



T. C.

ORDU ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SUCCESSOR EĞRİLERİ VE EŞ UZAKLIKLI REGLE
YÜZEYLERİ

KÜBRA AKDAĞ

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

ORDU 2023

TEZ BİLDİRİMİ

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan ve kullanılan intihal tespit programının sonuçlarına göre; bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

KÜBRA AKDAĞ

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

SUCCESSOR EĞRİLERİ VE EŞ UZAKLIKLI REGLE YÜZEYLERİ

KÜBRA AKDAĞ

ORDU ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DOKTORA TEZİ, 70 SAYFA

(TEZ DANIŞMANI: DR. ÖĞR. ÜYESİ SÜLEYMAN ŞENYURT)

Bu çalışma dört kısımdan oluşmaktadır. Giriş bölümünde diferensiyel geometrinin tarihinden, tezin içeriğine yön veren kaynaklardan bahsedildi ve bu konunun ele alınma nedeni anlatıldı. Genel bilgiler bölümünde çalışmamız boyunca kullanılacak olan Öklid uzayı ve Öklid uzayında regle yüzeyler hakkındaki temel bilgilere değinildi. Materyal ve yöntem bölümünde ise Öklid uzayında eş uzaklıklı regle yüzeylerin bazı karakteristik özellikleri verildi ve successor eğrisi anlatıldı.

Araştırma bulguları bölümünde p – eş uzaklıklı regle yüzeyler oluşturan iki eğrinin, successor eğrilerinin oluşturduğu eş uzaklıklı regle yüzeyler tanımlanmıştır. Successor eş uzaklıklı regle yüzeyler olarak tanımlanan bu yüzeylerin striksiyon çizgileri arasındaki bağıntılar bulundu. Daha sonra bu yüzeylerin kapalı olması durumunda integral invaryantları arasındaki ilişkiler hesaplandı. Ayrıca bu yüzeylerin şekil operatörü, Gauss eğriliği ve ortalama eğriliği hesaplanmıştır. Son olarak bir örnek verilerek, Maple programı ile çizimleri yapılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Eş Uzaklıklı Regle Yüzey, Gauss Eğriliği, Successor Eğrisi, Weingarten Dönüşümü.

ABSTRACT

SUCCESSOR CURVES AND EQUIDISTANT RULED SURFACE

KÜBRA AKDAĞ

ORDU UNIVERSITY INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED
SCIENCES

MATHEMATICS

PHD THESIS, 70 PAGES

(SUPERVISOR: ASST. PROF. DR. SÜLEYMAN ŞENYURT)

This study consists of four parts. In the introduction part, the history of differential geometry, the sources that shape the content of the thesis are mentioned and the reason for dealing with this subject is explained. In the general information section, the basic concepts of Euclidean space and ruled surfaces in Euclidean space, which will be used throughout our study, are given. In the material and method section, some characteristic features of equidistant ruled surfaces in Euclidean space are given and the successor curve is explained.

In the research findings section, equidistant ruled surfaces formed by the successor curves of two curves forming p -equidistant ruled surfaces are defined. The relations between the the striction lines of these surfaces defined as successor equidistant ruled surfaces have been found. Then, the relationships between integral invariants were calculated if these surfaces were closed. In addition, the shape operator, Gaussian curvature and mean curvature of these surfaces were calculated. Finally, an example was given and drawings were made with the Maple program.

Keywords: Equidistant Ruled Surface, Gaussian Curvature, Successor Curve,
Weingarten Transformation.

TEŞEKKÜR

Bu tez çalıőmasının tım aőamalarında yol gőstericim olan, engin bilgilerini paylaőan danıőman hocam Sayın Dr. Öğr. Üyesi Süleyman Şenyurt'a en içten teőekkürlerimi sunarım. Ordu Üniversitesi matematik bölümü akademik personellerine de katkılarından dolayı teşekkür ederim.

Bu tezin oluşmasında değerli düşüncelerini esirgemeyerek destek olan Ondokuz Mayıs Üniversitesi hocaları Sayın Prof. Dr. Ayhan Tutar ve Sayın Prof. Dr. Ayhan Sarioęlugil'e saygılarımı sunar ve teşekkür ederim.

Doktora eğitimim boyunca yanımda olan, birlikte öğrencilik yaptığım arkadaşım Gülőah Uzun'a teşekkür ederim.

Çocukluęumdan bugüne kadar gelmemde emekleri çok olan annem Saniye Akdağ'a ve babam Rıfat Akdağ'a tım kalbimle teşekkür ederim. Bu süreçte beni destekleyen ve cesaretlendiren kardeşim Talha Akdağ, ablam Esra Anaforoęlu, eői Bekir Anaforoęlu ve yeğenim Yağız Anaforoęlu'na teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
TEZ BİLDİRİMİ	I
ÖZET	II
ABSTRACT	III
TEŞEKKÜR	IV
İÇİNDEKİLER	V
ŞEKİL LİSTESİ	VI
SİMGELER ve KISALTMALAR LİSTESİ	VII
1. GİRİŞ	1
2. GENEL BİLGİLER	4
2.1 Öklid Uzayı.....	4
2.2 Öklid Uzayında Regle Yüzeyler.....	8
3. MATERYAL ve YÖNTEM	12
3.1 p-Eş Uzaklıklı Regle Yüzeyler.....	12
3.2 z-Eş Uzaklıklı Regle Yüzeyler.....	14
3.3 q-Eş Uzaklıklı Regle Yüzeyler.....	16
3.4 Successor Eğrisi.....	17
4. ARAŞTIRMA BULGULARI	20
4.1 Successor Eş Uzaklıklı Regle Yüzeyler.....	20
4.2 Kapalı Successor Eş Uzaklıklı Regle Yüzeylerin İntegral İnvaryantları.....	33
4.3 Successor Eş Uzaklıklı Regle Yüzeylerin Weingarten Dönüşümü Matrisi,.....	53
Gauss Eğriliği ve Ortalama Eğriliği.....	53
5. SONUÇ ve ÖNERİLER	67
6. KAYNAKLAR	68
ÖZGEÇMİŞ	70

ŞEKİL LİSTESİ

	<u>Sayfa</u>
Şekil 1.1 10 Euro arkasındaki Gauss'un Hannover krallığı eskizi	1
Şekil 2.1 Darboux vektörü	6
Şekil 2.2 Yüzey	8
Şekil 2.3 Regle Yüzey	9
Şekil 2.4 Açılım Açısı, Açılım Uzunluğu	11
Şekil 4.1 Successor Eğrisinin Striksiyonları Arasındaki Uzaklık	22
Şekil 4.2 Striksiyon Eğrisinin Teğet Vektörleri	27
Şekil 4.3 Successor Eğrilerinin Çatıları	30
Şekil 4.4 Regle Yüzeyler ve Striksiyon Çizgileri	58
Şekil 4.5 $s = 0$ için l uzaklığı	61
Şekil 4.6 $s = \frac{\pi}{6}$ için l uzaklığı	62
Şekil 4.7 $s = \frac{\pi}{4}$ için l uzaklığı	64
Şekil 4.8 $s = \frac{\pi}{3}$ için l uzaklığı	65
Şekil 4.9 $s = \frac{\pi}{2}$ için l uzaklığı	66

SİMGELER ve KISALTMALAR LİSTESİ

$\ \ $: Norm
$\langle \cdot, \cdot \rangle$: Öklid İç Çarpımı
E^3	: 3 – Boyutlu Öklid Uzayı
w	: Darboux Vektörü
c	: Birim Darboux Vektörü
κ	: Eğrinin Eğriliği
τ	: Eğrinin Burulması
D	: Steiner Dönme Vektörü
V	: Steiner Öteleme Vektörü
\wedge	: Vektörel Çarpım
Γ	: Γ Regle Yüzeyi
γ	: Striksiyon Çizgisi
S	: Şekil Operatörü
K	: Gauss Eğriliği
H	: Ortalama Eğrilik
λ_x	: Açılım Açısı
L_x	: Açılım Uzunluğu
P_x	: Dral (Dağılma Parametresi)

boyunca bir doğrunun sürekli hareketinin bir sonucu olarak meydana gelir. Yani, yüzeyin her noktasında yüzey üzerinde yatan bir doğru var ise bu yüzey regle yüzey olarak adlandırılır.

Eğriler teorisinin çalışılmasında iki kavram çok önemlidir. Bunlar, eğrinin Frenet denklemleri ve eğrilikleridir. Bu kavramlar yardımıyla eğrinin geometrik özellikleri incelenmektedir. Bertrand eğrileri, Evolute-Involute eğrileri, helisler, vb. gibi özel eğriler uzun zamandan beri çalışılmış ve çalışılmaya devam edilmektedir. Bizim çalışmamızda ele alacağımız özel eğri successor eğrisidir.

2014 yılında Menninger tarafından yapılan çalışmada üç boyutlu Öklid uzayında successor eğrisini tanımlamıştır (Menninger, 2014). Daha sonra Masal successor düzlemlerini ve özel eğriler için successor sistemlerini tanımlamıştır (Masal, 2018). “Spinor Equations of Successor Curves” isimli makalede successor eğrileri ele alınmış ve bu özel eğrilerin spinorları hesaplanmıştır (Erişir ve Öztaş, 2022).

Regle yüzeyler teorisi diferensiyel geometride olduğu kadar bazı mühendislik dalları ve mimarlıkta önemli bir yere sahiptir. Regle yüzeyler birçok mimari yapıda da kullanılmaktadır. Los Angeles’daki Walt Disney Konser Salonu cephe tasarımı regle yüzey örneği olarak verilebilir. Bir yüzeyin açılabilir olması mühendislik ve mimarlık alanlarında inşa edilebilir yapılar tasarlamak için önemlidir (Yazar, 2019).

Regle yüzeyler hakkındaki bilgileri pek çok basılı kaynakta bulmak mümkündür. “Diferensiyel Geometri Dersleri” (Hacısalıhoğlu, 1983), “Hareket Geometrisi ve Kuaterniyonlar Teorisi” (Hacısalıhoğlu, 1983), “Diferensiyel Geometri” (Sabuncuoğlu, 2006) adlı kitaplar bunlara örnek olarak verilebilir.

Valeontis, Öklid uzayında regle yüzeyler hakkında yaptığı çalışmada eş uzaklıklı regle yüzey tanımını yapmıştır. Bu tanımında iki şarta yer vermiştir. Bunlardan ilki yüzeylerin üretici vektörlerinin paralel olması, ikincisi de düzlemler arasındaki uzaklığın uygun yerlerde sabit olmasıdır (Valeontis, 1986).

Masal ve Kuroğlu yaptıkları çalışmada p – eş uzaklıklı regle yüzeyleri kapalı olarak almıştır. Kapalı olması şartı altında integral invaryantları arasındaki bağıntıları

hesaplamışlardır (Masal ve Kuruoğlu, 1999). p -eş uzaklıklı regle yüzeyleri çok boyutlu uzayda ele alarak çalışmalarını sürdürmüşlerdir (Masal ve Kuruoğlu, 2013).

Şenyurt, p -eş uzaklıklı kapalı regle yüzeylere bağlı olarak Darboux vektörü yönündeki birim vektörün oluşturduğu kapalı regle yüzeylerin açılım açısı, açılım uzunluğu ve drallerini hesaplamıştır (Şenyurt, 2012).

Şenyurt ve As, Valeontis'in tanımını örnek olarak z -eş uzaklıklı regle yüzeyleri tanımlamışlardır. Daha sonra tanımladıkları yüzeyler ile ilgili karakteristik özellikleri inceleyip, integral invaryantları üzerine çalışma yapmışlardır (Şenyurt ve As, 2013).

Li ve arkadaşları, Valeontis'in tanımından yola çıkarak q -eş uzaklıklı ve d -eş uzaklıklı regle yüzeyleri tanımlamışlardır. Daha sonra bu yüzeylerle ilgili çalışmalar yapmışlardır (Li ve ark., 2022). Çalışmalarında bu yüzeylerin karakteristik özellikleri ve integral invaryantlarını hesaplamışlardır. Cevahir d -eş uzaklıklı regle yüzeylerin 3-boyutlu Öklid uzayı ve 5-boyutlu Öklid uzayındaki durumları üzerine çalışma yapmıştır (Cevahir, 2021).

Bu tezde ise p -eş uzaklıklı regle yüzey oluşturan iki eğrinin successor eğrileri ele alındı. Bu successor eğrilerinin oluşturduğu yüzeyler, striksiyon noktalarında asli normal vektörleri paralel ve uygun yerlerde merkezi düzlemler arasındaki uzaklığın sabit olması şartı altında, successor eş uzaklıklı regle yüzeyler olarak tanımlandı. Bu yüzeylere ait striksiyon eğrileri hesaplandı, striksiyonlar arasındaki bağıntı bulundu. Successor eş uzaklıklı regle yüzey çiftinin dayanak eğrilerine ait Frenet vektörleri, birim Darboux vektörleri ve Frenet vektörlerine bağlı hareket eden birim vektörlerin oluşturduğu regle yüzeyler kapalı olarak kabul edildikten sonra açılım açıları, açılım uzunlukları ve dralleri arasındaki ilişkiler verildi. Daha sonra bu yüzeylerin şekil operatörü, Gauss ve ortalama eğrilikleri hesaplandı.

2. GENEL BİLGİLER

2.1 Öklid Uzayı

Boş olmayan bir cümle A ve bir χ cismi üzerinde vektör uzayı V olsun. Aşağıdaki önermeleri doğrulayan bir $f : A \times A \rightarrow V$ fonksiyonu varsa A ya V ile birleştirilmiş bir afin uzay denir:

$$\text{i)} \quad \forall T, R, S \in A \text{ için } f(T, R) + f(R, S) = f(T, S),$$

$$\text{ii)} \quad \forall T \in A \text{ ve } \forall \beta \in V \text{ için } f(T, S) = \beta$$

olacak şekilde bir tek $S \in A$ noktası vardır. $T, R \in A$ için $f(T, R) = \overline{TR}$ şeklinde gösterilir (Hacısalihoglu, 1983). Bir V vektör uzayı ile birleşen afin uzaylardan biri A olsun. $T_0, T_1, T_2, T_3 \in A$ noktaları için $\overline{T_0T_1}, \overline{T_0T_2}, \overline{T_0T_3} \in V$ vektörleri V nin bir bazı ise $\{T_0, T_1, T_2, T_3\}$ nokta 4-lüsüne A afin uzayının bir **afin çatısı** denir. T_0 noktasına afin çatının başlangıç noktası ve T_1, T_2, T_3 e de afin çatının birim noktaları denir. $\text{boy}V = 3$ ise A ya 3-**boyutlu bir afin uzay** denir (Hacısalihoglu, 1983).

V bir vektör uzayı olsun

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}; (x, y) \rightarrow \langle x, y \rangle$$

fonksiyonu aşağıdaki aksiyomları sağlıyorsa bu fonksiyona bir **iç çarpım fonksiyonu** denir (Hacısalihoglu, 1983): $\forall x, y, z \in V$ ve $\forall p, n \in \mathbb{R}$ için;

i) Bilineerlik Aksiyomu;

$$\langle p x + n y, z \rangle = p \langle x, z \rangle + n \langle y, z \rangle,$$

$$\langle x, p y + n z \rangle = p \langle x, y \rangle + n \langle x, z \rangle,$$

ii) Simetri Aksiyomu;

$$\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle,$$

iii) Pozitif Tanımlılık Aksiyomu;

$$\langle x, x \rangle \geq 0, \quad \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = \vec{0}.$$

\mathbb{R}^3 standart reel afin uzay olsun. $F = (f_1, f_2, f_3)$, $T = (t_1, t_2, t_3) \in \mathbb{R}^3$ için

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R},$$

$$(F, T) \rightarrow \langle F, T \rangle = \sum_{a=1}^3 f_a t_a$$

şeklinde verilen fonksiyon bir **iç çarpım fonksiyonudur**. Bu iç çarpıma \mathbb{R}^3 te standart iç çarpım veya Öklid iç çarpımı denir. Öklid iç çarpımın tanımlı bulunduğu \mathbb{R}^3 vektör uzayı ile birleşen \mathbb{R}^3 afin uzayına 3 – boyutlu **Öklid uzayı** denir ve E^3 ile gösterilir (Hacısalıhoğlu, 1983).

$F = (f_1, f_2, f_3)$, $T = (t_1, t_2, t_3)$ noktaları E^3 de tanımlı iki nokta olsun. Bu noktalar arasındaki uzaklık fonksiyonu

$$d : E^3 \times E^3 \rightarrow \mathbb{R},$$

$$(F, T) \rightarrow d(F, T) = \sqrt{\sum_{a=1}^3 (f_a - t_a)^2}$$

şeklinde tanımlanır. $d(F, T) \in \mathbb{R}$ sayısına da bu iki nokta arasındaki uzaklık denilir (Hacısalıhoğlu, 1983).

$\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\alpha(s) = (\alpha_1(s), \alpha_2(s), \alpha_3(s))$ diferensiyellenebilir fonksiyonuna \mathbb{R}^3 te bir **eğri** denir. $\|\alpha'(s)\| = 1$ ise α eğrisine birim hızlı eğri denir. Bu durumda $s \in I$ parametresine de eğrinin yay parametresi denir (Hacısalıhoğlu, 1983).

$\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ diferensiyellenebilir eğrisinin Frenet vektörleri $u_1(s), u_2(s), u_3(s)$, eğriliği $\kappa_\alpha(s)$ ve burulması $\tau_\alpha(s)$ olsun.

i) s yay parametresi olduğunda Frenet vektörleri, eğrilik ve burulması

$$u_1(s) = \alpha'(s), \quad u_2(s) = \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|}, \quad u_3(s) = u_1(s) \wedge u_2(s)$$

$$\kappa_\alpha(s) = \|\alpha''(s)\|, \quad \tau_\alpha(s) = -\langle u_2(s), u_3'(s) \rangle$$

(2.1.1)

ii) s keyfi parametre olduğunda Frenet vektörleri, eğrilik ve burulması

$$u_1(s) = \frac{\alpha'(s)}{\|\alpha'(s)\|}, \quad u_2(s) = u_3(s) \wedge u_1(s), \quad u_3(s) = \frac{\alpha'(s) \wedge \alpha''(s)}{\|\alpha'(s) \wedge \alpha''(s)\|} \quad (2.1.2)$$

$$\kappa_\alpha(s) = \|\alpha''(s)\|, \quad \tau_\alpha(s) = -\langle u_2(s), u_3'(s) \rangle$$

şeklinde tanımlanır (Hacısalıhoğlu, 1983).

$\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ diferensiyellenebilir birim hızlı eğrisinin Frenet vektörleri ile bunların türev vektörleri arasında

$$u_1'(s) = \kappa_\alpha(s) u_2(s),$$

$$u_2'(s) = -\kappa_\alpha(s) u_1(s) + \tau_\alpha(s) u_3(s), \quad (2.1.3)$$

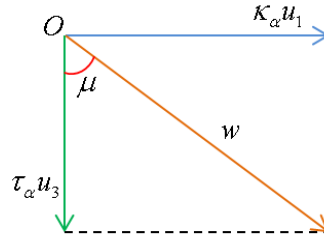
$$u_3'(s) = \tau_\alpha(s) u_2(s)$$

bağıntıları vardır. Bu bağıntılar Frenet formülleri olarak bilinir (Hacısalıhoğlu, 1983).

Bir α eğrisinin, $\alpha(s)$ noktasındaki $u_1(s), u_2(s), u_3(s)$ Frenet çatısının s parametresinin değiştiği her anda, bir eksen etrafında, ani bir helis hareketi yaptığı varsayılır. Etrafında hareket ettiği eksene **Darboux eksen**i ve bu eksenin yön ve doğrultusunu gösteren vektöre **Darboux vektörü** adı verilir (Fenchel, 1951). Bu vektör $w(s)$ ile gösterilirse

$$w(s) = u_2(s) \wedge u_2'(s) = \tau_\alpha(s) u_1(s) + \kappa_\alpha(s) u_3(s) \quad (2.1.4)$$

şeklinde ifade edilir.



Şekil 2.1 Darboux vektörü

Eğer birim Darboux vektörü $c(s)$ ile gösterilirse, bu vektör

$$c(s) = \frac{\tau_\alpha(s)}{\sqrt{\kappa_\alpha^2(s) + \tau_\alpha^2(s)}} u_1(s) + \frac{\kappa_\alpha(s)}{\sqrt{\kappa_\alpha^2(s) + \tau_\alpha^2(s)}} u_3(s) \quad (2.1.5)$$

şeklinde yazılır. $u_3(s)$ ile $w(s)$ arasındaki açı μ ile gösterilirse, (Şekil 2.1) den

$$\cos \mu = \frac{\kappa_\alpha(s)}{\|\vec{w}(s)\|} = \frac{\kappa_\alpha(s)}{\sqrt{\kappa_\alpha^2(s) + \tau_\alpha^2(s)}}, \quad \sin \mu = \frac{\tau_\alpha(s)}{\|\vec{w}(s)\|} = \frac{\tau_\alpha(s)}{\sqrt{\kappa_\alpha^2(s) + \tau_\alpha^2(s)}} \quad (2.1.6)$$

olur. Buradan **birim Darboux vektörü**

$$c(s) = \sin \mu u_1(s) + \cos \mu u_3(s) \quad (2.1.7)$$

şeklinde bulunur (Fenchel, 1951; Hacısalihoğlu, 1983).

$\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ kapalı eğri olması durumunda, $w(s)$ vektörünün α eğrisi boyunca eğrisel integraliyle belirtilen

$$D(s) = \oint_{(\alpha)} w(s) ds, \quad (2.1.8)$$

$$= u_1(s) \oint_{(\alpha)} \tau_\alpha(s) ds + u_3(s) \oint_{(\alpha)} \kappa_\alpha(s) ds \quad (2.1.9)$$

vektörüne ani helis hareketine ait **Steiner dönme vektörü**,

$$d(\alpha(s)) = \alpha_1(s) u_1(s) + \alpha_2(s) u_2(s) + \alpha_3(s) u_3(s) \quad (2.1.10)$$

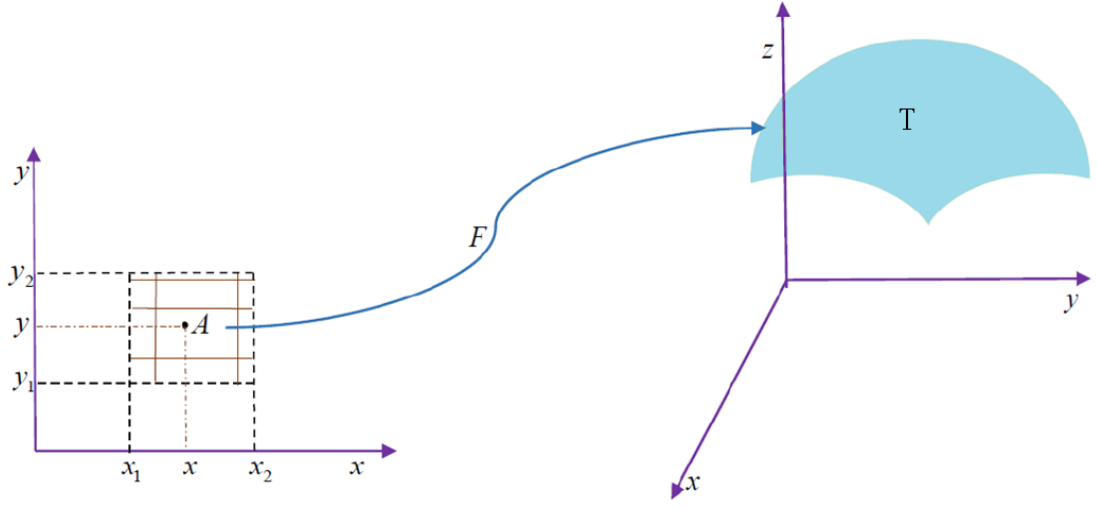
olmak üzere

$$V(s) = \oint_{(\alpha)} d(\alpha(s)) ds, \quad (2.1.11)$$

vektörüne de ani helis hareketine ait **Steiner öteleme vektörü** denir (Fenchel, 1951; Hacısalihoğlu, 1983).

2.2 Öklid Uzayında Regle Yüzeyler

$x \circ y$ düzleminin bir A bölgesindeki her bir (x, y) noktasının F diffeomorfizmi altındaki görüntüsü $z = F(x, y)$ olsun. (x, y) noktaları düzlemde bir A bölgesini tararken, (x, y, z) noktaları da uzayda bir T yüzeyi oluşturur. Bu yüzeyin açık denklemi $z = F(x, y)$ ve kapalı denklemi $F(x, y, z) = 0$ şeklinde verilir (Şenatalar, 1978; Sabuncuoğlu, 2006) (Şekil 2.2).



Şekil 2.2 Yüzey

Bu yüzeyin birim normal vektör alanı N , Riemann konneksiyonu D olmak üzere, $\forall X \in \chi(F)$ için $S(X) = D_X N$ şeklinde tanımlı dönüşüme **şekil operatörü** veya **Weingarten dönüşümü** denir (Hacısalihoglu, 1983). Yüzeyin parametrik ifadesi

$$F: E^2 \rightarrow E^3$$

$$(s, \sigma) \rightarrow (F_1(s, \sigma), F_2(s, \sigma), F_3(s, \sigma)) \quad (2.2.1)$$

şeklinde verilsin. Bu yüzey için Weingarten dönüşümünün matrissel ifadesi

$$S = \begin{bmatrix} -\frac{\det(F_{ss}, F_s, F_\sigma)}{\|F_s\|^3 \|F_\sigma\|} & -\frac{\det(F_{s\sigma}, F_s, F_\sigma)}{\|F_s\|^2 \|F_\sigma\|^2} \\ -\frac{\det(F_{s\sigma}, F_s, F_\sigma)}{\|F_s\|^2 \|F_\sigma\|^2} & -\frac{\det(F_{\sigma\sigma}, F_s, F_\sigma)}{\|F_s\| \|F_\sigma\|^3} \end{bmatrix} \quad (2.2.2)$$

şeklinde olur.

Yüzeyin **Gauss eğriliği** K ile **ortalama eğriliği** H ile gösterilirse bu eğrilikler

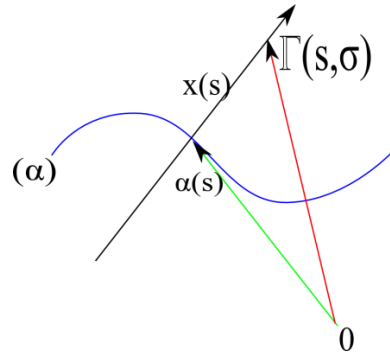
$$K = \det S, \quad H = I_2 S \quad (2.2.3)$$

şeklinde bulunur (Hacısalihoglu, 1994). Burada $K = 0$ ise yüzeye açılabilir, $H = 0$ ise minimal yüzey adı verilir.

$x(s)$ doğrusunun $\alpha(s)$ eğrisi üzerinde hareket ettirilmesiyle oluşan yüzey **regle yüzey** olarak tanımlanabilir. Burada $\alpha(s)$ eğrisine regle yüzeyin dayanak eğrisi, $x(s)$ doğrusuna regle yüzeyin ana doğrusu (doğrultmanı) denir. Regle yüzeyin parametrik denklemi

$$\begin{aligned} \Gamma : I \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (s, \sigma) &\rightarrow \Gamma(s, \sigma) = \alpha(s) + \sigma x(s) \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

şeklinde yazılır (Hacısalihoglu, 1994) (Şekil 2.3).



Şekil 2.3 Regle Yüzey

Bir $\Gamma(s, \sigma)$ regle yüzeyinin dayanak eğrisi boyunca oluşan $Sp\{u_1, u_2\}$ düzlemine **oskülatör düzlem**, $Sp\{u_2, u_3\}$ düzlemine **normal düzlem** ve $Sp\{u_1, u_3\}$ düzlemine **rektifyan düzlem** ismi verilir.

$\Gamma(s, \sigma) = \alpha(s) + \sigma x(s)$ regle yüzeyi $\forall s \in I$ için $\Gamma(s+2\pi, \sigma) = \Gamma(s, \sigma)$ eşitliği sağlanacak şekilde periyodik ise $\Gamma(s, \sigma)$ 'ye **kapalı regle yüzey** adı verilir. Bir regle yüzeyin ana doğrusu boyunca yüzeyin teğet düzlemi aynı kalıyorsa yüzeye **açılabilir regle yüzey** denir (Hacısalihoglu, 1994).

$\Gamma(s, \sigma)$ regle yüzeyinin komşu iki ana doğrusunun ortak dikme noktalarının esas ana doğrular üzerindeki noktalarına striksiyon noktası, bu noktaların geometrik yerine de regle yüzeyin **striksiyon eğrisi** adı verilir (Hacısalıhoğlu, 1994).

$\Gamma(s, \sigma)$ regle yüzeyinin striksiyon noktasının yer vektörü $\gamma(s)$ ile gösterilirse bu vektör

$$\gamma(s) = \alpha(s) - \frac{\langle \alpha'(s), x'(s) \rangle}{\|x'(s)\|^2} x(s), \quad x(s) \neq 0 \quad (2.2.5)$$

şeklinde yazılır (Hacısalıhoğlu, 1994).

$\Gamma(s, \sigma)$ regle yüzeyinin striksiyon çizgisi boyunca $Sp\{u_1, u_2\}$ düzlemine **asimptotik**, $Sp\{u_2, u_3\}$ düzlemine **polar** ve $Sp\{u_1, u_3\}$ düzlemine **merkezi düzlem** adı verilir (Blaschke, 1994).

$\Gamma(s, \sigma)$ regle yüzeyinin komşu iki ana doğrusu arasındaki en kısa uzaklığın bu iki komşu ana doğru arasındaki açığa oranına regle yüzeyin **dağılma parametresi (drali)** adı verilir. Dral denklemi P_x ile ifade edilirse

$$P_x = \frac{\det(\alpha'(s), x(s), x'(s))}{\|x'(s)\|^2} \quad (2.2.6)$$

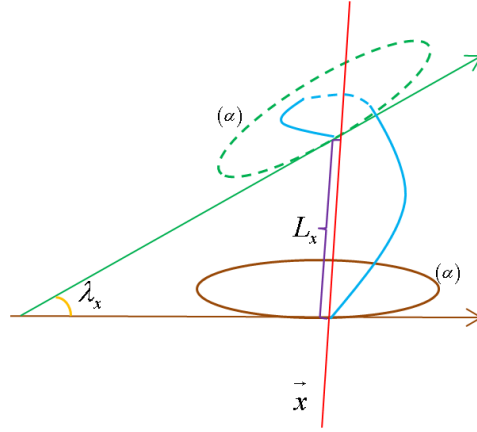
şeklinde olur (Hacısalıhoğlu, 1983).

$\Gamma(s, \sigma)$ regle yüzeyinin $x(s)$ doğrularının tümünü dik şekilde kesen eğriye regle yüzeyin **ortogonal yörüngesi** denir (Hacısalıhoğlu, 1994).

$\Gamma(s, \sigma)$ kapalı regle yüzeyinin ana doğrularının dik yörüngeleri için

$$L_x = \int_{(\alpha)} \langle d\alpha(s), x(s) \rangle = - \int_{(\alpha)} d\sigma \quad (2.2.7)$$

şeklinde tanımlanan L_x ifadesine regle yüzeyin **açılım uzunluğu** denir.



Şekil 2.4 Açılım Açısı, Açılım Uzunluğu

Bir $\Gamma(s, \sigma)$ regle yüzeyinin $\alpha(s)$ eğrisi boyunca $x(s)$ doğrusunun bir periyot sonra ilk pozisyonu ile yaptığı açığa regle yüzeyin **açılım açısı** denir. Bu açı λ_x ile gösterilir (Hacısalıhoğlu, 1994).

$\Gamma(s, \sigma)$ kapalı regle yüzeyi için açılım açısı ve açılım uzunluğu sırasıyla,

$$\lambda_x = \langle D(s), x(s) \rangle, \quad L_x = \langle V(s), x(s) \rangle \quad (2.2.8)$$

bağıntılarından hesaplanır. Burada

$$D(s) = \lambda_{u_1(s)} u_1(s) + \lambda_{u_3(s)} u_3(s), \quad V(s) = L_{u_1(s)} u_1(s) \quad (2.2.9)$$

şeklinde verilir (Hacısalıhoğlu, 1994).

$x(s)$ ana doğrusu yerine α eğrisine ait Frenet vektörleri olan $u_1(s), u_2(s), u_3(s)$ alındığında, oluşan kapalı regle yüzeylerin integral invariantları

$$\begin{aligned} \text{i.} \quad & \lambda_{u_1} = \oint_{(\alpha)} \tau_\alpha(s) ds, \quad \lambda_{u_2} = 0, \quad \lambda_{u_3} = \oint_{(\alpha)} \kappa_\alpha(s) ds \\ \text{ii.} \quad & L_{u_1} = \oint_{(\alpha)} ds, \quad L_{u_2} = 0, \quad L_{u_3} = 0 \\ \text{iii.} \quad & P_{u_1} = 0, \quad P_{u_2} = \frac{\tau_\alpha(s)}{\kappa_\alpha^2(s) + \tau_\alpha^2(s)}, \quad P_{u_3} = \frac{1}{\tau_\alpha(s)} \end{aligned} \quad (2.2.10)$$

şeklinde elde edilir (Hacısalıhoğlu, 1994).

3. MATERYAL ve YÖNTEM

Bu bölümde tezimize yol gösteren çalışmalardaki successor eğrileri ve eş uzaklıklı regle yüzeyler hakkındaki bilgilere yer verildi.

3.1 p-Eş Uzaklıklı Regle Yüzeyler

Tanım 3.1.1 $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ ve $\beta: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ diferensiyellebilir birim hızlı eğrilerinin $\alpha(s)$ ve $\beta(s)$ noktalarındaki Frenet çatıları sırasıyla $\{u_1, u_2, u_3\}$ ve $\{v_1, v_2, v_3\}$ olsun. Doğrultmanları $u_1(s)$ ve $v_1(s)$ olan iki regle yüzeyin parametrik denklemleri

$$\begin{aligned}\Gamma(s, \sigma) &= \alpha(s) + \sigma u_1(s), \\ \bar{\Gamma}(s, \sigma) &= \beta(s) + \sigma v_1(s)\end{aligned}\quad (3.1.1)$$

olarak verilsin. Bu yüzeyler için

- i. Striksiyon eğrileri boyunca $u_1(s)$ ve $v_1(s)$ üretici vektörleri paralel,
- ii. Uygun noktalarda $Sp\{u_2, u_3\}$ ve $Sp\{v_2, v_3\}$ düzlemleri arasındaki $p \in \mathbb{R}$ uzaklığı sabit,

ise $\Gamma(s, \sigma)$ ve $\bar{\Gamma}(s, \sigma)$ yüzey ikilisi paralel p -eş uzaklıklı (p -equidistant) regle yüzeyler olarak isimlendirilir (Valeontis, 1986).

$\gamma(s)$ ve $\bar{\gamma}(s)$ striksiyon çizgileri $\Gamma(s, \sigma)$ ve $\bar{\Gamma}(s, \sigma)$ regle yüzeylerinin dayanak eğrisi olarak alınırsa bu yüzeylerin parametrik denklemleri,

$$\begin{aligned}\Gamma(s, \sigma) &= \gamma(s) + \sigma u_1(s), \\ \bar{\Gamma}(s, \sigma) &= \bar{\gamma}(s) + \sigma v_1(s)\end{aligned}\quad (3.1.2)$$

biçiminde olur (Valeontis, 1986).

Teorem 3.1.1 p -eş uzaklıklı regle yüzeylerin uygun noktalardaki $Sp\{u_1, u_3\}$ ve $Sp\{v_1, v_3\}$ düzlemleri arasındaki uzaklığı z , $Sp\{u_1, u_2\}$ ve $Sp\{v_1, v_2\}$ düzlemleri arasındaki uzaklığı q ile gösterilirse $\bar{\Gamma}(s, \sigma)$ regle yüzeyinin striksiyon çizgisi,

$$\bar{\gamma}(s) = \gamma(s) + z u_2(s) + q u_3(s) - \left(\frac{z' - q \tau_\alpha(s)}{\kappa_\alpha(s)} \right) u_1(s) \quad (3.1.3)$$

şeklinde verilir (Valeontis 1986).

Bu teoreme göre polar düzlemler arasındaki p uzaklığı

$$p = \frac{-z' + q \tau_\alpha(s)}{\kappa_\alpha(s)} \quad (3.1.4)$$

olur (Valeontis, 1986).

Teorem 3.1.2 Γ ve $\bar{\Gamma}$ p -eş uzaklıklı regle yüzeylerin dayanak eğrilerinin eğrilikleri ve burulmaları arasında

$$\begin{aligned} \kappa_\beta(s) &= \kappa_\alpha(s) \frac{ds}{d\bar{s}}, \\ \tau_\beta(s) &= \tau_\alpha(s) \frac{ds}{d\bar{s}} \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

bağıntıları vardır (Valeontis, 1986).

Teorem 3.1.3 p -eş uzaklıklı regle yüzeylerin Frenet çatıları birbirine denktir (Valeontis, 1986).

Teorem 3.1.4 p -eş uzaklıklı regle yüzeylerin Frenet vektörlerinin meydana getirdiği regle yüzeylerin açılım açıları arasında

$$\begin{aligned} \text{i.} \quad \lambda_{v_1} &= \lambda_{u_1} + \oint_{pu_1+zu_2+qu_3} \tau_\alpha(s) ds, \\ \text{ii.} \quad \lambda_{v_2} &= \lambda_{u_2}, \\ \text{iii.} \quad \lambda_{v_3} &= \lambda_{u_3} + \oint_{pu_1+zu_2+qu_3} \kappa_\alpha(s) ds, \end{aligned} \quad (3.1.6)$$

bağıntıları vardır (Masal, 1994).

Teorem 3.1.5 p -eş uzaklıklı regle yüzeylerin Frenet vektörlerinin meydana getirdiği regle yüzeylerin açılım uzunlukları arasında

$$\text{i.} \quad \kappa_\beta(s) L_{v_1} = \kappa_\alpha(s) L_{u_1} + \oint_{pu_1+zu_2+qu_3} ds,$$

$$\text{ii. } L_{v_2} = L_{u_2} = 0, \quad (3.1.7)$$

$$\text{iii. } L_{v_3} = L_{u_3} = 0,$$

bağıntıları vardır (Masal, 1994).

Teorem 3.1.6 p -eş uzaklıklı regle yüzeylerin Frenet vektörlerinin meydana getirdiği regle yüzeylerin dralleri arasında

$$\text{i. } P_{v_1} = P_{u_1} = 0,$$

$$\text{ii. } P_{v_2} = P_{u_2} \frac{d\bar{s}}{ds}, \quad (3.1.8)$$

$$\text{iii. } P_{v_3} = P_{u_3} \frac{d\bar{s}}{ds}$$

bağıntıları vardır (Masal, 1994).

3.2 z-Eş Uzaklıklı Regle Yüzeyler

Tanım 3.2.1 E^3 de α ve β dayanak eğrilerine ait, u_2 ve v_2 üretici vektörlerinin oluşturduğu regle yüzeylerin parametrik denklemleri sırasıyla

$$\Gamma(s, \sigma) = \alpha(s) + \sigma u_2(s), \quad \bar{\Gamma}(s, \sigma) = \beta(s) + \sigma v_2(s) \quad (3.2.1)$$

şeklinde verilsin. Bu yüzeyler için

- i. Striksiyon eğrileri boyunca u_2 ve v_2 üretici vektörleri paralel,
- ii. Uygun noktalarda $Sp\{u_1, u_3\}$ ve $Sp\{v_1, v_3\}$ düzlemleri arasındaki $z \in \mathbb{R}$ uzaklığı sabit,

ise bu yüzeylere z -eş **uzaklıklı** (z -equidistant) **regle yüzeyler** denir (Valeontis, 1986; Şenyurt ve As, 2013).

Teorem 3.2.1 z -eş uzaklıklı regle yüzeyler verilsin $Sp\{u_1, u_2\}$ ve $Sp\{v_1, v_2\}$ düzlemler arasındaki uzaklığı q , $Sp\{u_2, u_3\}$ ve $Sp\{v_2, v_3\}$ düzlemler arasındaki uzaklığı p ile gösterilirse $\bar{\Gamma}(s, \sigma)$ regle yüzeyinin striksiyon çizgisinin denklemi,

$$\bar{\gamma} = \gamma + p u_1 + q u_3 + \left(\frac{\kappa_\alpha p' - \tau_\alpha q'}{\kappa_\alpha^2 + \tau_\alpha^2} \right) u_2 \quad (3.2.2)$$

şeklinde bulunur. Burada merkezi düzlemler arasındaki uzaklık

$$z = \frac{\kappa_\alpha p' - \tau_\alpha q'}{\kappa_\alpha^2 + \tau_\alpha^2} \quad (3.2.3)$$

şeklinde verilir (Şenyurt ve As, 2013).

Teorem 3.2.2 z -eş uzaklıklı regle yüzeylerin Frenet çatıları, eğrilik ve burulmaları arasında

$$\begin{aligned} \text{i.} \quad & v_1 = \cos \phi u_1 + \sin \phi u_3, \quad v_2 = u_2, \quad v_3 = -\sin \phi u_1 + \cos \phi u_3 \\ \text{ii.} \quad & \kappa_\beta = (\kappa_\alpha \cos \phi - \tau_\alpha \sin \phi) \frac{ds}{ds^*}, \quad \tau_\beta = (\kappa_\alpha \sin \phi + \tau_\alpha \cos \phi) \frac{ds}{ds^*} \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

bağıntıları vardır. Burada ϕ açısı dayanak eğrisi ile u_1 vektörü arasındaki açıdır (Şenyurt ve As, 2013).

Teorem 3.2.3 z -eş uzaklıklı regle yüzey çiftinin açılım açıları arasında

$$\begin{aligned} \text{i.} \quad & \lambda_{v_1} = \cos \phi \lambda_{u_1} + \sin \phi \lambda_{u_3} + \int_{\left(pu_1 + \left(z - \frac{\kappa_\beta}{\kappa_\beta^2 + \tau_\beta^2} \right) u_2 + qu_3 \right)} \tau_\beta ds^* + \int_{\left(\frac{\kappa_\alpha}{\kappa_\alpha^2 + \tau_\alpha^2} u_2 \right)} \tau_\beta ds^*, \\ \text{ii.} \quad & \lambda_{v_2} = \lambda_{u_2} = 0, \\ \text{iii.} \quad & \lambda_{v_3} = -\sin \phi \lambda_{u_1} + \cos \phi \lambda_{u_3} + \int_{\left(pu_1 + \left(z - \frac{\kappa_\beta}{\kappa_\beta^2 + \tau_\beta^2} \right) u_2 + qu_3 \right)} \kappa_\beta ds^* + \int_{\left(\frac{\kappa_\alpha}{\kappa_\alpha^2 + \tau_\alpha^2} u_2 \right)} \kappa_\beta ds^* \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

bağıntıları vardır (Şenyurt ve As, 2013).

Teorem 3.2.4 z -eş uzaklıklı regle yüzey çiftinin açılım uzunlukları arasında

$$\begin{aligned} \text{i.} \quad & L_{v_1} \kappa_\beta = (\kappa_\alpha \cos \phi - \tau_\alpha \sin \phi) L_{u_1} + \int_{\left(pu_1 + \left(z - \frac{\kappa_\beta}{\kappa_\beta^2 + \tau_\beta^2} \right) u_2 + qu_3 \right)} ds^* + \int_{\left(\frac{\kappa_\alpha}{\kappa_\alpha^2 + \tau_\alpha^2} u_2 \right)} ds^*, \\ \text{ii.} \quad & L_{v_2} = L_{u_2} = 0, \\ \text{iii.} \quad & L_{v_3} = L_{u_3} = 0 \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

bağıntıları vardır (Şenyurt ve As, 2013).

Teorem 3.2.5 z -eş uzaklıklı regle yüzey çiftinin dralleri arasında

$$\begin{aligned}
 \text{i.} \quad & P_{v_1} = P_{u_1} = 0, \\
 \text{ii.} \quad & P_{v_2} = P_{u_2} \left(\cos \phi + \sin \phi \frac{\kappa_\alpha}{\tau_\alpha} \right) \frac{ds^*}{ds}, \\
 \text{iii.} \quad & P_{v_3} = P_{u_3} \left(\frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha \cos \phi + \tau_\alpha \sin \phi} \right) \frac{ds^*}{ds} \tag{3.2.7}
 \end{aligned}$$

bağıntıları vardır (Şenyurt ve As, 2013).

3.3 q-Eş Uzaklıklı Regle Yüzeyler

Tanım 3.3.1 E^3 de α ve β eğrilerine ait u_3 ve v_3 üretici vektörlerinin oluşturduğu regle yüzeylerin parametrik denklemleri sırasıyla

$$\begin{aligned}
 \Gamma(s, \sigma) &= \alpha(s) + \sigma u_3(s), \\
 \bar{\Gamma}(s, \sigma) &= \beta(s) + \sigma v_3(s) \tag{3.3.1}
 \end{aligned}$$

şeklinde verilsin. Eğer;

- i. Striksiyon eğrileri boyunca u_3 ve v_3 üretici vektörleri paralel,
- ii. Uygun noktalarda $Sp\{u_1, u_2\}$ ve $Sp\{v_1, v_2\}$ düzlemleri arasındaki $q \in \mathbb{R}$ uzaklığı sabit,

ise $\Gamma(s, \sigma)$ ve $\bar{\Gamma}(s, \sigma)$ regle yüzey ikilisi q -eş uzaklıklı (q -equidistant) **regle yüzeyler** olarak isimlendirilir.

Striksiyon çizgileri $\gamma(s)$ ve $\bar{\gamma}(s)$ dayanak eğrisi alınarak oluşturulan regle yüzeylerin parametrik ifadeleri

$$\begin{aligned}
 \Gamma(s, \sigma) &= \gamma(s) + \sigma u_3(s), \\
 \bar{\Gamma}(s, \sigma) &= \bar{\gamma}(s) + \sigma v_3(s) \tag{3.3.2}
 \end{aligned}$$

olarak bulunur (Valeontis, 1986; Li ve ark., 2022).

Teorem 3.3.1 q - eş uzaklıklı regle yüzeylerin uygun noktalardaki $Sp\{u_1, u_3\}$ ve $Sp\{v_1, v_3\}$ düzlemleri arasındaki uzaklığı z , $Sp\{u_2, u_3\}$ ve $Sp\{v_2, v_3\}$ düzlemleri arasındaki uzaklığı p ile gösterilse q -eş uzaklıklı regle yüzeylerin striksiyon çizgileri arasında

$$\bar{\gamma} = \gamma + p v_1 + z v_2 + \left(\frac{z' + p \kappa_\alpha}{\tau_\alpha} \right) v_3 \quad (3.3.3)$$

bağıntısı vardır. Burada asimptotik düzlemler arasındaki uzaklık

$$q = \frac{z' + p \kappa_\alpha}{\tau_\alpha} \quad (3.3.4)$$

şeklinde verilir (Li ve ark., 2022).

Teorem 3.3.2 q -eş uzaklıklı regle yüzeylerin dayanak eğrilerinin Frenet çatıları, eğrilik ve burulmaları arasında

$$\begin{aligned} \text{i.} \quad & v_1 = \cos \phi u_1 - \sin \phi u_2, \quad v_2 = \sin \phi u_1 + \cos \phi u_2, \quad v_3 = u_3, \\ \text{ii.} \quad & \kappa_\beta = (\kappa_\alpha - 1) \frac{ds}{ds^*}, \quad \tau_\beta = \tau_\alpha \cos \phi \frac{ds}{ds^*} \end{aligned} \quad (3.3.5)$$

bağıntıları vardır. Burada ϕ açısı dayanak eğrisi ile u_1 vektörü arasındaki açıdır (Li ve ark., 2022).

3.4 Successor Eğrisi

Tanım 3.4.1 Birim hızlı bir α eğrisinin birim teğet vektörü α^* eğrisinin aynı noktasındaki asli normal vektörü ise α^* eğrisine α eğrisinin **successor eğrisi** denir (Menninger,2014).

Teorem 3.4.1 α^* eğrisi α eğrisinin successor eğrisi ve bu eğrilerin Frenet aparatları sırasıyla $\{u_1^*, u_2^*, u_3^*, \kappa_\alpha^*, \tau_\alpha^*\}$ ve $\{u_1, u_2, u_3, \kappa_\alpha, \tau_\alpha\}$ olsun. Frenet vektörleri, eğrilikleri ve Darboux vektörü için

$$\begin{aligned}
u_1^* &= -\cos \varphi u_2 + \sin \varphi u_3, \\
u_2^* &= u_1, \\
u_3^* &= \sin \varphi u_2 + \cos \varphi u_3, \\
\kappa_\alpha^* &= \kappa_\alpha \cos \varphi, \\
\tau_\alpha^* &= \kappa_\alpha \sin \varphi, \\
w_1^* &= \kappa_\alpha u_3
\end{aligned} \tag{3.4.1}$$

bağıntıları vardır. Burada $\varphi(s) = \varphi_0 + \int \tau_\alpha(s) ds$, u_3^* ve u_3 vektörleri arasındaki açıdır (Menninger,2014).

Sonuç 3.4.1 Bir helis eğrisi bir düzlemsel eğrinin successor eğrisidir (Menninger, 2014).

İspat: α eğrisinin successor eğrisi olan α^* eğrisi bir helis eğrisi olsun. Böylece sabit bir M birim vektörü için $\langle u_1^*, M \rangle = \cos \psi$ olacak şekilde sabit bir ψ açısı vardır. Buradan türev alınır ve Frenet formülleri uygulanırsa

$$\langle \kappa_\alpha^* u_2^*, M \rangle = 0$$

olur. Buradan $u_2^* \perp M$ olduğundan

$$M = \cos \psi u_1^* + \sin \psi u_3^*$$

olarak yazılabilir. Bu ifadenin türevi alınır

$$\begin{aligned}
0 &= \cos \psi u_1^{*'} + \sin \psi u_3^{*'} \\
&= \cos \psi (\kappa_\alpha^* u_2^*) + \sin \psi (-\tau_\alpha^* u_2^*) \\
&= (\cos \psi \kappa_\alpha^* - \sin \psi \tau_\alpha^*) u_2^*
\end{aligned}$$

olur ve $\frac{\kappa_\alpha^*}{\tau_\alpha^*} = \frac{\sin \psi}{\cos \psi} = \tan \psi$ bulunur. Successor bağıntılarından

$$\frac{\kappa_\alpha^*}{\tau_\alpha^*} = \frac{\kappa_\alpha \cos \varphi}{\kappa_\alpha \sin \varphi} = \cot \varphi$$

olur. $\tan \varphi$ nin değeri sabit olduğundan $\cot \varphi$ nin değeri de sabittir. Bu durumda φ sabit olur, successor bağıntılarından $\tau_\alpha = \varphi' = 0$ olur. Bu durumda α eğrisi düzlemsel bir eğridir.

Sonuç 3.4.2 Bir helis eğrisinin successor eğrisi bir slant helistir (Menninger, 2014).

İspat: α eğrisinin successor eğrisi α^* olsun. α eğrisi helis olursa $\frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}$ oranı sabittir.

α^* eğrisinin slant helis olması için gerek ve yeter koşul $\rho = \frac{\kappa_\alpha^{*2}}{(\kappa_\alpha^{*2} + \tau_\alpha^{*2})^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{\tau_\alpha^*}{\kappa_\alpha^*} \right)'$

fonksiyonunun sabit olmasıdır. (3.4.1) den successor eğrisinin bağıntıları yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{(\kappa_\alpha \cos \varphi)^2}{\left((\kappa_\alpha \cos \varphi)^2 + (\kappa_\alpha \sin \varphi)^2 \right)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{\kappa_\alpha \sin \varphi}{\kappa_\alpha \cos \varphi} \right)' \\ &= \frac{\kappa_\alpha^2 \cos^2 \varphi}{\kappa_\alpha^3} (\tan \varphi)' \\ &= \frac{\cos^2 \varphi}{\kappa_\alpha} \frac{\varphi'}{\cos^2 \varphi} \\ &= \frac{\varphi'}{\kappa_\alpha} = \frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha} \end{aligned}$$

eşitliği bulunur. $\frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}$ sabit olduğu için ρ fonksiyonu da sabittir. Dolayısıyla α^* eğrisi slant helistir.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Çalışmamızın bu bölümünde, Valeontis ve Menninger'in çalışmalarından yola çıkarak p – eş uzaklıklı regle yüzeyler oluşturan iki eğrinin α^* ve β^* successor eğrileri ele alındı. α^* ve β^* eğrilerinin oluşturduğu Γ^* ve $\overline{\Gamma^*}$ yüzeyleri, striksiyon noktasında asli normal vektörleri paralel ve uygun yerlerde merkezi düzlemler arasındaki uzaklık sabit olma şartı altında, successor eş uzaklıklı regle yüzeyler tanımlandı. Bu yüzeylerin striksiyon eğrileri ve bu eğrilerin teğetleri arasındaki bağıntılar verildi.

Çalışmanın ikinci bölümünde successor eş uzaklıklı regle yüzeylerin kapalı olması durumunda dayanak eğrilerine ait Frenet vektörleri, birim Darboux vektörleri ve Frenet vektörlerine bağlı hareket eden birim vektörlerin oluşturduğu regle yüzeylerin açılım açıları, açılım uzunlukları ve dralleri arasındaki bağıntılar ayrı ayrı ifade edildi.

Son olarak successor eş uzaklıklı regle yüzeyler için Weingarten Dönüşümü matrisi, Gauss eğriliği ve ortalama eğrilik hesaplandı. Successor eş uzaklıklı regle yüzeylere örnek verilerek Maple programı ile şekilleri çizdirildi.

4.1 Successor Eş Uzaklıklı Regle Yüzeyler

Tanım 4.1.1 \mathbb{R}^3 de α ve β diferensiyellenebilir eğrilerinin successor eğrileri α^* ve β^* olsun. Bu eğrilerin successor çatıları $\{u_1^*, u_2^*, u_3^*\}$ ve $\{v_1^*, v_2^*, v_3^*\}$ ile gösterilsin. α^* ve β^* eğrilerine ait u_2^* ve v_2^* vektörlerinin üretmiş olduğu regle yüzeylerin parametrik denklemleri sırasıyla

$$\Gamma^*(s, \sigma) = \alpha^*(s) + \sigma u_2^*(s) \text{ ve } \overline{\Gamma^*}(s, \sigma) = \beta^*(s) + \sigma v_2^*(s) \quad (4.1.1)$$

şeklinde verilsin. Eğer

- i) Striksiyon eğrileri boyunca u_2^* ve v_2^* üretici vektörleri paralel,
- ii) Uygun noktalarda $Sp\{u_1^*, u_3^*\}$ ve $Sp\{v_1^*, v_3^*\}$ düzlemleri arasında uzaklık sabit (bu uzaklık l ile gösterildi),

ise bu yüzey çiftine **successor l – eş uzaklıklı (l – equidistant) regle yüzeyler** denir.

$\Gamma^*(s, \sigma)$ regle yüzeyinin striksiyon çizgisi γ^* , $\overline{\Gamma^*}(s, \sigma)$ regle yüzeyinin striksiyon çizgisi $\overline{\gamma^*}$ ile gösterilsin. (2.2.5) bağıntısından striksiyon çizgileri sırasıyla

$$\gamma^*(s) = \alpha^*(s) + \frac{\kappa_\alpha^*(s)}{\kappa_\alpha^{*2}(s) + \tau_\alpha^{*2}(s)} u_2^*(s), \quad (4.1.2)$$

$$\overline{\gamma^*}(s) = \beta^*(s) + \frac{\kappa_\beta^*(s)}{\kappa_\beta^{*2}(s) + \tau_\beta^{*2}(s)} v_2^*(s)$$

şeklinde verilir.

Dayanak eğrisi olarak γ^* ve $\overline{\gamma^*}$, doğrultman vektör olarak u_2^* ve v_2^* alınırsa elde edilen successor eş uzaklıklı regle yüzeylerin denklemi

$$\Gamma^*(s, \sigma) = \gamma^*(s) + \sigma u_2^*(s) \text{ ve } \overline{\Gamma^*}(s, \sigma) = \overline{\gamma^*}(s) + \sigma v_2^*(s) \quad (4.1.3)$$

şeklinde yazılır.

$\overline{\overline{\gamma^* \gamma^*}}$ vektörünün u_1^* , u_2^* ve u_3^* vektörleri üzerine dik izdüşümleri sırasıyla c , l ve m olsun. Bu ifadeler izdüşüm tanımından

$$c = \langle \overline{\overline{\gamma^* \gamma^*}}, u_1^* \rangle, l = \langle \overline{\overline{\gamma^* \gamma^*}}, u_2^* \rangle, m = \langle \overline{\overline{\gamma^* \gamma^*}}, u_3^* \rangle$$

olur. Buna göre $\overline{\overline{\gamma^* \gamma^*}}$ vektörü

$$\overline{\overline{\gamma^* \gamma^*}} = c u_1^* + l u_2^* + m u_3^* \text{ veya } \overline{\gamma^*} = \gamma^* + c u_1^* + l u_2^* + m u_3^* \quad (4.1.4)$$

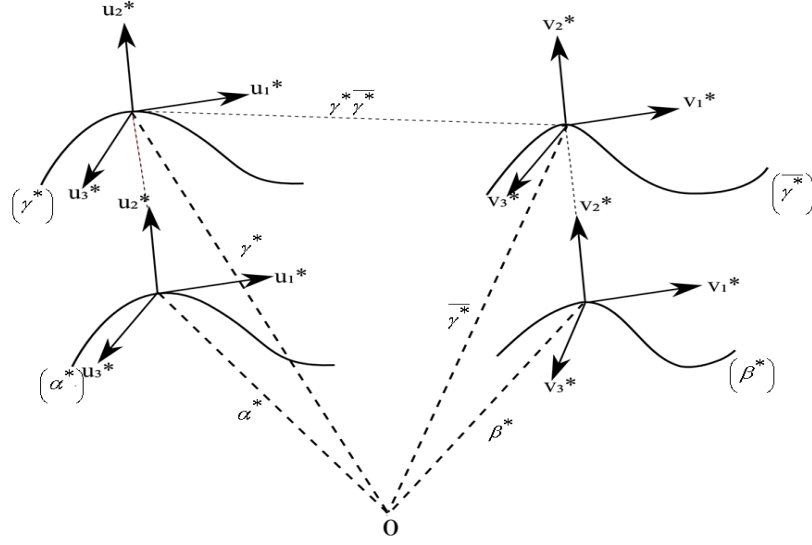
şeklinde olur.

Teorem 4.1.1 $\Gamma^*(s, \sigma)$ ve $\overline{\Gamma^*}(s, \sigma)$ successor eş uzaklıklı regle yüzeyler olsun. Bu yüzeylere ait γ^* , $\overline{\gamma^*}$ striksiyon çizgileri arasında

$$\overline{\gamma^*} = \gamma^* + c u_1^* + \left(\frac{\kappa_\alpha^* c' - \tau_\alpha^* m'}{\kappa_\alpha^{*2} + \tau_\alpha^{*2}} \right) u_2^* + m u_3^* \quad (4.1.5)$$

bağıntısı vardır.

İspat:



Şekil 4.1 Successor Eğrisinin Striksiyonları Arasındaki Uzaklık

(Şekil 4.1) den $\overline{\gamma^*}$ striksiyon eğrisi $\overline{\gamma^*} = \gamma^* + cu_1^* + lu_2^* + mu_3^*$ şeklinde yazılır. $\overline{\gamma^*}$ yerine (4.1.2) ifadesindeki değeri yazılırsa

$$\beta^* + \frac{\kappa_\beta^*}{\kappa_\beta^{*2} + \tau_\beta^{*2}} v_2^* = \gamma^* + cu_1^* + lu_2^* + mu_3^*$$

olur. Successor eğrisi tanımından $v_2^*(s) = u_2^*(s)$ olduğundan β^* eğrisi

$$\beta^* = \gamma^* + cu_1^* + \left(l - \frac{\kappa_\beta^*}{\kappa_\beta^{*2} + \tau_\beta^{*2}} \right) u_2^* + mu_3^* \quad (4.1.6)$$

şeklinde bulunur. Bu ifadenin türevi alınır, Frenet formülleri yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\beta^{*'} = \gamma^{*'} + c'u_1^* + cu_1^{*'} + \left(l - \frac{\kappa_\beta^*}{\kappa_\beta^{*2} + \tau_\beta^{*2}} \right)' u_2^* + \left(l - \frac{\kappa_\beta^*}{\kappa_\beta^{*2} + \tau_\beta^{*2}} \right) u_2^{*'} + mu_3^* + mu_3^{*'}$$

$$\beta^{*'} = \gamma^{*'} + c'u_1^* + c(\kappa_\alpha^* u_2^*) + \left(l - \frac{\kappa_\beta^*}{\kappa_\beta^{*2} + \tau_\beta^{*2}} \right)' u_2^* + \left(l - \frac{\kappa_\beta^*}{\kappa_\beta^{*2} + \tau_\beta^{*2}} \right) (-\kappa_\alpha^* u_1^* + \tau_\alpha^* u_3^*)$$

$$+ m'u_3^* + m(-\tau_\alpha^* u_2^*)$$

$$\begin{aligned}
\beta^{*'} &= \gamma^{*'} + \left(c' - \kappa_\alpha^* \left(l - \frac{\kappa_\beta^*}{\kappa_\beta^{*2} + \tau_\beta^{*2}} \right) \right) u_1^* + \left(c\kappa_\alpha^* - m\tau_\alpha^* + \left(l - \frac{\kappa_\beta^*}{\kappa_\beta^{*2} + \tau_\beta^{*2}} \right)' \right) u_2^* \\
&+ \left(m' + \tau_\alpha^* \left(l - \frac{\kappa_\beta^*}{\kappa_\beta^{*2} + \tau_\beta^{*2}} \right) \right) u_3^*
\end{aligned} \tag{4.1.7}$$

olur. Diğer taraftan (4.1.2) ifadesinin türevi alınır ve Frenet formülleri yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
\gamma^{*'} &= \left(\alpha^* + \frac{\kappa_\alpha^*(s)}{\kappa_\alpha^{*2}(s) + \tau_\alpha^{*2}(s)} u_2^* \right)' \\
&= \alpha^{*'} + \left(\frac{\kappa_\alpha^*}{\kappa_\alpha^{*2} + \tau_\alpha^{*2}} \right)' u_2^* + \left(\frac{\kappa_\alpha^*}{\kappa_\alpha^{*2} + \tau_\alpha^{*2}} \right) u_2^{*'} \\
&= u_1^* + \left(\frac{\kappa_\alpha^*}{\kappa_\alpha^{*2} + \tau_\alpha^{*2}} \right)' u_2^* + \left(\frac{\kappa_\alpha^*}{\kappa_\alpha^{*2} + \tau_\alpha^{*2}} \right) (-\kappa_\alpha^* u_1^* + \tau_\alpha^* u_3^*) \\
&= \left(1 - \frac{\kappa_\alpha^{*2}}{\kappa_\alpha^{*2} + \tau_\alpha^{*2}} \right) u_1^* + \left(\frac{\kappa_\alpha^*}{\kappa_\alpha^{*2} + \tau_\alpha^{*2}} \right)' u_2^* + \left(\frac{\kappa_\alpha^* \tau_\alpha^*}{\kappa_\alpha^{*2} + \tau_\alpha^{*2}} \right) u_3^*
\end{aligned}$$

olur. Bu ifade (4.1.7) de yerine yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned}
\beta^{*'} &= \left(1 - \frac{\kappa_\alpha^{*2}}{\kappa_\alpha^{*2} + \tau_\alpha^{*2}} \right) u_1^* + \left(\frac{\kappa_\alpha^*}{\kappa_\alpha^{*2} + \tau_\alpha^{*2}} \right)' u_2^* \\
&+ \left(\frac{\kappa_\alpha^* \tau_\alpha^*}{\kappa_\alpha^{*2} + \tau_\alpha^{*2}} \right) u_3^* + \left[c' - \kappa_\alpha^* \left(l - \frac{\kappa_\beta^*}{\kappa_\beta^{*2} + \tau_\beta^{*2}} \right) \right] u_1^* \\
&+ \left(c\kappa_\alpha^* - m\tau_\alpha^* + \left(l - \frac{\kappa_\beta^*}{\kappa_\beta^{*2} + \tau_\beta^{*2}} \right)' \right) u_2^* + \left(m' + \tau_\alpha^* \left(l - \frac{\kappa_\beta^*}{\kappa_\beta^{*2} + \tau_\beta^{*2}} \right) \right) u_3^*
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\left(1 - \frac{\kappa_\alpha^{*2}}{\kappa_\alpha^{*2} + \tau_\alpha^{*2}} \right) + c' - \left(l - \frac{\kappa_\beta^*}{\kappa_\beta^{*2} + \tau_\beta^{*2}} \right) \kappa_\alpha^* \right) u_1^* \\
&\quad + \left(\left(\frac{\kappa_\alpha^*}{\kappa_\alpha^{*2} + \tau_\alpha^{*2}} \right)' + c\kappa_\alpha^* - m\tau_\alpha^* + \left(l - \frac{\kappa_\beta^*}{\kappa_\beta^{*2} + \tau_\beta^{*2}} \right)' \right) u_2^* \\
&\quad + \left(\left(\frac{\kappa_\alpha^* \tau_\alpha^*}{\kappa_\alpha^{*2} + \tau_\alpha^{*2}} \right) + m' + \left(l - \frac{\kappa_\beta^*}{\kappa_\beta^{*2} + \tau_\beta^{*2}} \right) \tau_\alpha^* \right) u_3^*
\end{aligned}$$

olur. Bu ifade $u_2^{*'}$ ile iç çarpılır ve Frenet formülleri yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
\langle \beta^{*'}, u_2^{*'} \rangle &= \left(\left(1 - \frac{\kappa_\alpha^{*2}}{\kappa_\alpha^{*2} + \tau_\alpha^{*2}} \right) + c' - \left(l - \frac{\kappa_\beta^*}{\kappa_\beta^{*2} + \tau_\beta^{*2}} \right) \kappa_\alpha^* \right) \langle u_1^*, u_2^{*'} \rangle \\
&\quad + \left(\left(\frac{\kappa_\alpha^*}{\kappa_\alpha^{*2} + \tau_\alpha^{*2}} \right)' + c\kappa_\alpha^* - m\tau_\alpha^* + \left(l - \frac{\kappa_\beta^*}{\kappa_\beta^{*2} + \tau_\beta^{*2}} \right)' \right) \langle u_2^*, u_2^{*'} \rangle \\
&\quad + \left(\left(\frac{\kappa_\alpha^* \tau_\alpha^*}{\kappa_\alpha^{*2} + \tau_\alpha^{*2}} \right) + m' + \left(l - \frac{\kappa_\beta^*}{\kappa_\beta^{*2} + \tau_\beta^{*2}} \right) \tau_\alpha^* \right) \langle u_3^*, u_2^{*'} \rangle \\
&= \left(\left(1 - \frac{\kappa_\alpha^{*2}}{\kappa_\alpha^{*2} + \tau_\alpha^{*2}} \right) + c' - \left(l - \frac{\kappa_\beta^*}{\kappa_\beta^{*2} + \tau_\beta^{*2}} \right) \kappa_\alpha^* \right) \langle u_1^*, -\kappa_\alpha^* u_1^* + \tau_\alpha^* u_3^* \rangle \\
&\quad + \left(\left(\frac{\kappa_\alpha^*}{\kappa_\alpha^{*2} + \tau_\alpha^{*2}} \right)' + c\kappa_\alpha^* - m\tau_\alpha^* + \left(l - \frac{\kappa_\beta^*}{\kappa_\beta^{*2} + \tau_\beta^{*2}} \right)' \right) \langle u_2^*, -\kappa_\alpha^* u_1^* + \tau_\alpha^* u_3^* \rangle \\
&\quad + \left(\left(\frac{\kappa_\alpha^* \tau_\alpha^*}{\kappa_\alpha^{*2} + \tau_\alpha^{*2}} \right) + m' + \left(l - \frac{\kappa_\beta^*}{\kappa_\beta^{*2} + \tau_\beta^{*2}} \right) \tau_\alpha^* \right) \langle u_3^*, -\kappa_\alpha^* u_1^* + \tau_\alpha^* u_3^* \rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\kappa_\alpha^* \left(\left(1 - \frac{\kappa_\alpha^{*2}}{\kappa_\alpha^{*2} + \tau_\alpha^{*2}} \right) + c' \right) \\
&\quad + \tau_\alpha^* \left(\frac{\kappa_\alpha^* \tau_\alpha^*}{\kappa_\alpha^{*2} + \tau_\alpha^{*2}} + m' \right) + \left(l - \frac{\kappa_\beta^*}{\kappa_\beta^{*2} + \tau_\beta^{*2}} \right) (\kappa_\alpha^{*2} + \tau_\alpha^{*2})
\end{aligned}$$

olur. Bu ifade ve (4.1.6) ifadesi (2.2.5) te yerine yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa $\overline{\gamma^*}$ striksiyon çizgisi

$$\begin{aligned}
\overline{\gamma^*} &= \beta^* - \frac{\langle (v_2^*)', (\beta^*)' \rangle}{\| (v_2^*)' \|^2} v_2^* \\
&= \gamma^* + cu_1^* + \left(l - \frac{\kappa_\beta^*}{\kappa_\beta^{*2} + \tau_\beta^{*2}} \right) u_2^* + mu_3^* \\
&\quad - \frac{-\kappa_\alpha^* \left(\left(1 - \frac{\kappa_\alpha^{*2}}{\kappa_\alpha^{*2} + \tau_\alpha^{*2}} \right) + c' \right) + \tau_\alpha^* \left(\frac{\kappa_\alpha^* \tau_\alpha^*}{\kappa_\alpha^{*2} + \tau_\alpha^{*2}} + m' \right) + \left(l - \frac{\kappa_\beta^*}{\kappa_\beta^{*2} + \tau_\beta^{*2}} \right) (\kappa_\alpha^{*2} + \tau_\alpha^{*2})}{\kappa_\alpha^{*2} + \tau_\alpha^{*2}} u_2^* \\
&= \gamma^* + cu_1^* + \left(l - \frac{\kappa_\beta^*}{\kappa_\beta^{*2} + \tau_\beta^{*2}} \right) u_2^* + mu_3^* \\
&\quad - \frac{-\kappa_\alpha^* \left(\left(1 - \frac{\kappa_\alpha^{*2}}{\kappa_\alpha^{*2} + \tau_\alpha^{*2}} \right) + c' \right) + \tau_\alpha^* \left(\frac{\kappa_\alpha^* \tau_\alpha^*}{\kappa_\alpha^{*2} + \tau_\alpha^{*2}} + m' \right)}{\kappa_\alpha^{*2} + \tau_\alpha^{*2}} u_2^* - \left(l - \frac{\kappa_\beta^*}{\kappa_\beta^{*2} + \tau_\beta^{*2}} \right) u_2^* \\
&= \gamma^* + cu_1^* + \left(\frac{\kappa_\alpha^* \left(1 + c' - \frac{\kappa_\alpha^{*2}}{\kappa_\alpha^{*2} + \tau_\alpha^{*2}} \right) - \tau_\alpha^* \left(m' + \frac{\kappa_\alpha^* \tau_\alpha^*}{\kappa_\alpha^{*2} + \tau_\alpha^{*2}} \right)}{\kappa_\alpha^{*2} + \tau_\alpha^{*2}} \right) u_2^* + mu_3^* \\
&= \gamma^* + cu_1^* + \left(\frac{\kappa_\alpha^* c' - \tau_\alpha^* m'}{\kappa_\alpha^{*2} + \tau_\alpha^{*2}} \right) u_2^* + mu_3^*
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

Sonuç 4.1.1 $\Gamma^*(s, \sigma)$ ve $\overline{\Gamma^*}(s, \sigma)$ successor eş uzaklıklı regle yüzeylerin merkezi düzlemler arasındaki l uzaklığı

$$l = \frac{\kappa_\alpha^* c' - \tau_\alpha^* m'}{\kappa_\alpha^{*2} + \tau_\alpha^{*2}} \quad (4.1.8)$$

formülü ile verilir.

Sonuç 4.1.2 $\Gamma^*(s, \sigma)$ ile $\overline{\Gamma^*}(s, \sigma)$ successor eş uzaklıklı regle yüzeylerin merkezi düzlemler arasındaki l uzaklığının esas eğrilerin eğrilikleri cinsinden ifadesi

$$l = \frac{\cos \varphi c' - \sin \varphi m'}{\kappa_\alpha} \quad (4.1.9)$$

bağıntısı ile verilir.

İspat: (4.1.8) bağıntısında, (3.4.1) den $\kappa_\alpha^* = \kappa_\alpha \cos \varphi$ ve $\tau_\alpha^* = \kappa_\alpha \sin \varphi$ eğrilikleri yerine yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa l uzaklığı

$$\begin{aligned} l &= \frac{\kappa_\alpha \cos \varphi c' - \kappa_\alpha \sin \varphi m'}{(\kappa_\alpha \cos \varphi)^2 + (\kappa_\alpha \sin \varphi)^2} \\ &= \frac{\kappa_\alpha (\cos \varphi c' - \sin \varphi m')}{\kappa_\alpha^2} \\ &= \frac{\cos \varphi c' - \sin \varphi m'}{\kappa_\alpha} \end{aligned}$$

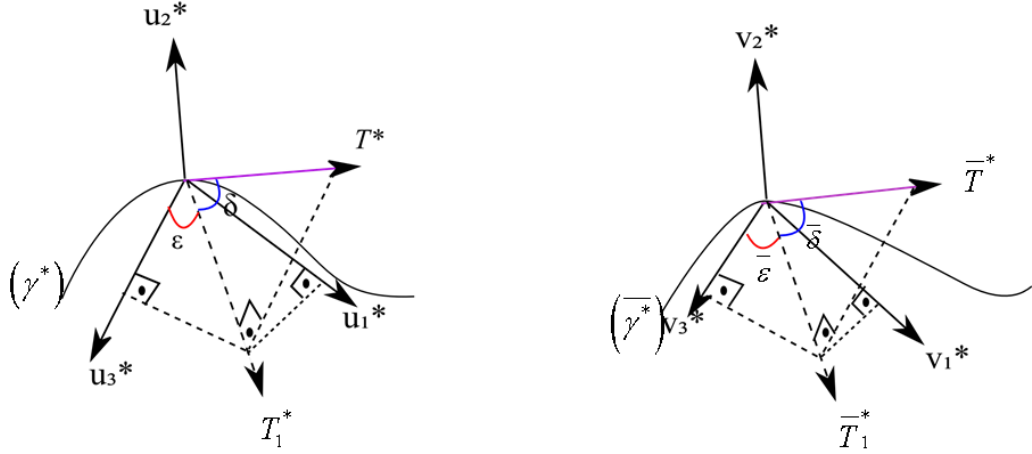
şeklinde bulunur.

Sonuç 4.1.3: Γ^* ve $\overline{\Gamma^*}$ successor eş uzaklıklı regle yüzeylerin merkezi düzlemler arasındaki l uzaklığının, striksiyon eğrilerinin teğet vektörlerine ait katsayılar cinsinden ifadesi

$$l = \frac{\kappa_\alpha^*}{\kappa_\alpha^{*2} + \tau_\alpha^{*2}} \left(\cos \delta \sin \varepsilon \frac{ds_{\gamma^*}}{ds^*} + c' \right) - \frac{\tau_\alpha^*}{\kappa_\alpha^{*2} + \tau_\alpha^{*2}} \left(\cos \delta \sin \varepsilon \frac{ds_{\gamma^*}}{ds^*} + m' \right)$$

bağıntısıyla verilir.

İspat:



Şekil 4.2 Striksiyon Eğrisinin Teğet Vektörleri

Successor eş uzaklıklı regle yüzeylerin striksiyon eğrilerine ait birim teğet vektörler T^* ve \bar{T}^* , bu vektörlerin merkezi düzlemlere iz düşüm vektörleri sırasıyla T_1^* ve \bar{T}_1^* olsun. T_1^* ile u_3^* vektörü arasındaki açı ε , \bar{T}_1^* ile v_3^* vektörü arasındaki açı $\bar{\varepsilon}$ ile gösterilsin (Şekil 4.2). T_1^* ve \bar{T}_1^* vektörleri

$$T_1^* = \sin \varepsilon u_1^* + \cos \varepsilon u_3^*,$$

$$\bar{T}_1^* = \sin \bar{\varepsilon} v_1^* + \cos \bar{\varepsilon} v_3^*$$

şeklinde yazılır. Benzer şekilde T^* ile T_1^* arasındaki açı δ , \bar{T}^* ile \bar{T}_1^* arasındaki açı $\bar{\delta}$ ile gösterilirse T^* ve \bar{T}^* vektörleri

$$T^* = \cos \delta T_1^* + \sin \delta u_2^*,$$

$$\bar{T}^* = \cos \bar{\delta} \bar{T}_1^* + \sin \bar{\delta} v_2^*$$

olur. T_1^* ve \bar{T}_1^* ifadeleri burada yerine yazılırsa, teğet vektörlerin Frenet çatıları cinsinden ifadesi

$$T^* = \cos \delta \sin \varepsilon u_1^* + \sin \delta u_2^* + \cos \delta \cos \varepsilon u_3^*,$$

(4.1.10)

$$\bar{T}^* = \cos \bar{\delta} \sin \bar{\varepsilon} v_1^* + \sin \bar{\delta} v_2^* + \cos \bar{\delta} \cos \bar{\varepsilon} v_3^*$$

olur. Diğer yandan Γ^* yüzeyinin striksiyon eğrisinin türevi

$$\gamma^{*'} = \frac{d\gamma^*}{ds^*} \frac{ds^*}{ds^*} = T^* \frac{ds^*}{ds^*}$$

şeklinde yazılır. Burada T^* yerine (4.1.10) daki karşılığı yazılırsa

$$\gamma^{*'} = \left(\cos \delta \sin \varepsilon u_1^* + \sin \delta u_2^* + \cos \delta \cos \varepsilon u_3^* \right) \frac{ds^*}{ds^*}$$

olur. Bu ifade β^* türevinde yerine yazılır ve düzenlenirse

$$\begin{aligned} \beta^{*'} &= \gamma^{*'} + \left(c' - \kappa_\alpha^* \left(l - \frac{\kappa_\beta^*}{\kappa_\beta^{*2} + \tau_\beta^{*2}} \right) \right) u_1^* + \left(c\kappa_\alpha^* - m\tau_\alpha^* + \left(l - \frac{\kappa_\beta^*}{\kappa_\beta^{*2} + \tau_\beta^{*2}} \right)' \right) u_2^* \\ &\quad + \left(m' + \tau_\alpha^* \left(l - \frac{\kappa_\beta^*}{\kappa_\beta^{*2} + \tau_\beta^{*2}} \right) \right) u_3^* \\ &= \left(\cos \delta \sin \varepsilon \frac{ds^*}{ds^*} + c' - \left(l - \frac{\kappa_\beta^*}{\kappa_\beta^{*2} + \tau_\beta^{*2}} \right) \kappa_\alpha^* \right) u_1^* \\ &\quad + \left(\sin \delta \frac{ds^*}{ds^*} + c\kappa_\alpha^* - m\tau_\alpha^* + \left(l - \frac{\kappa_\beta^*}{\kappa_\beta^{*2} + \tau_\beta^{*2}} \right)' \right) u_2^* \\ &\quad + \left(\cos \delta \cos \varepsilon \frac{ds^*}{ds^*} + c' + \left(l - \frac{\kappa_\beta^*}{\kappa_\beta^{*2} + \tau_\beta^{*2}} \right) \tau_\alpha^* \right) u_3^* \end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Bu ifade u_2^{*} ile iç çarpılırsa

$$\begin{aligned} \langle \beta^{*'}, u_2^{*} \rangle &= -\kappa_\alpha^* \cos \delta \sin \varepsilon \frac{ds^*}{ds^*} - \kappa_\alpha^* c' + \tau_\alpha^* \cos \delta \sin \varepsilon \frac{ds^*}{ds^*} \\ &\quad + \tau_\alpha^* m' + \left(l - \frac{\kappa_\beta^*}{\kappa_\beta^{*2} + \tau_\beta^{*2}} \right) (\kappa_\alpha^{*2} + \tau_\alpha^{*2}) \end{aligned}$$

olur. Bu ifade ve (4.1.6) ifadeleri $\overline{\gamma^*}$ striksiyon çizgisinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \overline{\gamma^*} &= \gamma^* + cu_1^* + mu_3^* \\ &+ \frac{1}{\kappa_\alpha^{*2} + \tau_\alpha^{*2}} \left(\kappa_\alpha^* \left(\cos \delta \sin \varepsilon \frac{ds_{\gamma^*}}{ds^*} + c' \right) - \tau_\alpha^* \left(\cos \delta \sin \varepsilon \frac{ds_{\gamma^*}}{ds^*} + m' \right) \right) u_2^* \end{aligned}$$

şeklinde bulunur. (4.1.4) bağıntısından l uzaklığı

$$l = \frac{\kappa_\alpha^*}{\kappa_\alpha^{*2} + \tau_\alpha^{*2}} \left(\cos \delta \sin \varepsilon \frac{ds_{\gamma^*}}{ds^*} + c' \right) - \frac{\tau_\alpha^*}{\kappa_\alpha^{*2} + \tau_\alpha^{*2}} \left(\cos \delta \sin \varepsilon \frac{ds_{\gamma^*}}{ds^*} + m' \right)$$

şeklinde bulunur.

Teorem 4.1.3 $\Gamma^*(s, \sigma)$ ile $\overline{\Gamma^*}(s, \sigma)$ successor eş uzaklıklı regle yüzeylerinin α^* ve β^* dayanak eğrilerinin Frenet çatıları sırasıyla $\{u_1^*, u_2^*, u_3^*\}$, $\{v_1^*, v_2^*, v_3^*\}$, u_3^* ve u_3 ile v_3^* ve v_3 vektörleri arasındaki açılar sırasıyla φ ve θ ile gösterilsin. Bu durumda Frenet çatıları arasında

$$\begin{aligned} \text{i.} \quad u_1^* &= \cos(\varphi - \theta)v_1^* + \sin(\varphi - \theta)v_3^* \\ \text{ii.} \quad u_2^* &= v_2^* \\ \text{iii.} \quad u_3^* &= -\sin(\varphi - \theta)v_1^* + \cos(\varphi - \theta)v_3^* \end{aligned} \tag{4.1.11}$$

bağıntıları vardır.

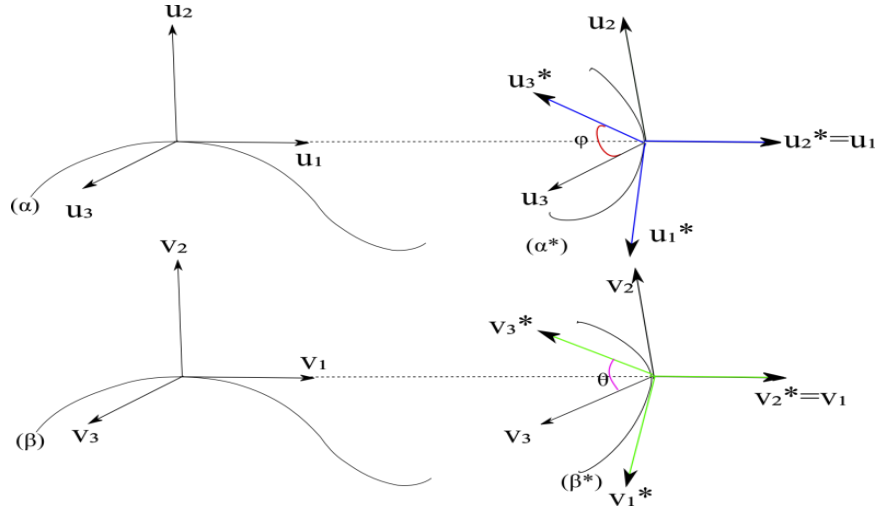
İspat: p -eş uzaklıklı regle yüzeylerin dayanak eğrilerine ait Frenet çatıları denk olduklarından

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılır. (3.4.1) ifadesinden successor çatıları arasındaki bağıntılar

$$\begin{bmatrix} u_1^* \\ u_2^* \\ u_3^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\cos \varphi & \sin \varphi \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \text{ ve } \begin{bmatrix} v_1^* \\ v_2^* \\ v_3^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\cos \theta & \sin \theta \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

şeklinde verilir (Şekil 4.3).



Şekil 4.3 Successor Eğrilerinin Çatıları

Bu bağıntılar kullanılarak successor çatıları arasındaki geçiş matrisi

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} u_1^* \\ u_2^* \\ u_3^* \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & -\cos \varphi & \sin \varphi \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & -\cos \varphi & \sin \varphi \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & -\cos \varphi & \sin \varphi \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\cos \theta & 0 & \sin \theta \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^* \\ v_2^* \\ v_3^* \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \cos \varphi \cos \theta + \sin \varphi \sin \theta & 0 & -\cos \varphi \sin \theta + \sin \varphi \cos \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varphi \cos \theta + \cos \varphi \sin \theta & 0 & \sin \varphi \sin \theta + \cos \varphi \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^* \\ v_2^* \\ v_3^* \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \cos(\varphi - \theta) & 0 & \sin(\varphi - \theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\varphi - \theta) & 0 & \cos(\varphi - \theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^* \\ v_2^* \\ v_3^* \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Bu da teoremin ispatını tamamlar.

Teorem 4.1.4 Γ^* ve $\bar{\Gamma}^*$ eş uzaklıklı regle yüzeylerin dayanak eğrilerinin κ_α^* , τ_α^* ve κ_β^* , τ_β^* eğrilikleri arasında

$$\begin{aligned}\kappa_\beta^* &= \left(\cos(\varphi - \theta) \kappa_\alpha^* + \sin(\varphi - \theta) \tau_\alpha^* \right) \frac{ds^*}{d\bar{s}^*}, \\ \tau_\beta^* &= \left(-\sin(\varphi - \theta) \kappa_\alpha^* + \cos(\varphi - \theta) \tau_\alpha^* \right) \frac{ds^*}{d\bar{s}^*}\end{aligned}\tag{4.1.12}$$

bağıntıları vardır.

İspat: Γ^* ve $\bar{\Gamma}^*$ successor eş uzaklıklı regle yüzeyler olduğundan $u_2^*(s^*) = v_2^*(\bar{s}^*)$ alınabilir. s^* yay parametresine göre türev alınırsa

$$\frac{du_2^*}{ds^*} = \frac{dv_2^*}{d\bar{s}^*} \frac{d\bar{s}^*}{ds^*}$$

bulunur. Burada Frenet formülleri yerine yazılırsa

$$-\kappa_\alpha^* u_1^* + \tau_\alpha^* u_3^* = \left(-\kappa_\beta^* v_1^* + \tau_\beta^* v_3^* \right) \frac{d\bar{s}^*}{ds^*}$$

olur. Eşitliğin her iki tarafı sırasıyla v_1^* ve v_3^* ile iç çarpılırsa

$$\begin{aligned}-\kappa_\alpha^* \underbrace{\langle u_1^*, v_1^* \rangle}_{\cos(\varphi - \theta)} + \tau_\alpha^* \underbrace{\langle u_3^*, v_1^* \rangle}_{-\sin(\varphi - \theta)} &= \left(-\kappa_\beta^* \underbrace{\langle v_1^*, v_1^* \rangle}_1 + \tau_\beta^* \underbrace{\langle v_3^*, v_1^* \rangle}_0 \right) \frac{d\bar{s}^*}{ds^*} \\ -\kappa_\alpha^* \underbrace{\langle u_1^*, v_3^* \rangle}_{\sin(\varphi - \theta)} + \tau_\alpha^* \underbrace{\langle u_3^*, v_3^* \rangle}_{\cos(\varphi - \theta)} &= \left(-\kappa_\beta^* \underbrace{\langle v_1^*, v_3^* \rangle}_0 + \tau_\beta^* \underbrace{\langle v_3^*, v_3^* \rangle}_1 \right) \frac{d\bar{s}^*}{ds^*}\end{aligned}$$

olur. Gerekli işlemler yapılırsa κ_β^* ve τ_β^* eğrilikleri hesaplanmış olur.

Teorem 4.1.5: Γ^* ve $\bar{\Gamma}^*$ successor eş uzaklıklı kapalı regle yüzeylerinin striksiyon eğrilerinin teğet vektörlerinin bileşenleri arasında

$$\begin{aligned}\cos \bar{\delta} \sin \bar{\varepsilon} \frac{ds_{\bar{\gamma}^*}}{ds} &= \cos(\varphi - \theta) \left(\cos \delta \sin \varepsilon \frac{ds_{\gamma^*}}{ds} + c' - l\kappa_\alpha^* \right) \\ &\quad - \sin(\varphi - \theta) \left(\cos \delta \cos \varepsilon \frac{ds_{\gamma^*}}{ds} + m' + l\tau_\alpha^* \right),\end{aligned}$$

$$\sin \bar{\delta} \frac{ds_{\bar{\gamma}}}{ds} = \sin \delta \frac{ds_{\gamma^*}}{ds} + c\kappa_{\alpha}^* - m\tau_{\alpha}^* + l', \quad (4.1.13)$$

$$\begin{aligned} \cos \bar{\delta} \cos \bar{\varepsilon} \frac{ds_{\bar{\gamma}}}{ds} &= -\sin(\varphi - \theta) \left(\cos \delta \sin \varepsilon \frac{ds_{\gamma^*}}{ds} + c' - l\kappa_{\alpha}^* \right) \\ &\quad + \cos(\varphi - \theta) \left(\cos \delta \cos \varepsilon \frac{ds_{\gamma^*}}{ds} + m' + l\tau_{\alpha}^* \right) \end{aligned}$$

bağıntıları vardır.

İspat: Γ^* ve $\bar{\Gamma}^*$ successor eş uzaklıklı regle yüzeyin $\bar{\gamma}^*$ striksiyonunun s yay parametresine göre türevi hesaplanırsa

$$\bar{T}^* \frac{ds_{\bar{\gamma}}}{ds} = T^* \frac{ds_{\gamma^*}}{ds} + c'u_1^* + cu_1'^* + m'u_3^* + mu_3'^* + l'u_2^* + lu_2'^*$$

olur. Burada Frenet formülleri yerine yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$\bar{T}^* \frac{ds_{\bar{\gamma}}}{ds} = T^* \frac{ds_{\gamma^*}}{ds} + (c' - l\kappa_{\alpha}^*)u_1^* + (c\kappa_{\alpha}^* - m\tau_{\alpha}^* + l')u_2^* + (m' + l\tau_{\alpha}^*)u_3^*$$

bulunur. \bar{T}^* ve T^* teğet vektörleri yerine (4.1.10) daki eşitlikleri yazılırsa

$$\begin{aligned} \left(\cos \bar{\delta} \sin \bar{\varepsilon}v_1^* + \sin \bar{\delta}v_2^* + \cos \bar{\delta} \cos \bar{\varepsilon}v_3^* \right) \frac{ds_{\bar{\gamma}}}{ds} &= \left(\cos \delta \sin \varepsilon \frac{ds_{\gamma^*}}{ds} + c' - l\kappa_{\alpha}^* \right) u_1^* \\ &\quad + \left(\sin \delta \frac{ds_{\gamma^*}}{ds} + c\kappa_{\alpha}^* - m\tau_{\alpha}^* + l' \right) u_2^* \\ &\quad + \left(\cos \delta \cos \varepsilon \frac{ds_{\gamma^*}}{ds} + m' + l\tau_{\alpha}^* \right) u_3^*, \end{aligned}$$

olur. Bu ifade sırasıyla v_1^* , v_2^* ve v_3^* vektörleri ile iç çarpılır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned} \cos \bar{\delta} \sin \bar{\varepsilon} \frac{ds_{\bar{\gamma}}}{ds} &= \cos(\varphi - \theta) \left(\cos \delta \sin \varepsilon \frac{ds_{\gamma^*}}{ds} + c' - l\kappa_{\alpha}^* \right) \\ &\quad - \sin(\varphi - \theta) \left(\cos \delta \cos \varepsilon \frac{ds_{\gamma^*}}{ds} + m' + l\tau_{\alpha}^* \right), \\ \sin \bar{\delta} \frac{ds_{\bar{\gamma}}}{ds} &= \sin \delta \frac{ds_{\gamma^*}}{ds} + c\kappa_{\alpha}^* - m\tau_{\alpha}^* + l', \\ \cos \bar{\delta} \cos \bar{\varepsilon} \frac{ds_{\bar{\gamma}}}{ds} &= -\sin(\varphi - \theta) \left(\cos \delta \sin \varepsilon \frac{ds_{\gamma^*}}{ds} + c' - l\kappa_{\alpha}^* \right) \\ &\quad + \cos(\varphi - \theta) \left(\cos \delta \cos \varepsilon \frac{ds_{\gamma^*}}{ds} + m' + l\tau_{\alpha}^* \right) \end{aligned}$$

elde edilir.

4.2 Kapalı Successor Eş Uzaklıklı Regle Yüzeylerin İntegral İnvaryantları

Successor eş uzaklıklı regle yüzeylerin kapalı olması durumunda successor eğrilerine ait Frenet vektörleri, birim Darboux vektörleri ve Frenet vektörlerinin lineer birleşimi olarak yazılan birim vektörlerin oluşturduğu regle yüzeylerin açılım açıları, açılım uzunlukları ve dralleri arasındaki bağıntılar bu kısımda ayrı ayrı ifade edildi. Hesaplar yapılırken kısalığın hatırı için, (4.1.2) bağıntısından striksiyon çizgisi;

$$\Upsilon(s) = \frac{\kappa_{\alpha}^*(s)}{\kappa_{\alpha}^{*2}(s) + \tau_{\alpha}^{*2}(s)} u_2^*(s) \text{ olmak üzere } \gamma^*(s) = \alpha^*(s) + \Upsilon(s) \quad (4.2.1)$$

şeklinde alınmıştır.

(4.1.6) bağıntısından β^* eğrisi;

$$\Omega(s) = cu_1^* + \left(l - \frac{\kappa_{\beta}^*}{\kappa_{\beta}^{*2} + \tau_{\beta}^{*2}} \right) u_2^* + mu_3^* \text{ olmak üzere } \beta^* = \gamma^* + \Omega(s) \quad (4.2.2)$$

şeklinde alınmıştır.

Teorem 4.2.1 Γ^* ve $\overline{\Gamma^*}$ successor eş uzaklıklı kapalı regle yüzeyleri verilsin. Frenet çatılarının oluşturduğu kapalı regle yüzeylerin açılım açıları arasında

$$\begin{aligned}
\text{i.} \quad \lambda_{v_1^*} &= \cos(\varphi - \theta) \lambda_{u_1^*} - \sin(\varphi - \theta) \lambda_{u_3^*} + \oint_{(\Upsilon)} \tau_\beta^* d\bar{s}^* + \oint_{(\Omega)} \tau_\beta^* d\bar{s}^*, \\
\text{ii.} \quad \lambda_{v_2^*} &= \lambda_{u_2^*} = 0, \\
\text{iii.} \quad \lambda_{v_3^*} &= \sin(\varphi - \theta) \lambda_{u_1^*} + \cos(\varphi - \theta) \lambda_{u_3^*} + \oint_{(\Upsilon)} \kappa_\beta^* d\bar{s}^* + \oint_{(\Omega)} \kappa_\beta^* d\bar{s}^*
\end{aligned} \tag{4.2.3}$$

bağıntıları vardır.

İspat: (2.2.10) bağıntısından v_1^* in oluşturduğu kapalı regle yüzeyin açılım açısı

$$\lambda_{v_1^*} = \oint_{(\beta^*)} \tau_\beta^* d\bar{s}^*$$

dır. Burada β^* in yerine (4.2.2) daki karşılığı yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned}
\lambda_{v_1^*} &= \oint_{(\gamma^* + \Omega)} \tau_\beta^* d\bar{s}^* \\
&= \oint_{(\gamma^*)} \tau_\beta^* d\bar{s}^* + \oint_{(\Omega)} \tau_\beta^* d\bar{s}^*
\end{aligned}$$

bulunur. γ^* yerine (4.2.1) deki karşılığı yazılırsa

$$\begin{aligned}
\lambda_{v_1^*} &= \oint_{(\alpha^* + \Upsilon)} \tau_\beta^* d\bar{s}^* + \oint_{(\Omega)} \tau_\beta^* d\bar{s}^* \\
&= \oint_{(\alpha^*)} \tau_\beta^* d\bar{s}^* + \oint_{(\Upsilon)} \tau_\beta^* d\bar{s}^* + \oint_{(\Omega)} \tau_\beta^* d\bar{s}^*
\end{aligned}$$

olur. τ_β^* in yerine (4.1.12) ifadesindeki eşiti yazılırsa

$$\begin{aligned}
\lambda_{v_1^*} &= \oint_{(\alpha^*)} (-\sin(\varphi - \theta) \kappa_\alpha^* + \cos(\varphi - \theta) \tau_\alpha^*) ds^* + \oint_{(\Upsilon)} \tau_\beta^* d\bar{s}^* + \oint_{(\Omega)} \tau_\beta^* d\bar{s}^* \\
&= -\sin(\varphi - \theta) \oint_{(\alpha^*)} \kappa_\alpha^* ds^* + \cos(\varphi - \theta) \oint_{(\alpha^*)} \tau_\alpha^* ds^* + \oint_{(\Upsilon)} \tau_\beta^* d\bar{s}^* + \oint_{(\Omega)} \tau_\beta^* d\bar{s}^*
\end{aligned}$$

bulunur. Burada $\oint_{(\alpha^*)} \kappa_\alpha^* ds^*$ ve $\oint_{(\alpha^*)} \tau_\alpha^* ds^*$ yerine (2.2.9) ifadesindeki değerleri

yazılırsa

$$\lambda_{v_1} = \cos(\varphi - \theta) \lambda_{u_1} - \sin(\varphi - \theta) \lambda_{u_3} + \oint_{(\gamma)} \tau_\beta^* d\bar{s}^* + \oint_{(\Omega)} \tau_\beta^* d\bar{s}^*$$

elde edilir. Kapalı regle yüzeyin asli normal vektörünün oluşturduğu yüzeyin açılım açısı (2.2.10) bağıntısından

$$\lambda_{v_2} = \lambda_{u_2} = 0$$

şeklinde bulunur. Kapalı regle yüzeyin binormal vektörünün oluşturduğu yüzeyin açılım açısı (2.2.10) bağıntısından

$$\lambda_{v_3} = \oint_{(\beta^*)} \kappa_\beta^* d\bar{s}^*$$

şeklinde yazılır. β^* in yerine (4.2.2) deki karşılığı yazılırsa

$$\begin{aligned} \lambda_{v_3} &= \oint_{(\gamma^* + \Omega)} \kappa_\beta^* d\bar{s}^* \\ &= \oint_{(\gamma^*)} \kappa_\beta^* d\bar{s}^* + \oint_{(\Omega)} \kappa_\beta^* d\bar{s}^* \end{aligned}$$

olur. Burada γ^* yerine (4.2.1) deki eşiti yazılırsa

$$\begin{aligned} \lambda_{v_3} &= \oint_{(\alpha^* + \gamma)} \kappa_\beta^* d\bar{s}^* + \oint_{(\Omega)} \kappa_\beta^* d\bar{s}^* \\ &= \oint_{(\alpha^*)} \kappa_\beta^* d\bar{s}^* + \oint_{(\gamma)} \kappa_\beta^* d\bar{s}^* + \oint_{(\Omega)} \kappa_\beta^* d\bar{s}^* \end{aligned}$$

bulunur. Bu ifade de κ_β^* in yerine (4.1.12) deki eşiti yazılırsa

$$\lambda_{v_3} = \oint_{(\alpha^*)} (\cos(\varphi - \theta) \kappa_\alpha^* + \sin(\varphi - \theta) \tau_\alpha^*) ds^* + \oint_{(\gamma)} \kappa_\beta^* d\bar{s}^* + \oint_{(\Omega)} \kappa_\beta^* d\bar{s}^*$$

$$\lambda_{v_3} = \cos(\varphi - \theta) \oint_{(\alpha^*)} \kappa_\alpha^* ds^* + \sin(\varphi - \theta) \oint_{(\alpha^*)} \tau_\alpha^* ds^* + \oint_{(\Upsilon)} \kappa_\beta^* d\bar{s}^* + \oint_{(\Omega)} \kappa_\beta^* d\bar{s}^*$$

olur. Burada $\oint_{(\alpha^*)} \kappa_\alpha^* ds^*$ ve $\oint_{(\alpha^*)} \tau_\alpha^* ds^*$ yerine (2.2.10) daki eşitleri yazılırsa açılım açısı

$$\lambda_{v_3} = \sin(\varphi - \theta) \lambda_{u_1} + \cos(\varphi - \theta) \lambda_{u_3} + \oint_{(\Upsilon)} \kappa_\beta^* d\bar{s}^* + \oint_{(\Omega)} \kappa_\beta^* d\bar{s}^*$$

şeklinde elde edilir.

Teorem 4.2.2 Γ^* ve $\overline{\Gamma^*}$ successor eş uzaklıklı kapalı regle yüzeyleri verilsin. Frenet çatılarının oluşturduğu kapalı regle yüzeylerin açılım uzunlukları arasında

$$\begin{aligned} \text{i. } L_{v_1}^* &= L_{u_1}^* \left(\cos(\varphi - \theta) \frac{\kappa_\alpha^*}{\kappa_\beta^*} + \sin(\varphi - \theta) \frac{\tau_\alpha^*}{\kappa_\beta^*} \right) + \oint_{(\Upsilon)} d\bar{s}^* + \oint_{(\Omega)} d\bar{s}^*, \\ \text{ii. } L_{v_2}^* &= L_{v_3}^* = 0, \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

bağıntıları vardır.

İspat: (2.2.10) bağıntısından successor eş uzaklıklı kapalı regle yüzeylerin teğet, asli normal ve binormal vektörlerinin çizdiği regle yüzeylerin açılım uzunlukları sırasıyla

$$L_{v_1}^* = \oint_{(\beta^*)} d\bar{s}^*, \quad L_{v_2}^* = L_{v_3}^* = 0$$

şeklinde verilir. Burada β^* yerine (4.2.2) bağıntısından eşiti yazılırsa $L_{v_1}^*$ açılım uzunluğu

$$\begin{aligned} L_{v_1}^* &= \oint_{(\gamma^* + \Omega)} d\bar{s}^*, \\ &= \oint_{(\gamma^*)} ds^* + \oint_{(\Omega)} d\bar{s}^* \end{aligned}$$

olur. γ^* yerine (4.2.1) deki eşiti yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned}
L_{v_1^*} &= \oint_{(\alpha^*+\gamma)} d\bar{s}^* + \oint_{(\Omega)} d\bar{s}^* \\
&= \oint_{(\alpha^*)} d\bar{s}^* + \oint_{(\gamma)} d\bar{s}^* + \oint_{(\Omega)} d\bar{s}^*
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. $d\bar{s}^*$ yerine (4.1.12) deki eşiti yazılırsa $L_{v_1^*}$ ifadesi

$$L_{v_1^*} = \oint_{(\alpha^*)} \left(\cos(\varphi - \theta) \frac{\kappa_\alpha^*}{\kappa_\beta^*} + \sin(\varphi - \theta) \frac{\tau_\alpha^*}{\kappa_\beta^*} \right) ds^* + \oint_{(\gamma)} d\bar{s}^* + \oint_{(\Omega)} d\bar{s}^*$$

olur. Eğer yüzeyin dayanak eğrisi dairesel helis alınırsa $L_{v_1^*}$ açılım uzunluğu

$$L_{v_1^*} = \left(\cos(\varphi - \theta) \frac{\kappa_\alpha^*}{\kappa_\beta^*} + \sin(\varphi - \theta) \frac{\tau_\alpha^*}{\kappa_\beta^*} \right) \oint_{(\alpha^*)} ds^* + \oint_{(\gamma)} d\bar{s}^* + \oint_{(\Omega)} d\bar{s}^*$$

olur. Bu son eşitlikte $\oint_{(\alpha^*)} ds^*$ yerine eşiti kullanılırsa açılım uzunluğu

$$L_{v_1^*} = L_{u_1^*} \left(\cos(\varphi - \theta) \frac{\kappa_\alpha^*}{\kappa_\beta^*} + \sin(\varphi - \theta) \frac{\tau_\alpha^*}{\kappa_\beta^*} \right) + \oint_{(\gamma)} d\bar{s}^* + \oint_{(\Omega)} d\bar{s}^*$$

şeklinde elde edilir.

Teorem 4.2.3 Γ^* ve $\overline{\Gamma^*}$ successor eş uzaklıklı kapalı regle yüzeyleri verilsin. Frenet vektörlerinin oluşturduğu kapalı regle yüzeylerin dralleri arasında

- i. $P_{v_1^*} = P_{u_1^*} = 0$,
- ii. $P_{v_2^*} = P_{u_2^*} \left(\cos(\varphi - \theta) - \sin(\varphi - \theta) \frac{\kappa_\alpha^*}{\tau_\alpha^*} \right) \frac{d\bar{s}^*}{ds^*}$,
- iii. $P_{v_3^*} = P_{u_3^*} \frac{\tau_\alpha^*}{(-\sin(\varphi - \theta)\kappa_\alpha^* + \cos(\varphi - \theta)\tau_\alpha^*)} \frac{d\bar{s}^*}{ds^*}$

bağıntıları vardır.

İspat: (2.2.10) bağıntısından v_1^* teğet vektörün oluşturduğu kapalı regle yüzeyin drali

$$P_{v_1^*} = 0$$

olur. v_2^* asli normal vektörün oluşturduğu kapalı regle yüzeyin drali ise

$$P_{v_2^*} = \frac{\tau_\beta^*}{\kappa_\beta^{*2} + \tau_\beta^{*2}}$$

şeklinde yazılır. (4.1.12) bağıntıları yerine yazılırsa dral

$$\begin{aligned} P_{v_2^*} &= \frac{-\left(\sin(\varphi - \theta)\kappa_\alpha^* - \cos(\varphi - \theta)\tau_\alpha^*\right)\frac{ds^*}{d\bar{s}^*}}{\left(\left(\cos(\varphi - \theta)\kappa_\alpha^* + \sin(\varphi - \theta)\tau_\alpha^*\right)\frac{ds^*}{d\bar{s}^*}\right)^2 + \left(\left(\sin(\varphi - \theta)\kappa_\alpha^* - \cos(\varphi - \theta)\tau_\alpha^*\right)\frac{ds^*}{d\bar{s}^*}\right)^2} \\ &= \frac{-\left(\sin(\varphi - \theta)\kappa_\alpha^* - \cos(\varphi - \theta)\tau_\alpha^*\right)\frac{ds^*}{d\bar{s}^*}}{\left(\kappa_\alpha^{*2} + \tau_\alpha^{*2}\right)\left(\frac{ds^*}{d\bar{s}^*}\right)^2} \\ &= \cos(\varphi - \theta)\frac{\tau_\alpha^*}{\left(\kappa_\alpha^{*2} + \tau_\alpha^{*2}\right)}\frac{d\bar{s}^*}{ds^*} - \sin(\varphi - \theta)\frac{\tau_\alpha^*}{\left(\kappa_\alpha^{*2} + \tau_\alpha^{*2}\right)}\frac{\kappa_\alpha^*}{\tau_\alpha^*}\frac{d\bar{s}^*}{ds^*} \end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Burada (2.2.10) ifadesi dikkate alınırsa $P_{v_2^*}$ drali

$$P_{v_2^*} = P_{u_2^*} \left(\cos(\varphi - \theta) - \sin(\varphi - \theta)\frac{\kappa_\alpha^*}{\tau_\alpha^*} \right) \frac{d\bar{s}^*}{ds^*}$$

şeklinde olur. v_3^* binormal vektörünün oluşturduğu kapalı regle yüzeyin drali yazılıp pay ve paydası τ_α^* ile çapılırsa dral

$$P_{v_3^*} = \frac{1}{\tau_\beta^*} = \frac{1}{\tau_\alpha^*} \frac{\tau_\alpha^*}{\tau_\beta^*}$$

olur. (2.2.10) ve (4.1.12) bağıntıları dikkate alınırsa $P_{v_3^*}$ dral ifadesi

$$P_{v_3^*} \frac{ds^*}{d\bar{s}^*} = \frac{\tau_\alpha^*}{\left(-\sin(\varphi - \theta)\kappa_\alpha^* + \cos(\varphi - \theta)\tau_\alpha^*\right)} P_{u_3^*}$$

şeklinde bulunur.

Şimdi de; $\Gamma^*(s, \sigma)$ kapalı regle yüzeyini oluşturan dayanak eğrisine ait birim Darboux vektörü ana doğru olarak alındığında elde edilen regle yüzeyin λ_{c^*} açılım açısı, L_{c^*} açılım uzunluğu ve P_{c^*} dralini hesaplayalım. (2.2.8) deki λ_{c^*} ve L_{c^*} ifadelerinde (2.1.7), (2.1.9) ve (2.1.11) bağıntıları yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
\lambda_{c^*} = \langle D^*, c^* \rangle &\Rightarrow \lambda_{c^*} = \left\langle u_1^* \oint_{(\alpha^*)} \tau_\alpha^* ds^* + u_3^* \oint_{(\alpha^*)} \kappa_\alpha^* ds^*, \sin \mu u_1^* + \cos \mu u_3^* \right\rangle \\
&= \sin \mu \oint_{(\alpha^*)} \tau_\alpha^* ds^* + \cos \mu \oint_{(\alpha^*)} \kappa_\alpha^* ds^* \\
&= \lambda_{u_1^*} \sin \mu + \lambda_{u_3^*} \cos \mu, \\
L_{c^*} = \langle V^*, c^* \rangle &\Rightarrow L_{c^*} = \left\langle u_1^* \oint_{(\alpha^*)} ds^*, \sin \mu u_1^* + \cos \mu u_3^* \right\rangle \\
&= \sin \mu \oint_{(\alpha^*)} ds^* \\
&= L_{u_1^*} \sin \mu
\end{aligned} \tag{4.2.5}$$

şeklinde bulunur. P_{c^*} drali (2.2.6) bağıntısından hesaplanırsa

$$\begin{aligned}
P_{c^*} &= \frac{\det(\alpha^{*'}, c^*, c^{*'})}{\|c^{*'}\|^2} \\
&= \frac{\det(u_1^*, \sin \mu u_1^* + \cos \mu u_3^*, \mu' \cos \mu u_1^* + (\sin \mu \kappa_\alpha^* - \cos \mu \tau_\alpha^*) u_2^* - \mu' \sin \mu u_3^*)}{\|(\sin \mu \kappa_\alpha^* - \cos \mu \tau_\alpha^*) u_2^* - \mu' \sin \mu u_3^*\|^2} \\
&= - \frac{\cos \mu (\sin \mu \kappa_\alpha^* - \cos \mu \tau_\alpha^*)}{\mu'^2 + (\sin \mu \kappa_\alpha^* - \cos \mu \tau_\alpha^*)^2}
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

Benzer işlemler $\bar{\Gamma}^*(s, \sigma)$ kapalı regle yüzeyi için de yapılırsa integral invaryantları

$$\begin{aligned}
 \text{i.} \quad \lambda_{c^*} &= \lambda_{v_1^*} \sin \bar{\mu} + \lambda_{v_3^*} \cos \bar{\mu}, \\
 \text{ii.} \quad L_{c^*} &= L_{v_1^*} \sin \bar{\mu}, \\
 \text{iii.} \quad P_{c^*} &= \frac{-\cos \bar{\mu} (\sin \bar{\mu} \kappa_\beta^* - \cos \bar{\mu} \tau_\beta^*)}{\mu'^2 + (\sin \bar{\mu} \kappa_\beta^* - \cos \bar{\mu} \tau_\beta^*)^2}
 \end{aligned} \tag{4.2.6}$$

şeklinde bulunur.

Teorem 4.2.4 $\bar{\Gamma}^*(s, \sigma)$ successor eş uzaklıklı regle yüzeyin dayanak eğrisine ait birim Darboux vektörünün binormal vektörü ile yaptığı açı $\bar{\mu}$ ile gösterilirse, bu açılar arasında

$$\begin{aligned}
 \cos \bar{\mu} &= \cos \mu \cos(\varphi - \theta) + \sin \mu \sin(\varphi - \theta), \\
 \sin \bar{\mu} &= -\cos \mu \sin(\varphi - \theta) + \sin \mu \cos(\varphi - \theta)
 \end{aligned} \tag{4.2.7}$$

bağıntıları vardır.

İspat: $\bar{\Gamma}^*(s, \sigma)$ successor eş uzaklıklı regle yüzeyinin dayanak eğrisine ait birim Darboux vektörünün binormal vektörü ile yaptığı açı $\bar{\mu}$ ile gösterilirse, bu açı

$$\cos \bar{\mu} = \frac{\kappa_\beta^*}{\|w^*\|} = \frac{\kappa_\beta^*}{\sqrt{\kappa_\beta^{*2} + \tau_\beta^{*2}}}, \quad \sin \bar{\mu} = \frac{\tau_\beta^*}{\|w^*\|} = \frac{\tau_\beta^*}{\sqrt{\kappa_\beta^{*2} + \tau_\beta^{*2}}}$$

şeklinde yazılır. Burada κ_β^* ve τ_β^* yerine (4.1.12) den eşitleri yazılırsa, $\cos \bar{\mu}$ ve $\sin \bar{\mu}$ sırasıyla

$$\cos \bar{\mu} = \frac{(\cos(\varphi - \theta) \kappa_\alpha^* + \sin(\varphi - \theta) \tau_\alpha^*) \frac{ds^*}{d\bar{s}^*}}{\sqrt{\left((\cos(\varphi - \theta) \kappa_\alpha^* + \sin(\varphi - \theta) \tau_\alpha^*)^2 + (-\sin(\varphi - \theta) \kappa_\alpha^* + \cos(\varphi - \theta) \tau_\alpha^*)^2 \right) \left(\frac{ds^*}{d\bar{s}^*} \right)^2}}$$

$$\begin{aligned}
\overline{\cos \mu} &= \frac{(\cos(\varphi - \theta)\kappa_\alpha^* + \sin(\varphi - \theta)\tau_\alpha^*)}{\sqrt{(\cos(\varphi - \theta)\kappa_\alpha^* + \sin(\varphi - \theta)\tau_\alpha^*)^2 + (-\sin(\varphi - \theta)\kappa_\alpha^* + \cos(\varphi - \theta)\tau_\alpha^*)^2}} \\
&= \frac{\kappa_\alpha^*}{\sqrt{\kappa_\alpha^{*2}(s) + \tau_\alpha^{*2}(s)}} \cos(\varphi - \theta) + \frac{\tau_\alpha^*}{\sqrt{\kappa_\alpha^{*2}(s) + \tau_\alpha^{*2}(s)}} \sin(\varphi - \theta) \\
&= \cos \mu \cos(\varphi - \theta) + \sin \mu \sin(\varphi - \theta) \\
\overline{\sin \mu} &= \frac{(-\kappa_\alpha^* \sin(\varphi - \theta) + \tau_\alpha^* \cos(\varphi - \theta)) \frac{ds^*}{ds^*}}{\sqrt{\left((\kappa_\alpha^* \cos(\varphi - \theta) + \tau_\alpha^* \sin(\varphi - \theta)) \frac{ds^*}{ds^*} \right)^2 + \left((-\kappa_\alpha^* \sin(\varphi - \theta) + \tau_\alpha^* \cos(\varphi - \theta)) \frac{ds^*}{ds^*} \right)^2}} \\
&= -\frac{(\kappa_\alpha^* \sin(\varphi - \theta) - \tau_\alpha^* \cos(\varphi - \theta)) \frac{ds^*}{ds^*}}{\sqrt{\left((\kappa_\alpha^* \cos(\varphi - \theta) + \tau_\alpha^* \sin(\varphi - \theta)) \frac{ds^*}{ds^*} \right)^2 + \left((-\kappa_\alpha^* \sin(\varphi - \theta) + \tau_\alpha^* \cos(\varphi - \theta)) \frac{ds^*}{ds^*} \right)^2}} \\
&= -\frac{\kappa_\alpha^*}{\sqrt{\kappa_\alpha^{*2}(s) + \tau_\alpha^{*2}(s)}} \sin(\varphi - \theta) + \frac{\tau_\alpha^*}{\sqrt{\kappa_\alpha^{*2}(s) + \tau_\alpha^{*2}(s)}} \cos(\varphi - \theta) \\
&= -\cos \mu \sin(\varphi - \theta) + \sin \mu \cos(\varphi - \theta)
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

Teorem 4.2.5 Γ^* ve $\overline{\Gamma^*}$ successor eş uzaklıklı kapalı regle yüzeyleri verilsin. $\overline{c^*}$ birim Darboux vektörünün çizdiği kapalı regle yüzeyin açılım açısı

$$\lambda_{\overline{c^*}} = \lambda_{c^*} + \sin \overline{\mu} b_1 + \cos \overline{\mu} b_2$$

bağıntısıyla verilir.

Burada $b_1 = \oint_{(\Upsilon)} \tau_\beta^* d\bar{s}^* + \oint_{(\Omega)} \tau_\beta^* d\bar{s}^*$, $b_2 = \oint_{(\Upsilon)} \kappa_\beta^* d\bar{s}^* + \oint_{(\Omega)} \kappa_\beta^* d\bar{s}^*$ şeklindedir.

İspat: (4.2.6) bağıntısından \bar{c}^* in oluşturduğu kapalı regle yüzeyin açılım açısı

$$\lambda_{\bar{c}^*} = \lambda_{v_1^*} \sin \bar{\mu} + \lambda_{v_3^*} \cos \bar{\mu}$$

dır. Burada (4.2.7), (4.2.3) bağıntıları yerine yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa açılım açısı

$$\begin{aligned} \lambda_{\bar{c}^*} &= \left(\cos(\varphi - \theta) \lambda_{u_1^*} - \sin(\varphi - \theta) \lambda_{u_3^*} + b_1 \right) \left(-\cos \mu \sin(\varphi - \theta) + \sin \mu \cos(\varphi - \theta) \right) \\ &\quad + \left(\sin(\varphi - \theta) \lambda_{u_1^*} + \cos(\varphi - \theta) \lambda_{u_3^*} + b_2 \right) \left(\cos \mu \cos(\varphi - \theta) + \sin \mu \sin(\varphi - \theta) \right) \\ &= \underbrace{\sin \mu \lambda_{u_1^*} + \cos \mu \lambda_{u_3^*}}_{\lambda_{c^*}} + b_1 \underbrace{\left(-\cos \mu \sin(\varphi - \theta) + \sin \mu \cos(\varphi - \theta) \right)}_{\sin \bar{\mu}} \\ &\quad + b_2 \underbrace{\left(\cos \mu \cos(\varphi - \theta) + \sin \mu \sin(\varphi - \theta) \right)}_{\cos \bar{\mu}} \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

Teorem 4.2.6 Γ^* ve $\bar{\Gamma}^*$ successor eş uzaklıklı kapalı regle yüzeyleri verilsin. c^* ve \bar{c}^* birim Darboux vektörlerinin oluşturduğu kapalı regle yüzeylerin açılım uzunlukları arasında

$$\begin{aligned} L_{\bar{c}^*} &= \left(-\sin(\varphi - \theta) \cot \mu + \cos(\varphi - \theta) \right) \left(\cos(\varphi - \theta) \frac{\kappa_\alpha^*}{\kappa_\beta^*} + \sin(\varphi - \theta) \frac{\tau_\alpha^*}{\kappa_\beta^*} \right) L_{c^*} \\ &\quad + b_3 \sin \bar{\mu} \end{aligned}$$

bağıntısı vardır. Burada $b_3 = \oint_{(\Upsilon)} \tau_\beta^* d\bar{s}^* + \oint_{(\Omega)} \tau_\beta^* d\bar{s}^*$ şeklindedir.

İspat: Birim Darboux vektörü olan \bar{c}^* in oluşturduğu regle yüzeyin açılım uzunluğu (4.2.6) bağıntısından

$$L_{\bar{c}^*} = L_{v_1^*} \sin \bar{\mu}$$

şeklinde verilir. Burada (4.2.4) ve (4.2.7) bağıntıları yerine yazılırsa

$$L_{\bar{c}^*} = \left(L_{u_1^*} \left(\cos(\varphi - \theta) \frac{\kappa_\alpha^*}{\kappa_\beta^*} + \sin(\varphi - \theta) \frac{\tau_\alpha^*}{\kappa_\beta^*} \right) + b_3 \right) \\ (-\cos \mu \sin(\varphi - \theta) + \sin \mu \cos(\varphi - \theta))$$

olur. $L_{u_1^*}$ yerine (4.2.5) ifadesindeki eşiti yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$L_{\bar{c}^*} = \left(\frac{L_{c^*}}{\sin \mu} \left(\frac{\kappa_\alpha^*}{\kappa_\beta^*} \cos(\varphi - \theta) + \frac{\tau_\alpha^*}{\kappa_\beta^*} \sin(\varphi - \theta) \right) + b_3 \right) \\ (-\cos \mu \sin(\varphi - \theta) + \sin \mu \cos(\varphi - \theta)) \\ = (-\cot \mu \sin(\varphi - \theta) + \cos(\varphi - \theta)) \left(\frac{\kappa_\alpha^*}{\kappa_\beta^*} \cos(\varphi - \theta) + \frac{\tau_\alpha^*}{\kappa_\beta^*} \sin(\varphi - \theta) \right) L_{c^*} \\ + b_3 (-\cos \mu \sin(\varphi - \theta) + \sin \mu \cos(\varphi - \theta)) \\ = (-\cot \mu \sin(\varphi - \theta) + \cos(\varphi - \theta)) \left(\frac{\kappa_\alpha^*}{\kappa_\beta^*} \cos(\varphi - \theta) + \frac{\tau_\alpha^*}{\kappa_\beta^*} \sin(\varphi - \theta) \right) L_{c^*} + \sin \bar{\mu} b_3$$

elde edilir.

Teorem 4.2.7 Γ^* ve $\bar{\Gamma}^*$ successor eş uzaklıklı kapalı regle yüzeyler olsun. c^* ve \bar{c}^* birim vektörlerinin çizdiği kapalı regle yüzeylerin dralleri arasında

$$P_{\bar{c}^*} = P_{c^*} (-\tan \mu \sin(\varphi - \theta) + \cos(\varphi - \theta)) \frac{d\bar{s}^*}{ds^*}$$

bağıntısı vardır.

İspat: (4.2.6) bağıntısından \bar{c}^* birim Darboux vektörünün oluşturduğu regle yüzeyin drali

$$P_{\bar{c}^*} = \frac{\cos \bar{\mu} (\cos \bar{\mu} \tau_\beta^* - \sin \bar{\mu} \kappa_\beta^*)}{\bar{\mu}^2 + (\sin \bar{\mu} \kappa_\beta^* - \cos \bar{\mu} \tau_\beta^*)^2}$$

şeklinde yazılır. (4.1.12) ifadesi yerine yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned}
P_{\bar{c}} &= \frac{-\left(\cos(\varphi-\theta)\cos\mu + \sin(\varphi-\theta)\sin\mu\right) \left(\begin{array}{l} \left(-\sin(\varphi-\theta)\cos\mu + \cos(\varphi-\theta)\sin\mu\right)\left(\cos(\varphi-\theta)\kappa_{\alpha}^* + \sin(\varphi-\theta)\tau_{\alpha}^*\right)\frac{ds^*}{ds^*} \\ -\left(\cos(\varphi-\theta)\cos\mu + \sin(\varphi-\theta)\sin\mu\right)\left(-\sin(\varphi-\theta)\kappa_{\alpha}^* + \cos(\varphi-\theta)\tau_{\alpha}^*\right)\frac{ds^*}{ds^*} \end{array} \right)}{\bar{\mu}'^2 + \left(\begin{array}{l} \left(-\sin(\varphi-\theta)\cos\mu + \cos(\varphi-\theta)\sin\mu\right)\left(\cos(\varphi-\theta)\kappa_{\alpha}^* + \sin(\varphi-\theta)\tau_{\alpha}^*\right)\frac{ds^*}{ds^*} \\ -\left(\cos(\varphi-\theta)\cos\mu + \sin(\varphi-\theta)\sin\mu\right)\left(-\sin(\varphi-\theta)\kappa_{\alpha}^* + \cos(\varphi-\theta)\tau_{\alpha}^*\right)\frac{ds^*}{ds^*} \end{array} \right)^2} \\
&= \frac{-\left(\cos(\varphi-\theta)\cos\mu + \sin(\varphi-\theta)\sin\mu\right)\left(\sin\mu\kappa_{\alpha}^* - \cos\mu\tau_{\alpha}^*\right)\frac{ds^*}{ds^*}}{\bar{\mu}'^2 + \left(\sin\mu\kappa_{\alpha}^* - \cos\mu\tau_{\alpha}^*\right)\frac{ds^*}{ds^*}} \\
&= P_{c^*} \left(\cos(\varphi-\theta) - \sin(\varphi-\theta)\tan\mu\right)\frac{ds^*}{ds^*}
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

Teorem 4.2.8 Successor eş uzaklıklı regle yüzeylerin dayanak eğrileri üzerinde hareket eden vektörler sırasıyla $X^* = x_1u_1^* + x_2u_2^* + x_3u_3^*$ ve $\bar{X}^* = \bar{x}_1v_1^* + \bar{x}_2v_2^* + \bar{x}_3v_3^*$ olsun. Bu durumda \bar{X}^* vektörü

$$\begin{aligned}
\bar{X}^* &= \left(\left(x_1 - c\right)\cos(\varphi - \theta) - \left(x_3 - m\right)\sin(\varphi - \theta)\right)v_1^* + \left(x_2 - l\right)v_2^* \\
&\quad + \left(\left(x_1 - c\right)\sin(\varphi - \theta) + \left(x_3 - m\right)\cos(\varphi - \theta)\right)v_3^*
\end{aligned} \tag{4.2.8}$$

bağıntısıyla verilir.

İspat: (4.1.4) ifadesinden \bar{X}^* vektörü

$$\begin{aligned}
\bar{X}^* &= X^* - \gamma^* \bar{\gamma}^* \\
&= x_1u_1^* + x_2u_2^* + x_3u_3^* - \left(cu_1^* + lu_2^* + mu_3^*\right) \\
&= \left(x_1 - c\right)u_1^* + \left(x_2 - l\right)u_2^* + \left(x_3 - m\right)u_3^*
\end{aligned}$$

şeklinde yazılır. (4.1.11) ifadesi yerine yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa $\overline{X^*}$ vektörü

$$\begin{aligned}\overline{X^*} &= (x_1 - c)(\cos(\varphi - \theta)v_1^* + \sin(\varphi - \theta)v_3^*) + (x_2 - l)v_2^* \\ &\quad + (x_3 - m)(-\sin(\varphi - \theta)v_1^* + \cos(\varphi - \theta)v_3^*) \\ &= ((x_1 - c)\cos(\varphi - \theta) - (x_3 - m)\sin(\varphi - \theta))v_1^* + (x_2 - l)v_2^* \\ &\quad + ((x_1 - c)\sin(\varphi - \theta) + (x_3 - m)\cos(\varphi - \theta))v_3^*\end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

Teorem 4.2.9 Γ^* kapalı regle yüzeyinin dayanak eğrisine ait Frenet çatılarına göre hareket eden vektör X^* olsun. Bu vektörün çizdiği kapalı regle yüzeyin integral invaryantları arasında

- i. $\lambda_{X^*} = x_1\lambda_{u_1^*} + x_3\lambda_{u_3^*}$,
- ii. $L_{X^*} = x_1L_{u_1^*}$,
- iii. $P_{X^*} = \frac{\tau_\alpha^*(x_2^2 + x_3^2) - x_1x_3\kappa_\alpha^*}{\kappa_\alpha^{*2}(x_2^2 + x_1^2) + \tau_\alpha^{*2}(x_2^2 + x_3^2) - 2x_1x_3\kappa_\alpha^*\tau_\alpha^*}$

bağıntıları vardır.

İspat: (2.2.8) ve (2.2.9) bağıntılardan $\lambda_{X^*} = x_1\lambda_{u_1^*} + x_3\lambda_{u_3^*}$ ve $L_{X^*} = x_1L_{u_1^*}$ olur.

(2.2.6) ifadesinden P_{X^*} drali hesaplanırsa

$$\begin{aligned}X^{*'} &= x_1u_1^{*'} + x_2u_2^{*'} + x_3u_3^{*'} \\ &= x_1\kappa_\alpha^*u_2^* + x_2(-\kappa_\alpha^*u_1^* + \tau_\alpha^*u_3^*) + x_3(-\tau_\alpha^*u_2^*) \\ &= -x_2\kappa_\alpha^*u_1^* + (x_1\kappa_\alpha^* - x_3\tau_\alpha^*)u_2^* + x_2\tau_\alpha^*u_3^*, \\ \|X^{*'}\| &= \sqrt{(x_2\kappa_\alpha^*)^2 + (x_1\kappa_\alpha^* - x_3\tau_\alpha^*)^2 + (x_2\tau_\alpha^*)^2}\end{aligned}$$

olur. Bu ifadeler dral denkleminde yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned}
P_{X^*} &= \frac{\det(\alpha^{*f}, X^*, X^{*f})}{\|X^{*f}\|^2} \\
&= \frac{\det(u_1^*, x_1 u_1^* + x_2 u_2^* + x_3 u_3^*, -x_2 \kappa_\alpha^* u_1^* + (x_1 \kappa_\alpha^* - x_3 \tau_\alpha^*) u_2^* + x_2 \tau_\alpha^* u_3^*)}{(x_2 \kappa_\alpha^*)^2 + (x_1 \kappa_\alpha^* - x_3 \tau_\alpha^*)^2 + (x_2 \tau_\alpha^*)^2} \\
&= \frac{x_2^2 \tau_\alpha^* - x_1 x_3 \kappa_\alpha^* + x_3^2 \tau_\alpha^*}{\kappa_\alpha^{*2} (x_2^2 + x_1^2) + \tau_\alpha^{*2} (x_2^2 + x_3^2) - 2x_1 x_3 \kappa_\alpha^* \tau_\alpha^*} \\
&= \frac{\tau_\alpha^* (x_2^2 + x_3^2) - x_1 x_3 \kappa_\alpha^*}{\kappa_\alpha^{*2} (x_2^2 + x_1^2) + \tau_\alpha^{*2} (x_2^2 + x_3^2) - 2x_1 x_3 \kappa_\alpha^* \tau_\alpha^*}
\end{aligned}$$

bulunur.

Teorem 4.2.10 $\overline{\Gamma^*}$ kapalı regle yüzeyinin dayanak eğrilerine ait Frenet çatılarına göre hareket eden $\overline{X^*}$ vektörünün oluşturduğu regle yüzeyin açılım açısı

$$\begin{aligned}
\lambda_{\overline{X^*}} &= \lambda_{X^*} - c \lambda_{u_1^*} - m \lambda_{u_3^*} \\
&+ ((x_1 - c) \cos(\varphi - \theta) - (x_3 - m) \sin(\varphi - \theta)) b_1 \\
&+ ((x_1 - c) \sin(\varphi - \theta) + (x_3 - m) \cos(\varphi - \theta)) b_2
\end{aligned}$$

bağıntısıyla verilir. Burada b_1 ve b_2 katsayıları

$$b_1 = \oint_{(\gamma)} \tau_\beta^* d\overline{s}^* + \oint_{(\Omega)} \tau_\beta^* d\overline{s}^*, \quad b_2 = \oint_{(\gamma)} \kappa_\beta^* d\overline{s}^* + \oint_{(\Omega)} \kappa_\beta^* d\overline{s}^*$$

şeklindedir.

İspat: (2.2.8) ifadesinde (2.2.9) ve (4.2.8) yerlerine konulur ve gerekli işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned}
\lambda_{\overline{X^*}} &= \langle \overline{D^*}, \overline{X^*} \rangle \\
&= \left\langle \lambda_{v_1^*} v_1^* + \lambda_{v_3^*} v_3^*, \left((x_1 - c) \cos(\varphi - \theta) - (x_3 - m) \sin(\varphi - \theta) \right) v_1^* + (x_2 - l) v_2^* \right. \\
&\quad \left. + \left((x_1 - c) \sin(\varphi - \theta) + (x_3 - m) \cos(\varphi - \theta) \right) v_3^* \right\rangle \\
&= \left((x_1 - c) \cos(\varphi - \theta) - (x_3 - m) \sin(\varphi - \theta) \right) \lambda_{v_1^*} \\
&\quad + \left((x_1 - c) \sin(\varphi - \theta) + (x_3 - m) \cos(\varphi - \theta) \right) \lambda_{v_3^*}
\end{aligned}$$

Burada (4.2.3) ifadeleri yerlerine yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned}
\lambda_{\overline{X^*}} &= \left((x_1 - c) \cos(\varphi - \theta) - (x_3 - m) \sin(\varphi - \theta) \right) \\
&\quad \left(\cos(\varphi - \theta) \lambda_{u_1^*} - \sin(\varphi - \theta) \lambda_{u_3^*} + b_1 \right) \\
&\quad + \left((x_1 - c) \sin(\varphi - \theta) + (x_3 - m) \cos(\varphi - \theta) \right) \\
&\quad \left(\sin(\varphi - \theta) \lambda_{u_1^*} + \cos(\varphi - \theta) \lambda_{u_3^*} + b_2 \right) \\
&= (x_1 - c) \lambda_{u_1^*} + (x_3 - m) \lambda_{u_3^*} \\
&\quad + \left((x_1 - c) \cos(\varphi - \theta) - (x_3 - m) \sin(\varphi - \theta) \right) b_1 \\
&\quad + \left((x_1 - c) \sin(\varphi - \theta) + (x_3 - m) \cos(\varphi - \theta) \right) b_2 \\
&= \lambda_{\overline{X^*}} - c \lambda_{u_1^*} - m \lambda_{u_3^*} \\
&\quad + \left((x_1 - c) \cos(\varphi - \theta) - (x_3 - m) \sin(\varphi - \theta) \right) b_1 \\
&\quad + \left((x_1 - c) \sin(\varphi - \theta) + (x_3 - m) \cos(\varphi - \theta) \right) b_2
\end{aligned}$$

bulunur.

Teorem 4.2.11 $\overline{\Gamma^*}$ kapalı regle yüzeyinin dayanak eğrilerine ait Frenet çatılarına göre hareket eden $\overline{X^*}$ vektörünün oluşturduğu kapalı regle yüzeyin açılım uzunluğu

$$L_{\overline{X^*}} = \left(\cos^2(\varphi - \theta) \frac{\kappa_\alpha^*}{\kappa_\beta^*} + \sin(\varphi - \theta) \cos(\varphi - \theta) \frac{\tau_\alpha^*}{\kappa_\beta^*} \right) L_{X^*} \\ + b_3 x_1 \cos(\varphi - \theta) - (c \cos(\varphi - \theta) + (x_3 - m) \sin(\varphi - \theta)) L_{v_1^*}$$

bağıntısıyla verilir.

İspat: (2.2.8) ifadesinde (2.2.9), (4.2.4) ve (4.2.8) denklemleri yerine yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$L_{\overline{X^*}} = \langle \overline{V^*}, \overline{X^*} \rangle \\ = ((x_1 - c) \cos(\varphi - \theta) - (x_3 - m) \sin(\varphi - \theta)) L_{v_1^*} \\ = ((x_1 - c) \cos(\varphi - \theta) - (x_3 - m) \sin(\varphi - \theta)) \\ \left(L_{u_1^*} \left(\cos(\varphi - \theta) \frac{\kappa_\alpha^*}{\kappa_\beta^*} + \sin(\varphi - \theta) \frac{\tau_\alpha^*}{\kappa_\beta^*} \right) + b_3 \right) \\ = x_1 L_{u_1^*} \left(\cos^2(\varphi - \theta) \frac{\kappa_\alpha^*}{\kappa_\beta^*} + \sin(\varphi - \theta) \cos(\varphi - \theta) \frac{\tau_\alpha^*}{\kappa_\beta^*} \right) + b_3 x_1 \cos(\varphi - \theta) \\ - (c \cos(\varphi - \theta) + (x_3 - m) \sin(\varphi - \theta)) \left(L_{u_1^*} \left(\cos(\varphi - \theta) \frac{\kappa_\alpha^*}{\kappa_\beta^*} + \sin(\varphi - \theta) \frac{\tau_\alpha^*}{\kappa_\beta^*} \right) + b_3 \right) \\ = L_{X^*} \left(\cos^2(\varphi - \theta) \frac{\kappa_\alpha^*}{\kappa_\beta^*} + \sin(\varphi - \theta) \cos(\varphi - \theta) \frac{\tau_\alpha^*}{\kappa_\beta^*} \right) + b_3 x_1 \cos(\varphi - \theta) \\ - (c \cos(\varphi - \theta) + (x_3 - m) \sin(\varphi - \theta)) L_{v_1^*}$$

şeklinde elde edilir.

Teorem 4.2.12 $\overline{\Gamma}^*$ kapalı regle yüzeyinin dayanak eğrilerinin Frenet çatılarına göre hareket eden \overline{X}^* vektörünün oluşturduğu kapalı regle yüzeyin drali

$$P_{\overline{X}^*} = \frac{C(x_2 - l) - B((x_1 - c)\sin(\varphi - \theta) + (x_3 - m)\cos(\varphi - \theta))}{A^2 + B^2 + C^2}$$

bağıntısıyla verilir. Burada A , B ve C ifadeleri

$$A = (-c' - x_3 + m)\cos(\varphi - \theta) - (x_1 - c - m')\sin(\varphi - \theta)$$

$$- (x_2 - l)(\cos(\varphi - \theta)\kappa_\alpha^* + \sin(\varphi - \theta)\tau_\alpha^*)\frac{ds^*}{d\overline{s}^*},$$

$$B = \cos(\varphi - \theta)\frac{ds^*}{d\overline{s}^*}(\cos(\varphi - \theta)\kappa_\alpha^* + \sin(\varphi - \theta)\tau_\alpha^*)(x_1 - c)$$

$$- \sin(\varphi - \theta)\frac{ds^*}{d\overline{s}^*}(\cos(\varphi - \theta)\kappa_\alpha^* + \sin(\varphi - \theta)\tau_\alpha^*)(x_3 - m)$$

$$- \sin(\varphi - \theta)\frac{ds^*}{d\overline{s}^*}(-\sin(\varphi - \theta)\kappa_\alpha^* + \cos(\varphi - \theta)\tau_\alpha^*)(x_1 - c)$$

$$- \cos(\varphi - \theta)\frac{ds^*}{d\overline{s}^*}(-\sin(\varphi - \theta)\kappa_\alpha^* + \cos(\varphi - \theta)\tau_\alpha^*)(x_3 - m) - l',$$

$$C = \sin(\varphi - \theta)(-x_3 + m - c') + \cos(\varphi - \theta)(x_1 - c - m')$$

$$- (-\sin(\varphi - \theta)\kappa_\alpha^* + \cos(\varphi - \theta)\tau_\alpha^*)(x_1 - c)\frac{ds^*}{d\overline{s}^*}$$

şeklinde verilmiştir.

İspat: (4.2.8) ifadesindeki \overline{X}^* vektörünün türevi alınır, κ_β^* ve τ_β^* in yerine (4.1.12) deki eşitleri yazılırsa

$$\begin{aligned}
\overline{X}^{*'} &= \left((x_1 - c) \cos(\varphi - \theta) - (x_3 - m) \sin(\varphi - \theta) \right)' v_1^* \\
&+ \left((x_1 - c) \cos(\varphi - \theta) - (x_3 - m) \sin(\varphi - \theta) \right) v_1^{*'} \\
&+ (x_2 - l)' v_2^* + (x_2 - l) v_2^{*'} \\
&+ \left((x_1 - c) \sin(\varphi - \theta) + (x_3 - m) \cos(\varphi - \theta) \right)' v_3^* \\
&+ \left((x_1 - c) \sin(\varphi - \theta) + (x_3 - m) \cos(\varphi - \theta) \right) v_3^{*'} \\
&= \left(\left((x_1 - c) \cos(\varphi - \theta) \right)' - \left((x_3 - m) \sin(\varphi - \theta) \right)' \right) v_1^* \\
&+ \left((x_1 - c) \cos(\varphi - \theta) - (x_3 - m) \sin(\varphi - \theta) \right) (\kappa_\beta^* v_2^*) \\
&+ (x_2 - l)' v_2^* + (x_2 - l) (-\kappa_\beta^* v_1^* + \tau_\beta^* v_3^*) \\
&+ \left(\left((x_1 - c) \sin(\varphi - \theta) \right)' + \left((x_3 - m) \cos(\varphi - \theta) \right)' \right) v_3^* \\
&+ \left((x_1 - c) \sin(\varphi - \theta) + (x_3 - m) \cos(\varphi - \theta) \right) (-\tau_\beta^* v_2^*) \\
&= \begin{pmatrix} -c' \cos(\varphi - \theta) - (x_1 - c) \sin(\varphi - \theta) + m' \sin(\varphi - \theta) \\ -(x_3 - m) \cos(\varphi - \theta) - \kappa_\beta^* (x_2 - l) \end{pmatrix} v_1^* \\
&+ \begin{pmatrix} -l' + \kappa_\beta^* \left((x_1 - c) \cos(\varphi - \theta) - (x_3 - m) \sin(\varphi - \theta) \right) \\ -\tau_\beta^* \left((x_1 - c) \sin(\varphi - \theta) + (x_3 - m) \cos(\varphi - \theta) \right) \end{pmatrix} v_2^* \\
&+ \begin{pmatrix} \tau_\beta^* (x_2 - l) - c' \sin(\varphi - \theta) + (x_1 - c) \cos(\varphi - \theta) \\ -m' \cos(\varphi - \theta) - (x_3 - m) \sin(\varphi - \theta) \end{pmatrix} v_3^*
\end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} -c' \cos(\varphi - \theta) - (x_1 - c) \sin(\varphi - \theta) \\ +m' \sin(\varphi - \theta) - (x_3 - m) \cos(\varphi - \theta) \\ -(x_2 - l) \left(\cos(\varphi - \theta) \kappa_\alpha^* + \sin(\varphi - \theta) \tau_\alpha^* \right) \frac{ds^*}{d\bar{s}^*} \end{pmatrix} v_1^*$$

$$+ \begin{pmatrix} -l' + \left((x_1 - c) \cos(\varphi - \theta) - (x_3 - m) \sin(\varphi - \theta) \right) \\ \left(\cos(\varphi - \theta) \kappa_\alpha^* + \sin(\varphi - \theta) \tau_\alpha^* \right) \frac{ds^*}{d\bar{s}^*} \\ - \left((x_1 - c) \sin(\varphi - \theta) + (x_3 - m) \cos(\varphi - \theta) \right) \\ \left(-\sin(\varphi - \theta) \kappa_\alpha^* + \cos(\varphi - \theta) \tau_\alpha^* \right) \frac{ds^*}{d\bar{s}^*} \end{pmatrix} v_2^*$$

$$+ \begin{pmatrix} (x_2 - l) \left(-\sin(\varphi - \theta) \kappa_\alpha^* + \cos(\varphi - \theta) \tau_\alpha^* \right) \frac{ds^*}{d\bar{s}^*} \\ -c' \sin(\varphi - \theta) + (x_1 - c) \cos(\varphi - \theta) \\ -m' \cos(\varphi - \theta) - (x_3 - m) \sin(\varphi - \theta) \end{pmatrix} v_3^*$$

$$= \begin{pmatrix} (-c' - x_3 + m) \cos(\varphi - \theta) \\ -(x_1 - c - m') \sin(\varphi - \theta) \\ -(x_2 - l) \left(\cos(\varphi - \theta) \kappa_\alpha^* + \sin(\varphi - \theta) \tau_\alpha^* \right) \frac{ds^*}{d\bar{s}^*} \end{pmatrix} v_1^*$$

$$\begin{aligned}
& \left(\begin{array}{l} \cos(\varphi - \theta) \frac{ds^*}{ds^*} (\cos(\varphi - \theta) \kappa_\alpha^* + \sin(\varphi - \theta) \tau_\alpha^*) (x_1 - c) \\ -\sin(\varphi - \theta) \frac{ds^*}{ds^*} (\cos(\varphi - \theta) \kappa_\alpha^* + \sin(\varphi - \theta) \tau_\alpha^*) (x_3 - m) \\ -\sin(\varphi - \theta) \frac{ds^*}{ds^*} (-\sin(\varphi - \theta) \kappa_\alpha^* + \cos(\varphi - \theta) \tau_\alpha^*) (x_1 - c) \\ -\cos(\varphi - \theta) \frac{ds^*}{ds^*} (-\sin(\varphi - \theta) \kappa_\alpha^* + \cos(\varphi - \theta) \tau_\alpha^*) (x_3 - m) - l' \end{array} \right) v_2^* \\
& + \left(\begin{array}{l} \sin(\varphi - \theta) (-x_3 + m - c') \\ + \cos(\varphi - \theta) (x_1 - c - m') \\ - (-\sin(\varphi - \theta) \kappa_\alpha^* + \cos(\varphi - \theta) \tau_\alpha^*) (x_1 - c) \frac{ds^*}{ds^*} \end{array} \right) v_3^*
\end{aligned}$$

olur. Burada A , B ve C ifadeleri

$$\begin{aligned}
A &= (-c' - x_3 + m) \cos(\varphi - \theta) - (x_1 - c - m') \sin(\varphi - \theta) \\
&\quad - (x_2 - l) (\cos(\varphi - \theta) \kappa_\alpha^* + \sin(\varphi - \theta) \tau_\alpha^*) \frac{ds^*}{ds^*}, \\
B &= \cos(\varphi - \theta) \frac{ds^*}{ds^*} (\cos(\varphi - \theta) \kappa_\alpha^* + \sin(\varphi - \theta) \tau_\alpha^*) (x_1 - c) \\
&\quad - \sin(\varphi - \theta) \frac{ds^*}{ds^*} (\cos(\varphi - \theta) \kappa_\alpha^* + \sin(\varphi - \theta) \tau_\alpha^*) (x_3 - m) \\
&\quad - \sin(\varphi - \theta) \frac{ds^*}{ds^*} (-\sin(\varphi - \theta) \kappa_\alpha^* + \cos(\varphi - \theta) \tau_\alpha^*) (x_1 - c) \\
&\quad - \cos(\varphi - \theta) \frac{ds^*}{ds^*} (-\sin(\varphi - \theta) \kappa_\alpha^* + \cos(\varphi - \theta) \tau_\alpha^*) (x_3 - m) - l',
\end{aligned}$$

$$C = \sin(\varphi - \theta)(-x_3 + m - c') + \cos(\varphi - \theta)(x_1 - c - m')$$

$$-(-\sin(\varphi - \theta)\kappa_\alpha^* + \cos(\varphi - \theta)\tau_\alpha^*)(x_1 - c)\frac{ds^*}{ds^*}$$

alınırsa $(\overline{X^*})' = Av_1^* + Bv_2^* + Cv_3^*$ ve $\left\|(\overline{X^*})'\right\|^2 = A^2 + B^2 + C^2$ olur. Bu ifadeler ve

(4.2.8) ifadesi (2.2.6) da yerine yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa $P_{\overline{X^*}}$ drali

$$\begin{aligned} P_{\overline{X^*}} &= \frac{\det\left((\beta^*)', \overline{X^*}, (\overline{X^*})'\right)}{\left\|(\overline{X^*})'\right\|^2} \Rightarrow \frac{\det\left(v_1^*, \overline{X^*}, (\overline{X^*})'\right)}{\left\|(\overline{X^*})'\right\|^2} \\ &= \frac{C(x_2 - l) - B((x_1 - c)\sin(\varphi - \theta) + (x_3 - m)\cos(\varphi - \theta))}{A^2 + B^2 + C^2} \end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

4.3 Successor Eş Uzaklıklı Regle Yüzeylerin Weingarten Dönüşümü Matrisi, Gauss Eğriliği ve Ortalama Eğriliği

Teorem 4.3.1 Γ^* ve $\overline{\Gamma^*}$ successor eş uzaklıklı regle yüzeylere ait Weingarten dönüşümü matrisi sırasıyla S^* ve $\overline{S^*}$, Gauss eğrilikleri K^* ve $\overline{K^*}$, ortalama eğrilikleri H^* ve $\overline{H^*}$ ile gösterilsin. Bu yüzeylerin Weingarten dönüşümünün matrisi, Gauss ve ortalama eğriliği arasında

$$S^* = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-\tau_\alpha^*}{(1 - \sigma\kappa_\alpha^*)^2 + (\sigma\tau_\alpha^*)^2} \\ \frac{-\tau_\alpha^*}{(1 - \sigma\kappa_\alpha^*)^2 + (\sigma\tau_\alpha^*)^2} & 0 \end{bmatrix},$$

$$K^* = \frac{-\tau_\alpha^{*2}}{\left((1 - \sigma\kappa_\alpha^*)^2 + (\sigma\tau_\alpha^*)^2\right)^2}, \quad H^* = 0,$$

$$\overline{S}^* = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-\tau_\beta^*}{(1-\sigma\kappa_\beta^*)^2 + (\sigma\tau_\beta^*)^2} \\ \frac{-\tau_\beta^*}{(1-\sigma\kappa_\beta^*)^2 + (\sigma\tau_\beta^*)^2} & 0 \end{bmatrix},$$

$$\overline{K}^* = \frac{-\left(\sin(\varphi-\theta)\kappa_\alpha^* + \cos(\varphi-\theta)\tau_\alpha^*\right)\frac{ds^*}{d\overline{s}^*}}{\left(1-\sigma(\cos(\varphi-\theta)\kappa_\alpha^* - \sin(\theta-\varphi)\tau_\alpha^*)\frac{ds^*}{d\overline{s}^*}\right)^2} + \frac{\left(\sigma(\sin(\varphi-\theta)\kappa_\alpha^* + \cos(\varphi-\theta)\tau_\alpha^*)\frac{ds^*}{d\overline{s}^*}\right)^2}{\left(1-\sigma(\cos(\varphi-\theta)\kappa_\alpha^* - \sin(\theta-\varphi)\tau_\alpha^*)\frac{ds^*}{d\overline{s}^*}\right)^2}, \quad \overline{H}^* = 0$$

bağıntıları vardır.

İspat: $\Gamma^*(s, \sigma) = \alpha^*(s) + \sigma u_2^*(s)$ ve $\overline{\Gamma}^*(s, \sigma) = \beta^*(s) + \sigma v_2^*(s)$ yüzeylerinin s ve σ ye göre kısmi türevleri hesaplanırsa

$$\Gamma^*(s, \sigma)_s = (1 - \sigma\kappa_\alpha^*)u_1^* + \sigma\tau_\alpha^*u_3^*,$$

$$\Gamma^*(s, \sigma)_\sigma = u_2^*, \quad \Gamma^*(s, \sigma)_{\sigma\sigma} = 0,$$

$$\Gamma^*(s, \sigma)_{ss} = \left(\kappa_\alpha^* - \sigma(\kappa_\alpha^{*2} + \tau_\alpha^{*2})\right)u_2^*,$$

$$\Gamma^*(s, \sigma)_{s\sigma} = \Gamma^*(s, \sigma)_{\sigma s} = -\kappa_\alpha^*u_1^* + \tau_\alpha^*u_3^*,$$

olur ve determinant hesabı yapılırsa

$$\det(\Gamma^*(s, \sigma)_{ss}, \Gamma^*(s, \sigma)_s, \Gamma^*(s, \sigma)_\sigma) = 0,$$

$$\det(\Gamma^*(s, \sigma)_{s\sigma}, \Gamma^*(s, \sigma)_s, \Gamma^*(s, \sigma)_\sigma) = \tau_\alpha^*,$$

$$\det(\Gamma^*(s, \sigma)_{\sigma\sigma}, \Gamma^*(s, \sigma)_s, \Gamma^*(s, \sigma)_\sigma) = 0$$

bulunur. Bu ifadeler (2.2.2) de yerine yazılırsa Weingarten dönüşümünün matrisi,

$$S^* = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-\tau_\alpha^*}{(1-\sigma\kappa_\alpha^*)^2 + (\sigma\tau_\alpha^*)^2} \\ \frac{-\tau_\alpha^*}{(1-\sigma\kappa_\alpha^*)^2 + (\sigma\tau_\alpha^*)^2} & 0 \end{bmatrix}$$

olur. (2.2.3) bağıntısından Gauss ve ortalama eğrilikleri sırasıyla

$$K^* = \frac{-\tau_\alpha^{*2}}{\left((1-\sigma\kappa_\alpha^*)^2 + (\sigma\tau_\alpha^*)^2\right)^2}, \quad H^* = 0$$

bulunur.

Benzer şekilde $\overline{\Gamma}^*(s, v)$ regle yüzeyinin Weingarten dönüşümünün matrisi

$$\overline{S}^* = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-\tau_\beta^*}{(1-\sigma\kappa_\beta^*)^2 + (\sigma\tau_\beta^*)^2} \\ \frac{-\tau_\beta^*}{(1-\sigma\kappa_\beta^*)^2 + (\sigma\tau_\beta^*)^2} & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde bulunur. Burada κ_β^* ve τ_β^* eğrilikleri yerine (4.1.12) den karşılıkları yazılır

ve gerekli işlemler yapılırsa Weingarten dönüşümünün matrisi

$$\overline{S}^* = \frac{-(-\sin(\varphi-\theta)\kappa_\alpha^* + \cos(\varphi-\theta)\tau_\alpha^*)\frac{ds^*}{d\overline{s}^*}}{\left(1-\sigma(\cos(\varphi-\theta)\kappa_\alpha^* + \sin(\varphi-\theta)\tau_\alpha^*)\frac{ds^*}{d\overline{s}^*}\right)^2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \left(\sigma(-\sin(\varphi-\theta)\kappa_\alpha^* + \cos(\varphi-\theta)\tau_\alpha^*)\frac{ds^*}{d\overline{s}^*}\right)^2$$

olur. (2.2.3) ifadesinden Gauss ve ortalama eğrilik

$$\overline{K}^* = \frac{-\left(-\sin(\varphi - \theta)\kappa_\alpha^* + \cos(\varphi - \theta)\tau_\alpha^*\right)\frac{ds^*}{ds^*}}{\left(1 - \sigma\left(\cos(\varphi - \theta)\kappa_\alpha^* + \sin(\theta - \varphi)\tau_\alpha^*\right)\frac{ds^*}{ds^*}\right)^2}, \quad \overline{H}^* = 0$$

$$+ \left(\sigma\left(-\sin(\varphi - \theta)\kappa_\alpha^* + \cos(\varphi - \theta)\tau_\alpha^*\right)\frac{ds^*}{ds^*}\right)^2$$

şeklinde bulunur.

Sonuç 4.3.1 Γ^* ve $\overline{\Gamma}^*$ successor eş uzaklıklı regle yüzeylerin ortalama eğrilikleri sıfır olduğu için minimal yüzeylerdir.

Örnek 4.1 $\Gamma^*(s, \sigma)$ ve $\overline{\Gamma}^*(s, \sigma)$ successor eş uzaklıklı kapalı regle yüzeylerin dayanak eğrileri sırasıyla

$$\alpha^*(s) = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\cos s, \frac{1}{\sqrt{5}}s, \frac{2}{\sqrt{5}}\sin s\right), \quad \beta^*(s) = \left(5\sqrt{5} + \frac{2}{\sqrt{5}}\cos s, \frac{1}{\sqrt{5}}s, \frac{2}{\sqrt{5}}\sin s\right)$$

olsun. Bu eğrilerin Frenet vektörleri, eğrilik ve burulması sırasıyla

$$u_1^*(s) = \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\sin s, \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\cos s\right),$$

$$u_2^*(s) = (-\cos s, 0, -\sin s),$$

$$u_3^*(s) = \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\sin s, -\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\cos s\right),$$

$$\kappa_\alpha^*(s) = \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad \tau_\alpha^*(s) = -\frac{1}{\sqrt{5}},$$

$$v_1^*(s) = \left(-\frac{2}{\sqrt{5}} \sin s, \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}} \cos s \right),$$

$$v_2^*(s) = (-\cos s, 0, -\sin s),$$

$$v_3^*(s) = \left(-\frac{1}{\sqrt{5}} \sin s, -\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}} \cos s \right),$$

$$\kappa_\beta^*(s) = \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad \tau_\beta^*(s) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

şeklinde bulunur. $u_2^*(s)$ ve $v_2^*(s)$ vektörlerinin oluşturduğu $\Gamma^*(s, \sigma)$ ve $\overline{\Gamma}^*(s, \sigma)$ regle yüzeylerinin denklemleri sırasıyla

$$\Gamma^*(s, \sigma) = \left(\frac{2}{\sqrt{5}} \cos s, \frac{1}{\sqrt{5}} s, \frac{2}{\sqrt{5}} \sin s \right) + \sigma (-\cos s, 0, -\sin s)$$

$$\overline{\Gamma}^*(s, \sigma) = \left(5\sqrt{5} + \frac{2}{\sqrt{5}} \cos s, \frac{1}{\sqrt{5}} s, \frac{2}{\sqrt{5}} \sin s \right) + \sigma (-\cos s, 0, -\sin s)$$

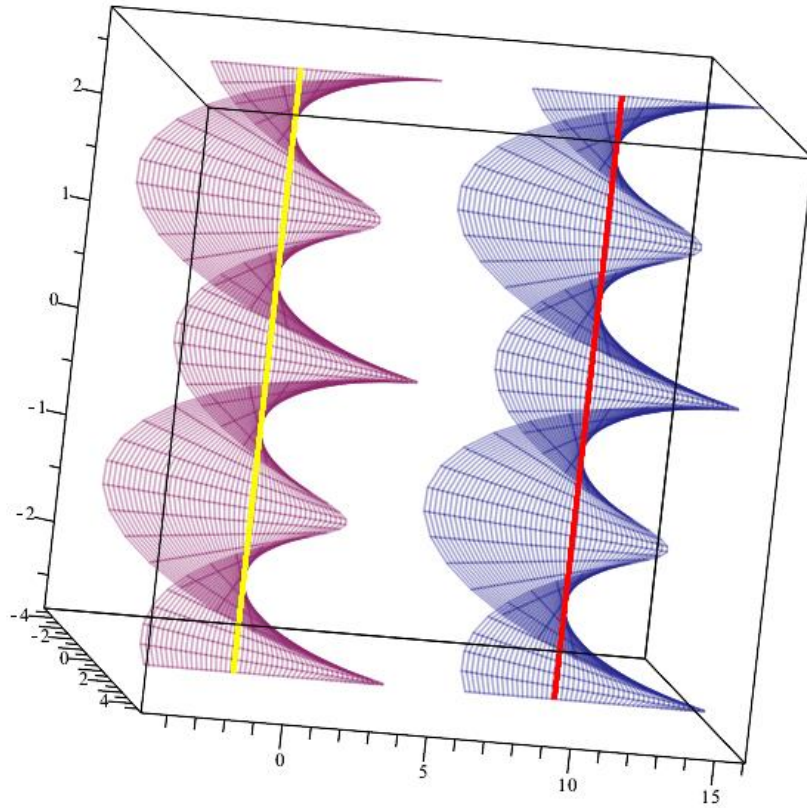
şeklinde yazılır. Bu yüzeylere ait $\gamma^*(s)$ ve $\overline{\gamma}^*(s)$ striksiyon çizgilerinin ifadesi sırasıyla

$$\begin{aligned} \gamma^*(s) &= \alpha^*(s) + \frac{\kappa_\alpha^*(s)}{\kappa_\alpha^{*2}(s) + \tau_\alpha^{*2}(s)} u_2^*(s) \\ &= \left(\frac{2}{\sqrt{5}} \cos s, \frac{1}{\sqrt{5}} s, \frac{2}{\sqrt{5}} \sin s \right) + \frac{\frac{2}{\sqrt{5}}}{\left(\frac{2}{\sqrt{5}} \right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \right)^2} (-\cos s, 0, -\sin s) \\ &= \left(0, \frac{s}{\sqrt{5}}, 0 \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{\gamma}^*(s) &= \beta^*(s) + \frac{\kappa_\beta^*(s)}{\kappa_\beta^{*2}(s) + \tau_\beta^{*2}(s)} \nu_2^*(s) \\
&= \left(5\sqrt{5} + \frac{2}{\sqrt{5}} \cos s, \frac{1}{\sqrt{5}} s, \frac{2}{\sqrt{5}} \sin s \right) + \frac{\frac{2}{\sqrt{5}}}{\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2} (-\cos s, 0, -\sin s) \\
&= \left(5\sqrt{5}, \frac{s}{\sqrt{5}}, 0 \right)
\end{aligned}$$

şeklinde hesaplanır.

Bu yüzeylerin grafikleri Maple programıyla çizilirse aşağıdaki şekiller elde edilir. (Şekil 4.4) te mor yüzey $\Gamma^*(s, \sigma)$ successor yüzeyi, sarı çizgi $\gamma^*(s)$ striksiyon çizgisi, mavi yüzey $\bar{\Gamma}^*(s, \sigma)$ successor yüzeyi ve kırmızı çizgi $\bar{\gamma}^*(s)$ striksiyon çizgisini ifade etmektedir.



Şekil 4.4 Regle Yüzeyler ve Striksiyon Çizgileri

Striksiyonlar arasındaki ifade $\gamma\overline{\gamma^*} = \overline{\gamma^*} - \gamma$ şeklinde olduğundan $\gamma^*\overline{\gamma^*} = (5\sqrt{5}, 0, 0)$ olur. Polar düzlemler arasındaki uzaklık c , asimptotik düzlemler arasındaki uzaklık m ile gösterilirse bu uzaklıklar

$$\begin{aligned} c &= \langle \gamma^*\overline{\gamma^*}, u_1^* \rangle \\ &= \left\langle (5\sqrt{5}, 0, 0), \left(-\frac{2}{\sqrt{5}} \sin s, \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}} \cos s \right) \right\rangle \\ &= 10 \sin s, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m &= \langle \gamma^*\overline{\gamma^*}, u_3^* \rangle \\ &= \left\langle (5\sqrt{5}, 0, 0), \left(-\frac{1}{\sqrt{5}} \sin s, -\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}} \cos s \right) \right\rangle \\ &= 5 \sin s \end{aligned}$$

olur. (4.1.9) bağıntısından merkezi düzlemler arasındaki l uzaklığı

$$\begin{aligned} l &= \frac{\cos \varphi c' - \sin \varphi m'}{\kappa_\alpha} \\ &= \frac{\frac{2}{\sqrt{5}}(-10 \sin s)' + \frac{1}{\sqrt{5}}(5 \sin s)'}{1} \\ &= 5\sqrt{5} \cos s \end{aligned}$$

bulunur. Successor eş uzaklıklı regle yüzeylerin $\mathbf{H} = Sp\{u_1^*, u_3^*\}$ ve $\mathbf{H}^* = Sp\{v_1^*, v_3^*\}$ ile gösterilen merkezi düzlemlerin denklemleri sırasıyla

$$\langle \overrightarrow{\gamma^* X}, \overrightarrow{u_2^*} \rangle = 0$$

$$\left\langle \left(x-0, y-\frac{s}{\sqrt{5}}, z \right), (-\cos s, 0, -\sin s) \right\rangle = 0$$

$$-x \cos s - z \sin s = 0$$

$$\mathbf{H} \dots -x \cos s - z \sin s = 0$$

$$\langle \overrightarrow{\gamma^* X}, \overrightarrow{v_2^*} \rangle = 0$$

$$\left\langle \left(x-5\sqrt{5}, y-\frac{s}{\sqrt{5}}, z \right), (-\cos s, 0, -\sin s) \right\rangle = 0$$

$$-x \cos s + 5\sqrt{5} \cos s - z \sin s = 0$$

$$\mathbf{H}^* \dots -x \cos s + 5\sqrt{5} \cos s - z \sin s = 0$$

şeklinde bulunur.

❖ $s=0$ için $\gamma^*(s)$ ve $\overline{\gamma^*}(s)$ striksiyon noktaları, u_2^* ve v_2^* aslinormal vektörleri

\mathbf{H} ve \mathbf{H}^* düzlemleri ve l uzaklığı sırasıyla

$$\gamma^*(0) = (0, 0, 0), \quad \overline{\gamma^*}(0) = (5\sqrt{5}, 0, 0),$$

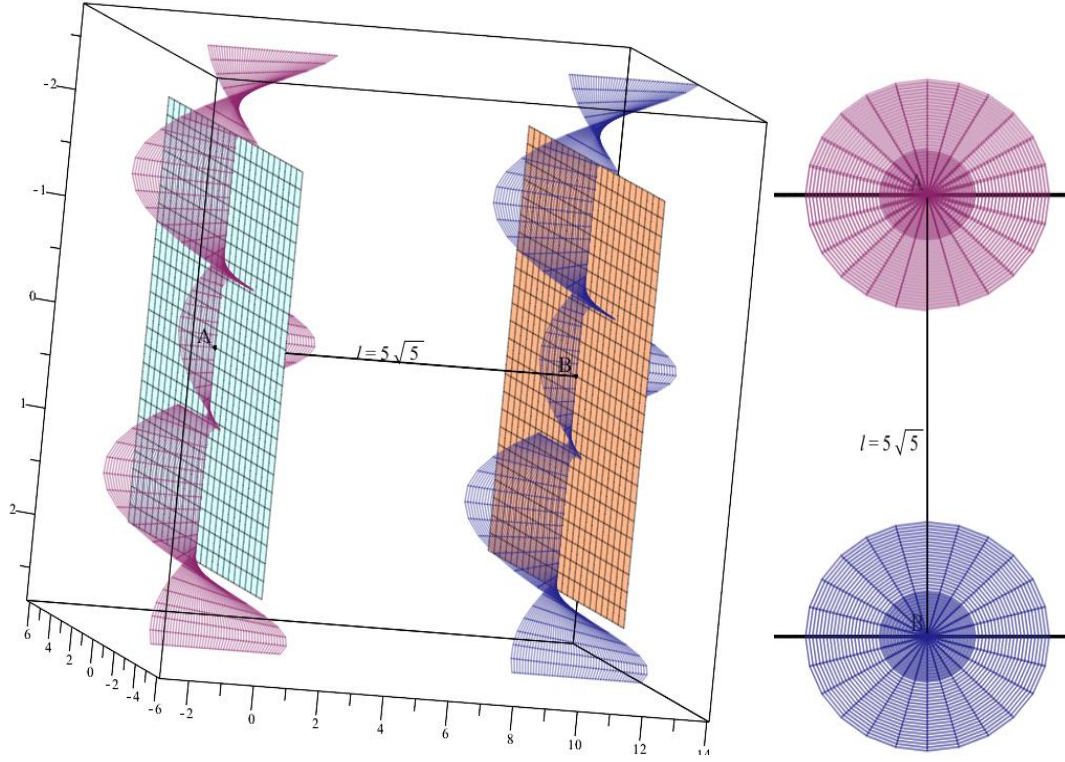
$$u_2^*(0) = (-1, 0, 0), \quad v_2^*(0) = (-1, 0, 0),$$

$$\mathbf{H} \dots x = 0, \quad \mathbf{H}^* \dots x - 5\sqrt{5} = 0, \quad l = 5\sqrt{5}$$

şeklinde bulunur. Merkezi düzlemlere ait iki nokta A ve B olsun. Bu noktalar

$A(0, 0, 0) \in \mathbf{H}$ ve $B(5\sqrt{5}, 0, 0) \in \mathbf{H}^*$ şeklinde olur. A ve B noktaları arasındaki

uzaklık $\|AB\| = 5\sqrt{5}$ şeklinde bulunur (Şekil 4.5).



Şekil 4.5 $s = 0$ için l uzaklığı

❖ $s = \frac{\pi}{6}$ için $\gamma^*(s)$ ve $\overline{\gamma}^*(s)$ striksiyon noktaları, u_2^* ve v_2^* aslinormal vektörleri, \mathbf{H} ve \mathbf{H}^* düzlemleri ve l uzaklığı sırasıyla

$$\gamma^*\left(\frac{\pi}{6}\right) = \left(0, \frac{\pi}{6\sqrt{5}}, 0\right), \quad \overline{\gamma}^*\left(\frac{\pi}{6}\right) = \left(5\sqrt{5}, \frac{\pi}{6\sqrt{5}}, 0\right),$$

$$u_2^*\left(\frac{\pi}{6}\right) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, -\frac{1}{2}\right), \quad v_2^*\left(\frac{\pi}{6}\right) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, -\frac{1}{2}\right),$$

$$\mathbf{H} \dots x\sqrt{3} + z = 0, \quad \mathbf{H}^* \dots x\sqrt{3} + z - 5\sqrt{15} = 0, \quad l = \frac{5\sqrt{15}}{2}$$

şeklinde bulunur. Merkezi düzlemler üzerindeki iki nokta A ve B olsun. Bu noktalar $A(a, 0, -a\sqrt{3}) \in \mathbf{H}$ ve $B(b, 0, -b\sqrt{3} + 5\sqrt{15}) \in \mathbf{H}^*$ şeklinde ifade edilir.

A ve B noktaları arasındaki uzaklık $\frac{5\sqrt{15}}{2}$ olacak şekilde $a, b \in \mathbb{R}$ sayılarını

bulalım. İki nokta arasındaki uzaklık bağıntısından

$$\|AB\| = \sqrt{(b-a)^2 + (-\sqrt{3}(b-a) + 5\sqrt{15})^2} = \frac{5\sqrt{15}}{2}$$

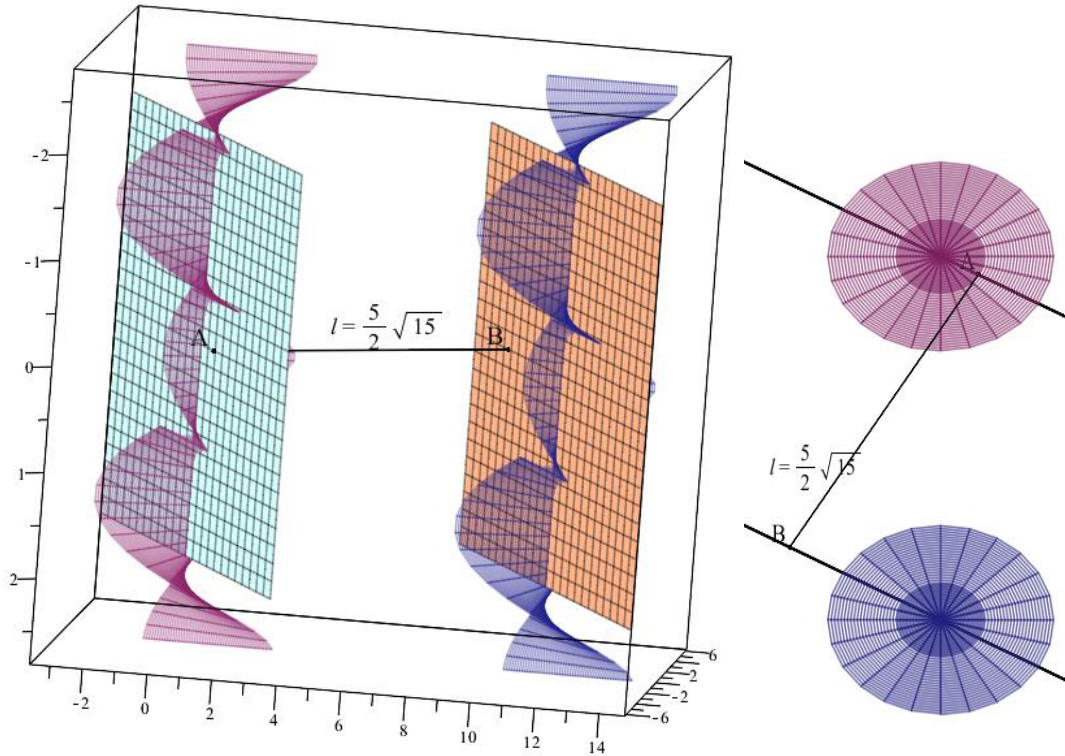
olur. Burada $\lambda = b-a$ alınır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$16\lambda^2 - 120\sqrt{5}\lambda + 1125 = 0$ denklemi bulunur. Bu denklemin çözümü yapılırsa

$\lambda = \frac{15\sqrt{5}}{4}$ olur. Bu durumda $b-a = \frac{15\sqrt{5}}{4}$ şeklinde alınabilir. Buna göre $b = 4\sqrt{5}$ ve

$a = \frac{\sqrt{5}}{4}$ için A ve B noktaları $A\left(\frac{\sqrt{5}}{4}, 0, -\frac{\sqrt{15}}{4}\right)$ ve $B(4\sqrt{5}, 0, \sqrt{15})$ şeklinde yazılır.

Böylece düzlemler üzerinde uygun A ve B noktaları elde edilmiş olur (Şekil 4.6).



Şekil 4.6 $s = \frac{\pi}{6}$ için l uzaklığı

❖ $s = \frac{\pi}{4}$ alınırsa $\gamma^*(s)$ ve $\overline{\gamma^*}(s)$ striksiyon noktaları, u_2^* ve v_2^* aslinormal vektörleri, \mathbf{H} ve \mathbf{H}^* düzlemleri ve l uzaklığı sırasıyla

$$\gamma^*\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(0, \frac{\pi}{4\sqrt{5}}, 0\right), \quad \overline{\gamma^*}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(5\sqrt{5}, \frac{\pi}{4\sqrt{5}}, 0\right),$$

$$u_2^*\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad v_2^*\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

$$\mathbf{H} \dots x + z = 0, \quad \mathbf{H}^* \dots x + z - 5\sqrt{5} = 0, \quad l = \frac{5\sqrt{10}}{2}$$

şeklinde bulunur. Merkezi düzlemler üzerindeki iki nokta A ve B olsun. Bu noktalar $A(a, 0, -a) \in \mathbf{H}$ ve $B(b, 0, 5\sqrt{5} - b) \in \mathbf{H}^*$ şeklinde ifade edilir. A ve B noktaları arasındaki uzaklık $\frac{5\sqrt{10}}{2}$ olacak şekilde $a, b \in \mathbb{R}$ sayılarını bulalım. İki nokta arasındaki uzaklık bağıntısından

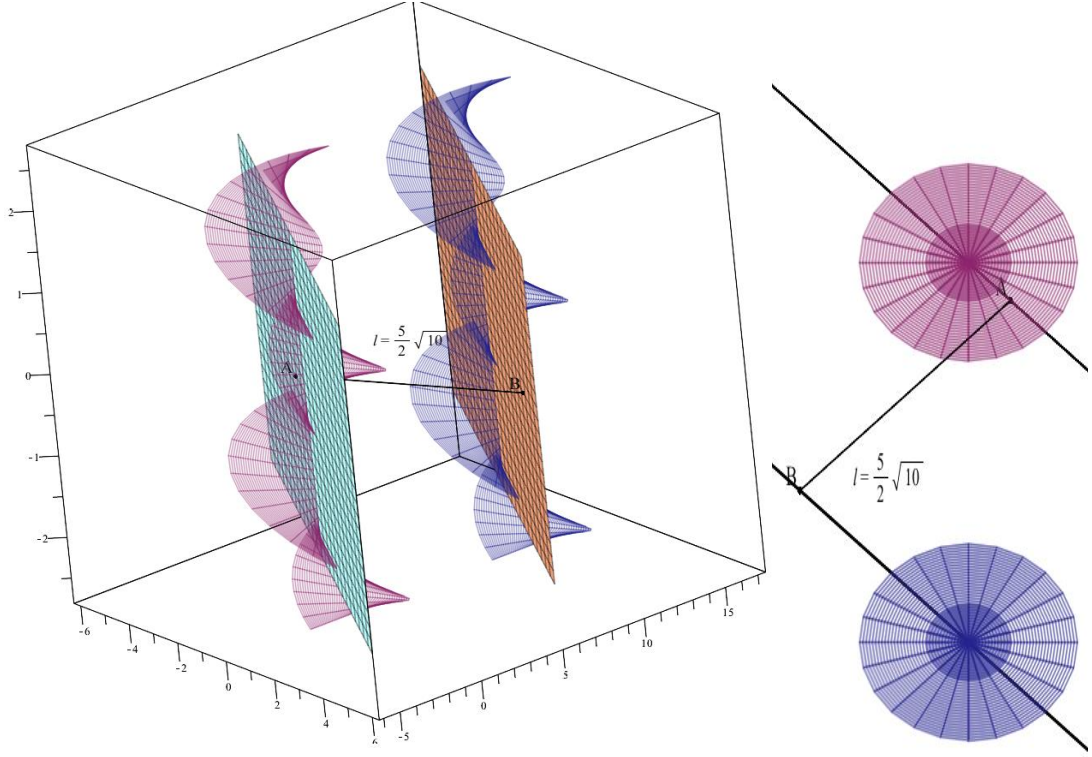
$$\|AB\| = \sqrt{(b-a)^2 + (5\sqrt{5} - (b-a))^2} = \frac{5\sqrt{10}}{2}$$

olur. Burada $\lambda = b - a$ alınır gerekli düzenlemeler yapılırsa $4\lambda^2 - 20\sqrt{5}\lambda + 125 = 0$ denklemi bulunur. Bu denklemin çözümü yapılırsa $\lambda = \frac{5\sqrt{5}}{2}$ olur. Bu durumda

$b - a = \frac{5\sqrt{5}}{2}$ şeklinde alınabilir. Buna göre $b = 3\sqrt{5}$ ve $a = \frac{\sqrt{5}}{2}$ için A ve B

noktaları $A\left(\frac{\sqrt{5}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$ ve $B(3\sqrt{5}, 0, 2\sqrt{5})$ şeklinde yazılır. Böylece düzlemler

üzerinde uygun A ve B noktaları elde edilmiş olur (Şekil 4.7).



Şekil 4.7 $s = \frac{\pi}{4}$ için l uzaklığı

❖ $s = \frac{\pi}{3}$ için $\gamma^*(s)$ ve $\overline{\gamma^*}(s)$ striksiyon noktaları, u_2^* ve v_2^* aslinormal vektörleri, \mathbf{H} ve \mathbf{H}^* düzlemleri ve l uzaklığı sırasıyla

$$\gamma^*\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left(0, \frac{\pi}{3\sqrt{5}}, 0\right), \quad \overline{\gamma^*}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left(5\sqrt{5}, \frac{\pi}{3\sqrt{5}}, 0\right),$$

$$u_2^*\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left(-\frac{1}{2}, 0, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad v_2^*\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left(-\frac{1}{2}, 0, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

$$\mathbf{H} \dots -\frac{x}{2} - \frac{z\sqrt{3}}{2} = 0, \quad \mathbf{H}^* \dots -\frac{x}{2} - \frac{z\sqrt{3}}{2} + \frac{5\sqrt{5}}{2} = 0, \quad l = \frac{5\sqrt{5}}{2}$$

şeklinde bulunur. Merkezi düzlemler üzerindeki iki nokta A ve B olsun. Bu

noktalar $A\left(a, 0, \frac{-a}{\sqrt{3}}\right) \in \mathbf{H}$ ve $B\left(b, 0, \frac{-b+5\sqrt{5}}{\sqrt{3}}\right) \in \mathbf{H}^*$ şeklinde ifade edilir. A ve B

noktaları arasındaki uzaklık $\frac{5\sqrt{15}}{2}$ olacak şekilde $a, b \in \mathbb{R}$ sayılarını bulalım. İki

nokta arasındaki uzaklık bağıntısından

$$\|AB\| = \sqrt{(b-a)^2 + \left(\frac{b-a-5\sqrt{5}}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{5\sqrt{15}}{2}$$

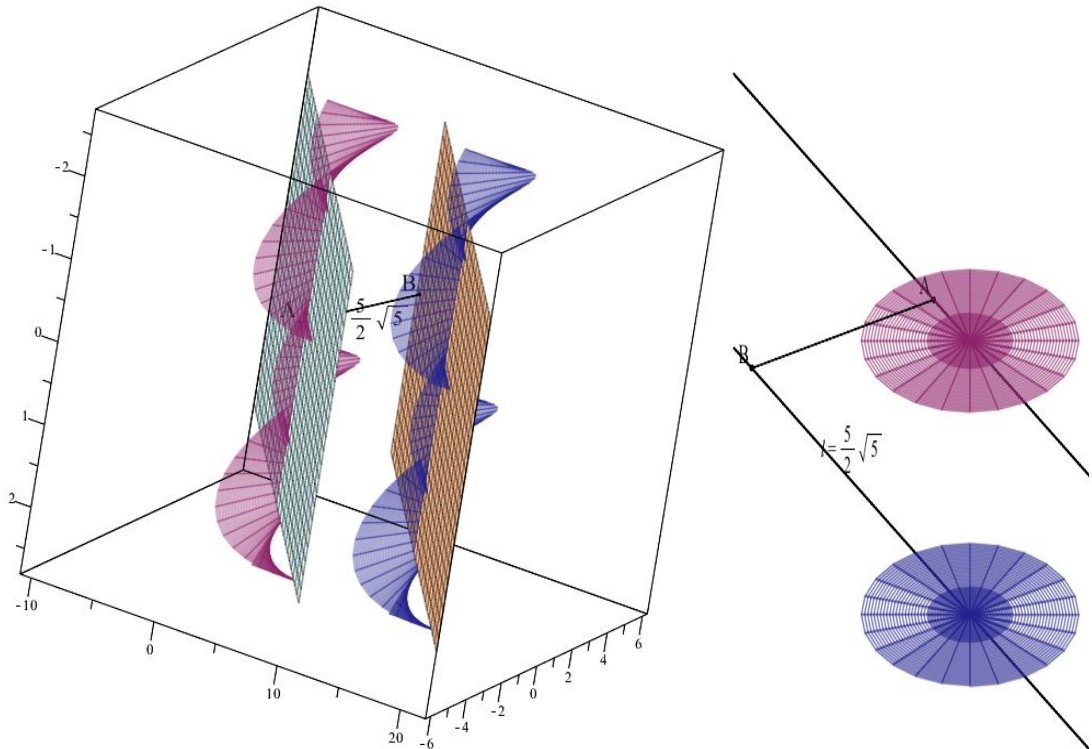
olur. Burada $\lambda = b-a$ alınır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$16\lambda^2 - 40\sqrt{5}\lambda + 125 = 0$ denklemi bulunur. Bu denklemin çözümü yapılırsa

$\lambda = \frac{5\sqrt{5}}{4}$ olur. Bu durumda $b-a = \frac{5\sqrt{5}}{4}$ şeklinde alınabilir. Buna göre $b = \frac{\sqrt{5}}{2}$ ve

$a = \frac{-3\sqrt{5}}{4}$ için A ve B noktaları $A\left(\frac{-3\sqrt{5}}{4}, 0, \frac{\sqrt{15}}{4}\right)$ ve $B\left(\frac{\sqrt{5}}{2}, 0, \frac{3\sqrt{15}}{2}\right)$ şeklinde

yazılır. Böylece düzlemler üzerinde uygun A ve B noktaları elde edilmiş olur (Şekil 4.8).



Şekil 4.8 $s = \frac{\pi}{3}$ için l uzaklığı

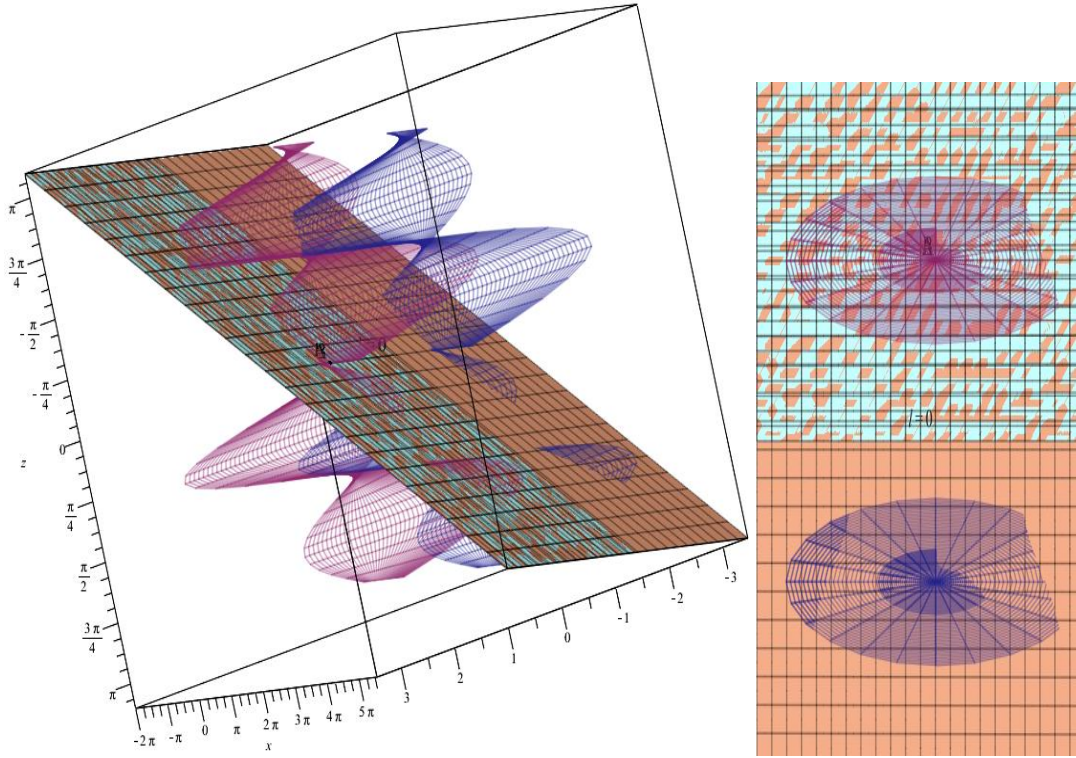
❖ $s = \frac{\pi}{2}$ için $\gamma^*(s)$ ve $\overline{\gamma^*}(s)$ striksiyon noktaları, u_2^* ve v_2^* aslinormal vektörleri, \mathbf{H} ve \mathbf{H}^* düzlemleri ve l uzaklığı sırasıyla

$$\gamma^*\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(0, \frac{\pi}{2\sqrt{5}}, 0\right), \quad \overline{\gamma^*}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left(5\sqrt{5}, \frac{\pi}{2\sqrt{5}}, 0\right),$$

$$u_2^*\left(\frac{\pi}{2}\right) = (0, 0, -1), \quad v_2^*\left(\frac{\pi}{3}\right) = (0, 0, -1),$$

$$\mathbf{H} \dots -z = 0, \quad \mathbf{H}^* \dots -z = 0, \quad l = 0$$

şeklinde bulunur. Merkezi düzlemler arasındaki uzaklık 0 şeklinde bulunur (Şekil 4.9).



Şekil 4.9 $s = \frac{\pi}{2}$ için l uzaklığı

5. SONUÇ ve ÖNERİLER

Litaratürde, Öklid ve Minkowski uzayında herhangi iki eğrinin Frenet vektörleri tarafından çizilen yüzeylere ait striksiyon eğrileri boyunca üretici vektörleri paralel ve uygun noktalardaki düzlemler arasındaki uzaklıklar sabit olması şartı altında tanımlanan eş uzaklıklı regle yüzeyler tanımlanmış ve bu yüzeylerin bazı karakteristik özellikleri verilmiştir. Dahası yüzeylerin kapalı olması durumunda integral invaryantları ayrı ayrı hesaplanmıştır.

Bu çalışmada p -eş uzaklıklı regle yüzeyler oluşturan iki eğrinin successor eğrileri ele alındı. Bu eğrilerin oluşturduğu yüzeyler, striksiyon noktalarında asli normal vektörleri paralel ve uygun yerlerde merkezi düzlemleri arasındaki uzaklık sabit olması şartı altında, successor eş uzaklıklı regle yüzeyler olarak tanımlandı. Bu uzaklık l ile gösterildi. Daha sonra successor eş uzaklıklı regle yüzeylerin striksiyon eğrileri ve bu eğrilerin teğetleri arasındaki bağıntılar bulunarak esas eğriler ile ilişkileri verildi.

Successor eş uzaklıklı regle yüzeylerin kapalı olması durumunda successor eğrilerine ait Frenet vektörlerinin oluşturduğu regle yüzeylerin açılım açıları, açılım uzunlukları ve dralleri arasındaki bağıntılar ayrı ayrı ifade edildi. Successor eğrilerinin çatılarına bağlı olarak hareket eden birim Darboux vektörleri ve bu çatıların lineer birleşimi olarak yazılan birim vektörlerin oluşturduğu regle yüzeyler için de integral invaryantları ayrı ayrı hesaplandı. Son olarak yüzeylerin kapalı olması durumunda Weingarten dönüşümü matrisi, Gauss ve ortalama eğrilikleri hesaplandı. Ayrıca eş uzaklıklı regle yüzeylere örnek verilerek Maple programı ile şekilleri çizdirilmiştir.

Esas eğrinin Frenet çatılarına ait vektörel moment eğrilerinin successor eğrileri tanımlanarak bu eğrilerin Frenet çatıları, eğrilik ve burulmaları ayrı ayrı hesaplanabilir. Daha sonra bu successor eğrilerinin Frenet vektörlerinden elde edilen regle yüzeylerin invaryantları, Gauss ve ortalama eğrilikleri, temel formları, Weingarten dönüşümleri hesaplanabilir. Benzer çalışmalar Lorentz uzayında da yapılabilir.

6. KAYNAKLAR

- Blaschke, W. (1949). Diferensiyel Geometri Dersleri. İstanbul Üniversitesi Yayınları, No:43, İstanbul, 399s.
- Do Carmo, M.P. (1976). Differential Geometry of Curves and Surfaces. Prentice Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey.
- Cevahir, C. (2021). Yüksek Boyutlu Uzaylarda Darboux Vektörlerinin Ürettiği Eş Uzaklıklı Regle Yüzeyle Üzerine. Doktora Tezi, Ordu Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Ordu.
- Erişir, T., & Öztaş, H.K. (2022). Spinor Equations of Successor Curve. Universal Journal of Mathematics and Applications, 5(1), 32-41.
- Fenchel, W. (1951). On the differential geometry of closed space curves, Bulletin of the American Mathematical Society, 57(1951), 44-54.
- Gür, S. (2015). Dual uzayda paralel equidistant regle yüzeyler. Doktora Tezi, Ordu Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Ordu.
- Hacısalıhoğlu, HH. (1983). Diferensiyel Geometri. 1.Cilt, İnönü Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Yayınları, No.2, Malatya.
- Hacısalıhoğlu, HH. (1994). Diferensiyel Geometri. 2.Cilt, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları, Ankara, 340s.
- Li, Y., Senyurt, S., Özduran, A. & Canlı, C. (2022). The Characterizations of Parallel q-Equidistant Ruled Surfaces. Symmetry Journal, 14, 1879.
- Masal, M. (1994). p-Aquidistante Regle Yüzeylerin Bazı Yeni Karakteristik Özellikleri. Yüksek Lisans Tezi, Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Samsun.
- Masal, M., & Kuruoğlu, N. (1999). Some Characteristic Properties of the Parallel p-Equidistant Ruled Surfaces In The Euclidean Space. Pure Applied Mathematic Sciences, India, L1, 35-42.
- Masal, M. & Kuruoğlu, N. (2000 a). Some Characteristic Properties of the Shape Operators of Parallel p-Equidistant Ruled Surfaces. Bulletin of Pure and Applied Sciences, 19E (2):361-364.
- Masal, M. & Kuruoğlu, N. (2000 b). Some characteristic properties of the Spherical Indicatrix Leading Curves of Parallel p-Equidistant Ruled Surfaces. Bulletin of Pure and Applied Sciences, 19E (2), 405-410.
- Masal, M. (2018). Curves According to the Successor Frame in Euclidean 3-Space. Sakarya University Journal of Science, 22(6), 1868-1873.
- Menninger, A. (2014). Characterization Of The Slant Helix As Successor Curve Of The General Helix. International Electronic Journal Of Geometry doi:10.36890/iejg.593986.
- Sabuncuoğlu, A. (2016). Diferensiyel Geometri. Nobel Akademik Yayıncılık, Ankara, 513s.

- Sariođlugil, A. & Tutar, A. (2007). On Ruled Surfaces in Euclidean Space E^3 . Int. J. Contemp. Math. Sci., Vol.2, no-1:1-11.
- Sariođlugil, A., Şenyurt, S & Kuruoğlu, N. (2011). On the integral invariants of the closed ruled surface generated by a parallel p-äquidistante dual centrode curves in the line space. Hadronic Journal, 34(3).
- Struik, Dirk J.(2011). Kısa Matematik Tarihi. Doruk Yayımcılık, 269s.
- Şenatalar, M. (1978). Diferensiyel Geometri. İstanbul Devlet Mühendislik ve Mimarlık Akademisi Yayınları, Sayı:151.
- Şenyurt, S. (2012). Integral invariants of parallel p-equistante ruled surfaces which are generated by instantaneous pfaff vector. Ordu Üniversitesi, Bilim Teknik Dergisi, 2 (1): 13-22.
- Şenyurt, S. & As, E. (2013). Some Characteristic Properties of Paralel z-Equidistant Ruled Surfaces. Hindawi Publishing Corporation, Mathematical Problems in Engineering, Article ID 587289, 7 pages.
- Valeontis, I. (1986). Parallel p-Äquadistante Regelflächen. Manuscripta Mathematica, 54, 391-404.
- Yazar, T. (2019). Mimarlıkta Yüzey Pannelleme Yaklaşımlarının Gauss Eğriliği İle İlişkisi. Megaron E-Dergisi, doi: 10.5505/MEGARON.2018.50103

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler	
Adı Soyadı	Kübra Akdağ
Doğum Yeri	
Doğum Tarihi	
Uyruğu	T.C.
Telefon	
E-Posta Adresi	
Eğitim Bilgileri	
Lisans	
Üniversite	Gazi Üniversitesi
Fakülte	Gazi Eğitim Fakültesi
Bölümü	İlköğretim Matematik Öğretmenliği
Mezuniyet Yılı	04.06.2012
Yüksek Lisans	
Üniversite	Giresun Üniversitesi
Enstitü Adı	Fen Bilimleri Enstitüsü
Anabilim Dalı	Matematik Anabilim Dalı
Mezuniyet Tarihi	15.06.2017
Doktora	
Üniversite	Ordu Üniversitesi
Enstitü Adı	Fen Bilimleri Enstitüsü
Anabilim Dalı	Matematik Anabilim Dalı
Yayınlar	
<p>Çayır H. and Akdağ K., “Some Notes on Almost Paracomplex Structures Associated with the Diagonal Lifts and Operators on Cotangent Bundle $T^*(M^n)$”, New Trends in Mathematical Sciences, 4(4) 42-50, (2016).</p> <p>Çayır H. and Akdağ K., “Some Notes on the Diagonal Lifts and Operators on Cotangent Bundle”, 15th International Geometry Symposium, 2017.</p> <p>Çayır H. and Akdağ K., “Some Notes on Metallic Riemannian Structures”, International Conference on Computational and Statistical Methods in Applied Sciences, 2017.</p> <p>Çayır H., Şenyurt S. and Akdağ K., “On the Riemannian Metrics of the Form $JG=SgfHg$ on the Tangent Bundle”, International Conference on Mathematics and Mathematics Education, 2018.</p> <p>Şenyurt S. and Akdağ K., “N-Smarandache Curves According to the Sabban Frame of the Spherical Indicatrix Curve”, International Conference on Mathematical Studies and Applications, 144-152, 2018.</p> <p>Şenyurt S. and Akdağ K., “W-Smarandache Curves According to the Sabban Frame of the Spherical Indicatrix Curve” , International Conference on Mathematical Studies and Applications, 404-414, 2018.</p>	