-H konkav fonksiyon tanımına indirgenir.

5.) (3.3.3) $*$-konveks eşitsizliğinde $\alpha\left(\frac{1}{x}\right) = x$ ve $\beta = Id$ olarak alınırsa H-A konveks fonksiyon tanımına indirgenir.

6.) (3.3.3) $*$-konveks eşitsizliğinde $\alpha = Id$ ve $\left(\frac{1}{x}\right) = x$ olarak alınırsa A-H konkav fonksiyon tanımına indirgenir.

7.) (3.3.3) $*$-konveks(konkav) eşitsizliğinde $\alpha = Id$ ve $\beta = Id$ olarak alınırsa klasik anlamda bilinen konveks(konkav) fonksiyon tanımına indirgenir.

8.) (3.3.3) $*$-konveks(konkav) eşitsizliğinde $\beta = \alpha$ olarak alınırsa α_α-konveks fonksiyon tanımına indirgenir.

9.) (3.3.3) $*$-konveks(konkav) eşitsizliğinde $\beta = Id$ olarak alınırsa Id_α-konveks fonksiyon tanımına indirgenir.

Teorem 3.3.1 $f : [a,b]_\alpha \subseteq \mathbb{R}_\alpha \to \mathbb{R}_\beta$ bir $*$-konveks fonksiyon, $w : [a,b]_\alpha \subseteq \mathbb{R}_\alpha \to \mathbb{R}_\beta$ ve $a\dot{<}b$ $*$-negatif olmayan, $*$-integrallenebilir ve $\left(\frac{a\dot{+}b}{\alpha(2)}.\right)$ ye göre Newtonyen olmayan simetrik fonksiyon olmak üzere her $x \in \mathbb{R}$ için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır,

$$
\begin{aligned}
f\left(\frac{a\dot{+}b}{\dot{2}}\dot{/}\right)\ddot{\times}\ {}^{*}\!\int_a^b (w\circ\alpha)(x)dx \quad &\ddot{\leq} \quad {}^{*}\!\int_a^b [(f\circ\alpha)(x)\ddot{\times}(w\circ\alpha)(x)]dx \qquad (3.3.4)\\
&\ddot{\leq} \quad \frac{f(a)\ddot{+}f(b)}{\beta(2)}\ddot{\times}\ {}^{*}\!\int_a^b (w\circ\alpha)(x)dx.
\end{aligned}
$$

İspat. 3.3.1 İlk olarak (3.3.4) eşitsizliğinin sol tarafını isptalayalım. Her $t \in [0,1]$ için aşağıdaki eşitliği yazabiliriz.

$$
\begin{aligned}
\alpha(t)\dot{\times}a\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}b\dot{+}\alpha(t)\dot{\times}b\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}a \quad &= \quad [\alpha(t)\dot{+}\alpha(1-t)]\dot{\times}a\dot{+}[\alpha(t)\dot{+}\alpha(1-t)]\dot{\times}b\\
&= \quad [\alpha(t)\dot{+}\alpha(1-t)]\dot{\times}(a\dot{+}b)\\
\alpha(t)\dot{+}\alpha(1-t) \quad &= \quad \alpha\{\alpha^{-1}(\alpha(t))+\alpha^{-1}(\alpha(1-t))\} = \alpha(1) = \dot{1}.
\end{aligned}
$$

Böylece,

$$
(a\dot{+}b)\dot{\times}\alpha(1) = a\dot{+}b \quad \Rightarrow \quad a\dot{+}b = \alpha(t)\dot{\times}a\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}b\dot{+}\alpha(t)\dot{\times}b\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}a
$$

ifadesi sağlanır. Buradan

$$
f\left(\frac{a\dot{+}b}{\dot{2}}\dot{/}\right) = f\left(\frac{\alpha(t)\dot{\times}a\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}b\dot{+}\alpha(t)\dot{\times}b\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}a}{\dot{2}}\dot{/}\right)
$$

eşitliğini yazabiliriz. f, $*$-konveks fonksiyon olduğundan,

$$
f(\alpha(t)\dot{\times}a\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}b)\ddot{\leq}\beta(t)\ddot{\times}f(a)\ddot{+}\beta(1-t)\ddot{\times}f(b)
$$

eşitsizliği vardır ve bu eşitsizlikte $t=\frac{1}{2}$ için

$$
f\left(\frac{a\dot{+}b}{\dot{2}}\dot{/}\right) \quad \ddot{\leq} \quad \frac{f(a)\ddot{+}f(b)}{\ddot{2}}\ddot{/} \qquad (3.3.5)
$$

eşitsizliği sağlanır ve ayrıca bu eşitsizlikte

$$
a := \alpha(t)\dot{\times}a\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}b \qquad (3.3.6)
$$

ve

$$
b := \alpha(t)\dot{\times}b\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}a, \qquad (3.3.7)
$$

olarak seçilirse (3.3.5), (3.3.6) ve (3.3.7) eşitsizliklerinden aşağıdaki ifade elde edilir.

$$
\begin{aligned}
f\left(\frac{a\dot{+}b}{\dot{2}}\dot{/}\right) \quad &= \quad f\left(\frac{\alpha(t)\dot{\times}a\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}b\dot{+}\alpha(t)\dot{\times}b\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}a}{\dot{2}}\dot{/}\right)\\
&\ddot{\leq} \quad \frac{f(\alpha(t)\dot{\times}a\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}b)\ddot{+}f(\alpha(t)\dot{\times}b\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}a)}{\ddot{2}}\ddot{/} \qquad (3.3.8)
\end{aligned}
$$

(3.3.8) eşitsizliğinin her iki tarafı,

$$w(\alpha(t)\dot{\times}b\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}a)$$

ifadesi ile $*$-çarpılıp ardından $[0,1]_\alpha$ üzerinde t ye göre $*$-integrali alınırsa aşağıdaki ifade elde edilir.

$$
\begin{aligned}
&{}^{*}\int_{\dot{0}}^{\dot{1}} f\left(\frac{a\dot{+}b}{\dot{2}}.\right)\ddot{\times}w(\alpha(t)\dot{\times}b\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}a)dt\\
\ddot{\leq}&{}^{*}\int_{\dot{0}}^{\dot{1}} \frac{f(\alpha(t)\dot{\times}a\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}b)\ddot{\times}w(\alpha(t)\dot{\times}b\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}a)}{\ddot{2}}..dt\\
\ddot{+}&{}^{*}\int_{\dot{0}}^{\dot{1}} \frac{f(\alpha(t)\dot{\times}b\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}a)\ddot{\times}w(\alpha(t)\dot{\times}b\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}a)}{\ddot{2}}..d_\alpha t\\
&\Rightarrow f\left(\frac{a\dot{+}b}{\dot{2}}.\right)\ddot{\times}\ {}^{*}\int_{\dot{0}}^{\dot{1}} w(\alpha(t)\dot{\times}b\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}a)dt\\
\ddot{\leq}&{}^{*}\int_{\dot{0}}^{\dot{1}} \frac{f(\alpha(t)\dot{\times}a\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}b)\ddot{\times}w(\alpha(t)\dot{\times}b\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}a)}{\ddot{2}}..dt\\
\ddot{+}&{}^{*}\int_{\dot{0}}^{\dot{1}} \frac{f(\alpha(t)\dot{\times}b\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}a)\ddot{\times}w(\alpha(t)\dot{\times}b\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}a)}{\ddot{2}}..dt
\end{aligned}
$$

$*$-integral tanımı ve β üretecinin özelliklerinden dolayı eşitsizliği aşağıdaki şekilde yazabiliriz.

$$
\begin{aligned}
&\beta\left\{\beta^{-1}\left(f\left(\frac{a\dot{+}b}{\dot{2}}.\right)\right)\beta^{-1}\left(\beta\left\{\int_0^1(\beta^{-1}\circ w\circ\alpha)(t\alpha^{-1}(b)+(1-t)\alpha^{-1}(a))dt\right\}\right)\right\}\\
\ddot{\leq}\ &\beta\left(\frac{1}{2}\right)\ddot{\times}\left[\beta\left\{\int_0^1\beta^{-1}\circ[(f\circ\alpha)(t\alpha^{-1}(a)+(1-t)\alpha^{-1}(b))\right.\right.\\
&\left.\left.\ddot{\times}(w\circ\alpha)(t\alpha^{-1}(b)+(1-t)\alpha^{-1}(a))dt]\right\}\right]\\
\ddot{+}\ &\beta\left(\frac{1}{2}\right)\ddot{\times}\left[\beta\left\{\int_0^1\beta^{-1}\circ[(f\circ\alpha)(t\alpha^{-1}(b)+(1-t)\alpha^{-1}(a))\right.\right.\\
&\left.\left.\ddot{\times}(w\circ\alpha)(t\alpha^{-1}(b)+(1-t)\alpha^{-1}(a))dt]\right\}\right]
\end{aligned}
\tag{3.3.9}
$$

(3.3.9) eşitsizliğinde $x = t\alpha^{-1}(b)+(1-t)\alpha^{-1}(a)$ olarak alınırsa ve g fonksiyonunun $\left(\frac{a\dot{+}b}{\alpha(2)}.\right)$ ye göre Newtonyen olmayan simetrik fonksiyon olduğu göz önünde bulundurulursa aşağıdaki eşitsizlik yazılabilir.

$$
\begin{aligned}
&\beta\left\{\beta^{-1}\left(f\left(\frac{a\dot{+}b}{\dot{2}}.\right)\right)\int_{\alpha^{-1}(a)}^{\alpha^{-1}(b)}(\beta^{-1}\circ w\circ\alpha)(x)\frac{dx}{\alpha^{-1}(b)-\alpha^{-1}(a)}\right\}\\
\ddot{\leq}\ &\beta\left(\frac{1}{2}\right)\ddot{\times}\left[\beta\left\{\int_0^1\beta^{-1}\circ[(f\circ\alpha)(x)\ddot{\times}(w\circ\alpha)(x)]\frac{dx}{\alpha^{-1}(b)-\alpha^{-1}(a)}dt\right\}\right]\\
\ddot{+}\ &\beta\left(\frac{1}{2}\right)\ddot{\times}\left[\beta\left\{\int_0^1\beta^{-1}\circ[(f\circ\alpha)(x)\ddot{\times}(w\circ\alpha)(x)]\frac{dx}{\alpha^{-1}(b)-\alpha^{-1}(a)}dt\right\}\right]
\end{aligned}
$$

ve bu durumda

$$f\left(\frac{a\dot{+}b}{\dot{2}}.\right)\ddot{\times}\ {}^{*}\!\int_a^b (w\circ\alpha)(x)d_\alpha x\ddot{\leq}\ {}^{*}\!\int_a^b [(f\circ\alpha)(x)\ddot{\times}(w\circ\alpha)(x)]dx. \quad (3.3.10)$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece (3.3.4) eşitsizliğinin sol tarafı ispatlanmış olur. Şimdi ikinci kısmını ispatlayalım.
f, $*$-konveks fonksiyon olduğundan,

$$f(\alpha(t)\dot{\times}a\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}b)\ddot{\leq}\beta(t)\ddot{\times}f(a)\ddot{+}\beta(1-t)\ddot{\times}f(b) \quad (3.3.11)$$

eşitsizliği ve

$$f(\alpha(t)\dot{\times}b\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}a)\ddot{\leq}\beta(t)\ddot{\times}f(b)\ddot{+}\beta(1-t)\ddot{\times}f(a) \quad (3.3.12)$$

eşitsizliği sağlanır. (3.3.11) eşitsizliği ile (3.3.12) eşitsizliği taraf tarafa toplanırsa aşağıdaki ifade elde edilir.

$$f(\alpha(t)\dot{\times}b\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}a)\ddot{+}f(\alpha(t)\dot{\times}b\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}a)\ddot{\leq}f(a)\ddot{+}f(b) \quad (3.3.13)$$

eşitsizliği elde edilir. (3.3.13) eşitsizliğinin her iki tarafı

$$w(\alpha(t)\dot{\times}b\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}a),$$

fonksiyonu ile $*$-çarpılırsa aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\begin{aligned} & f(\alpha(t)\dot{\times}a\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}b)\ddot{\times}w(\alpha(t)\dot{\times}b\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}a) \\ \ddot{+}\ & f(\alpha(t)\dot{\times}b\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}a)\ddot{\times}w(\alpha(t)\dot{\times}b\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}a) \\ \ddot{\leq}\ & [f(a)\ddot{+}f(b)]\ddot{\times}w(\alpha(t)\dot{\times}b\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}a) \end{aligned} \quad (3.3.14)$$

Buradan (3.3.14) eşitsizliğinin $[0,1]_\alpha$ üzerinde t ye göre $*$-integrali alınırsa aşağıdaki eşitsizlik sağlanır.

$$\begin{aligned} & {}^{*}\!\int_{\dot{0}}^{\dot{1}} f(\alpha(t)\dot{\times}a\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}b)\ddot{\times}w(\alpha(t)\dot{\times}b\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}a)dt \\ \ddot{+}\ & {}^{*}\!\int_{\dot{0}}^{\dot{1}} f(\alpha(t)\dot{\times}b\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}a)\ddot{\times}w(\alpha(t)\dot{\times}b\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}a)dt \\ \ddot{\leq}\ & {}^{*}\!\int_{\dot{0}}^{\dot{1}} [f(a)\ddot{+}f(b)]\ddot{\times}w(\alpha(t)\dot{\times}b\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}a)dt. \end{aligned}$$

Böylece aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz.

$$\begin{aligned}
&\left[\beta\left\{\int_0^1 \beta^{-1}\circ[(f\circ\alpha)(t\alpha^{-1}(a)+(1-t)\alpha^{-1}(b))\right.\right.\\
&\left.\left.\ddot{\times}(w\circ\alpha)(t\alpha^{-1}(b)+(1-t)\alpha^{-1}(a))dt]\right\}\right]\\
\ddot{+}\ &\left[\beta\left\{\int_0^1 \beta^{-1}\circ[(f\circ\alpha)(t\alpha^{-1}(b)+(1-t)\alpha^{-1}(a))\right.\right.\\
&\left.\left.\ddot{\times}(w\circ\alpha)(t\alpha^{-1}(b)+(1-t)\alpha^{-1}(a))dt]\right\}\right]\\
\ddot{\leq}\ &[f(a)+f(b)]\ddot{\times}\left[\beta\left\{\int_0^1 \beta^{-1}\circ[(f\circ\alpha)(t\alpha^{-1}(b)+(1-t)\alpha^{-1}(a))\right.\right.\\
&\left.\left.\ddot{\times}(w\circ\alpha)(t\alpha^{-1}(b)+(1-t)\alpha^{-1}(a))dt]\right\}\right] \qquad (3.3.15)
\end{aligned}$$

(3.3.15) eşitsizliğinde $x = t\alpha^{-1}(b) + (1-t)\alpha^{-1}(a)$ olarak seçilirse eşitsizlik aşağıda ki gibi yazılabilir.

$$^*\int_a^b [(f\circ\alpha)(x)\ddot{\times}(w\circ\alpha)(x)]dx \ \ddot{\leq}\ \frac{f(a)\ddot{+}f(b)}{\beta(2)}..\ddot{\times}^*\int_a^b (w\circ\alpha)(x)dx. \qquad (3.3.16)$$

Böylece teoremin ikinci kısmı da ispatlanmış olur. Sonuç olarak (3.3.10) ve (3.3.16) eşitsizlikleri birleştirildiğinde aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{a\dot{+}b}{\dot{2}}.\right)\ddot{\times}\ ^*\int_a^b (w\circ\alpha)(x)dx \ &\ddot{\leq}\ ^*\int_a^b [(f\circ\alpha)(x)\ddot{\times}(w\circ\alpha)(x)]dx\\
&\ddot{\leq}\ \frac{f(a)\ddot{+}f(b)}{\dot{2}}\ \ddot{\times}\ ^*\int_a^b (w\circ\alpha)(x)dx.
\end{aligned}$$

Elde edilen (3.3.4) eşitsizliğine $*$-Hermite-Hadamard-Fejer eşitsizliği denir.

(3.3.1) de α ve β üreteçlerinin değişik değerlerine karşı pek çok konvekslik türü ile ilgili Hermite-Hadamard-Fejer eşitsizlikleri elde ediliebilir. Aşağıda bazı değerlere karşılık gelen sonuçlar verilmiştir.

Sonuç 3.3.2 (3.3.4) eşitsizliğinde $\alpha = \beta = Id$ olarak seçilirse;

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b w(x)dx \ &\leq\ \int_a^b f(x)w(x)dx\\
&\leq\ \frac{f(a)+f(b)}{2}\int_a^b w(x)dx
\end{aligned}$$

Hermite-Hadamard-Fejer eşitsizliği elde edilir [17].

Sonuç 3.3.3 (3.3.4) eşitsizliğinde $\beta = \alpha$ olarak seçilirse;

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a\dot{+}b}{\dot{2}}.\right)\dot{\times}\int_a^b w(x)^{dx} &\dot{\leq} \int_a^b [f(x)\dot{\times}w(x)]^{dx} \\ &\dot{\leq} \frac{f(a)\dot{+}f(b)}{\dot{2}}.\dot{\times}\int_a^b w(x)^{dx} \end{aligned}$$

eşitsizliği yani α_α-Hermite-Hadamard-Fejer eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 3.3.4 (3.3.4) eşitsizliğinde $\beta = \alpha = \exp$ olarak seçilirse;

$$\begin{aligned} \ln\left(f(\sqrt{ab})\right)\int_{\ln a}^{\ln b} \ln w(e^x)dx &\leq \int_{\ln a}^{\ln b} \ln(f(e^x)\ln(w(e^x))dx \\ &\leq \sqrt{f(a)f(b)}\int_{\ln a}^{\ln b} \ln w(e^x)dx \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 3.3.5 (3.3.4) eşitsizliğinde $\alpha = Id$ ve $\beta = exp$ olarak seçilirse;

$$\begin{aligned} \ln\left(f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)\int_a^b \ln w(e^x)dx &\leq \int_a^b \ln f(e^x)\ln w(e^x)dx \\ &\leq \frac{\ln f(a)+\ln f(b)}{2}\int_a^b \ln w(e^x)dx \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 3.3.6 (3.3.4) eşitsizliğinde $\beta = Id$ ve $\alpha = exp$ olarak seçilirse;

$$\begin{aligned} \left(f(\sqrt{ab})\right)\int_{\ln a}^{\ln b} w(e^x)dx &\leq \int_{\ln a}^{\ln b} f(e^x)w(e^x)dx \\ &\leq \frac{f(a)+f(b)}{2}\int_{\ln a}^{\ln b} w(e^x)dx \qquad (3.3.17) \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 3.3.7 (3.3.17) eşitsizliğinde $e^x = u$ dönüşümü yapılırsa

$$f\left(\sqrt{ab}\right)\int_a^b \frac{w(x)}{x}dx \leq \int_a^b \frac{f(x)w(x)}{x}dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}\int_a^b \frac{w(x)}{x}dx$$

eşitsizliği elde edilir[42].

Tanım 3.3.6 $I_\alpha \subseteq \mathbb{R}_\alpha \backslash \{\dot{0}\}$ bir α-aralık olsun. Eğer bir $f : I_\alpha \to \mathbb{R}_\beta$ fonksiyonu her $a, b \in I_\alpha$ ve $t \in [0,1]$ için

$$f\left(\frac{a\dot{\times}b}{\alpha(t)\dot{\times}a\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}b}.\right) \ddot{\leq} \beta(t)\ddot{\times}f(b)\ddot{+}\beta(1-t)\ddot{\times}f(a) \qquad (3.3.18)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f'ye $*$-harmonik konveks fonksiyon denir

Teorem 3.3.2 $I_\alpha := [a,b]_\alpha$, $a\dot{<}b$ ve $f : I_\alpha \subseteq \mathbb{R}_\alpha \setminus \{\dot{0}\} \to \mathbb{R}_\beta$ fonksiyonu bir $*$-harmonik konveks fonksiyon olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitsizlik sağlanır.

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\alpha(2)\dot{\times}a\dot{\times}b}{a\dot{+}b}.\right) &\ddot{\leq} \frac{\iota(a)\ddot{\times}\iota(b)}{\iota(b)\ddot{-}\iota(a)}..\ddot{\times}\ {}^{*}\!\int_a^b \frac{(f\circ\alpha)(x)}{x^{\dot{2}}}..dx \\ &\ddot{\leq} \frac{f(a)\ddot{+}f(b)}{\ddot{2}}.. \end{aligned} \tag{3.3.19}$$

İspat. 3.3.2 f, $*$-harmonik konveks fonksiyon olduğundan her $u,v \in I_\alpha$ ve $t \in [0,1]$ için

$$f\left(\frac{u\dot{\times}v}{\alpha(t)\dot{\times}u\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}v}.\right)\ddot{\leq}\beta(t)\ddot{\times}f(v)\ddot{+}\beta(1-t)\ddot{\times}f(u)$$

eşitsizliği sağlanır. Özel olarak $t=\frac{1}{2}$ olarak seçilirse aşağıdaki eşitsizlik yazılabilir.

$$f\left(\frac{\alpha(2)\dot{\times}u\dot{\times}v}{u\dot{+}v}.\right) \ddot{\leq} \frac{f(u)\ddot{+}f(v)}{\ddot{2}}.. \tag{3.3.20}$$

öte yandan (3.3.20) eşitsizliğinde,

$$u = \frac{a\dot{\times}b}{\alpha(t)\dot{\times}a\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}b}.$$

ve

$$v = \frac{a\dot{\times}b}{\alpha(t)\dot{\times}b\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}a}.$$

olarak seçilirse aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\alpha(2)\dot{\times}u\dot{\times}v}{u\dot{+}v}.\right) = f\left(\frac{\alpha(2)\dot{\times}a\dot{\times}b}{a\dot{+}b}.\right) &\ddot{\leq} \beta\left(\frac{1}{2}\right)\ddot{\times}\left[f\left(\frac{a\dot{\times}b}{\alpha(t)\dot{\times}a\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}b}.\right)\right. \\ &\ddot{+}\ \left. f\left(\frac{a\dot{\times}b}{\alpha(t)\dot{\times}b\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}a}.\right)\right]. \end{aligned} \tag{3.3.21}$$

Elde edilen (3.3.21) eşitsizliğinin $*$-integrali alınırsa;

$$\begin{aligned} &{}^{*}\!\int_{\dot{0}}^{\dot{1}} f\left(\frac{\alpha(2)\dot{\times}a\dot{\times}b}{a\dot{+}b}.\right)dt \ddot{\leq}\ {}^{*}\!\int_{\dot{0}}^{\dot{1}} \beta\left(\frac{1}{2}\right)\ddot{\times}f\left(\frac{a\dot{\times}b}{\alpha(t)\dot{\times}a\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}b}.\right)dt \\ &\ddot{+}\ {}^{*}\!\int_{\dot{0}}^{\dot{1}} \beta\left(\frac{1}{2}\right)\ddot{\times}f\left(\frac{a\dot{\times}b}{\alpha(t)\dot{\times}b\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}a}.\right)dt \\ \Rightarrow\quad &{}^{*}\!\int_{\dot{0}}^{\dot{1}} f\left(\frac{\alpha(2)\dot{\times}a\dot{\times}b}{a\dot{+}b}.\right)dt \ddot{\leq}\beta\left(\frac{1}{2}\right)\ddot{\times}\ {}^{*}\!\int_{\dot{0}}^{\dot{1}} (f\circ\alpha)\left(\frac{\alpha^{-1}(a)\alpha^{-1}(b)}{t\alpha^{-1}(a)+(1-t)\alpha^{-1}(b)}\right)dt \\ &\ddot{+}\beta\left(\frac{1}{2}\right)\ddot{\times}\ {}^{*}\!\int_{\dot{0}}^{\dot{1}} (f\circ\alpha)\left(\frac{\alpha^{-1}(a)\alpha^{-1}(b)}{t\alpha^{-1}(b)+(1-t)\alpha^{-1}(a)}\right)dt \end{aligned}$$

eşitsizliği yazılabilir ve buradan,

$$\begin{aligned} &f\left(\frac{\alpha(2)\dot{\times}a\dot{\times}b}{a\dot{+}b}.\right)\ddot{\leq}\beta\left(\frac{1}{2}\right)\ddot{\times}\left[\beta\left\{\int_0^1 (\beta^{-1}\circ f\circ\alpha)\left(\frac{\alpha^{-1}(a)\alpha^{-1}(b)}{t\alpha^{-1}(a)+(1-t)\alpha^{-1}(b)}\right)dt\right\}\right] \\ &\ddot{+}\beta\left(\frac{1}{2}\right)\ddot{\times}\left[\beta\left\{\int_0^1 (\beta^{-1}\circ f\circ\alpha)\left(\frac{\alpha^{-1}(a)\alpha^{-1}(b)}{t\alpha^{-1}(b)+(1-t)\alpha^{-1}(a)}\right)dt\right\}\right]. \end{aligned} \tag{3.3.22}$$

eşitsizliği elde edilir. (3.3.22) eşitsizliği

$$x=\frac{\alpha^{-1}(a)\alpha^{-1}(b)}{t\alpha^{-1}(b)+(1-t)\alpha^{-1}(a)},$$

için yeniden yazılırsa aşağıdaki ifade elde edilir.

$$f\left(\frac{\alpha(2)\dot{\times}a\dot{\times}b}{a\dot{+}b}\dot{}\right)\ddot{\leq}\frac{\iota(a)\ddot{\times}\iota(b)}{\iota(b)\ddot{-}\iota(a)}\ddot{}\ddot{\times}\ {}^{*}\!\!\int_a^b\frac{(f\circ\alpha)(x)}{x^{\ddot{2}}}\ddot{}dx$$

(3.3.20) eşitsizliğinde $u=a$ ve $v=b$ olarak alındığında aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$f\left(\frac{\alpha(2)\dot{\times}a\dot{\times}b}{a\dot{+}b}\dot{}\right)\ddot{\leq}\frac{\iota(a)\ddot{\times}\iota(b)}{\iota(b)\ddot{-}\iota(a)}\ddot{}\ddot{\times}\ {}^{*}\!\!\int_a^b\frac{(f\circ\alpha)(x)}{x^{\ddot{2}}}\ddot{}dx\ddot{\leq}\frac{f(a)\ddot{+}f(b)}{\ddot{2}}\ddot{}$$

böylece ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 3.3.8 (3.3.19) eşitsizliğinde $\alpha=\beta=Id$ olarak seçilirse,

$$f\left(\frac{2ab}{a+b}\right)\quad\leq\quad\frac{ab}{a-b}\int_a^b\frac{f(x)}{x^2}dx\leq\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

eşitsizliği elde edilir[24].

Sonuç 3.3.9 (3.3.19) eşitsizliğinde $\alpha=\beta=\exp$ olarak seçilirse,

$$\ln(f(e^{\frac{\ln 2\ln a\ln b}{\ln a+\ln b}}))\quad\leq\quad\frac{\ln a\ln b}{\ln b-\ln a}\int_{\ln a}^{\ln b}\ln\left(\frac{f(e^x)}{x\ln 2}\right)dx\leq\frac{\ln f(a)+\ln f(b)}{2}$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 3.3.10 (3.3.19) eşitsizliğinde $\beta=\alpha$ olarak seçilirse,

$$f\left(\frac{\alpha(2)\dot{\times}a\dot{\times}b}{a\dot{+}b}\dot{}\right)\quad\dot{\leq}\quad\frac{a\dot{\times}b}{b\dot{-}a}\dot{}\dot{\times}\int_a^b\left[\frac{f(x)}{x^{\dot{2}}}\dot{}\right]^{dx}\dot{\leq}\frac{f(a)\dot{+}f(b)}{\dot{2}}.$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 3.3.11 (3.3.19) eşitsizliğinde $\alpha=Id$ ve $\beta=\exp$ olarak seçilirse,

$$\ln\left(f\left(\frac{2ab}{a+b}\right)\right)\quad\leq\quad\ln\left(e^{\frac{ab}{b-a}}\int_a^b\frac{\ln f(x)}{e^2\ln x}dx\right)\leq\frac{\ln f(a)+\ln f(b)}{2}$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 3.3.12 (3.3.19) eşitsizliğinde $\alpha=\exp$ ve $\beta=Id$ olarak seçilirse,

$$f\left(e^{\frac{\ln 2\ln a\ln b}{\ln a+\ln b}}\right)\quad\leq\quad\frac{\ln a\ln b}{\ln b-\ln a}\int_{\ln a}^{\ln b}\frac{f(e^x)}{x^2}dx\leq\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

eşitsizliği elde edilir.

Teorem 3.3.3 $I_\alpha := [a,b]_\alpha$, $a\dot{<}b$ ve $f : I_\alpha \subseteq \mathbb{R}_\alpha \setminus \{\dot{0}\} \to \mathbb{R}_\beta$ bir $*$-harmonik konveks fonksiyon olsun. $w : I_\alpha \subseteq \mathbb{R}_\alpha \setminus \{\dot{0}\} \to \mathbb{R}_\beta$ fonksiyonu $*$-negatif olmayan, $*$-integrallenebilen ve $w(x) = w\left(\frac{a\dot{\times}b}{a\dot{+}b\dot{-}x}\ddot{\cdot}\right)$ şartını sağlayan bir fonksiyon olmak üzere

$$
\begin{aligned}
&f\left(\frac{\alpha(2)\dot{\times}a\dot{\times}b}{a\dot{+}b}\dot{\cdot}\right)\ddot{\times}\ {}^*\!\!\int_a^b \frac{(w\circ\alpha)(x)}{x^{\ddot{2}}}\ddot{\cdot}dx \ddot{\leq}^* \int_a^b \frac{(f\circ\alpha)(x)\ddot{\times}(w\circ\alpha)(x)}{x^{\ddot{2}}}\ddot{\cdot}dx \\
&\ddot{\leq} \frac{f(a)\ddot{+}f(b)}{\ddot{2}}\ddot{\cdot}\ddot{\times}\ {}^*\!\!\int_a^b \frac{(w\circ\alpha)(x)}{x^{\ddot{2}}}\ddot{\cdot}dx
\end{aligned}
\tag{3.3.23}
$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. 3.3.3 f, $*$-harmonik konveks fonksiyon olduğundan

$$
f\left(\frac{\alpha(2)\dot{\times}u\dot{\times}v}{u\dot{+}v}\dot{\cdot}\right) \ \ddot{\leq}\ \frac{f(u)\ddot{+}f(v)}{\ddot{2}}\ddot{\cdot} \tag{3.3.24}
$$

eşitsizliğini yazabiliriz. Öte yandan

$$
u = \frac{a\dot{\times}b}{\alpha(t)\dot{\times}a\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}b}\dot{\cdot}
$$

ve

$$
v = \frac{a\dot{\times}b}{\alpha(t)\dot{\times}b\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}a}\dot{\cdot}
$$

olarak seçilip, (3.3.24) ifadesinde yerine yazılırsa

$$
\begin{aligned}
f\left(\frac{\alpha(2)\dot{\times}a\dot{\times}b}{a\dot{+}b}\dot{\cdot}\right) \ &\ddot{\leq}\ \beta\left(\frac{1}{2}\right)\ddot{\times}\left[f\left(\frac{a\dot{\times}b}{\alpha(t)\dot{\times}a\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}b}\dot{\cdot}\right)\right. \\
&\ddot{+}\ \left. f\left(\frac{a\dot{\times}b}{\alpha(t)\dot{\times}b\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}a}\dot{\cdot}\right)\right]
\end{aligned}
\tag{3.3.25}
$$

eşitsizliği elde edilir. (3.3.25) eşitsizliğinin her iki tarafı

$$
w\left(\frac{a\dot{\times}b}{\alpha(t)\dot{\times}b\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}a}\dot{\cdot}\right)
$$

ifadesi ile $*$-çarpılırsa

$$
\begin{aligned}
&f\left(\frac{\alpha(2)\dot{\times}a\dot{\times}b}{a\dot{+}b}\dot{\cdot}\right)\ddot{\times}w\left(\frac{a\dot{\times}b}{\alpha(t)\dot{\times}b\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}a}\dot{\cdot}\right) \\
\ddot{\leq}\ &\beta\left(\frac{1}{2}\right)\ddot{\times}\left[\left(f\left(\frac{a\dot{\times}b}{\alpha(t)\dot{\times}a\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}b}\dot{\cdot}\right)\ddot{\times}w\left(\frac{a\dot{\times}b}{\alpha(t)\dot{\times}b\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}a}\dot{\cdot}\right)\right)\right] \\
\ddot{+}\ &\beta\left(\frac{1}{2}\right)\ddot{\times}\left[\left(f\left(\frac{a\dot{\times}b}{\alpha(t)\dot{\times}b\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}a}\dot{\cdot}\right)\ddot{\times}w\left(\frac{a\dot{\times}b}{\alpha(t)\dot{\times}b\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}a}\dot{\cdot}\right)\right)\right].
\end{aligned}
\tag{3.3.26}
$$

eşitsizliği elde edilir. Elde edilen (3.3.26) eşitsizliğinin $[0,1]_\alpha$ üzerinde t ye göre $*$-integrali alınırsa

$$
\begin{aligned}
& {}^{*}\!\int_{\dot 0}^{\dot 1} f\left(\frac{\alpha(2)\dot\times a\dot\times b}{a\dot+b}.\right)\ddot\times w\left(\frac{a\dot\times b}{\alpha(t)\dot\times b\dot+\alpha(1-t)\dot\times a}.\right)dt \\
\ddot{\leq}\;\; & \beta\left(\frac{1}{2}\right)\ddot\times\left[{}^{*}\!\int_{\dot 0}^{\dot 1}\left(f\left(\frac{a\dot\times b}{\alpha(t)\dot\times a\dot+\alpha(1-t)\dot\times b}.\right)\ddot\times w\left(\frac{a\dot\times b}{\alpha(t)\dot\times b\dot+\alpha(1-t)\dot\times a}.\right)\right)dt\right] \\
\ddot{+}\;\; & \beta\left(\frac{1}{2}\right)\ddot\times\left[{}^{*}\!\int_{\dot 0}^{\dot 1}\left(f\left(\frac{a\dot\times b}{\alpha(t)\dot\times b\dot+\alpha(1-t)\dot\times a}.\right)\ddot\times w\left(\frac{a\dot\times b}{\alpha(t)\dot\times b\dot+\alpha(1-t)\dot\times a}.\right)\right)dt\right] \\
\Rightarrow\quad & f\left(\frac{\alpha(2)\dot\times a\dot\times b}{a\dot+b}.\right)\ddot\times\; {}^{*}\!\int_{\dot 0}^{\dot 1}(w\circ\alpha)\left(\frac{\alpha^{-1}(a)\alpha^{-1}(b)}{t\alpha^{-1}(b)+(1-t)\alpha^{-1}(a)}\right)dt \\
\ddot{\leq}\;\; & \beta\left(\frac{1}{2}\right)\ddot\times\left[{}^{*}\!\int_{\dot 0}^{\dot 1}(f\circ\alpha)\left(\frac{\alpha^{-1}(a)\alpha^{-1}(b)}{t\alpha^{-1}(a)+(1-t)\alpha^{-1}(b)}\right)\right. \\
& \left.\ddot\times(w\circ\alpha)\left(\frac{\alpha^{-1}(a)\alpha^{-1}(b)}{t\alpha^{-1}(b)+(1-t)\alpha^{-1}(a)}\right)dt\right] \\
\ddot{+}\;\; & \beta\left(\frac{1}{2}\right)\ddot\times\left[{}^{*}\!\int_{\dot 0}^{\dot 1}(f\circ\alpha)\left(\frac{\alpha^{-1}(a)\alpha^{-1}(b)}{t\alpha^{-1}(b)+(1-t)\alpha^{-1}(a)}\right)\right. \\
& \left.\ddot\times(w\circ\alpha)\left(\frac{\alpha^{-1}(a)\alpha^{-1}(b)}{t\alpha^{-1}(b)+(1-t)\alpha^{-1}(a)}\right)dt\right]
\end{aligned}
$$

eşitsizliği elde edilir. $*$-integral tanımı ve β üretecinin özellikleri kullanılarak

$$
\begin{aligned}
& \beta\left\{\beta^{-1}\left(f\left(\frac{\alpha(2)\dot\times a\dot\times b}{a\dot+b}\right)\right)\right. \\
& \left.\beta^{-1}\left(\beta\left\{\int_0^1(\beta^{-1}\circ w\circ\alpha)\left(\frac{\alpha^{-1}(a)\alpha^{-1}(a)}{t\alpha^{-1}(b)+(1-t)\alpha^{-1}(a)}\right)dt\right\}\right)\right\} \\
\ddot{\leq}\;\; & \beta\left(\frac{1}{2}\right)\ddot\times\left[\beta\left\{\int_0^1\beta^{-1}\circ\left[\beta\left\{\beta^{-1}(f\circ\alpha)\left(\frac{\alpha^{-1}(a)\alpha^{-1}(b)}{t\alpha^{-1}(a)+(1-t)\alpha^{-1}(b)}\right)\right\}\right.\right.\right. \\
& \left.\left.\left.\times\beta^{-1}\left\{(w\circ\alpha)\left(\frac{\alpha^{-1}(a)\alpha^{-1}(b)}{t\alpha^{-1}(b)+(1-t)\alpha^{-1}(a)}\right)\right\}\right]\right]\right\}dt \\
\ddot{+}\;\; & \beta\left(\frac{1}{2}\right)\ddot\times\left[\beta\left\{\int_0^1\beta^{-1}\circ\left[\beta\left\{\beta^{-1}(f\circ\alpha)\left(\frac{\alpha^{-1}(a)\alpha^{-1}(b)}{t\alpha^{-1}(b)+(1-t)\alpha^{-1}(a)}\right)\right\}\right.\right.\right. \\
& \left.\left.\left.\times\beta^{-1}\left\{(w\circ\alpha)\left(\frac{\alpha^{-1}(a)\alpha^{-1}(b)}{t\alpha^{-1}(b)+(1-t)\alpha^{-1}(a)}\right)\right\}\right]\right]\right\}dt
\end{aligned}
\tag{3.3.27}
$$

eşitsizliklerini yazabiliriz. (3.3.27) eşitsizliğinde,

$$x=\frac{\alpha^{-1}(a)\alpha^{-1}(b)}{t\alpha^{-1}(b)+(1-t)\alpha^{-1}(a)}$$

olarak seçilip değişken değişikliği yapılıp, w fonksiyonunun özellikleriden

$$\begin{aligned}
&\beta\Bigg\{\beta^{-1}\Bigg(f\Bigg(\frac{\alpha(2)\dot{\times}a\dot{\times}b}{a\dot{+}b}.\Bigg)\Bigg)\\
&\beta^{-1}\Bigg(\beta\Bigg\{\int_{\alpha^{-1}(a)}^{\alpha^{-1}(b)}(\beta^{-1}\circ w\circ\alpha)(x)\Bigg(\frac{\alpha^{-1}(a)\alpha^{-1}(a)}{[\alpha^{-1}(b)-\alpha^{-1}(a)]x^2}\Bigg)dx\Bigg\}\Bigg)\Bigg\}\\
\ddot{\leq}\;&\beta\Big(\frac{1}{2}\Big)\ddot{\times}\beta\Bigg\{\int_{\alpha^{-1}(a)}^{\alpha^{-1}(b)}\beta^{-1}\circ\Big[(f\circ\alpha)(x)\ddot{\times}(w\circ\alpha)(x)\Big]\frac{\alpha^{-1}(a)\alpha^{-1}(b)}{[\alpha^{-1}(b)-\alpha^{-1}(a)]x^2}dx\Bigg\}\\
\ddot{+}\;&\beta\Big(\frac{1}{2}\Big)\ddot{\times}\beta\Bigg\{\int_{\alpha^{-1}(a)}^{\alpha^{-1}(b)}\beta^{-1}\circ\Big[(f\circ\alpha)(x)\ddot{\times}(w\circ\alpha)(x)\Big]\frac{\alpha^{-1}(a)\alpha^{-1}(b)}{[\alpha^{-1}(b)-\alpha^{-1}(a)]x^2}dx\Bigg\}
\end{aligned}$$

eşitsizliğini yazabiliriz. Böylece,

$$f\Bigg(\frac{\alpha(2)\dot{\times}a\dot{\times}b}{a\dot{+}b}.\Bigg)\ddot{\times}\;{}^*\!\!\int_a^b\frac{(w\circ\alpha)(x)}{x^{\ddot{2}}}..dx\ddot{\leq}\;{}^*\!\!\int_a^b\frac{(f\circ\alpha)(x)\ddot{\times}(w\circ\alpha)(x)}{x^{\ddot{2}}}..dx$$

eşitsizliği elde edilir. Son olarak (3.3.24) eşitsizliğinde $u=a$ ve $v=b$ olarak alınırsa

$$\begin{aligned}
f\Bigg(\frac{\alpha(2)\dot{\times}a\dot{\times}b}{a\dot{+}b}.\Bigg)\ddot{\times}\;{}^*\!\!\int_a^b\frac{(w\circ\alpha)(x)}{x^{\ddot{2}}}..dx\;&\ddot{\leq}\;{}^*\!\!\int_a^b\frac{(f\circ\alpha)(x)\ddot{\times}(w\circ\alpha)(x)}{x^{\ddot{2}}}..dx\\
&\ddot{\leq}\;\frac{f(a)\ddot{+}f(b)}{\ddot{2}}..\ddot{\times}\;{}^*\!\!\int_a^b\frac{(w\circ\alpha)(x)}{x^{\ddot{2}}}..dx
\end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 3.3.13 (3.3.23) eşitsizliğinde $\alpha=\beta=Id$ olarak seçilirse,

$$f\Big(\frac{2ab}{a+b}\Big)\int_a^b\frac{\omega(x)}{x^2}dx\leq\int_a^b\frac{f(x)\omega(x)}{x^2}dx\leq\frac{f(a)+f(b)}{2}\int_a^b\frac{\omega(x)}{x^2}dx$$

eşitsizliği elde edilir[10].

Sonuç 3.3.14 (3.3.23) eşitsizliğinde $\beta=\alpha$ olarak seçilirse,

$$\begin{aligned}
f\Bigg(\frac{\dot{2}\dot{\times}a\dot{\times}b}{a\dot{+}b}\Bigg)\dot{\times}\int_a^b\Bigg[\frac{\omega(x)}{x^{\dot{2}}}.\Bigg]^{dx}\;&\leq\;\int_a^b\Bigg[\frac{f(x)\dot{\times}\omega(x)}{x^{\dot{2}}}\Bigg]^{dx}\\
&\leq\;\frac{f(a)\dot{+}f(b)}{\dot{2}}.\dot{\times}\int_a^b\Bigg[\frac{\omega(x)}{x^{\dot{2}}}.\Bigg]^{dx}
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 3.3.15 (3.3.23) eşitsizliğinde $\alpha=\beta=\exp$ olarak seçilirse,

$$\begin{aligned}
f\Big(e^{\frac{\ln 2\ln a\ln b}{\ln a+\ln b}}\Big)\int_{\ln a}^{\ln b}\ln\Big(\frac{\ln\omega(e^x)}{x\ln 2}\Big)\;&\leq\;\int_{\ln a}^{\ln b}\frac{\ln f(e^x)\ln\omega(e^x)}{e^2x}\\
&\leq\;\frac{\ln f(a)+\ln f(b)}{2}\int_{\ln a}^{\ln b}\ln\Big(\frac{\ln\omega(e^x)}{x\ln 2}\Big)dx
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 3.3.16 (3.3.23) eşitsizliğinde $\alpha = Id$ ve $\beta = \exp$ olarak seçilirse,

$$\begin{aligned}
\ln\left[f\left(\frac{2ab}{a+b}\right)\int_a^b \frac{\ln\omega(x)}{e^2x}dx\right] &\leq \int_a^b \frac{\ln f(x)\ln\omega(x)}{e^2x}dx \\
&\leq \frac{\ln f(a)+\ln f(b)}{2}\int_a^b \frac{\ln\omega(x)}{e^2x}dx
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 3.3.17 (3.3.23) eşitsizliğinde $\alpha = \exp$ ve $\beta = Id$ olarak seçilirse,

$$\begin{aligned}
f\left(e^{\frac{\ln 2\ln a\ln b}{\ln a+\ln b}}\right)\int_{\ln a}^{\ln b} \frac{\omega(e^x)}{x^2}dx &\leq \int_{\ln a}^{\ln b} \frac{f(e^x)\omega(e^x)}{x^2}dx \\
&\leq \frac{f(a)+f(b)}{2}\int_{\ln a}^{\ln b} \frac{\omega(e^x)}{x^2}dx
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

Tanım 3.3.7 $I_\alpha \subset (0,\infty)_\alpha$ bir α-aralık ve $p \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ olsun. $f : I_\alpha \to \mathbb{R}_\beta$ fonksiyonu her $a, b \in I$ için

$$f([\alpha(t)\dot{\times}a^{\dot{p}}\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}b^{\dot{p}}]^{\frac{\dot{1}}{\dot{p}}\cdot})\ddot{\leq}\beta(t)\ddot{\times}f(a)\ddot{+}\beta(1-t)\ddot{\times}f(b) \tag{3.3.28}$$

eşitsizliğini sağlıyorsa bu f fonksiyonuna p_*-konveks fonksiyon denir.

Sonuç 3.3.18 (3.3.28) eşitsizliğinde p nin seçilen değerlerine göre aşağıdaki sonuçları verebiliriz,

1. $\beta = Id$ ve $p = 1$ için (2.3.5) elde edilir.
2. $\beta = \alpha$ ve $p = 1$ için (3.2.3) elde edilir.
3. $p = 1$ için (3.3.3) elde edilir.
4. $\beta = Id$ ve $p = -1$ için (3.1.12) elde edilir.
5. $\beta = \alpha$ ve $p = -1$ için (3.2.11) elde edilir.
6. $p = -1$ için (3.3.18) elde edilir.
7. $\beta = Id$ için (3.1.27) elde edilir.
8. $\beta = \alpha$ için (3.2.23) elde edilir.

Teorem 3.3.4 $f : I_\alpha \subset (0,\infty)_\alpha \to \mathbb{R}_\beta$ bir p_*-konveks fonksiyon, $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $a, b \in I_\alpha$ ve $a \dot{<} b$ olsun. Eğer $f \in L[a,b]_\alpha$ ve $w : [a,b]_\alpha \to \mathbb{R}_\beta$ fonksiyonu $*$-negatif olmayan, $*$-integrallenebilen ve $\left[\frac{a^p \dot{+} b^p}{\alpha(2)}\dot{.}\right]$'ye göre p_*-simetrik fonksiyon ise

$$
\begin{aligned}
f\left(\left[\frac{a^{\dot{p}} \dot{+} b^{\dot{p}}}{\dot{2}}\dot{.}\right]^{\frac{\dot{1}}{\dot{p}}\dot{.}}\right) &\ddot{\times} \ {}^*\!\!\int_a^b \frac{(w \circ \alpha)(x)}{x^{\dot{1} \dot{-} \iota(\dot{p})}}\ddot{.}dx \ddot{\leq} {}^*\!\!\int_a^b \frac{(f \circ \alpha)(x) \ddot{\times} (w \circ \alpha)(x)}{x^{\dot{1} \dot{-} \iota(\dot{p})}}\ddot{.}dx \\
&\ddot{\leq} \frac{f(a) \ddot{+} f(b)}{\ddot{2}}\ddot{.} \ddot{\times} {}^*\!\!\int_a^b \frac{(w \circ \alpha)(x)}{x^{\dot{1} \dot{-} \iota(\dot{p})}}\ddot{.}dx \qquad (3.3.29)
\end{aligned}
$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. 3.3.4 $f : I_\alpha \subset (0,\infty)_\alpha \to \mathbb{R}_\beta$ fonksiyonu bir p_*-konveks fonksiyon olduğundan her $x, y \in I_\alpha$ için

$$
f([\alpha(t) \dot{\times} a^{\dot{p}} \dot{+} \alpha(1-t) \dot{\times} b^{\dot{p}}]^{\frac{\dot{1}}{\dot{p}}\dot{.}}) \ddot{\leq} \beta(t) \ddot{\times} f(a) \ddot{+} \beta(1-t) \ddot{\times} f(b) \qquad (3.3.30)
$$

eşitsizliğini yazabiliriz. (3.3.30) eşitsizliğinde $\alpha(t) = \alpha\left(\frac{1}{2}\right)$ ve $\beta(t) = \beta\left(\frac{1}{2}\right)$ olarak alınırsa

$$
f\left(\left[\frac{x^{\dot{p}} \dot{+} y^{\dot{p}}}{\dot{2}}\dot{.}\right]^{\frac{\dot{1}}{\dot{p}}\dot{.}}\right) \ \ddot{\leq} \ \frac{f(x) \ddot{+} f(y)}{\ddot{2}}\ddot{.} \qquad (3.3.31)
$$

eşitsizliği elde edilir. (3.3.31) eşitsizliğinde

$$
x = [\alpha(t) \dot{\times} a^{\dot{p}} \dot{+} \alpha(1-t) \dot{\times} b^{\dot{p}}]^{\frac{\dot{1}}{\dot{p}}\dot{.}}
$$

ve

$$
y = [\alpha(t) \dot{\times} b^{\dot{p}} \dot{+} \alpha(1-t) \dot{\times} a^{\dot{p}}]^{\frac{\dot{1}}{\dot{p}}\dot{.}}
$$

olarak alınırsa

$$
\begin{aligned}
f\left(\left[\frac{a^{\dot{p}} \dot{+} b^{\dot{p}}}{\dot{2}}\right]^{\frac{\dot{1}}{\dot{p}}\dot{.}}\right) &\ddot{\leq} \frac{f([\alpha(t) \dot{\times} a^{\dot{p}} \dot{+} \alpha(1-t) \dot{\times} b^{\dot{p}}]^{\frac{\dot{1}}{\dot{p}}\dot{.}})}{\ddot{2}}\ddot{.} \qquad (3.3.32) \\
&\ddot{+} \frac{f([\alpha(t) \dot{\times} b^{\dot{p}} \dot{+} \alpha(1-t) \dot{\times} a^{\dot{p}}]^{\frac{\dot{1}}{\dot{p}}\dot{.}})}{\ddot{2}}\ddot{.}
\end{aligned}
$$

eşitsizliği sağlanır. (3.3.32) eşitsizliğinin her iki tarafı

$$
w\left([\alpha(t) \dot{\times} a^{\dot{p}} \dot{+} \alpha(1-t) \dot{\times} b^{\dot{p}}]^{\frac{\dot{1}}{\dot{p}}}\right)
$$

fonksiyonu ile $*$-çarpılıp $[0,1]_\alpha$ üzerinde t ye göre $*$-integrali alınırsa

$$
\begin{aligned}
&{}^*\!\!\int_{\dot{0}}^{\dot{1}} f\left(\left[\frac{a^{\dot{p}} \dot{+} b^{\dot{p}}}{\dot{2}}\right]^{\frac{\dot{1}}{\dot{p}}\dot{.}}\right) \ddot{\times} w([\alpha(t) \dot{\times} a^{\dot{p}} \dot{+} \alpha(1-t) \dot{\times} b^{\dot{p}}]^{\frac{\dot{1}}{\dot{p}}}) dt \\
\ddot{\leq} \ &{}^*\!\!\int_{\dot{0}}^{\dot{1}} \frac{f([\alpha(t) \dot{\times} a^{\dot{p}} \dot{+} \alpha(1-t) \dot{\times} b^{\dot{p}}]^{\frac{\dot{1}}{\dot{p}}\dot{.}}) \ddot{\times} w([\alpha(t) \dot{\times} a^{\dot{p}} \dot{+} \alpha(1-t) \dot{\times} b^{\dot{p}}]^{\frac{\dot{1}}{\dot{p}}})}{\ddot{2}}\ddot{.}dt \\
\ddot{+} \ &{}^*\!\!\int_{\dot{0}}^{\dot{1}} \frac{f([\alpha(t) \dot{\times} b^{\dot{p}} \dot{+} \alpha(1-t) \dot{\times} a^{\dot{p}}]^{\frac{\dot{1}}{\dot{p}}\dot{.}}) \ddot{\times} w([\alpha(t) \dot{\times} a^{\dot{p}} \dot{+} \alpha(1-t) \dot{\times} b^{\dot{p}}]^{\frac{\dot{1}}{\dot{p}}})}{\ddot{2}}\ddot{.}dt
\end{aligned}
$$

eşitsizliği elde edilir. α ve β üreteçlerinin özelliklerine göre

$$\begin{aligned}
&\beta\Big\{\int_{\alpha^{-1}(\dot{0})}^{\alpha^{-1}(\dot{1})}\beta^{-1}\circ\Big[\beta\Big\{\beta^{-1}\Big(f\Big(\Big[\frac{a^{\dot{p}}\dot{+}b^{\dot{p}}}{\dot{2}}.\Big]^{\frac{\dot{1}}{\dot{p}}.}\Big)\Big)\\
&\times\beta^{-1}\Big((w\circ\alpha)\Big[(t\alpha^{-1}(a)^{\alpha^{-1}(\dot{p})}+(1-t)\alpha^{-1}(b)^{\alpha^{-1}(\dot{p})})\Big]^{\frac{\alpha^{-1}(1)}{\alpha^{-1}(\dot{p})}}\Big\}\Big]dt\Big\}\\
\ddot{\leq}\;&\beta\Big\{\int_{\alpha^{-1}(\dot{0})}^{\alpha^{-1}(\dot{1})}\beta^{-1}\circ\\
&\beta\Big\{\beta^{-1}\Big(f\Big((f\circ\alpha)\Big[(t\alpha^{-1}(a)^{\alpha^{-1}(\dot{p})}+(1-t)\alpha^{-1}(b)^{\alpha^{-1}(\dot{p})})\Big]^{\frac{\alpha^{-1}(1)}{\alpha^{-1}(\dot{p})}}\Big)\Big)\\
&\times\beta^{-1}\Big(\Big[(w\circ\alpha)\Big[(t\alpha^{-1}(a)^{\alpha^{-1}(\dot{p})}+(1-t)\alpha^{-1}(b)^{\alpha^{-1}(\dot{p})})\Big]^{\frac{\alpha^{-1}(1)}{\alpha^{-1}(\dot{p})}}\Big]dt\Big\}\\
\ddot{+}\;&\beta\Big\{\int_{\alpha^{-1}(\dot{0})}^{\alpha^{-1}(\dot{1})}\beta^{-1}\circ\\
&\Big[\beta\Big\{\beta^{-1}\Big(\Big((f\circ\alpha)\Big[(t\alpha^{-1}(b)^{\alpha^{-1}(\dot{p})}+(1-t)\alpha^{-1}(a)^{\alpha^{-1}(\dot{p})})\Big]^{\frac{\alpha^{-1}(1)}{\alpha^{-1}(\dot{p})}}\Big)\Big)\\
&\times\beta^{-1}\Big((w\circ\alpha)\Big[(t\alpha^{-1}(a)^{\alpha^{-1}(\dot{p})}+(1-t)\alpha^{-1}(b)^{\alpha^{-1}(\dot{p})})\Big]^{\frac{\alpha^{-1}(1)}{\alpha^{-1}(\dot{p})}}\Big\}\Big]dt\Big\} \qquad (3.3.33)
\end{aligned}$$

eşitsizliğini yazabiliriz. (3.3.33) eşitsizliğinde

$$x=\Big[(t\alpha^{-1}(a)^{\alpha^{-1}(\dot{p})}+(1-t)\alpha^{-1}(b)^{\alpha^{-1}(\dot{p})})\Big]^{\frac{\alpha^{-1}(1)}{\alpha^{-1}(\dot{p})}}$$

olarak alıp değişken değişimi yaparsak

$$f\Big(\Big[\frac{a^{\dot{p}}\dot{+}b^{\dot{p}}.}{\dot{2}}.\Big]^{\frac{\dot{1}}{\dot{p}}.}\Big)\ddot{\times}^{*}\int_a^b\frac{(w\circ\alpha)(x)}{x^{\ddot{1}\ddot{-}\iota(p)}}..dx\ddot{\leq}\int_a^b\frac{(f\circ\alpha)\ddot{\times}(w\circ\alpha)(x)}{x^{\ddot{1}\ddot{-}\iota(p)}}..dx.$$

eşitsizliğinin sağlandığını görürüz. Böylece (3.3.29) eşitsizliğinin sol tarafı ispatlanmış olur. Şimdi ikinci kısmın ispatına geçelim. Teoremin iddiasına göre

$$\begin{aligned}
\frac{f([\alpha(t)\dot{\times}a^{\dot{p}}\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}b^{\dot{p}}]^{\frac{\dot{1}}{\dot{p}}.})}{\ddot{2}}..\;&\ddot{+}\;\frac{f([\alpha(t)\dot{\times}b^{\dot{p}}\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}a^{\dot{p}}]^{\frac{\dot{1}}{\dot{p}}.})}{\ddot{2}}..\\
&\ddot{\leq}\;\frac{f(a)\ddot{+}f(b)}{\ddot{2}}.. \qquad (3.3.34)
\end{aligned}$$

eşitsizliğini yazabiliriz. (3.3.34) eşitsizliğinin her iki tarafı

$$w([\alpha(t)\dot{\times}a^{p}\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}b^{p}]^{\frac{\dot{1}}{\dot{p}}.})$$

fonksiyonu ile $*$-çarpılıp $[0,1]$ üzerinde t ye göre $*$-integrali alınıp

$$x=\Big[(t\alpha^{-1}(a)^{\alpha^{-1}(\dot{p})}+(1-t)\alpha^{-1}(b)^{\alpha^{-1}(\dot{p})})\Big]^{\frac{\alpha^{-1}(1)}{\alpha^{-1}(\dot{p})}}$$

için değişken değişimi yapılırsa

$$ {}^{*}\int_a^b \frac{(f\circ\alpha)\ddot{\times}(w\circ\alpha)(x)}{x^{\ddot{1}\ddot{-}\iota(\dot{p})}}..dx \;\;\ddot{\leq}\;\; \frac{f(a)\ddot{+}f(b)}{2}..\ddot{\times}{}^{*}\int_a^b \frac{(w\circ\alpha)(x)}{x^{\ddot{1}\ddot{-}\iota(\dot{p})}}..dx $$

eşitsizliği elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 3.3.19 Aşağıda (3.3.29) eşitsizliğinin seçilen değerlere göre indirgendiği yapıları görebiliriz:

1. $\beta = \alpha$ için

$$ f\left(\left[\frac{a^{\dot{p}}\dot{+}b^{\dot{p}}}{\dot{2}}.\right]^{\frac{\dot{1}}{\dot{p}}.}\right)\dot{\times}\int_a^b\left[\frac{(w\circ\alpha)(x)}{x^{\dot{1}\dot{-}\dot{p}}}.\right]^{dx}\dot{\leq}\int_a^b\left[\frac{f(x)\dot{\times}w(x)}{x^{\dot{1}\dot{-}\dot{p}}}.\right]^{dx} $$
$$ \dot{\leq}\;\; \frac{f(a)\dot{+}f(b)}{\dot{2}}.\dot{\times}\int_a^b\left[\frac{w(x)}{x^{\dot{1}\dot{-}\dot{p}}}.\right]^{dx} $$

eşitsizliği(3.2.24) elde edilir.

2. $\beta = \alpha$ ve $p = 1$ için

$$ f\left(\frac{a\dot{+}b}{\dot{2}}.\right)\dot{\times}\int_a^b g(x)^{dx}\dot{\leq}\int_a^b[f(x)\dot{\times}g(x)]^{dx}\dot{\leq}\left[\frac{f(a)\dot{+}f(b)}{\dot{2}}.\right]\dot{\times}\int_a^b g(x)^{dx} $$

eşitsizliği(3.2.4) elde edilir.

3. $\beta = \alpha$ ve $p = \dot{-}\dot{1}$ için

$$ f\left(\frac{\dot{2}\dot{\times}a\dot{\times}b}{a\dot{+}b}.\right)\dot{\times}\int_a^b\left[\frac{w(x)}{x^{\dot{2}}}.\right]^{dx} \;\;\dot{\leq}\;\; \int_a^b\left(\frac{f(x)\dot{\times}w(x)}{x^{\dot{2}}}.\right)^{dx} $$
$$ \dot{\leq}\;\; \left(\frac{f(a)\dot{+}f(b)}{\dot{2}}.\right)\dot{\times}\int_a^b\left[\frac{w(x)}{x^{\dot{2}}}.\right]^{dx} $$

eşitsizliği(3.2.17) elde edilir.

4. $\beta = \alpha$, $p = -1$ ve $(w\circ\alpha) = 1$ için

$$ f\left(\frac{\dot{2}\dot{\times}a\dot{\times}b}{a\dot{+}b}.\right)\dot{\leq}\;\frac{a\dot{\times}b}{b\dot{-}a}.\dot{\times}\int_a^b\left[\frac{f(x)}{x^{\dot{2}}}.\right]^{dx} \;\;\dot{\leq}\;\; \frac{f(a)\dot{+}f(b)}{\dot{2}} $$

eşitsizliği(3.2.12) elde edilir.

5. $p = -1$ için

$$ f\left(\frac{\alpha(2)\dot{\times}a\dot{\times}b}{a\dot{+}b}.\right)\ddot{\times}\;{}^{*}\int_a^b\frac{(w\circ\alpha)(x)}{x^{\ddot{2}}}..dx \;\;\ddot{\leq}\;\; {}^{*}\int_a^b\frac{(f\circ\alpha)(x)\ddot{\times}(w\circ\alpha)(x)}{x^{\ddot{2}}}..dx $$
$$ \ddot{\leq}\;\; \frac{f(a)\ddot{+}f(b)}{\ddot{2}}..\ddot{\times}\;{}^{*}\int_a^b\frac{(w\circ\alpha)(x)}{x^{\ddot{2}}}..dx $$

eşitsizliği(3.3.23) elde edilir.

6. $p = -1$ ve $(w \circ \alpha) = 1$ için

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\alpha(2)\dot{\times}a\dot{\times}b}{a\dot{+}b}.\right) &\ddot{\leq} \frac{\iota(a)\ddot{\times}\iota(b)}{\iota(b)\ddot{-}\iota(a)}..\ddot{\times}\ {}^{*}\int_a^b \frac{(f \circ \alpha)(x)}{x^{\ddot{2}}}..dx \\ &\ddot{\leq} \frac{f(a)\ddot{+}f(b)}{\ddot{2}}.. \end{aligned}$$

eşitsizliği(3.3.19) elde edilir.

7. $\beta = \alpha = Id$ ve $p = 1$ için

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}\int_a^b g(x)dx$$

Hermite-Hadamard-Fejer eşitsizliği elde edilir[17].

8. $\beta = \alpha = Id$, $p = -1$ ve $w(x) = 1$ için

$$f\left(\frac{2ab}{a+b}\right) \leq \frac{ab}{b-a}\int_a^b \frac{f(x)}{x^2}dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

eşitsizliği elde edilir[24].

9. $\beta = \alpha = Id$ ve $p = -1$ için

$$f\left(\frac{2ab}{a+b}\right)\int_a^b \frac{w(x)}{x^2}dx \leq \int_a^b \frac{f(x)w(x)}{x^2}dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}\int_a^b \frac{w(x)}{x^2}dx$$

eşitsizliği elde edilir[10].

10. $p = 1$ için

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a\dot{+}b}{\dot{2}}.\right) &\ddot{\times}\ {}^{*}\int_a^b (g \circ \alpha)(x)dx \\ &\ddot{\leq}\ {}^{*}\int_a^b \left[(f \circ \alpha)(x)\ddot{\times}(g \circ \alpha)(x)\right]dx \\ &\ddot{\leq} \frac{f(a)\ddot{+}f(b)}{\dot{2}}\ddot{\times}\ {}^{*}\int_a^b (g \circ \alpha)(x)dx. \end{aligned} \tag{3.3.35}$$

(3.3.4) eşitsizliği elde edilir.

11. $\beta = \alpha = Id$ için

$$\begin{aligned} f\left(\left[\frac{a^p+b^p}{2}\right]^{\frac{1}{p}}\right)\int_a^b \frac{w(x)}{x^{1-p}}dx &\leq \int_a^b \frac{f(x)w(x)}{x^{1-p}}dx \\ &\leq \frac{f(a)+f(b)}{2}\int_a^b \frac{w(x)}{x^{1-p}}dx \end{aligned} \tag{3.3.36}$$

eşitsizliği elde edilir[40].

12. $\beta = \alpha = Id$ ve $w(x) = 1$ için

$$f\left(\left[\frac{a^p + b^p}{2}\right]^{\frac{1}{p}}\right) \leq \frac{p}{b^p - a^p}\int_a^b \frac{f(x)}{x^{1-p}}dx \leq \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

eşitsizliği elde edilir[25].

13. $\beta = Id$ için

$$\begin{aligned} & f\left(\left[\frac{a^{\dot{p}}\dot{+}b^{\dot{p}}}{\dot{2}}\dot{}\right]^{\frac{\dot{1}}{\dot{p}}\dot{}}\right)\int_{\alpha^{-1}(a)}^{\alpha^{-1}(b)} \frac{(w\circ\alpha)(x)}{x^{1-p}}dx \leq \int_{\alpha^{-1}(a)}^{\alpha^{-1}(b)} \frac{(f\circ\alpha)(w\circ\alpha)(x)}{x^{1-p}}dx \\ \leq \; & \frac{f(a)+f(b)}{2}\int_{\alpha^{-1}(a)}^{\alpha^{-1}(b)} \frac{(w\circ\alpha)(x)}{x^{1-p}}dx \end{aligned}$$

eşitsizliği(3.1.28) elde edilir.

14. $\beta = Id$, $p = 1$ ve $w(x) = 1$ için

$$f\left(\alpha\left(\frac{1}{2}\right)\dot{\times}(a\dot{+}b)\right) \leq \int_0^1 f(\alpha(t)\dot{\times}a\dot{+}\alpha(1-t)\dot{\times}b)dt \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

eşitsizliği elde edilir[58].

4. SONUÇ VE ÖNERİLER

1600 lü yıllarda Newton ve Leibnitz'in inşaa etmiş olduğu klasik analize alternatif olarak Grossman ve Katz'ın 1967-1970 yılları arasında elde ettiği Newtonyen olmayan analiz, temelinde bire-bir örten üreteçler yardımıyla ifade edilir. Bu alanda yapılan çalışmalara bakıldığında klasik analizdeki konvekslik ve eşitsizlikler konusunun Newtonyen olmayan analizde çalışılmadığını gördük. Dolayısıyla bu doktora tezinde;

1. α-Hermite-Hadamard-Fejer eşitsizliği
2. p_{α}-konveks fonksiyon
3. α_{α}-konvekslik
4. α_{α}-Hermite-Hadamard-Fejer eşitsizliği
5. $p_{\alpha_{\alpha}}$-konveks fonksiyon
6. $*$-Hermite-Hadamard-Fejer eşitsizliği
7. p^{*}-konveks fonksiyon
8. $*$-starshaped fonksiyon

kavramları ilk defa burada verilmiş olup ayrıntılı bir şekilde incelenmiştir. Yani, bu tezin özgün olan üçüncü bölümünde elde edilen tüm tanım, teorem ve lemmalarda üreteç veya üreteçler özel olarak birim fonksiyon olarak alınırsa klasik anlamdaki tanım, teorem ve lemmalara indirgenir. Dolayısıyla, klasik analizin bijektif dönüşümler(üreteçler) yardımıyla genellemesi elde edilmiştir.

Bu doktora tezinde, konvekslik, p-konveks fonksiyon ve eşitsizliğin önemli bir konusu olan Hermite-Hadamard-Fejer Eşitsizliği üreteçler yardımıyla genelleştirildi. Ama diğer konvesklik çeşitleri $(s, m \cdots)$ ve eşitsizlikleri (Ostrowski $\cdots$) çalışılmadı. Dolayısıyla, bu doktora tezi ile açık olan bu tarz problemleri üretmek ve çözmek isteyen araştırmacılara özgün bir kaynak olarak önerebiliriz.

KAYNAKLAR

[1] Abbas, M., Ali, B. ve Suleiman, Y. (2014). Common Fixed Points of Locally Contractive Mappings in Multiplicative Metric Spaces with Application, Hindawi Publishing Corporation. *International Journal of Mathematical Sciences*, Volume 2015, Article ID 218683, pages http://dx.doi.org/10.1155/2015/218683.

[2] Anderson, G. D., Vamanamurthy, M. K. & Vuorinen, M., (2007) Generalized convexity and inequalities, *Journal Math Analysis Applications* 335 1294-1308.

[3] Aniszewska, D. (2007). Multiplicative Runge-Kutta Metods. Nonlinear Dyn., 50 , 265-272.

[4] Bashirov, AE., Kurpınar, EM. and Özyapıcı, A. (2008). Multiplicative calculus and its applications. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 337, 36-48.

[5] Bashirov, AE. ve Rıza, M. (2011). On complex multiplicative differentiation. *Turkic World Mathematical Society Journal of Applied and Engineering Mathematics*, V.1, N.1, 2011, pp. 75-85

[6] Bashirov, AE., Mısırlı, E., Tandoğdu, Y. ve Özyapıcı, A. (2011). On modeling with multiplicative differential equations. *Applied Mathematics-A Journal of Chinese Universities*, 2011, 26(4): 425-438.

[7] Bashirov, AE. (2013). On Line and Double Multıplıcative Integrals. *Turkic World Mathematical Society Journal of Applied and Engineering Mathematics* V.3, N.1, 2013, pp. 103-107.

[8] Boruah, K. ve Hazarika, B. (2016). Some basic properties of G-Calculus and its applications in numerical analysis. arXiv:1607.07749v2 [math.GM] 28 Jul 2016.

[9] Boruah, K. (2017). On Some Basic Properties of Geometric Real Sequences. *International Journal of Mathematics Trends and Technology (IJMTT)*, Volume 46 Number 2 June 2017.

[10] Chen, F. ve Wu, S. (2014). Fej*é*r and Hermite-Hadamard type inequalities for harmonically convex functions. *Journal of Applied Mathematics*, Article Id:386806.

[11] Çakmak, AF. ve Başar, F. (2012). Some new results on sequence spaces with respect to Non-Newtonian calculus. *Journal of Inequalities Applications*, 2012:228.

[12] Çakmak, AF. ve Başar, F. (2014). Certain Spaces of Functions over the Field of Non-Newtonian Complex Numbers. *Abstract and Applied Analysis*, Volume 2014, Article ID 236124, 12 pages.

[13] Dragomir, SS. (2002). On Some new inequalities of Hermite-Hadamard type for m-convex functions, *Tamkang J. Math.*, 33 (1) (2002), 55-65.

[14] Dragomir, S. S., (2017) Inequalities of Hermite-Hadamard Type for HA-Convex Functions, *Journal Math Analysis Applications* 3(1), 83-101, 2351-8227.

[15] Erdoğan, M. (2016). Newtonyen olmayan reel sayı serileri ve has olmayan integraller. Yüksek Lisans Tezi, Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Samsun, 89 sayfa.

[16] Erdoğan, F. (2016). Newtonyen olmayan reel sayılarda fonksiyon dizi ve serileri. Yüksek Lisans Tezi, Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Samsun, 79 sayfa.

[17] Fejer, L. (1906). Über die fourierreihen, II. Math. Naturwiss. Anz Ungar. Akad., Wiss 369-390, 24.

[18] Filip, D. ve Piatecki, C. (2012). In defense of a non-newtonian economic analysis, https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00945782/document.

[19] Filip, D. ve Piatecki, C. (2014). A non-newtonian examination of the theory of exogenous economic growth, https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00945781/document.

[20] Filip, D. ve Piatecki, C. (2014). An overview on the non-newtonian calculus and its potential applications to economics, https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00945788/document.

[21] Grosmann, M. Katz, R. (1972). *Non-Newtonian Calculus*. Lee Press Pigeon Cove, Massachusetts.

[22] Grosmann, M. (1979). An introduction to non-Newtonian calculus. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 10(4), 525-528.

[23] Gurefe, Y., Kadak, U., Mısırlı, E. ve Kurdi, A. (2016). A New Look At Classical Sequence Spaces By Using Multiplicative Calculus. Hindawi Publishing Corporation, *International Journal of Analysis*, Volume 2016, Article ID 5416751, 9 pages http://dx.doi.org/10.1155/2016/5416751.

[24] İşcan İ. (2014). Hermite-Hadamard type inequalities for harmonically convex functions. *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 43(6), 935-942.

[25] İşcan İ. (2016). Hermite-Hadamard type inequalities for p-convex functions. *International Journal of Analysis and Applications*, 11(2), 137-145.

[26] İşcan, İ. (2017). Hermite-Hadamard and Simpson-like type inequalities for differantiable p-quasi convex functions, *Filomat*, 31(19), 5945-5953.

[27] Kadak, U. ve Özlük, M. (2014). Generalized Runge-Kutta Method with respect to the Non-Newtonian Calculus. *Abstract and Applied Analysis*, Volume 2015, Article ID 594685, 10 pages.

[28] Kadak, U. ve Efe, H. (2014). The Construction of Hilbert Spaces over the Non-Newtonian Field. *International Journal of Analysis*, vol. 2014, Article ID 746059, 10 pages, doi:10.1155/2014/746059.

[29] Kadak, U. (2014). Determination of the Köthe-Toeplitz Duals over the Non-Newtonian Complex Field. *The Scientific World Journal*, vol. 2014, Article ID 438924, 10 pages, doi:10.1155/2014/438924.

[30] Kadak, U. ve Efe, H. (2014). Matrix Transformations between Certain Sequence Spaces over the Non- Newtonian Complex Field. *The Scientific World Journal*, vol. 2014, Article ID 705818, 12 pages, doi:10.1155/2014/705818.

[31] Kadak, U., Kirişçi, M. ve Çakmak, AF. (2015). On the Classical Paranormed Sequence Spaces and Related Duals over the Non-Newtonian Complex Field, Hindawi Publishing Corporation. *Journal of Probability and Statistics*, Volume 2015, Article ID 416906, 11 pages http://dx.doi.org/10.1155/2015/416906.

[32] Kadak, U. (2015). Cesàro Summable Sequence Spaces over the Non-Newtonian Complex Field 2015, Hindawi Publishing Corporation. *Journal of Probability and Statistics*, Volume 2016, Article ID 5862107, 10 pages http://dx.doi.org/10.1155/2016/586 2107.

[33] Kadak, U. (2015). Newtonyen olmayan analiz ve çeşitli uygulamaları. Doktora Tezi, Gazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara, 100 sayfa.

[34] Kadak, U. ve Gürefe, Y. (2016). A Generalization on Weighted Means and Convex Functions with respect to the Non-Newtonian Calculus. *International Advanced Research Journal in Science*, Engineering and Technology ISO 3297:2007 Certified Vol. 4, Issue 7, July 2017.

[35] Kırmacı, US. ve Özdemir, ME. (2004). On some inequalities for differentiable mappings and applications to special means of real numbers and to midpoint formula. *Appl. Math. Comp.*, 153(2), 361-368.

[36] Kırmacı, US. (2004). Inequalities for differentiable mappings and applications to special means of real numbers and to midpoint formula. *Appl. Math. Comp.*, 147(1)(2004), 137-146.

[37] Kirişçi, M. (2017). Topolojical Structures of Non-Newtronian Metric Spaces. *Electronic Journal of Mathematical Analysis and Application*, Vol. 5(2) July 2017, pp. 156-169.,SSN: 2090729X(online), http://fcag-egypt.com/Journals/EJMAA/.

[38] Kirişçi, M. ve Başar, F. (2010). Some new sequence spaces derived by the domain of generalized difference matrix. *Computers Mathematics with Applications*, vol. 60, no. 5, pp:1299-1309.

[39] Kuel-lin, T., Shiow Ru, H. ve Dragomir, SS. (2007). On some new inequalities of Hermite-Hadamard-Fejer type involving convex functions, 1299-1309.

[40] Kunt M., İşcan İ. (2017). Hermite-Hadamard-Fejer type inequalities for p-convex functions. *Arab Journal of Mathematical Sciences*, (23), 215-230.

[41] Latif, M.A., Dargomir, SS., Momoniat, E. (2015). Some Fejer type inequalities for harmonically-convex functions with applications to special means, *RGMIA Res. Rep. Coll.*

[42] Latif, M.A., Dargomir, SS., Momoniat, E. (2018). Some Fejer type İnequalities for Geometrically-Arithmeticalyy-Convex Functions with Applications, *Flomat*, 32:6, 2193-2206.

[43] Mısırlı, E. ve Gurefe, Y. (2011). Multiplicative Adams Bashforth Moulton methods.*Numerical Algorithms*, 57, 425-439.

[44] Mora, M., Córdova-Lepe, F. ve Del-Valle, R. (2012). A non-Newtonian gradient for contour detection in images with multiplicative noise. Pattern Recognition Letters 33, 1245-1256.

[45] Niculescu, P.C.,(2000) Convexity according to the geometric mean, *Mathematical Inequalities and Applications*, 2, 155-167. 1.2.

[46] Özavşar, M. ve Çevikel, AC. (2017). Fixed Poınts Of Mutltiplicative Contractıon Mappıngs On Multiplicative Metric Space. *Journal of Engineering Technology and Applied Sciences*, Vol.2, No.2, 65-79.

[47] Rıza, M., Özyapıcı, A. ve Mısırlı, E. (2009). Multiplicative Finite Difference Methods. *Quarterly of Applied Mathematics*, 67, 745-754.

[48] Rıza, M. ve Eminaga, B. (2015). Bıgeometric Calculus And Runge Kutta Method. arXiv:1402.2877v2 [math.GM] 20 Jan 2015.

[49] Riza, M. ve Aktöre, H. (2015). The Runge-Kutta method in geometric multiplicative calculus. *LMS Journal of Computation and Mathematics* , 18 (1) (2015) 539-554 C 2015 Authors doi:10.1112/S1461157015000145.

[50] Sarıkaya, MZ. (2012). On new Hermite Hadamard Fej´er type integral inequalities, Stud. Univ. Babe¸s-Bolyai Math., 57(2012), No. 3, 377-386.

[51] Tekin, S. ve Başar F. (2013). Certain Sequence Spaces over the Non-Newtonian Complex Field. Hindawi Publishing Corporation Volume 2013, Article ID 739319, 11 pages.

[52] Tekin, S. ve Başar, F. (2012). Some basic results on the sets of sequences with geometric calculus. AIP Conf. Proc., 1470, 95-98.

[53] Türkmen, C. ve Başar, F. (2012). Some basic results on the geometric calculus. *Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1 Mathematics and Statistics*, 61(2), 17-34.

[54] Uzer, A. (2010). Multiplicative type complex calculus as an alternative to the classical calculus. *Computers and Mathematics with Applications*, 60, 2725-2737.

[55] Uzer, A. (2015). Exact solution of conducting half plane problems in terms of a rapidly convergent series and an application of the multiplicative calculus. *Turkish Journal Of Electrical Engineering and Computer Sciences*, 23: 1294 : 1311 doi:10.3906/elk-1306-163.

[56] Ünlüyol, E., Salaş, S. ve İşcan İ. (2017). Convex functions and some inequalities in terms of the Non-Newtonian Calculus. April 2017,AIP Conference Proceedings 1833(1):020043, DOI,10.1063/1.4981691.

[57] Ünlüyol, E., Salaş, S. ve İşcan İ. (2017). A new view of some operators and their properties in terms of the Non-Newtonian Calculus. *Topological Algebra and its Applications*, 2017 (5), 49-54 https://doi.org/10.1515/taa-2017-0008.

[58] Ünlüyol, E. ve Salaş, S. (2019). Convexity and Hermite-Hadamard Type Inequality via Non-Newtonian Calculus. *Konuralp Mathematical Journal*, 7(2), 352-358.

[59] Ünlüyol, E. ve Erdaş, Y. (2019). Hermite-Hadamard-Fejer type inequalities for p-convex functions via α-generator. *ROMAI J*, 15(2), 139-153.

[60] Waseem, M., Noor, MA., Shah, FA. ve Noor, KI. (2018). An efficient technique to solve nonlinear equations using multiplicative calculus. *Turkish Journal of Mathematics*, 42: 679-691 doi:10.3906/mat-1611-95.

[61] Yalcin, N., Celik, E. ve Gokdogan, A. (2016). Multiplicative Laplace transform and its applications. Optik 127 (2016) 9984-9995.

[62] Yaying, T. ve Hazarika, B. (2018). Arithmetic summable sequence space over non-Newtonian field. arXiv:1802.04144v1 [math.GM] 9 Feb 2018.