T. C.

ORDU ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

NORMLU UZAYLARDA KUVVETLİ LACUNARY TOPLANABİLME VE LACUNARY İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

SÜMEYYA SELMA SADAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK

ORDU 2022

TEZ BİLDİRİMİ

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan ve kullanılan intihal tespit programının sonuçlarına göre; bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

SÜMEYYA SELMA SADAN

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

NORMLU UZAYLARDA KUVVETLİ LACUNARY TOPLANABİLME VE LACUNARY İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

SÜMEYYA SELMA SADAN

ORDU ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ, 36 SAYFA

(TEZ DANIŞMANI: PROF. DR. CEMAL BELEN)

Bu tez çalışması beş bölüme ayrılmıştır.

Tezin ilk bölümü giriş bölümüdür. Burada tez çalışmasının amacı ve kapsamı belirtilmiştir.

İkinci bölümde tezin ana bölümlerinde kullanılan istatistiksel yakınsaklık, modülüs fonksiyonu, f-istatistiksel yakınsaklık ile lacunary istatistiksel yakınsaklık kavramları ve bu kavramlarla ilgili bazı temel özellikler sunulmaktadır.

Tezin üçüncü bölümünde modülüs fonksiyonuna göre kuvvetli lacunary toplanabilme ve lacunary istatistiksel yakınsaklık kavramları incelenmiştir.

Dördüncü bölümde normlu bir uzayda modülüs fonksiyonuna göre kuvvetli lacunary yakınsaklık kavramı yeni bir formda tanımlanmış ve uyumlu modülüs fonksiyonları aracılığı ile bu kavramın kuvvetli lacunary yakınsaklık ve f-lacunary istatististiksel yakınsaklık kavramı ile ilişkisi sunulmuştur.

Son bölümünde ise tez çalışmasının devamı niteliğinde olabilecek öneriler bulunmaktadır.

Anahtar Kelimeler: İstatistiksel Yakınsaklık, Modülüs Fonksiyonu, Uyumlu Modülüs Fonksiyonu, f-Lacunary İstatistiksel Yakınsaklık, f-Kuvvetli Lacunary Yakınsaklık

ABSTRACT

STRONG LACUNARY SUMMABILITY AND LACUNARY STATISTICAL CONVERGENCE IN NORMED SPACES

SÜMEYYA SELMA SADAN

ORDU UNIVERSITY INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

MATHEMATICS

MASTER THESIS, 36 PAGES

(SUPERVISOR: PROF. DR. CEMAL BELEN)

This thesis work is divided into five chapters.

The first chapter is introduction chapter. The aim and content of the thesis is indicated in this chapter.

In the second chapter, the concepts of statistical convergence, modulus function, f-statistical convergence and lacunary statistical convergence, which are used in the main parts of the thesis, and some basic properties related to these concepts are presented.

In the third part of the thesis, the concepts of strong lacunary summability and lacunary statistical convergence with respect to the modulus function are examined.

In the fourth chapter, the concept of strong lacunary convergence with respect to the modulus function in a normed space is defined in a new form and its relationship with the concepts of strong lacunary convergence and f-lacunary statistical is presented.

In the final chapter, there are recommendations that can be a continuation of the thesis work.

Keywords: Statistical Convergence, Modulus Function, Compatible Modulus Function, f-Lacunary Statistical Convergence, f-strong Lacunary Convergence

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanması sürecinde, deneyimlerinden ve bilgilerinden faydalandığım, desteğini hiçbir zaman esirgemeyen değerli danışmanım Prof. Dr. Cemal BELEN'e ayrıca maddi ve manevi desteğini hiç bir zaman esirgemeyen anneme, babama, erkek kardeşlerime ve sevgili nişanlım Kürşad Bey'e bu teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER ve KISALTMALAR LİSTESİ

$\mathbb{N}$	:	Doğal Sayılar Kümesi
$\boldsymbol{d(K)}$	:	K Kümesinin Doğal Yoğunluğu
$\boldsymbol{d^{f}(K)}$	:	K Kümesinin f-Yoğunluğu
$\boldsymbol{st-limx}$	:	x Dizisinin İstatitiksel Limiti
$\boldsymbol{S_{\theta}^{f}}$	:	f-Lacunary İstatitiksel Yakınsak Dizilerin Kümesi
$\boldsymbol{N_{\theta}^{f}}$	:	f-Kuvvetli Lacunary Toplanabilir Dizilerin Kümesi
$\boldsymbol{S}$	:	Tüm İstatistiksel Yakınsak Dizilerin Kümesi
$\boldsymbol{S_{\theta}}$	:	Tüm Lacunary İstatistiksel Yakınsak Dizilerin Kümesi
$\boldsymbol{S^{f}}$	:	Tüm f-İstatistiksel Yakınsak Dizilerin Kümesi
c	:	Tüm Yakınsak Dizilerin Kümesi
$\boldsymbol{\ell_{\infty}}$	:	Tüm Sınırlı Dizilerin Kümesi

1. GİRİŞ

Fast (1951) ve Steinhaus (1951) alışılmış yakınsaklık kavramının bir genelleştirmesi olarak istatistiksel yakınsaklık fikrini tanıtmışlardır.

Matematiğin birçok alanında uygulamalara sahip olan istatistiksel yakınsaklığın toplanabilme teorisinde (Connor, 1988) sayılar teorisinde (Erdős ve Tenenbaum, 1989), olasılık teorisinde (Fridy ve Khan, 1998), ölçü teorisinde (Miller, 1995), optimizasyon teorisinde (Pehlivan ve Fisher, 2000), yaklaşım teorisinde (Gadjiev ve Orhan, 2002), topolojide (Di Maio ve Kočinac, 2008) çalışıldığı görülmektedir.

Schoenberg (1959) istatistiksel yakınsaklığın bazı temel özelliklerini incelemiş ve bu kavramı bir toplanabilme metodu olarak çalışmıştır. Schoenberg'e (1959) ait en önemli sonuç, Cesáro yakınsaklığın istatistiksel yakınsaklığı gerektirdiği ve karşıtının sınırlı diziler için geçerli olduğu sonucudur.

Fridy (1985) istatistiksel yakınsaklık kavramı ile tanımladığı istatistiksel Cauchy dizisi kavramının birbirine denk olduğunu ispatlamış ve ayrıca istatistiksel yakınsaklığın en genel toplanabilme metotları ile ilişkisini araştırmıştır.

Fridy ve Orhan (1993a) lacunary dizileri kullanarak istatistiksel yakınsaklık kavramıyla ilişkili bir kavram olan lacunary istatistiksel yakınsaklık tanımını ifade etmişlerdir. Yine Fridy ve Orhan (1993b) lacunary istatistiksel yakınsaklığın toplanabilme özelliklerini incelemişlerdir.

Freedman ve ark. (1978) tarafından tanımlanan kuvvetli lacunary toplanabilme kavramının sınırlı diziler üzerinde lacunary istatistiksel yakınsaklığa denk olduğu Fridy ve Orhan (1993) tarafından ispatlanmıştır. Ayrıca Fridy ve Orhan (1993) istatistiksel yakınsaklık ve lacunary istatistiksel yakınsaklık arasındaki ilişkiyi incelemişlerdir.

Nakano (1953) tarafından tanımlanan modülüs fonksiyonu kavramını toplanabilme teorisinde ilk kullanan Maddox (1986) olmuştur. Maddox (1986) kuvvetli Cesáro toplanabilme kavramını modülüs fonksiyonları kullanarak geliştirmiştir.

Maddox'un (1986) çalışmasından sonra Pehlivan ve Fisher (1995), Malkowsky ve Savas (2000), Et ve ark. (2003), Savaş ve Patterson (2011), Tripathy ve Chandra (2011) gibi birçok matematikçi modülüs fonksiyonlarını kullanarak yeni dizi uzayları tanımlamışlardır.

Connor (1989) ise Maddox tarafından yapılan çalışmayı en genel matris toplanabilme metodu için ele almıştır.

Aizpuru ve ark. (2014) modülüs fonksiyonlarını kullanarak yeni bir yoğunluk kavramı olan f-yoğunluk kavramını ve bununla ilişkili olarak f-istatistiksel yakınsaklık kavramını tanımlamıştır. Burada f bir modülüs fonksiyonudur. f-istatistiksel yakınsaklık kavramı alışılmış yakınsaklıkla istatistiksel yakınsaklık kavramı arasında yer almaktadır. Burada kullanılan f-yoğunluk kavramı bilinen doğal yoğunluk kavramının sahip olduğu bazı özelliklere sahip değildir. Aizpuru ve ark. (2014), aynı çalışmada f-istatistiksel Cauchy dizisi kavramını tanımlayıp bu kavramın herhangi bir Banach uzayında f-istatistiksel yakınsaklığa denk olduğunu ispatlamıştır.

León-Saavedra ve ark. (2019) f-kuvvetli Cesáro yakınsaklık kavramını tanımlayıp bu kavramın f-istatistiksel yakınsaklık ile ilişkisini incelemiştir. Bu çalışmada farklı bir modülüs fonksiyonu özelliğine sahip olan uyumlu modülüs fonksiyonları için istatistiksel yakınsaklık ve f-istatistiksel yakınsaklık kavramlarının denk olduğu ispatlanmıştır. Reel bir dizinin kuvvetli Cesáro yakınsak olması için gerek ve yeter şartın dizinin istatistiksel yakınsak ve düzgün integrallenebilir olduğu sonucu Khan ve Orhan (2010) tarafından gösterilmiştir. León-Saavedra ve ark. (2019) bu sonucu f-kuvvetli Cesáro yakınsaklık ve f-istatistiksel yakınsaklık bağlamında ele almışlardır.

Bhardwaj ve Dhawan (2016) ise modülüs fonksiyonlarını kullanarak f-lacunary istatistiksel kavramını tanımlayıp çalışmışlardır. Bu çalışmada f-lacunary istatistiksel yakınsaklık ve f-istatistiksel yakınsaklık ilişkisi, f-lacunary kuvvetli yakınsaklık ile f-lacunary istatistiksel yakınsaklık arasındaki ilişki ve yakınsaklık için Cauchy kriterinin f-lacunary istatistiksel yakınsaklık versiyonu ele alınmıştır.

Moreno-Polido ve ark. (2020) reel değerli diziler için ele alınan lacunary istatistiksel yakınsaklık ve lacunary kuvvetli yakınsaklık kavramlarını Banach uzaylarında ele almışlardır.

Bu tez çalışmasında ilk olarak Bhardwaj ve Dhawan'a (2016) ait çalışma ile Moreno-Polido ve ark. (2020) tarafından yapılan çalışma incelenmiştir. Sonrasında ise León-Saavedra ve ark. (2019) tarafından yapılan çalışma dikkate alınarak normlu uzaylarda f-kuvvetli lacunary yakınsaklık kavramı tanımlanmış bu kavramın kuvvetli lacunary yakınsaklığı gerektirdiği, uyumlu modülüs fonksiyonları için lacunary istatistiksel yakınsaklık ile f-lacunary istatistiksel yakınsaklık kavramının denk olduğu ispatlanmıştır. Son olarak Khan ve Orhan (2010) tarafından verilen düzgün integrallenebilme kavramı kullanılarak

f, uyumlu modülüs fonksiyonu olduğunda bir dizinin f-kuvvetli lacunary yakınsak olması için gerekli ve yeterli şartın dizinin f-lacunary istatistiksel yakınsak ve θ-düzgün integrallenebilir olduğu gösterilmiştir.

2. GENEL BİLGİLER

Bu bölümde tezin ana bölümlerinde kullanılan istatistiksel yakınsaklık, modülüs fonksiyonu ve f-istatistiksel yakınsaklık ile lacunary istatistiksel yakınsaklık tanımları ve bunlarla ilgili bazı temel özellikler sunulmaktadır.

2.1 İstatistiksel Yakınsaklık

$\mathbb{N}$ ile doğal sayısı kümesini gösterelim.

Tanım 2.1.1 $K \subset \mathbb{N}$ kümesi için $K_n = \{k \leq n : k \in K\}$ olsun. K_n kümesinin kardinal sayısı $|K_n|$ ile gösterilmek üzere eğer

$$d(K) = \lim_{n\to\infty} \frac{|K_n|}{n}$$

limiti var ise o zaman K kümesi $d(K)$ yoğunluğuna (ya da doğal yoğunluğuna) sahiptir denir (Niven ve Zuckerman, 1980).

Bu tanıma göre $\mathbb{N}$ nin yoğunluğu 1, Boş kümenin yoğunluğu 0 olur. Sonlu doğal sayı kümeleri sıfır yoğunlukludur. Ayrıca $d(\{2n : n \in \mathbb{N}\}) = 1/2$ ve $d\left\{n^2 : n \in \mathbb{N}\right\} = 0$ dır.

Ayrıca her $K \subset \mathbb{N}$ için $d\left(K\right) = 1 - d(\mathbb{N}\backslash K)$ eşitliği geçerlidir.

Tanım 2.1.2 Bir $x = (x_k)$ sayı dizisi verildiğinde eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$d(\{k \in \mathbb{N} : |x_k - L| \geq \varepsilon\}) = 0$$

yani

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left|\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}\right| = 0$$

ise x dizisi L sayısına istatistiksel yakınsaktır denir ve $st - \lim x = L$ ya da S-$\lim x_k = L$ şeklinde yazılır (Fast, 1951).

S ile istatistiksel yakınsak olan dizilerin oluşturduğu küme gösterilecektir.

Örnek 2.1.1 $x = (x_k)$ dizisi

$$x_k = \begin{cases} 1, & k = j^2 \ (j = 1, 2, ...) \\ 0, & k \neq j^2 \end{cases} \tag{2.1.1}$$

biçiminde tanımlansın. Her $\varepsilon > 0$ sayısı

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left|\{k \leq n : |x_k - 0| \geq \varepsilon\}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left|\left\{k \leq n : k = j^2\right\}\right| \leq \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{n} = 0$$

olduğundan $st - \lim x = 0$ dır.

Tanıma göre yakınsak olan bir dizi istatistiksel yakınsaktır. Fakat yukarıdaki örnekten görüleceği üzere bunun karşıtı geçerli değildir.

2.2 Modülüs Fonksiyonu ve f-İstatistiksel Yakınsaklık

Tanım 2.2.1 Bir $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ fonksiyonu
(i) $f(x) = 0$ ancak ve ancak $x = 0$
(ii) $x, y \in [0, \infty)$ için $f(x + y) \leq f(x) + f(y)$
(iii) f artan
(iv) f, $x = 0$ noktasında sağdan sürekli
koşullarına sağlıyor ise f ye bir modülüs fonksiyonu denir (Nakano, 1953).

Yukarıdaki özellikler bir modülüs fonksiyonunun tüm tanım aralığında sürekli bir fonksiyon olmasını gerektirir. Gerçekten; (ii) 'den dolayı, $f(x) = f(x - y + y) \leq f(x - y) + f(y)$ ve buradan $f(x) - f(y) \leq f(x - y)$ elde edilir. Benzer şekilde, $f(y) - f(x) \leq f(y - x)$ olacağından

$$-f(y - x) \leq f(x) - f(y) \leq f(x - y)$$

olur. Ayrıca f artan olduğundan $f(x - y) \leq f(|x - y|)$ ve $-f(y - x) \geq -f(|x - y|)$ ve böylece

$$|f(x) - f(y)| \leq f(|x - y|)$$

elde edilir. $y > 0$ herhangi bir nokta olsun. f fonksiyonu $x = 0$ noktasında sağdan sürekli olduğundan keyfi bir $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık öyle bir $\delta > 0$ mevcuttur ki $0 < |x - y| < \delta$ olduğunda $|f(|x - y|)| < \varepsilon$ dur. Böylece $0 < |x - y| < \delta$ iken $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ elde edilir ki bu f nin $[0, \infty)$ üzerinde her yerde sürekli olduğunu gösterir.

Modülüs fonksiyonları sınırsız veya sınırlı olabilir. Örnek olarak, $0 < p \leq 1$ olmak üzere $f(x) = x^p$, $f(x) = \log(1 + x)$ sınırsız modülüs fonksiyonları iken $f(x) = \frac{x}{x+1}$ sınırlı bir modülüs fonksiyonudur.

Tanım 2.2.2 f sınırsız bir modülüs fonksiyonu olsun. Bir $A \subset \mathbb{N}$ kümesinin f-yoğunluğu, limit mevcut olması şartıyla

$$d^f(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{f(n)} f(|\{k \leq n : k \in A\}|)$$

biçiminde tanımlanır (Aizpuru ve ark., 2014).

Sonlu kümelerin f-yoğunluğunun sıfır olduğu tanımdan açıktır. Ayrıca, $d^f(\mathbb{N}\backslash A) = 1 - d^f(A)$ eşitliği genel olarak geçerli değildir. Ancak, eğer $d^f(A) = 0$ ise $d^f(\mathbb{N}\backslash A) = 1$ dir.

Uyarı 2.2.1 f herhangi bir sınırsız modülüs fonksiyonu olmak üzere bir $A \subset \mathbb{N}$ kümesi için $d^f(A) = 0$ ise $d(A) = 0$ dır. Fakat bunun karşıtının doğru olması gerekmez. Örneğin, $f(x) = \log(1+x)$ ve $A = \{1, 4, 9, ...\}$ için $d(A) = 0$ fakat

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(1+\sqrt{n})}{\log(1+n)} = \frac{1}{2}$$

olması sebebiyle $d^f(A) = 1/2$ dir (Aizpuru ve ark., 2014).

Tanım 2.2.3 f sınırsız bir modülüs fonksiyonu ve $x = (x_k)$ bir sayı dizisi olsun. Herhangi bir $\varepsilon > 0$ sayısı için

$$d^f(\{k \in \mathbb{N} : |x_k - l| \geq \varepsilon\}) = 0,$$

yani

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{f(n)} f(|\{k \leq n : |x_k - l| \geq \varepsilon\}|) = 0$$

ise x dizisi l sayısına f-istatistiksel yakınsaktır denir. Bu durum $S^f - \lim x_k = l$ veya $x_k \to l(S^f)$ şeklinde yazılır. Tüm f-istatistiksel yakınsak dizilerin kümesi ise S^f ile gösterilir (Aizpuru ve ark., 2014).

Özel olarak $f(x) = x$ alınırsa, f-istatistiksel yakınsaklık istatistiksel yakınsaklığa indirgenir.

Bu tanımda f sınırlı bir modülüs fonksiyonu olmuş olsaydı f-istatistiksel yakınsak olan diziler sadece sabit diziler olacaktı. Bu nedenle tanımda yer alan modülüs fonksiyonu sınırsız olarak kabul edilmektedir.

Tanıma göre yakınsak her dizi f-istatistiksel yakınsaktır. Çünkü, (x_k) dizisi bir l sayısına yakınsak ise n_0 pozitif bir tamsayı olmak üzere

$$f(|\{k \leq n : |x_k - l| \geq \varepsilon\}|) \leq f(n_0)$$

eşitsizliği geçerlidir. Buradan

$$0 \leq \frac{1}{f(n)} f(|\{k \leq n : |x_k - l| \geq \varepsilon\}|) \leq \frac{f(n_0)}{f(n)}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlikte $n \to \infty$ için limite geçildiğinde $S^f - \lim x_k = l$ elde edilir.

Bunun yanı sıra, Uyarı 2.2.1'e göre f-istatistiksel yakınsak bir dizi istatistiksel yakınsaktır. Sonuç olarak, f-istatistiksel yakınsaklık kavramı bilinen anlamdaki yakınsaklık ile istatistiksel yakınsaklık arasında yer alır.

Aşağıdaki örnek $S^f \subset S$ içermesinin kesin olduğunu gösterir.

Örnek 2.2.1 $x = (x_k)$ dizisi

$$x_k = \begin{cases} 1, & k = n^2 \ (n = 1, 2, ...) \\ 0, & k \neq n^2 \end{cases} \tag{2.2.1}$$

şeklinde tanımlansın. Bu dizi için $st - \lim x = 0$ olduğunu biliyoruz. Eğer $f(x) = \log(1+x)$ ve $A = \{n^2 : n \in \mathbb{N}\}$ alınırsa $d^f(A) = 1/2$ ve $d^f(\mathbb{N} \backslash A) = 1$ olduğundan $S^f - \lim x$ mevcut değildir.

2.3 Lacunary İstatistiksel Yakınsaklık ve Kuvvetli Lacunary Toplanabilme

Tanım 2.3.1 $\theta = (k_r)$ terimleri pozitif tamsayıladan oluşan artan bir dizi olsun. $k_0 = 0$ kabul etmek koşuluyla $h_r = k_r - k_{r-1} \to \infty$ $(r \to \infty)$ oluyorsa θ dizisine bir lacunary dizi denir. θ lacunary dizisinden elde edilen aralık $I_r = (k_{r-1}, k_r]$ ile, $\frac{k_r}{k_{r-1}}$ oranı da q_r ile gösterilir (Freedman ve ark., 1978).

Örneğin, $(k_r) = (2^r)$ ve $(k_r) = (r!)$ dizileri birer lacunary dizidir.

Tanım 2.3.2 $\theta = (k_r)$ bir lacunary dizi ve $x = (x_k)$ bir sayı dizisi olsun. Eğer

$$\lim_{r \to \infty} \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} |x_k - l| = 0$$

olacak biçimde bir l sayısı varsa x dizisi l sayısına lacunary kuvvetli yakınsaktır veya N_θ-toplanabilirdir denir ve bu durumda $N_\theta - \lim x_k = L$ veya $x_k \to L$ (N_θ) yazılır (Freedman ve ark., 1978).

N_θ ile tüm lacunary kuvvetli yakınsak dizilerin uzayını gösterelim yani

$$N_\theta = \left\{ (x_k) : \exists\, l \text{ için } \lim_{r \to \infty} \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} |x_k - l| = 0 \right\}$$

olsun.

N_θ sınıfı ile

$$w = \left\{ (x_k) : \exists\, l \text{ için } \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |x_k - l| = 0 \right\}$$

ile tanımlanan ve tüm kuvvetli Cesàro toplanabilir dizilerin kümesi olarak adlandırılan w sınıfı arasında kuvvetli bir ilişki vardır. Bu ilişki Freedman ve ark. (1978) tarafından verilmiştir: Özel olarak $\theta = (2^r)$ için $N_\theta = w$ dir. Üstelik, $N_\theta = w$ olması için gerekli ve yeterli şart $1 < \liminf_r q_r \leq \limsup_r q_r < \infty$ koşulunun sağlanmasıdır.

N_θ sınıfı modülüs fonksiyonu kullanılarak Pehlivan ve Fisher (1994) tarafından aşağıdaki gibi genelleştirildi:

Tanım 2.3.3 f bir modülüs fonksiyonu, $\theta = (k_r)$ bir lacunary dizi ve $x = (x_k)$ bir sayı dizisi olsun. Eğer

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} \sum_{k\in I_r} f\left(|x_k - l|\right) = 0$$

olacak biçimde bir l sayısı varsa x dizisi l sayısına f modülüs fonksiyonuna göre lacunary kuvvetli yakınsaktır denir ve bu durum $N_\theta\left(f\right) - \lim x_k = L$ veya $x_k \to L\ \left(N_\theta\left(f\right)\right)$ biçiminde yazılır (Pehlivan ve Fisher, 1994).

Bir f modülüs fonksiyonuna göre lacunary kuvvetli yakınsak dizilerin kümesini N_θ^f ile gösterelim.

Fridy ve Orhan (1993) lacunary dizileri kullanarak istatistiksel yakınsaklığın genelleşmesi olan lacunary istatistiksel yakınsaklık kavramını verdiler.

Tanım 2.3.4 $\theta = (k_r)$ bir lacunary dizi ve $x = (x_k)$ bir sayı dizisi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} \left|\{k \in I_r : |x_k - l| \geq \varepsilon\}\right| = 0$$

ise x dizisi l sayısına lacunary istatistiksel yakınsaktır veya S_θ-yakınsaktır denir ve bu durum $S_\theta - \lim x_k = l$ veya $x_k \to l\,(S_\theta)$ şeklinde yazılır (Fridy ve Orhan, 1993).

Tüm lacunary istatistiksel yakınsak dizilerin kümesini S_θ ile göstereceğiz.

3. MODÜLÜS FONKSİYONU VE LACUNARY İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

Bhardwaj ve Dhawan (2016), f sınırsız modulüs fonksiyonu olmak üzere f-lacunary istatistiksel yakınsaklık kavramını tanıtmış ve çalışmıştır. Bu bölümde tüm f-lacunary istatistiksel yakınsak dizilerin sınıfı olan S_θ^f sınıfı incelenmiştir. İlk kısımda f-lacunary istatistiksel yakınsaklık kavramı verilmiş ve onun modülüs fonksiyonuna göre kuvvetli lacunary toplanabilme ile ilişkisi incelenmiştir. İkinci kısımda f modülüs fonksiyonu belirli bir özelliğe sahip olduğunda f-lacunary istatistiksel yakınsaklık ile f-istatistiksel yakınsaklığın denk olduğu ispatlanmıştır. Üçüncü kısımda S_θ^f-limitinin tekliği verilmiştir. Son kısımda birbirinin incelmesi olan iki lacunary dizi verildiğinde bu dizilere ait f-lacunary istatistiksel kavramları arasındaki ilişkiye değinilmiştir.

3.1 f-Lacunary İstatistiksel Yakınsaklık

Tanım 3.1.1 f sınırsız bir modülüs fonksiyonu, $\theta = (k_r)$ bir lacunary dizi ve $x = (x_k)$ bir sayı dizisi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ sayısı için,

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{f(h_r)} f\left(\left|\{k \in I_r : |x_k - l| \geq \varepsilon\}\right|\right) = 0$$

ise o zaman x dizisi l sayısına f-lacunary istatistiksel yakınsaktır veya S_θ^f-yakınsaktır denir ve burum $S_\theta^f - \lim x_k = l$ veya $x_k \to l \left(S_\theta^f\right)$ şeklinde yazılır. Tüm f-lacunary istatistiksel yakınsak dizilerin kümesi S_θ^f ile gösterilir (Bhardwaj ve Dhawan, 2016).

Uyarı 3.1.1 $f(x) = x$ durumunda f-lacunary istatistiksel yakınsaklık kavramı bildiğimiz lacunary istatistiksel yakınsaklığa indirgenir.

Teorem 3.1.1 Yakınsak her dizi f-lacunary istatistiksel yakınsaktır. Yani, tüm yakınsak dizilerin kümesi c olmak üzere herhangi bir sınırsız f modülüs fonksiyonu ve bir θ lacunary dizisi için $c \subset S_\theta^f$ dir (Bhardwaj ve Dhawan, 2016).

İspat. $x = (x_k)$ herhangi bir yakınsak dizi olsun. Bu durumda her $\varepsilon > 0$ için $\{k \in \mathbb{N} : |x_k - l| \geq \varepsilon\}$ kümesi sonludur. $|\{k \in \mathbb{N} : |x_k - l| \geq \varepsilon\}| = m_0$ olsun. Diğer taraftan $\{k \in I_r : |x_k - l| \geq \varepsilon\} \subset \{k \in \mathbb{N} : |x_k - l| \geq \varepsilon\}$ ve f artan olduğundan

$$\frac{f\left(\left|\{k \in I_r : |x_k - l| \geq \varepsilon\}\right|\right)}{f(h_r)} \leq \frac{f(m_0)}{f(h_r)} \tag{3.1.1}$$

dir. Bu eşitsizliğin her iki tarafından $r \to \infty$ için limit alınırsa, $r \to \infty$ iken $f(h_r) \to \infty$ olduğundan,

$$\lim_{r\to\infty} \frac{f\left(\left|\{k \in I_r : |x_k - l| \geq \varepsilon\}\right|\right)}{f(h_r)} = 0$$

elde edilir. □

Teorem 3.1.2 Her f-lacunary istatistiksel yakınsak dizi lacunary istatistiksel yakınsaktır (Bhardwaj ve Dhawan, 2016).

İspat. $x = (x_k)$ dizisi l sayısına f-lacunary istatistiksel olsun. Limit tanımından ve modülüs fonksiyonunun alt toplamsallık özelliğinden, her $p \in \mathbb{N}$ için en az bir $r_0 \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki $r \geq r_0$ için,

$$f\left(|\{k \in I_r : |x_k - l| \geq \varepsilon\}|\right) \leq \frac{1}{p} f(h_r) \leq \frac{1}{p} p f(\frac{h_r}{p}) = f\left(\frac{h_r}{p}\right) \tag{3.1.2}$$

dir. f artan olduğundan

$$\frac{1}{h_r} |\{k \in I_r : |x_k - l| \geq \varepsilon\}| \leq \frac{1}{p} \tag{3.1.3}$$

olur. Dolayısıyla x dizisi l ye lacunary istatistiksel yakınsaktır. □

Teorem 3.1.1 ile Teorem 3.1.2 gösteriyor ki f-lacunary istatistiksel yakınsaklık kavramı, alışılmış anlamdaki yakınsaklık ile lacunary istatistiksel yakınsaklık kavramları arasında yer almaktadır.

Teorem 3.1.3 $\theta = (k_r)$ bir lacunary dizi olsun.

(a) f sınırsız bir modülüs fonksiyonu olsun öyle ki $\lim_{t\to\infty}(f(t)/t) > 0$ sağlansın ve her $x \geq 0$, $y \geq 0$ için $f(xy) \geq cf(x)f(y)$ olacak biçimde bir $c > 0$ sabiti mevcut olsun. O zaman,

(i) $N_\theta^f - \lim x_k = l$ ise $S_\theta^f - \lim x_k = l$ dir.

(ii) $N_\theta^f \subset S_\theta^f$ içermesi kesin bir içermedir.

(b) x sınırlı bir dizi ve $S_\theta^f - \lim x_k = l$ ise $N_\theta^f - \lim x_k = l$ dir.

(c) f, (a) şıkkındaki özelliklere sahip modülüs fonksiyonu olmak üzere $N_\theta^f \cap \ell_\infty = S_\theta^f \cap \ell_\infty$dir (Bhardwaj ve Dhawan, 2016).

İspat. (a) (i) $x_k \to l(N_\theta^f)$ olsun. Herhangi bir $\varepsilon > 0$ sayısı için, modülüs fonksiyonunun (ii) ve (iii) özelliklerine göre

$$\begin{aligned}
\frac{1}{h_r}\sum_{k\in\imath_r} f\left(|x_k - l|\right) &\geq \frac{1}{h_r} f\left(\sum_{k\in I_r} |x_k - l|\right) \\
&\geq \frac{1}{h_r} f\left(\sum_{\substack{k\in I_r \\ |x_k - l| \geq \varepsilon}} |x_k - l|\right) \\
&\geq \frac{1}{h_r} f\left(|\{k \in I_r : |x_k - l| \geq \varepsilon\}|\, \varepsilon\right)
\end{aligned}$$

$$\geq \frac{c}{h_r} f\left(|\{k \in I_r : |x_k - l| \geq \varepsilon\}|\right) f(\varepsilon)$$

$$= \frac{c}{h_r} \frac{f\left(|\{|k \in I_r : |x_k - l| \geq \varepsilon|\}|\right)}{f(h_r)} f(h_r) f(\varepsilon)$$

elde edilir. $x \in N_\theta^f$ ve $\lim_{r\to\infty}(f(h_r)/h_r) > 0$ olduğu dikkate alınırsa $x \in S_\theta^f$ elde edilir.
(ii) İçermenin kesin olduğunu göstermek için I_r aralığındaki ilk $[\![\sqrt{h_r}]\!]$ tamsayılarında sırasıyla $1, 2, 3, ..., [\![\sqrt{h_r}]\!]$ değerlerini alan ve diğer yerlerde sıfır olan $x = (x_k)$ dizisini ele alalım. Bu şekilde tanımlanan (x_k) dizisi sınırlı değildir. Ayrıca, her $\varepsilon > 0$ için,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{f(h_r)} f\left(|\{k \in I_r : |x_k - 0| \geq \varepsilon\}|\right) &= \frac{f([\![\sqrt{h_r}]\!]}{f(h_r)} \\
&= \frac{f([\![\sqrt{h_r}]\!]}{[\![\sqrt{h_r}]\!]} \frac{h_r}{f(h_r)} \frac{[\![\sqrt{h_r}]\!]}{h_r} \to 0 \ (r \to \infty)
\end{aligned}$$

dır. Çünkü $f([\![\sqrt{h_r}]\!])/\left[\sqrt{h_r}\right]$ ve $f(h_r)/h_r$ oranları $r \to \infty$ iken pozitif ve $\frac{[[\sqrt{h_r}]]}{h_r} \to 0$ $(r \to \infty)$ dır. Böylece $x_k \to 0(S_\theta^f)$ dir. Diğer taraftan,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} f(|x_k - 0|) &= \frac{f(1) + f(2) + ... + f([\![\sqrt{h_r}]\!])}{h_r} \\
&\geq \frac{f(1 + 2 + ... + [\![\sqrt{h_r}]\!])}{h_r} \\
&= \frac{f\left([\![\sqrt{h_r}]\!]([\![\sqrt{h_r}]\!] + 1)/2\right)}{h_r} \\
&\geq c \frac{f\left([\![\sqrt{h_r}]\!]\right) f\left(([\![\sqrt{h_r}]\!] + 1)/2\right)}{h_r} \\
&= c \times \frac{f([\![\sqrt{h_r}]\!])}{[\![\sqrt{h_r}]\!]} \frac{f\left(\left([\![\sqrt{h_r}]\!] + 1\right)/2\right)}{([\![\sqrt{h_r}]\!] + 1)/2} \frac{[\![\sqrt{h_r}]\!]\left(\left([\![\sqrt{h_r}]\!] + 1\right)/2\right)}{h_r}
\end{aligned}$$

dır. c sabiti ve de son ifadedeki tüm oranların $r \to \infty$ iken limitleri pozitif olduğundan bu son eşitsizlikten $x_k \nrightarrow 0(N_\theta^f)$ elde edilir.
(b) $x_k \to l(S_\theta^f)$ olduğunu kabul edelim ve sınırlılık koşuluna göre her $k \in \mathbb{N}$ için $|x_k - l| \leq H$ olsun. Verilen $\varepsilon > 0$ sayısı için

$$\begin{aligned}
\frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} f(|x_k - l|) &= \frac{1}{h_r} \sum_{\substack{k \in I_r \\ |x_k - l| \geq \varepsilon}} f\ (|x_k - l|) + \frac{1}{h_r} \sum_{\substack{k \in I_r \\ |x_k - l| < \varepsilon}} f\ (|x_k - l|) \\
&\leq \frac{1}{h_r} |\{k \in I_r : |x_k - l| \geq \varepsilon\}| f(H) + \frac{1}{h_r} h_r f(\varepsilon)
\end{aligned}$$

dır. Bu son eşitsizlikte $r \to \infty$ için limit alınırsa Teorem 3.1.2'den ve f nin artanlığından

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} \sum_{k\in I_r} f(|x_k - l|) = 0$$

elde edilir.

(c) şıkkı (a) ve (b) şıklarının sonucu olarak elde edilir. □

3.2 f-Lacunary İstatistiksel Yakınsaklık ve f-İstatistiksel Yakınsaklık İlişkisi

Bu kısımda θ ve f üzerine çeşitli kıstlamalar koyarak $S_\theta^f \subset S^f$ ve $S^f \subset S_\theta^f$ içermelerini inceleyeceğiz.

Lemma 3.2.1 θ herhangi bir lacunary dizi ve f sınırsız bir modülüs fonksiyonu olsun öyle ki $\lim_{t\to\infty}(f(t)/t) > 0$ sağlansın ve her $x, y \geq 0$ için $f(xy) \geq cf(x)f(y)$ olacak biçimde bir $c > 0$ sabiti mevcut olsun. Bu durumda $S^f \subset S_\theta^f$ olması için gerekli ve yeterli şart $\liminf_r q_r > 1$ olmasıdır (Bhardwaj ve Dhawan, 2016).

İspat.

Yeterlilik. $\liminf_r q_r > 1$ olsun. Yeterince büyük r değerleri için $q_r \geq 1+\rho$ olacak biçimde bir $\rho > 0$ mevcuttur. $h_r = k_r - k_{r-1}$ olduğu dikkate alınırsa aynı r değ erleri için

$$\frac{h_r}{k_r} \geq \frac{\rho}{1+\rho}$$

dır. Eğer $x_k \to l(S^f)$ ise o zaman verien $\varepsilon > 0$ sayısı ve yeterince büyük r için

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{f(k_r)} f\left|\{k \leq k_r : |x_k - 0| \geq \varepsilon\}\right| \\
\geq\;& \frac{f\left(|\{|k \in I_r : |x_k - l| \geq \varepsilon|\}|\right)}{f(k_r)} \\
=\;& \frac{f(h_r)}{f(k_r)} \times \frac{f\left(|\{|k \in I_r : |x_k - l| \geq \varepsilon|\}|\right)}{f(h_r)} \\
=\;& \left(\frac{f(h_r)}{h_r}\right) . \left(\frac{k_r}{f(k_r)}\right) \left(\frac{h_r}{k_r}\right) \frac{f\left(|\{|k \in I_r : |x_k - l| \geq \varepsilon|\}|\right)}{f(h_r)} \\
\geq\;& \left(\frac{f(h_r)}{h_r}\right) \left(\frac{k_r}{f(k_r)}\right) \left(\frac{\rho}{1+\rho}\right) . \frac{f\left(|\{|k \in I_r : |x_k - l| \geq \varepsilon|\}|\right)}{f(h_r)}
\end{aligned}$$

dır. Bu yeterliliği ispatlar.

Gereklilik. $\liminf f_r q_r = 1$ olduğunu varsayalım. [10], Lemma 2.1 de ki gibi ilerleyerek θ

nın, $r(j) \geq r(j-1)+2$ olmak üzere,

$$\frac{k_{r(j)}}{k_{r_j-1}} < 1+\frac{1}{j}$$

ve

$$\frac{k_{r_j-1}}{k_{r(j-1)}} > j$$

koşullarını gerçekleyen bir (k_{r_j}) alt dizisini seçebiliriz. Sınırlı bir $x=(x_k)$ dizisini

$$x_k = \begin{cases} 1, & k \in I_{r_j},\ j=1,2,3,.. \\ 0, & \text{diğer yerlerde} \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. [10], Lemma 2.1 de $x \notin N_\theta$ ve $x \in w$ olduğu gösterilmiştir. [28] Teorem 3'ten ve Teorem 3.1.3'den $x \notin S_\theta^f$ olur. Diğer taraftan [22], Teorem 4 ile Bhardwaj ve Dhawan (2015) Sonuç 6 dan $x \in S^f$ elde edilir. Fakat bu $S^f \subset S_\theta^f$ varsayımı ile çelişir. O halde kabulümüz yanlıştır. $\liminf f_r q_r > 1$ olmalıdır. □

Uyarı 3.2.1 Yukarıdaki lemmanın gereklilik kısmında tanımlanan $x=(x_k)$ dizisi, f-istatistiksel yakınsak olan fakat f-lacunary istatistiksel yakınsak olmayan bir dizidir.

Lemma 3.2.2 θ herhangi bir lacunary dizi ve f sınırsız bir modülüs fonksiyonu olsun öyle ki $\lim_{t\to\infty}(f(t)/t) > 0$ sağlansın ve her $x,y \geq 0$ için $f(xy) \geq cf(x)f(y)$ olacak biçimde bir $c>0$ sabiti mevcut olsun. Bu durumda $S_\theta^f \subset S^f$olması için gerekli ve yeterli şart $\limsup_r q_r < \infty$ olmasıdır (Bhardwaj ve Dhawan, 2016).

İspat. *Yeterlilik.* $\limsup_r q_r < \infty$ ise her r için $q_r < H$ olacak biçimde $H>0$ vardır. $x_k \to l(S_\theta^f)$ ve $\lim_{r\to\infty}(f(h_r)/h_r) = l'$ olduğunu varsayalım. Buna göre, $\varepsilon > 0$ verildiğinde,öyle bir $r_0 \in \mathbb{N}$ vardır ki $r > r_0$ için

$$\frac{f(h_r)}{h_r} < l' + \varepsilon$$

ve

$$\frac{1}{f(h_r)} f\left|\{k \in k_r : |x_k - l| \geq \varepsilon\}\right| < \varepsilon$$

dur. $N_r = |\{k \in I_r : |x_k - 0| \geq \varepsilon\}|$ olsun. O zaman $r > r_0$ iken

$$\frac{f(N_r)}{f(h_r)} < \varepsilon$$

dur. $M = \max\{f(N_1), f(N_2), ..., f(N_{r_0})\}$ ve $k_{r-1} < n < k_r$ ise

$$\frac{1}{f(n)} f\left(|\{k \leq n : |x_k - l| \geq \varepsilon\}|\right)$$

$$\leq \frac{1}{f(k_{r-1})} f\left(|\{k \leq k_r : |x_k - l| \geq \varepsilon\}|\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{f(k_{r-1})} f(N_1 + \cdots + N_{r_0} + N_{r_0+1} + \cdots + N_r) \\
&\leq \frac{1}{f(k_{r-1})} [f(N_1) + \cdots + f(N_{r_0}) + f(N_{r_0+1}) + \cdots + f(N_r)] \\
&\leq \frac{r_0 M}{f(k_{r-1})} + \frac{1}{f(k_{r-1})} [f(N_{r_0+1}) + \cdots + f(N_r)] \\
&= \frac{r_0 M}{f(k_{r-1})} + \frac{1}{f(k_{r-1})} \left[\frac{f(h_{r_0+1})}{h_{r_0+1}} \frac{f(N_{r_0+1})}{f(h_{r_0+1})} h_{r_0+1} + \cdots + \frac{f(h_r)}{h_r} \frac{f(N_r)}{f(h_r)} h_r \right] \\
&< \frac{r_0 M}{f(k_{r-1})} + \frac{1}{f(k_{r-1})} \left[(l' + \varepsilon)\varepsilon h_{r_{0+1}} + \ldots + (l' + \varepsilon)\varepsilon h_r \right] \\
&\qquad = \frac{r_0 M}{f(k_{r-1})} + \frac{1}{f(k_{r-1})} \varepsilon(l' + \varepsilon) \left[h_{r_{0+1}} + \ldots + h_r \right] \\
&\qquad = \frac{r_0 M}{f(k_{r-1})} + \frac{1}{f(k_{r-1})} \varepsilon(l' + \varepsilon) [k_r - k_{r_0}] \\
&\qquad < \frac{r_0 M}{f(k_{r-1})} + \varepsilon(l' + \varepsilon) \left[\frac{k_r}{f(k_{r-1})} \right] \\
&\qquad = \frac{r_0 M}{f(k_{r-1})} + \varepsilon(l' + \varepsilon) \frac{1}{f(k_{r-1})/k_{r-1}} \frac{k_r}{k_{r-1}} \\
&\qquad = \frac{r_0 M}{f(k_{r-1})} + \varepsilon(l' + \varepsilon) q_r \frac{1}{f(k_{r-1})/k_{r-1}} \\
&\qquad < \frac{r_0 M}{f(k_{r-1})} + \varepsilon(l' + \varepsilon) H \tfrac{1}{f(k_{r-1})/k_{r-1}}
\end{aligned}
$$

dır. $\lim_{r\to\infty}(f(k_{r-1})/k_{r-1}) > 0$ olduğundan yeterlilik ispatlanmış olur.

Gereklilik. $\limsup_r q_r = \infty$ olduğunu kabul edelim. [10], Lemma 2.2 deki gibi θ nın, $q_{r(j)} > j$ koşulunu gerçekleyen bir (k_{r_j}) alt dizisini seçebiliriz. Sınırlı bir $x = (x_k)$ dizisini

$$
x_k = \begin{cases} 1, & k_{r(j-1)} < k \leq 2k_{r_j},\ j = 1, 2, 3, .. \\ 0, & \text{diğer yerlerde} \end{cases}
$$

şeklinde tanımlayalım. [10], Lemma 2.1 de $x \in N_\theta$ ve $x \notin w$ olduğu gösterilmiştir. [28] Teorem 3'ten ve Teorem 3.1.3'den $x \in S_\theta^f$ olur. Fakat $x \notin w$ olduğundan ve her f-istatistiksel yakınsak dizi istatistiksel yakınsak olduğundan $x \notin S^f$ olur. Di Fakat bu $S_\theta^f \subset S^f$ varsayımı ile çelişir. O halde kabulümüz yanlıştır. $\limsup_r q_r < \infty$ olmalıdır. □

Lemma 3.2.1 ve Lemma 3.2.2 birleştirildiğinde aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Teorem 3.2.1 θ herhangi bir lacunary dizi ve f sınırsız bir modülüs fonksiyonu olsun öyle ki $\lim_{t\to\infty}(f(t)/t) > 0$ sağlansın ve her $x, y \geq 0$ için $f(xy) \geq cf(x)f(y)$ olacak biçimde bir $c > 0$ sabiti mevcut olsun. Bu durumda $S_\theta^f = S^f$olması için gerekli ve yeterli şart $1 < \liminf_r q_r \leq \limsup_r q_r < \infty$ olmasıdır (Bhardwaj ve Dhawan, 2016).

Teorem 3.2.2 θ herhangi bir lacunary dizi ve f sınırsız bir modülüs fonksiyonu olsun öyleki $\lim_{t\to\infty}(f(t)/t) > 0$ sağlansın ve her $x, y \geq 0$ için $f(xy) \geq cf(x)f(y)$ olacak biçimde bir $c > 0$ sabiti mevcut olsun. Bu durumda,

$$S^f = \bigcap_{\liminf_r q_r > 1} S_\theta^f = \bigcup_{\limsup_r q_r < \infty} S_\theta^f$$

dir (Bhardwaj ve Dhawan, 2016).

İspat. Lemma 3.2.1 den $S^f \subset \bigcap_{\liminf_r q_r > 1} S_\theta^f$ dir. Eğer mümkünse, $x = (x_k) \in \bigcap_{\liminf_r q_r > 1} S_\theta^f$ fakat $x \notin S^f$ olduğunu kabul edelim. $\liminf_r q_r > 1$ koşulunu gerçekleyen her $\theta = (k_r)$ dizisi için $(x_k) \in S_\theta^f$ dir. Eğer $\theta = (2^r)$ alınırsa Teorem 3.2.1 den $S_\theta^f = S^f$ ve böylece $(x_k) \in S^f$ olur ki bu kabulümüz ile çelişir. Dolayısıyla $S^f = \bigcap_{\liminf_r q_r > 1} S_\theta^f$ elde edilir. İspatın diğer kısmı da benzer biçimde ispatlanabilir. □

3.3 S_θ^f-Limitinin Tekliği

Sabit bir θ dizisi için S_θ-limiti tektir. Fridy ve Orhan (1993a) bir dizinin farklı θ dizileri için farklı S_θ-limitlerine sahip olabileceğini göstermişlerdir. Ayrıca onlar dizi istatistiksel yakınsak ise bu durumun geçerli olmadığını ispatlamışlardır. Burada benzer durum S_θ^f-yakınsaklık için ele alınacaktır. İlk olarak farklı f ve θ için farklı S_θ^f-limitlerinin varlığını gösterelim. Bunun için $f(x) = x$, $g(x) = 2x$, $\theta_1 = ((2r)!)$, ve $\theta_2 = ((2r+1)!)$ olsun. Freedman ve diğ. (1978) tarafından kullanılan ve şu şekilde tanımlanan diziyi ele alalım: $n! < k \leq (n+1)!$ olmak üzere $P(k) = n$ diyelim. n çift olduğunda $x_k = 1$ ve n tek olduğunda $x_k = 1$ olarak tanımlansın. Bu durumda

$$\frac{1}{h_{r+1}} \sum_{k \in I_{r+1}} |x_k| = \frac{(2r+1)! - (2r)!}{(2\,(r+1))! - (2r)!} \to 0 \qquad (r \to \infty)$$

olduğundan N_{θ_1}-$\lim x_k = 0$ dır.

$$\frac{1}{h_{r+1}} \sum_{k \in I_{r+1}} |x_k - 1| = \frac{(2r)! - (2r-1)!}{(2r+1)! - (2r-1)!} \to 0 \qquad (r \to \infty)$$

olduğundan N_{θ_2}-$\lim x_k = 1$ dir. Pehlivan ve Fisher'e (1994) göre N_θ-yakınsaklık N_θ^f-yakınsaklığı gerektirir. Teorem 3.1.3 dikkate alındığında $S_{\theta_1}^f$-$\lim x_k = 0$ ve $S_{\theta_2}^g$-$\lim x_k = 1$ elde edilir.

Aşağıdaki teoremde bu durumun meydana gelmediği belirli koşullar sunulmaktadır.

Teorem 3.3.1 f ve g, her $x \geq 0, y \geq 0$ için

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= f(|x-y|), \\ |g(x) - g(y)| &= g(|x-y|) \end{aligned} \tag{3.3.1}$$

koşullarını gerçekleyen sınırsız modülüs fonksiyonları olsun. Herhangi iki θ_1 ve θ_2 lacunary dizisi için $x \in S^f \cap S^f_{\theta_1}$ ve $x \in S^g \cap S^g_{\theta_2}$ ise $S^f_{\theta_1}$-$\lim x_k = S^g_{\theta_2}$-$\lim x_k$ dır (Bhardwaj ve Dhawan, 2016).

Bu teoremin ispatı için aşağıdaki lemmadan yararlanacağız.

Lemma 3.3.1 f, her $x \geq 0, y \geq 0$ için

$$|f(x) - f(y)| = f(|x-y|) \tag{3.3.2}$$

koşulunu gerçekleyen sınırsız bir modülüs fonksiyonu olsun. Herhangi bir θ lacunary dizisi için $x \in S^f \cap S^f_\theta$ ise o zaman S^f_θ-$\lim x_k = S^f$-$\lim x_k$ dır (Bhardwaj ve Dhawan, 2016).

İspat. $S^f - \lim x_k = l_1$, $S^f - \lim x_k = l_2$ ve $l_1 \neq l_2$ olduğunu varsayalım. $0 < \varepsilon < |l_1 - l_2|/2$ olacak biçimde bir ε sayısı seçelim. Modülüs fonksiyonunun (iii) ve (ii) özelliklerini kullanarak

$$\begin{aligned} & \frac{f(|\{k \leq n : |l_1 - l_2| \geq 2\varepsilon\}|)}{f(n)} \\ \leq & \frac{f(|\{k \leq n : |x_k - l_1| \geq \varepsilon\}|)}{f(n)} + \frac{f(|\{k \leq n : |x_k - l_2| \geq \varepsilon\}|)}{f(n)} \end{aligned} \tag{3.3.3}$$

elde ederiz. Her iki tarafın $n \to \infty$ için limiti alınırsa,

$$1 \leq 0 + \lim_{n\to\infty} \frac{f(|\{k \leq n : |x_k - l_2| \geq \varepsilon\}|)}{f(n)} \leq 1,$$

dolayısıyla

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(|\{k \leq n : |x_k - l_2| \geq \varepsilon\}|)}{f(n)} = 1 \tag{3.3.4}$$

elde edilir.

Şimdi $((f(n))^{-1} f(\left|\left\{k \leq n : \left|x_k - l'\right| \geq \varepsilon\right\}\right|)$ dizisinin k_m-inci terimini ele alalım.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{f(k_m)} f(\left|\left\{k \leq k_m : \left|x_k - l'\right| \geq \varepsilon\right\}\right|) \\ = & \frac{1}{f(k_m)} . f\left(\left|\left\{k \in \bigcup_{r=1}^{m} I_r : \left|x_k - l'\right| \geq \varepsilon\right\}\right|\right) \\ = & \frac{1}{f(k_m)} f\left(\sum_{r=1}^{m} \left|\left\{k \in I_r : \left|x_k - l'\right| \geq \varepsilon\right\}\right|\right) \end{aligned}$$

$$\leq \frac{1}{f(k_m)}\sum_{r=1}^{m} f\left(\left|\left\{k\in I_r : \left|x_k - l^{'}\right| \geq \varepsilon\right\}\right|\right) \tag{3.3.5}$$

$$= \frac{1}{f(k_m)}\sum_{r=1}^{m} f(h_r)\frac{1}{f(h_r)} f\left(\left|\left\{k\in I_r : \left|x_k - l^{'}\right| \geq \varepsilon\right\}\right|\right)$$

elde edilir. Ayrıca sınırsız f modülüs fonksiyonunun seçimi gözönüne alındığında,

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^{m} f(h_r) &= f(h_1)+f(h_2)+\cdots+f(h_m) \qquad (3.3.6)\\ &= f(k_1-k_0)+f(k_2-k_1)+\cdots+f(k_m-k_{m-1})\\ &= f\left(|k_1-k_0|\right)+f\left(|k_2-k_1|\right)+\cdots+f\left(|k_m-k_{m-1}|\right)\\ &= |f(k_1)-f(k_0)|+|f(k_2)-f(k_1)|+\cdots+|f(k_m)-f(k_{m-1})|\\ &= f\left(k_m\right) \end{aligned}$$

olur. (3.3.5)'de (3.3.6)'yı kullanarak,

$$\frac{1}{f(k_m)} f(|\{k\leq k_m : |x_k - l_2| \geq \varepsilon\}|) \leq \frac{1}{\sum_{r=1}^{m} f(h_r)}\sum_{r=1}^{m} f(h_r)t_r, \tag{3.3.7}$$

eşitsizliği bulunur. Burada , $x_k \to l_2(S_\theta^f)$ olduğundan

$$t_r = \frac{1}{f(h_r)} f\left(|\{k\leq k_m : |x_k - l_2| \geq \varepsilon\}|\right) \to 0$$

dır. θ lacunary dizi ve f artan olduğu için (3.3.7)'nin sağ tarafındaki terim $t = (t_r)$ dizisinin regüler ağırlıklı ortalama dönüşümüdür ve bu nedenle de $r \to \infty$ iken sıfıra yaklaşır. Böylece

$$\frac{1}{f(k_m)} f(|\{k\leq k_m : |x_k - l_2| \geq \varepsilon\}|) \to 0 \quad (m\to\infty) \tag{3.3.8}$$

olur. Ayrıca

$$\left(\frac{1}{f(h_m)}\right) f\left(|\{k\leq k_m : |x_k - l_2| \geq \varepsilon\}|\right)$$

dizisi,

$$\left(\frac{1}{f(n)}\right) f\left(|\{k\leq n : |x_k - l_2| \geq \varepsilon\}|\right)$$

dizisinin bir alt dizisi olduğundan

$$\left(\frac{1}{f(n)}\right) f\left(\left|\left\{k \leq n : |x_k - l_2| \geq \varepsilon\right\}\right|\right) \nrightarrow 1 \tag{3.3.9}$$

dir. Fakat bu (3.3.4) ile çelişir. Bu çelişki $l_1 = l_2$ olduğunu gösterir.

Teorem 3.3.1'in İspatı: Lemma 3.3.1 den

$$\begin{aligned} S^f - \lim x_k &= S^f_{\theta_1} - \lim x_k \\ S^g - \lim x_k &= S^g_{\theta_2} - \lim x_k \end{aligned} \tag{3.3.10}$$

dir. Ancak, Aizpuru ve diğ. (2014), f ve g modülüs fonksiyonları (3.3.1) koşullarına sahip olduğunda

$$S^f - \lim x_k = S^g - \lim x_k \tag{3.3.11}$$

olduğunu ispatlamıştır. Bu nedenle,

$$S^f_{\theta_1} - \lim x_k = S^g_{\theta_2} - \lim x_k$$

dir.

Teorem 3.3.1'de $g = f$ alındığında aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.3.1 f, (3.3.2) koşulunu gerçekleyen sınırsız bir modülüs fonksiyonu, θ_1 ve θ_2 herhangi iki lacunary dizi olmak üzere $x \in S^f$ ve $x \in S^f_{\theta_1} \cap S^f_{\theta_2}$ ise $S^f_{\theta_1} - \lim x_k = S^f_{\theta_2} - \lim x_k$ dır (Bhardwaj ve Dhawan, 2016).

Sonuç 3.3.1 de $f(x) = x$ alındığında Fridy ve Orhan (1993) tarafından elde edilen sonuca ulaşılır.

Sonuç 3.3.2 θ_1 ve θ_2 herhangi iki lacunary dizi olmak üzere $x \in S$ ve $x \in S_{\theta_1} \cap S_{\theta_2}$ ise $S_{\theta_1} - \lim x_k = S_{\theta_2} - \lim x_k$ dır.

Teorem 3.3.1'de $\theta_1 = \theta_2 = \theta$ alındığında aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.3.3 f ve g (3.3.1) koşullarını gerçekleyen sınırsız modülüs fonksiyonları ve θ herhangi bir lacunary dizi olsun. Eğer $x \in S^f \cap S^f_\theta$ ve $x \in S^g \cap S^g_\theta$ ise $S^f_\theta - \lim x_k = S^g_\theta - \lim x_k$ dır (Bhardwaj ve Dhawan, 2016).

3.4 f-İstatistiksel Yakınsamanın İki Lacunary Yöntemi Arasındaki İçerme

Tanım 3.4.1 $\theta = (k_r)$ ve $\vartheta = (v_r)$ lacunary diziler olsun. Eğer $(k_r) \subset (v_r)$ ise ϑ dizisine θ dizisinin bir lacunary incelmesi denir.

Teorem 3.4.1 $\vartheta = (v_r)$ dizisi $\theta = (k_r)$ dizisinin bir lacunary incelmesi olsun ve f ise her $x, y \geq 0$ için

$$|f(x) - f(y)| = f(|x - y|) \tag{3.4.1}$$

koşulunu gerçekleye sınırsız bir modülüs fonksiyonu olsun. Bu durumda $x \in S_{\vartheta}^{f}$ iken $x \in S_{\theta}^{f}$ dir (Bhardwaj ve Dhawan, 2016).

İspat. θ dizisi ile elde edilen her bir I_r aralığının ϑ dizisiyle elde edilen ve $I_{r,i}^{v} = (v_{r,i-1}, v_{r,i}]$ olmak üzere

$$k_{r-1} < v_{r,1} < v_{r,2} < ... < v_{r,s(r)} = k_r \tag{3.4.2}$$

koşulunu gerçekleyen $(v_{r,i})_{i=1}^{s(r)}$ noktalarını içerdiğini kabul edelim. $(k_r) \subset (v_r)$ olduğundan her r için $s(r) \geq 1$ dir. $x_k \to l(S_{\vartheta}^{f})$ olsun. Bu nedenle, her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{\substack{r\to\infty \\ 1\leq i\leq s(r)}} \frac{1}{f(H_{r,i})} f\left(\left|\left\{k \in I_{r,i}^{v} : |x_k - l| \geq \varepsilon\right\}\right|\right) = 0 \tag{3.4.3}$$

dır. Burada, $H_{r,i} = v_{r,i} - v_{r,i-1}$ ve $v_{r,1} = v_{r,i} - v_{r,i-1}$ dir. Buradan

$$\lim_{r\to\infty} \sum_{\substack{I_{r,i}^{v}\subset I_r \\ 1\leq i\leq s(r)}} \frac{1}{f(H_{r,i})} f\left(\left|\left\{k \in I_{r,i}^{v} : |x_k - l| \geq \varepsilon\right\}\right|\right) = 0 \tag{3.4.4}$$

elde edilir. Diğer taraftan, her $\varepsilon > 0$ için

$$\begin{aligned} & \frac{1}{f(h_r)} f\left(\left|\left\{k \in I_r : |x_k - l| \geq \varepsilon\right\}\right|\right) \\ = \;& \frac{1}{f(h_r)} f\left(\left|\left\{k \in \bigcup_{\substack{I_{r,i}^{v}\subset I_r \\ 1\leq i\leq s(r)}} I_{r,i}^{v} : |x_k - l| \geq \varepsilon\right\}\right|\right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{f(h_r)} f\Big(\sum_{\substack{I^v_{r,i} \subset I_r \\ 1 \le i \le s(r)}} \left|\left\{k \in I^v_{r,i} : |x_k - l| \ge \varepsilon\right\}\right| \Big) \\
&\le \frac{1}{f(h_r)} \sum_{\substack{I^v_{r,i} \subset I_r \\ 1 \le i \le s(r)}} f\left(\left|\left\{k \in I^v_{r,i} : |x_k - l| \ge \varepsilon\right\}\right|\right) \\
&= \frac{1}{f(h_r)} \sum_{\substack{I^v_{r,i} \subset I_r \\ 1 \le i \le s(r)}} f(H_{r,i}) \frac{1}{f(H_{r,i})} f\left(\left|\left\{k \in I^v_{r,i} : |x_k - l| \ge \varepsilon\right\}\right|\right)
\end{aligned}
\tag{3.4.5}
$$

olur. (3.4.5) ve (**??**) kullanıldığında

$$
\frac{1}{f(h_r)} f\left(|\{k \in I_r : |x_k - l| \ge \varepsilon\}|\right) \le \frac{1}{\sum\limits_{\substack{I^v_{r,i} \subset I_r \\ 1 \le i \le s(r)}} f(H_{r,i})} \sum_{\substack{I^v_{r,i} \subset I_r \\ 1 \le i \le s(r)}} f(H_{r,i}) t_{r,i} \tag{3.4.6}
$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $t_{r,i} = (f(H_{r,i}))^{-1} f\left(\left|\left\{k \in I^v_{r,i} : |x_k - l| \ge \varepsilon\right\}\right|\right)$ dir. (3.4.6)'nin sağ tarafındaki terim bir sıfır dizisi olan $(t_{r,i})$ dizisinin regüler bir ağırlıklı ortalama dönüşümü olduğundan, kendisi de bir sıfır dizisidir. Böylece,

$$
\frac{1}{f(h_r)} f\left(|\{k \in I_r : |x_k - l| \ge \varepsilon\}|\right) \to 0 \qquad (r \to \infty) \tag{3.4.7}
$$

dir. Dolayısıyla $x \in S^f_\theta$ dir. $\square$

Bir sonraki sonuç ise yukarıda verilen içermenin karşıtı ile ile ilgilidir.

Teorem 3.4.2 f sınırsız bir modülüs fonksiyonu ve $\vartheta = (v_r)$ dizisi $\theta = (k_r)$ dizisinin bir lacunary incelmesi olsun. $I_r = (k_{r-1}, k_r]$, $h_r = k_r - k_{r-1}$, $r = 1, 2, 3, ...$, ve $I^v_m = (v_{m-1}, v_m]$, $H_m = v_m - v_{m-1}$, $m = 1, 2, 3, ...$ olmak üzere eğer

$$
\text{her } I^v_m \subset I_r \quad \text{için} \quad \frac{f(H_m)}{f(h_r)} \ge \delta \tag{3.4.8}
$$

olacak biçimde bir $\delta > 0$ sayısı varsa $x \in S^f_\theta$ iken $x \in S^f_\vartheta$ dir (Bhardwaj ve Dhawan, 2016).

İspat. Herhangi bir $\varepsilon > 0$ sayısı ve her I^v_m aralığı için $I^v_m \subset I_r$ olacak biçimde I_r aralığı bulabiliriz. Bu durumda,

$$\begin{aligned}\frac{1}{f(H_m)}f\left(\left|\left\{k\in I_m^v:|x_k-l|\geq\varepsilon\right\}\right|\right) &\leq \frac{1}{f(H_m)}f\left(\left|\left\{k\in I_r:|x_k-l|\geq\varepsilon\right\}\right|\right) \qquad (3.4.9)\\ &= \frac{f(h_r)}{f(H_m)}\frac{1}{f(h_r)}f\left(\left|\left\{k\in I_r:|x_k-l|\geq\varepsilon\right\}\right|\right)\\ &\leq \frac{1}{\delta}\frac{1}{f(h_r)}f\left(\left|\left\{k\in I_r:|x_k-l|\geq\varepsilon\right\}\right|\right),\end{aligned}$$

ve buradan $S_\theta^f\subset S_\vartheta^f$ bulunur. □

Sonraki teoremde daha genel bir durum ele alınmaktadır.

Teorem 3.4.3 f ve g, her $x\in[0,\infty)$ için $f(x)\leq g(x)$ koşuluna sahip iki sınırsız modülüs fonksiyonu ve $\vartheta=(v_r)$ dizisi $\theta=(k_r)$ dizisinin bir lacunary incelmesi olsun. $I_r=(k_{r-1},k_r]$, $h_r=k_r-k_{r-1}$, $r=1,2,3,...$, ve $I_m^v=(v_{m-1},v_m]$, $H_m=v_m-v_{m-1}$, $m=1,2,3,...$ olsun. Eğer

$$\text{her } I_m^v\subset I_r \text{ için} \quad \frac{f(H_m)}{g(h_r)}\geq\delta \qquad (3.4.10)$$

olacak biçimde bir $0<\delta\leq1$ varsa, o zaman $x\in S_\theta^g$ iken $x\in S_\vartheta^f$ dir (Bhardwaj ve Dhawan, 2016).

İspat. Herhangi bir $\varepsilon>0$ sayısı ve her I_m^v aralığı için $I_m^v\subset I_r$ olacak biçimde I_r aralığı bulabiliriz. Bu durumda,

$$\begin{aligned}\frac{1}{f(H_m)}f\left(\left|\left\{k\in I_m^v:|x_k-l|\geq\varepsilon\right\}\right|\right) &\leq \frac{1}{f(H_m)}g\left(\left|\left\{k\in I_m^v:|x_k-l|\geq\varepsilon\right\}\right|\right)\\ &\leq \frac{1}{f(H_m)}g\left(\left|\left\{k\in I_r:|x_k-l|\geq\varepsilon\right\}\right|\right)\\ &= \frac{g(h_r)}{f(H_m)}\frac{1}{g(h_r)}g\left(\left|\left\{k\in I_r:|x_k-l|\geq\varepsilon\right\}\right|\right)\\ &\leq \frac{1}{\delta}\frac{1}{g(h_r)}g\left(\left|\left\{k\in I_r:|x_k-l|\geq\varepsilon\right\}\right|\right),\end{aligned}$$

ve buradan $S_\theta^g\subset S_\vartheta^f$ elde edilir. □

Sonraki teoremde, θ ve ϑ dizileri birbirlerinin lacunary incelmesi olmasa bile $S_\theta^f\subset S_\vartheta^f$ içermesinin mümkün olduğu gösterilecektir.

Teorem 3.4.4 f, (3.4.1) koşuluna sahip sınırsız bir modülüs fonksiyonu, $\vartheta = (v_r)$ ve $\theta = (k_r)$ birer lacunary dizi, $I_r = (k_{r-1}, k_r]$, $h_r = k_r - k_{r-1}$, $r = 1, 2, 3, ...$, $I_m^v = (v_{m-1}, v_m]$, $H_m = v_m - v_{m-1}$, $m = 1, 2, 3, ...$ ve $I_{rm} = I_r \cap I_m^v$, $r, m = 1, 2, 3, ...$ ve ρ_{rm} sayısı I_{rm} aralığının uzunluğu olsun. Eğer her $r, m = 1, 2, 3, ...$ için

$$\rho_{rm} > 0 \text{ olmak şartıyla } \frac{f(\rho_{rm})}{f(h_r)} \geq \delta \tag{3.4.11}$$

olacak biçimde bir $\delta > 0$ sayısı varsa o zaman $x \in S_\theta^f$ iken $x \in S_\vartheta^f$ dir (Bhardwaj ve Dhawan, 2016).

İspat. $\alpha = \vartheta \cup \theta$ olsun. α, hem ϑ dizisinin hem de θ dizisinin incelmesi olur. α ya ait aralık dizisi $\{I_{rm} = I_r \cap I_m^v : I_{rm} \neq \emptyset\}$ dir. Teorem 3.4.2 ye göre (3.4.11) koşulu $x \in S_\theta^f$ iken $x \in S_\alpha^f$ olmasını gerektirir. Ayrıca α, ϑ dizisinin de bir lacunary incelmesi olduğundan Teorem 3.4.1'den $x \in S_\alpha^f$ iken $x \in S_\vartheta^f$ dir. Böylece ispat biter. $\square$

Uyarı 3.4.1 Teorem 3.4.4 deki (3.4.11) koşulu $I_{rm} \neq \emptyset$ olmak şartıyla $f(\rho_{rm})/f(H_m) \geq \delta$ koşuluyla yer değiştirilirse o zaman $x \in S_\vartheta^f$ iken $x \in S_\theta^f$ olur.

Uyarı 3.4.1 ve 3.4.4 birleştirildiğinde aşağıdaki sonuç elde edilir.

Teorem 3.4.5 f, (3.4.1) koşuluna sahip sınırsız bir modülüs fonksiyonu, $\vartheta = (v_r)$ ve $\theta = (k_r)$ birer lacunary dizi, $I_r = (k_{r-1}, k_r]$, $h_r = k_r - k_{r-1}$, $r = 1, 2, 3, ...$, $I_m^v = (v_{m-1}, v_m]$, $H_m = v_m - v_{m-1}$, $m = 1, 2, 3, ...$, $I_{rm} = I_r \cap I_m^v$ ve ρ_{rm} sayısı I_{rm} aralığının uzunluğu olsun. Eğer her $r, m = 1, 2, 3, ...$ için

$$\rho_{rm} > 0 \text{ olmak şartıyla } \frac{f(\rho_{rm})}{f(h_r + H_m)} \geq \delta$$

olacak biçimde bir $\delta > 0$ sayısı varsa o zaman $S_\theta^f = S_\vartheta^f$ dir (Bhardwaj ve Dhawan, 2016).

4. NORMLU UZAYLARDA KUVVETLİ LACUNARY TOPLANABİLME VE LACUNARY İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

Bu bölüm iki kısma ayrılmıştır. Birinci kısımda Moreno-Pulido ve ark. (2020) tarafından verilen normlu uzaylarda lacunary kuvvetli yakınsaklık ve lacunary istatistiksel yakınsaklık kavramları incelenmiştir. İkinci kısımda ise f bir modülüs fonksiyonu olmak üzere f-kuvvetli lacunary yakınsaklık kavramı daha farklı bir biçimde tanımlanarak bu kavramın kuvvetli lacunary yakınsaklık ve f-lacunary istatistiksel yakınsaklık ile ilişkisi incelenmiştir.

4.1 Kuvvetli Lacunary Toplanabilme ve Lacunary İstatistiksel Yakınsaklık

Bu kısımda aksi belirtilmedikçe X bir normlu uzay ve (x_n) , X de bir dizi olacaktır.

İlk olarak reel değerli diziler için Freedman ve ark.(1978) tarafından verilen kuvvetli lacunary toplanabilme kavramını Banach uzayları için ifade edelim.

Tanım 4.1.1 $\theta = (k_r)$ bir lacunary dizi, $x = (x_k)$, X de bir dizi ve $L \in X$ olsun. Eğer

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} \sum_{k\in I_r} \|x_k - L\| = 0$$

oluyorsa x dizisi L elemanına lacunary kuvvetli yakınsaktır veya N_θ-toplanabilirdir denir ve bu durum $N_\theta - \lim x_k = L$ veya $x_k \xrightarrow{N_\theta} L$ ile gösterilir (Moreno-Pulido ve ark., 2020).

Önceki kısımlarda olduğu gibi N_θ ile tüm lacunary kuvvetli yakınsak dizilerin uzayını gösterelim yani

$$N_\theta = \left\{ (x_k) \subset X : \exists\ L, \lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} \sum_{k\in I_r} \|x_k - L\| = 0 \right\}$$

olsun.

Fridy ve Orhan (1993a) lacunary dizileri kullanarak istatistiksel yakınsaklığın genelleşmesi olan lacunary istatistiksel yakınsaklık kavramını verdiler. Bunun için istatistiksel yakınsaklık tanımında $\{k : k \leq n\}$ kümesini $\{k : k_{r-1} < k \leq k_r\}$ kümesiyle değiştirdiler. Önce bir $K \subset \mathbb{N}$ kümesinin θ-yoğunluğu tanımını hatırlayalım.

Tanım 4.1.2 $\theta = (k_r)$ bir lacunary dizi ve $K \subset \mathbb{N}$ olsun. Eğer varsa

$$\lim_r \frac{1}{h_r} |\{k \in I_r : k \in K\}|$$

limitine K nin θ-yoğunluğu denir ve $d_\theta(K)$ ile gösterilir (Moreno-Pulido ve ark., 2020).

Şimdi de Banach uzayları için lacunary istatistiksel yakınsaklık tanımını verelim.

Tanım 4.1.3 X bir Banach uzayı, $\theta = (k_r)$ bir lacunary dizi ve $x = (x_k)$, X uzayında bir dizi olsun. Eğer $\varepsilon > 0$ sayısı için

$$d_\theta(\{k \in I_r : \|x_k - L\| \geq \varepsilon\}) = 0$$

veya denk olarak

$$d_\theta(\{k \in I_r : \|x_k - L\| < \varepsilon\}) = 1$$

olacak biçimde $L \in X$ varsa x dizisi L ye lacunary istatistiksel yakınsaktır denir ve bu durum $S_\theta - \lim x = L$ veya $x_k \stackrel{S_\theta}{\to} L$ ile gösterilir (Moreno-Pulido ve ark., 2020).

Teorem 4.1.1 X bir Banach uzayı ve (x_k), X içinde bir dizi olsun. N_θ ve S_θ metotları regüler metotlardır (Moreno-Pulido ve ark., 2020).

İspat. Önce N_θ metodunun reguler olduğunu gösterelim.Yani $x_k \to L$ iken $x_k \stackrel{N_\theta}{\to} L$ gösterelim.
$\varepsilon > 0$ olsun. $x_k \to L$ ise öyle bir k_0 sayısı vardır ki $k \geq k_0$ iken $\|x_k - L\| < \varepsilon$ dur. Dolayısıyla $r_0 \geq k_0$ olan öyle bir $r_0 \in \mathbb{N}$ vardır ki $r \geq r_0$ iken

$$\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}\|x_k - L\| < \frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}\varepsilon = \frac{h_r}{h_r}\varepsilon = \varepsilon$$

dur. Bu da $\lim_{r\to\infty}\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}\|x_k - L\| = 0$ olmasını gerektirir.
Şimdi de $x_k \to L$ iken $x_k \stackrel{S_\theta}{\to} L$ olduğunu gösterelim. $x_k \to L$ olduğundan verilen bir $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık öyle bir k_0 sayısı vardır ki her $k \geq k_0$ için $|\{k \in I_r : \|x_k - L\| \geq \varepsilon\})| = 0$ olur. Bu da her $k \geq k_0$ için $d_\theta(\{k \in I_r : \|x_k - L\| \geq \varepsilon\}) = 0$ olmasını gerektirir. $\square$

Teoremin karşıtı doğru değildir. Aşağıda Örnek 4.1.1'de N_θ-toplanabilir olan sınırsız bir dizi ve Örnek 4.1.2'de S_θ-yakınsak olan sınırsız bir dizi örneği verilmiştir.

Örnek 4.1.1 N_θ-toplanabilir olan sınırsız diziler mevcuttur.
$k_0 = 0$ ve $k_r = 2^r$ olmak üzere $\theta = (k_r)$ lacunary dizisini ele alalım. Bu durumda $h_1 = k_1 - k_0 = 2$ ve $r \geq 2$ için $h_r = 2^{r-1}$ dir. Ayrıca $I_1 = (k_0, k_1] = (0, 2]$ ve her $r \geq 2$ için $I_r = (2^{r-1}, 2^r]$ olur.

$$x_k = \begin{cases} 0, & \text{her } j \text{ için } k \neq 2^j \\ j-1, & \text{en az bir } j \text{ için } k = 2^j \end{cases}$$

ile tanımlı diziyi ele alalım.

(x_k) dizisinin sınırsız olduğu açıktır.

$$\frac{\sum\limits_{k\in I_r}|x_k-0|}{h_r}=\left\{\begin{array}{cc} 0 & r=1 \\ \dfrac{r-1}{2^{r-1}} & r\geq 2 \end{array}\right\}\overset{r\to\infty}{\longrightarrow}0$$

olduğundan $x_k \overset{N_\theta}{\to} 0$ dır (Moreno-Pulido ve ark., 2020).

Fridy ve Orhan (1993a), N_θ ve S_θ kümelerinin reel değerli sınırlı diziler için denk olduğunu göstermiştir. Bu durum Banach uzayları için de geçerlidir. Bütünlüğü bozmamak için ispatını da dahil edelim.

Teorem 4.1.2 X bir Banach uzayı, $\theta=(k_r)$ bir lacunary dizi, $x=(x_k)$, X de bir dizi olsun.

(i) $x_k \xrightarrow{N_\theta} L$, ise $x_k \xrightarrow{S_\theta} L$ dir.

(ii) (x_k) sınırlı ve $x_k \xrightarrow{S_\theta} L$ ise $x_k \xrightarrow{N_\theta} L$ dir (Moreno-Pulido ve ark., 2020).

İspat. (i) $x_k \xrightarrow{N_\theta} L$ olsun. Bu durumda her $\varepsilon>0$ için

$$\sum_{k\in I_r}\|x_k-L\|\geq \sum_{\substack{k\in I_r\\ \|x_k-L\|\geq\varepsilon}}\|x_k-L\|\geq\varepsilon\left|\{k\in I_r:\|x_k-L\|\geq\varepsilon\}\right|$$

bu da $x_k \xrightarrow{S_\theta} L$ olmasını gerektirir.

(ii) (x_k) sınırlı ve $x_k \xrightarrow{S_\theta} L$ olsun. (x_k) sınırlı olduğundan her $k\in\mathbb{N}$ için $\|x_k-L\|<M$ olacak biçimde bir M sayısı vardır. Verilen $\varepsilon>0$ sayısı için

$$\begin{aligned}\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}\|x_k-L\| &= \frac{1}{h_r}\sum_{\substack{k\in I_r\\ \|x_k-L\|\geq\varepsilon}}\|x_k-L\|+\frac{1}{h_r}\sum_{\substack{k\in I_r\\ \|x_k-L\|<\varepsilon}}\|x_k-L\| \\ &\leq \frac{M}{h_r}\left|\{k\in I_r:\|x_k-L\|\geq\varepsilon\}\right|+\varepsilon\end{aligned}$$

olacağından $x_k \xrightarrow{N_\theta} L$ olur. □

Aşağıdaki örnekte dizinin sınırlı olma koşulunun gerekli koşul olduğu gösterilmektedir.

Örnek 4.1.2 Sınırsız ve L sayısına S_θ-yakınsak olan fakat L'ye N_θ-toplanabilir olmayan bir dizi vardır.

$k_0=0$ ve $k_r=2^r$ olmak üzere $\theta=(k_r)$ lacunary dizisi verilsin ve

$$x_k=\left\{\begin{array}{ll} 0, & \text{her } j \text{ için } k\neq 2^j \\ 2^j, & \text{en az bir } j \text{ için } k=2^j \end{array}\right.$$

ile tanımlı (x_k) dizisini ele alalım.

$\varepsilon > 0$ sayısı verildiğinde

$$\frac{|\{k \in I_r : |x_k - 0| \geq \varepsilon\}|}{h_r} \to 0 \quad (r \to \infty)$$

olduğunu görmek kolaydır. Dolayısıyla $x_k \xrightarrow{S_\theta} 0$ dır. Üstelik (x_k) sınırsız bir dizidir. Fakat

$$\frac{\sum\limits_{k \in I_r} |x_k - 0|}{h_r} = \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{2}{2} = 1 & r = 1, \\ \\ \dfrac{2^r}{2^{r-1}} = 2 & r \geq 2, \end{array} \right\} \underset{r \to \infty}{\longrightarrow} 2$$

olur ki bu $x_k \overset{N_\theta}{\nrightarrow} 0$ olduğu anlamına gelir (Moreno-Pulido ve ark., 2020).

Fridy ve Orhan'ın (1993b) verdiği reel değerli diziler için lacunary istatistiksel Cauchy dizisi kavramını Banach uzayları için ifade edelim.

Tanım 4.1.4 X bir Banach uzayı $\theta = (k_r)$ bir lacunary dizi $x = (x_k)$, X içinde bir dizi olsun. Eğer (x_k) dizisinin her $r \in \mathbb{N}$ için $k'(r) \in I_r$, bir $L \in X$ için $\lim_{r \to \infty} x_{k'(r)} = L$ ve her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{r \to \infty} \frac{1}{h_r} \left| \left\{ k \in I_r : \left\| x_k - x_{k'(r)} \right\| \geq \varepsilon \right\} \right| = 0$$

veya denk olarak

$$\lim_{r \to \infty} \frac{1}{h_r} \left| \left\{ k \in I_r : \left\| x_k - x_{k'(r)} \right\| < \varepsilon \right\} \right| = 1$$

olacak biçimde $\left(x_{k'(r)}\right)$ alt dizisi varsa o zaman (x_k) dizisine bir lacunary istatistiksel Cauchy dizisi veya kısaca S_θ-Cauchy dizisi denir (Moreno-Pulido ve ark., 2020).

Fridy ve Orhan (1993b) tarafından elde edilen S_θ-Cauchy kriterinin benzeri Banach uzaylarındaki diziler için aşağıdaki gibi verilebilir.

Teorem 4.1.3 X bir Banach uzayı olsun. X içindeki bir (x_k) dizisinin S_θ-yakınsak olması için gerekli ve yeterli şart onun bir S_θ-Cauchy dizisi olmasıdır (Moreno-Pulido ve ark., 2020).

İspat. (x_k), S_θ-yakınsak olsun. Her $j \in \mathbb{N}$ için $K_j = \{k \in \mathbb{N} : \|x_k - L\| < 1/j\}$ kümesini tanımlayalım. $K_j \supset K_{j+1}$ ve $\dfrac{|K_j \cap I_r|}{h_r} \to 1$ $(r \to \infty)$ olduğu açıktır.

$r \geq m_1$ iken $|K_1 \cap I_r| / h_r > 0$ yani $K_1 \cap I_r \neq \emptyset$ olacak biçimde bir m_1 sayısı seçelim. Sonrasında öyle bir $m_2 > m_1$ seçelim ki $r \geq m_2$ iken $K_2 \cap I_r \neq \emptyset$ olsun . Buna göre, $m_1 \leq r < m_2$ olacak biçimdeki her bir r için $k'_r \in I_r \cap K_1$ yani $\left\| x_{k'_r} - L \right\| < 1$ olacak biçimde $k'_r \in I_r$ seçelim. Bu şekilde devam ederek genel olarak $r > m_{p+1}$ iken $I_r \cap K_{p+1} \neq \emptyset$

olacak biçimde $m_{p+1} > m_p$ sayısı seçelim. Böylece $m_p \leq r < m_{p+1}$ olacak şekilde her r için bir $k'_r \in I_r \cap K_p$ seçebiliriz ki bu durumda $\left\| x_{k'_r} - L \right\| \leq 1/p$ dir.

Böylece her $r \in \mathbb{N}$ için $k'_r \in I_r$ ve $\lim_{r\to\infty} x_{k'_r} = L$ olacak biçimde (k'_r) dizisi bulunmuş olur. Ayrıca,

$$\begin{aligned} \frac{1}{h_r}\left|\left\{k \in I_r : \left\|x_k - x_{k'_r}\right\| \geq \varepsilon\right\}\right| &\leq \frac{1}{h_r}\left|\left\{k \in I_r : \|x_k - L\| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right| \\ &+\frac{1}{h_r}\left|\left\{k \in I_r : \left\|x_{k'_r} - L\right\| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right| \end{aligned}$$

dır. $x_k \xrightarrow{S_\theta} L$ ve $\lim_{r\to\infty} x_{k'_r} = L$ olduğundan (x_k) bir S_θ-Cauchy dizisidir.

Karşıt olarak (x_k) bir S_θ-Cauchy dizisi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için

$$\begin{aligned} \left|\left\{k \in I_r : \|x_k - L\| \geq \varepsilon\right\}\right| &\leq \left|\left\{k \in I_r : \left\|x_k - x_{k'_r}\right\| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right| \\ &+\left|\left\{k \in I_r : \left\|x_{k'_r} - L\right\| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right| \end{aligned}$$

eşitsizliğini elde ederiz. (x_k) bir S_θ-Cauchy dizisi ve $\lim_{r\to\infty} x_{k'_r} = L$ olduğundan son eşitsizlikten $x_k \xrightarrow{S_\theta} L$ elde edilir. □

4.2 Modülüs Fonksiyonu ve Lacunary İstatistiksel Yakınsaklık

Bu kısımda herhangi bir normlu uzayda bir modülüs fonksiyonuna göre kuvvetli lacunary toplanabilme kavramı daha farklı bir formda ifade edilerek, onun modülüs fonksiyonunun sağladığı koşullara göre kuvvetli lacunary toplanabilme ve f-lacunary istatistiksel yakınsaklık ile ilişkisi incelenmiştir.

Tanım 4.2.1 f sınırsız bir modülüs fonksiyonu, $\theta = (k_r)$ bir lacunary dizi olsun. Eğer

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{f(h_r)} f\left(\sum_{k\in I_r} \|x_k - l\|\right) = 0$$

olacak biçimde bir $l \in X$ varsa $x = (x_k)$ dizisi l'ye f-kuvvetli lacunary yakınsaktır denir.

Teorem 4.2.1 f bir modülüs fonksiyonu olsun. Eğer (x_n) dizisi l ye f-kuvvetli lacunary yakınsak ise (x_n), l ye kuvvetli lacunary yakınsaktır.

İspat. (x_n) dizisi l ye f-kuvvetli lacunary istatistiksel yakınsak olsun. Her $p \geq 1$ için öyle bir r_0 sayısı vardır ki her $r \geq r_0$ için

$$\frac{1}{f(h_r)} f\left(\sum_{k\in I_r} \|x_k - l\|\right) \leq \frac{1}{p}$$

dir. Buradan

$$f\left(\sum_{k\in I_r}\|x_k-l\|\right)\leq\frac{f\left(h_r\right)}{p}\leq\frac{p}{p}f\left(\frac{1}{p}h_r\right)=f\left(\frac{1}{p}h_r\right)$$

elde edilir. f artan olduğundan son eşitsizlikten

$$\sum_{k\in I_r}\|x_k-l\|\leq\frac{1}{p}h_r$$

olur. Böylece her $p\geq 1$ için

$$\frac{\sum_{k\in I_r}\|x_k-l\|}{h_r}\leq\frac{1}{p}$$

elde edilir ki bu (x_n) dizisinin l ye kuvvetli lacunary yakınsak olmasıdır. □

Aşağıdaki örnek Teorem 4.2.1'in karşıtının doğru olmadığını göstermektedir.

Örnek 4.2.1 $k_0=0$ olmak üzere $k_r=3^r$ ile tanımlı $\theta=(k_r)$ lacunary dizisi ve $f(x)=\log(1+x)$ modülüs fonksiyonunu ele alalım. Bu durumda $h_1=k_1-k_0=3$, $I_1=(k_0,k_1]=(0,3]$ ve $r\geq 2$ için $h_r=2.3^{r-1}$, $I_r=(3^{r-1},3^r]$ olur. Reel terimli bir (x_n) dizisini

$$x_k=\begin{cases}0, & \text{her } j \text{ için } k\neq 3^j \text{ ise}\\ 2^{j-1}-1, & \text{en az bir } j \text{ için } k=3^j \text{ ise}\end{cases}$$

biçiminde tanımlayalım. Bu durumda

$$\frac{\sum_{k\in I_r}|x_k|}{h_r}=\left\{\begin{array}{ll}0, & r=1 \text{ ise}\\ \dfrac{2^{r-1}-1}{3^{r-1}2}, & r\geq 2 \text{ ise}\end{array}\right\}\longrightarrow 0\quad(r\to\infty)$$

olduğundan (x_n) dizisi $l=0$ sayısına kuvvetli lacunary yakınsaktır. Fakat

$$\frac{f\left(\sum_{k\in I_r}|x_k|\right)}{f\left(h_r\right)}=\left\{\begin{array}{ll}0, & r=1 \text{ ise}\\ \dfrac{\log\left(2^{r-1}\right)}{\log\left(1+3^{r-1}2\right)}, & r\geq 2 \text{ ise}\end{array}\right\}\longrightarrow\frac{\log 2}{\log 3}\quad(r\to\infty)$$

olduğundan (x_n) dizisi $l=0$ sayısına f-kuvvetli lacunary yakınsak değildir.

Tanım 4.2.2 f bir modülüs fonksiyonu olsun. Herhangi bir $\varepsilon>0$ sayısına karşılık bir $\varepsilon'>0$ sayısı ve $n_0(\varepsilon)$ sayısı mevcut öyle ki her $n\geq n_0$ için $\frac{f(n\varepsilon')}{f(n)}<\varepsilon$ ise f ye uyumlu modülüs fonksiyonu denir (León-Saavedra ve ark., 2019).

Örnek 4.2.2 $p>0$ için $f(x)=x^p+\log(x+1)$ ve $f(x)=x+\frac{x}{x+1}$ fonksiyonları birer uyumlu modülüs fonksiyonudur. Fakat

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log(1+n\varepsilon')}{\log(1+n)}=1$$

olması nedeniyle $f(x)=\log(x+1)$ uyumlu olmayan bir modülüs fonksiyonudur (León-Saavedra ve ark., 2019).

Teorem 4.2.2 f bir uyumlu modülüs fonksiyonu olsun. Eğer (x_n) dizisi l ye lacunary istatistiksel yakınsak ise, o zaman (x_n) dizisi l ye f-lacunary istatistiksel yakınsaktır.

İspat. (x_n) dizisi l ye lacunary istatistiksel yakınsak olsun. Yeterince küçük $\varepsilon > 0$ sayısı seçelim. f uyumlu modülüs fonksiyonu olduğundan öyle bir $\varepsilon' > 0$ ve $r_0(\varepsilon)$ sayısı vardır ki $r \geq r_0$ iken

$$\frac{f(r\varepsilon')}{f(r)} < \varepsilon$$

dur. Ayrıca $h_r \to \infty$ $(r \to \infty)$ olduğundan öyle bir $\delta_1 = \delta_1(r_0)$ (dolayısıyla $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon)$ olur) sayısı vardır ki her $r \geq \delta_1$ için $h_r > r_0$ dır. Buradan her $r \geq \delta_1$ için

$$\frac{f(h_r\varepsilon')}{f(h_r)} < \varepsilon$$

dur. Şimdi de $c > 0$ olsun. (x_n) dizisi l ye lacunary istatistiksel yakınsak olduğundan $r \geqslant m_0$ iken

$$|\{k \in I_r : \|x_k - l\| > c\}| \leqslant h_r\varepsilon'$$

olacak biçimde bir $m_0 = m_0(\varepsilon)$ sayısı vardır. f artan olduğundan, $n \geqslant \max\{m_0, r_0\}$ iken

$$\frac{f(|\{k \in I_r : \|x_k - l\| > c\}|)}{f(h_r)} \leqslant \frac{f(h_r\varepsilon')}{f(h_r)} < \varepsilon$$

elde edilir. Buradan (x_n) dizisinin l ye f-lacunary istatistiksel yakınsak olduğu elde edilir. $\square$

$f-$kuvvetli lacunary yakınsaklık için benzer bir sonuç aşağıdaki gibidir.

Teorem 4.2.3 f uyumlu bir modülüs fonksiyonu olsun.O halde (x_n) l ye kuvvetli lacunary yakınsak ise (x_n) l ye f-kuvvetli lacunary yakınsaktır.

İspat. (x_n) dizisinin l ye kuvvetli lacunary yakınsak olduğunu varsayalım. Buna göre, herhangi bir $\varepsilon' > 0$ sayısına karşılık öyle bir r_0 sayısı vardır ki $r \geqslant r_0$ iken

$$\sum_{k \in I_r} \|x_k - l\| \leqslant h_r\varepsilon'$$

olur. f artan olduğundan son eşitsizlikten

$$f\left(\sum_{k \in I_r} \|x_k - l\|\right) \leqslant f(h_r\varepsilon')$$

ve buradan da

$$\frac{f\left(\sum_{k \in I_r} \|x_k - l\|\right)}{f(h_r)} \leqslant \frac{f(h_r\varepsilon')}{f(h_r)}$$

elde edilir. Bundan sonrası için Teorem 4.2.1 deki ispat süreci uygulandığında istenen sonuç elde edilir. $\square$

Teorem 4.2.4 f modülüs fonksiyonu olsun.
(a) Lacunary istatistiksel yakınsak bir dizi f-lacunary istatistiksel yakınsak ise o zaman f uyumludur.
(b) Kuvvetli lacunary yakınsak bir dizi f-kuvvetli lacunary yakınsak ise o zaman f uyumludur.

İspat. (a) (x_n) dizisinin l ye lacunary istatistiksel yakınsak olduğunu fakat f-lacunary istatistiksel yakınsak olmadığını kabul edelim. Bu durumda

$$0 < c \leqslant \frac{f\left(\left|\{i \in I_{r_k} : \|x_i - l\| > \varepsilon_0\}\right|\right)}{f(h_{r_k})}$$

olacak şekilde bir $\varepsilon_0 > 0$ sayısı, bir $c > 0$ sabiti ve bir (r_k) alt dizisi mevcuttur. Diğer taraftan, (x_n) dizisi l ye lacunary istatistiksel yakınsak olduğundan, her $\varepsilon > 0$ için öyle bir $r_0(\varepsilon)$ vardır ki her $r \geq r_0$ için

$$\left|\{i \in I_r : \|x_i - l\| > \varepsilon_0\}\right| < \varepsilon h_r$$

f artan olduğundan

$$f\left(\left|\{i \in I_r : \|x_i - l\| > \varepsilon_0\}\right|\right) \leqslant f(\varepsilon h_r)$$

dir. Özel olarak her $r_k \geqslant r_0(\varepsilon)$

$$0 < c \leqslant \frac{f\left(\left|\{i \in I_{r_k} : \|x_i - l\| > \varepsilon_0\}\right|\right)}{f(h_{r_k})} \leqslant \frac{f(\varepsilon h_{r_k})}{f(h_{r_k})}$$

elde edilir. Bu, f nin uyumlu olmadığını gösterir. Böylece (a) ispatlanır. Aynı yöntemle (b) ispatlanabilir. $\square$

Khan ve Orhan (2010) tarafından tanımlanan A-düzgün integrallebilme kavramı ve bu kavrama ilişkin bir karakterizasyonun özel hali aşağıdaki gibidir.

Tanım 4.2.3 $\theta = (k_r)$ bir lacunary dizi olsun. Eğer

$$\lim_{c \to \infty} \sup_r \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r, \|x_k\| \geq c} \|x_k\| = 0.$$

ise (x_k) dizisi θ-düzgün integrallenebilirdir denir (Khan ve Orhan, 2010).

Teorem 4.2.5 $\theta = (k_r)$ bir lacunary dizi ve $x = (x_k)$ bir dizi olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir.
(a) x dizisi l ye kuvvetli lacunary yakınsaktır.
(b) x dizisi l ye lacunary istatistiksel yakınsaktır ve θ-düzgün integrallenebilirdir (Khan ve Orhan, 2010).

Bu sonucun uyumlu modülüs fonksiyonları kullanılarak elde edilen yakınsaklık türleri için de geçerli olduğu aşağıdaki teoremde gösterilmektedir.

Teorem 4.2.6 $\theta = (k_r)$ bir lacunary dizi,$x = (x_k)$ bir dizi ve f bir uyumlu modülüs fonksiyonu olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir.
(a) x dizisi l ye f-kuvvetli lacunary yakınsaktır.
(b) x dizisi l ye f-lacunary istatistiksel yakınsaktır ve θ-düzgün integrallenebilirdir.

İspat. (b)$\Rightarrow$(a): x dizisi l ye f-lacunary istatistiksel yakınsak ve θ-düzgün integrallenebilir olsun. Teorem 3.1.2 den x dizisi l ye f-lacunary istatistiksel yakınsaktır. Teorem 4.2.5'ten x, l ye kuvvetli lacunary yakınsaktır. f uyumlu modü lüs fonksiyonu olduğundan Teorem 4.2.3'ten x, l ye f-kuvvetli lacunary yakınsak olur.
(a)$\Rightarrow$(b): x dizisi l ye f-kuvvetli lacunary yakınsak olsun. Teorem 4.2.1 ve Teorem 4.2.5'den, x dizisinin θ-düzgün integrallenebilir olduğu görülür. Şimdi de x dizinin l ye f-lacunary istatistiksel yakınsak olduğunu gösterelim. Herhangi bir $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $(1/n) < \varepsilon$ olacak biçimde bir $n \in \mathbb{N}$ seçelim.

$$\{k \in I_r : \|x_k - L\| > \varepsilon\} \subset \left\{k \in I_r : \|x_k - L\| > \frac{1}{n}\right\}$$

olduğundan

$$\frac{f\left(\left|\{k \in I_r : \|x_k - l\| > \varepsilon\}\right|\right)}{f\left(h_r\right)} \leq \frac{f\left(\left|\left\{k \in I_r : \|x_k - l\| > \frac{1}{n}\right\}\right|\right)}{f\left(h_r\right)}$$

olur. Dolayısıyla, herhangi bir $n \in \mathbb{N}$ için

$$\lim_{r\to\infty} \frac{f\left(\left|\left\{k \in I_r : \|x_k - l\| > \frac{1}{n}\right\}\right|\right)}{f\left(h_r\right)} = 0$$

olduğunu göstermek yeterlidir.

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{k\in I_r} \|x_k - l\|\right) &\geq f\left(\sum_{k\in I_r, \|x_k - l\| > \frac{1}{n}} \|x_k - l\|\right) \geq f\left(\frac{1}{n} \sum_{k\in I_r, \|x_k - l\| > \frac{1}{n}} 1\right) \\ &= \frac{1}{n} f\left(\sum_{k\in I_r} \|x_k - l\|\right) \\ &= \frac{1}{n} f\left(\left|\left\{k \in I_r : \|x_k - l\| > \frac{1}{n}\right\}\right|\right) \end{aligned}$$

olduğundan

$$\frac{f\left(\left|\left\{k \in I_r : \|x_k - l\| > \frac{1}{n}\right\}\right|\right)}{f\left(h_r\right)} \leq \frac{n}{f\left(h_r\right)} f\left(\sum_{k\in I_r} \|x_k - l\|\right)$$

olur. x dizisi l ye f-kuvvetli lacunary yakınsak olduğundan son eşitsizlikten

$$\lim_{r\to\infty} \frac{f\left(\left|\left\{k \in I_r : \|x_k - l\| > \frac{1}{n}\right\}\right|\right)}{f\left(h_r\right)} = 0$$

elde edilir. Böylece ispat biter. □

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Aizpuru ve ark. (2014) sınırsız modülüs fonksiyonlarını kullanarak f-yoğunluk adını verdikleri yeni bir yoğunluk kavramı tanımlamışlar ve bu yoğunluğu kullanarak f-istatistiksel yakınsaklık ve f-istatistiksel Cauchy dizisi kavramlarını incelemişlerdir. Bu çalışmadan sonra toplanabilme teorisinde kullanılan yakınsaklık türlerinin modülüs fonksiyonları kullanılarak genelleştirildiği görülmektedir. Bu genellemelerden biri de lacunary istatistiksel yakınsaklık ve kuvvetli lacunary toplanabilme kavramları üzerinedir (Bhardwaj ve Dhawan, 2016).

Hazırlanan bu tez çalışmasınde genel bir normlu uzaylarda lacunary istatistiksel yakınsaklık ve kuvvetli lacunary toplanabilme kavramları incelenmiş ve bu kavramların sınırsız modülüs fonksiyonları kullanılarak elde edilen ve f-lacunary istatistiksel yakınsaklık ve f-kuvvetli lacunary toplanabilme olarak adlandırılan çeşitleri ele alınmıştır.

Diğer taraftan iki boyutlu $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ kümesinin alt kümeleri için f-yoğunluk ve çift indisli diziler için f-istatistiksel yakınsaklık kavramları yine Aizpuru ve ark. (2012) tarafından çalışılmıştır. León-Saavedra ve ark. (2022) ise tek indisli dizilerde elde ettikleri sonuçların benzerlerini çift indisli dizilerin f-kuvvetli Cesàro yakınsaklığı ve f-istatistiksel yakınsaklığı için elde etmişlerdir. Böylece bu tezde tek indisli diziler için ele aldığımız üçüncü ve dördüncü bölüme ait sonuçların çift indisli dizilere taşınması yeni bir çalışma olarak önerilebilir.

KAYNAKLAR

[1] Aizpuru, A., Listán-García, M., & Rambla-Barreno, F. (2012). Double density by moduli and statistical convergence. Bulletin of the Belgian Mathematical Society-Simon Stevin, 19(4), 663-673.

[2] Aizpuru, A., Listàn-Garcìa, M. C., Rambla-Barreno, F., Density by moduli and statistical convergence, Quaest. Math., 37(4), (2014), 525-530.

[3] Bhardwaj, V. K., & Dhawan, S. (2015). f-Statistical convergence of order 3b1 and strong Cesàro summability of order 3b1 with respect to a modulus. Journal of Inequalities and Applications, 2015(1), 1-14.

[4] Bhardwaj, V. K., & Dhawan, S. (2016). Density by moduli and lacunary statistical convergence. In Abstract and Applied Analysis (Vol. 2016). Hindawi.

[5] Connor, J. 1988. The statistical and strong p-Cesàro convergence of sequences. Analysis, 8: 47-63.

[6] Connor, J. 1989. On strong matrix summability with respect to a modulus and statistical convergence. Canadian Mathematical Bulletin, 32: 194-198.

[7] Di Maio, G., & Kočinac, L. D. (2008). Statistical convergence in topology. Topology and its Applications, 156(1), 28-45.

[8] Erdős, P., & Tenenbaum, G. (1989). Sur les densites de certaines suites d'entiers. In Proc. London Math. Soc.(3) (Vol. 59, No. 3, pp. 417-438).

[9] Et, M., Altin, Y., & Altinok, H. (2003). On some generalized difference sequence spaces defined by a modulus function. Filomat, 23-33.

[10] Freedman, A. R., Sember, J. J., & Raphael, M. (1978). Some Cesàro-Type Summability Spaces. Proceedings of the London Mathematical Society, 3(3), 508-520.

[11] Freedman, A.R., Sember J.J. 1981. Dentsities and summability. Pacific Journal of Mathematics, 95: 293–305.

[12] Fridy, J.A. 1985. On Statistical Convergence. Analysis, 5: 301-312.

[13] Fridy, J. A., & Orhan, C. (1993a). Lacunary statistical convergence. Pacific Journal of Mathematics, 160(1), 43-51.

[14] Fridy, J. A., & Orhan, C. (1993b). Lacunary statistical summability. Journal of mathematical analysis and applications, 173(2), 497-504.

[15] Fridy, J.A., Orhan, C. 1997a. Statistical limit superior and limit inferior. Proceedings of the American Mathematical Society, 125: 3625-3631.

[16] Fridy, J.A., Orhan, C. 1997b. Statistical core theorems. Journal of Mathematical Analysis and Aplications, 208: 520-527.

[17] Fridy, J. A., & Khan, M. K. (1998). Tauberian theorems via statistical convergence. Journal of mathematical analysis and applications, 228(1), 73-95.

[18] Gadjiev, A. D., & Orhan, C. (2002). Some approximation theorems via statistical convergence. The Rocky Mountain Journal of Mathematics, 129-138.

[19] Khan, M.K., Orhan, C. (2010) Characterizations of strong and statistical convergences. Publ. Math. Debrecen, 76, (2010), 77-88.

[20] León-Saavedra, F., del Carmen Listán-García, M., Fernández, F. J. P., de la Rosa, M. P. R. On statistical convergence and strong Cesàro convergence by moduli. J. Inequal. Appl., 2019: 2019(1), 298.

[21] León-Saavedra, F., Listán-García, M. D. C., & Romero de la Rosa, M. D. P. (2022). On statistical convergence and strong Cesàro convergence by moduli for double sequences. Journal of Inequalities and Applications, 2022(1), 1-14.

[22] Maddox, I. J. (1986). Sequence spaces defined by a modulus. Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society (Vol. 100, No. 1, pp. 161-166). Cambridge University Press.

[23] Malkowsky, E., & Savas, E. (2000). Some λ-sequence spaces defined by a modulus. Archivum Mathematicum, 36(3), 219-228.

[24] Miller, H. I. (1995). A measure theoretical subsequence characterization of statistical convergence. Transactions of the American Mathematical Society, 347(5), 1811-1819.

[25] Moreno-Pulido, S., Barbieri, G., León-Saavedra, F., Pérez-Fernández, F. J., & Sala-Pérez, A. (2020). Characterizations of a banach space through the strong lacunary and the lacunary statistical summabilities. Mathematics, 8(7), 1066.

[26] Nakano, H. (1953) Concave Modulars. Journal of the Mathematical Society of Japan, 5, 29-49.

[27] Niven, I. & Zuckerman, H. S. (1980). An Introduction to theTheory of Numbers, JohnWiley & Sons, New York, NY, USA, 4th edition1980.

[28] Pehlivan, S., & Fisher, B. (1994). On some sequence spaces. Indian Journal of Pure and Applied Mathematics, 25, 1067-1072.

[29] Pehlivan, S., & Mamedov, M. A. (2000). Statistical cluster points and turnpike. Optimization, 48(1), 91-106.

[30] Salát, T. 1980. On statistical convergent sequences of real numbers. Mathematica Slovaca, 30: 139-150.

[31] Savaş, E., & Patterson, R. (2011). Double sequence spaces defined by a modulus. Mathematica Slovaca, 61(2), 245-256.

[32] Schoenberg, I.J. 1959. The integrability of certain functions and related summability methods. American Mathematical Monthly, 66: 361-375.

[33] Steinhaus, H. 1951. Sur la convergence ordinate et la convergence asymptotique. Colloquium Mathematicum. 2: 73–74.

[34] Tripathy, B. C., & Chandra, P. (2011). On some generalized difference paranormed sequence spaces associated with multiplier sequence defined by modulus function. Analysis in theory and applications, 27(1), 21-27.

ÖZGEÇMİŞ

Adı-Soyadı	**:**	Sümeyya Selma SADAN
Doğum Yeri	**:**	
Doğum Tarihi	**:**	
Lisans	**:**	Atatürk Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü (2009-2013)
Mesleki Deneyim	**:**	Matematik Öğretmeni (Özel Açı Öğretim Kursu, Fatsa) (2016-)