T.C.
ORDU ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ESNEK KÜMELER VE ESNEK CEBİRSEL YAPILAR

MELİKE KASIM DEMİR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ORDU 2014

TEZ ONAY

Ordu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü öğrencisi Melike KASIM DEMİR tarafından ve Yrd. Doç. Dr. Yıldıray ÇELİK danışmanlığında hazırlanan "Esnek Kümeler ve Esnek Cebirsel Yapılar" adlı bu tez, jürimiz tarafından 13/ 01/ 2014 tarihinde oy birliği ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Yrd. Doç. Dr. Yıldıray ÇELİK

Başkan : Doç. Dr. Sultan YAMAK İmza :
Matematik Anabilim Dalı, K.T.Ü

Üye : Doç. Dr. Selahattin MADEN İmza :
Matematik Anabilim Dalı, Ordu Üniversitesi

Üye : Yrd. Doç. Dr. Yıldıray ÇELİK İmza :
Matematik Anabilim Dalı, Ordu Üniversitesi

ONAY:

Bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulu'nun 24/01/2014 tarih ve 2014/.51.....sayılı kararı ile onaylanmıştır.

24../01./2014

Doç. Dr. M. Fikret BALTA

Enstitü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

Melike KASIM DEMİR

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

ESNEK KÜMELER VE ESNEK CEBİRSEL YAPILAR

Melike KASIM DEMİR

Ordu Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı, 2014
Yüksek Lisans Tezi, 60s.

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Yıldıray ÇELİK

Bu tezin amacı, esnek grup, esnek halka ve esnek modül yapılarının temel özelliklerini incelemek ve bu yapılardan elde edilen sonuçları ortaya koymaktır.

Bu çalışma iki bölümden oluşmaktadır. Bölüm 1'de çalışmamızda temel olan bazı tanım ve teoremler ifade edilmiştir. Bölüm 2'de esnek kümeler üzerinde yeni ikili işlemler tanımlanmış ve bunlara bağlı özellikler elde edilmiştir. Ayrıca, esnek grup, esnek halka ve esnek modül kavramları verilerek bunlara ait cebirsel özellikler incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Esnek küme, Esnek grup, Esnek halka, Esnek modül.

ABSTRACT

SOFT SETS AND SOFT ALGEBRAIC STRUCTURES

Melike KASIM DEMİR

University of Ordu
Institute for Graduate Studies in Natural and Technology
Department of Mathematics, 2014
MSc. Thesis, 58p.

Supervisor: Asst. Prof. Dr. Yıldıray ÇELİK

The aim of the present thesis is to investigate the basic features of the structures of soft group, soft ring and soft module, and is to present the results obtained from this structures.

This study consists of two main chapters. In Chapter 1, some definitions and theorems which are crucial for our study are stated. In Chapter 2, some new binary relations on soft sets are defined and features associated with them are obtained. Also, the notions of soft group, soft ring and soft module are given and algebraic properties belonging to these are examined.

Key Words: Soft set, Soft group, Soft ring, Soft module.

TEŞEKKÜR

Tez konumun belirlenmesi, çalışmanın yürütülmesi ve yazımı esnasında başta danışman hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Yıldıray ÇELİK' e ve Ordu Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü öğretim üyelerine teşekkür ederim.

Aynı zamanda, manevi desteklerini her an üzerimde hissettiğim babam, annem ve eşim Osman DEMİR' e teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

SİMGELERVE KISALTMALAR

□	: Reel sayılar kümesi
□	: Tamsayılar kümesi
□	: Doğal sayılar kümesi
S(G)	: G grubunun bütün alt gruplarının kümesi
A(R)	: R halkasının bütün alt halkalarının kümesi
I(R)	:R halkasının bütün ideallerinin kümesi
S[M]	:M modülünün tüm alt modüllerinin kümesi
$\times$	:Kartezyen çarpım
$[0,1]^X$	:X'in bütün bulanık alt kümeleri
$\mu \leq \nu$	:ν μ'yü kapsar
μ_α	: μ bulanık alt kümesinin α-seviye alt kümesi,
$\wp(U)$	: U'nun güç kümesi,
Φ_A	: Boş esnek küme,
Ω_A	: Tam esnek küme,
Es(U)	: U üzerindeki bütün esnek kümelerin ailesi
Es($\underline{U}$)	: U üzerindeki bütün güçlü esnek kümelerin ailesi
$\subseteq$	: Esnek alt küme
ô	: Daraltılmış esnek alt küme

$\bigcap$	: Esnek kümelerin arakesiti
ó	: Esnek kümelerin genişletilmiş arakesiti
ò	: Esnek kümelerin daraltılmış birleşimi
$\bigcup$	: Esnek kümelerin birleşimi
$\vee$	: Esnek kümelerin $\vee$ -birleşimi
$\wedge$	: Esnek kümelerin $\wedge$ -arakesiti
$+_{\cup}$	: Esnek kümelerin toplamı
$+_{\cap}$	: Esnek kümelerin daraltılmış toplamı
$+_{\times}$	: Esnek kümelerin kartezyen toplamı
(ϕ,ψ)	: Esnek fonksiyon
$\sqcup$	: Esnek tam eşleme
$Es_g(G)$	: G üzerindeki bütün esnek grupların ailesi
$Es_g(\underline{G})$	: G üzerindeki bütün güçlü esnek grupların ailesi
$\cong_G$	: Esnek grup izomorfisi
$<$	: Esnek alt grup
$\lhd$	: Normal esnek alt grup
$Es_r(R)$	: R üzerindeki bütün esnek halkaların ailesi
$Es_i(R)$	: R üzerindeki bütün esnek ideallerin ailesi
$Es_r(\underline{R})$	: R üzerindeki bütün güçlü esnek halkaların ailesi
$Es_i(\underline{R})$	: R üzerindeki bütün güçlü esnek ideallerin ailesi

$\cong_R$	: Esnek halka izomorfisi
$<_R$	: Esnek alt halka
Esm[M]	: M üzerindeki bütün esnek modüllerin ailesi
Esm[$\underline{M}$]	: M üzerindeki bütün güçlü esnek modüllerin ailesi
$\cong_M$	: Esnek modül izomorfisi
$<_R$	: Esnek alt modül

1. GİRİŞ

Günlük hayatta karşılaştığımız her olayı açıklamak ve kesin tanımlamalarda bulunmak her zaman mümkün olmayabilir. Bazı olaylar belirsizlikler ve doğrusal olmama özellikleri taşır. Belirsizliğin birçok çeşidine özellikle biyoloji, ekonomi, mühendislik, çevresel bilimler, sosyal bilimler ve tıp bilimleri gibi alanlarda sık rastlanmaktadır. Bundan dolayı bilim adamları belirsizliği anlamak ve buna uygun çözümler bulmak için birçok teori geliştirmeye başlamışlardır. Olasılık teorisi, bulanık kümeler teorisi (Zadeh, 1965), yaklaşımlı kümeler teorisi (Pawlak, 1982), esnek kümeler teorisi (Molodtsov, 1999) en iyi bilinen ve belirsizliği modellemek için sık sık kullanılan faydalı matematiksel yaklaşımlardan bazılarıdır.

Bulanık küme teorisi ilk olarakZadeh(1965) tarafından ortaya atılmıştır. Bulanık mantığa göre evrendeki bir nesne, o evrendeki bir kümenin mutlaka elemanıdır ama eleman olma derecesi farklıdır. Bulanık mantık, dilsel değişkenler yardımıyla biraz sıcak, ılık, uzun, çok uzun, soğuk gibi günlük hayatımızda kullandığımız kelimeler yardımıyla insan mantığına en yakın doğrulukta denetimi sağlayabilir. Bulanık mantık denetleyici kullanılarak elektrikli ev aletlerinden oto elektroniğine, gündelik kullandığımız iş makinelerinden üretim mühendisliğine, endüstriyel denetim teknolojilerinden otomasyona kadar her alanda uygulama alanı bulabilir.

Bulanık küme kavramı uygulamalı bilimlerde kullanım alanı bulduğu kadar teorik bilimlerde de kullanılmaktadır. Rosenfeld(1971) bulanık küme kavramını kullanarak bulanık grup teoriyi geliştirmiştir. Bulanık grup teorinin temel özellikleri klasik grup teorideki sonuçlar kullanılarak elde edilmiştir. Çok sayıda araştırmacı cebirsel yapıların bu yeni kavramın özelliklerini çalışmışlardır. Liu (1983) bulanık grupları kullanarak daha karmaşık bulanık cebirsel yapılar olan bulanık halkalar ve bulanık idealler üzerinde çalışmıştır. Daha sonraNanda (1986) bulanık küme kavramı cisim ve lineer uzaylara uyarlayarak yeni bir kavram ortaya atmıştır.

Belirsizliğe farklı bir yaklaşım olan esnek küme teori ise ilk olarakMolodtsov(1999)tarafından yılında belirsizliğe farklı bir yaklaşım olarak tanımlandı.Esnek kümeler birçok yönü ile zengin bir uygulama potansiyeline sahiptir. Bu uygulamalardan birkaç tanesi Molodtsov (1999, 2004, 2006) tarafından kendi çalışmasında incelenmiştir. Son yıllarda ise esnek kümeler üzerine yapılan çalışmalar hızlıca artmaktadır.

Molodtsov(1999) sürekli diferansiyellenebilir fonksiyonlar, oyun teori, yöneylem araştırması, Rienmann integrali, Peron integrali, olasılık teori, ölçüm teori gibi bir çok alana esnek küme teoriyi uyguladı. Daha sonra Maji ve ark. (2002) Pawlak'ın yaklaşımlı küme teorisi yardımıyla, bir karar verme probleminde esnek kümelerin bir uygulamasını yaptılar ve esnek kümelerde bazı işlemler tanımladılar. Maji ve ark. (2003) esnek küme işlemlerini tanımladılar. Chen ve ark. (2003, 2005)esnek kümelerin parametre dönüşümlerini tanımladılar ve bir karar verme probleminde esnek kümelerin uygulamasınıgeliştirdiler.Molodtsov (2006) esnek küme teorisi üzerine dayalı bir analiz geliştirerek, esnek sayı, esnek türev, esnek integral gibi kavramları formüle etti.Ali ve ark. (2009) esnek kümelerde, iki esnek kümenin daraltılmış arakesiti, daraltılmış birleşimi, daraltılmış farkı ve genişletilmiş birleşimi gibi bazı yeni tanımları verdiler.

Daha sonra esnek kümeler ve bunlara ait cebirsel özellikler de bazı araştırmacılar tarafından çalışılmaya başlandı. İlk olarak Aktaş ve Çağman (2007) esnek küme teorisinin bulanık küme teorisi ve kaba küme teorisi ile olan ilişkisini incelediler. Ayrıca Molodtsov'un esnek küme tanımından yola çıkarak esnek grupları tanımladılar ve esnek grupların bazı özelliklerini incelediler. Jun(2008) esnek BCK/BCI-cebirleri ve esnek alt cebir kavramlarını ortaya atarak, onların bazı temel özeliklerini elde ettiler. Jun ve Park (2008) esnek kümeleri BCK/BCI-cebirlerine uygulayarak, BCK/BCI-cebirlerinde esnek kümelerin cebirsel özeliklerini tartıştı. Park ve ark. (2009) esnek WS-cebirleri üzerine bir çalışma yaptı. Feng ve ark. (2008) esnek küme teorisini kullanarak esnek yarı halkaları ve bunlarla ilgili bazı özelikleri incelediler. Sun ve ark. (2008) esnek modülleri tanımlayarak modüller yardımıyla bazı temel özellikleri elde ettiler. Jun ve ark. (2009) değişmeli esnek ideal kavramını vererek değişmeli idealistik esnek BCK cebirlerini incelediler. Jun ve ark. (2011) esnek p-idealler ve p-idealistik esnek BCI-cebirleri kavramlarını ortaya koydular ve BCI-cebirlerinde p-ideallerin karakterizasyonunu verdiler. Jun ve ark. (2009) esnek d-cebirler, esnek d^*-cebirler, esnek d-idealler, esnek d^*-idealler ve d-idealistik esnek d-cebirler kavramlarını vererek onlara ait bazı özellikleri incelediler. Jun ve Park (2009) esnek küme kavramını hilbert cebirlerine uyguladılar ve bunlara dair bazı özellikleri incelediler. Acar ve ark. (2010) esnek halkaları tanımladılar ve esnek halkaların bazı temel özelliklerini incelediler. Babitha ve Sunil(2009) esnek küme bağıntısı kavramını ele aldılar ve bu kavramla ilgili denk esnek küme bağıntısı, bölüm, birleşim, fonksiyon gibi birçok kavramı tartıştılar. Çağman ve Enginoğlu(2010) esnek matrisleri ve onlarla ilgili işlemleri tanımladılar. Ayrıca bir esnek maksimum-minimum karar verme metodunu oluşturdular. Feng ve ark. (2010) bulanık kümeler, kaba kümeler ve esnek kümelerin hepsini birleştirmek için bir yapı oluşturdular. Kazancı ve ark. (2010) esnek BCH-cebirlerini tanımlayarak esnek kümelerin homomorfik görüntü ve homomorfik ters görüntü teoremlerini verdiler.Majumdar ve Samanta(2010) esnek dönüşüm kavramını verdiler ve onların bazı özellikleri üzerinde çalıştılar. Üstelik esnek dönüşüm altında bir esnek kümenin resmi ve ters resmi gibi yeni kavramlar verdiler. Liu ve ark. (2012) esnek halkaların bazı sınıflarını tanımlayarak esnek halkalarda birinci, ikinci ve üçüncü izomorfi teoremlerini verdiler. Qin ve Hong (2010) esnek kümelerin kafes yapısını inşaa ettiler, esnek eşitlik kavramını incelediler ve bunlarla ilgili bazı özellikler elde ettiler. Xuve ark. (2010) vague esnek küme kavramını vererek bunlara ait özellikleri incelediler. Atagün ve Sezgin (2011) Molodtsov'un esnek kümelerle ilgili tanımını kullanarak bir halkanın esnek alt halkaları ve esnek idealleri üzerinde çalıştılar. Ayrıca bir cismin esnek alt cismi ve bir sol R-modülün esnek alt modüllerini ele alarak halkalar, cisimler ve modüllerin esnek alt yapıları arasındaki ilişkiyi ortaya koydular. Yamak ve ark. (2011) esnek hypergrupoid kavramını verdiler ve esnek hypergrupoidlerin L-alt hypergrupoidlerle olan ilişkisini inceledilr. Ayrıca esnek hypergupoidlerin bazı yeni özelliklerini elde ettiler. Çelik ve ark. (2011) esnek kümeler üzerinde yeni ikili işlemler verdiler ve esnek halkalarla ilgili yeni özellikler elde ettiler. Türkmen ve Pancar (2012) esnek alt modüllerin bazı özelliklerini ortaya koydular ve esnek alt modüllerin toplamı, direk toplamı gibi bazı yeni kavramları incelediler.

Bu tezin amacı, esnek grup, esnek halka ve esnek modül yapılarını, temel özelliklerini ve bu yapılardan elde edilen sonuçlar arasındaki ilişkiyi araştırmaktır.

Bu çalışma iki bölümden oluşmaktadır. Bölüm 1'de çalışmamızda temel olan bazı tanım ve teoremler ifade edilmiştir.

Bölüm 2 ise üç kısımdan oluşmaktadır. İlk kısımda esnek kümeler üzerinde yeni ikili işlemler tanımlanmış ve bunlara bağlı özellikler elde edilmiştir. İkinci kısımda, esnek grup, esnek halka ve esnek modül kavramları verilerek bunlara ait cebirsel özellikler incelenmiştir.

2. GENEL BİLGİLER

2.1. Kafesler

Bu kısımdaki kafeslerle ilgili Tanım ve Teoremler Birkhoff (1967) dan derlenmiştir.

Tanım 2.1.1. L boştan farklı bir küme ve " $\leq$ " L üzerinde bir bağıntı olsun. L'ye sıralı küme denir. $\Leftrightarrow$

i) $\forall\, a \in \mathrm{L}$ için $a \leq a$
ii) $\forall a, b \in \mathrm{L}$ için $a \leq b$ ve $b \leq a$ ise $a = b$
iii) $\forall a, b, c \in \mathrm{L}$ için $a \leq b$ ve $b \leq c$ ise $a \leq c$
L sıralı kümesi (L, $\leq$) notasyonu ile gösterilir.

Tanım 2.1.2. (L, $\leq$) bir sıralı küme olsun.

i) L'ye kafes denir $\Leftrightarrow$ $\forall\, a, b \in \mathrm{L}$ için $\mathrm{Sup}\{a,b\} = a \vee b$ ve $\mathrm{Inf}\{a,b\} = a \wedge b$ mevcuttur.
ii) L'ye zincir denir $\Leftrightarrow$ $\forall\, a, b \in \mathrm{L}$ için $a \leq b$ veya $b \leq a$.
iii) L'ye tam kafes denir $\Leftrightarrow$ $\forall \mathrm{T} \subseteq \mathrm{L}$ için SupT ve İnfT mevcuttur.
iv) L'ye modüler kafes denir $\Leftrightarrow$ L kafes ve $\forall a, b, c \in \mathrm{L}$, $a \leq b$ için
$a \vee (b \wedge c) = b \wedge (a \vee c)$.
v) L'ye dağılımlı kafes denir $\Leftrightarrow$ L kafes ve $\forall a, b, c \in \mathrm{L}$ için
$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$ ve $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$.

Tanım 2.1.3. $(\mathrm{L}, \leq)$ bir kafes ve $\varnothing \neq \mathrm{T} \subseteq \mathrm{L}$ olsun. T'ye alt kafes denir. $\Leftrightarrow$ $\forall a, b \in \mathrm{T}$ için $a \vee b, a \wedge b \in \mathrm{T}$ dir.

Tanım 2.1.4. L bir kafes, $0 \in \mathrm{L}$ ve $\forall x \in \mathrm{L}$ için $0 \leq x$ ise L'ye alttan sınırlı kafes denir ve $(\mathrm{L}, \leq, 0)$ ile gösterilir. $1 \in \mathrm{L}$ ve $\forall x \in \mathrm{L}$ için $x \leq 1$ ise L'ye üstten sınırlı kafes denir ve $(\mathrm{L}, \leq, 1)$ ile gösterilir.

L kafesi üstten ve alttan sınırlı ise L'ye sınırlı kafes denir ve $(\mathrm{L}, \leq, 0, 1)$ ile gösterilir. Aksi söylenmedikçe bütün kafesler sınırlı kafes olarak ele alınacaktır.

Tanım 2.1.5. $(\mathrm{L}_1, \leq)$, $(\mathrm{L}_2, \leq)$ sıralı kümeler ve $f : \mathrm{L}_1 \to \mathrm{L}_2$ bir fonksiyon olsun.

i) f **'**ye sıra korur (artan) denir. $\Leftrightarrow \forall a,\ b \in L_1$ için $a \le b$ ise $f(a) \le f(b)$.

ii) f 'ye kafes homomorfisi denir. $\Leftrightarrow \forall a,\ b \in L_1$ için $f(a \wedge b)$=$f(a) \wedge f(b)$ ve $f(a \vee b)$=$f(a) \vee f(b)$.

Tanım 2.1.6. $(L, \vee, \wedge)$ bir tam kafes olsun. L'ye sonsuz $\vee$-dağılımlı kafes denir. $\Leftrightarrow$ $\forall a, b_i \in L,\ i \in \Lambda$ için $a \wedge (\bigvee_{i\in\Lambda} b_i) = \bigvee_{i\in\Lambda} (a \wedge b_i)$.

Sonsuz $\vee$-dağılımlı kafeslere aşağıdaki örnekleri verebiliriz.

Örnek 2.1.1.

1) L=$\wp(A)$ ailesi '' $\subseteq$ '' bağıntısı ilesonsuz $\vee$-dağılımlı kafestir.

2) L sonlu bir küme ve $(L, \le)$ dağılımlı kafes ise $(L, \le)$ sonsuz $\vee$-dağılımlı kafestir.

3) L=[0,1] kümesi ''$\le$''bağıntısı ile sonsuz $\vee$-dağılımlı kafestir.

4) $(L_1, \le)$ ve $(L_2, \le)$ sonsuz $\vee$-dağılımlı kafesler ise $L_1 \times L_2$ kümesi $(a,b) \le (c,d)$ $\Leftrightarrow$ $a \le c$ ve $b \le d$ bağıntısı ile sonsuz$\vee$-dağılımlı kafestir.

NOT: Aksi söylenmedikçe $L_1 \times L_2$üzerindeki sıralama bağıntısı 4) de ifade edildiği gibi alınacaktır.

2.2. Gruplar

Bu kısımdaki Tanım ve Teoremler Bhattacharyave Jain(1972)'den derlenmiştir.

Tanım 2.2.1. $\varnothing \neq$ G bir küme ve '$\cdot$' G üzerinde bir ikili işlem olsun. G'ye bir grup denir. $\Leftrightarrow$

G1) $\forall\ x, y, z \in$ G için $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$,

G2) $\exists\ e \in$G öyleki $\forall\ x \in$G için $e.x = x.e = x$,

G3) $\forall\ x \in$G için $\exists\ y \in$G öyle ki $x.y = y.x = e$.

Burada e elemanına G grubunun birim elemanı denir. $x.y = y.x = e$ ile gösterilir.İkili işlem''+'' olarak alınırsa bazen x^{-1} yerine $-x$ olarakta gösterilebilir.

Tanım 2.2.2. (G,$\sqcup$) bir grup olsun.G'ye abel (değişmeli) grup denir $\Leftrightarrow$ $\forall\ x, y \in$G için $x.y = y.x$ 'dir.

Tanım 2.2.3. (G,□) bir grup ve $\varnothing \neq$ H $\subseteq$ G olsun. H'ye G'nin bir alt grubu denir $\Leftrightarrow$ $\forall\ x, y \in$ H için $x.y^{-1} \in$ H. Bu durum H $\leq$ G notasyonu ile gösterilir.G grubunun bütün alt gruplarının kümesi S(G) ile gösterilecektir.

H alt grubuna G'nin bir normal alt grubu denir $\Leftrightarrow$ $\forall\ x \in$ G için x^{-1}H$x \subseteq$ H. Bu durum H(G notasyonu ile gösterilir.

Teorem 2.2.1. $\{H_i \mid i \in \Lambda\}$ G'nin alt gruplarının bir ailesi olsun. Bu takdirde $\bigcap_{i\in\Lambda} H_i$, G'nin bir alt grubudur.

Teorem 2.2.2 $\{G_i \mid i \in \Lambda\}$ grupların bir ailesi ve $\forall i \in \Lambda$ için $H_i \in S(G_i)$ise $\prod_{i\in\Lambda} H_i \in S(\prod_{i\in\Lambda} G_i)$.

Tanım 2.2.4. (G$_1$,□) , (G$_2$,$\circ$) iki grup ve $f : G_1 \to G_2$ bir fonksiyon olsun. f 'ye bir grup homomorfisi denir. $\Leftrightarrow$ $\forall\ x, y \in G_1$ için $f(x□x)=f(x) \circ f(y)$ 'dir.

Tanım 2.2.5. $f : G_1 \to G_2$ birgrup homomorfisi olsun. Bu takdirde;

i) f örten ise f 'ye bir epimorfi denir.

ii) f bire-bir ise f 'ye bir monomorfi denir.

iii) f bire-bir ve örten ise f 'ye bir izomorfi denir.

Eğer $f : G_1 \to G_2$ bir grup izomorfisi mevcut ise G_1 ile G_2 grubuna izomorftur denir ve $G_1 \cong G_2$ ile gösterilir.

Önerme 2.2.1. $f : G_1 \to G_2$ bir grup izomorfisi ise $f^{-1} : G_1 \to G_2$ bir grup izomorfisidir.

Tanım 2.2.6. $f : G_1 \to G_2$bir grup homomorfisi olmak üzere;

f (G)={ $f(g) \mid g \in$ G } ve $f^{-1}(\{e\})$={$g \in$ G | $f(g) = e_{G'}$ } kümelerine sırasıyla f 'nin görüntüsü ve çekirdeği denir. Bu durum sırasıyla Res f ve Çek f ile gösterilir.

Teorem 2.2.3. f :G $\rightarrow$ G$'$ bir grup homomorfisi olsun. Bu takdirde aşağıdaki özellikler sağlanır.

i) $f(e) = e'$

ii) $\forall$ α $\in$ G için $f(a^{-1}) = [f(a)]^{-1}$

Teorem 2.2.4. f :G $\rightarrow$ G$'$ bir grup homomorfisi olsun. Bu takdirde;

i) H $\leq$ G ise f(H) $\leq$ G$'$ 'dır.

ii) H$'$ $\leq$ G$'$ ise f^{-1}(H$'$) $\leq$ G 'dır.

iii) H **(** G ve f örten ise f(H) **(** G$'$ 'dır.

iv) H$'$ **(** G$'$ ise f^{-1}(H$'$) **(** G 'dır.

v) Res f $\leq$ G

vi) Çek f **(** G

2.3. Halkalar ve İdealler

Bu kısımdaki Tanım ve Teoremler Hungerford (1974) ve Fraleigh (1994) den derlenmiştir.

Tanım 2.3.1. $\varnothing \neq$ R bir küme ve “+” ve “$\cdot$” R üzerinde tanımlı iki ikili işlem olsun. R’ye bir halka denir. $\Leftrightarrow$

R1) (R,+) değişmeli bir grup

R2) (R, $\cdot$) yarı grup

R3) $\forall$ $a,b,c \in$ R için $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ ve $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

R bir halka olsun. Eğer $\forall a \in$ R için $1_R \cdot a = a \cdot 1_R = a$ olacak şekilde $1_R \in$ R mevcut iseR’ye birim elemanlı halka denir ve 1_R elamanına da R halkasının birim elemanı denir. Eğer R halkası, $\forall$ $x, y \in$ R için $x \cdot y = y \cdot x$ koşulunu gerçekliyor ise R’ye değişmeli (komutatif) halka denir.

(R,+) abel grubunun birim elemanına R halkasının sıfır elemanı denir ve 0_R =0 ile gösterilir. Bu çalışmada bütün halkalar en az iki elemana sahip birim elemanlı bir halka olarak ele alınacaktır.

Örnek 2.3.1.

1) $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ için $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ birim elemanlı ve değişmeli bir halkadır.

2) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ birim elemanlı ve değişmeli halkalardır.

3) $n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$ için $(\mathrm{M}_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$ birim elemanlı bir halkadır.

4) $\forall$ n, $m \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$ için $(\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m, +, \cdot)$ birim elemanlı değişmeli bir halkadır.

Teorem 2.3.1. $\{\mathrm{R}_i \mid i \in \Lambda\}$ halkaların bir ailesi ise

$$(a_i) + (b_i) = (a_i + b_i) \text{ ve } (a_i)\cdot(b_i) = (a_i \cdot b_i)$$

ikili işlemleri ile $\prod_{i\in\Lambda} \mathrm{R}_i$ bir halkadır.

Teoremde ifade edilen $\prod_{i\in\Lambda} \mathrm{R}_i$ halkasına $\{\mathrm{R}_i \mid i \in \Lambda\}$ halkalar ailesinin kartezyen çarpımı denir.

(R,+) değişmeli bir grup ve $\{\mathrm{S}_i \mid i \in \Lambda\}$ R'nin boştan farklı alt kümelerinin bir ailesi olmak üzere $\{a_{i_1} + a_{i_2} + \ldots\ldots + a_{i_n} \mid \forall a_{i_j} \in \mathrm{S}_{i_j}, n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}\}$ kümesine $\{\mathrm{S}_i \mid i \in \Lambda\}$ ailesinin toplamı denir ve $\sum_{i\in\Lambda} \mathrm{S}_i$ ile gösterilir.

Tanım 2.3.2.(R, +, $\cdot$) bir halka ve $\varnothing \neq \mathrm{I} \subseteq$ R olsun. I'ya R'nin bir alt halkası denir $\Leftrightarrow$ $\forall a,b \in \mathrm{I}$ için $a - b \in \mathrm{I}$ ve $a \cdot b \in \mathrm{I}$.

Tanım 2.3.3.(R, +, $\cdot$) bir halka ve $\varnothing \neq \mathrm{I} \subseteq$ R olsun. I'ya R'nin bir sol (sağ) ideali denir $\Leftrightarrow$ $\forall a,b \in \mathrm{I}$ için $a - b \in \mathrm{I}$ ve $r \cdot a \in \mathrm{I}$ $(a \cdot r \in \mathrm{I})$. Eğer I, R'nin sol ve sağ ideali ise I'ya R'nin ideali denir. Açık olarak I, R'nin bir ideali ise I, R'nin bir alt halkasıdır.

{0} ve R, R'nin idealleridir ve bu ideallere R halkasının trivial idealleri denir.

I,J R nin alt kümeleri olmak üzere, I⊙J=$\{\sum_{i\in\Lambda}^{n} y_i z_i = x \mid$ y_i∈I, z_i∈J, n∈ ℕ\{0}} kümesine I ile J kümelerinin ideal çarpımı denir. Eğer I ve J R halkasının idealleri ise I⊙J kümesi de R halkasının idealidir.

Açık olarak R halkasının bütün alt halkalarının ve ideallerinin kümesi "$\subseteq$" bağıntısı ile sıralı kümedir ve bu kümeler sırasıyla A(R) ve I(R) notasyonları ile gösterilecektir.

Teorem 2.3.2. R bir halka $\{S_i \mid i \in \Lambda\}$ R'nin ideallerinin boştan farklı bir ailesi ise $\sum_{i\in\Lambda} S_i$ kümesi $\{S_i \mid i \in \Lambda\}$ ideallerini kapsayan en küçük idealdir.

Teorem 2.3.3. $\{S_i \mid i \in \Lambda\}$ R'nin alt halkalarının (ideallerinin) bir ailesi olsun. Bu taktirde $\bigcap_{i\in\Lambda} S_i$, R'nin bir alt halkası (ideali) dır.

Sonuç 2.3.1. $\{S_i \mid i \in \Lambda\}$ R'nin ideallerinin bir ailesi olsun. Bu takdirde;

i) $\operatorname{Sup}\{S_i \mid i \in \Lambda\} = \sum_{i\in\Lambda} S_i$ ve $\operatorname{Inf}\{S_i \mid i \in \Lambda\} = \bigcap_{i\in\Lambda} S_i$,

ii) (I(R), $\subseteq$) tam kafestir.

Teorem 2.3.4. $\{R_i \mid i \in \Lambda\}$ halkaların bir ailesi olsun. Bu takdirde;

i) $\forall i \in \Lambda$ için $S_i \in A(R_i)$ ise $\prod_{i\in\Lambda} S_i \in A(\prod_{i\in\Lambda} R_i)$,

ii) $\forall i \in \Lambda$ için $S_i \in I(R_i)$ ise $\prod_{i\in\Lambda} S_i \in I(\prod_{i\in\Lambda} R_i)$.

Tanım 2.3.4. R ve S iki halka olsun. $\phi : R \to S$ fonksiyonuna R'den S'ye bir halka homomorfisi denir. $\Leftrightarrow$ $\forall\ x, y \in R$ için $\phi(x+y)=\phi(x)+\phi(y)$ ve $\phi(x \cdot y)=\phi(x)\cdot\phi(y)$.

Tanım 2.3.5. ϕ:R $\to$ S halka homomorfisi olsun.Eğer ϕ birebir ve örten ise ϕ'ye bir halka izomorfisidenir.

Eğer ϕ:R $\to$ S bir halka izomorfisi mevcut ise R ile S halkalarına izomorftur denir ve R $\cong$ S ile gösterilir.

Önerme 2.3.1. ϕ:R $\to$ S bir halka izomorfisi ise $\phi^{-1} : S \to R$ bir halka izomorfisidir.

Tanım 2.3.6. ϕ:R $\to$ S bir halka homomorfisi olmak üzere;

$\operatorname{Res}\phi = \{\phi(r) \mid r \in R\}$ ve Çekϕ=$\{r \in R \mid \phi(r) = 0_S\}$ kümelerine sırasıyla ϕ'ningörüntüsü ve çekirdeği denir.

Teorem 2.3.5. ϕ:R$\to$S ve θ:S$\to$T halka homomorfileriolsun. Bu takdirde $\theta\circ\phi$:R $\to$T halka homomorfisidir.

Teorem 2.3.6. f:R$\to$ R' bir halkahomomorfisi olsun. Bu takdirde;

i) $S \in A(R)$ ise $f(S) \in A(R')$

ii) $S \in I(R)$ ise $f(S) \in I(R')$

iii) $S' \in A(R')$ ise $f^{-1}(S') \in A(R)$

iv) $S' \in I(R')$ ise $f^{-1}(S') \in I(R)$

v)Çek$\phi \in I(R)$ ve Res$\phi \in A(S)$

2.4. Modüller

Bu kısımdaki Tanım ve Teoremler Hungerford (1974) ve Fraleigh (1994) den derlenmiştir.

Tanım 2.4.1. R bir halka ve (M,+) değişmeli grup olsun.

$$\cdot : R \times M \to M$$
$$(r, p) \to r \cdot p$$

dönüşümü $\forall r, s \in R$ ve $\forall p, q \in M$ için

$$r \cdot (p + q) = r \cdot p + r \cdot q$$
$$(r + s) \cdot p = r \cdot p + s \cdot p$$
$$(r \cdot s) \cdot p = r \cdot (s \cdot p)$$

koşullarını sağlıyorsa M'ye (sol) R-modül denir. Eğer R birim elemanlı bir halka ve $\forall p \in M$ için $1 \cdot p = p$ ise M'ye üniter R-modül denir.

Bu çalışmada bütün R-modüller üniter R-modül olarak alınacaktır. Ayrıca $r \in$R ve m∈M olmak üzere "r.m" yerine "rm" kullanılacaktır.

Modüllere aşağıdaki örnekleri verebiliriz.

Örnek 2.4.1.

1) (G,+) değişmeli bir grup ise G bir $\mathbb{Z}$ -modüldür.

2) (R,+,$\cdot$) bir halka ise R bir R-modüldür.

3) (R,+,$\cdot$) bir halka ve I R'nin bir ideali ise I bir R-modüldür.

4) R bir halka ise $M_n(R)$ bir R-modüldür.

Teorem 2.4.1. $\{M_i \mid i \in \Lambda\}$ R-modüllerin boştan farklı bir ailesi olsun. Bu takdirde;

$$(x_i) + (y_i) = (x_i + y_i), \quad r(x_i) = (rx_i)$$

işlemleri ile $\prod_{i\in\Lambda} \mathrm{M}_i$ bir R-modüldür. $\prod_{i\in\Lambda} \mathrm{M}_i$ modülüne $\{\mathrm{M}_i \mid i\in\Lambda\}$ R-modüller ailesinin kartezyen çarpımı denir.

Tanım 2.4.2. M bir R modül ve $\varnothing \neq \mathrm{N} \subseteq \mathrm{M}$ olsun. N'ye M'nin bir alt modülü denir $\Leftrightarrow$ $\forall a,b\in \mathrm{N}$ ve $\forall r\in \mathrm{R}$ için $a+b\in \mathrm{N}$ ve $r\cdot a\in \mathrm{N}$ dir. Açık olarak M modülünün bütün alt modüllerinin kümesi "$\subseteq$" bağıntısı ile sıralı kümedir ve bu küme S[M] ile gösterilecektir.

Örnek 2.4.2.

1) R bir halka ise R'nin R-modül olarak düşünüldüğünde R-alt modülleri R halkasının sol idealleridir.

2) M bir R-modül ve $x\in \mathrm{M}$ olsun. Bu takdirde $\mathrm{R}x=\{rx \mid r\in \mathrm{R}\}$ kümesi M'nin bir R-alt modülüdür.

Teorem 2.4.2. M R-modül, $\{\mathrm{M}_i \mid i\in\Lambda\}\subseteq \mathrm{S[M]}$olsun. Bu takdirde;

i) $\bigcap_{i\in\Lambda} \mathrm{M}_i \in \mathrm{S[M]}$

ii) $\forall i\in\Lambda$ için $\mathrm{N}_i \in \mathrm{S}[\mathrm{M}_i]$ ise $\prod_{i\in\Lambda}\mathrm{N}_i \in \mathrm{S}[\prod_{i\in\Lambda}\mathrm{M}_i]$ dir.

Teorem 2.4.3.M R-modül, $\{\mathrm{M}_i \mid i\in\Lambda\}$ M'nin alt modüllerinin boştan farklı bir ailesi ise $\sum_{i\in\Lambda}\mathrm{M}_i$ kümesi $\{\mathrm{M}_i \mid i\in\Lambda\}$ alt modüller ailesini kapsayan en küçük alt modüldür.

Sonuç 2.4.1. $\{\mathrm{M}_i \mid i\in\Lambda\}$ M'nin alt modüllerinin boştan farklı bir ailesi olsun. Bu takdirde;

i) $\mathrm{Sup}\{\mathrm{M}_i \mid i\in\Lambda\}=\sum_{i\in\Lambda}\mathrm{M}_i$ ve$\mathrm{Inf}\{\mathrm{M}_i \mid i\in\Lambda\}=\bigcap_{i\in\Lambda}\mathrm{M}_i$,

ii) $(\mathrm{S[M]},\subseteq)$ tam kafestir.

Tanım 2.4.3. M ve N R-modüller olsun. $\phi:\mathrm{M}\to\mathrm{N}$ fonksiyonuna M'den N'ye bir modülhomomorfisi denir. $\Leftrightarrow$ $\forall p_1,p_2\in \mathrm{M}$ ve $r\in \mathrm{R}$ için $\phi(p_1+p_2)=\phi(p_1)+\phi(p_2)$ ve $\phi(r\cdot p_1)=r\cdot\phi(p_1)$.

Teorem 2.4.4.M_1 ve M_2 R-modüller, ϕ:M $\to$ N bir modülhomomorfisi ise Çek$\phi\in$ S[M_1] veRes$\phi\in$ S[M_2]dir.

Teorem 2.4.5. ϕ:$M_1 \rightarrow M_2$ bir modülhomomorfisi olsun. Bu takdirde;

i) $A \in S[M_1]$ ise $\phi(A) \in S[M_2]$,

ii) $B \in S[M_2]$ ise $\phi^{-1}(B) \in S[M_1]$.

Teorem 2.4.6. M, N ve K R-modüller olsun. $\phi : M \rightarrow N$, $\varphi : M \rightarrow N$, $\theta : N \rightarrow K$ R-modülhomomorfileri ise $\phi + \varphi : M \rightarrow N$, $\theta \circ \phi : M \rightarrow K$ R-modül homomorfileridir. Eğer R değişmeli halka ve $r \in R$ ise $r\phi : M \rightarrow N$ modülhomomorfisidir.

2.5. Bulanık Alt Kümeler

Bu kısımdaki Tanım ve Teoremler Kaufmann (1975) veMordeson (1998) den derlenmiştir.

Tanım 2.5.1.X bir küme olmak üzere μ:$X \rightarrow [0,1]$ fonksiyonuna X'inbulanık alt kümesi denir. X'in bütün bulanık alt kümeleri $[0,1]^X$ile gösterilir.

$\mu \in [0,1]^X$içinRes μ ={ μ (x)| $x \in X$} ve μ^*={$x \in X$| $0 < \mu(x)$ }

kümelerine sırasıyla μ 'nün görüntüsü ve desteği denir.

Eğer $1 \in \mu(X)$ ise μ 'ye X'in normal veya üniterbulanık alt kümesi denir. μ^* sonlu küme ise μ 'ye sonlu bulanık alt küme denir.

$\mu \in [0,1]^X$ ve $\alpha \in [0,1]$ ise $\{ x \in X \mid \alpha \le \mu(x)\}$ kümesine μ 'nün α -seviye alt kümesi denir ve μ_α ile gösterilir.

Tanım 2.5.2. $Y \subseteq X$ ve $a \in L$-{0} için $a_Y \in [0,1]^X$aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$a_Y(x) = \begin{cases} a, & x \in Y \\ 0, & x \notin Y \end{cases}$$

Özel olarak a=1 alınırsa 1_Y bulanık alt kümesine Y'nin karakteristik fonksiyonu denir. Bu durum χ_Y notasyonu ile gösterilir.

Tanım 2.5.3. $\mu,\nu \in [0,1]^X$olmak üzere $\forall x \in X$ için $\mu(x) \le \nu(x)$ ise ν 'ye μ 'yü kapsar denir ve $\mu \le \nu$ ile gösterilir.

Tanım 2.5.4. $\mu,\nu \in [0,1]^X$ ve $x \in X$ olsun.

$(\mu \vee \nu)(x) = \mu(x) \vee \nu(x)$

$(\mu \wedge \nu)(\mathrm{x}) = \mu(\mathrm{x}) \wedge \nu(\mathrm{x})$

ile tanımlanan bulanık alt kümelere sırasıyla μ ile ν'nün birleşimi ve kesişimi(arakesiti) denir.

Tanım 2.5.5. $\mu \in [0,1]^{\mathrm{X}}, \nu \in [0,1]^{\mathrm{X}}$ olsun. $\forall x \in \mathrm{X}$, $\forall y \in \mathrm{Y}$ için

$$\mu \times \nu(x, y) = \mu(x) \wedge \nu(y)$$

ile tanımlanan bulanık alt kümesine μ ve ν bulanık alt kümelerinin kartezyen çarpımı denir.

Tanım 2.5.6. $\{\mu_i : \mathrm{i} \in \mathrm{I}\} \subseteq [0,1]^{\mathrm{X}}$ ve $\mathrm{x} \in \mathrm{X}$ olsun.

$$(\bigvee_{i \in I} \mu_i)(\mathrm{x}) = \bigvee_{i \in I} \mu_i(\mathrm{x})$$

$$(\bigwedge_{i \in I} \mu_i)(\mathrm{x}) = \bigwedge_{i \in I} \mu_i(\mathrm{x})$$

ile tanımlanan bulanık alt kümelerine sırasıyla $\{\mu_i : \mathrm{i} \in \mathrm{I}\}$ bulanık alt kümeler ailesinin birleşimi ve kesişimi denir. I={1,2,….,n} ise $\bigvee_{i \in I} \mu_i$, $\bigwedge_{i \in I} \mu_i$ bulanık alt kümeleri sırasıyla;

$\bigvee_{i \in I} \mu_i = \mu_1 \vee \mu_2 \vee \mu_3 \ldots \vee \mu_n$ ve $\bigwedge_{i \in I} \mu_i = \mu_1 \wedge \mu_2 \wedge \mu_3 \ldots \wedge \mu_n$ notasyonları ile gösterilir.

3. ESNEK KÜMELER

Bu bölümde U ve E boştan farklı kümeler, $P(\mathrm{U})$ U 'nun güç kümesi, A$\subseteq$E (U,$\subseteq$) bir tam kafes olarak alınacaktır.

Tanım 3.1. F: A$\rightarrow$ $P(\mathrm{U})$ bir dönüşüm olmak üzere (F,A) ikilisine U üzerinde bir esnek küme denir. Burada A kümesine esnek kümenin parametre kümesi ve $\forall x \in$ A için F(x) kümesine de x-yaklaşımlı küme denir. Des(F,A) $=\{x \in$ A: F$(x) \neq \varnothing\}$ kümesine (F,A) esnek kümesinin desteği denir.

Des(F,A) $=\varnothing$ ise (F,A)'ya boş esnek küme denir. Bu durum Φ_{A} notasyonu ile gösterilir.

Eğer Des(F,A)$\neq \varnothing$ ise (F,A) kümesine boştan farklı esnek küme denir.

A$\neq \varnothing$ ve $\forall x \in$A için F(x)$\neq \emptyset$ ise (F,A)'ya güçlü esnek küme denir.

U kümesi üzerindeki bütün esnek kümeler ailesi için aşağıdaki kümeleri verebiliriz.

- Es(U)={ (F,A) | A$\subseteq$E, F: A$\rightarrow$ $P(\mathrm{U})$ }
- Es$_{\mathrm{A}}$(U) ={ (F,A) | F: A$\rightarrow$ $P(\mathrm{U})$ }
- Es($\underline{\mathrm{U}}$) ={ (F,A)∈Es(U) | (F,A) güçlü esnek küme}
- Es$_{\mathrm{A}}$($\underline{\mathrm{U}}$) ={ (F,A)∈Es$_{\mathrm{A}}$(U) | (F,A) güçlü esnek küme}.

Örnek3.1.Örneğin bir ev satın almak istiyoruz. (F,E) satın alırken göz önünde bulunduracağımız evlerin özelliklerini tanımlayan esnek küme,

U={ $h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6$ } belirli şartlar altında 6 adet ev, E={ e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 } parametreler ailesi, e_i (i =1,2,3,4,5) "pahalı", "güzel", "ağaçtan", "ucuz", "yeşil bahçeli" parametrelerini göstersin.

F:E $\rightarrow$ $P(\mathrm{U})$ dönüşümü için,

$\mathrm{F}(e_1)=\{h_2,h_4\}, \mathrm{F}(e_2)=\{h_1,h_3\}, \mathrm{F}(e_3)=\varnothing, \mathrm{F}(e_4)=\{h_1,h_3,h_5\}, \mathrm{F}(e_5)=\{h_1\}$ olsun. Bu takdirde,

(F,E)={(pahalı evler,$\{h_2,h_4\}$), (güzel evler, $\{h_1,h_3\}$), (ağaçtan evler,$\varnothing$), (ucuz evler, $\{h_1,h_3,h_5\}$), (yeşil bahçeli evler, $\{h_1\}$) şeklinde tanımlanır.

Örnekten de anlaşılacağı üzere bir kesin ve bir yaklaşık değerli küme olmak üzereher yaklaşım iki kısımdan oluşur.

Tanım 3.2. (F,A) U üzerinde boştan farklı bir esnek küme olsun.

i) (F,A)'ya sıfır esnek küme denir $\Leftrightarrow \forall x \in \mathrm{Des(F,A)}$ için F(x)={0},

ii) (F,A)'ya tam esnek küme denir $\Leftrightarrow \forall x \in \mathrm{Des(F,A)}$ için F(x)=U.

Tanım3.3. (F,A) ve (G,B) U üzerinde iki esnek küme olsun.

i) (F,A)'ya (G,B)'nin esnek alt kümesi denir ⇔A⊆B ve ∀x∈A için F(x)⊆G(x).Bu durum (F,A)⊆ (G,B) notasyonu ile gösterilir.

ii) (F,A)'ya (G,B)'nin daraltılmış esnek alt kümesi denir ⇔A⊆B ve ∀x∈A için G(x)⊆F(x). Bu durum (F,A)**ô** (G,B) notasyonu ile gösterilir.

Açık olarak " ⊆ " ve "**ô** " bağıntıları Es(U), $\mathrm{Es_A}$(U), Es(U̲), $\mathrm{Es_A}$(U̲) kümeleri üzerinde sıralama bağıntılarıdır.

Esnek küme kavramı ile ilgili aşağıdaki örnekleri verebiliriz.

Örnek 3.2.

1) $\mathrm{F{:}A} \rightarrow P(\mathrm{U})$ bir dönüşüm olmak üzere $\forall x \in \mathrm{A}$ için $\mathrm{F}(x) = \varnothing$ şeklinde tanımlanan (F,A) ikilisi bir esnek kümedir.

2) $f : \mathrm{A} \rightarrow \mathrm{U}$ bir fonksiyon ve $\mathrm{F{:}A} \rightarrow P(\mathrm{U})$, $\mathrm{F}(x) = \{f(x)\}$ şeklinde tanımlanan (F,A) ikilisi U üzerinde güçlü esnek kümedir.

3) (G,□) grup olsun.

$\mathrm{F{:}G} \rightarrow P(\mathrm{G})$ bir dönüşüm olmak üzere $\forall \mathrm{g} \in \mathrm{G}$ için F(g)=<g>=$\{\mathrm{g}^{\mathrm{n}} \mid \mathrm{n} \in$ □$\}$ şeklinde tanımlanan (F,G) ikilisi G üzerinde bir esnek kümedir.

4) μ X'in bir bulanık alt kümesi ve $\mathrm{F}_{\mu} : [0,1] \rightarrow P(\mathrm{X})$, $\mathrm{F}_{\mu}(\alpha)$=μ_{α} şeklinde tanımlanan (F_{μ}, [0,1]) ikilisi X üzerinde bir esnek kümedir. Bu esnek kümeye μ ile üretilen seviye esnek küme denir.

Tersine olarak (F, [0,1]) X üzerinde bir esnek küme ise $\mu_{\mathrm{F}} : \mathrm{X} \rightarrow [0,1]$, $\mu_{\mathrm{F}}(x) = \bigvee_{x \in \mathrm{F}(\alpha)} \alpha$ ile tanımlı X' in bir bulanık alt kümesi mevcuttur.

5) A ⊆ E, Y ⊆ U ve $\phi_{\mathrm{A,Y}}$:A → P(U) , $\phi_{\mathrm{A,Y}}(a)$=Y ile tanımlanan ($\phi_{\mathrm{A,Y}}$,A) ikilisi U üzerinde esnek kümedir.

6) $f : \mathrm{X} \rightarrow \mathrm{Y}$ bir fonksiyon ise $\mathrm{F} : \mathrm{Y} \rightarrow P(\mathrm{X})$ $\mathrm{F}(y) = f^{-1}(\{ y \})$ ile tanımlanan (F,Y) ikilisi X üzerinde esnek kümedir.

7) R, U üzerinde bir denklik bağıntısı ise $F:U \to P(U)$ $F(x)=[x]_R$ ile tanımlanan (F,U) ikilisi U üzerinde esnek kümedir.

8) (G,+) bir grup, $F:G \to P(G)$ $F(g)=<g>$ ile tanımlanan (F,G) ikilisi G üzerinde güçlü esnek kümedir.

9) (G,+) bir grup, $H \leq G$ ve $F:G \to P(G)$ $F(g)=g.H$ ile tanımlanan (F,G) ikilisi G üzerinde güçlü esnek kümedir.

10) R bir halka, $F:R \to P(R)$ $F(a)=\{a \cdot r \mid r \in R\}$ ile tanımlanan (F,R) ikilisi R üzerinde bir esnek kümedir.

11) M R-modül, $F:R \to P(M)$ $F(r)=\{r \cdot a \mid a \in M\}$ ile tanımlanan (F,R) ikilisi M üzerinde güçlü esnek kümedir.

12) M R-modül, $F:M \to P(M)$ $F(a)=\{r \cdot a \mid a \in M,\ r \in R\}$ ile tanımlanan (F,R) ikilisi M üzerinde güçlü esnek kümedir.

13) $\varphi : U_1 \to U_2$ bir fonksiyon ve (F,A), (G,B) sırasıyla U_1 ve U_2 üzerinde esnek kümeler olmak üzere;

$$\varphi(F) : A \to P(U_2),\ \varphi(F)(x) = \varphi(F(x))$$

$$\varphi^{-1}(G) : B \to P(U_1),\ \varphi^{-1}(G)(y) = \varphi^{-1}(G(y))$$

ile tanımlanan $(\varphi(F), A)$ ve $(\varphi^{-1}(G), B)$ ikilileri sırasıyla U_2 ve U_1 üzerinde esnek kümelerdir.

Önerme3.1. $\varphi : U_1 \to U_2$ bir fonksiyon, (F_1, A_1), (F_2, A_2) U_1 üzerinde ve (G_1, B_1), (G_2, B_2) U_2 üzerinde tanımlı esnek kümeler olsun. Bu takdirde;

i) $(F_1, A_1) \subseteq (F_2, A_2)$ ise $(\varphi(F_1), A_1) \subseteq (\varphi(F_2), A_2)$,

ii) (F_1, A_1) **ô** (F_2, A_2) ise $(\varphi(F_1), A_1)$ **ô** $(\varphi(F_2), A_2)$,

iii) $(G_1, B_1) \subseteq (G_2, B_2)$ ise $(\varphi^{-1}(G_1), B_1) \subseteq (\varphi^{-1}(G_2), B_2)$,

iv) (G_1, B_1) **ô** (G_2, B_2) ise $(\varphi^{-1}(G_1), B_1)$ **ô** $(\varphi^{-1}(G_2), B_2)$.

İspat:

i) Açıkça $(F_1, A_1) \subseteq (F_2, A_2)$ olduğundan $A_1 \subseteq A_2$ ve $\forall x \in A_1$ için $F_1(x) \subseteq F_2(x)$ dir. Üstelik $\varphi(F_1(x)) \subseteq \varphi(F_2(x))$ olur. Buradan $\varphi(F_1)(x) \subseteq \varphi(F_2)(x)$ dir. Yani ($\varphi(F_1), A_1) \subseteq (\varphi(F_2), A_2)$ elde edilir.

ii) i)'ye benzer şekilde yapılır.

iii) Açıkça $(\mathrm{G}_1,\mathrm{B}_1)\subseteq(\mathrm{G}_2,\mathrm{B}_2)$ olduğundan $\mathrm{B}_1\subseteq\mathrm{B}_2$ ve $\forall x\in\mathrm{B}_1$ için $\mathrm{G}_1(x)\subseteq\mathrm{G}_2(x)$ dir. Üstelik $\varphi^{-1}(\mathrm{G}_1(x))\subseteq\varphi^{-1}(\mathrm{G}_2(x))$ olur. Buradan $\varphi^{-1}(\mathrm{G}_1)(x)\subseteq\varphi^{-1}(\mathrm{G}_2)(x)$ dir. Yani $(\varphi^{-1}(\mathrm{G}_1),\mathrm{B}_1)\subseteq(\varphi^{-1}(\mathrm{G}_2),\mathrm{B}_2)$ elde edilir.

iv) iii)'ye benzer şekilde yapılır.

Tanım 3.4. $\{(\mathrm{F}_i,\mathrm{A}_i)\mid i\in\Lambda\}$ U üzerinde esnek kümelerin bir ailesi olsun.

i) $\mathrm{A}=\underset{i\in\Lambda}{\cup}\mathrm{A}_i$ ve $\forall a\in\mathrm{A}$ için, $\Lambda(a)=\{i\mid a\in\mathrm{A}_i\}$ olmak üzere $\mathrm{F}(a)=\underset{i\in\Lambda(a)}{\cup}\mathrm{F}_i(a)$ şeklinde tanımlanan (F,A) esnek kümesine $\{(\mathrm{F}_i,\mathrm{A}_i)\mid i\in\Lambda\}$ esnek kümeler ailesinin birleşimi denir. Bu durum $\bigcup_{i\in\Lambda}(\mathrm{F}_i,\mathrm{A}_i)$ notasyonu ile gösterilir.

ii) $\mathrm{A}=\underset{i\in\Lambda}{\cap}\mathrm{A}_i$ ve $\forall a\in\mathrm{A}$ için $\mathrm{F}(a)=\underset{i\in\Lambda}{\cap}\mathrm{F}_i(a)$ şeklinde tanımlanan (F,A) esnek kümesine $\{(\mathrm{F}_i,\mathrm{A}_i)\mid i\in\Lambda\}$ esnek kümeler ailesinin arakesiti denir. Bu durum $\bigcap_{i\in\Lambda}(\mathrm{F}_i,\mathrm{A}_i)$ notasyonu ile gösterilir.

iii) $\mathrm{A}=\underset{i\in\Lambda}{\cap}\mathrm{A}_i$ ve $\forall a\in\mathrm{A}$ için $\mathrm{F}(a)=\underset{i\in\Lambda}{\cup}\mathrm{F}_i(a)$ şeklinde tanımlanan (F,A) esnek kümesine $\{(\mathrm{F}_i,\mathrm{A}_i)\mid i\in\Lambda\}$ esnek kümeler ailesinin daraltılmış birleşimi denir. Bu durum $\underset{i\in\Lambda}{\text{ò}}(\mathrm{F}_i,\mathrm{A}_i)$ notasyonu ile gösterilir.

iv) $\mathrm{A}=\underset{i\in\Lambda}{\cup}\mathrm{A}_i$ ve $\forall a\in\mathrm{A}$ için, $\Lambda(a)=\{i\mid a\in\mathrm{A}_i\}$ olmak üzere $\mathrm{F}(a)=\underset{i\in\Lambda(a)}{\cap}\mathrm{F}_i(a)$ şeklinde tanımlanan (F,A) esnek kümesine $\{(\mathrm{F}_i,\mathrm{A}_i)\mid i\in\Lambda\}$ esnek kümeler ailesinin genişletilmiş arakesiti denir. Bu durum $\underset{i\in\Lambda}{\text{ó}}(\mathrm{F}_i,\mathrm{A}_i)$ notasyonu ile gösterilir.

v) $\mathrm{A}=\prod_{i\in\Lambda}\mathrm{A}_i$ ve $\forall(a_i)\in\mathrm{A}$ için $\mathrm{F}(a_i)=\underset{i\in\Lambda}{\cup}\mathrm{F}_i(a_i)$ şeklinde tanımlanan (F,A) esnek kümesine $\{(\mathrm{F}_i,\mathrm{A}_i)\mid i\in\Lambda\}$ esnek kümeler ailesinin $\vee$-birleşimi denir. Bu durum $\bigvee_{i\in\Lambda}(\mathrm{F}_i,\mathrm{A}_i)$ notasyonu ile gösterilir.

vi) $\mathrm{A}=\prod_{i\in\Lambda}\mathrm{A}_i$ ve $\forall(a_i)\in\mathrm{A}$ için $\mathrm{F}(a_i)=\underset{i\in\Lambda}{\cap}\mathrm{F}_i(a_i)$ şeklinde tanımlanan (F,A) esnek kümesine $\{(\mathrm{F}_i,\mathrm{A}_i)\mid i\in\Lambda\}$ esnek kümeler ailesinin $\wedge$-arakesiti denir. Bu durum $\bigwedge_{i\in\Lambda}(\mathrm{F}_i,\mathrm{A}_i)$ notasyonu ile gösterilir.

Tanım 3.5. $\{(F_i, A_i) \in Es(U_i) \mid i \in \Lambda\}$ esnek kümelerin bir ailesi olmak üzere, $A = \prod_{i\in\Lambda} A_i$ ve $\forall (a_i) \in A$ için $F(a_i) = \prod_{i\in\Lambda} F_i(a_i)$ şeklinde tanımlanan (F,A) esnek kümesine $\{(F_i, A_i) \mid i \in \Lambda\}$ esnek kümeler ailesinin kartezyen çarpımı denir. Bu durum $\times_{i\in\Lambda}(F_i, A_i)$ notasyonu ile gösterilir.

(F,A) ve (G,B) esnek kümeleri için **y**ukarıda verilen tanımlar sırasıyla aşağıdaki şekilde gösterilecektir:

(F,A) ve (G,B) esnek kümelerinin birleşimi: $(F, A) \bigcup (G, B)$

(F,A) ve (G,B) esnek kümelerinin arakesiti : $(F,A) \bigcap (G,B)$

(F,A) ve (G,B) esnek kümelerinin daraltılmış birleşimi: (F,A) ò (G,B)

(F,A) ve (G,B) esnek kümelerinin genişletilmiş arakesiti: (F, A) **ó** (G, B)

(F,A) ve (G,B) esnek kümelerinin $\wedge$-arakesiti: $(F,A) \wedge (G,B)$

(F,A) ve (G,B) esnek kümelerinin $\vee$-birleşimi: $(F, A) \vee (G, B)$

(F,A) ve (G,B) esnek kümelerinin kartezyen çarpımı: $(F,A) \times (G,B)$

Esnek kümelerin aileleri ile ilgili aşağıdaki özellikler geçerlidir.

Önerme3.2. $\{(F_i, A_i) \mid i \in \Lambda\} \subseteq Es(U)$ olsun. Bu takdirde;

i) $\mathrm{Des}(\bigcup_{i\in\Lambda}(F_i, A_i)) = \bigcup_{i\in\Lambda}\mathrm{Des}(F_i, A_i)$,

ii) $\mathrm{Des}(\bigcap_{i\in\Lambda}(F_i, A_i)) \subseteq \bigcap_{i\in\Lambda}\mathrm{Des}(F_i, A_i)$,

iii) Des(ò$_{i\in\Lambda}$ (F_i, A_i))= $\bigcup_{i\in\Lambda}\mathrm{Des}(F_i, A_i)$,

iv) Des(**ó**$_{i\in\Lambda}$ (F_i, A_i))$\subseteq \bigcap_{i\in\Lambda}\mathrm{Des}(F_i, A_i)$,

v) $\mathrm{Des}(\bigwedge_{i\in\Lambda}(F_i, A_i)) \subseteq \prod_{i\in\Lambda}\mathrm{Des}(F_i, A_i)$.

İspat:

i) $x \in \mathrm{Des}(\bigcup_{i\in\Lambda}(F_i, A_i))$ olsun. $x \in \bigcup_{i\in\Lambda} A_i$ için $\Lambda(x) = \{i \mid x \in A_i\}$ ve $i \in \Lambda(x)$ için $x \in F_i(x) \neq \varnothing$ dir $\Leftrightarrow \bigcup_{i\in\Lambda(\chi)} F_i(x) \neq \varnothing \Leftrightarrow x \in \bigcup_{i\in\Lambda}\mathrm{Des}(F_i, A_i)$ dir.

ii) $x \in \mathrm{Des}(\bigcap_{i\in\Lambda}(F_i, A_i))$ olsun. $x \in \bigcap_{i\in\Lambda} A_i$ için $F_i(x) \neq \varnothing$ dir. $\Rightarrow$

$\bigcap\limits_{i\in\Lambda}(\mathrm{F}_i(x) \neq \varnothing \Rightarrow \bigcap\limits_{i\in\Lambda}\mathrm{Des}(\mathrm{F}_i,\mathrm{A}_i))$ dir

iii) $x \in$ Des($\underset{i\in\Lambda}{\text{ò}}(\mathrm{F}_i,\mathrm{A}_i))$ olsun. $x \in \bigcap\limits_{i\in\Lambda}\mathrm{A}_i$ için $\mathrm{F}_i(x) \neq \varnothing \Leftrightarrow \bigcup\limits_{i\in\Lambda(x)} \mathrm{F}_i(x) \neq \varnothing$ dir. $\Leftrightarrow$

$x \in \bigcup\limits_{i\in\Lambda}\mathrm{Des}(\mathrm{F}_i,\mathrm{A}_i)$ dir.

iv) $x \in$ Des($\underset{i\in\Lambda}{\textbf{ó}}(\mathrm{F}_i,\mathrm{A}_i)$ olsun. $x \in \bigcup\limits_{i\in\Lambda}\mathrm{A}_i$ için $\Lambda(x) = \{i \mid x \in \mathrm{A}_i\}$ ve $i \in \Lambda(x)$ için

$\mathrm{F}_i(x) \neq \varnothing$ dir $\Rightarrow \bigcap\limits_{i\in\Lambda}(\mathrm{F}_i(x)) \neq \varnothing \Rightarrow \bigcap\limits_{i\in\Lambda}\mathrm{Des}(\mathrm{F}_i,\mathrm{A}_i))$ dir

v) $x \in \mathrm{Des}(\bigwedge\limits_{i\in\Lambda}(\mathrm{F}_i,\mathrm{A}_i))$ olsun. $x \in \prod\limits_{i\in\Lambda}\mathrm{A}_i$ için $\bigcap\limits_{i\in\Lambda}\mathrm{F}_i(a_i) \neq \varnothing$ dır. $\Rightarrow \mathrm{F}_i(x) \neq \varnothing$ dır.

$\Rightarrow x \in \prod\limits_{i\in\Lambda}\mathrm{Des}\left(\mathrm{F}_i,\mathrm{A}_i\right)$ dir.

Önerme3.3. $\{(\mathrm{F}_i,\mathrm{A}_i) \mid i \in \Lambda\} \subseteq$ Es(U), (F,B)$\in$ Es(U) ve (U, $\subseteq$) sonsuz $\vee$-dağılımlı kafes olsun. Bu takdirde;

i) $(\mathrm{F},\mathrm{B}) \cap \left(\bigcup\limits_{i\in\Lambda}(\mathrm{F}_i,\mathrm{A}_i)\right) = \bigcup\limits_{i\in\Lambda}\left((\mathrm{F},\mathrm{B}) \cap (\mathrm{F}_i,\mathrm{A}_i)\right)$,

ii) $(\mathrm{F},\mathrm{B}) \cup \left(\bigcap\limits_{i\in\Lambda}(\mathrm{F}_i,\mathrm{A}_i)\right) = \bigcap\limits_{i\in\Lambda}\left((\mathrm{F},\mathrm{B}) \cup (\mathrm{F}_i,\mathrm{A}_i)\right)$,

iii) $(\mathrm{F},\mathrm{B})\,\textbf{ó}\left(\underset{i\in\Lambda}{\text{ò}}(\mathrm{F}_i,\mathrm{A}_i)\right) = \underset{i\in\Lambda}{\text{ò}}\left((\mathrm{F},\mathrm{B})\,\textbf{ó}\,(\mathrm{F}_i,\mathrm{A}_i)\right)$,

iv) $(\mathrm{F},\mathrm{B}) \sqcup \left(\underset{i\in\Lambda}{\text{ó}}(\mathrm{F}_i,\mathrm{A}_i)\right) = \underset{i\in\Lambda}{\text{ó}}\left((\mathrm{F},\mathrm{B})\,\text{ò}\,(\mathrm{F}_i,\mathrm{A}_i)\right)$.

İspat:

i) $(\mathrm{F},\mathrm{B}) \cap \left(\bigcup\limits_{i\in\Lambda}(\mathrm{F}_i,\mathrm{A}_i)\right) = \left(\mathrm{K},\mathrm{B} \cap (\bigcup\limits_{i\in\Lambda}\mathrm{A}_i)\right)$ ve

$\bigcup\limits_{i\in\Lambda}\left((\mathrm{F},\mathrm{B}) \cap (\mathrm{F}_i,\mathrm{A}_i)\right) = \left(\mathrm{H}, \bigcup\limits_{i\in\Lambda}(\mathrm{B} \cap \mathrm{A}_i)\right)$ olsun.

$\Lambda(x) = \{i \mid x \in \mathrm{A}_i\}$, $\Lambda^{|}(x) = \{i \mid x \in \mathrm{B} \cap \mathrm{A}_i\}$ olmak üzere $x \in \mathrm{B} \cap (\bigcup\limits_{i\in\Lambda}\mathrm{A}_i) =$

$\bigcup\limits_{i\in\Lambda}(\mathrm{B} \cap \mathrm{A}_i)$ ise

$$\mathrm{K}(x) = \mathrm{F}(x) \cap (\bigcup_{i\in\Lambda(x)} \mathrm{F}_i(x))$$

$$= \bigcup_{i\in\Lambda(x)}(\mathrm{F}(x) \cap \mathrm{F}_i(x)) \quad \text{(U sonsuz } \vee\text{-dağılımlı kafes olduğundan)}$$

$= \bigcup_{i\in\Lambda'(x)} (\mathrm{F}(x)\cap \mathrm{F}_i(x)) \qquad (\Lambda(x)=\Lambda'(x)$ olduğundan)

$=\mathrm{H}(x)$ dir.

Yani $\mathrm{K}(x)=\mathrm{H}(x)$ olur. Buradan $\bigcup_{i\in\Lambda}\big((\mathrm{F},\mathrm{B})\cap(\mathrm{F}_i,\mathrm{A}_i)\big)=(\mathrm{F},\mathrm{B})\cap\left(\bigcup_{i\in\Lambda}(\mathrm{F}_i,\mathrm{A}_i)\right)$ dir.

ii) $\quad (\mathrm{F},\mathrm{B})\cup\left(\bigcap_{i\in\Lambda}(\mathrm{F}_i,\mathrm{A}_i)\right)=\left(\mathrm{K},\mathrm{B}\cup(\bigcap_{i\in\Lambda}\mathrm{A}_i)\right)$ ve

$\bigcap_{i\in\Lambda}\big((\mathrm{F},\mathrm{B})\cup(\mathrm{F}_i,\mathrm{A}_i)\big)=\left(\mathrm{H},\bigcap_{i\in\Lambda}(\mathrm{B}\cup\mathrm{A}_i)\right)$ olsun.

$x\in\mathrm{B}\cup(\bigcap_{i\in\Lambda}\mathrm{A}_i)=\bigcap_{i\in\Lambda}(\mathrm{B}\cup\mathrm{A}_i)$ olmak üzere

- Eğer $x\in\mathrm{B}\setminus\bigcap_{i\in\Lambda}\mathrm{A}_i$ ise $\mathrm{K}(x)=\mathrm{F}(x)$ dir. Ayrıca $x\notin\bigcap_{i\in\Lambda}\mathrm{A}_i$ olduğundan $\exists i\in\Lambda$ $x\notin\mathrm{A}_i$ ve $\Lambda'=\{\,j\mid x\in\mathrm{A}_j\,\}$ olmak üzere $\mathrm{H}(x)=[\bigcap_{i\in\Lambda'}(\mathrm{F}(x)\cup\mathrm{F}_i(x)\,]\wedge\mathrm{F}(x)=\mathrm{F}(x)$ dir. Yani $\mathrm{K}(x)=\mathrm{H}(x)$ olur.
- Eğer $x\in\bigcap_{i\in\Lambda}\mathrm{A}_i\setminus\mathrm{B}$ ise $\mathrm{K}(x)=\bigcap_{i\in\Lambda}\mathrm{F}_i(x)$ dir. Ayrıca $\forall i\in\Lambda$ için $x\in\mathrm{A}_i\setminus\mathrm{B}$ olduğundan $\mathrm{H}(x)=\bigcap_{i\in\Lambda}\mathrm{F}_i(x)$ dir. Yani $\mathrm{K}(x)=\mathrm{H}(x)$ olur.
- Eğer $x\in\mathrm{B}\cap(\bigcap_{i\in\Lambda}\mathrm{A}_i)$ ise $\mathrm{K}(x)=\mathrm{F}(x)\cap(\bigcap_{i\in\Lambda}\mathrm{F}_i(x))=\bigcap_{i\in\Lambda}(\mathrm{F}(x)\cap\mathrm{F}_i(x))=\mathrm{H}(x)$ olur.

Buradan $(\mathrm{F},\mathrm{B})\cup\left(\bigcap_{i\in\Lambda}(\mathrm{F}_i,\mathrm{A}_i)\right)=\bigcap_{i\in\Lambda}\big((\mathrm{F},\mathrm{B})\cup(\mathrm{F}_i,\mathrm{A}_i)\big)$ dir.

iii) i)'nin ispatına benzer şekilde yapılır.

iv) ii)'nin ispatına benzer şekilde yapılır.

Teorem3.1. $\{(\mathrm{F}_i,\mathrm{A}_i)\mid i\in\Lambda\}$ U üzerinde esnek kümelerin bir ailesi olsun. Bu takdirde aşağıdaki özelikler sağlanır.

i) (Es(U),⊆) tam kafestir ve

$\mathrm{Sup}\{(\mathrm{F}_i,\mathrm{A}_i)\mid i\in\Lambda\}=\bigcup_{i\in\Lambda}(\mathrm{F}_i,\mathrm{A}_i)$, $\mathrm{Inf}\{(\mathrm{F}_i,\mathrm{A}_i)\mid i\in\Lambda\}=\bigcap_{i\in\Lambda}(\mathrm{F}_i,\mathrm{A}_i)$,

ii) (Es(U),**ô**) tam kafestir ve

$\mathrm{Sup}\{(\mathrm{F}_i,\mathrm{A}_i)\mid i\in\Lambda\}=$ **ó**$_{i\in\Lambda}$ $(\mathrm{F}_i,\mathrm{A}_i)$, $\mathrm{Inf}\{(\mathrm{F}_i,\mathrm{A}_i)\mid i\in\Lambda\}=$ ò$_{i\in\Lambda}$ $(\mathrm{F}_i,\mathrm{A}_i)$,

iii) (Es(U),⊆) sonsuz ∨-dağılımlı kafestir,

iv) (Es(U),**ô**) sonsuz ∨-dağılımlı kafestir,

v) Es$_{\mathrm{A}}$(U) kümesinde ò$_{i\in\Lambda}$ $(\mathrm{F}_i,\mathrm{A}_i)=\bigcup_{i\in\Lambda}(\mathrm{F}_i,\mathrm{A}_i)$ ve **ó**$_{i\in\Lambda}$ $(\mathrm{F}_i,\mathrm{A}_i)=\bigcap_{i\in\Lambda}(\mathrm{F}_i,\mathrm{A}_i)$,

vi) Es$_{\mathrm{A}}$(U) kümesinde "⊆" ve "**ô** " birbirlerinin ters bağıntılarıdır.

İspat:

i) Açık olarak $j \in \Lambda$ için $(\mathrm{F}_j, \mathrm{A}_j) \subseteq \bigcup_{i\in\Lambda} (\mathrm{F}_i, \mathrm{A}_i)$ dir. Diğer yandan, (H,A) $\in$ Es(U) ve $\forall i \in \Lambda$ için $(\mathrm{F}_i, \mathrm{A}_i) \subseteq (\mathrm{H}, \mathrm{A})$ ise $\forall i \in \Lambda$ ve $x \in \mathrm{A}$ için $\mathrm{A}_i \subseteq \mathrm{A}$ ve $\mathrm{F}_i(x) \leq \mathrm{H}(x)$ dir. Böylece $\cup_{i\in\Lambda} \mathrm{A}_i \subseteq$ A ve $x \in \cup_{i\in\Lambda} \mathrm{A}_i$ için $\cup_{i\in\Lambda(x)} \mathrm{F}_i(x) \leq \mathrm{H}(x)$ yani $\bigcup_{i\in\Lambda} (\mathrm{F}_i, \mathrm{A}_i) \subseteq$ (H,A) olur. Buradan Sup{ $(\mathrm{F}_i, \mathrm{A}_i) \mid i \in \Lambda$ }= $\bigcup_{i\in\Lambda} (\mathrm{F}_i, \mathrm{A}_i)$ dir.

Açık olarak $j \in \Lambda$ için $\bigcap_{i\in\Lambda} (\mathrm{F}_i, \mathrm{A}_i) \subseteq (\mathrm{F}_j, \mathrm{A}_j)$ dir. Diğer yandan, (H,A)$\in$ Es(U) ve $\forall i \in \Lambda$ için $(\mathrm{H}, \mathrm{A}) \subseteq (\mathrm{F}_i, \mathrm{A}_i)$ ise $\forall i \in \Lambda$ ve $x \in \mathrm{A}$ için $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{A}_i$ ve dir. Böylece $\mathrm{A} \subseteq \cap_{i\in\Lambda} \mathrm{A}_i$ ve $x \in \mathrm{A}$ için $\mathrm{H}(x) \leq \cap_{i\in\Lambda} \mathrm{F}_i(x)$ yani (H,A) $\subseteq \bigcap_{i\in\Lambda} (\mathrm{F}_i, \mathrm{A}_i)$ olur. Buradan Inf{ $(\mathrm{F}_i, \mathrm{A}_i) \mid i \in \Lambda$ }= $\bigcap_{i\in\Lambda} (\mathrm{F}_i, \mathrm{A}_i)$ dir.

ii) Açık olarak $j \in \Lambda$ için $(\mathrm{F}_j, \mathrm{A}_j)$ **ô** $\underset{i\in\Lambda}{\textbf{ó}} (\mathrm{F}_i, \mathrm{A}_i)$ dir. Diğer yandan, (H,A) $\in$ Es(U) ve $\forall i \in \Lambda$ için $(\mathrm{F}_i, \mathrm{A}_i)$ **ô** (H, A) ise $\forall i \in \Lambda$ ve $x \in \mathrm{A}$ için $\mathrm{A}_i \subseteq \mathrm{A}$ ve $\mathrm{H}(x) \leq \mathrm{F}_i(x)$ dir. Böylece $\cap_{i\in\Lambda} \mathrm{A}_i \subseteq$ A ve $x \in \cap_{i\in\Lambda} \mathrm{A}_i$ için $\cap_{i\in\Lambda(x)} \mathrm{F}_i(x) \leq \mathrm{H}(x)$ yani $\underset{i\in\Lambda}{\textbf{ó}} (\mathrm{F}_i, \mathrm{A}_i)$ **ô** (H,A) olur. Buradan Sup{ $(\mathrm{F}_i, \mathrm{A}_i) \mid i \in \Lambda$ }= $\underset{i\in\Lambda}{\textbf{ó}} (\mathrm{F}_i, \mathrm{A}_i)$ dir.

Açık olarak $j \in \Lambda$ için $\underset{i\in\Lambda}{\textbf{ò}} (\mathrm{F}_i, \mathrm{A}_i) \subseteq (\mathrm{F}_j, \mathrm{A}_j)$ dir. Diğer yandan, (H,A)$\in$ Es(U) ve $\forall i \in \Lambda$ için (H, A) **ô** $(\mathrm{F}_i, \mathrm{A}_i)$ ise $\forall i \in \Lambda$ ve $x \in \mathrm{A}$ için $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{A}_i$ ve $\mathrm{F}_i(x) \leq \mathrm{H}(x)$ dir. Böylece $\mathrm{A} \subseteq \cup_{i\in\Lambda} \mathrm{A}_i$ ve $x \in \mathrm{A}$ için $\cap_{i\in\Lambda} \mathrm{F}_i(x) \leq \mathrm{H}(x)$ yani (H,A) $\subseteq \underset{i\in\Lambda}{\textbf{ò}} (\mathrm{F}_i, \mathrm{A}_i)$ olur.Buradan Inf{ $(\mathrm{F}_i, \mathrm{A}_i) \mid i \in \Lambda$ }= $\underset{i\in\Lambda}{\textbf{ò}} (\mathrm{F}_i, \mathrm{A}_i)$ dir.

iii) Önerme 3.3. i)'nin ispatı ile açıktır.

iv) Önerme 3.3. ii)'nin ispatı ile açıktır.

v) ve**vi)**'nin ispatları ve Tanım 3.4. ile açıktır.

Tanım3.6."+" P(U) kümesi üzerinde bir ikili işlem, (F,A) ve (G,B) U üzerinde esnek kümeler olmak üzere;

i) C=A$\cup$B ve $\forall c \in$C için

$$\mathrm{H}(c)=\begin{cases}\mathrm{F}(c), & c\in \mathrm{A}\setminus \mathrm{B}\\ \mathrm{G}(c), & c\in \mathrm{B}\setminus \mathrm{A}\\ \mathrm{F}(c)+\mathrm{G}(c), & c\in \mathrm{A}\cap \mathrm{B}\end{cases}$$

şeklinde tanımlanan (H,C) esnek kümesine (F,A) ve (G,B) esnek kümelerinin toplamı denir ve $(\mathrm{F},\mathrm{A})+_{\cup}(\mathrm{G},\mathrm{B})$ şeklinde gösterilir.

ii) C=A$\cap$B ve $\forall c\in$C için $\mathrm{H}(c)=\mathrm{F}(c)+\mathrm{G}(c)$ şeklinde tanımlanan (H,C) esnek kümesine (F,A) ve (G,B) esnek kümelerinin daraltılmış toplamı denir ve (F,A) $+_{\cap}$(G,B) şeklinde gösterilir.

iii) C=AxB ve $\forall(a,b)\in$C için $\mathrm{H}(a,b)=\mathrm{F}(a)+\mathrm{G}(b)$ şeklinde tanımlanan (H,C) esnek kümesine (F,A) ve (G,B) esnek kümelerinin kartezyen toplamı denir ve $(\mathrm{F,A})+_{\times}(\mathrm{G,B})$ şeklinde gösterilir.

Tanım3.7. (F,A) U_1 üzerinde, (G,B) U_2 üzerinde esnek kümeler ve $\phi:\mathrm{U}_1\to \mathrm{U}_2$, $\psi:\mathrm{A}\to \mathrm{B}$ fonksiyonlar olsun. Bu takdirde (ϕ,ψ) ikilisine (F,A) 'dan (G,B) 'ye esnek fonksiyon denir. $\Leftrightarrow$ $\forall x\in \mathrm{A}$ için $\phi(\mathrm{F}(x))=\mathrm{G}(\psi(x))$. Bu durum $(\phi,\psi):(\mathrm{F,A})\to(\mathrm{G,B})$ notasyonu ile gösterilir.

Bu tanımda, eğer ϕ ve ψ bire-bir (örten) bir dönüşüm ise (ϕ,ψ)'ye bire-bir (örten) esnek fonksiyon denir. (F,A) ve (G,B) arasındaki bire-bir ve örten esnek fonksiyona esnek tam eşleme denir. Bu durum (F,A)$\simeq$(G,B) notasyonu ile gösterilir.

Aşağıdaki önerme ile açık olarak " $\simeq$ " bağıntısı esnek kümeler üzerinde bir denklik bağıntısıdır.

Önerme3.4.(F,A), (G,B), (H,C) sırasıyla U_1, U_2 ve U_3 kümeleri üzerinde esnek kümeler ve $(\phi,\psi):(\mathrm{F,A})\to(\mathrm{G,B})$, $(\varphi,\gamma):(\mathrm{G,B})\to(\mathrm{H,C})$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki özellikler sağlanır.

i) $(\varphi\circ\phi,\gamma\circ\psi):(\mathrm{F,A})\to(\mathrm{H,C})$,

ii) (ϕ,ψ) esnek tam eşleme ise $(\phi^{-1},\psi^{-1}):(\mathrm{G,B})\to(\mathrm{F,A})$ esnek tam eşlemedir,

iii) $(\mathrm{I}_{\mathrm{U}_1},\mathrm{I}_{\mathrm{A}}):(\mathrm{F,A})\to(\mathrm{F,A})$ esnek tam eşlemedir.

İspat:

i) Açıkça $\forall x\in \mathrm{A}$ ve $\forall y\in \mathrm{B}$ için $\phi(\mathrm{F}(x))=\mathrm{G}(\psi(x))$ ve $\varphi(\mathrm{G}(y))=\mathrm{H}(\gamma(y))$ dir. Ayrıca $\varphi\circ\phi:\mathrm{U}_1\to \mathrm{U}_3$ ve $\gamma\circ\psi:\mathrm{A}\to \mathrm{C}$ olmak üzere $\forall x\in \mathrm{A}$ için $\varphi\circ\phi(\mathrm{F}(x))=$

$\varphi(\phi(\mathrm{F}(x))) = \mathrm{H}(\gamma(\psi(x))) = \mathrm{H}(\gamma \circ \psi(x))$ olur. Buradan $(\varphi \circ \phi, \gamma \circ \psi)$:(F,A)$\rightarrow$(H,C) dir.

ii) Açıkça $\forall x \in \mathrm{A}$ için ϕ (F(x)) =G($\psi(x)$) dir. Ayrıca $\phi^{-1}: \mathrm{U}_2 \rightarrow \mathrm{U}_1$ ve $\psi^{-1}: \mathrm{B} \rightarrow \mathrm{A}$ olmak üzere $\forall x \in \mathrm{B}$ için ϕ^{-1} (G(x))= ϕ^{-1} (ϕ (F($\psi^{-1}(x)$))=F($\psi^{-1}(x)$) dir. Yani (ϕ^{-1}, ψ^{-1}): (G,B)$\rightarrow$(F,A)dır. Üstelik ϕ^{-1} ve ψ^{-1} de bire-bir ve örten dönüşümlerdir. Buradan (ϕ^{-1}, ψ^{-1}) : (G,B) $\rightarrow$ (F,A) L-bulanık esnek tam eşlemedir.

iii) Tanım 3.7. ile açıktır.

Tanım3.8. (F,A) U_1 üzerinde, (G,B) U_2 üzerinde esnek kümeler ve (ϕ,ψ) : (F,A) $\rightarrow$ (G,B) olsun. Bu takdirde $\forall x \in \mathrm{A}, y \in \mathrm{B}$ için

$$\phi(\mathrm{F})(y) = \begin{cases} \bigcup_{\psi(x)=y} \phi(\mathrm{F}(x)), & y \in \mathrm{Im}\psi \\ \varnothing, & y \notin \mathrm{Im}\psi \end{cases}$$

ve

$$\phi^{-1}(\mathrm{G})(x) = \phi^{-1}(\mathrm{G}(\psi(x)))$$

ile tanımlanan $(\phi(\mathrm{F}),\mathrm{B})$ ve $(\phi^{-1}(\mathrm{G}),\mathrm{A})$ esnek kümelerine sırasıyla (F,A) ve (G,B)'nin (ϕ,ψ) esnek fonksiyonu altındaki resmi ve ters- resmi denir.

Bu durumlar sırasıyla (ϕ,ψ) (F,A)= $(\phi(\mathrm{F}),\mathrm{B})$ ve $(\phi,\psi)^{-1}(\mathrm{G},\mathrm{B}) = (\phi^{-1}(\mathrm{G}),\mathrm{A})$ şeklinde gösterilir.

Açık olarak (ϕ,ψ) (F,A)$\subseteq$(G,B) ve $(\phi,\psi)^{-1}$ (G,B)**ô** (F,A) dır.

3.1. Esnek Gruplar

Esnek grup kavramı ilk kez Aktaş ve Çağman (2007) tarafından ortaya konulmuştur. Aktaş yaptığı çalışmada esnek grup tanımını vererek esnek küme kavramını gruplar için vermiştir. Bu bölümde esnek grupların yapısı, temel özellikleri ve sonuçları arasındaki ilişkiler değerlendirilmiştir.

Bu bölüm boyunca, G bir grup olarak ele alınacaktır.

Tanım 3.1.1.(F,A) G grubu üzerinde boştan farklı bir esnek küme olsun. Eğer $\forall x \in$ Des(F,A) için F(x) G'nin bir alt grubu ise (F,A)'ya G grubu üzerinde esnek grup denir. G üzerindeki bütün esnek gruplar için aşağıdaki kümeleri verebiliriz.

- $\mathrm{Es_g}$(G)={ (F,A)| A⊆E, (F,A) G üzerinde esnek grup}

- $Es_g(\underline{G})$={ (F,A)| A⊆E, (F,A) G üzerinde güçlü esnek grup}
- $Es_{gA}(G)$={ (F,A)| (F,A) G üzerinde esnek grup}
- $Es_{gA}(\underline{G})$={ (F,A)| (F,A) G üzerinde güçlü esnek grup}

Tanım 3.1.2. (F,A) ve (H,B) sırasıyla G_1 ve G_2 üzerinde esnek kümeler ve (ϕ,ψ) :(F,A)$\rightarrow$(H,B) olsun. Eğer ϕ:$G_1\rightarrow G_2$gruphomomorfisi ise (ϕ,ψ)'ye esnek gruphomomorfisi denir. Eğer ϕ bir izomorfi, ψ bire-bir ve örten ise (ϕ,ψ)'ye esnek grupizomorfisi denir. Bu durum (F,A)$\cong_G$(H,B) şeklinde gösterilir.

Önerme 3.1.1. "$\cong_G$" bağıntısı esnek gruplar üzerinde bir denklik bağıntısıdır.

İspat:

i) (F,A)$\cong_G$(F,A) olduğu açıktır.

ii) (F,A)$\cong_G$(H,B) olsun. Bu takdirde $\exists f:\mathrm{G}\rightarrow\mathrm{K}$'ya izomorfisi ve $\exists\, g:\mathrm{A}\rightarrow\mathrm{B}$ 'yebire-bir, örten bir dönüşümü öyleki $f(\mathrm{F}(x))=\mathrm{H}(g(x))$'dir.

Buradan $f^{-1}:\mathrm{K}\rightarrow\mathrm{G}$ izomorfisi ve $g^{-1}:\mathrm{B}\rightarrow\mathrm{A}$ bir dönüşümü $\forall y\in\mathrm{B}$ için $f^{-1}(\mathrm{H}(y))=\mathrm{F}(g^{-1}(y))$ şeklindedir.Böylece (H,B)$\cong_G$ (F,A) olur.

iii)(F,A)$\cong_G$(H,B)$\cong_G$(P,C) olsun. Bu takdirde $\exists f:\mathrm{G}\rightarrow\mathrm{K}$, φ :K$\rightarrow$T izomorfileri, $\exists\, g:\mathrm{A}\rightarrow\mathrm{B}$, $h:\mathrm{B}\rightarrow\mathrm{C}$'ye bire-bir, örten dönüşümleri öyleki $\forall x\in\mathrm{A}, y\in\mathrm{B}$ için $f(\mathrm{F}(x))=\mathrm{H}(g(x))$ ve φ(H(y))=P($h(y)$)'dir. Buradan, $\varphi(\mathrm{H}(g(x)))=\varphi(f(\mathrm{F}(x)))=\mathrm{P}(h(g(x)))$ olur. Yani $\varphi\circ f(\mathrm{F}(x))=\mathrm{P}(h\circ g(x))$'dir. Böylece Tanım 3.1.1ile (F,A)$\cong_G$ (P,C) elde edilir.

Örnekler 3.1.1.

1) (G,□) bir grup, $\mathrm{K}\leq\mathrm{G}$ olsun. $\mathrm{H_K}:\mathrm{A}\rightarrow\mathrm{G}$ bir dönüşüm olmak üzere $\forall x\in\mathrm{A}$ için $\mathrm{H_K}(x)=\mathrm{K}$ ile tanımlanan $(\mathrm{H_K},\mathrm{A})$ ikilisi G üzerinde bir esnek gruptur.

2) $f:\mathrm{K}\rightarrow\mathrm{H}$ bir grup homomorfisi ve (F,K) H üzerinde bir esnek küme olsun. $\forall k\in\mathrm{K}$ için $\mathrm{F}(k)=<f(k)>$ şeklinde tanımlanan (F,K) ikilisi H üzerinde bir esnek gruptur.

3) (G,□) bir grup ve (H,G) G üzerinde bir esnek küme olsun. $\forall x\in\mathrm{G}$ için $\mathrm{H}(x)=<x>$ şeklinde tanımlanan (H,G) ikilisi G üzerinde bir esnek gruptur.

4) F: $S_3\rightarrow\wp(S_3)$,F(x) = { $<x>\in S_3$ | x Ry $\Leftrightarrow$ $y=x^n$, $n\in$□ } olmak üzere

F(e) ={e} ,

F(12)={e ,(12)} ,

F(13)={e ,(13)} ,

F(23)={e, (23)} ,

F(123)= F(132)={e ,(123),(132)}

ile tanımlanan (F,S_3) S_3 üzerinde bir esnek gruptur.

Teorem 3.1.1.$\{(\mathrm{F}_i,\mathrm{A}_i) \mid i\in\Lambda\}$ G üzerinde esnek grupların bir ailesi olsun. Bu takdirde;

i) $\bigcap_{i\in\Lambda}(\mathrm{F}_i,\mathrm{A}_i)$ boştan farklı esnek küme ise $\bigcap_{i\in\Lambda}(\mathrm{F}_i,\mathrm{A}_i)$ G üzerinde esnek gruptur,

ii) $\underset{i\in\Lambda}{\text{ó}}(\mathrm{F}_i,\mathrm{A}_i)$ boştan farklı esnek küme ise $\underset{i\in\Lambda}{\text{ó}}(\mathrm{F}_i,\mathrm{A}_i)$ G üzerinde esnek gruptur,

iii) Her $a\in\bigcup_{i\in\Lambda}\mathrm{A}_i$ için $\{\mathrm{F}_i(a) \mid i\in\Lambda(a)\}$ kümelerin bir zinciri ise $\bigcup_{i\in\Lambda}(\mathrm{F}_i,\mathrm{A}_i)$ G üzerinde esnek gruptur,

iv) $\underset{i\in\Lambda}{\text{ò}}(\mathrm{F}_i,\mathrm{A}_i)$ boştan farklı esnek küme ve $\forall a\in\bigcap_{i\in\Lambda}\mathrm{A}_i$ için $\{\mathrm{F}_i(a) \mid i\in\Lambda\}$ kümelerin bir zinciri ise $\underset{i\in\Lambda}{\text{ò}}(\mathrm{F}_i,\mathrm{A}_i)$ G üzerinde esnek gruptur,

v) Her i,j∈Λ, i≠j için $\mathrm{A}_i\cap\mathrm{A}_j=\varnothing$ ise $\bigcup_{i\in\Lambda}(\mathrm{F}_i,\mathrm{A}_i)$ G üzerinde esnek gruptur,

vi) $\bigwedge_{i\in\Lambda}(\mathrm{F}_i,\mathrm{A}_i)$ G üzerinde esnek gruptur,

vii) $\mathrm{A}=\prod_{i\in\Lambda}\mathrm{A}_i$ ve $\forall(a_i)_{i\in\Lambda}\in\mathrm{A}$ için $\{\mathrm{F}_i(a_i) \mid i\in\Lambda\}$ kümelerin bir zinciri ise $\bigvee_{i\in\Lambda}(\mathrm{F}_i,\mathrm{A}_i)$ G üzerinde esnek gruptur.

İspat:

i) $\bigcap_{i\in\Lambda}(\mathrm{F}_i,\mathrm{A}_i)=(\mathrm{F},\bigcap_{i\in\Lambda}\mathrm{A}_i)$ olsun. Her $a\in\bigcap_{i\in\Lambda}\mathrm{A}_i$ olmak üzere $\mathrm{F}_i(a)$ G'nin bir alt grubudur. Teorem 2.2.1 ile $\bigcap_{i\in\Lambda}\mathrm{F}_i(a)$ G'nin bir alt grubudur. Yani F(a) G'nin alt grubudur. Buradan $\bigcap_{i\in\Lambda}(\mathrm{F}_i,\mathrm{A}_i)$ G üzerinde esnek gruptur.

ii) $\underset{i\in\Lambda}{\text{ó}}(\mathrm{F}_i,\mathrm{A}_i)=(\mathrm{F},\bigcup_{i\in\Lambda}\mathrm{A}_i)$ olsun. $a\in\bigcup_{i\in\Lambda}\mathrm{A}_i$ olmak üzere $\Lambda(a)=\{i \mid a\in\mathrm{A}_i\}$ için

Teorem 2.2.1 ile $\underset{i\in\Lambda(a)}{\cap} \mathrm{F}_i(a)$ G'nin alt grubudur. Yani $\mathrm{F}(a)$ G'nin alt grubudur. Buradan $\underset{i\in\Lambda}{\text{ó}}(\mathrm{F}_i,\mathrm{A}_i)$ G üzerinde esnek gruptur.

iii) $\bigcup_{i\in\Lambda}(\mathrm{F}_i,\mathrm{A}_i)=(\mathrm{F},\underset{i\in\Lambda}{\cup}\mathrm{A}_i)$ olsun. $a\in\underset{i\in\Lambda}{\cup}\mathrm{A}_i$ ve $\Lambda(a)=\{i\mid a\in\mathrm{A}_i\}$ olmak üzere { $\mathrm{F}_i(a)\mid$ i∈ $\Lambda(a)$ } bir zincir olduğundan $\underset{i\in\Lambda(a)}{\cup} \mathrm{F}_i(a)$ G'nin alt grubudur. Yani $\mathrm{F}(a)$ G'nin alt grubudur. Buradan $\bigcup_{i\in\Lambda}(\mathrm{F}_i,\mathrm{A}_i)$ G üzerinde esnek gruptur.

iv) iii)'ye benzer şekilde yapılır.

v) $\bigcup_{i\in\Lambda}(\mathrm{F}_i,\mathrm{A}_i)=(\mathrm{F},\underset{i\in\Lambda}{\cup}\mathrm{A}_i)$ olsun. $a\in\underset{i\in\Lambda}{\cup}\mathrm{A}_i$ ise $\exists i\in\Lambda$ öyle ki $a\in\mathrm{A}_i$ dir. $\Lambda(a)=\{i\mid a\in\mathrm{A}_i\}$ olmak üzere $\mathrm{F}(a)=\mathrm{F}_i(a)$ ve $\mathrm{F}_i(a)$ G'nin alt grubu olduğundan $\mathrm{F}(a)$ G'nin alt grubudur. Buradan $\bigcup_{i\in\Lambda}(\mathrm{F}_i,\mathrm{A}_i)$ G üzerinde esnek gruptur.

vi) $\bigwedge_{i\in\Lambda}(\mathrm{F}_i,\mathrm{A}_i)=(\mathrm{F},\prod_{i\in\Lambda}\mathrm{A}_i)$ olsun. $\forall(a_i)\in\prod_{i\in\Lambda}\mathrm{A}_i$ için $\mathrm{F}_i(a_i)$ G'nin alt grubu olduğundan Teorem 2.2.1 ile $\underset{i\in\Lambda}{\cap}\mathrm{F}_i(a_i)$ G'nin alt grubudur. Yani $\forall(a_i)\in\prod_{i\in\Lambda}\mathrm{A}_i$ için $\mathrm{F}(a_i)$ G'nin alt grubudur. Buradan $\bigwedge_{i\in\Lambda}(\mathrm{F}_i,\mathrm{A}_i)$ G üzerinde esnek gruptur.

vii)iii)'ye benzer şekilde yapılır.

Teorem 3.3.1. ile aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.1.1.∅ ≠A⊆E olsun. Bu takdirde ($\mathrm{Es}_{\mathrm{gA}}(\underline{G})$, ⊆**)** tam kafestir.

Teorem 3.1.2. Her $i\in\Lambda$ için $(\mathrm{F}_i,\mathrm{A}_i)$ G_i üzerinde esnek gruplar olsun. Bu takdirde, $\underset{i\in\Lambda}{\times}(\mathrm{F}_i,\mathrm{A}_i)$ $\prod_{i\in\Lambda}\mathrm{G}_i$ üzerinde bir esnek gruptur.

İspat. $\underset{i\in\Lambda}{\times}(\mathrm{F}_i,\mathrm{A}_i)=(\mathrm{F},\prod_{i\in\Lambda}\mathrm{A}_i)$ olsun. $\forall(a_i)\in\prod_{i\in\Lambda}\mathrm{A}_i$ için $\mathrm{F}_i(a_i)$ G_i 'ninalt grubu olduğundan Teorem 2.2.2 ile $\prod_{i\in\Lambda}\mathrm{F}_i(a_i)$ $\prod_{i\in\Lambda}\mathrm{G}_i$ 'ninalt grubudur. Yani $\mathrm{F}(a_i)$ $\prod_{i\in\Lambda}\mathrm{G}_i$ 'ninalt grubudur. Buradan $\underset{i\in\Lambda}{\times}(\mathrm{F}_i,\mathrm{A}_i)$ $\prod_{i\in\Lambda}\mathrm{G}_i$ üzerindeesnek gruptur.

Tanım 3.1.3. (F,A) G üzerinde bir esnek küme olsun. Bu takdirde;

i) e, G'nin birim elemanı olmak üzere, ∀ x ϵ A için F(x)={e} ise (F,A) ya G üzerinde birim esnek grup denir.

ii) Her $x \in$ A için F(x)=G ise (F,A) ya G üzerinde tam esnek grup denir.

Teorem 3.1.3. (F,A) ve (H,B) sırasıyla G_1 ve G_2 üzerinde esnek gruplar ve (ϕ,ψ) :(F,A)$\rightarrow$(H,B) esnek gruphomomorfisi olsun.

i) ψ bire-bir ve örten ise $(\phi(\mathrm{F}),\mathrm{B})$ G_2 üzerinde esnek gruptur.

ii) $(\phi^{-1}(\mathrm{G}),\mathrm{A})$ boştan farklı esnek küme ise $(\phi^{-1}(\mathrm{G}),\mathrm{A})$ G_1 üzerinde esnek gruptur.

İspat:

i) $y \in \mathrm{B}$ olsun. ψ örten olduğundan $\exists x \in \mathrm{A}$ öyleki $\psi(x) = y$ 'dir. F(x) G_1'in alt grubu ve Teorem 2.2.4 i)ile $\phi(\mathrm{F}(x))$ G_2'nin alt grubudur. Ayrıca ψ bire-bir olduğundan $\forall y \in \mathrm{B}$ için $\phi(\mathrm{F})(y) = \phi(\mathrm{F}(x))$ G_2'nin alt grubudur. Buradan $(\phi(\mathrm{F}),\mathrm{B})$ G_2 üzerinde bir esnek gruptur.

ii) $\forall x \in \mathrm{A}$ için $\psi(x) \in \mathrm{B}$ ve (H,B) G_2 üzerinde esnek grup olduğundan $\mathrm{H}(\psi(x))$ G_2'nin alt grubudur. Ayrıca Teorem Teorem 2.2.4 ii)ile $\forall x \in \mathrm{A}$ için $\phi^{-1}(\mathrm{H}(\psi(x)))$ G_1'in alt grubudur. Buradan $(\phi^{-1}(\mathrm{G}),\mathrm{A})$ G_1 üzerinde esnek gruptur.

Sonuç 3.1.2. ϕ :$G_1 \rightarrow G_2$gruphomomorfisi, (F,A) ve (H,B) sırasıyla G_1 ve G_2 üzerinde esnek gruplar olsun.

i) Q:A$\rightarrow P(\mathrm{G}_2)$, Q(x)=ϕ(F(x)) ile tanımlanan (Q,A) esnek kümesi G_2 üzerinde bir esnek gruptur ve $(\phi, \mathrm{I}_\mathrm{A}) : (\mathrm{F,A}) \rightarrow (\mathrm{Q,A})$ esnek gruphomomorfisidir.

ii) ϕ örtenhomomorfi olmak üzere,R:B$\rightarrow P(\mathrm{G}_1)$, R(y)=ϕ^{-1}(G(y)) ile tanımlanan (R,B) esnek kümesi G_1 üzerinde bir esnek gruptur ve $(\phi, \mathrm{I}_\mathrm{B}) : (\mathrm{R,B}) \rightarrow$ (G,B) esnek grup homomorfisidir.

Teorem 3.1.4. (F,A) ve (H,B) sırasıyla G_1 ve G_2 üzerinde esnek kümeler, (F,A) G_1 üzerinde esnek grup olsun. Eğer $(\mathrm{F,A}) \cong_\mathrm{G} (\mathrm{H,B})$ ise (H,B)'de G_2 üzerinde esnek gruptur.

İspat: $(\mathrm{F,A}) \cong_\mathrm{G} (\mathrm{H,B})$ ise bir $(\phi,\psi) : (\mathrm{F,A}) \rightarrow (\mathrm{H,B})$ esnekgrup izomorfisi mevcuttur. $\psi : \mathrm{A} \rightarrow \mathrm{B}$ bire-bir ve örten bir dönüşüm olduğundan $\forall y \in \mathrm{B}$ için $\exists x \in \mathrm{A}$ öyle ki $\psi(x) = y$ ve $\phi(\mathrm{F}(x)) = \mathrm{H}(\psi(x)) = \mathrm{H}(y)$ dir. Teorem Teorem 2.2.4 i) ile $\phi(\mathrm{F}(x))$

G_2'nin alt grubudur. Yani $H(y)$ G_2'nin alt grubudur. Buradan (H,B) G_2 üzerinde esnek gruptur.

Önerme 3.1.2.(F,A), (H,B), (L,C) sırasıyla G_1, G_2 ve G_3 üzerinde esnek kümeler olsun. Eğer $(\phi,\psi):(F,A)\to(H,B)$ ve $(\varphi,\gamma):(H,B)\to(L,C)$ esnek gruphomomorfileri ise $(\varphi\circ\phi,\gamma\circ\psi):(F,A)\to(L,C)$ esnek gruphomomorfisidir.

İspat.Önerme 3.4. i) ile $(\varphi\circ\phi,\gamma\circ\psi):(F,A)\to(L,C)$ esnek fonksiyondur. Ayrıca $\phi:G_1\to G_2$ ve $\varphi:G_2\to G_3$ grup homomorfisi olduklarından $\varphi\circ\phi:G_1\to G_3$ de grup homomorfisidir. Buradan $(\varphi\circ\phi,\gamma\circ\psi):(F,A)\to(L,C)$ esnek grup homomorfisidir.

Örnek 3.1.2. $(\mathbb{Z},+)$ ve $(\mathbb{Z}_m,+)$ gruplarını göz önüne alalım.

$f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}_m$ homomorfisini $\forall k\in\mathbb{Z}$ için $f(k)=\overline{k}$ şeklinde, bir $g:\mathbb{Z}^+\to\mathbb{Z}_m$ dönüşümünü $\forall k\in\mathbb{Z}^+$ için $g(k)=\overline{k}$ olarak tanımlayalım.

$F:\mathbb{Z}^+\to P(\mathbb{Z})$ ve $F(x)=<5x>$;

$H:\mathbb{Z}_m\to P(\mathbb{Z}_m)$ ve $H(\overline{u})=<5\overline{u}>$ olsun.

Buradan $F(x)=5x\mathbb{Z}$ ve $H(u)=\{\overline{ku}:k\in 5\mathbb{Z}\}$ olarak elde ederiz.

Açık olarak görülür ki $(F,\mathbb{Z}^+)$ $\mathbb{Z}$ üzerinde, $(H,\mathbb{Z}_m)$ $\mathbb{Z}_m$ üzerinde esnek gruplardır. $f(F(x))=\{\overline{5xk}:k\in\mathbb{Z}\}$ ve $H(g(x))=\{\overline{xs}:s\in 5\mathbb{Z}\}$ olduğu için $f(F(x))=H(g(x))$ sonucu elde edilir. Buradan (f,g) esnek grup homomorfisidir.

Tanım 3.1.4. (F,A) ve (H,B) G üzerinde iki esnekgrup olsun. (F,A)'ya (H,B)'ninesnekalt grubu denir $\Leftrightarrow$

i) $A\subseteq B$

ii) $\forall x\in \mathrm{Des}(F,A)$ için $F(x)\leq H(x)$

Bu durum $(F,A)<(H,B)$ notasyonu ile gösterilir.

Örnek 3.1.3. $G=S_3$, $A=S_3$ ve $K=A_3$ olsun. Eğer $F(x)=\{y\in S_3:\ y=<x>\}$ ve $H(x)=\{y\in A_3:\ y\in\langle x\rangle\}$ ise (H,K)<(F,A) olduğu görülür.

Çünkü $A_3<S_3$ ve $\forall x\in A_3$ için $H(x)\leq F(x)$ dir.

Gruplar teorisinde mevcut olan bazı teoremlerin esnek alt gruplar için geçerli olduğunu aşağıdaki teoremlerle ifade edebiliriz.

Teorem 3.1.5. $(\mathrm{F,A})$ ve $(\mathrm{H,A})$ G üzerinde iki esnek grup olsun.

i) Eğer $\forall x \in \mathrm{A}$ için $\mathrm{F}(x) \subseteq \mathrm{H}(x)$ ise $(\mathrm{F,A})$, $(\mathrm{H,A})$ 'nınbir esnek alt grubudur.

ii) Eğer $(\mathrm{U,E})$, $(\mathrm{F,G})$ G üzerinde esnek gruplar ve $\mathrm{E} = \{e\}$ için $\mathrm{U}(e) \subseteq \mathrm{F}(e)$ ise $(\mathrm{U,E})$, $(\mathrm{F,G})$ 'ninbir esnek alt grubudur.

İspat. Tanım 3.1.4 ile ispatı açıktır.

Teorem 3.1.6. $(\mathrm{F,A})$ G üzerinde bir esnek grup ve $\{(\mathrm{H}_i, \mathrm{K}_i) \mid i \in I\}$ $(\mathrm{F,A})$ 'nınesnek alt gruplarının boştan farklı bir ailesi olsun. Bu takdirde aşağıdaki özellikler gerçeklenir.

i) $\bigcap_{i \in I}(\mathrm{H}_i, \mathrm{K}_i)$, $(\mathrm{F,A})$ 'nınbir esnek alt grubudur.

ii) $\bigwedge_{i \in I}(\mathrm{H}_i, \mathrm{K}_i)$, $\bigwedge_{i \in I}(\mathrm{F,A})$ 'nınbir esnek alt grubudur.

iii) Eğer $\forall i, j \in I$ için $\mathrm{K}_i \bigcap \mathrm{K}_j = \varnothing$ ise $\bigvee_{i \in I}(\mathrm{H}_i, \mathrm{K}_i)$, $\bigvee_{i \in I}(\mathrm{F,A})$ 'nınbir esnekalt grubudur.

İspat:

i) Açıkça $\bigcap_{i \in I} \mathrm{K}_i \subseteq \mathrm{A}$ dır. $\forall\ i \in I$ için $(\mathrm{H}_i, \mathrm{K}_i) < (\mathrm{F,A})$ olduğundan $\forall a_i \in \mathrm{K}_i$ için $\mathrm{H}_i(a_i) \leq \mathrm{F}(a_i)$ dir. Üstelik $\bigcap_{i \in I} \mathrm{H}_i(a_i) \leq \mathrm{F}(a_i)$ dir. Buradan $\bigcap_{i \in I}(\mathrm{H}_i, \mathrm{K}_i) < (\mathrm{F,\ A})$ olur. Yani $\bigcap_{i \in I}(\mathrm{H}_i, \mathrm{K}_i)$, (F,A)' nın esnek alt grubudur.

ii) Her $i \in I$ için $(\mathrm{H}_i, \mathrm{K}_i) < (\mathrm{F,A})$ olduğundan $\mathrm{K}_i \subseteq \mathrm{A}$ ve $\forall a_i \in \mathrm{K}_i$ için $\mathrm{H}_i(a_i) \leq \mathrm{F}(a_i)$ dir. Dolayısıyla $\prod_{i \in I} \mathrm{K}_i \subseteq \prod_{i \in I} \mathrm{A}$ ve $(a_i) \in \prod_{i \in I} \mathrm{K}_i$ için $\mathrm{H}_i(a_i) \leq \mathrm{F}(a_i)$ olur. Üstelik $\bigcap_{i \in I} \mathrm{H}_i(a_i) \leq \bigcap_{i \in I} \mathrm{F}(a_i)$ dır. Buradan $\bigwedge_{i \in I}(\mathrm{H}_i, \mathrm{K}_i) < \bigwedge_{i \in I}(\mathrm{F,A})$ olur. Yani $\bigwedge_{i \in I}(\mathrm{H}_i, \mathrm{K}_i)$, $\bigwedge_{i \in I}(\mathrm{F,A})$ 'nın bir esnek alt grubudur.

iii) ii)ye benzer şekilde yapılır.

Tanım 3.1.5. $(\mathrm{F,A})$ G üzerinde bir esnek grup ve $(\mathrm{H,B})$, $(\mathrm{F,A})$ 'nınbir esnek alt grubu olsun. Eğer $\forall x \in \mathrm{Des}(\mathrm{H,B})$ için $\mathrm{H}(x)$, $\mathrm{F}(x)$ 'in normal alt grubu ise $(\mathrm{H,B})$ 'ye

$(\mathrm{F,A})$ 'nınbir normal esnek alt grubu denir. Bu durum $(\mathrm{H,B}) \lhd (\mathrm{F,A})$ notasyonu ile gösterilir.

Teorem 3.1.7. $(\mathrm{F,A})$, G üzerinde bir esnek grup ve $\{(\mathrm{H}_i, \mathrm{K}_i) : i \in I\}$ $(\mathrm{F,A})$ 'nın normal esnek alt gruplarının bir ailesi olsun. Bu takdirde aşağıdaki özellikler gerçeklenir.

i) $\bigcap_{i \in I} (\mathrm{H}_i, \mathrm{K}_i)$, $(\mathrm{F,A})$ 'nınbir normal esnek alt grubudur.

ii) $\bigwedge_{i \in I} (\mathrm{H}_i, \mathrm{K}_i)$, $(\mathrm{F,A})$ 'nınbir normal esnek alt grubudur.

iii) Eğer $\forall i, j \in I$ için $\mathrm{K}_i \cap \mathrm{K}_j = \varnothing$ ise $\bigvee_{i \in I} (\mathrm{H}_i, \mathrm{K}_i)$, $(\mathrm{F,A})$ 'nınbir normal esnek alt grubudur.

İspat: Teorem 3.1.6.'nın ispatına benzer şekilde yapılır.

3.2. Esnek Halkalar ve İdealler

Esnek halka kavramı ilk kez Acar ve ark. (2010) tarafından ortaya konulmuştur. Bu bölümde esnek halkaların ve ideallerin yapısı, temel özellikleri ve sonuçları arasındaki ilişkiler değerlendirilmiştir.

Bu bölüm boyunca R bir halka olarak ele alınacaktır.

Tanım 3.2.1.(F,A) R halkası üzerinde boştan farklı bir esnek küme olsun. Eğer $\forall x \in$ Des(F,A) için F(x) R'nin bir alt halkası (ideali) ise (F,A)'ya R halkası üzerinde esnek halka (ideal) denir. Açık olarak R üzerinde her esnek ideal esnek halkadır. R üzerindeki bütün esnek halkalar ve idealler için aşağıdaki kümeleri verebiliriz.

- Es_r(R)={ (F,A)| A⊆E, (F,A) R üzerinde esnek halka}
- Es_i(R)={ (F,A)| A⊆E, (F,A) R üzerinde esnek ideal}
- Es_r($\underline{R}$)={ (F,A)| A⊆E, (F,A) R üzerinde güçlü esnek halka}
- Es_i($\underline{R}$)={ (F,A)| A⊆E, (F,A) R üzerinde güçlü esnek ideal}
- Es_{rA}(R)={ (F,A)| (F,A) R üzerinde esnek halka}
- Es_{iA}(R)={ (F,A)| (F,A) R üzerinde esnek ideal}
- Es_{rA}($\underline{R}$)={ (F,A)| (F,A) R üzerinde güçlü esnek halka}
- Es_{iA}($\underline{R}$)={ (F,A)| (F,A) R üzerinde güçlü esnek ideal}

Açık olarak sıfır ve tam esnek kümeler R üzerinde esnek ideallerdir.

Tanım 3.2.2.(F,A) ve (G,B) sırasıyla R_1 ve R_2 üzerinde esnek kümeler ve (ϕ,ψ) :(F,A)$\rightarrow$(G,B) olsun. Eğer $\phi:R_1 \rightarrow R_2$ halka homomorfisi ise (ϕ,ψ)'ye esnek halka homomorfisi denir. Eğer ϕ bir izomorfi, ψ bire-bir ve örten ise (ϕ,ψ)'ye esnek halka izomorfisi denir. Bu durum (F,A)$\cong_R$(G,B) şeklinde gösterilir. Açık olarak "$\cong_R$" bağıntısı esnek halkalar üzerinde bir denklik bağıntısıdır.

Önerme 3.2.1.R bir halka, $\varnothing \neq I \subseteq R$ ve $\varnothing \neq A \subseteq E$ olsun. Bu takdirde;

i) $(\phi_{A,I}, A)$ R üzerinde esnek halka (ideal) dır. $\Leftrightarrow$ I, R'nin bir alt halkası (ideali) dır.

ii) $(\phi_{A,R}, A)$ A parametreli en büyük esnek idealdir.

iii) $(\phi_{A,\{0\}}, A)$ A parametreli en küçük esnek idealdir.

İspat:

i) Açıkça $\forall a \in A$ için $\phi_{A,I}(a)$=I dır. Buradan $(\phi_{A,I}, A)$ R üzerinde esnek halka (ideal) ise I'nın R halkasının bir alt halkası (ideali) olduğu kolaylıkla görülür. Benzer şekilde I, R'nin bir alt halkası (ideali) ise $(\phi_{A,I}, A)$ R üzerinde esnek halka (ideal) dır.

ii) - iii) i) ile ispatları açıktır.

Örnek 3.2.1.

1) R bir halka ise $F{:}R \rightarrow P(R)$, $F(r) = \langle r \rangle$ ile tanımlanan (F,R) ikilisi R üzerinde esnek idealdir.

2) R birim elemanlı bir halka ise $F{:}R \rightarrow P(R)$, $F(x) = \{r \mid rx = xr\}$ ile tanımlanan (F,R) ikilisi R üzerinde esnek halkadır. Üstelik (F,R) R üzerinde esnek idealdir $\Leftrightarrow$ R bir değişmeli halkadır.

3) $M_n(\square)$, $\square$ üzerindeki bütün $n \times n$ tipindeki matrislerin kümesi ve $F{:}M_n(\square) \rightarrow P(M_n(\square))$ bir dönüşüm olsun. $F(X)=\{Y.X \mid Y \in M_n(\square)\}$ ile tanımlanan $(F, M_n(\square))$ ikilisi $M_n(\square)$ halkası üzerinde esnek halkadır, fakat esnek ideal değildir.

4) $F{:}\mathbf{Z}_6 \rightarrow P(\mathbf{Z}_6)$

$F(\bar{0})=F(\bar{2}) = F(\bar{4}) = \mathbf{Z}_6$, $F(\bar{1})=F(\bar{3})=F(\bar{5}) = \{\bar{0},\bar{2},\bar{4}\}$ ile tanımlanan $(F,\mathbf{Z}_6)$ esnek kümesi $\mathbf{Z}_6$ üzerinde bir esnek halkadır.

Teorem 3.2.1. $\{(F_i, A_i) \mid i \in \Lambda\}$ R üzerinde esnek halkaların (ideallerin) bir ailesi olsun. Bu takdirde;

i) $\bigcap\limits_{i\in\Lambda}(F_i, A_i)$ boştan farklı esnek küme ise $\bigcap\limits_{i\in\Lambda}(F_i, A_i)$ R üzerinde esnek halka (ideal) dır,

ii) $\underset{i\in\Lambda}{\textbf{ó}}(F_i, A_i)$ boştan farklı esnek küme ise $\underset{i\in\Lambda}{\textbf{ó}}(F_i, A_i)$ R üzerinde esnek halka (ideal) dır,

iii) Her $a \in \bigcup\limits_{i\in\Lambda} A_i$ için $\{F_i(a) \mid i \in \Lambda(a)\}$ kümelerin bir zinciri ise $\bigcup\limits_{i\in\Lambda}(F_i, A_i)$ R üzerinde esnek halka (ideal) dır,

iv) $\underset{i\in\Lambda}{\text{ò}}(F_i, A_i)$ boştan farklı esnek küme ve $\forall a \in \bigcap\limits_{i\in\Lambda} A_i$ için $\{F_i(a) \mid i \in \Lambda\}$ kümelerin bir zinciri ise $\underset{i\in\Lambda}{\text{ò}}(F_i, A_i)$ R üzerinde esnek halka (ideal) dır,

v) Her i,j$\in\Lambda$, i$\neq$j için $A_i \cap A_j = \varnothing$ ise $\bigcup\limits_{i\in\Lambda}(F_i, A_i)$ R üzerinde esnek halka (ideal) dır,

vi) $\bigwedge\limits_{i\in\Lambda}(F_i, A_i)$ R üzerinde esnek halka (ideal) dır,

vii) $A = \prod\limits_{i\in\Lambda} A_i$ ve $\forall (a_i)_{i\in\Lambda} \in A$ için $\{F_i(a_i) \mid i \in \Lambda\}$ kümelerin bir zinciri ise $\bigvee\limits_{i\in\Lambda}(F_i, A_i)$ R üzerinde esnek halka (ideal) dır.

İspat:

i) $\bigcap\limits_{i\in\Lambda}(F_i, A_i) = (F, \bigcap\limits_{i\in\Lambda} A_i)$ olsun. Her $a \in \bigcap\limits_{i\in\Lambda} A_i$ olmak üzere $F_i(a)$ R'nin bir alt halkası (ideali) dır. Teorem 2.3.3 ile $\bigcap\limits_{i\in\Lambda} F_i(a)$ R'nin bir alt halkası (ideali) dır. Yani $F(a)$ R'nin alt halkası (ideali) dır. Buradan $\bigcap\limits_{i\in\Lambda}(F_i, A_i)$ R üzerinde esnek halka(ideal) dır.

ii) $\underset{i\in\Lambda}{\textbf{ó}}(F_i, A_i) = (F, \bigcup\limits_{i\in\Lambda} A_i)$ olsun. $a \in \bigcup\limits_{i\in\Lambda} A_i$ olmak üzere $\Lambda(a) = \{i \mid a \in A_i\}$ için $\bigcap\limits_{i\in\Lambda(a)} F_i(a)$ R'nin alt halkası (ideali) dır. Yani $F(a)$ R'nin alt halkası (ideali) dır. Buradan $\underset{i\in\Lambda}{\textbf{ó}}(F_i, A_i)$ R üzerinde esnek halka(ideal) dır.

iii) $\bigcup_{i\in\Lambda}(\mathrm{F}_i,\mathrm{A}_i)=(\mathrm{F},\cup_{i\in\Lambda}\mathrm{A}_i)$ olsun. $a\in\cup_{i\in\Lambda}\mathrm{A}_i$ ve $\Lambda(a)=\{i\mid a\in \mathrm{A}_i\}$ olmak üzere $\{\mathrm{F}_i(a)\mid i\in\Lambda(a)\}$ bir zincir olduğundan $\cup_{i\in\Lambda(a)}\mathrm{F}_i(a)$ R 'nin alt halkası (ideali) dır. Yani $\mathrm{F}(a)$ R'nin alt halkası (ideali) dır. Buradan $\bigcup_{i\in\Lambda}(\mathrm{F}_i,\mathrm{A}_i)$ R üzerinde esnek halka (ideal) dır.

iv) iii)'ye benzer şekilde yapılır.

v) $\bigcup_{i\in\Lambda}(\mathrm{F}_i,\mathrm{A}_i)=(\mathrm{F},\cup_{i\in\Lambda}\mathrm{A}_i)$ olsun. $a\in\cup_{i\in\Lambda}\mathrm{A}_i$ ise $\exists i\in\Lambda$ öyle ki $a\in\mathrm{A}_i$ dir. $\Lambda(a)=\{i\mid a\in\mathrm{A}_i\}$ olmak üzere $\mathrm{F}(a)=\mathrm{F}_i(a)$ ve $\mathrm{F}_i(a)$ R'nin alt halkası (ideali) olduğundan $\mathrm{F}(a)$ R'nin alt halkası (ideali) dır. Buradan $\bigcup_{i\in\Lambda}(\mathrm{F}_i,\mathrm{A}_i)$ R üzerinde esnek halka(ideal) dır.

vi) $\bigwedge_{i\in\Lambda}(\mathrm{F}_i,\mathrm{A}_i)=(\mathrm{F},\prod_{i\in\Lambda}\mathrm{A}_i)$ olsun. $\forall(a_i)\in\prod_{i\in\Lambda}\mathrm{A}_i$ için $\mathrm{F}_i(a_i)$ R'nin alt halkası (ideali) olduğundan $\cap_{i\in\Lambda}\mathrm{F}_i(a_i)$ R'nin alt halkası (ideali) dır. Yani $\forall(a_i)\in\prod_{i\in\Lambda}\mathrm{A}_i$ için $\mathrm{F}(a_i)$ R'nin alt halkası (ideali) dır. Buradan $\bigwedge_{i\in\Lambda}(\mathrm{F}_i,\mathrm{A}_i)$ R üzerinde esnek halka(ideal) dır.

vii)iii)'ye benzer şekilde yapılır.

Örnek 3.2.2. R = $\mathbb{Z}$, A = 2$\mathbb{Z}$ ve B = 3$\mathbb{Z}$ olsun.
$\mathrm{F}(x)=\{2nx\mid n\in\mathbb{Z}\}$ ve $\mathrm{G}(x)=\{3nx\mid n\in\mathbb{Z}\}$ şeklinde tanımlı
$\mathrm{F}:\mathrm{A}\to P(\mathrm{R})$ ve $\mathrm{G}:\mathrm{B}\to P(\mathrm{R})$
küme değerli fonksiyonları dikkate alınsın. C=A$\cap$B=6$\mathbb{Z}$ olmak üzere;
(F,A)$\bigcap$(G,B)=(H,C) olsun. $\forall x\in$ C için H(x)=F(x)$\cap$G(x)=6$x\mathbb{Z}$, F(x)=2$x\mathbb{Z}$ ve G(x)=3$x\mathbb{Z}$ halkalarının alt halkalarıdır. Sonuç olarak (F,A)$\bigcap$(G,B), (F,A) ve (G,B) nin bir esnek alt halkasıdır.

Teorem ile aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.2.1. ∅ ≠A⊆E olsun. Bu takdirde;

i) ($\mathrm{Es}_{\mathrm{rA}}$(R), ⊆) tam kafestir,

ii) ($\mathrm{Es}_{\mathrm{iA}}$(R), ⊆) tam kafestir.

Teorem 3.2.2. Her $i \in \Lambda$ için $(\mathrm{F}_i, \mathrm{A}_i)$ R_i üzerinde esnek halkalar (idealler) olsun. Bu takdirde, $\underset{i\in\Lambda}{\times}(\mathrm{F}_i, \mathrm{A}_i)$ $\prod_{i\in\Lambda} \mathrm{R}_i$ üzerinde bir esnek halka (ideal) dır.

İspat: $\underset{i\in\Lambda}{\times}(\mathrm{F}_i, \mathrm{A}_i) = (\mathrm{F}, \prod_{i\in\Lambda} \mathrm{A}_i)$ olsun. $\forall (a_i) \in \prod_{i\in\Lambda} \mathrm{A}_i$ için $\mathrm{F}_i(a_i)$ R_i 'nin alt halkası (ideali) olduğundan Teorem 2.3.4 ile $\prod_{i\in\Lambda} \mathrm{F}_i(a_i)$ $\prod_{i\in\Lambda} \mathrm{R}_i$ 'nin alt halkası (ideali) dır. Yani $\mathrm{F}(a_i)$ $\prod_{i\in\Lambda} \mathrm{R}_i$ 'nin alt halkası (ideali) dır. Buradan $\underset{i\in\Lambda}{\times}(\mathrm{F}_i, \mathrm{A}_i)$ $\prod_{i\in\Lambda} \mathrm{R}_i$ üzerinde esnek halka (ideal) dır.

Tanım 3.2.3. (G,+) değişmeli bir grup ve $\{(\mathrm{F}_i, \mathrm{A}_i) \mid i \in \Lambda\}$ Güzerinde esnek kümelerin bir ailesi olsun.

i) $\mathrm{A} = \bigcup_{i\in\Lambda} \mathrm{A}_i$ ve $\forall a \in \mathrm{A}$ için, $\Lambda(a) = \{i \mid a \in \mathrm{A}_i\}$ olmak üzere $\mathrm{F}(a) = \sum_{i\in\Lambda(a)} \mathrm{F}_i(a)$ şeklinde tanımlanan (F,A) esnek kümesine $\{(\mathrm{F}_i, \mathrm{A}_i) \mid i \in \Lambda\}$ esnek kümeler ailesinin toplamı denir ve $\cup\sum_{i\in\Lambda} (\mathrm{F}_i, \mathrm{A}_i)$ notasyonu ile gösterilir.

ii) $\mathrm{A} = \bigcap_{i\in\Lambda} \mathrm{A}_i$ ve $\forall a \in \mathrm{A}$ için $\mathrm{F}(a) = \sum_{i\in\Lambda} \mathrm{F}_i(a)$ şeklinde tanımlanan (F,A) esnek kümesine $\{(\mathrm{F}_i, \mathrm{A}_i) \mid i \in \Lambda\}$ esnek kümeler ailesinin daraltılmış toplamı denir ve $\cap\sum_{i\in\Lambda} (\mathrm{F}_i, \mathrm{A}_i)$ notasyonu ile gösterilir.

iii) $\mathrm{A} = \prod_{i\in\Lambda} \mathrm{A}_i$ ve $\forall (a_i)_{i\in\Lambda} \in \mathrm{A}$ için $\mathrm{F}(a_i) = \sum_{i\in\Lambda} \mathrm{F}_i(a_i)$ şeklinde tanımlanan (F,A) esnek kümesine $\{(\mathrm{F}_i, \mathrm{A}_i) \mid i \in \Lambda\}$ esnek kümeler ailesinin kartezyen toplamı denir ve $\times\sum_{i\in\Lambda} (\mathrm{F}_i, \mathrm{A}_i)$ notasyonu ile gösterilir.

Teorem 3.2.3. $\{(\mathrm{F}_i, \mathrm{A}_i) \mid i \in \Lambda\}$ R üzerindeesnek ideallerin bir ailesi olsun. Bu takdirde;

i) $\cup\sum_{i\in\Lambda} (\mathrm{F}_i, \mathrm{A}_i)$ R üzerinde esnek idealdir,

ii) $\bigcap_{i\in\Lambda} \mathrm{A}_i \neq \varnothing$ ise $\cap\sum_{i\in\Lambda} (\mathrm{F}_i, \mathrm{A}_i)$ R üzerinde esnek idealdir,

iii) $\times\sum_{i\in\Lambda} (\mathrm{F}_i, \mathrm{A}_i)$ R üzerinde esnek idealdir.

İspat :

i) $\cup\sum\limits_{i\in\Lambda}(\mathrm{F}_i,\mathrm{A}_i)=(\mathrm{F},\underset{i\in\Lambda}{\cup}\mathrm{A}_i)$ olsun. $a\in\underset{i\in\Lambda}{\cup}\mathrm{A}_i$ olmak üzere $\Lambda(a)=\{i\mid a\in\mathrm{A}_i\}$ için $\mathrm{F}_i(a)$ R'nin idealidir. Teorem 2.3.2 ile $\sum\limits_{i\in\Lambda(a)}\mathrm{F}_i(a)$ R'nin idealidir. Yani $\mathrm{F}(a)$ R'nin idealidir. Buradan $\cup\sum\limits_{i\in\Lambda}(\mathrm{F}_i,\mathrm{A}_i)$ R üzerinde esnek idealdir.

ii) $\cap\sum\limits_{i\in\Lambda}(\mathrm{F}_i,\mathrm{A}_i)=(\mathrm{F},\underset{i\in\Lambda}{\cap}\mathrm{A}_i)$ olsun. $a\in\underset{i\in\Lambda}{\cap}\mathrm{A}_i$ için $\mathrm{F}_i(a)$ R'nin idealidir. Teorem 2.3.2 ile $\sum\limits_{i\in\Lambda(a)}\mathrm{F}_i(a)$ R'nin idealidir. Yani $\mathrm{F}(a)$ R'nin idealidir. Buradan $\cap\sum\limits_{i\in\Lambda}(\mathrm{F}_i,\mathrm{A}_i)$ R üzerinde esnek idealdir.

iii) i) ve ii)'ye benzer şekilde yapılır.

Teorem 3.2.4.(F,A), (G,B), (H,C) R üzerinde güçlü esnek idealler olsun. Bu takdirde;

i) $(\mathrm{F},\mathrm{A})\square_{\cup}(\mathrm{G},\mathrm{B})$ R üzerinde esnek idealdir,

ii) $\mathrm{A}\cap\mathrm{B}\neq\emptyset$ ise $(\mathrm{F},\mathrm{A})\square_{\cap}(\mathrm{G},\mathrm{B})$ R üzerinde esnek idealdir,

iii) $(\mathrm{F},\mathrm{A})\square_{\times}(\mathrm{G},\mathrm{B})$ R üzerinde esnek idealdir,

iv) "$\subseteq$" bağıntısına göre $\mathrm{Sup}\{(\mathrm{F},\mathrm{A}),(\mathrm{G},\mathrm{B})\}=(\mathrm{F},\mathrm{A})+_{\cup}(\mathrm{G},\mathrm{B})$,

v) $\mathrm{A}\cap\mathrm{B}\neq\emptyset$ ise "$\subseteq$" bağıntısına göre $\mathrm{Inf}\{(\mathrm{F},\mathrm{A}),(\mathrm{G},\mathrm{B})\}=(\mathrm{F},\mathrm{A})\bigcap(\mathrm{G},\mathrm{B})$,

vi) $\mathrm{A}\cap\mathrm{B}\neq\emptyset$ ise "$\sqsubseteq$" bağıntısına göre $\mathrm{Inf}\{(\mathrm{F},\mathrm{A}),(\mathrm{G},\mathrm{B})\}=(\mathrm{F},\mathrm{A})+_{\cap}(\mathrm{G},\mathrm{B})$,

vii) "$\sqsubseteq$" bağıntısına göre $\mathrm{Sup}\{(\mathrm{F},\mathrm{A}),(\mathrm{G},\mathrm{B})\}=(\mathrm{F},\mathrm{A})\,\text{ó}\,(\mathrm{G},\mathrm{B})$,

viii) $\mathrm{B}\cap\mathrm{C}\neq\emptyset$ ve $(\mathrm{F},\mathrm{A})\subseteq(\mathrm{G},\mathrm{B})$ ise

$$(\mathrm{F},\mathrm{A})+_{\cup}\left[(\mathrm{G},\mathrm{B})\cap(\mathrm{H},\mathrm{C})\right]=(\mathrm{G},\mathrm{B})\cap\left[(\mathrm{F},\mathrm{A})+_{\cup}(\mathrm{H},\mathrm{C})\right],$$

ix) $\mathrm{A}\cap\mathrm{C}\neq\emptyset$ ve $(\mathrm{F},\mathrm{A})\sqsubseteq(\mathrm{G},\mathrm{B})$ ise

$$(\mathrm{F},\mathrm{A})+_{\cap}\left[(\mathrm{G},\mathrm{B})\,\text{ó}\,(\mathrm{H},\mathrm{C})\right]=(\mathrm{G},\mathrm{B})\,\text{ó}\,\left[(\mathrm{F},\mathrm{A})+_{\cap}(\mathrm{H},\mathrm{C})\right].$$

İspat:

i) $(\mathrm{F},\mathrm{A})\square_{\cup}(\mathrm{G},\mathrm{B})=(\mathrm{K},\mathrm{A}\cup\mathrm{B})$ olsun. $c\in\mathrm{A}\cup\mathrm{B}$ olmak üzere; eğer $c\in\mathrm{A}\backslash\mathrm{B}$ veya $c\in\mathrm{B}\backslash\mathrm{A}$ ise $\mathrm{K}(c)$ R'nin idealidir. Eğer $c\in\mathrm{A}\cap\mathrm{B}$ ise $\mathrm{F}(c)\square\,\mathrm{G}(c)$ R'nin idealidir. Yani $\mathrm{K}(c)$ R'nin idealidir. Buradan $(\mathrm{F},\mathrm{A})\square_{\cup}(\mathrm{G},\mathrm{B})$ R üzerinde esnek idealdir.

ii) $(\mathrm{F},\mathrm{A})\square_{\cap}(\mathrm{G},\mathrm{B})=(\mathrm{K},\mathrm{A}\cap\mathrm{B})$ olsun. Açıkça $c\in\mathrm{A}\cap\mathrm{B}$ ise $\mathrm{F}(c)\square\,\mathrm{G}(c)$ R'nin idealidir. Yani $\mathrm{K}(c)$ R'nin idealidir. Buradan $(\mathrm{F},\mathrm{A})\square_{\cap}(\mathrm{G},\mathrm{B})$ R üzerinde esnek idealdir.

iii) $(\mathrm{F},\mathrm{A})\square_{\times}(\mathrm{G},\mathrm{B}) = (\mathrm{K},\mathrm{A}\times\mathrm{B})$ olsun. (F,A) ve (G,B) R üzerinde esnek idealler olduğundan $\forall(a,b)\in\mathrm{A}\times\mathrm{B}$ için $\mathrm{F}(a)\square\,\mathrm{G}(b)$ R'nin idealidir. Yani $\mathrm{K}(c)$ R'nin idealidir. Buradan $(\mathrm{F},\mathrm{A})\square_{\times}(\mathrm{G},\mathrm{B})$ R üzerinde esnek idealdir.

iv) Açık olarak $(\mathrm{F},\mathrm{A})\subseteq(\mathrm{F},\mathrm{A})+_{\cup}(\mathrm{G},\mathrm{B})$ ve $(\mathrm{G},\mathrm{B})\subseteq(\mathrm{F},\mathrm{A})+_{\cup}(\mathrm{G},\mathrm{B})$ dir. Diğer yandan $(\mathrm{H},\mathrm{C})\in\mathrm{Esi}(\mathrm{R})$ için $(\mathrm{F},\mathrm{A})\subseteq(\mathrm{H},\mathrm{C})$ ve $(\mathrm{G},\mathrm{B})\subseteq(\mathrm{H},\mathrm{C})$ ise $\mathrm{A}\subseteq\mathrm{C}$, $\mathrm{B}\subseteq\mathrm{C}$ ve $\mathrm{F}(x)\subseteq\mathrm{H}(x)$, $\mathrm{G}(x)\subseteq\mathrm{H}(x)$ dir. Böylece $\mathrm{A}\cup\mathrm{B}\subseteq\mathrm{C}$ ve $x\in\mathrm{A}\cup\mathrm{B}$ için $\mathrm{F}(x)+\mathrm{G}(x)\subseteq\mathrm{H}(x)$ olur. Buradan $(\mathrm{F},\mathrm{A})+_{\cup}(\mathrm{G},\mathrm{B})\subseteq(\mathrm{H},\mathrm{C})$ dir. Dolayısıyla $\mathrm{Sup}\{(\mathrm{F},\mathrm{A}),(\mathrm{G},\mathrm{B})\} = (\mathrm{F},\mathrm{A})+_{\cup}(\mathrm{G},\mathrm{B})$ olur.

v) iv) ye benzer şekilde yapılır.

vi) Açık olarak $(\mathrm{F},\mathrm{A})+_{\cap}(\mathrm{G},\mathrm{B})$ ô (F,A) ve $(\mathrm{F},\mathrm{A})+_{\cap}(\mathrm{G},\mathrm{B})$ ô (G,B) dir. Diğer yandan $(\mathrm{H},\mathrm{C})\in\mathrm{Esi}(\mathrm{R})$ için (H,C) ô (F,A) ve (H,C) ô (G,B) ise $\mathrm{C}\subseteq\mathrm{A}$, $\mathrm{C}\subseteq\mathrm{B}$ ve $\mathrm{F}(x)\subseteq\mathrm{H}(x)$, $\mathrm{G}(x)\subseteq\mathrm{H}(x)$ dir. Böylece $\mathrm{C}\subseteq\mathrm{A}\cap\mathrm{B}$ ve $x\in\mathrm{C}$ için $\mathrm{F}(x)+\mathrm{G}(x)\subseteq\mathrm{H}(x)$ olur. Buradan (H,C) ô $(\mathrm{F},\mathrm{A})+_{\cap}(\mathrm{G},\mathrm{B})$ dir. Dolayısıyla $\mathrm{Inf}\{(\mathrm{F},\mathrm{A}),(\mathrm{G},\mathrm{B})\} = (\mathrm{F},\mathrm{A})+_{\cap}(\mathrm{G},\mathrm{B})$ olur.

vii) vi) ye benzer şekilde yapılır.

viii) $(\mathrm{F},\mathrm{A})+_{\cup}\left[(\mathrm{G},\mathrm{B})\bigcap(\mathrm{H},\mathrm{C})\right] = (\mathrm{P},\mathrm{A}\cup(\mathrm{B}\cap\mathrm{C}))$ ve

$(\mathrm{G},\mathrm{B})\bigcap\left[(\mathrm{F},\mathrm{A})+_{\cup}(\mathrm{H},\mathrm{C})\right] = (\mathrm{Q},\ \mathrm{B}\cap(\mathrm{A}\cup\mathrm{C}))$ olsun.

Açıkça $\mathrm{A}\subseteq\mathrm{B}$ olduğundan $\mathrm{A}\cup(\mathrm{B}\cap\mathrm{C}) = \mathrm{B}\cap(\mathrm{A}\cup\mathrm{C})$ dir.

$x\in\mathrm{A}\cup(\mathrm{B}\cap\mathrm{C})$ olmak üzere;

□Eğer $x\in\mathrm{A}\backslash\mathrm{B}\cap\mathrm{C}$ ise $x\in\mathrm{A}\cap\mathrm{B}$ ve $x\in\mathrm{A}\backslash\mathrm{C}$ dir.

Buradan $\mathrm{P}(x)=\mathrm{F}(x)$ ve $\mathrm{Q}(x)=\mathrm{G}(x)\cap\mathrm{F}(x)=\mathrm{F}(x)$ yani $\mathrm{P}(x)=\mathrm{Q}(x)$ olur.

□□Eğer $x\in(\mathrm{B}\cap\mathrm{C})\backslash\mathrm{A}$ ise $x\in\mathrm{B}\backslash\mathrm{A}$ ve $x\in\mathrm{C}\backslash\mathrm{A}$ dır.

Buradan $\mathrm{P}(x)=\mathrm{G}(x)\cap\mathrm{H}(x)$ ve $\mathrm{Q}(x)=\mathrm{G}(x)\cap\mathrm{H}(x)$ yani $\mathrm{P}(x)=\mathrm{Q}(x)$ olur.

□□□Eğer $x\in\mathrm{A}\cap(\mathrm{B}\cap\mathrm{C})$ ise

$\mathrm{P}(x)=\mathrm{F}(x)+[\mathrm{G}(x)\cap\mathrm{H}(x)]$ ve $\mathrm{Q}(x)=\mathrm{G}(x)\cap[\mathrm{F}(x)+\mathrm{H}(x)]$ dir. Teorem ile $\mathrm{P}(x)=\mathrm{Q}(x)$ dir. Buradan $(\mathrm{F},\mathrm{A})+_{\cup}\left[(\mathrm{G},\mathrm{B})\bigcap(\mathrm{H},\mathrm{C})\right] = (\mathrm{G},\mathrm{B})\bigcap\left[(\mathrm{F},\mathrm{A})+_{\cup}(\mathrm{H},\mathrm{C})\right]$ olur.

ix) viii)'ye benzer şekilde yapılır.

Örnek 3.2.3. R=$\mathbb{Z}$, A=$\{2n \mid n\in\mathbb{Z}\}$ ve B=$\{3n \mid n\in\mathbb{Z}\}$ olsun.

R halkası üzerinde F:A$\to P(\mathbb{Z})$ ve G:B$\to P(\mathbb{Z})$ dönüşümleri $\forall k\in\mathbb{N}$ için

$$\mathrm{F}(x)=\begin{cases}\{0\} & , \ x=0\\ k\mathbb{Z} & , \ x\in 2^k\mathbb{Z}\setminus 2^{k+1}\mathbb{Z}\end{cases} \quad \text{ve}\ \mathrm{G}(x)=\begin{cases}\{0\} & , \ x=0\\ 2^k\mathbb{Z} & , \ x\in 2^k\mathbb{Z}\setminus 2^{k+1}\mathbb{Z}\end{cases}$$

şeklinde tanımlasınlar.

Açık olarak (F,A) ve (G,B) R halkası üzerinde esnek ideallerdir.

$(\mathrm{F},\mathrm{A})+_{\cup}(\mathrm{G},\mathrm{B})$=(H,A$\cup$B) olsun. $\forall x\in$A$\cup$B için

$$\mathrm{H}(x)=\begin{cases}\mathrm{F}(x) & ,2\mid x \text{ ve } 3\nmid x\\ \mathrm{G}(x) & ,3\mid x \text{ ve } 2\nmid x\\ \mathrm{F}(x)+\mathrm{G}(x) & ,6\mid x\end{cases}$$

$$=\begin{cases}k\mathbb{Z} & ,x\in 2^k\mathbb{Z}\setminus 2^{k+1}\mathbb{Z},\ k\geq 1,\ 3\nmid x\\ \mathbb{Z} & ,\ 2\nmid x \text{ ve } 3|x\\ k\mathbb{Z}+2^k\mathbb{Z} & ,x\in 2^k\mathbb{Z}\setminus 2^{k+1}\mathbb{Z},\ k\geq 1,\ 3\mid x\\ \{0\} & ,x=0\end{cases}$$

şeklindedir.

$(\mathrm{F},\mathrm{A})+_{\cap}(\mathrm{G},\mathrm{B})$=(K,A$\cap$B) olsun. $\forall x\in$A$\cap$B=$\{6n \mid n\in\mathbb{Z}\}$ için

$$\mathrm{K}(x)=\mathrm{F}(x)+\mathrm{G}(x)=\begin{cases}k\mathbb{Z}+2^k\mathbb{Z} & ,x\in 2^k\mathbb{Z}\setminus 2^{k+1}\mathbb{Z},\ k\geq 1,\ 3\mid x\\ \{0\} & ,x=0\end{cases}$$

şeklindedir.

Açıkça $(\mathrm{F},\mathrm{A})+_{\cup}(\mathrm{G},\mathrm{B})$ ve $(\mathrm{F},\mathrm{A})+_{\cap}(\mathrm{G},\mathrm{B})$ R üzerinde esnek ideallerdir.

$(\mathrm{F},\mathrm{A})\odot_{\cup}(\mathrm{G},\mathrm{B})$=(H,A$\cup$B) olsun. $\forall x\in$A$\cup$B için

$$\mathrm{H}(x)=\begin{cases}\mathrm{F}(x) & ,2\mid x \text{ ve } 3\nmid x\\ \mathrm{G}(x) & ,3\mid x \text{ ve } 2\nmid x\\ \mathrm{F}(x)\cdot\mathrm{G}(x) & ,6\mid x\end{cases}$$

$$=\begin{cases}k\mathbb{Z} & ,x\in 2^k\mathbb{Z}\setminus 2^{k+1}\mathbb{Z},\ k\geq 1,\ 3\nmid x\\ \mathbb{Z} & ,\ 2\nmid x \text{ ve } 3|x\\ k.2^k\mathbb{Z} & ,x\in 2^k\mathbb{Z}\setminus 2^{k+1}\mathbb{Z},\ k\geq 1,\ 3\mid x\\ \{0\} & ,x=0\end{cases}$$

şeklindedir.

$(\mathrm{F},\mathrm{A})\odot_{\cap}(\mathrm{G},\mathrm{B})$=(K,A$\cap$B) olsun. $\forall x\in$A$\cap$B=$\{6n \mid n\in\mathbb{Z}\}$ için

$$\mathrm{K}(x)=\mathrm{F}(x)\cap \mathrm{G}(x)=\begin{cases} k.2^k\mathbb{Z} & ,x\in 2^k\mathbb{Z}\setminus 2^{k+1}\mathbb{Z},\ k\geq 1,\ 3\mid x \\ \{0\} & ,x=0 \end{cases}$$

şeklindedir.

Açıkça $(\mathrm{F,A})+_{\cup}(\mathrm{G,B})$, $(\mathrm{F,A})+_{\cap}(\mathrm{G,B})$, $(\mathrm{F,A})\cdot_{\cup}(\mathrm{G,B})$ ve $(\mathrm{F,A})\cdot_{\cap}(\mathrm{G,B})$ R üzerinde esnek ideallerdir.

Teorem 3.2.5. (F,A) ve (G,B) sırasıyla R_1 ve R_2 üzerinde esnek kümeler ve (ϕ,ψ) :(F,A)$\to$(G,B) esnek halka homomorfisi olsun.

i) ψ bire-bir ve örten olmak üzere (F,A) R_1üzerinde esnek halka ise $(\phi(\mathrm{F}),\mathrm{B})$ R_2 üzerinde esnek halkadır.

ii) Eğer ϕ örten, ψ bire-bir ve (F,A) R_1üzerinde esnek ideal ise $(\phi(\mathrm{F}),\mathrm{B})$ R_2 üzerinde esnek idealdir.

iii) (G,B) R_2 üzerinde esnek halka (ideal) ve $(\phi^{-1}(\mathrm{G}),\mathrm{A})$ boştan farklı esnek küme ise $(\phi^{-1}(\mathrm{G}),\mathrm{A})$ R_1 üzerinde esnek halka (ideal) dır.

İspat.

i) $y\in\mathrm{B}$ olsun. ψ örten olduğundan $\exists x\in\mathrm{A}$ öyleki $\psi(x)=y$'dir. F(x) R_1'in alt halkası ve Teorem 2.3.6. i) ile $\phi(\mathrm{F}(x))$ R_2'nin alt halkasıdır. Ayrıca ψ bire-bir olduğundan $\phi(\mathrm{F})(y)=\phi(\mathrm{F}(x))$ R_2'nin alt halkasıdır. Buradan $(\phi(\mathrm{F}),\mathrm{B})$ R_2 üzerinde bir esnek halkadır.

ii) $y\in\mathrm{B}$ olsun. ϕ örten olduğundan $\exists x\in\mathrm{A}$ öyleki $\phi(x)=y$'dir. (F,A) R_1üzerinde esnek ideal olduğundan $\forall x\in\mathrm{A}$ için F(x) R_1'in idealidir.ve Teorem 2.3.6.ii) ile $\phi(\mathrm{F}(x))$ R_2'nin idealidir. Ayrıca ψ bire-bir olduğundan $\phi(\mathrm{F})(y)=\phi(\mathrm{F}(x))$ R_2'nin idealidir. Buradan $(\phi(\mathrm{F}),\mathrm{B})$ R_2 üzerinde bir esnek idealidir.

iii) $\forall x\in\mathrm{A}$ için $\psi(x)\in\mathrm{B}$ ve (G,B) R_2 üzerinde esnek halka (ideal) olduğundan G($\psi(x)$) R_2'nin alt halkası (ideali) dır. Ayrıca Teorem 2.3.6. iii) ve iv) ile $\forall x\in\mathrm{A}$ için $\phi^{-1}(\mathrm{G}(\psi(x)))$ R_1'in alt halkası (ideali) dır. Buradan $(\phi^{-1}(\mathrm{G}),\mathrm{A})$ R_1 üzerinde esnek halka (ideal) dır.

Sonuç 3.2.2. ϕ :$R_1\to R_2$ halka homomorfisi, (F,A) ve (G,B) sırasıyla R_1 ve R_2 üzerinde esnek halkalar olsun.

i) H:A $\rightarrow P(\mathrm{R}_2)$ H(x)=ϕ(F(x)) ile tanımlanan (H,A) esnek kümesi R_2 üzerinde bir esnek halkadır ve $(\phi, \mathrm{I_A}) : (\mathrm{F,A}) \rightarrow (\mathrm{H,A})$ esnek halka homomorfisidir.

ii) ϕ örtenhomomorfi olmak üzere,K:B $\rightarrow P(\mathrm{R}_1)$ K(y)=ϕ^{-1}(G(y)) ile tanımlanan (K,B) esnek kümesi R_1 üzerinde bir esnek halkadır ve $(\phi, \mathrm{I_B}) : (\mathrm{K,B}) \rightarrow$ (G,B) esnek halka homomorfisidir.

Teorem 3.2.6.(F,A) ve (G,B) sırasıyla R_1 ve R_2 üzerinde esnek kümeler, (F,A) R_1 üzerinde esnek halka (ideal) olsun. Eğer $(\mathrm{F,A}) \cong_{\mathrm{R}} (\mathrm{G,B})$ ise (G,B)'de R_2 üzerinde esnek halka (ideal) dır.

İspat: $(\mathrm{F,A}) \cong_{\mathrm{R}} (\mathrm{G,B})$ ise bir $(\phi,\psi) : (\mathrm{F,A}) \rightarrow (\mathrm{G,B})$ halka izomorfisi mevcuttur. $\psi : \mathrm{A} \rightarrow \mathrm{B}$ bire-bir ve örten bir dönüşüm olduğundan $\forall y \in \mathrm{B}$ için $\exists x \in \mathrm{A}$ öyle ki $\psi(x) = y$ ve $\phi(\mathrm{F}(x)) = \mathrm{G}(\psi(x)) = \mathrm{G}(y)$ dir. Teorem 2.3.6. ile $\phi(\mathrm{F}(x))$ R_2'nin alt halkası (ideali) dır. Yani $\mathrm{G}(y)$ R_2'nin alt halkası (ideali) dır. Buradan (G,B) R_2 üzerinde esnek halka (ideal) dır.

Önerme 3.2.2.(F,A), (G,B), (H,C) sırasıyla R_1, R_2 ve R_3 üzerinde esnek kümeler olsun. Eğer $(\phi,\psi) : (\mathrm{F,A}) \rightarrow (\mathrm{G,B})$ ve $(\varphi,\gamma) : (\mathrm{G,B}) \rightarrow (\mathrm{H,C})$ esnek halka homomorfileri ise $(\varphi \circ \phi, \gamma \circ \psi) : (\mathrm{F,A}) \rightarrow (\mathrm{H,C})$ esnek halka homomorfisidir.

İspat:Önerme 3.4. i) ile $(\varphi \circ \phi, \gamma \circ \psi) : (\mathrm{F,A}) \rightarrow (\mathrm{H,C})$ esnek fonksiyondur. Ayrıca $\phi : \mathrm{R}_1 \rightarrow \mathrm{R}_2$ ve $\varphi : \mathrm{R}_2 \rightarrow \mathrm{R}_3$ halka homomorfisi olduklarından Teorem 2.3.5. ii) ile $\varphi \circ \phi : \mathrm{R}_1 \rightarrow \mathrm{R}_3$ halka homomorfisidir. Buradan $(\varphi \circ \phi, \gamma \circ \psi) : (\mathrm{F,A}) \rightarrow (\mathrm{H,C})$ esnek halka homomorfisidir.

Tanım 3.2.4. (F,A) ve (G,B) R üzerinde iki esnek halka olsun. (F,A)'ya (G,B)'nin esnek alt halkası denir $\Leftrightarrow$

i) $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{B}$

ii) $\forall x \in$ Des(F,A) için $\mathrm{F}(x)$, $\mathrm{G}(x)$ in alt halkasıdır.

Bu durum $(\mathrm{F,A}) <_{\mathrm{R}} (\mathrm{G,B})$ notasyonu ile gösterilir.

Örnek 3.2.4. $R = A = 2\mathbb{Z}$ ve $B = 6\mathbb{Z} \subseteq A$ olsun. $F(x)=\{nx \mid n\in\mathbb{Z}\}$ ve $G(x)=\{5nx \mid n\in\mathbb{Z}\}$ şeklinde tanımlı

$F: A \to P(R)$ ve $G: B \to P(R)$

küme değerli fonksiyonları dikkate alınsın. Kolayca görülür ki $\forall x \in B$ için $G(x)=5x\mathbb{Z}$, $F(x)=x\mathbb{Z}$ in althalkasıdır. Böylece (G,B),(F,A) nın esnekalt halkasıdır.

Teorem 3.2.7. (F,A) R üzerinde bir esnek halka ve $\{(H_i, K_i) \mid i\in I\}$ (F,A) 'nın esnek alt halkalarının boştan farklı bir ailesi olsun. Bu takdirde aşağıdaki özellikler gerçeklenir.

iv) $\bigcap_{i\in I}(H_i, K_i)$, (F,A) 'nın bir esnek alt halkasıdır,

v) $\bigwedge_{i\in I}(H_i, K_i)$, $\bigwedge_{i\in I}$ (F,A) 'nın bir esnek alt halkasıdır,

vi) Eğer $\forall i, j\in I$ için $K_i \cap K_j = \varnothing$ ise $\bigvee_{i\in I}(H_i, K_i)$, $\bigvee_{i\in I}$(F,A) 'nın bir esnek alt halkasıdır.

İspat.

i) Açıkça $\bigcap_{i\in I} K_i \subseteq A$ dır. $\forall\ i\in I$ için $(H_i, K_i) <_R$ (F,A) olduğundan $\forall a_i \in K_i$ için $H_i(a_i)$, $F(a_i)$ 'nin alt halkasıdır. Üstelik $\bigcap_{i\in I} H_i(a_i)$, $F(a_i)$ 'nin alt halkasıdır. Yani $\bigcap_{i\in I}(H_i, K_i) <_R (F, A)$ olur. Buradan $\bigcap_{i\in I}(H_i, K_i)$, (F,A)' nın esnek alt halkasıdır.

ii) Her $i\in I$ için $(H_i, K_i) <_R$ (F,A) olduğundan $K_i \subseteq A$ ve $\forall a_i \in K_i$ için $H_i(a_i)$, $F(a_i)$ 'nin alt halkasıdır. Dolayısıyla $\prod_{i\in I} K_i \subseteq \prod_{i\in I} A$ ve $(a_i) \in \prod_{i\in I} K_i$ için $H_i(a_i)$, $F(a_i)$ 'nin alt halkası olur. Üstelik $\bigcap_{i\in I} H_i(a_i)$, $\bigcap_{i\in I} F(a_i)$ 'nin alt halkasıdır. Buradan $\bigwedge_{i\in I}(H_i, K_i) <_R \bigwedge_{i\in I}$ (F,A) dır. Yani $\bigwedge_{i\in I}(H_i, K_i)$, $\bigwedge_{i\in I}$ (F,A) 'nın esnek alt halkasıdır.

iii) ii)ye benzer şekilde yapılır.

3.3. Esnek Modüller

Esnek modül kavramı ilk kez Sun ve ark. (2008) tarafından ele alınmıştır. Bu bölümde esnek modüllerin yapısı, temel özellikleri ve sonuçları arasındaki ilişkiler değerlendirilmiştir.

Bu bölüm boyunca M bir R-modül olarak alınacaktır.

Tanım 3.3.1.(F,A) M üzerinde bir esnek küme olsun. Eğer $\forall x \in$Des(F,A) için F(x) $\in$ S[M] ise (F,A)'ya M üzerinde esnek modül denir. Açık olarak M üzerindeki sıfır ve tam esnek kümeler esnek modüllerdir. M üzerindeki bütün esnek modüller için aşağıdaki kümeleri verebiliriz.

- Esm[M]={ (F,A)| A⊆E, (F,A) M üzerinde esnek modül}
- Esm[<u>M</u>]={ (F,A)| A⊆E, (F,A) M üzerinde güçlü esnek modül}
- Esm_A[M]={ (F,A)| (F,A) M üzerinde esnek modül}
- Esm_A[<u>M</u>]={ (F,A)| (F,A) M üzerinde güçlü esnek modül}

Tanım 3.3.2.(F,A) ve (G,B) sırasıyla M_1 ve M_2 üzerinde esnek kümeler ve(ϕ,ψ): (F,A$\rightarrow$(G,B) olsun. Eğerϕ:$M_1 \rightarrow M_2$modülhomomorfisi ise (ϕ,ψ)'ye esnek modül homomorfisi denir. Eğer ϕ bir izomorfi,ψ bire-bir ve örten ise (ϕ,ψ)'ye esnek modülizomorfisi denir. Bu durum (F,A)$\cong_M$(G,B) şeklinde gösterilir. Açık olarak "$\cong_M$" bağıntısı esnek modüllerin kümesi üzerinde bir denklik bağıntısıdır.

Örnek 3.3.1.

1) M bir modül ve N, M'nin bir alt modülü ise ($\phi_{A,N}$,A) esnek kümesi M üzerinde bir esnek modüldür.

2) F:$\mathbb{Z} \rightarrow P(\mathbb{Z})$, $F(n) = 2n\mathbb{Z}$ ile tanımlı (F,$\mathbb{Z}$) ikilisi $\mathbb{Z}$ üzerindebir esnek modüldür.

Teorem 3.3.1.$\{(F_i, A_i) \mid i \in \Lambda\}$ M üzerinde esnek modüllerin bir ailesi olsun. Bu takdirde;

i) $\bigcap_{i\in\Lambda}(F_i, A_i)$ boştan farklı esnek küme ise $\bigcap_{i\in\Lambda}(F_i, A_i)$ M üzerinde esnek modüldür,

ii) $\underset{i\in\Lambda}{\text{ó}}(F_i, A_i)$ boştan farklı esnek küme ise $\underset{i\in\Lambda}{\text{ó}}(F_i, A_i)$ M üzerinde esnek modüldür,

iii) Her $a \in \bigcup_{i\in\Lambda} A_i$ için $\{F_i(a) \mid i \in \Lambda(a)\}$ kümelerin bir zinciri ise $\bigcup_{i\in\Lambda}(F_i, A_i)$ M üzerinde esnek modüldür,

iv) $\mathop{\text{ò}}\limits_{i\in\Lambda}(\mathrm{F}_i,\mathrm{A}_i)$ boştan farklı esnek küme ve $\forall a\in\bigcap\limits_{i\in\Lambda}\mathrm{A}_i$ için $\{\,\mathrm{F}_i(a)\mid\ i\in\Lambda\,\}$ kümelerin bir zinciri ise $\mathop{\text{ò}}\limits_{i\in\Lambda}(\mathrm{F}_i,\mathrm{A}_i)$ M üzerinde esnek modüldür,

v) Her i,j$\in\Lambda$, i$\neq$j için $\mathrm{A}_i\cap\mathrm{A}_j=\varnothing$ ise $\bigcup\limits_{i\in\Lambda}(\mathrm{F}_i,\mathrm{A}_i)$ M üzerinde esnek modüldür,

vi) $\bigwedge\limits_{i\in\Lambda}(\mathrm{F}_i,\mathrm{A}_i)$ M üzerinde esnek modüldür,

vii) $\mathrm{A}=\prod\limits_{i\in\Lambda}\mathrm{A}_i$ ve $\forall(a_i)\in\mathrm{A}$ için $\{\,\mathrm{F}_i(a_i)\mid i\in\Lambda\,\}$ kümelerin bir zinciri ise $\bigvee\limits_{i\in\Lambda}(\mathrm{F}_i,\mathrm{A}_i)$ M üzerinde esnek modüldür.

İspat:

i) $\bigcap\limits_{i\in\Lambda}(\mathrm{F}_i,\mathrm{A}_i)=(\mathrm{F},\bigcap\limits_{i\in\Lambda}\mathrm{A}_i)$ olsun. Her $a\in\bigcap\limits_{i\in\Lambda}\mathrm{A}_i$ olmak üzere $\mathrm{F}_i(a)$ M'nin bir alt modülüdür. Teorem 2.4.2 i) ile $\bigcap\limits_{i\in\Lambda}\mathrm{F}_i(a)$ M'nin bir alt modülüdür. Yani $\mathrm{F}(a)$ M'nin alt modülüdür. Buradan $\bigcap\limits_{i\in\Lambda}(\mathrm{F}_i,\mathrm{A}_i)$ M üzerinde esnek modüldür.

ii) $\mathop{\text{ó}}\limits_{i\in\Lambda}(\mathrm{F}_i,\mathrm{A}_i)=(\mathrm{F},\bigcup\limits_{i\in\Lambda}\mathrm{A}_i)$ olsun. $a\in\bigcup\limits_{i\in\Lambda}\mathrm{A}_i$ olmak üzere $\Lambda(a)=\{i\mid a\in\mathrm{A}_i\}$ için $\bigcap\limits_{i\in\Lambda(a)}\mathrm{F}_i(a)$ M'nin alt modülüdür. Yani $\mathrm{F}(a)$ M'nin alt modülüdür. Buradan $\mathop{\text{ó}}\limits_{i\in\Lambda}(\mathrm{F}_i,\mathrm{A}_i)$ M üzerinde esnek modüldür.

iii) $\bigcup\limits_{i\in\Lambda}(\mathrm{F}_i,\mathrm{A}_i)=(\mathrm{F},\bigcup\limits_{i\in\Lambda}\mathrm{A}_i)$ olsun. $a\in\bigcup\limits_{i\in\Lambda}\mathrm{A}_i$ ve $\Lambda(a)=\{i\mid a\in\mathrm{A}_i\}$ olmak üzere $\{\,\mathrm{F}_i(a)\mid i\in\Lambda(a)\,\}$ bir zincir olduğundan $\bigcup\limits_{i\in\Lambda(a)}\mathrm{F}_i(a)$ M'nin nin alt modülüdür. Yani $\mathrm{F}(a)$ M'nin alt modülüdür. Buradan $\bigcup\limits_{i\in\Lambda}(\mathrm{F}_i,\mathrm{A}_i)$ M üzerinde esnek modüldür.

iv) iii)'ye benzer şekilde yapılır.

v) $\bigcup\limits_{i\in\Lambda}(\mathrm{F}_i,\mathrm{A}_i)=(\mathrm{F},\bigcup\limits_{i\in\Lambda}\mathrm{A}_i)$ olsun. $a\in\bigcup\limits_{i\in\Lambda}\mathrm{A}_i$ ise $\exists i\in\Lambda$ öyle ki $a\in\mathrm{A}_i$ dir. $\Lambda(a)=\{i\mid a\in\mathrm{A}_i\}$ olmak üzere $\mathrm{F}(a)=\mathrm{F}_i(a)$ ve $\mathrm{F}_i(a)$ M'nin alt modülü olduğundan $\mathrm{F}(a)$ M'nin alt modülüdür. Buradan $\bigcup\limits_{i\in\Lambda}(\mathrm{F}_i,\mathrm{A}_i)$ M üzerinde esnek modüldür.

vi) $\bigwedge_{i\in\Lambda}(\mathrm{F}_i,\mathrm{A}_i)=(\mathrm{F},\prod_{i\in\Lambda}\mathrm{A}_i)$ olsun. $\forall(a_i)\in\prod_{i\in\Lambda}\mathrm{A}_i$ için $\mathrm{F}_i(a_i)$ M'nin alt modülü olduğundan Teorem 2.4.2. ile $\bigcap_{i\in\Lambda}\mathrm{F}_i(a_i)$ M'nin alt modülüdür. Yani $\forall(a_i)\in\prod_{i\in\Lambda}\mathrm{A}_i$ için $\mathrm{F}(a_i)$ M'nin alt modülüdür. Buradan $\bigwedge_{i\in\Lambda}(\mathrm{F}_i,\mathrm{A}_i)$ M üzerinde esnek modüldür.

vii)iii)'ye benzer şekilde yapılır.

Teorem 3.3.1. ile aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.3.1. ∅ ≠A⊆E olsun. Bu takdirde (Esm$_{\mathrm{A}}$[M], ⊆**)** tam kafestir.

Teorem 3.3.2. $\{(\mathrm{F}_i,\mathrm{A}_i)\mid i\in\Lambda\}$ M üzerinde esnek modüllerin bir ailesi olsun. Bu takdirde $\times_{i\in\Lambda}(\mathrm{F}_i,\mathrm{A}_i)$ $\prod_{i\in\Lambda}\mathrm{M}_i$ üzerinde bir esnek modüldür.

İspat: $\times_{i\in\Lambda}(\mathrm{F}_i,\mathrm{A}_i)=(\mathrm{F},\prod_{i\in\Lambda}\mathrm{A}_i)$ olsun. $\forall(a_i)\in\prod_{i\in\Lambda}\mathrm{A}_i$ için $\mathrm{F}_i(a_i)$ M_i'nin alt modülü olduğundan Teorem 2.4.2. ii) ile $\prod_{i\in\Lambda}\mathrm{F}_i(a_i)$ $\prod_{i\in\Lambda}\mathrm{M}_i$'nin alt modülüdür. Yani $\mathrm{F}(a_i)$ $\prod_{i\in\Lambda}\mathrm{M}_i$'nin alt modülüdür. Buradan $\times_{i\in\Lambda}(\mathrm{F}_i,\mathrm{A}_i)$ $\prod_{i\in\Lambda}\mathrm{M}_i$ üzerinde esnek modüldür.

Teorem 3.3.3. $\{(\mathrm{F}_i,\mathrm{A}_i)\mid i\in\Lambda\}$ M üzerinde esnek alt modüllerin bir ailesi olsun. Bu takdirde;

i) $\cup\sum_{i\in\Lambda}(\mathrm{F}_i,\mathrm{A}_i)$ M üzerinde esnek modüldür,

ii) $\bigcap_{i\in\Lambda}\mathrm{A}_i\neq\varnothing$ ise $\cap\sum_{i\in\Lambda}(\mathrm{F}_i,\mathrm{A}_i)$ M üzerinde esnek modüldür,

iii) $\times\sum_{i\in\Lambda}(\mathrm{F}_i,\mathrm{A}_i)$ M üzerinde esnek modüldür.

İspat:

i) $\cup\sum_{i\in\Lambda}(\mathrm{F}_i,\mathrm{A}_i)=(\mathrm{F},\bigcup_{i\in\Lambda}\mathrm{A}_i)$ olsun. $a\in\bigcup_{i\in\Lambda}\mathrm{A}_i$ olmak üzere $\Lambda(a)=\{i\mid a\in\mathrm{A}_i\}$ için $\mathrm{F}_i(a)$ M'nin alt modülüdür. Teorem 2.4.3. ile $\sum_{i\in\Lambda(a)}\mathrm{F}_i(a)$ M'nin alt modülüdür. Yani $\mathrm{F}(a)$ M'nin alt modülüdür. Buradan $\cup\sum_{i\in\Lambda}(\mathrm{F}_i,\mathrm{A}_i)$ M üzerinde esnek modüldür.

ii) $\cap\sum_{i\in\Lambda}(\mathrm{F}_i,\mathrm{A}_i)=(\mathrm{F},\bigcap_{i\in\Lambda}\mathrm{A}_i)$ olsun. $a\in\bigcap_{i\in\Lambda}\mathrm{A}_i$ için $\mathrm{F}_i(a)$ M'nin alt modülüdür. Teorem

2.4.3. ile $\sum_{i\in\Lambda(a)} \mathrm{F}_i(a)$ M'nin alt modülüdür. Yani $\mathrm{F}(a)$ M'nin alt modülüdür. Buradan $\cap\sum_{i\in\Lambda}(\mathrm{F}_i,\mathrm{A}_i)$ R üzerinde esnek modüldür.

iii) i) ve ii)'ye benzer şekilde yapılır.

Teorem 3.3.4.(F,A) ve (G,B) sırasıyla M_1 ve M_2 üzerinde esnek modüller ve (ϕ,ψ) :(F,A)$\rightarrow$(G,B) esnek modülhomomorfisi olsun.

i) ψ bire-bir ise $(\phi(\mathrm{F}),\mathrm{B})$ M_2 üzerinde esnek modüldür.

ii) $(\phi^{-1}(\mathrm{G}),\mathrm{A})$ boştan farklı esnek küme ise $(\phi^{-1}(\mathrm{G}),\mathrm{A})$ M_1 üzerinde esnek modüldür.

İspat.

i) $y\in\mathrm{B}$ olsun. ψ örten olduğundan $\exists x\in\mathrm{A}$ öyleki $\psi(x)=y$'dir. F(x) M_1'in alt modülü ve Teorem 2.4.5. i) ile $\phi(\mathrm{F}(x))$ M_2'nin alt modülüdür. Ayrıca ψ bire-bir olduğundan $\forall y\in\mathrm{B}$ için $\phi(\mathrm{F})(y)=\phi(\mathrm{F}(x))$ M_2'nin alt modülüdür. Buradan $(\phi(\mathrm{F}),\mathrm{B})$ M_2 üzerinde bir esnek modüldür.

ii) $\forall x\in\mathrm{A}$ için $\psi(x)\in\mathrm{B}$ ve (H,B) M_2 üzerinde esnek modül olduğundan H($\psi(x)$) M_2'nin alt modülüdür. Ayrıca Teorem Teorem 2.4.5. ii) ile $\forall x\in\mathrm{A}$ için $\phi^{-1}(\mathrm{H}(\psi(x)))$ M_1'in alt modülüdür. Buradan $(\phi^{-1}(\mathrm{G}),\mathrm{A})$ M_1 üzerinde esnek modüldür.

Sonuç 3.3.2.ϕ:$M_1\rightarrow M_2$modülhomomorfisi, (F,A) ve (G,B) sırasıyla M_1 ve M_2 üzerinde esnek modüller olsun.

i) H:A$\rightarrow P(\mathrm{M}_2)$ H(x)=ϕ(F(x)) ile tanımlanan (H,A) kümesi M_2 üzerinde bir esnek modüldür ve $(\phi,\mathrm{I}_\mathrm{A})$: (F,A)$\rightarrow$(H,A) esnek modülhomomorfisidir.

ii) ϕ örten ise K:B$\rightarrow P(\mathrm{M}_1)$ K(y)=ϕ^{-1}(G(y)) ile tanımlanan (K,B) kümesi M_1 üzerinde bir esnek modüldür ve $(\phi,\mathrm{I}_\mathrm{B})$: (K,B)$\rightarrow$(G,B) esnek modülhomomorfisidir.

Önerme 3.3.1.(F,A), (G,B), (H,C) sırasıyla M_1, M_2 ve M_3 üzerinde esnek kümeler olsun. Eğer (ϕ,ψ) : (F,A) $\rightarrow$ (G,B) ve (φ,γ) : (G,B) $\rightarrow$ (H,C) esnek modülhomomorfileri ise $(\varphi\circ\phi,\gamma\circ\psi)$: (F,A) $\rightarrow$ (H,C) esnek modül homomorfisidir.

İspat: Önerme 3.4. i) ile $(\varphi \circ \phi, \gamma \circ \psi):(\mathrm{F,A}) \to (\mathrm{H,C})$ esnek fonksiyondur. Ayrıca $\phi : \mathrm{M}_1 \to \mathrm{M}_2$ ve $\varphi : \mathrm{M}_2 \to \mathrm{M}_3$ modül homomorfisi olduklarından Teorem 2.4.6. ile $\varphi \circ \phi : \mathrm{M}_1 \to \mathrm{M}_3$ modül homomorfisidir. Buradan $(\varphi \circ \phi, \gamma \circ \psi):(\mathrm{F,A}) \to (\mathrm{H,C})$ esnek modül homomorfisidir.

Tanım 3.3.3. $(\mathrm{F,A})$ ve $(\mathrm{G,B})$ M üzerinde iki esnek modül olsun. $(\mathrm{F,A})$'ya $(\mathrm{G,B})$'nin esnek alt modülü denir $\Leftrightarrow$

i) $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{B}$

ii) $\forall x \in$ Des(F,A) için $\mathrm{F}(x)$, $\mathrm{G}(x)$ in alt modülüdür.

Bu durum $(\mathrm{F,A}) <_{\mathrm{M}} (\mathrm{G,B})$ notasyonu ile gösterilir.

Tanım 3.3.4. $r \in \mathrm{R}$ ve (F,A) M üzerinde bir esnek küme olmak üzere $\forall a \in \mathrm{A}$ için G(a)= $r\,\mathrm{F}(a)$ ile tanımlı (G,A) esnek kümesine (F,A) esnek kümesinin r ile çarpımı denir ve (rF, A) ile gösterilir. Açık olarak R değişmeli bir halka ve (F,A) esnek modül ise (rF, A) esnek modüldür ve (rF, A)$\subseteq$(F,A)dır.

Önerme 3.3.2. (F,A) ve (G,B) sırasıyla M_1 ve M_2 üzerinde esnek kümeler, $(\phi, \psi):(\mathrm{F,A}) \to (\mathrm{G,B})$ esnek modül homomorfisi ve $r \in \mathrm{R}$ olsun. Bu takdirde $(r\phi, \psi):(\mathrm{F,A}) \to$ (r G,B) esnek modül homomorfisidir.

İspat: Tanım 3.3.2. ve Tanım 3.3.4. ile açıktır.

4. SONUÇ VE ÖNERİLER

Yaptığımız çalışmada elde edilen başlıca sonuçlar şunlardır:

1. Esnek kümeler üzerinde “$\subseteq$” ve “ô ”sıralama bağıntıları ve ikili işlemleri verilerek bunlara ait bazı özel sonuçlar elde edilmiştir. Özel olarak, bir U kümesi üzerinde tanımlı bütün esnek kümelerin ailesinin “$\subseteq$” ve “ô ”bağıntılarına göre tam kafes ve sonsuz $\vee$-dağılımlı kafes yapılarına sahip olduğu gösterilmiştir.

2. Evrensel küme üzerindeki ikili işlemler yardımıyla esnek kümeler üzerinde ikili işlemler verilerek esnek idealler, halkalar ve modüller için ikili işlemlerin buradaki etkileri incelenmiştir.

3. Esnek cebirsel yapıların kafes yapıları incelenmiştir.

4. Halka ve modül teorilerine ait bazı sonuçların esnek yapılar içinde geçerli olduğu gösterilmiştir.

5. Esnek fonksiyon yardımıyla görüntü ve ters-görüntü tanımlarına ait özellikler verilmiştir.

Bu çalışmada elde edilen sonuçlar dikkate alınarak bazı öneriler sunulmuştur.

1.Esnek cebirsel yapılar yardımıyla klasik cebirsel yapıların özellikleri incelenebilir.

2. Esnek kümeler farklı cebirsel yapılar üzerinde yeniden değerlendirilip bu yapılara ait özellikleri incelenebilir. Bu şekilde birçok matematiksel yapı esnek kümeler üzerinde yeniden ele alınabilir.

3.Esnek cebirsel yapılar, bu alanda çalışan diğer araştırmacılara tanıtılarak farklı bilim dalları ile ortak çalışmalar yapılması hedeflenebilir.

5. KAYNAKLAR

Acar ,U., Koyuncu, F. and Tanay, B.,2010. Soft sets and soft rings, Computers and Mathematics with Applications, 59 ,pp:3458-3463.

Aktaş, H. and Çağman, N.2007. Soft sets and soft groups, Information Sciences, 177, 1 pp: 2726-2735

Ali, M. I., Feng, F., Liu ,X., Min, W. K. and Shabir ,M.,2009. On some new operations in soft set theory, Computers and Mathematics with Applications, 57 pp:1547-1553.

Atagün A. O. and Sezgin A.,2011. Soft substructures of rings, fields and modules, Computers and Mathematics with Applications, 61 pp:592–601.

Babitha K. V. and Sunil J. J.,2009. Soft set relations and functions, Computers and Mathematics with Applications, 60 pp:1840-1849.

Bhattacharya P.B. and Jain S.K.,1972. First Course in Group Theory, New Delhi.

Birkhoff G.,1967. Lattice Theory, American Mathematical society, Providence, Rhode Island.

Chen D., Tsang E. C. C. and Yeung D. S.2003. Some notes on the parameterization reduction of soft sets, International Conference on Machine Learning and Cybernetics 3, July , China, pp:1442-1445.

Chen D., Tsang E. C. C., Yeung D. S. and Wang X.,2005. The parameterization reduction of soft sets and its applications, Computers and Mathematics with Applications, 49, 1 pp:757-763.

Çağman N. and Enginoğlu S.,2010. Soft matrix theory and its decision making, Computers and Mathematics with Applications, 59 pp:3308-3314.

Çelik Y., Ekiz C. and Yamak S.2011. A new view on soft rings, Hacettepe J. Math. Stat.,40, 2 pp:273-286.

Feng F., Jun Y. B. and Zhao X., 2008. Soft semirings, Computers and Mathematics with Applications, 56, 10 pp: 2621-2628.

Feng F., Li C. and Davvaz B.2010. Soft sets combined with fuzzy sets and rough sets:a tentative approach, Soft Comput., 14 pp: 899–911.

Fraleigh J. B.,1994. A First Course in Abstract Algebra, Addison-Wesley Publishing Company, New York.

Hungerford T. W.,.1974 Algebra, Springer, New York.

Jun Y. B., 2008. Soft BCK/BCI-algebras, Computers and Mathematics with Applications, 56, 1 1408-1413pp.

Jun Y. B., Lee K. J. and Park C. H.,2008. Soft set theory applied to commutative ideals in BCK-algebras, Journal of Applied Mathematics and Informatics, 26, 3-4 707-720pp.

Jun Y. B. and Park C. H.,2008. Applications of soft sets in ideal theory of BCK/BCI-algebras, Information Sciences, 178, 1 2466-2475pp.

Jun Y. B., Lee K. J. and Park C. H.,2009. Soft set theory applied to ideals in d-algebras, Computers and Mathematics with Applications, 57 367-378pp.

Jun Y. B., Lee K. J. and Zhan J.,2009. Soft p-ideals of soft BCI-algebras, Computers and Mathematics with Applications, 58 2060-2068pp.

Jun Y. B. and Park C. H., Applications of soft sets in Hilbert algebras, Iranian Journal of Fuzzy Systems, 6, 2 (2009) 75-86.

Jun Y. B., Song S. Z. and So K. S., 2011. Soft set theory applied to p-ideals of BCI-algebras related to fuzzy points, Neural Comput. Appl., 20 1313-1320pp.

Kaufmann A.,1.975 Introduction to the Theory Of Fuzzy Subsets, Volume I, Academic Press, London.

Kazancı O., Yılmaz Ş. and Yamak S.,2010. Soft sets and soft BCH-algebras, Hacettepe J. Math. Stat., 39, 2 205–217pp.

Kong Z., Gao L. and Wang L.,2009. Comment on "A fuzzy soft set theoretic approach to decision making problems", Journal of Computational and Applied Mathematics, 223 540-542pp.

Liu W. J.,1983. Operations on fuzzy ideals, Fuzzy Sets Systems, 11 31-41pp.

Liu X., Xiang D. and Zhan J.,2012. Fuzzy isomorphism theorems of soft rings, Neural Comput. Appl., 21 391-397pp.

Maji P. K., Roy A. R. and Biswas R., An application of soft sets in a decision making problem, Computers and Mathematics with Applications, 44, 1 (2002) 1077-1083.

Maji P. K., Bismas R. and Roy A.R.,2003. Soft set theory, Computers and Mathematics with Applications, 45, 1 555-562pp.

Majumdar P. and Samanta S. K.,2010. On soft mappings, Computers and Mathematics with Applications, 60 2666-2672pp.

Molodtsov D., 1999.Soft set theory-first results, Computers and Mathematics with Applications, 37, 1 19-31pp.

Molodtsov D., 2004.The Theory of Soft Sets, URSS Publishers, Moscow.

Molodtsov D. A., Leonov V. Yu. and Kovkov D. V,2006. Soft Sets Technique and Its Application, Nechetkie Sistemy i Myagkie Vychisleniya, 1, 1 8-39pp.

Mordeson J. N. and Malik D. S., 1998. Fuzzy Commutative Algebra, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., London.

Nanda S.,1986. Fuzzy fields and fuzzy linear spaces, Fuzzy Sets and Systems, 19 89-94pp..

Park C. H., Jun Y. B. and Öztürk M. A.,2008. Soft WS-algebras, Commun. Korean Math. Soc., 23, 3 313-324pp..

Pawlak Z.,1982. Rough sets, International Journal of Information and Computer Sciences, 11, 1 341-356pp.

Qin K. and Hong Z.,2010. On soft equality, Journal of Computational and Applied Mathematics, 234 1347-1355pp.

Rosenfeld A., 1971. Fuzzy groups, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 35 512-517pp.

Sun Q-M., Zhang Z-L. and Liu J.,2008. Soft Sets and Soft Modules, Rough Sets and Knowledge Technology, Springer, China, 403-409pp.

Türkmen E. and Pancar A., 2012. Some New Operations in Soft Module Theory, Neural Comput. Appl. doi: 10.1007/s00521-012-0893-6.

Yamak S., Kazancı O. and Davvaz B.,2011. Soft hyperstructure, Computers and Mathematics with Applications, 62 797–803pp.

Zadeh L. A., Fuzzy Sets,1965. Information and Control, 8 338-353pp.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	**:**	Melike KASIM DEMİR
Doğum Yeri	**:**	Terme / SAMSUN
Doğum Tarihi	**:**	10/07/1980
Yabancı Dili	**:**	İngilizce
E-mail	**:**	melikekasim@gmail.com
İletişim Bilgileri	**:**	MEB Ayşe Şahin ÇPL Gülyalı / ORDU 5052706724

Öğrenim Durumu :

Derece	**Bölüm/ Program**	**Üniversite**	**Yıl**
Lisans	Matematik Öğretm.	Karadeniz Teknik Üniv.	2001
Y. Lisans			

İş Deneyimi:

Görev	**Görev Yeri**	**Yıl**
Öğretmen	MEB Trabzon Tonya Şehit Cemil Küçük İlköğretim Okulu	2001
Öğretmen	MEB Trabzon Şehit Gürcan Bayrak İlköğretim Okulu	2003
Öğretmen	MEB Samsun Terme Endüstri Meslek Lisesi	2005
Öğretmen	MEB Ordu Gülyalı Ayşe Şahin ÇPL	2013

Yayınlar :

1.

2.