



**T. C.**

**ORDU ÜNİVERSİTESİ**  
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**BAZI SİGMOİD FONKSİYONLAR ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA**

**FERHAN ÇETİN**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**  
**MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**ORDU 2023**

## TEZ BİLDİRİMİ

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan ve kullanılan intihal tespit programının sonuçlarına göre; bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

**FERHAN ÇETİN**

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

## ÖZET

**BAZI SİGMOİD FONKSİYONLAR ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA**  
**FERHAN ÇETİN**  
**ORDU ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**  
**MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ, 43 SAYFA**

**Tez Danışmanı: Doç. Dr. Mehmet KORKMAZ**

Belirli enzim kinetiği ve popülasyon büyüme süreçleri gibi birçok biyolojik dinamik süreç, neredeyse adım adım gelişir. Bu tür işlemler genellikle düzgün sigmoidal fonksiyonlarla açıklanır veya yaklaşık olarak belirlenir; bu tür fonksiyonlar sinir ağları teorisinde yaygın olarak kullanılmaktadır. Adım fonksiyonlar, sigmoid fonksiyonların özel bir sınıfıdır; bu tür fonksiyonlar  $\mathbb{R}$  neredeyse "sürekli veya Hausdorff süreklidir ( $H$  -sürekli). Belirli modelleme durumuna bağlı olarak, sürekli veya  $H$  -sürekli (adım) fonksiyonları kullanmaya karar verilebilir. Bu tezde Hausdorff uzaklığı ve sürekliliği, sigmoid fonksiyonların ötesindeki kinetik mekanizmalar gibi sigmoid ve adım fonksiyonlarıyla ilgili bazı temel kavramları tanıtılmaktadır. Verhulst lojistik modeli, ilgili birkaç matematiksel problemi tanıtmak için temel bir örnek olarak kabul edildi. Verhulst modelinin, kütle hareket kinetiği kullanılarak belirli (biyo-) kimyasal reaksiyon denklemlerinden türetilebileceği gösterilmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** Biyolojik Büyüme Dinamikleri, Lojistik Büyüme.

## ABSTRACT

**A STUDY ON SOME SIGMOID FUNCTIONS**  
**FERHAN ÇETİN**  
**ORDU UNIVERSITY INSTITUTE OF NATURAL SCIENCES**  
**MATHEMATICS**

**MASTER THESIS, 43 PAGES**

**SUPERVISOR: Assoc. Prof. Dr. Mehmet KORKMAZ**

Many biological dynamic processes, such as certain enzyme kinetic and population growth processes, develop almost step-wise. Such processes are usually described or approximated by smooth sigmoidal functions; such functions are widely used in the theory of neural networks . Step-wise functions are a special class of sigmoid functions; such functions are “almost” continuous, or Hausdorff continuous ( $H$  -continuous). Depending on the particular modelling situation one may decide to use either continuous or  $H$  -continuous (step-wise) functions. In this thesis, some basic concepts related to sigmoid and step functions such as Hausdorff distance and continuity, kinetic mechanisms beyond sigmoid functions are introduced. The Verhulst logistic model was considered as a basic example to introduce several related mathematical problems. It was demonstrated that Verhulst model can be derived from certain(bio-) chemical reaction equations using mass action kinetics.

**Keywords:** Biological Growth Dynamics, Logistic Growth.

## TEŞEKKÜR

Tüm alıőmalarım boyunca her zaman bilgi ve deneyimleriyle yolumu açan, desteğini esirgemeyen değerli danıőman hocam, Sayın Doç. Dr. Mehmet KORKMAZ'a ve Ordu Üniversitesi Fen Edebiyat Fakóltesi Matematik Bölümü öğretim üyelerine ve öğretim elemanlarına sonsuz teşekkür ve őükranlarımı sunarım.

Öęrenim hayatım boyunca gösterdikleri maddi, manevi destekleri ve fedakarlıkları ile her zaman benim yanımda olan annem, babam ve sevgili eőim Ayhan ÇETİN'e teőekkürü bir borç bilirim.

## İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
<b>TEZ BİLDİRİMİ</b> .....	I
<b>ÖZET</b> .....	II
<b>ABSTRACT</b> .....	III
<b>TEŞEKKÜR</b> .....	IV
<b>İÇİNDEKİLER</b> .....	V
<b>ŞEKİL LİSTESİ</b> .....	VI
<b>ÇİZELGE LİSTESİ</b> .....	VII
<b>ŞİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ</b> .....	VIII
<b>1. GİRİŞ</b> .....	1
<b>2. MATERYAL VE YÖNTEM</b> .....	2
2.1 Sigmoid ve Adım Fonksiyonları .....	2
2.1.1 Hausdorff sürekliliği .....	2
2.1.2 Adım fonksiyonu .....	2
2.1.3 Kesim fonksiyonu.....	3
2.1.4 Sigmoid fonksiyonlarının toplamları .....	3
2.1.5 Hausdorff uzaklığı .....	3
2.1.6 Lojistik sigmoid fonksiyonu .....	5
2.1.7 Yaklaşım sorunları.....	6
2.1.8 Değişen lojistik fonksiyonlar.....	9
2.2 Verhulst modelini veren kinetik mekanizmalar .....	10
2.2.1 Basit bir otokatalitik reaksiyon .....	10
2.2.2 Besleyici altyapı içeren otokatalitik reaksiyon .....	11
2.2.3 Giriş fonksiyonu olarak besin kaynağı .....	13
2.2.4 Hesaplama sorunları .....	13
2.3 Heaviside Adım Fonksiyonu İle Sigmoid Verhulst Fonksiyonu Arasındaki $H$ –Mesafesi .....	14
2.3.1 $d(k)$ için daha kesin sınırlar. ....	14
2.3.2 Sürekli fonksiyonların çok katmanlı algılayıcılarla yaklaştırılması. ....	17
2.4 Kesim Fonksiyonunun Yakınlaştırılması .....	20
2.4.1 Sigmoid fonksiyonları .....	20
2.4.2 Parçalı lineer fonksiyonlar: kesim fonksiyonu .....	20
2.4.3 Düz sigmoid fonksiyonları: lojistik fonksiyonu .....	21
2.4.4 Kesim fonksiyonunu lojistik fonksiyonlarıyla yaklaştırma.....	22
2.4.5 Kesim fonksiyonunu aktivasyon fonksiyonlarıyla yaklaştırma .....	25
2.5 Log-lojistik ve dönüştürülmüş log-lojistik fonksiyonları.....	28
2.5.1 Adım fonksiyonunu log-lojistik fonksiyonuyla yaklaştırma.....	30
2.5.2 $h_0(t)$ 'yi dönüştürülmüş log-lojistik fonksiyonu ile yaklaştırma .....	34
<b>3. SONUÇ VE ÖNERİLER</b> .....	38
<b>4. KAYNAKLAR</b> .....	41
<b>ÖZGEÇMİŞ</b> .....	43

## ŞEKİL LİSTESİ

	<u>Sayfa</u>
Şekil 2.1 $r = 10$ değerinde “sıçrama” gösteren bir adım fonksiyonu .....	4
Şekil 2.2 Kesim fonksiyonu .....	4
Şekil 2.3 Bir histogram .....	5
Şekil 2.4 Lojistik sigmoid fonksiyonu .....	5
Şekil 2.5 Reaksiyon hızı $k = 20$ ; H–mesafesi $d = 0.106402$ .....	6
Şekil 2.6 Reaksiyon hızı $k = 40$ ; H–mesafesi $d = 0.0661748$ .....	7
Şekil 2.7 Reaksiyon hızı $k = 200$ ; H-mesafesi $d = 0.01957$ .....	8
Şekil 2.8 $r = 0.5$ ile kaydırılan bir lojistik fonksiyon. ....	10
Şekil 2.9 Reaksiyon hızı $k = 40$ ; $s_0 = 1$ , $x_0 = 1. \times 10^{-9}$ .....	12
Şekil 2.10 Reaksiyon hızı $k = 40$ , $r = 0.5$ , $x_0 = 1.85 \times 10^{-9}$ .....	13
Şekil 2.11 Reaksiyon hızı $k = 40$ ; $r = 0.6$ .....	14
Şekil 2.12 $k = 40$ için $f(d)$ ve $G(d)$ fonksiyonları .....	17
Şekil 2.13 Rosenblatt'ın algılayıcısı .....	18
Şekil 2.14 Algılayıcıda hesaplama .....	18
Şekil 2.15 $\gamma = \delta = 1$ $k = \frac{1}{2}$ için kesim ve lojistik fonksiyonları .....	23
Şekil 2.16 $F(d)$ ve $G(d)$ fonksiyonları .....	27
Şekil 2.17 $\beta = 2, \omega = 6$ ; $d = 0.0534283$ için $C_{\delta, \delta}$ ve $S^{(\beta)}_{\delta, \delta}$ fonksiyonları... ..	28
Şekil 2. 18 $a = -1, c = 10$ ; H-mesafesi $d = 0.1709984$ olan log-lojistik fonksiyonu ..	30
Şekil 2. 19 $a = -1, c = 90$ ; H-mesafesi $d = 0.0369065$ olan log-lojistik fonksiyonu ..	31
Şekil 2.20 Log-lojistik fonksiyonunun $a = -2, b = -a, c = 8$ , ve $k = -\frac{c}{a} = 4$ için Verhulst lojistik fonksiyonuyla karşılaştırılması .....	33
Şekil 2.21 Log-lojistik fonksiyonunun (2.54), $a = -2, b = -a, c = 18$ , ve $k = -\frac{c}{a} = 9$ için Verhulst lojistik fonksiyonuyla karşılaştırılması .....	34
Şekil 2.22 $a = -1, h = 1.05, b = -ah = 1.05, \lambda = 0.25, c = 5.07206$ ; H-mesafesi $d =$ $0.244635$ olan Dönüştürülmüş log-lojistik fonksiyonu .....	35
Şekil 2.23 $a = -1, h = 1.01, b = -ah = 1.01, \lambda = 0.5, c = 48.3614$ ; H- mesafesi $d = 0.0563904$ Dönüştürülmüş log-lojistik fonksiyonu .....	36
Şekil 2.24 Fonksiyonlar $F(d, a, b, c, \lambda)$ ve $G(d, a, b, c, \lambda)$ .....	36
Şekil 2.25 Çözümü $kr > 30$ için başarısız olur .....	38
Şekil 2.26 $\beta = 5, \omega = 3$ ; $d = 0.0398921$ için $C_{\delta, \delta}$ ve $S^{(\beta)}_{\delta, \delta}$ fonksiyonları .....	39
Şekil 2.27 $\beta = 10, \omega = 4$ ; $d = 0.0154697$ için $C_{\delta, \delta}$ ve $S^{(\beta)}_{\delta, \delta}$ fonksiyonları ...	39

## ÇİZELGE LİSTESİ

	<u>Sayfa</u>
<b>Çizelge 2.1</b> (2.7) 'e göre H mesafesinin $d$ fonksiyonu olarak $k$ oranının değerleri..	7
<b>Çizelge 2.2</b> Çeşitli $k$ hızları için (2.9) - (2.10) ile hesaplanan $d(k)$ için sınırlar .....	9
<b>Çizelge 2.3</b> Çeşitli $k$ oranları için (2.21) ile hesaplanan $d(k)$ için sınırlar .....	15
<b>Çizelge 2.4</b> (2.60) ile çeşitli $a$ ve $c$ değerleri için hesaplanan sınırlar.....	32
<b>Çizelge 2.5</b> (2.67) ile çeşitli $a, k, b = -ah, \lambda$ ve $c$ değerleri için .....	36



## SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

---

$\alpha, \beta, c, \lambda$	: Pozitif Gerçek Sayı
$d$	: Mesafe
$k$	: Reaksiyon Hızı
$k'$	: Belirli Popülasyonun Spesifik Büyüme Hızı
$S$	: Besin Maddesi
$s_0$	: Verhulst Fonksiyonu
$t$	: Zaman
$X$	: Popülasyon

---

## 1. GİRİŞ

Biyolojik sistemlerin modellenenilmesi için birçok model tanımlanmıştır. Belirli enzim kinetiği ve popülasyon büyüme süreçleri gibi birçok biyolojik dinamik süreç adım adım gelişir [21, 23]. Bu tür işlemler genellikle düzgün sigmoidal fonksiyonlarla açıklanır veya yaklaşık olarak belirlenir; bu tür fonksiyonlar sinir ağları teorisinde yaygın olarak kullanılmaktadır [5, 8]. Adım fonksiyonlar, sigmoid fonksiyonların özel bir sınıfıdır; bu tür fonksiyonlar "neredeys" sürekli veya Hausdorff süreklidir ( $H$ -sürekli) [3]. Belirli modelleme durumuna bağlı olarak, sürekli veya  $H$ -sürekli (adım) fonksiyonları kullanmaya karar verilebilir. Dahası, çoğu durumda her iki tip modelleme aracı birbirinin yerine kullanılabilir. Bir sigmoid fonksiyonunu bir adım fonksiyonuyla (veya tersine) ikame etmek için, iki fonksiyon arasındaki yaklaşım hatasının bilinmesi gerekmektedir. Böyle bir durumda kullanılan doğal bir metrik, fonksiyonların grafikleri arasındaki Hausdorff metriğidir. Bu amaçla, öncelikle Hausdorff sürekli fonksiyonları aralığı sınıfı ve ilgili Hausdorff yaklaşımı kavramıyla ilgili bazı temel sonuçlara daha sonra ise Verhulst popülasyon modelinin çözümleri olan lojistik sigmoid fonksiyon sınıflarına odaklanılacaktır.

Verhulst modelinin basit otokatalitik (biyo) kimyasal reaksiyonlardan ortaya çıktığını ve bu nedenle biyokimyasal üreme reaksiyon mekanizmasının özel durumu olarak düşünülebileceği gösterilmektedir. Sigmoid fonksiyonlar, yaşam bilimleri, kimya, fizik, yapay zeka vb. ile ilgili çeşitli alanlarda sayısız uygulama bulmaktadır. Sinyal işleme, makine öğrenmesi, sinir ağları gibi alanlarda birçok değişkenin sigmoid fonksiyonları "aktivasyon fonksiyonları" olarak da bilinir. Pratik olarak önemli bir sigmoid fonksiyon sınıfı, sınırlayıcı bir durum olarak adım fonksiyonunu içeren kesim fonksiyonları sınıfıdır. Kesim fonksiyonları süreklidir, ancak aralığın arttığı iki uç noktasında düzgün (türevlenebilir) değildir. Bazı uygulamalarda düz sigmoid fonksiyonlar tercih edilir; hatta bazı yazarlar sigmoid fonksiyonların tanımında düzgünlük isterler. Düzgün sigmoid fonksiyonların bilinen iki sınıfı lojistik ve aktivasyon fonksiyonlarıdır. Düzgün olmayan sigmoid fonksiyonlardan düzgün sigmoid fonksiyonlara ve bunun tersine de geçiş yapılması gereken durumlar vardır. Böyle bir zorunluluk, doğal bir şekilde, düzgün olmayan sigmoid fonksiyonlara düzgün sigmoid fonksiyonlarla yaklaşma meselesini ortaya çıkarır.

## 2. MATERYAL VE YÖNTEM

### 2.1 Sigmoid ve Adım Fonksiyonları

Lojistik sigmoidal fonksiyon ve Heaviside adım fonksiyonu ile ilgili bazı hesaplama, modelleme ve yaklaşım konularına odaklanılmıştır. Heaviside adım fonksiyonunun sigmoid fonksiyonları ile Hausdorff yaklaşımı, çeşitli hesaplama ve modelleme yönlerinden tartışılmıştır. Verhulst modeli ile belirli biyokimyasal reaksiyon denklemleri arasındaki bazı ilişkiler arz edilir.

#### 2.1.1 Hausdorff sürekliliği

Hausdorff sürekliliği ( $H$ -sürekliliği) kavramı, alışılmış süreklilik kavramını genelleştirir, böylece olağan sürekli gerçek fonksiyonların temel özellikleri mevcut kalır. Sürekli gerçek fonksiyonlar  $C(\Omega)$  kümesindeki cebirsel işlemleri,  $H(\Omega)$  kümesi bir değişmeli halka ve genişletilmiş işlemlere göre bir doğrusal uzay olacak şekilde  $H$ -sürekli fonksiyonların  $H(\Omega)$  kümesine genişletmek mümkündür [3]. Bu çalışmada kendimizi bir gerçek değişkenli fonksiyonlarla, yani bir alt kümede ( $\Omega \subseteq R$ ) tanımlanan gerçek fonksiyonlarla sınırlıyoruz.

#### 2.1.2 Adım fonksiyonu

$r \in R$  için  $h_r \in H(R)$  ile gösterilen (aralık) Heaviside adım fonksiyonu:

$$h_r(t) = \begin{cases} 0 & t < r \\ [0,1] & t = r \\ 1 & t > r \end{cases} \quad (2.1)$$

$r = 0$  için, temel Heaviside adım fonksiyonunu elde ederiz:

$$h_0(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ [0,1] & t = 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

(2.1) - (2.2) fonksiyonları sigmoid fonksiyonlara örnektir.

$[a,b]$  aralığında bir sigmoidal fonksiyon, monoton bir fonksiyon  $s(t)$  olarak tanımlanır:

$$s(t) \rightarrow [a,b] \text{ öyle ki } \lim_{t \rightarrow -\infty} s(t) = a, \lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = b.$$

### 2.1.3 Kesim fonksiyonu

Sürekli (hatta pürüzsüz) veya süreksiz sigmoid fonksiyonlar düşünülebilir.  $H$  - sürekli aralık fonksiyonları sınıfı içinde, Heaviside adım fonksiyonu, sigmoidal fonksiyonun özel bir durumudur. Sürekli sigmoid fonksiyonunun bir örneği, şu şekilde tanımlanan kesim fonksiyonudur:

$$c_{[a,b]}(t) = \begin{cases} 0, & t \leq a \\ \frac{t-a}{b-a}, & a < t < b. \\ 1, & t \geq b \end{cases} \quad (2.3)$$

### 2.1.4 Sigmoid fonksiyonlarının toplamları

Belirli bir  $r = (r_1, r_2, \dots, r_k) \in R^k$  vektörü için, öyle ki  $r_1 < r_2 < \dots < r_k$  ve bir vektör  $a = (a_1, a_2, \dots, a_k) \in R^k$  için Sigmoid fonksiyonların toplamı:

$$H(r, a; t) = \sum_{i=1}^k a_i h_{r_i}(t) \quad (2.4)$$

şeklinde gösterilir.

Fonksiyon (2.4),  $k$  adımlı (sıçramalı) bir adım fonksiyonudur.

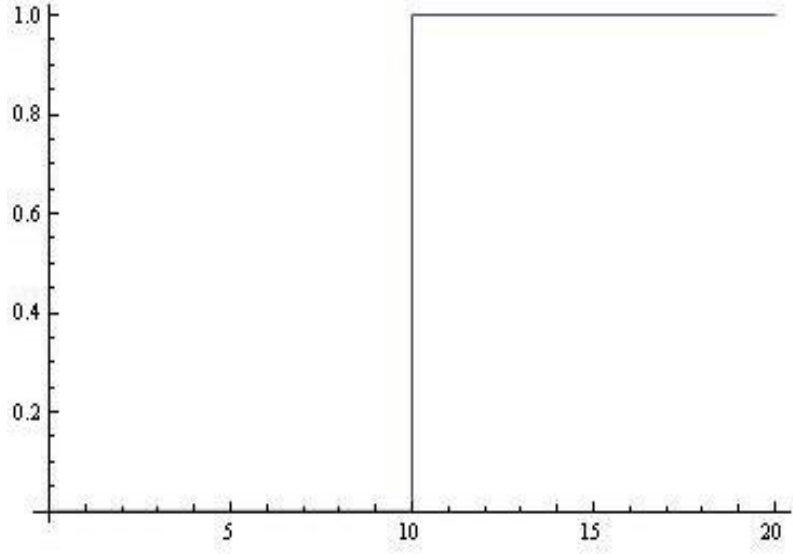
$r_k$  ve  $a_k$  için uygun değerler kullanılarak, Şekil 2.3'teki gibi bir histogram, formül (2.4)'ün adım fonksiyonlarının bir toplamı olarak temsil edilebilir; bu durumda

genellikle  $r_k = r_1 + h_i$ ,  $i = 1, \dots, k$  ve  $\sum_{i=1}^k a_i = 0$  olur.

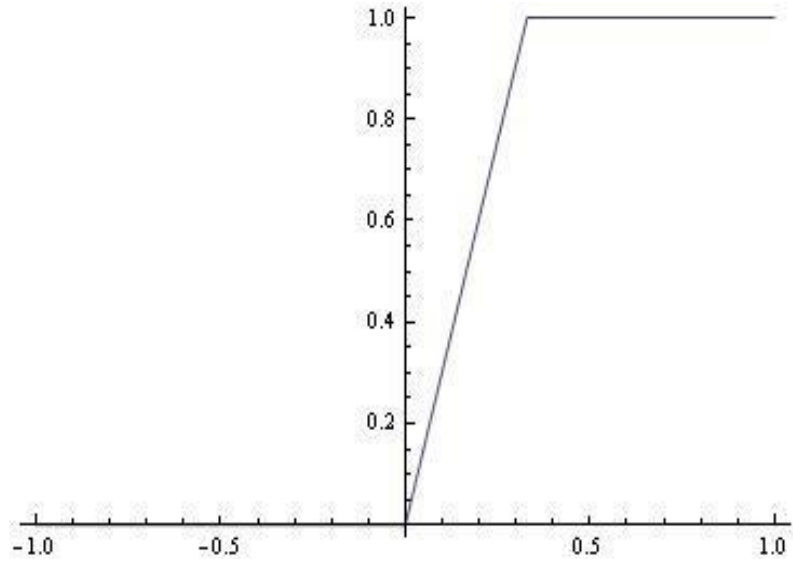
Benzer şekilde, diğer uygun şekilde kaydırılmış sigmoid fonksiyonların toplamları da oluşturulabilir.

### 2.1.5 Hausdorff uzaklığı

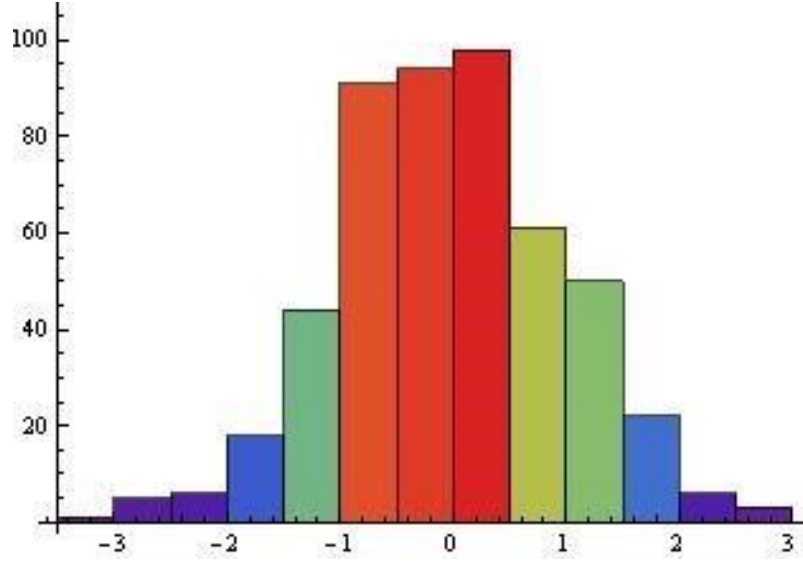
İki fonksiyon arasındaki Hausdorff mesafesinin ( $H$  -mesafesi)  $p(f, g), \Omega \subseteq R$  için  $f, g \in H(\Omega)$ 'nin  $R^2$ 'nin kapalı alt kümeleri olarak kabul edilen tamamlanmış  $F(f)$  ve  $F(g)$  grafikleri arasındaki mesafe olarak tanımlanmaktadır [16,26].



Şekil 2.1  $r = 10$  değerinde “sıçrama” gösteren bir adım fonksiyonu



Şekil 2.2 Kesim fonksiyonu



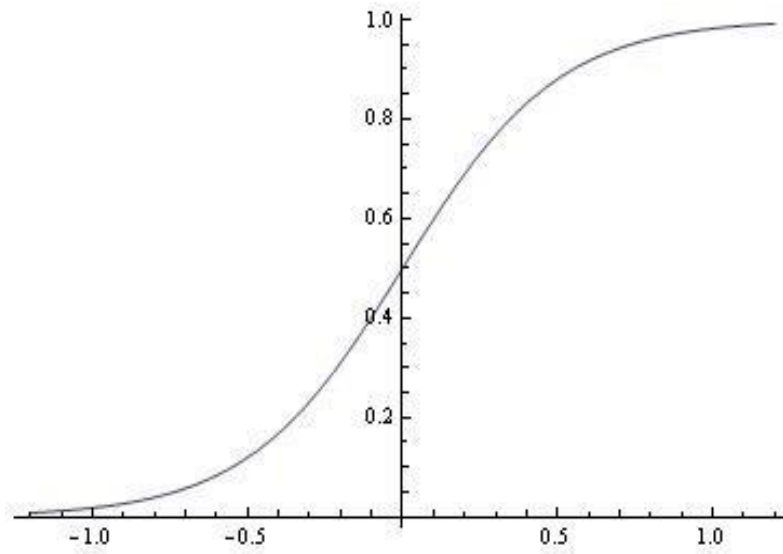
Şekil 2.3 Bir histogram grafiği örneği

### 2.1.6 Lojistik sigmoid fonksiyonu

Sigmoid fonksiyonları, sinir ağlarına ve hücre büyümesi popülasyon modellerine çok sayıda uygulama bulur [8, 21].

Pürüzsüz sigmoid fonksiyonların pratik olarak önemli birkaç ailesi popülasyon dinamiklerinden kaynaklanır. Klasik bir örnek, aşağıda tartışılacak olan Verhulst nüfus büyüme modelidir. Verhulst modeli, lojistik sigmoid fonksiyonunu kapsamlı bir şekilde kullanır:

$$s_0(t) = \frac{a}{1 + e^{-kt}} \quad (2.5)$$



Şekil 2.4 Lojistik sigmoid fonksiyonu

Daha sonra, Hausdorff mesafesindeki form (2.2) 'nın lojistik fonksiyonları ile Heaviside adımfonksiyonunun (2.5) yaklaşımına odaklanacağız.

### 2.1.7 Yaklaşım sorunları

Aşağıda, adım fonksiyonu ile lojistik sigmoid fonksiyonu arasındaki  $H$  -mesafesini tahmin edeceğiz. Genellik kaybı olmadan Heaviside adım fonksiyonunu  $f = ah_0$  ve lojistik sigmoid fonksiyonunu (2.5)  $g = s_0$  düşünebiliriz.

$Ah_0$  adım fonksiyonu ve  $s_0$  sigmoid fonksiyonu arasındaki  $H$  mesafesi  $d = p(f, g) = p(ah_0, s_0)$ ,  $0 < d < a/2$  ve  $a - s_0(d) = d$  ilişkilerini karşılar, yani;

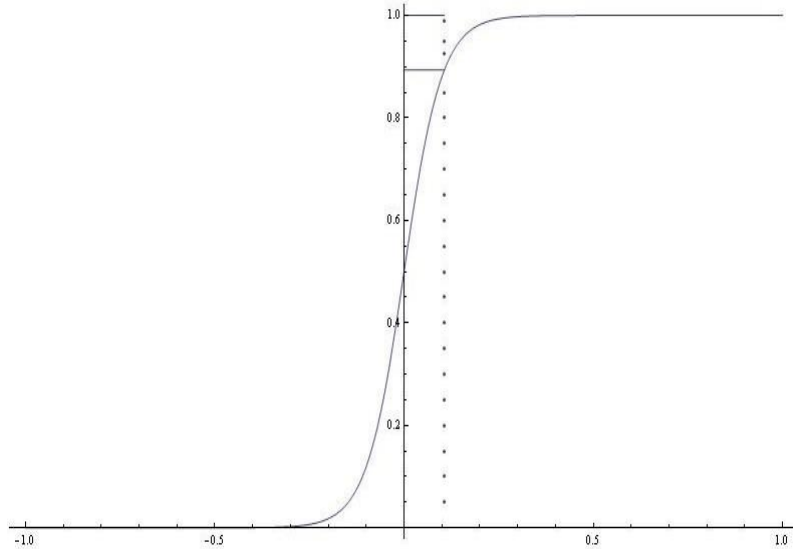
$$\frac{a-d}{d} = e^{kd}, (0 < d < a/2), \quad (2.6)$$

Açıkça  $d \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$  anlamına gelir (ve tam tersi).

(2.6) 'dan, oran parametresi  $k$  için  $d$  'nin bir fonksiyonu olarak basit bir ifade elde ederiz.

**Teorem 2.1** Hız parametresi  $k$  aşağıdaki gibi  $H$  -mesafesi  $d$  cinsinden ifade edilebilir:

$$k = k(d) = \frac{1}{d} \ln \frac{a-d}{d} = O(d^{-1} \ln(d^{-1})) \quad (2.7)$$



Şekil 2.5 Reaksiyon hızı  $k = 20$ ;  $H$  -mesafesi  $d = 0.106402$

İlişki,  $k$  oranını  $H$  mesafesi  $d$  cinsinden verir, birkaç örnek Çizelge 2.1'de hesaplanmıştır.

**Çizelge 2.1** (2.7) 'e göre  $H$  mesafesinin  $d$  fonksiyonu olarak  $k$  oranının değerleri

Mesafe $d$	$10^{-1}$	$10^{-2}$	$10^{-3}$	$10^{-4}$	$10^{-5}$	$10^{-6}$
Hız $k$	$0.22 \times 10^2$	$0.46 \times 10^3$	$0.69 \times 10^4$	$0.92 \times 10^5$	$0.12 \times 10^7$	$0.14 \times 10^8$

Tersine, hız parametresi  $k$  cinsinden  $H$  mesafesi  $d$  için bir ilişki bir sonraki önermede verilmiştir.

Basit olması için  $a=1$ 'in altında olduğunu varsayılmakta, bu nedenle temel lojistik fonksiyonun sadece  $k$  oranına bağlı olduğunu düşünülmektedir:

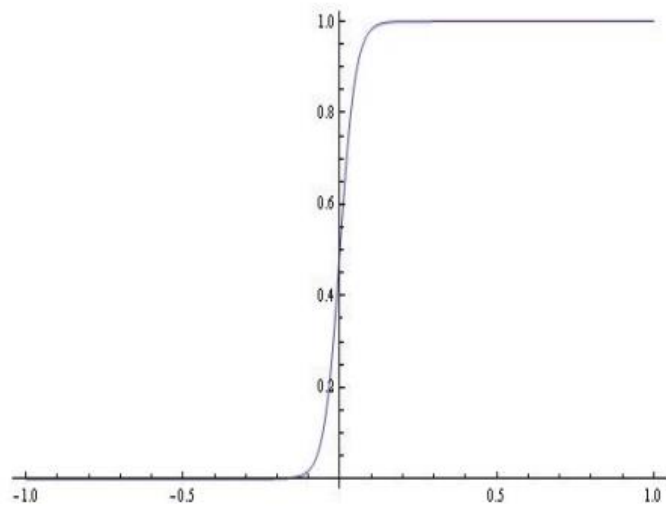
$$s_0(t) = (1 + e^{-kt})^{-1}.$$

**Teorem 2.2** [3] Heaviside adım fonksiyonu  $h_0$  ile sigmoid Verhulst fonksiyonu  $S_0$  arasındaki  $H$  – mesafesi  $d = p(h_0, s_0)$ , herhangi bir gerçektek  $k \geq 2$  için reaksiyon hızı  $k$  cinsinden ifade edilebilir:

$$d_l(k) = \frac{1}{k+1} < d(k) < \frac{\ln(k+1)}{k+1}, \quad (2.8)$$

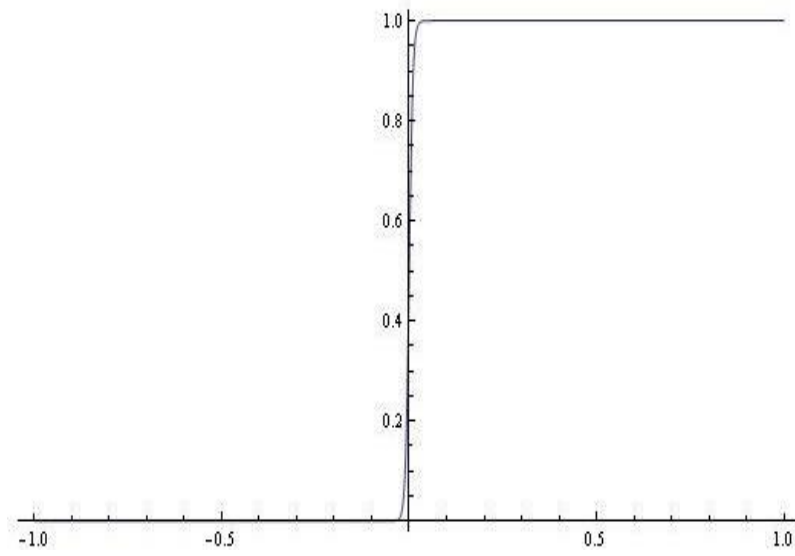
$$d_l(k) = \frac{\ln(k+1)}{k+1} - \frac{\ln \ln(k+1)}{k+1} < d(k) < \frac{\ln(k+1)}{k+1} = d_r(k), \quad (2.9)$$

$$\text{veya } d(k) = \frac{\ln(k+1)}{k+1} (1 + O(\varepsilon(k))), \quad \varepsilon(k) = \frac{\ln(k+1)}{k+1}. \quad (2.10)$$



**Şekil 2.6** Reaksiyon hızı  $k = 40$ ;  $H$  –mesafesi  $d = 0.0661748$





**Şekil 2.7** Reaksiyon hızı  $k = 200$ ;  $H$  -mesafesi  $d = 0.01957$ .

$d$ 'yi  $k$  cinsinden ifade etmek için fonksiyonu inceleyelim:

$$f(d) = kd - \ln \frac{1}{d} - \ln(1-d), \quad 0 < d < \frac{1}{2}$$

olduğundan  $\lim_{d \rightarrow \frac{1}{2}, d < \frac{1}{2}} f(d) = \frac{k}{2} > 0$

$f(d) = 0$  'ın  $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ 'de bir çözüme sahip olduğu sonucuna vardık.

$$f'(d) = k + \frac{1}{d} + \frac{1}{1-d} > 0$$

olduğundan  $f(d)$  fonksiyonunun kesinlikle monoton olarak arttığı sonucuna vardık,

bu nedenle  $f(d) = 0$ ,  $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ 'de benzersiz bir  $d(k)$  çözümüne sahiptir.

$k \rightarrow \infty$  için  $d(k) \rightarrow 0$ , dolayısıyla

$$\ln(1-d(k)) = -d(k) + O(d(k)^2).$$

Daha sonra  $f$  fonksiyonunu  $d \rightarrow 0$  ile  $O(d^2)$  olarak yaklaştıran

$g(d) = (k+1)d - \ln \frac{1}{d}$  fonksiyonunu düşünün; ayrıca  $g'(d) > 0$ . Böylece,  $g$  'nin

(benzersiz) sıfırını  $d(k)$  ile ifade edebilir ve  $f$  yerine  $g$ 'yi inceleyebiliriz.

$g(d_-) < 0$  ve  $g(d_+) > 0$  olacak şekilde  $d_-$  ve  $d_+$  olmak üzere iki gerçek arıyoruz.

$(g(d_-) < g(d(k)) < g(d_+))$  ve dolayısıyla  $d_- < d(k) < d_+$  'ya götürür).

$$d_- = \frac{1}{k+1} \text{ ve } d_+ = \frac{\ln(k+1)}{k+1} \text{ 'yi deneyerek}$$

$$g\left(\frac{1}{k+1}\right) = 1 - \ln(k+1) < 0, g\left(\frac{\ln(k+1)}{k+1}\right) = \ln \ln(k+1) > 0 \text{ 'ı elde ederiz.}$$

Daha iyi bir alt sınır bulmak için;

$$g\left(\frac{\ln(k+1)}{k+1} \left(1 - \frac{\ln \ln(k+1)}{k+1}\right)\right) = \ln\left(1 - \frac{\ln \ln(k+1)}{k+1}\right) < 0 \text{ 'ı hesaplıyoruz.}$$

Böylece  $\frac{\ln(k+1)}{k+1} - \frac{\ln \ln(k+1)}{k+1} < d(k) < \frac{\ln(k+1)}{k+1}$  elde edilir.

**Çizelge 2.2** Çeşitli  $k$  hızları için (2.9) - (2.10) ile hesaplanan  $d(k)$  için sınırlar

$k$	$d_l(k)$	$d_r(k)$	$\Delta = d_r - d_l$	$\varepsilon(k)$	$d(k)$
2	0.334	0.366	0.032	0.0856	0.337416
100	0.0305	0.0456	0.015	0.3313	0.033592
1000	0.00497	0.00691	0.0019	0.2797	0.005245
10000	0.000698	0.000921	0.00022	0.2410	0.000723

### Uyarı

Genel durum için  $a \neq 1$ , formül (2.9) - (2.10) 'da her yerde  $k+1$  ifadesini  $k+a^{-1}$  ile ikame etmelidir.

### 2.1.8 Değişen lojistik fonksiyonlar

Burada keyfi kaydırılmış (yatay olarak çevrilmiş) lojistik fonksiyonlarla ilgilenilmektedir.

Hem adım fonksiyonu hem de lojistik fonksiyon, yatay öteleme altında formlarını korur. Dolayısıyla, kaydırılmış adım fonksiyonu  $h_r$ , kaydırılmış lojistik fonksiyonu  $s_r$  tarafından,  $h_0$  fonksiyonunun temel lojistik fonksiyon  $s_0$  tarafından yaklaşık olarak tahmin edilmesi gibi, yani  $\rho(h_r, s_r) = \rho(h_0, s_0)$  'a sahip olduğumuz  $H$  mesafesi için yaklaşık olarak tahmin edilir.

Sahip olduğumuz değişen lojistik fonksiyona odaklanarak,

$$s_r(t) = s_0(t-r) = \frac{a}{1 + e^{-k(t-r)}} \quad (2.11)$$

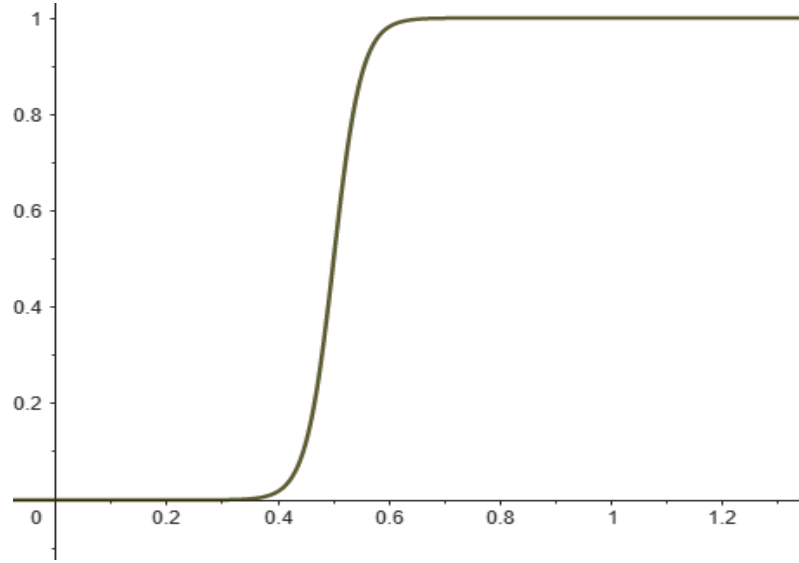
(Temel) lojistik fonksiyonunun (2.5)  $-r$  noktasındaki değeri  $s_0(-r) = \frac{a}{1 + e^{kr}}$  'dir.

Şekil 2.8,  $r = 0.5$  ile kaydırılmış bir lojistik fonksiyonu görselleştirir.

## 2.2 Verhulst modelini veren kinetik mekanizmalar

Verhulst modelinin, kütle hareket kinetiği kullanılarak belirli (biyo) kimyasal reaksiyon denklemlerinden türetilebileceği gösterilmektedir. Verhulst modelinin Kitle Eylem Yasasının icadından 30-40 yıl önce icat edildiğini belirtmek gerekir.

Kütle Eylem Yasası, bir kimyasal reaksiyondaki her tepkenin (tepkimeye giren madde) konsantrasyonundaki değişim oranının, o reaksiyondaki tepkenlerin konsantrasyonlarının çarpımı ile orantılı olduğunu belirtir.



Şekil 2.8  $r = 0.5$  ile kaydırılan bir lojistik fonksiyon

Belirli bir tepken birkaç reaksiyonda yer alıyorsa, bu tepkenin değişim hızı, tüm pozitif oranların toplanması ve tüm negatif olanların çıkarılmasıyla yapılır [22].

### 2.2.1 Basit bir otokatalitik reaksiyon

Aşağıdaki otokatalitik tersinir reaksiyon mekanizmasını düşünün:

$$X \xrightleftharpoons[k_{-1}]{k_1} X + X, \quad (2.12)$$

$$X \xrightleftharpoons[k_{-1}]{k_1} 2X, \text{ olarak da yazılabilir.}$$

Kitlesel eylem yasasını uygulayarak Verhulst modelini elde ederiz:

$$x' = kx - k_{-1}x^2 = kx\left(1 - \frac{k_{-1}}{k}x\right). \quad (2.13)$$

Sabit nokta,  $x^* = \frac{k}{k_{-1}}$  'dır.

### 2.2.2 Besleyici altyapı içeren otokatalitik reaksiyon

Aşağıdaki otokatalitik reaksiyon denklemini düşünün:



(veya  $S + X \xrightarrow{k'} 2X$ )  $S$  bir besin maddesi olduğunda,  $X$  bir popülasyondur ve  $k'$  belirli bir popülasyonun spesifik büyüme oranıdır.

Reaksiyon denkleminin (2.14) biyolojik (biyokimyasal) yorumu, alt yapı  $S$ 'nin popülasyonun çoğalmasına yol açan  $X$  popülasyonu tarafından kullanılmasıdır (bakteriyel hücre popülasyonu durumunda basit ikili füzyon çoğalması).

$X$ 'in biyokütlesini (veya yoğunluğunu)  $x$  ile ve  $S$ 'nin kütlesini (konsantrasyonunu)  $s$  ile ifade ederek ve kütle eylem yasasını uygulayarak,  $s(t)$ ,  $x(t)$  fonksiyonları için aşağıdaki dinamik sistemelde edilir:

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dt} &= -k'xs, \\ \frac{dx}{dt} &= -k'xs, s(0) = s_0, x(0) = x_0 \end{aligned} \quad (2.15)$$

$k = 40$  reaksiyon hızı ve  $s_0 = 1$ ,  $x_0 = 1 \times 10^{-9}$  başlangıç koşulları için  $s$ ,  $x$ 'in (2.15) çözümleri Şekil 2.9'da gösterilmiştir.

$\frac{ds}{dt} + \frac{dx}{dt} = 0$  olduğunu, dolayısıyla  $s + x = \text{const} = x_0 + s_0 = a$  olduğunu fark edersek,

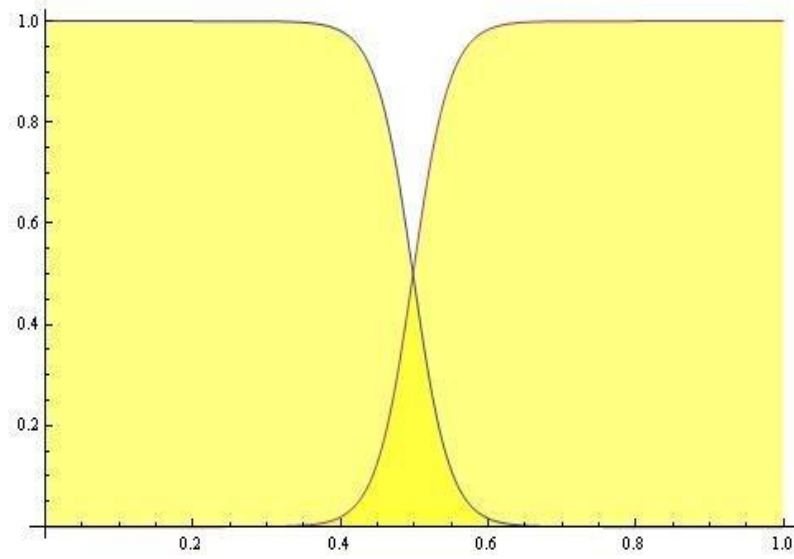
Verhulst modeli [29, 30] olarak da bilinen diferansiyel denklemi elde etmek için diferansiyel denklemde  $x$  yerine  $s = a - x$  koyabiliriz.

$$\frac{dx}{dt} = k'x(a - x). \quad (2.16)$$

Açıkça, ilk problemin (2.16) çözümü  $x$ , ilk koşul  $x(0) = x_0$  için problemin (2.16) çözümü  $x$  ile çakışmaktadır.

$$\frac{dx}{dt} = k'x(a-x). \quad x(0) = x_0. \quad (2.17)$$

Tersine, (2.17) 'nin çözümü,  $s_0 = a - x_0$  olduğunda ilk problemin (2.15) çözümü  $x$  ile çakışır. Yukarıdakiler aşağıda özetlenebilir:



Şekil 2.8 Reaksiyon hızı  $k = 40; s_0 = 1, x_0 = 1 \times 10^{-9}$

**Teorem 2.3** Kütle hareketi kinetiği yoluyla otokatalitik reaksiyon (2.14) dinamik modeli (2.15) başlatır. Modeller (2.15) ve (2.17), çözümlerinin  $x$ 'in çakışması anlamında eşdeğerdir ( $x_0 + s_0 = a$  için).

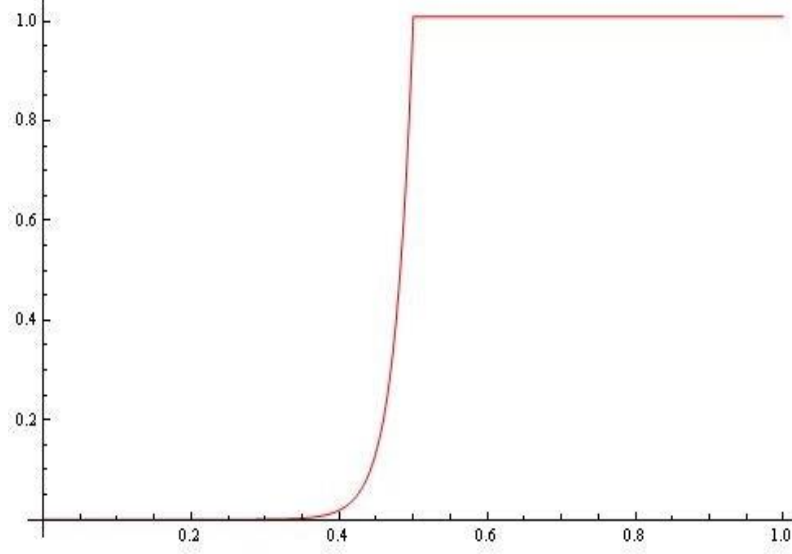
Verhulst modelindeki (2.17) altta yatan mekanizmanın, bir besin altyapısının kullanımına dayalı bir biyokimyasal üreme reaksiyonu (2.14) olduğunu görüyoruz.

Bu, Verhulst modelinin önemli çok yönlü uygulamalarını açıklamaktadır. Verhulst modeli genellikle normalleştirilmiş hız sabiti  $k = k' / a$  ile yazılır.

$$\frac{dx}{dt} = \frac{k}{a} x(a-x) = kx\left(1 - \frac{x}{a}\right) \quad (2.18)$$

Başlangıç koşulu  $x_0 = a/2$  olan  $x$  denkleminin (2.19) çözümü, (temel) lojistik sigmoidal fonksiyondur.

$$s_0(t) = \frac{a}{1 + be^{-kt}}; \quad b = \frac{a - x_0}{x_0} = 1$$



**Şekil 2.9** Reaksiyon hızı  $k = 40; r = 0.5, x_0 = 1.85 \times 10^{-9}$

### 2.2.3 Giriş fonksiyonu olarak besin kaynağı

Verhulst modeli, biyoreaktör modellemesinde kullanılan modellerin bir prototipi olarak düşünülebilir. Orada, özellikle sürekli biyoreaktör durumunda, besin kaynağı aşağıdaki gibi bir giriş fonksiyonu  $s(t)$  olarak kabul edilir:

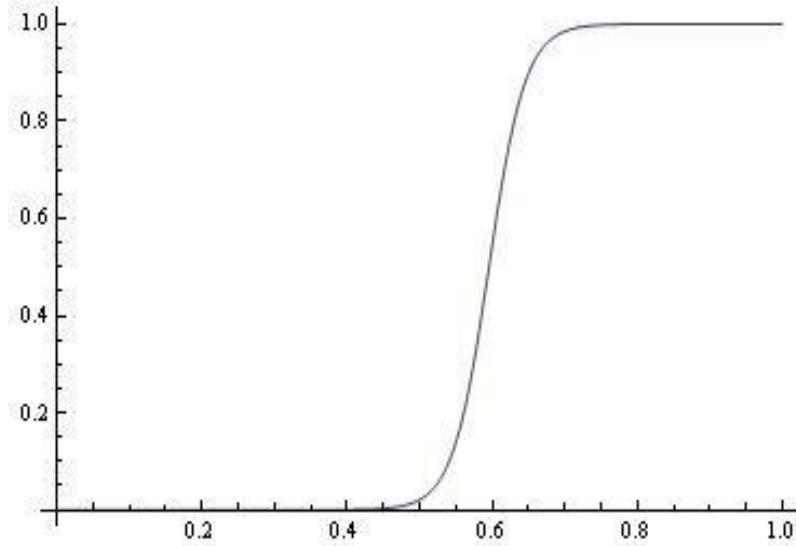
$$\frac{dx}{dt} = kx(t)s(t). \quad (2.19)$$

### 2.2.4 Hesaplama sorunları

Kaydırılmış lojistik fonksiyon (2.11), Verhulst modelinin (2.16) bir çözümü olarak hesaplanabilir; bu durumda denklem (2.16) için uygun bir başlangıç koşulu bilmemiz gerekir.

Kaydırılmış ( $r$  ile) lojistik fonksiyon (2.11), ilk sorunun çözümü olarak düşünülebilir:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{k}{a} x(a-x), \quad x(0) = x_0 = a / (1 + e^{kr}) \quad (2.20)$$



Şekil 2.10 Reaksiyon hızı  $k = 40; r = 0.6$

$r$  arttıkça, problem çözme için hesaplama süresi (2.20), büyük  $k$  değerleri kullanılırsa (adım fonksiyonunun iyi bir yaklaşımını elde etmek için) hızla artar.

Böyle bir yaklaşımda, çok küçük değerlerin ( $d$  mesafesi için) ve çok büyük değerlerin ( $k$  oranı için) eş zamanlı olarak hesaplamaya dahil edildiği not edilmektedir.

### 2.3 Heaviside Adım Fonksiyonu ile Sigmoid Verhulst Fonksiyonu Arasındaki $H$ –Mesafesi

#### 2.3.1 $d(k)$ için daha kesin sınırlar.

Heaviside adım fonksiyonu  $h_0$  ile sigmoid Verhulst fonksiyonu  $s_0$  arasındaki  $H$  –mesafesi  $d$  için daha kesin sınırlar olduğunu ispatladık. Aşağıdaki teorem,  $d(k)$  için üst ve alt sınırları verir.

**Teorem 2.4** [18]. Heaviside adım fonksiyonu  $h_0$  ile sigmoid Verhulst fonksiyonu  $s_0$  arasındaki  $H$  –mesafesi  $d = p(h_0, s_0)$  için aşağıdaki eşitsizlikler  $k \geq 2$  için geçerlidir:

$$\begin{aligned} \tilde{d}_l(k) &= \frac{\ln(k+1)}{k+1} - \frac{\ln \ln(k+1)}{(k+1)\left(1 + \frac{1}{\ln(k+1)}\right)} \\ &< d < \frac{\ln(k+1)}{k+1} + \frac{\ln \ln(k+1)}{(k+1)\left(\frac{\ln \ln(k+1)}{1 - \ln(k+1)} - 1\right)} = \tilde{d}_r \end{aligned} \quad (2.21)$$

**İspat.** Açıkça,  $g$  ‘nin ikinci türevi  $g''(d) = -\frac{1}{d^2} < 0$

$$\left[ \frac{1}{k+1}, \frac{\ln(k+1)}{k+1} \right] \text{ üzerinde sabit bir işarete sahiptir.}$$

$\left(\frac{1}{k+1}, g\left(\frac{1}{k+1}\right)\right)$  ve  $\left(\frac{\ln(k+1)}{k+1}, g\left(\frac{\ln(k+1)}{k+1}\right)\right)$  noktaları ile tanımlanan düz çizgi ve

$\left(\frac{\ln(k+1)}{k+1}, g\left(\frac{\ln(k+1)}{k+1}\right)\right)$  noktasındaki  $g(d)$ 'ye teğet, sırasıyla

$$\frac{\ln(k+1)}{k+1} + \frac{\ln \ln(k+1)}{(k+1)\left(\frac{\ln \ln(k+1)}{1-\ln(k+1)} - 1\right)},$$

$$\frac{\ln(k+1)}{k+1} + \frac{\ln \ln(k+1)}{(k+1)\left(\frac{\ln \ln(k+1)}{1-\ln(k+1)} - 1\right)}$$

noktalarında apsis ile kesişir.

Bu da Teorem 2.4'ün ispatını tamamlar. İyileştirilmiş sınırların (2.21) (2.9) dan daha kesin olduğunu not ediyoruz. (2.21) ilişkileri kullanan bazı hesaplama örnekleri Çizelge 2.3'de sunulmuştur.

**Teorem 2.5** [18]. Teorem 2.4'teki ile aynı gösterimleri ve koşulları kullanarak, elimizde;

$$\tilde{d}_l(k) = \frac{1}{\frac{k}{2} + 2} < d(k) < \frac{\ln(k+1)}{k+1} \quad (2.22)$$

bulunur.

**Çizelge 2.3** Çeşitli k oranları için (2.21) ile hesaplanan d(k) için sınırlar

$k$	$\tilde{d}_l(k)$	$kök$	$\tilde{d}_r(k)$
10	0.1413863	0.1633510	0.169081814
40	0.0587838	0.0661748	0.06900431
100	0.03058471	0.0335928	0.03505368
300	0.013177444	0.0141467	0.014736887
1000	0.004971273	0.00524519	0.00544691
2000	0.0027852088	0.00291712	0.0030233927
3000	0.0019748445	0.00206086	0.0021335086

**İspat.** Fonksiyonu tanımlıyoruz:

$$G(d) = \frac{k}{2} \ln \frac{1+d}{1-d} - \ln \frac{1}{d} - \ln(1-d) \quad (2.23)$$



Sonra  $G(d) - f(d) = \frac{k}{2} \ln \frac{1+d}{1-d} - kd$ .

$G(d) - f(d) \approx 0$ 'ı inceliyoruz, yani,

$$\begin{aligned} \frac{k}{2} \ln \frac{1+d}{1-d} &= kd \\ \ln \left( \frac{1+d}{1-d} \right)^{\frac{k}{2}} &= kd \\ \left( \frac{1+d}{1-d} \right)^{\frac{k}{2}} &= e^{kd} \end{aligned}$$

[25]'e göre,

$$\left( \frac{1+d}{1-d} \right)^{\frac{k}{2}} - e^{kd} = O(d^3)$$

$G(d)$  fonksiyonunun  $f(d)$  'yi  $d \rightarrow 0$  ile  $O(d^3)$  olarak yaklaştırdığını görüyoruz.

$$G(d) = \frac{k}{2} \ln \frac{1+d}{1-d} + \ln \frac{d}{1-d} = 0$$

Buradan,

$$\begin{aligned} \frac{k}{2} \ln \frac{1+d}{1-d} &= -\ln \frac{d}{1-d} = \ln \frac{1-d}{d} \\ \ln \left( \frac{1+d}{1-d} \right)^{\frac{k}{2}} &= \ln \frac{1-d}{d} \\ \left( \frac{1+d}{1-d} \right)^{\frac{k}{2}} &= \frac{1-d}{d} \\ d &= \frac{1}{1 + \left( \frac{1+d}{1-d} \right)^{\frac{k}{2}}} \end{aligned}$$

denklemini elde ederiz. Taylor genişlemesinden,

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 + \left( \frac{1+d}{1-d} \right)^{\frac{k}{2}}} &= \frac{1}{2} - \frac{kd}{4} + O(d^3) \\ \tilde{d}_1(k) &= \frac{1}{\frac{k}{2} + 2} \end{aligned}$$

elde edilir.

Ayrıca  $G'(d) > 0$ ,  $G\left(\frac{1}{\frac{k}{2} + 2}\right) < 0$  ve  $G\left(\frac{\ln(k+1)}{k+1}\right) > 0$  olur.

Bu, eşitsizliklerin ispatını tamamlıyor (2.22).

$$\text{Açıkça } \tilde{d}_1(k) = \frac{1}{\frac{k}{2} + 2} > \frac{1}{k+1} = \tilde{d}_1(k) \text{ eğer } k > 2$$

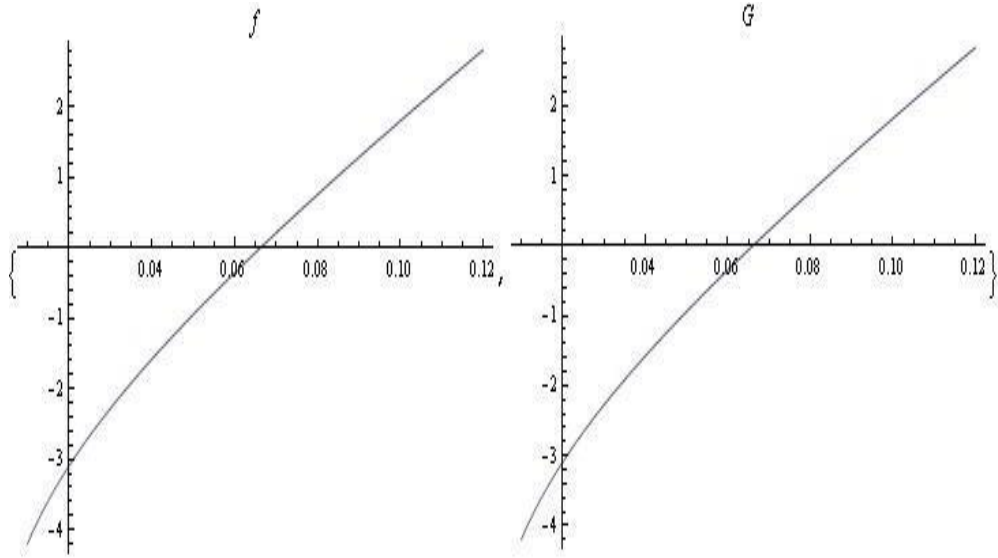
(2.22)'ye karşılık gelen  $d(k)$  için gelişmiş üst ve alt sınırlar elde edebiliriz. Kesin  $d(k)$  tahminlerini elde etmek için iyi bilinen eşitsizlik kullanılabilir. Örneğin,

$$\frac{(d+1)^{\frac{k}{2}}}{d} > \frac{k}{2} \left(1 + \frac{1}{\frac{k}{2} - 1}\right)^{\frac{k}{2} - 1},$$

bu ifade de  $kd > 1$  için ve limit

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{k+1}\right)^k = e \text{ için karşılanır.}$$

Bu tür gelişmiş tahminlerin, hesaplama açısından yoğun emek gerektirdiğini ve bunların pratik kullanım olasılığını ciddi şekilde sınırladığını açıkça belirteceğiz.



Şekil 2.11  $k = 40$  için  $f(d)$  ve  $G(d)$  fonksiyonları

### 2.3.2 Sürekli fonksiyonların çok katmanlı algılayıcılarla yaklaştırılması.

**Tanım 1.** Doğrusal bir algılayıcı,  $x_i, i \in \{1, \dots, n\}$  girdisinin  $Q = \sum_{i \in I} w_i x_i + \theta$  çıktısına

sahip olduğu bir algılayıcıdır, burada  $\theta \in R$  sapma ve  $w_i \in R$  ağırlıklardır, yani çıktı, girdilerin doğrusal bir kombinasyonudur [24].

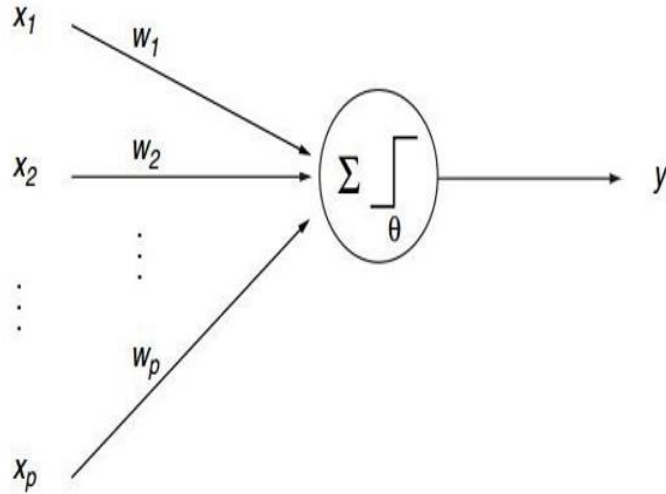
**Tanım 2.** Sigmoid algılayıcı,  $x_i, i \in \{1, \dots, n\}$  girdilerinin,

$$Q = \frac{1}{1 + e^{-\sum_{i \in I} w_i x_i + \theta}}$$

çıktısına sahip olduğu,  $\theta \in R$  'nin sapma ve  $\omega_i \in R$  'nin ağırlık olduğu bir algılayıcıdır.

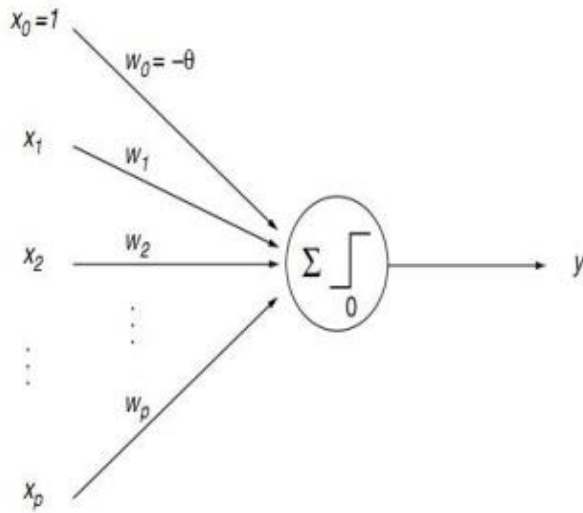
Basit bir girdi  $x$  'e sahip sigmoid algılayıcı, şu çıktı fonksiyonuna sahiptir:

$$Q_{(\alpha, \beta)} = \frac{1}{1 + e^{-\alpha(x+\beta)}}$$



Şekil 2.12 Rosenblatt'ın algılayıcısı

$$\begin{aligned} y(x) &= \text{heaviside}\left(\sum_{j=1}^p w_j x_j - \theta\right) \\ &= \text{heaviside}\left(\sum_{j=0}^p w_j x_j\right) \quad w_0 = -\theta, x_0 = 1 \end{aligned}$$



Şekil 2.13 Algılayıcıda hesaplama

Şimdi,

$$H(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ [0,1], & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

ile verilen Heaviside adım fonksiyonu  $H(x)$ 'i düşünün. [13] 'te aşağıdaki Teorem ispatlanmıştır.

**Teorem 2.6**  $\varepsilon > 0$  verildiğinde  $\alpha(\varepsilon)$  'yi bulabiliriz, öyle ki:

$$\begin{aligned} \|H - Q_{(\alpha,0)}\|_{[a,b]} &< (b-a)\varepsilon \\ \|f\|_{[a,b]} &= \int_{[a,b]} |f(x)| dx \end{aligned} \quad (2.24)$$

Aşağıdaki koşulları göz önünde bulunduralım:

$$Q_{(\alpha,0)}(x) < \varepsilon, x < -k, k \in R^+ \quad (2.25)$$

$$\begin{aligned} \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon} &< e^{-\alpha x}, x < -k, k \in R^+ \\ &< e^{-\alpha x} \end{aligned} \quad (2.26)$$

$$Q_{(\alpha,0)}(x) > 1 - \varepsilon, x > k \quad (2.27)$$

Şimdi

$$\alpha k \leq (\ln \varepsilon - \ln(1 + \varepsilon)) \quad (2.28)$$

Bu, aşağıda verilen düzenlemeyle sağlanabilir.

$$\alpha = \frac{1}{k} (\ln \varepsilon - \ln(1 + \varepsilon)) \quad (2.29)$$

Burada integral metrikte benzer bir tahmin veriyoruz.

$a$  parametresi Hausdorff mesafesi cinsinden aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\alpha = \frac{1}{\varepsilon} (\ln(1 - \varepsilon) - \ln \varepsilon) .$$

Bundan Teorem 2.6'ya benzer aşağıdaki teoremi elde ederiz.

**Teorem 2.7** Hausdorff mesafesini, bulunan  $a$  parametresi ile oluşturabiliriz.

$$\|H - Q_{(\alpha,0)}\|_{[a,b]} < (b-a) \cdot \frac{\ln(\alpha+1)}{\alpha+1} \left( 1 + \left( \frac{\ln \ln(\alpha+1)}{\ln(\alpha+1)} \right) \right) \quad (2.30)$$

## 2.4 Kesim Fonksiyonunun Yakınlaştırılması

Lojistik fonksiyonlar grubunun, kesim fonksiyonuna rastgele olarak yaklaşmadığını göstererek, kesim fonksiyonunun Heaviside adım fonksiyonuna yöneldiği (Hausdorff bakımından) sınırlayıcı durumu ele alınmaktadır. Bu yolla adım fonksiyonunun lojistik fonksiyonlarıyla Hausdorff yaklaştırmasıyla ilgili bir önceki sonucun bir açılımı elde edilmektedir [3].

### 2.4.1 Sigmoid fonksiyonları

Sigmoid fonksiyonları, gerçek doğru üzerindeki sınırlı monoton azalmayan fonksiyonlar olarak tanımlanabilir.

Genellikle  $\lim_{t \rightarrow -\infty} s(t) = 0$  ve  $\lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = 1$  olacak şekilde monoton azalmayan fonksiyonlar  $s(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$  olarak tanımlanan normalize sigmoid fonksiyonlarından faydalanılmaktadır.

Sinir ağları ve makine öğrenimi alanlarında çok değişkenli sigmoid benzeri fonksiyonlar kullanılır ve bu fonksiyonlar aktivasyon fonksiyonları olarak bilinir.

### 2.4.2 Parçalı lineer fonksiyonlar: kesim fonksiyonu

$\Delta = [\gamma - \delta, \gamma + \delta]$ , merkezi  $\gamma \in \mathbb{R}$  ve yarıçapı  $\delta \in \mathbb{R}^+$  olan gerçek doğru üstündeki bir aralık olsun. Bir kesim fonksiyonu ( $\Delta$  üzerindeki) aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$\Delta$ , üzerindeki kesim fonksiyonu  $c_\Delta$ ,  $t \in \mathbb{R}$  için şu şekilde tanımlanır

$$c_\Delta(t) = c_{\gamma, \delta}(t) = \begin{cases} 0 & t < \gamma - \delta \\ \frac{t - \gamma + \delta}{2\delta} & t \in [\gamma - \delta, \gamma + \delta] \\ 1 & t > \gamma + \delta \end{cases} \quad (2.31)$$

$\Delta$  aralığındaki  $c_\Delta(t)$  fonksiyonunun eğiminin  $1/2\delta$  olduğunu unutmayın (eğim,  $\Delta$  aralığının tamamında sabittir).

Daha sonra irdelediğimiz konu, iki özel durum ve bir sınırlama durumu ile ilgilidir.

#### Özel durum 1.

$\gamma = 0$  için  $\Delta = [-\delta, \delta]$  aralığındaki özel kesim fonksiyonunu elde ediyoruz:

$$c_{0,\delta}(t) = \begin{cases} 0, & t < -\delta \\ \frac{t+\delta}{2\delta}, & -\delta \leq t \leq \delta. \\ 1, & \delta < t \end{cases} \quad (2.32)$$

### Özel durum 2.

$\gamma = \delta$  için  $\Delta = [0, 2\delta]$  aralığındaki özel kesim fonksiyonunu elde ediyoruz:

$$c_{\delta,\delta}(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{t}{2\delta}, & 0 \leq t \leq 2\delta. \\ 1, & 2\delta < t \end{cases} \quad (2.33)$$

### Bir sınırlama durumu.

$\delta \rightarrow 0$  ise,  $c_{\delta,\delta}$  (Hausdorff bakımından), bir aralık değerli fonksiyon [2, 5, 17, 28] olan Heaviside adım fonksiyonuna gider:

$$c_0 = c_{0,0}(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ [0,1] & t = 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases} \quad (2.34)$$

(2.33)'ün (2.34)'e gittiğini göstermek için,  $h$ , adım fonksiyonu (2.34) ile kesim fonksiyonu (2.33) arasında bir kare (kutu) birim kullanan  $H$ -mesafesi olsun.

$H$ -mesafesinin tanımı gereği  $h$ , birim karenin kenarıdır, böylece  $1 - c_{\delta,\delta}(h) = h$ , ifadesini, yani  $1 - h/2\delta = h$  'yi elde ediyoruz. Şöyle ki;

$$h = \frac{2\delta}{1+2\delta} = 2\delta + O(\delta^2). \quad (2.35)$$

Çalışma boyunca basitliği sağlamak adına daha genel (rastgele kaydırılmış) kesim fonksiyonu (2.31) yerine özel kesim fonksiyonu (2.33) ile çalışacağız; bu özel tercih, elde edilen sonuçlarla ilgili herhangi bir genellik kaybına yol açmayacaktır.

### 2.4.3 Düz sigmoid fonksiyonları: lojistik fonksiyonu

Düz sigmoid fonksiyonları değerlidir, çünkü bu fonksiyonların türevlerini hesaplamak kolaydır.

En çok bilinen düz sigmoid fonksiyonları Gompertz, lojistik ve aktivasyon fonksiyonlarıdır. Gompertz fonksiyonları, Benjamin Gompertz tarafından demografik

fenomen çalışması için ortaya konmuştur [14].

$\alpha, \beta > 0$  için sigmoid Gompertz fonksiyonu  $\sigma_{\alpha, \beta}(t)$  şu şekilde tanımlanır:

$\sigma_{\alpha, \beta}(t) = \alpha \exp(-\alpha \exp(-\beta t))$  burada  $\alpha, t \rightarrow \infty$  iken üst asimptottur.

Gompertz fonksiyonlarının biyoloji ve tıpta uygulamaları bulunmaktadır. Örneğin, tümör büyümesinin modellenmesinde [1, 6, 31].

Verhulst [29, 30] tarafından ortaya koyulan lojistik fonksiyonlarına odaklanacağız. Daha sonra kesim fonksiyonunun düz sigmoid fonksiyonları, özellikle de lojistik ve aktivasyon fonksiyonları ile yaklaştırılmasıyla ilgileneceğiz.

#### 2.4.4 Kesim fonksiyonunu lojistik fonksiyonlarıyla yaklaştırma

$R$  üzerindeki lojistik (Verhulst) fonksiyonu  $\mu$  [30]'da gösterildiği şekilde tanımlanır:

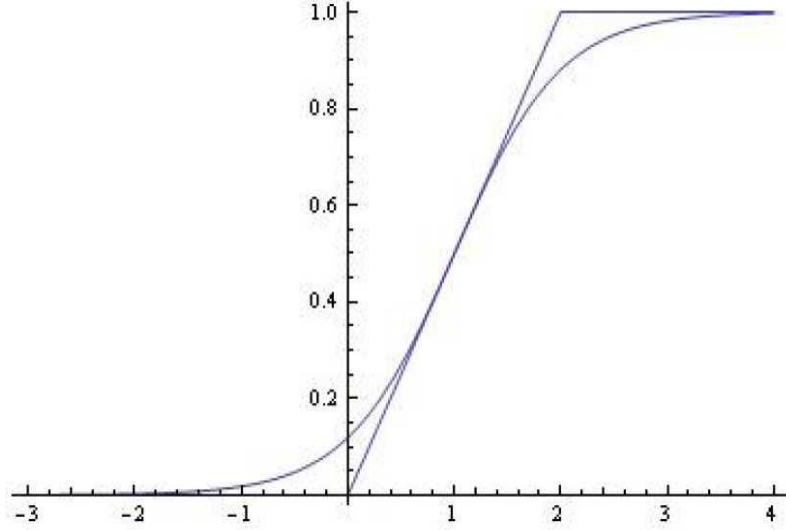
$$\mu_{\lambda, k}(t) = \frac{1}{1 + e^{-4k(t-\lambda)}}. \quad (2.36)$$

Lojistik fonksiyonunun (2.36) “merkezi”  $\lambda$ ’de bir bükülmedir ve  $\lambda$ ’deki eğimi  $k$ ’ye eşittir.

**Teorem 2.8**  $k = 1/2\delta$  ile (2.36) da tanımlanan  $\mu_{\lambda, k}(t)$  fonksiyonu :

- i) hem  $[\gamma, \infty)$  hem de  $(-\infty, \gamma]$  aralığında  $c_{\gamma, \delta}(t)$  fonksiyonuna en iyi üniform tek taraflı yaklaştırmanın lojistik fonksiyonudur.
- ii) üniform metriktaki kesim fonksiyonu  $c_{\gamma, \delta}(t)$ ’yi bir hata ile yaklaştırır.

$$p = p(c, \mu) = \frac{1}{1 + e^2} = 0.11920292... \quad (2.37)$$



**Şekil 2.14**  $\gamma = \delta = 1$   $k = \frac{1}{2}$  için kesim ve lojistik fonksiyonları

**İspat.** Merkezleri aynı olan  $\gamma = \delta$  fonksiyonları, yani  $c_{\delta,\delta}$  ve  $\mu_{\lambda,k}$  fonksiyonlarını ele alalım. Ayrıca kesişen merkezlerinde aynı eğimlere sahip olan  $c$  ve  $\mu$  ' yi seçelim, yani  $k = 1/2\delta$  olduğunu varsayalım.

Burada kesim ve lojistik fonksiyonları arasındaki en büyük üniform mesafenin alttaki aralık  $[0, 2\delta]$  'nin uç noktalarında elde edildiğini fark ettiğimizde aşağıdaki ifadeye sahip oluyoruz:

$$p = \mu_{\delta,k}(0) - c_{\delta,\delta}(0) = \frac{1}{1 + e^{4k\delta}} = \frac{1}{1 + e^2} \quad (2.38)$$

Bu eşitlik teoremin ispatını tamamlamaktadır.

Üniform mesafenin (2.38), ilgili eğim  $k$  üzerinde alttaki aralık  $\Delta$  'nın genişliğine bağlı olmayan bir mutlak sabit değer olduğunu unutmayalım.

Bir sonraki teorem,  $H$  -mesafesi her kullanıldığında aynı durumun geçerli olmadığını göstermektedir.

**Teorem 2.9**  $k = 1/2\delta$  için  $\mu_{\lambda,k}(t)$  fonksiyonu,  $[\gamma, \infty)$  aralığındaki  $c_{\gamma,\delta}(t)$  fonksiyonuna en iyi Hausdorff tek taraflı yaklaştırmasının lojistik fonksiyonudur (ilgili  $(-\infty, \gamma]$  aralığında).

$\mu_{\lambda,k}(t)$ ,  $k = 1/2\delta$  fonksiyonu,  $H$  -mesafesindeki  $c_{\gamma,\delta}(t)$  fonksiyonunu



aşağıdaki ilişkiyi sağlayacak bir  $h = h(c, \mu)$  hatası ile yaklaştırır:

$$\ln \frac{1-h}{h} = 2 + 4kh \quad (2.39)$$

**İspat.**  $\delta = \frac{1}{2k}$  'yi kullanarak  $\delta + h = \frac{1+2kh}{2k}$  yazabiliriz, yani

$$\nu(-\delta - h) = \frac{1}{1 + e^{2(1+2hk)}} \quad (2.40)$$

Kare birim yuvarı (bir tarafı  $h$  olan) kullanan  $H$ -mesafesi  $h$ ,  $\mu(-\delta - h) = h$  ilişkisini sağlar ve (2.39)'ı işaret eder. Bu eşitlik teoremin ispatını tamamlamaktadır. (2.39) ilişkisi,  $H$ -mesafesi  $h$ 'nin eğim  $k, h = h(k)$ 'ye bağlı olduğunu gösterir.

Bir sonraki sonuç, bu bağımlılık ile ilgili ilave bilgiler vermektedir.

$$\frac{1}{4k+1} < h(k) < \frac{\ln(4k+1)}{4k+1} \quad (2.41)$$

**Teorem 2.10**  $H$ -mesafesi  $h(k)$  için,  $k > 5$  durumunda aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir.

**İspat.**  $h$ 'yi (2.39)'ı kullanarak  $k$  cinsinden ifade etmeliyiz. Aşağıdaki fonksiyonu inceleyelim

$$f(h) = 2 + 4hk - \ln(1-h) - \ln(1/h) \quad (2.42)$$

Aşağıdaki denklemden

$$f'(h) = 4k + \frac{1}{1-h} + \frac{1}{h} > 0 \quad (2.43)$$

$f$  fonksiyonunun tam monoton artan fonksiyon olduğu sonucuna varıyoruz.

Aşağıdaki fonksiyonu ele alalım

$$g(h) = 2 + h(1+4k) - \ln \frac{1}{h} \quad (2.44)$$

Bu durumda Taylor açılımı  $\ln(1-h) = -h + O(h^2)$  kullanıldığında

$$g(h) - f(h) = h + \ln(1-h) = O(h^2) \text{ 'dir.}$$

Böylelikle  $g(h), f(h)$ 'yi  $O(h^2)$  olarak  $h \rightarrow 0$  ile yaklaştırır.

Ayrıca  $g'(h) = 1 + 4k + 1/h > 0$  'dır, bu nedenle  $g$  fonksiyonu monoton artandır.

Ayrıca  $k \geq 5$  için,

$$g\left(\frac{1}{1+4k}\right) = 3 - \ln(1+4k) < 0,$$

$$g\left(\frac{\ln(4k+1)}{4k+1}\right) = 2 + \ln(1+4k) > 0.$$

Bu eşitlikler teoremin ispatını tamamlamaktadır.

(2.41)'deki ilişki,  $c$  ve  $\mu$  fonksiyonlarının eğimi  $k$  sonsuza gittiğinde iki fonksiyon arasındaki  $h$ -mesafesi  $h(c, \mu)$  sifira gider (sabit kalan üniform mesafe  $p(c, \mu)$ 'den farklı olarak).

Aşağıdaki önerme,  $h(k)$  için daha kesin üst ve alt sınırlar verir.

Kısaca  $K = 4k + 1$  olarak gösterilir.

**Teorem 2.11**  $H$ -mesafesi  $h$  için,  $k \geq 5$  durumunda aşağıdaki eşitsizlikler geçerlidir:

$$\frac{\ln K}{K} - \frac{2 + \ln \ln K}{K\left(1 + \frac{1}{\ln K}\right)} < h(k)$$

$$< \frac{\ln K}{K} + \frac{2 + \ln \ln K}{K\left(\frac{\ln \ln K}{1 - \ln K} - 1\right)}, \quad (2.45)$$

burada  $K = 4k + 1$ 'dir.

(2.32), (2.33) ve (2.34) teoremleri [3]'ten benzer sonuçlar çıkarır ve Heaviside aralık-değerli adım fonksiyonunun Hausdorff metriğindeki lojistik fonksiyonlar tarafından yeterince rastgele biçimde yaklaşıldığını gösterir.

Heaviside adım fonksiyonunun sigmoid fonksiyonları ile Hausdorff yaklaştırması, [19]'da çeşitli sayısal ve modelleme yönlerinden incelenmektedir.

#### 2.4.5 Kesim fonksiyonunu aktivasyon fonksiyonlarıyla yaklaştırma

Bölüm 2.4.4'te elde edilen sonuçlar, kesim fonksiyonunun lojistik fonksiyonları grubu ile yeterince rastgele biçimde yaklaşılamayacağını göstermektedir.

Bu sonuç, daha iyi yaklaştırma özellikleri olan diğer düz sigmoid fonksiyonu gruplarıyla ilgili çalışmalarını doğrulamaktadır.

Bunlar aşağıda ele alınacak aktivasyon fonksiyonlarıdır.

$\Delta = [\gamma - \delta, \gamma + \delta]$  aralığındaki aktivasyon fonksiyonu  $s_{\Delta}$ , aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$s_{\Delta}^{\beta}(t) = s_{\gamma, \delta}^{\beta}(t) = \frac{1}{2\delta} \ln\left(\frac{1 + e^{\beta(t-\gamma+\delta)}}{1 + e^{\beta(t-\gamma-\delta)}}\right)^{\frac{1}{\beta}} \quad (2.46)$$

Aktivasyon fonksiyonunun (2.46) “merkezi”  $\gamma$ ’de bir bükülmedir ve  $\gamma$ ’deki eğimi  $k$ ’ye eşittir.

Merkezi  $\gamma = \delta$  olan aktivasyon fonksiyonu:

$$s_{\delta, \delta}^{\beta}(t) = \frac{1}{2\delta} \ln\left(\frac{1 + e^{\beta t}}{1 + e^{\beta(t-2\delta)}}\right)^{\frac{1}{\beta}}, \quad (2.47)$$

kesim fonksiyonu (2.33)’ü yaklaştırır.

Dahası,  $c_{\delta, \delta}$  ve  $s_{\delta, \delta}^{\beta}(t)$  fonksiyonları  $\gamma = \delta$  merkezine sahiptir ve kesişen merkezlerinde eğimleri  $1/2\delta$ ’ye eşittir.

Lojistik fonksiyonda olduğu gibi, kesim ile aktivasyon fonksiyonu arasındaki uniform mesafenin  $p = p(c, s)$ ,  $\Delta$  aralığının uç noktalarında, özellikle de orijinde elde edildiği görülebilir.  $\Delta$  aralığının genişliğini  $w = 2\delta$  ile gösterdiğimizde aşağıdaki ifadeyi elde ediyoruz

$$p = s_{\delta, \delta}^{\beta}(0) = \frac{1}{w} \ln\left(\frac{2}{1 + e^{\beta(-w)}}\right)^{\frac{1}{\beta}} < \frac{\ln 2}{w} \cdot \frac{1}{\beta} = \text{const} \frac{1}{\beta}, \quad (2.48)$$

Tahmin, Dombi ve Gera [10] tarafından bulunmuştur.

Bu sonuç, herhangi bir kesim fonksiyonu  $c_{\Delta}$ ’nın (2.46) sınıfından aktivasyon fonksiyonları  $s_{\Delta}^{(\beta)}$  ile yeterince rastgele biçimde yaklaştırılabileceğini gösterir. Yaklaştırma,  $\beta$  parametresinin değeri arttıkça daha başarılı hale gelir. Böylelikle  $\beta$ , yaklaştırmanın kalitesini etkiler; aşağıda göreceğimiz üzere,  $\beta$ ’nin pratikte ilgi çeken değerleri 4’ten büyük olan tam sayılardır. Daha sonra Hausdorff mesafesini kullanarak benzer bir sonucu hedefliyoruz. Burada kesim ve aktivasyon fonksiyonlarının merkezlerini  $\gamma = \delta$  olacak şekilde yeniden düzenleyelim, öyle ki kesim fonksiyonunun formu  $c_{\delta, \delta}$ , yani (2.33); aktivasyon fonksiyonunun formu da (2.47)’de verildiği gibi  $s_{\delta, \delta}^{\beta}$  şeklinde olsun. Hem  $c_{\delta, \delta}$  hem de  $s_{\delta, \delta}^{\beta}$  fonksiyonlarının merkezleri  $\delta$ ’daki eğimleri  $\frac{1}{w}$ ,  $w = 2\delta$  eşittir.

$c_{\delta,\delta}$  ile  $s_{\delta,\delta}^\beta$  arasındaki kare bazlı  $H$ -mesafesini  $d = d(w; \beta)$  şeklinde gösterdiğimizde aşağıdaki ilişkiye ulaşıyoruz:

$$s_{\delta,\delta}^\beta(w+d) = \frac{1}{w} \ln \left( \frac{1+e^{\beta(w+d)}}{1+e^{\beta d}} \right)^{\frac{1}{\beta}} = 1-d$$

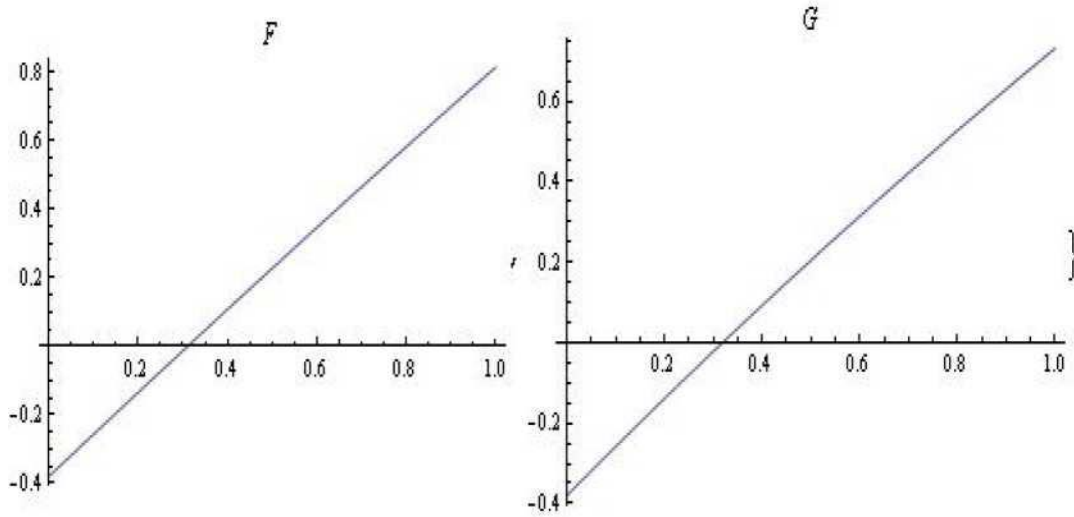
veya

$$\ln \left( \frac{1+e^{\beta(w+d)}}{1+e^{\beta d}} \right) = \beta w(1-d) \quad (2.49)$$

Aşağıdaki teorem, (2.49)'da dolaylı olarak anlatıldığı şekilde,  $d = d(w; \beta)$  için bir üst sınır verir.

**Teorem 2.12**  $d$  mesafesi için,  $\beta \geq 5$  durumunda aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:

$$d < \ln 2 \frac{\ln(4\beta w + 1)}{4\beta w + 1}. \quad (2.50)$$



**Şekil 2.15**  $F(d)$  ve  $G(d)$  fonksiyonları

**İspat.** Aşağıdaki fonksiyonu inceleyelim.

$$F(d) = -\beta\omega(1-d) + \ln(1+e^{\beta(\omega+d)}) + \ln \frac{1}{1+e^{\beta d}}. \quad (2.51)$$

$F'(d) > 0$  'dan  $F(d)$  fonksiyonunun tam monoton artan fonksiyon olduğu sonucuna varıyoruz.

Aşağıdaki fonksiyonu tanımlayalım:

$$G(d) = -\beta\omega + \ln(1+e^{\beta\omega}) + d\beta \left( \omega + \frac{e^{\beta\omega}}{1+e^{\beta\omega}} \right) + \ln \frac{1}{1+e^{\beta d}}. \quad (2.52)$$

$G(d) - F(d)$  'yi inceleyelim:

$$G(d) - F(d) = \ln(1 + e^{\beta\omega}) + \left( \frac{e^{\beta\omega} \beta d}{1 + e^{\beta\omega}} \right) - \ln(1 + e^{\beta(\omega+d)}).$$

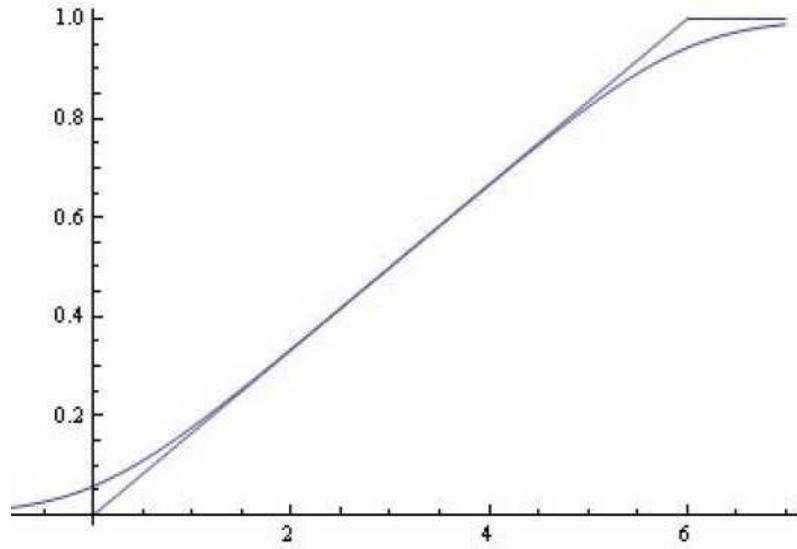
Taylor açılımından:

$$\ln(1 + e^{\beta(\omega+d)}) = \ln(1 + e^{\beta\omega}) + \left( \frac{e^{\beta\omega} \beta d}{1 + e^{\beta\omega}} \right) + O(d^2)$$

$G(d)$  fonksiyonunun  $F(d)$  'yi  $O(d^2)$  gibi  $d \rightarrow 0$  ile yaklaştırdığını görüyoruz

(bkz. Şekil 2.16.). Ayrıca  $\beta \geq 5$  için  $G(0) < 0$  ve  $G(\ln 2 \cdot \frac{\ln(4\beta\omega + 1)}{4\beta\omega + 1}) > 0$  'dır.

Bu ifadeler teoremin ispatını tamamlamaktadır.



Şekil 2.16  $\beta = 2, \omega = 6$  ;  $d = 0.0534283$  için  $c_{\delta, \delta}$  ve  $s_{\delta, \delta}^{\beta}$  fonksiyonları

## 2.5 Log-lojistik ve dönüştürülmüş log-lojistik fonksiyonları

Adım fonksiyonunun biyolojik uygulamalarda ortaya çıkan sigmoid log-lojistik ve dönüştürülmüş log-lojistik fonksiyonları ile Hausdorff yaklaştırması ele alınmakta ve Hausdorff mesafesi için kesin üst ve alt sınırlar elde edilmektedir. Sonuçlarımızı sergileyen sayısal örnekler de verilmektedir. Log-lojistik dağılımı, biyo-istatistik, popülasyon dinamiği, tıbbi araştırma [7] ve ekonomi gibi alanlardaki modellemelerde kullanılmaktadır. Log-lojistik dağılımı Fisk dağılımı olarak da bilinmektedir.

Tanım.  $b, c > 0$  için aşağıdaki şekilde tanımlanan kümülatif dağılım fonksiyonu:

$$f(t; a, b, c) = \frac{1}{1 + \left(\frac{t-a}{b}\right)^{-c}}. \quad (2.53)$$

**Özel durum.**

$b = -a$  için özel log-lojistik fonksiyonunu elde ediyoruz:

$$f(t; a, b = -a, c) = \frac{1}{1 + \left(\frac{t-a}{-a}\right)^{-c}}. \quad (2.54)$$

burada,

$$f(0; a, -a, c) = \frac{1}{2}. \text{ 'dir.}$$

Fisk fonksiyonu, veya log-lojistik fonksiyonu, P. Fisk [11] tarafından ortaya atılmıştır.

Shaw ve ark. [27], Gupta ve ark. [15], log-lojistik fonksiyonunu genelleştiren bir model üzerinde çalışmaktadır [4].

Genelleştirilen log-lojistik modeli için kümülatif dağılım fonksiyonu  $H(t; a, b, c, \lambda)$ ,  $b, c > 0, -1 < \lambda < 1$  için aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$H(t; a, b, c, \lambda) = \frac{1 + \lambda}{1 + \left(\frac{t-a}{b}\right)^{-c}} - \frac{\lambda}{\left(1 + \left(\frac{t-a}{b}\right)^{-c}\right)^2} \quad (2.55)$$

Aşağıdaki özel durumu inceliyoruz:

$$H(0; a, b, c, \lambda) = \frac{1}{2} = \frac{1 + \lambda}{1 + \left(\frac{-a}{b}\right)^{-c}} - \frac{\lambda}{\left(1 + \left(\frac{-a}{b}\right)^{-c}\right)^2}, \quad (2.56)$$

$0 < \lambda < 1$ .

$$u = \frac{1}{1 + \left(\frac{-a}{b}\right)^{-c}} \quad (2.57)$$

olsun. (2.56)'dan aşağıdakileri elde ediyoruz:

$$\lambda u^2 - (1 + \lambda)u + \frac{1}{2} = 0, \quad u_{1,2} = \frac{1 + \lambda \pm \sqrt{1 + \lambda^2}}{2\lambda}$$

$u = \frac{1 + \lambda - \sqrt{1 + \lambda^2}}{2\lambda}$ , nın çözüümüyle ilgileniyoruz.

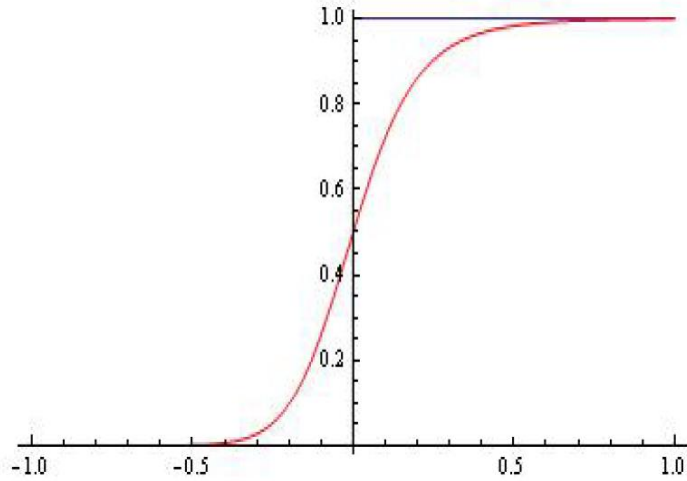
### Özel durum.

$b, c > 0, 0 < \lambda < 1$  için özel transmute log-lojistik fonksiyonu aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$H(t; a, b, c, \lambda) = \frac{1 + \lambda}{1 + \left(\frac{t-a}{b}\right)^{-c}} - \frac{\lambda}{\left(1 + \left(\frac{t-a}{b}\right)^{-c}\right)^2},$$

$$\frac{1}{1 + \left(\frac{-a}{b}\right)^{-c}} = \frac{1 + \lambda - \sqrt{1 + \lambda^2}}{2\lambda} \quad (2.58)$$

$$H(0; a, b, c, \lambda) = \frac{1}{2}$$



Şekil 2. 17  $a = -1, c = 10; H$  -mesafesi  $d = 0.1709984$  olan log-lojistik fonksiyonu

### 2.5.1 Adım fonksiyonunu log-lojistik fonksiyonuyla yaklaştırma

Heaviside adım fonksiyonu  $h_0(t)$ 'nin (2.55) formundaki sigmoid log-lojistik fonksiyonlarıyla Hausdorff yaklaştırmasını [26] inceliyor ve en iyi yaklaştırmanın hatası için bir ifade buluyoruz.

Heaviside adım fonksiyonu  $h_0(t)$  ile sigmod log-lojistik fonksiyonu  $f(0; a, -a, c)$  arasındaki Hausdorff mesafesi  $d = d(a, c)$  bu ilişkiyi sağlar:

$$f(d; a, -a, c) = \frac{1}{1 + \left(\frac{d-a}{-a}\right)^{-c}} = 1-d \quad (2.59)$$

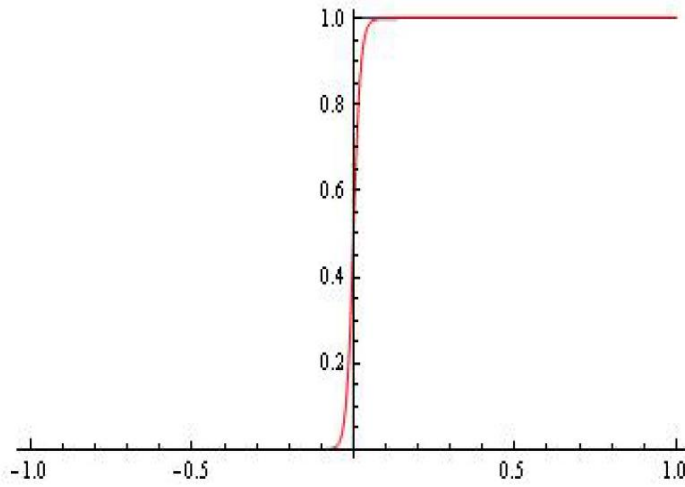
veya

$$\ln \frac{1-d}{d} - c \ln \left(1 - \frac{d}{a}\right) = 0 \quad (2.60)$$

Aşağıdaki Teorem  $d(a, c)$  için üst ve alt sınırları vermektedir.

**Teorem 2.13** Heaviside adım fonksiyonu  $h_0$  ile sigmoid log-lojistik fonksiyonu (2.54) arasındaki Hausdorff mesafesi, her gerçel  $-\frac{c}{a} \geq 2$  için  $a < 0$  ve  $c > 0$  parametreleri cinsinden aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$\frac{1}{1 - \frac{c}{a}} < d < \frac{\ln \left(1 - \frac{c}{a}\right)}{1 - \frac{c}{a}}. \quad (2.61)$$



**Şekil 2. 18**  $a = -1, c = 9$ ;  $H$  -mesafesi  $d = 0.06935$  olan log-lojistik fonksiyonu

**İspat.** Aşağıdaki fonksiyonu inceleyelim:

$$\begin{aligned} F(d) &= c \ln \left(1 - \frac{d}{a}\right) - \ln \frac{1-d}{d} \\ &= c \ln \left(1 - \frac{d}{a}\right) - \ln(1-d) - \ln \frac{1}{d} \end{aligned} \quad (2.62)$$

$$F'(d) = -\frac{c}{a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{d}{a}} + \frac{1}{1-d} + \frac{1}{d} > 0 \quad (2.63)$$



buradan,  $F$  fonksiyonunun tam monoton artan fonksiyon olduğu sonucuna varılmaktadır.

Aşağıdaki fonksiyonu ele alalım:

$$G(d) = \left(1 - \frac{c}{a}\right)d - \ln \frac{1}{d} \quad (2.64)$$

Taylor açılımından:

$$\left(1 - \frac{c}{a}\right)d - c \ln \left(1 - \frac{d}{a}\right) + \ln(1-d) = O(d^2)$$

$$G(d) - F(d) = \left(1 - \frac{c}{a}\right)d - c \ln \left(1 - \frac{d}{a}\right) + \ln(1-d) = O(d^2)$$

elde ediyoruz.

Böylelikle  $G(d)$ ,  $F(d)$ 'ye  $d \rightarrow 0, O(d^2)$  ile yaklaşır. Ayrıca;

$$G'(d) = 1 - \frac{c}{a} + \frac{1}{d} > 0.$$

Ek olarak  $-\frac{c}{a} \geq 2$  için elimizde aşağıdaki eşitlikler var:

$$G\left(\frac{1}{1 - \frac{c}{a}}\right) = 1 - \ln\left(1 - \frac{c}{a}\right) < 0,$$

$$G\left(\frac{\ln\left(1 - \frac{c}{a}\right)}{1 - \frac{c}{a}}\right) = \ln \ln\left(1 - \frac{c}{a}\right) > 0.$$

Bu eşitlikler teoremin ispatını tamamlamaktadır.

Çizelge 2.4'te çeşitli  $a$  ve  $c$  değerleri için ilişki (2.60)'yi kullanan bazı sayısal örnekler sunulmaktadır.

**Çizelge 2.4** (2.60) ile çeşitli  $a$  ve  $c$  değerleri için hesaplanan sınırlar.

$a$	$c$	$d(a, c)$
-1	1	0.1709984
-1	90	0.0369065
-2	10	0.241953
-2	100	0.0569386
-3	100	0.0759188
-3	500	0.0226684

Kesin sınırları ispatlıyoruz. Teorem 2.13'deki notasyonları kullanarak aşağıdaki eşitsizliği veriyoruz.

**Teorem 2.14 .**  $a, b, s, d \in R$  için

$$G'(d) = 1 - \frac{c}{a} + \frac{1}{d} > 0. \quad (2.65)$$

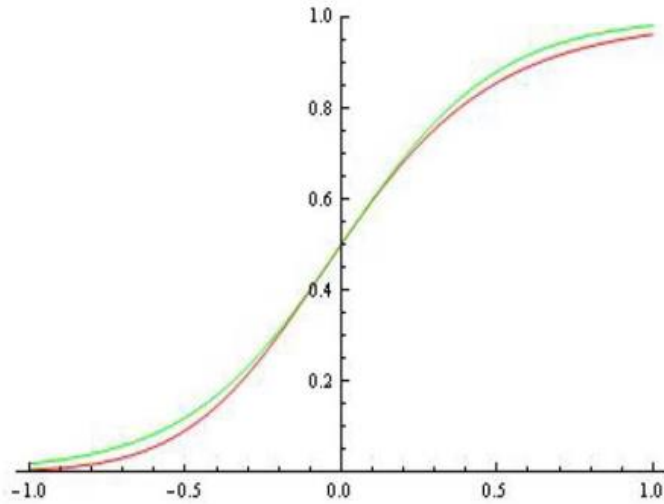
**İspat.** Buradan açıkça görülüyor ki  $G(d)$  'nin ikinci türevinin:

$$\begin{aligned} & \frac{\ln(1-\frac{c}{a})}{1-\frac{c}{a}} - \frac{\ln \ln(1-\frac{c}{a})}{(1-\frac{c}{a})(1+\frac{1}{\ln(1-\frac{c}{a})})} < d \\ & < \frac{\ln(1-\frac{c}{a})}{1-\frac{c}{a}} + \frac{\ln \ln(1-\frac{c}{a})}{(1-\frac{c}{a})(\frac{\ln \ln(1-\frac{c}{a})}{1-\ln(1-\frac{c}{a})} - 1)} \\ & \left[ \frac{1}{1-\frac{c}{a}}, \frac{\ln(1-\frac{c}{a})}{1-\frac{c}{a}} \right] \end{aligned}$$

üzerinde sabit bir işareti vardır.

$$\left( \frac{1}{1-\frac{c}{a}}, G\left(\frac{1}{1-\frac{c}{a}}\right) \right) \text{ ve } \left( \frac{\ln(1-\frac{c}{a})}{1-\frac{c}{a}}, G\left(\frac{\ln(1-\frac{c}{a})}{1-\frac{c}{a}}\right) \right)$$

noktalarıyla tanımlanan düz çizgidir.



**Şekil 2.19** Log-lojistik fonksiyonunun  $a = -2, b = -a, c = 8$ , ve  $k = -\frac{c}{a} = 4$  için Verhulst lojistik fonksiyonuyla karşılaştırılması

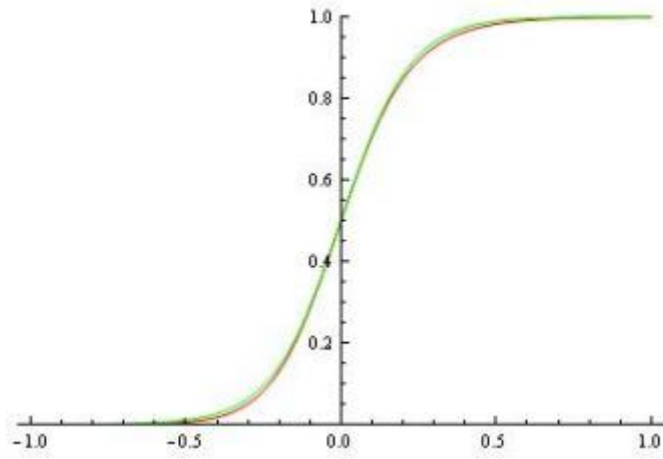
$$\left[ \frac{\ln\left(1-\frac{c}{a}\right)}{1-\frac{c}{a}}, G\left(\frac{\ln\left(1-\frac{c}{a}\right)}{1-\frac{c}{a}}\right) \right]$$

noktasında  $G(d)$ 'nin tanjantı sırasıyla aşağıdaki noktalarda apsisi keser.

$$\frac{\ln\left(1-\frac{c}{a}\right)}{1-\frac{c}{a}} + \frac{\ln \ln\left(1-\frac{c}{a}\right)}{\left(1-\frac{c}{a}\right)\left(\frac{\ln \ln\left(1-\frac{c}{a}\right)}{1-\ln\left(1-\frac{c}{a}\right)}-1\right)},$$

$$\frac{\ln\left(1-\frac{c}{a}\right)}{1-\frac{c}{a}} - \frac{\ln \ln\left(1-\frac{c}{a}\right)}{\left(1-\frac{c}{a}\right)\left(1+\frac{1}{1+\ln\left(1-\frac{c}{a}\right)}\right)},$$

Bu ifade teoremin ispatını tamamlamaktadır.



**Şekil 2.20** Log-lojistik fonksiyonunun (2.54),  $a = -2, b = -a, c = 18$  ve  $k = -\frac{c}{a} = 9$  için Verhulst lojistik fonksiyonuyla karşılaştırılması.

### 2.5.2 $h_0(t)$ 'yi dönüştürülmüş log-lojistik fonksiyonu ile yaklaştırma

Heaviside adım fonksiyonu  $h_0(t)$  ile (2.58) formundaki Dönüştürülmüş sigmoid log-lojistik fonksiyonları arasındaki Hausdorff mesafesini inceliyor ve en iyi yaklaştırmanın hatası için bir ifade buluyoruz.

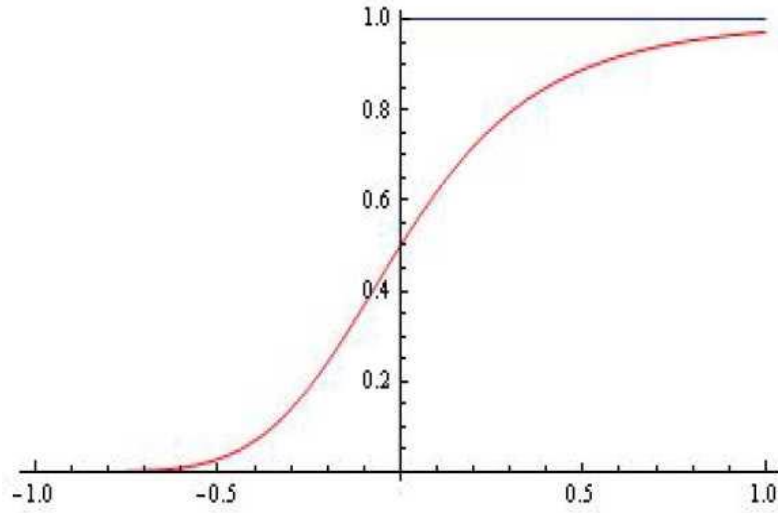
$$\begin{aligned}
H(d; a, b, c, \lambda) &= 1 - d \\
&= \frac{1 + \lambda}{1 + \left(\frac{d - a}{b}\right)^{-c}} - \frac{\lambda}{\left(1 + \left(\frac{d - a}{b}\right)^{-c}\right)^2},
\end{aligned} \tag{2.66}$$

veya

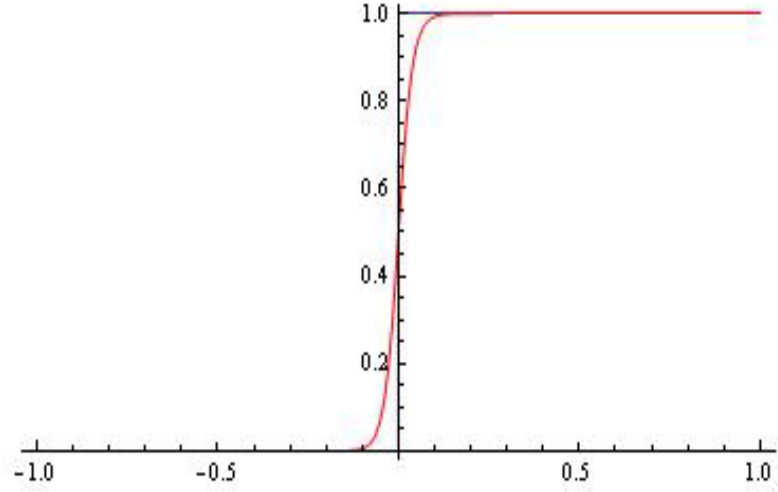
$$\frac{1 + \lambda}{1 + \left(\frac{d - a}{b}\right)^{-c}} - \frac{\lambda}{\left(1 + \left(\frac{d - a}{b}\right)^{-c}\right)^2} - 1 + d = 0 \tag{2.67}$$

(2.58)'den aşağıdaki eşitliği buluyoruz.

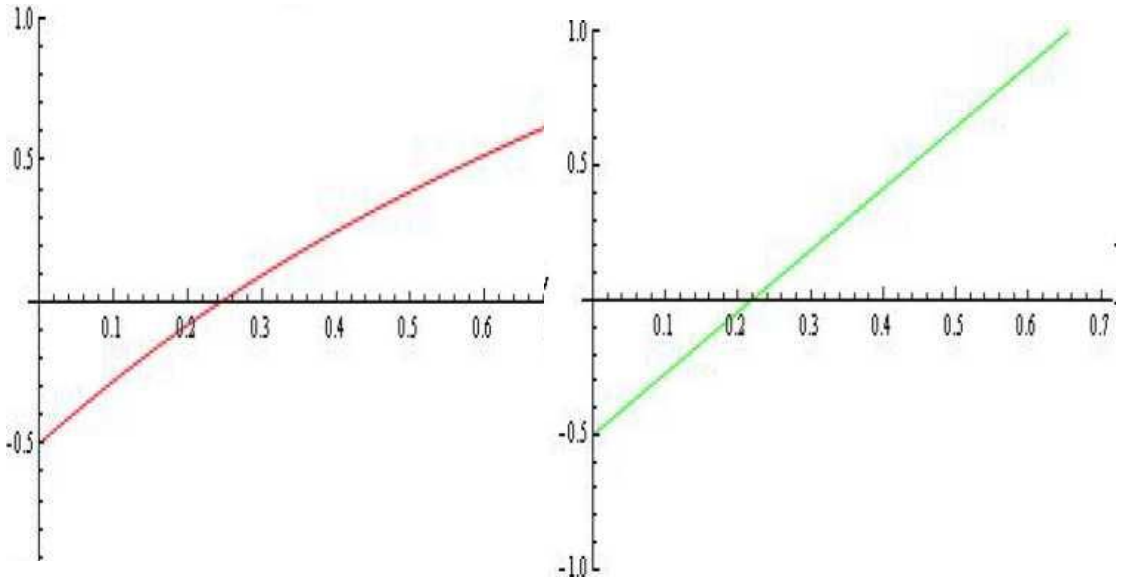
$$c = \frac{\ln \frac{1 + \lambda - \sqrt{1 + \lambda^2}}{\lambda - 1 + \sqrt{1 + \lambda^2}}}{\ln \left(-\frac{a}{b}\right)} \tag{2.68}$$



**Şekil 2.21**  $a = -1, h = 1.05, b = -ah, \lambda = 0.25, c = 5.07206$ ;  $H$  -mesafesi  $d = 0.244635$  olan Dönüştürülmüş log-lojistik fonksiyonu



**Şekil 2.22**  $a = -1, h = 1.01, b = -ah, \lambda = 0.5, c = 48.3614; H$  - mesafesi  $d = 0.0563904$  Dönüştürülmüş log-lojistik fonksiyonu



**Şekil 2.23** Fonksiyonlar  $F(d, a, b, c, \lambda)$  ve  $G(d, a, b, c, \lambda)$

Çizelge 2.5'te çeşitli  $a, k, b = -ah, \lambda$  ve  $c$  değerleri için (2.67) bağlantısını kullanan bazı sayısal örnekler sunulmaktadır.

**Çizelge 2.5** (2.67) ile çeşitli  $a, k, b = -ah, \lambda$  ve  $c$  değerleri için

$a$	$k$	$b = ah$	$\lambda$	$c$	$d$
-1	1.01	1.01	0.25	24.8702	0.0940255
-1	1.01	1.01	0.5	48.3614	0.0563904
-1	1.05	1.05	0.25	5.07206	0.244635
-0.8	1.05	0.84	0.75	14.2067	0.108187
-2	1.001	2.002	0.5	481.452	0.0162858
-3	1.0001	3.0003	0.75	6931.82	0.00233178
-4	1.00001	4.00004	0.9	80887.1	0.000324614

**Teorem 2.15** Heaviside adım fonksiyonu  $h_0(t)$  ile Dönüştürülmüş log-lojistik fonksiyonu (2.58) arasındaki Hausdorff mesafesi  $d$  için aşağıdaki alt sınır geçerlidir

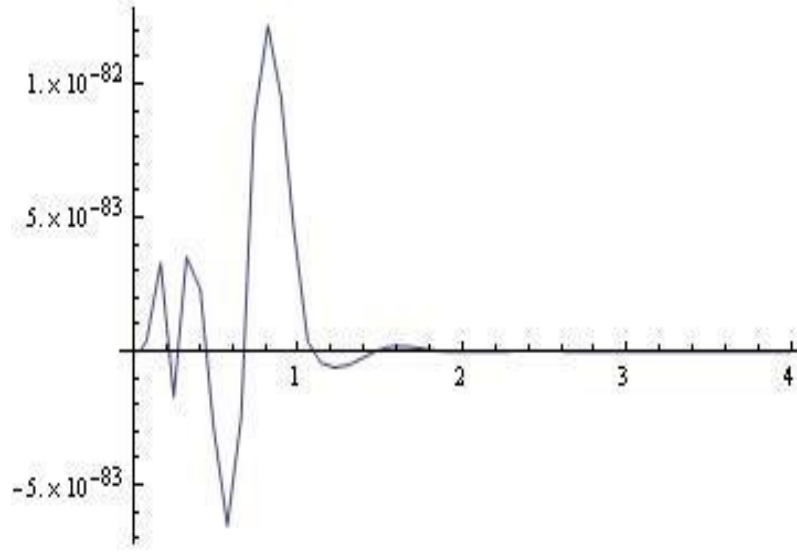
$$\frac{t_1}{t_2} < d \quad (2.69)$$

Burada,

$$t_1 = \frac{1 + \left(-\frac{a}{b}\right)^c (1 - \lambda)}{\left(1 + \left(-\frac{a}{b}\right)^c\right)^2} \quad t_2 = 1 - \frac{2\left(-\frac{a}{b}\right)^{-1-c} c \lambda}{\left(1 + \left(-\frac{a}{b}\right)^{-c}\right)^3 b} + \frac{\left(-\frac{a}{b}\right)^{-1-c} c (1 + \lambda)}{\left(1 + \left(-\frac{a}{b}\right)^{-c}\right)^2 b} \quad \text{'dir.}$$

### 3. SONUÇ VE ÖNERİLER

$H$  -sürekli adım fonksiyonları ve pürüzsüz sigmoid fonksiyonları, biyolojik dinamik süreçleri, özellikle de neredeyse adım adım gelişen belirli enzim kinetiğini ve popülasyon büyüme süreçlerini modellemek için kullanılır [21].



Şekil 2.24 Çözümü  $kr > 30$  için başarısız olur.

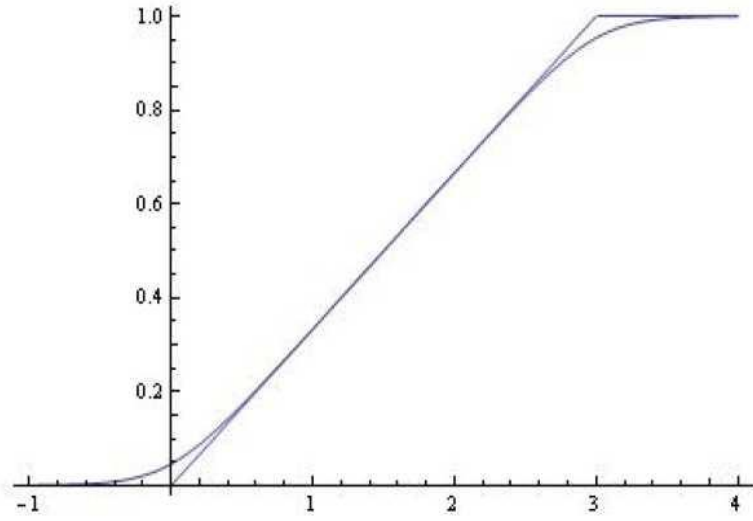
Bu tür işlemler genellikle pürüzsüz sigmoid fonksiyonlarla (özellikle sınır ağları teorisinde) açıklanır veya yaklaşık olarak tahmin edilir, ancak  $H$  -sürekli adım adım fonksiyonlar da uygun bir şekilde kullanılabilir.

Biyolojik süreçler genellikle çok hassastır ve aralık analizi [20] çerçevesinde etkili bir şekilde incelenebilir. Verhulst modeli, çözüm olarak basit bir lojistik sigmoid fonksiyonunu içeren önemli bir klasik örnektir. Bu modelin, belirli üreme biyokimyasal mekanizmalarını tanımlayan basit otokatalitik reaksiyonlarla başlatıldığı gösterildi.

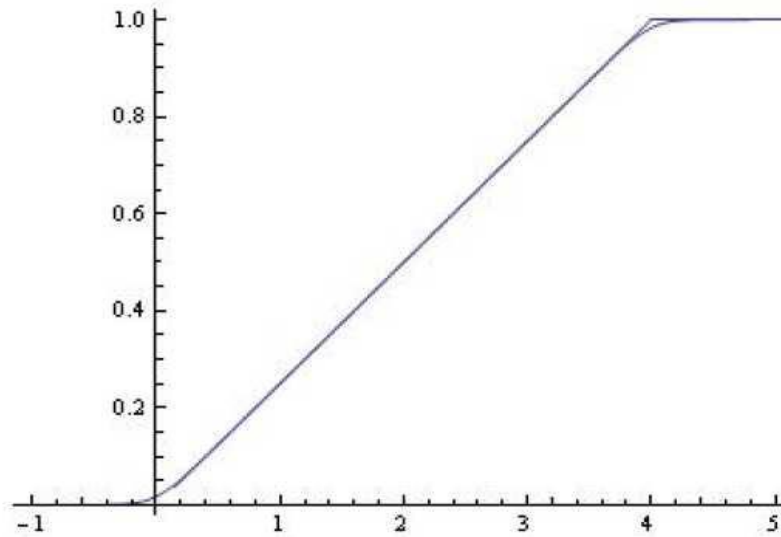
Bir dizi hesaplama örneğinde, lojistik fonksiyonun Heaviside adım fonksiyonuna yaklaşmak için uygulanabilirliğini ve sonuç olarak popülasyon dinamikleri ile ilgili zaman dersi deneysel verilerinin uydurulmasında kullanılabileceği gösterildi. Bilinen iki sigmoid fonksiyonu sınıfıyla (bunlar lojistik ve aktivasyon fonksiyonu gruplarıdır) ilgili çeşitli sayısal, modelleme ve yaklaştırma konularından bahsedildi.

Her iki sınıfın yaşam bilimlerinin çeşitli alanlarında birçok uygulaması bulunmaktadır [21,23,19].

Kesim fonksiyonlarının lojistik fonksiyonlarıyla üniform ve Hausdorff yaklaşımları incelenmiştir. Bir kesim fonksiyonu ile ilgili lojistik fonksiyonu arasındaki en iyi üniform yaklaşımın,  $k$  eğimine bağlı olmayan bir mutlak sabit değer olduğu gösterildi..



Şekil 2.25  $\beta = 5, \omega = 3; d = 0.03989$



Şekil 2.26  $\beta = 10, \omega = 4; d = 0.0154697$  için  $c_{\delta, \delta}$  ve  $s_{\delta, \delta}^{(\beta)}$  fonksiyonları



Diğer yandan Hausdorff mesafesinin ( $H$  -mesafesi) eğim  $k$ 'ye bağlı ve  $k \rightarrow \infty$  iken sıfır olma eğiliminde olduğunu gösterildi. Ayrıca kesim fonksiyonunun Hausdorff bakımından adım fonksiyonuna gittiği durumdaki sınırlama durumundan da bahsedildi. Kesim fonksiyonunun aktivasyon fonksiyonu grubuyla yaklaştırılmasından da bahsedildi. Bir kesim fonksiyonu ile bu fonksiyonun en iyi yaklaştıran aktivasyon fonksiyonu arasındaki  $H$  -mesafesi için yeni bir tahmin getiriyoruz. Tahminimiz bilinen bir sonucu genişletildi ve kesim fonksiyonunun aktivasyon fonksiyonlarıyla [10] yeterince rastgele yaklaştırılabildiği gösterildi.

Daha sonra tahminimiz, adım fonksiyonunun sınırlama durumunu kapsayacak şekilde genişletildi.  $H$  -sürekli fonksiyonlarla ilgili temel sonuçlar ve bunların Gerçek Analiz, Yaklaşım Teorisi, Küme Değerli Analiz ve Bulanık Kümeler ve Sistemler gibi soyut alanlardaki problemlere uygulanması için tavsiye edilir [2,9,12].

#### 4. KAYNAKLAR

- [1] Albano, G., V. Giono. (2009). On the first exit time problem for a Gompertz-type tumor growth. *Lecture Notes in Computer Science* 5717, 113–120.
- [2] Anguelov, R., S. Markov, B. Sendov. (2006). The Set of Hausdorff Continuous Functions. *The Largest Linear Space of Interval Functions Reliable Computing*, 12, 337–363.
- [3] Anguelov, R., S. Markov. (2015). Hausdorff Continuous Interval Functions and Approximations. *Mathematics and Computers in Simulation*.
- [4] Aryal, G. (2013). Transmuted Log–logistic Distribution. *J. of Statistics Applications and Probability*, 2 (1), 11–20.
- [5] Basheer, I. A., M. Hajmeer. (2013). Artificial neural networks: fundamentals, computing, design, and application. *Journal of Microbiological Methods* 43, 3–31.
- [6] Chumerina, E. S. (2009). Choice of optimal strategy of tumor chemotherapy in Gompertz model. *J. Comp. and Syst. Sci. Int.* 48 (2), 325–331.
- [7] Collett, D. (2003). *Modelling Survival Data in Medical Research*, (2nd. ed.), CRC press, ISBN 1-58488-325-1.
- [8] Costarelli, D., R. Spigler. (2013). Approximation results for neural network operators activated by sigmoidal functions. *Neural Networks* 44, 101–106.
- [9] Dombi, J. (1990). Membership function as an evaluation. *Fuzzy Sets and Systems*, 35, 1–21.
- [10] Dombi J., Z. Gera. (2005). The approximation of piecewise linear membership functions and Likasiewicz operators, *Fuzzy Sets and Systems*, 154, 275–286.
- [11] Fisk, P. R. (1961). The Graduation of Income Distribution, *Econometrica*, 29 (2), 171–185.
- [12] Gera, Zs., J. Dombi. (2005). Genetic Algorithm with Gradient Based Tuning for Constructing Fuzzy Rules, Proc. of the 6th Intern. *Symposium of Hungarian Researchers on Computational Intelligence*, Budapest,
- [13] Glover, Ian, *The Approximation of Continuous Functions by Multilayer Perceptrons*.
- [14] Gompertz, B., *On the nature of the function expressive of the law of human mortality, and on a new mode of determining the value of the life contingencies*. Philos. Trans. R. Soc. London, 115, 1825, 513–585.
- [15] Gupta, R. C., O. Acman, S. Lvin. (1999). A study of log–logistic model in survival analysis, *Biometrica Journal*. 41 (4), 431–443.
- [16] Hausdorff, F. (1962). *Set theory (2 ed.)*, New York, Chelsea Publ.,
- [17] Kramer, W., J. Wolff v. Gudenberg. (2001). *Scientific Computing. Validated Numerics, Interval Methods*.
- [18] Kyurkchiev N., S. Markov. (2015) On the Hausdorff distance between the Heaviside step function and Verhulst logistic function, *J. of Math. Chemistry*.

- [19] Kyurkchiev N., S. Markov. (2014). Sigmoidal Functions: some Computational and Modelling Aspects, *Biomath Communications* 1 (2), 19 pp
- [20] Markov, S.( 2010). Biomathematics and Interval Analysis: A Prosperous Marriage, in: Christov, Ch. and Todorov, M. D. (eds), Proc. of the 2nd Intern. Conf. on Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences (AMiTaNS'10), AIP Conf. Proc. 1301, 26–36.
- [21] Markov, S.( (2013). Cell Growth Models Using Reaction Schemes: *Batch Cultivation*, *Biomath* 2/2, 1312301
- [22] Murray J. D.(2002). *Mathematical Biology: I. An Introduction, Third Edition*, Springer.
- [23] Radchenkova, N., M. Kambourova, S. Vassilev, R. Alt, S. Markov. *On the Mathematical Modelling of EPS Production by a Thermophilic Bacterium*, *Biomath* 4 (2014), 1407121.
- [24] Rosenblat F.(1958). The Perceptron: A Probabilistic Model for Information Storage and Organization in the Brain. *Cornell Aeronautical Laboratory, Psychological Review*, 65 (6), 386–408.
- [25] Sendov Bl., V. Popov.( 1972). The exact asymptotic behavior of the best approximation by algebraic and trigonometric polynomials in the Hausdorff metric, *Mat. Sb. (N.S.)*, 89, 138–147.
- [26] Sendov, B.( 1990). *Hausdorff Approximations*, Kluwer, Boston,.
- [27] Shaw, W., I. Buckley. (2007). The alchemy of probability distributions. *Beyond Gram-Charlier expansion and a skew-kurtotic-normal distribution from rank transmutation map*, Research report.
- [28] Van der Walt, J. H. (2013). The Linear Space of Hausdorff Continuous Interval Functions. *Biomath* 2.
- [29] Verhulst, P.-F. (1847). Deuxieme memoire sur la loi d'accroissement de la population. *Memoires de l'Academie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique* 20: 1–32
- [30] Verhulst, P.-F. (1838). Notice sur la loi que la population poursuit dans son accroissement. *Correspondance mathematique et physique* 10: 113–121.
- [31] Viori, K., I. Strandén, M. L. Sevon Aimonen, E. A. Mantysaari. (2006). Estimation of nonlinear growth models by linearization. *A simulation study using a Gompertz function*, *Genet. Sel. Evol.*, 343–358.

## ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler	
Adı Soyadı	Ferhan ÇETİN
Doğum Yeri	
Doğum Tarihi	
Uyruğu	<input checked="" type="checkbox"/> T.C. <input type="checkbox"/> Diğer:
Telefon	
E-Posta Adresi	
Eğitim Bilgileri	
Lisans	
Üniversite	Orta Doğu Teknik Üniversitesi
Fakülte	Eğitim Fakültesi
Bölümü	İlköğretim Matematik Öğretmenliği
Mezuniyet Yılı	11.06.2018