

T.C.
ORDU ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MANNHEİM EĞRİ ÇİFTİNE AİT FRENET ÇATISINA
GÖRE SMARANDACHE EĞRİLERİ

Abdussamet ÇALIŞKAN

Bu tez,
Matematik Anabilim Dalında
Yüksek Lisans
derecesi için hazırlanmıştır

ORDU 2014

TEZ ONAY

Ordu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü öğrencisi Abdussamet ÇALIŞKAN tarafından hazırlanan ve Yrd. Doç. Dr. Süleyman ŞENYURT danışmanlığında yürütülen “Mannheim Eğri Çiftine Ait Frenet Çatısına Göre Smarandache Eğrileri” adlı bu tez, jürimiz tarafından 08.09 / 2014 tarihinde oy birliği / oy çokluğu ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Yrd. Doç. Dr. Süleyman ŞENYURT

Başkan : Doç. Dr. Selahattin MADEN
Matematik, Ordu Üniversitesi

Üye : Yrd. Doç. Dr. Süleyman ŞENYURT
Matematik, Ordu Üniversitesi

Üye : Yrd. Doç. Dr. Mustafa BİLİCİ
Matematik, Ondokuzmayıs Üniversitesi

İmza : 

İmza : 

İmza : 

ONAY:

Bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulu'nun 08.09/2014 tarih ve 2014/333 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

08.09/2014


Prof. Dr. M. Fikret BALTA

Enstitü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

İmza:

Abdussamet ÇALIŞKAN

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirimlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

MANNHEIM EĞRİ ÇİFTİNE AİT FRENET ÇATISINA GÖRE SMARANDACHE EĞRİLERİ

Abdussamet ÇALIŞKAN

Ordu Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı, 2014

Yüksek Lisans Tezi, 84 s.

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Süleyman ŞENYURT

Bu çalışma altı bölüm halinde düzenlenmiştir. Giriş Bölümünde çalışmanın amacı ve konunun ele alınma nedeni tartışıldı. Önceki Çalışmalar Bölümünde Smarandache eğrileri ile ilgili çalışmalara yer verildi. Genel Bilgiler Bölümünde Öklid uzayı ile ilgili bilgilerden söz edildi. Materyal ve Yöntem Bölümünde Öklid uzayında Mannheim eğri çiftleri ve Smarandache eğrileri ile ilgili temel kavramlar anlatıldı.

Bulgular Bölümü çalışmamızın orijinal kısmını oluşturmaktadır. Mannheim eğrisine ait partner eğrisinin Frenet vektörleri ve birim Darboux vektörü konum vektörü olarak alındığında elde edilen Smarandache eğrilerinin eğrilik ve burulmaları hesaplandı ve bulunan bu değerler, Mannheim eğrisine bağlı olarak ifade edildi. Son olarak elde edilen Smarandache eğrilerinin Mannheim eğri çiftine ve Bertrand eğri çiftine dahil olup olmadığı incelendi.

Anahtar Kelimeler: Öklid Uzayı, Mannheim eğri çifti, Smarandache eğrisi.

ABSTRACT

SMARANDACHE CURVES OF MANNHEIM CURVE COUPLE ACCORDING TO FRENET FRAME

Abdussamet ÇALIŞKAN

Ordu University

Institute for Graduate Studies in Science and Technology

Department of Mathematics, 2014

MSc. Thesis, 84 p.

Supervisor: Asst. Prof. Dr. Süleyman ŞENYURT

This study consists six fundamental chapters. In the introduction chapter , the aim of study and the reasons why this subject is interested are given. The next chapter is covered with literature review of Smarandache curve. In general formation chapter is included with some information about Euclidean space. The basic concepts of Mannheim partner curve and Smarandache curves on Euclidean space are given in the material and method chapter .

The Findings chapter is the original part of the study. In this chapter, when the Frenet vectors and the unit Darboux vector of the partner curve of Mannheim curve are taken as the position vectors, the curvature and the torsion of Smarandache curves are calculated. These values are expressed depending upon the Mannheim curve and it is examined whether the resulting Smarandache curves have relations with Mannheim and Bertrand curves.

Keywords: Euclidean Space, Mannheim Curve, Smarandache curves.

TEŞEKKÜR

Tüm alıőmalarım boyunca her zaman bilgi ve deneyimleriyle yolumu aan değerli hocam Sayın Yrd. Do. Dr. Süleyman ŞENYURT' a en samimi duygularım ile teőekkrlerimi sunarım.

Ayrıca, alıőmalarım boyunca desteklerini esirgemeyen Matematik Bölüm Baőkanı Sayın Prof. Dr. Cemil YAPAR, Matematik Bölümü đretim yeleri Sayın Doç. Dr. Selahattin MADEN, Sayın Doç. Dr. Erhan SET , Sayın Yrd. Doç. Dr. Erdal NLYOL, Sayın Yrd. Doç. Dr. Seher ASLANCI, Sayın Yrd. Doç. Dr. Mehmet KORKMAZ, Sayın Yrd. Doç. Dr. Yıldıray ÇELİK hocalarıma ve tez yazım aőamasında bana her türlü yardımı sağlayan Sayın Yrd. Doç. Dr. Serkan KARATAŐ hocama içtenlikle teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

TEZ BİLDİRİMİ	II
ÖZET	III
ABSTRACT	IV
TEŞEKKÜR	V
ŞEKİLLER LİSTESİ	VIII
SİMGELER VE KISALTMALAR	IX
1. GİRİŞ	1
2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR	2
3. GENEL BİLGİLER	4
3.1 Öklid Uzayı	4
4. MATERYAL VE YÖNTEM	12
4.1 Öklid Uzayında Mannheim Eğri Çiftleri	12
4.2 Öklid Uzayında Smarandache Eğrileri	17
5. BULGULAR	35
5.1 T^*N^* Smarandache Eğrisi	35
5.2 N^*B^* Smarandache Eğrisi	43
5.3 T^*B^* Smarandache Eğrisi	50

5.4	$T^*N^*B^*$ Smarandache Eğrisi	56
5.5	N^*C^* Smarandache Eğrisi	64
6.	SONUÇ VE ÖNERİLER	79
6.1	Sonuçlar	79
6.2	Öneriler	80
	KAYNAKLAR	81
	DİZİN	83

ŞEKİLLER LİSTESİ

3.1	Darboux vektörü	7
4.1	Mannheim Eğri Çifti	12
4.2	Helis eğrisi	16
4.3	$\gamma = \gamma(s)$ eğrisi	33
4.4	$\gamma(s)$ eğrisine ait $TN - Smarandache$ eğrisi	33
4.5	$\gamma(s)$ eğrisine ait $NB - Smarandache$ eğrisi	33
4.6	$\gamma(s)$ eğrisine ait $TB - Smarandache$ eğrisi	34
4.7	$\gamma(s)$ eğrisine ait $TNB - Smarandache$ eğrisi	34
4.8	$\gamma(s)$ eğrisine ait $NC - Smarandache$ eğrisi	34
5.1	$\alpha^*(s)$ eğrisine ait $T^*N^* - Smarandache$ eğrisi	77
5.2	$\alpha^*(s)$ eğrisine ait $N^*B^* - Smarandache$ eğrisi	77
5.3	$\alpha^*(s)$ eğrisine ait $T^*B^* - Smarandache$ eğrisi	77
5.4	$\alpha^*(s)$ eğrisine ait $T^*N^*B^* - Smarandache$ eğrisi	78
5.5	$\alpha^*(s)$ eğrisine ait $N^*C^* - Smarandache$ eğrisi	78

SİMGELER VE KISALTMALAR

- E^3 : 3-boyutlu Öklid Uzayı
 \mathbb{E}_1^3 : 3-boyutlu Lorenzt Uzayı
 S^2 : Öklid uzayında birim Küre
 \tilde{S}^2 : Dual uzayında birim Küre
 $\| \cdot \|$: Norm
 T : Teğet vektör
 N : Aslinormal vektör
 B : Binormal vektör
 W : Darboux vektörü
 C : Birim Darboux vektörü
 κ : Eğrilik
 τ : Burulma
 β_1 : T^*N^* Smarandache eğrisi
 β_2 : N^*B^* Smarandache eğrisi
 β_3 : T^*B^* Smarandache eğrisi
 β_4 : $T^*N^*B^*$ Smarandache eğrisi
 β_5 : N^*C^* Smarandache eğrisi

1. GİRİŞ

3-Boyutlu Öklid uzayında eğrilerin diferansiyel geometrisi üzerinde birçok çalışmalar yapılmıştır. Özellikle iki eğrinin karşılıklı noktalarında Frenet çatıları arasında bağıntılar kurularak, birçok teoriler geliştirilmiştir. Bunlardan biriside Mannheim eğrisidir.

Mannheim eğrisi ilk olarak 1878 yılında A. Mannheim tarafından tanımlanmıştır. Herhangi bir eğrinin Mannheim eğrisi olması için gerek ve yeter şartın

$$\kappa = \lambda(\kappa^2 + \tau^2), \lambda \neq 0 = sb$$

olduğu gösterilmiştir [9]. Burada κ eğrinin eğriliği, τ eğrinin torsiyonudur (burulma).

Liu ve Wang 2007 yılında yaptıkları bir çalışmada Mannheim eğrilerini yeniden ifade etmişlerdir. Bu yeni duruma göre diferensiyellenebilir iki eğriden birinci eğrinin asli normal vektörü ile ikinci eğrinin binormal vektörü lineer bağımlı olması halinde birinci eğriye Mannheim eğrisi, ikinci eğriye Mannheim partner eğrisi adını vermişlerdir. Bu yeni durumdan yola çıkarak Mannheim eğri çiftleri hakkında birçok çalışmalar yapılmıştır. Bunlardan bazıları [9], [11], [14], [19].

2008 yılında M.Turgut ve S.Yılmaz "*Smarandache Curves in Minkowski spacetime*" isimli çalışmada Smarandache eğrisinin tanımını vermişlerdir. Daha sonra bu eğriler, farklı uzaylarda ele alınarak incelenmiş ve yeni sonuçlar elde edilmiştir. Bu çalışmalardan bazıları [1], [2], [3], [4], [5], [8], [15], [16], [18].

Bu çalışmada, (α, α^*) Mannheim eğri çifti olmak üzere Mannheim partner eğrisinin Frenet vektörleri T^*, N^*, B^* ve birim Darboux vektörü C^* alındığında bu vektörler tarafından oluşturulan $T^*N^*, N^*B^*, T^*B^*, T^*N^*B^*$ ve N^*C^* Smarandache eğrilerinin tanımı verilerek bu eğrilere ait yeni karakterizasyonlar elde edilmiştir.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Turgut ve Yılmaz, "*Smarandache Curves in Minkowski spacetime*" isimli çalışmada Minkowski uzayında Smarandache eğrisinin tanımını ifade etmişlerdir. \mathbb{E}_1^4 de TB_2 Smarandache eğrileri şeklinde adlandırılan eğrilerin özel bazı durumlarını incelemişlerdir ve bu eğrilerin Frenet elemanlarını hesaplamışlardır. Bu yöntemle \mathbb{E}_1^4 uzayında bir başka ortonormal çatı elde etmişlerdir, [18].

Ali, T.A., "*Special Smarandache Curves in the Euclidean Space*" isimli çalışmada Öklid uzayında bazı özel Smarandache eğrilerini tanımlayarak bu eğrilere ait Frenet-Serret invaryantlarının özel durumlarını çalışmıştır, [1].

Taşköprü ve Tosun, "*Smarandache Curves According to Sabban Frame on S^2* " isimli çalışmada S^2 birim küresi üzerinde oluşan Sabban çatısına göre Smarandache eğrilerini incelemişlerdir ve bu eğrilerin karakterizasyonları ile ilgili sonuçlar elde etmişlerdir, [16].

Şenyurt ve Çalışkan, "*Smarandache Curves In terms of Sabban Frame of Spherical Indicatrix Curves*" isimli çalışmada küresel gösterge eğrilerinin Sabban çatısına göre özel Smarandache eğrilerini araştırmışlardır. Bunun yanında Smarandache eğrilerinin bazı karakterizasyonları ile ilgili sonuçlar bulmuşlardır, [4].

Bektaş ve Yüce, "*Special Smarandache Curves According to Dardoux Frame in Euclidean 3-Space*" isimli çalışmada Öklid uzayında Darboux çatısına ait Smarandache eğrilerini incelemişlerdir. Bu eğrilere ait bazı karakterizasyonlarını ve sonuçlarını vermişlerdir, [2].

Çetin, Tunçer ve Karacan, "*Smarandache Curves According to Bishop Frame in Euclidean 3-Space*" isimli çalışmada Öklid uzayında Bishop çatısına göre özel Smarandache eğrilerini araştırmışlardır ve bu eğrilerin bazı diferansiyel geometrik özelliklerini vermişlerdir. Ayrıca Smarandache eğrisine ait oskülatör kürelerinin merkezini ve kürelerin eğriliği ile ilgili sonuçlar bulmuşlardır, [5].

Bayrak, Bektaş ve Yüce, "*Special Smarandache Curves in \mathbb{E}_1^3* " isimli çalışmada Minkowski uzayında regüler bir eğriye ait Frenet vektörleri tarafından oluşturulan Smarandache eğrilerini incelemişlerdir ve bu eğrilere ait bazı karakterizasyonlarını elde etmişlerdir, [3].

Şenyurt ve Sivas, "*Smarandache Eğrilerine Ait Bir Uygulama*" isimli çalışmada bir α eğrisinin Frenet vektörleri T, N, B ve birim Darboux vektörü C olmak üzere NC – Smarandache eğrisini tanımlamışlardır. Bununla birlikte NB ve TNB – Smarandache eğrilerinin eğrilik ve torsiyonlarını hesaplamışlardır, [15].

Kahraman, Önder ve Uğurlu, "*Dual Smarandache Curves and Smarandache Ruled Surfaces*" isimli çalışmada dual Darboux çatıyı ele alarak birim dual küre \tilde{S}^2 üzerinde dual Smarandache eğrilerini tanımlamışlardır ve dual küresel eğri (regle yüzey) ve onun dual Smarandache eğrisi (Smarandache regle yüzey) arasında bağıntılar elde etmişlerdir, [8].

3. GENEL BİLGİLER

Bu bölümde, 3-boyutlu Öklid Uzayı ile ilgili temel kavramlara yer verilmiştir.

3.1 Öklid Uzayı

Tanım 3.1.1 A boş olmayan bir cümle, V de \mathfrak{S} cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. $f : A \times A \rightarrow V$ fonksiyonu aşağıdaki aksiyomları sağlarsa A ya V ile birleştirilmiş bir afin uzay denir:

- a. $A_1 : \forall P, Q, R \in A$ için $f(P, Q) + f(Q, R) = f(P, R)$
- b. $A_2 : \forall P \in A, \forall \alpha \in V$ için $f(P, Q) = \alpha$

olacak şekilde bir tek $Q \in A$ noktası vardır.

Tanım 3.1.2 V, A ile birleşen bir afin uzay olsun. $P_0, P_1, \dots, P_n \in A$ noktaları için $\{P_0P_1, P_0P_2, \dots, P_0P_n\}$ cümlesi V nin bir bazı ise $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ nokta $(n + 1)$ -lisine bir afin çatısı denir. Burada P_0 noktasına çatının başlangıç noktası, $P_i, 1 \leq i \leq n$, noktalarına da çatının birim noktaları denir. $\text{boy}V = n$ ise A ya n -boyutlu bir afin uzay denir.

Tanım 3.1.3 V, A ile birleşen bir afin uzay olsun.

$$\langle, \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonu aşağıdaki aksiyomları sağlarsa bu fonksiyona bir iç çarpım fonksiyonu denir:

$\forall x, y, z \in V, \forall a, b \in \mathbb{R}$ için

a. Bilineerlik Aksiyomu;

$$\begin{aligned}\langle ax + by, z \rangle &= a\langle x, z \rangle + b\langle y, z \rangle, \\ \langle x, ay + bz \rangle &= a\langle x, y \rangle + b\langle x, z \rangle,\end{aligned}$$

b. Simetri Aksiyomu;

$$\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle,$$

c. Pozitif Tanımlılık (kararlılık) Aksiyomu;

$$\begin{aligned}\langle x, x \rangle &\geq 0, \\ \langle x, x \rangle = 0 &\Leftrightarrow x = \vec{0}.\end{aligned}$$

Tanım 3.1.4 Reel standart afin uzayı \mathbb{R}^n olmak üzere, $\forall X, Y \in \mathbb{R}^n$ için

$$\langle, \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \langle X, Y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

şeklinde tanımlı fonksiyon bir iç çarpım fonksiyonudur. Bu iç çarpıma \mathbb{R}^n de standart iç çarpım veya Öklid iç çarpım denir. Standart iç çarpımın tanımlı olduğu \mathbb{R}^n vektör uzayı ile birleşen afin uzayına n -boyutlu standart Öklid uzayı denir ve \mathbb{E}^n ile gösterilir.

Örnek 3.1.1 $X, Y \in \mathbb{R}^2$ olmak üzere

$$\langle, \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \langle X, Y \rangle = \|X\| \cdot \|Y\| \cos \theta, 0 \leq \theta \leq \pi$$

şeklinde tanımlı fonksiyon bir iç çarpım fonksiyonudur.

Tanım 3.1.5 $X \in \mathbb{E}^n$ noktasının afin koordinat sistemine göre koordinatları (x_1, x_2, \dots, x_n) olsun. $x_i : \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n$, fonksiyonuna \mathbb{E}^n 'nin i -yinci koordinat fonksiyonu denir.

Tanım 3.1.6 $d : \mathbb{E}^n \times \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{R}, d(X, Y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - x_i)^2}$ şeklinde tanımlanan d fonksiyonuna \mathbb{E}^n Öklid uzayında uzaklık fonksiyonu ve $d(X, Y) \in \mathbb{R}$ sayısına da X ile Y noktaları arasındaki uzaklık denir.

Tanım 3.1.7 \mathbb{R}^n iç çarpım uzayı ile birleşen Öklid uzayı \mathbb{E}^n olmak üzere, $\{P_0, P_1, \dots, P_n\} \in \mathbb{E}^n$ nokta $(n+1)$ -lisi için, $\{P_0P_1, P_0P_2, \dots, P_0P_n\}$ cümlesi \mathbb{E}^n 'nin bir ortonormal bazı ise $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ cümlesine \mathbb{E}^n de bir Öklid çatı veya dik çatı denir.

Tanım 3.1.8 $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^n, \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \dots, \alpha_n(t))$ diferensiyellenebilir fonksiyona \mathbb{E}^n de bir eğri denir. Burada I aralığına α eğrisinin parametre aralığı ve $t \in I$ değişkenine de α eğrisinin parametresi denir.

Tanım 3.1.9 $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^n$ diferensiyellenebilir bir eğri olsun.

$$\|\alpha'\| : I \rightarrow \mathbb{R}, \|\alpha'\|(t) = \|\alpha'(t)\|$$

şeklinde tanımlı $\|\alpha'\|$ fonksiyonuna, $\|\alpha'(t)\| \in \mathbb{R}$ sayısına α eğrisinin $\alpha(t)$ noktasındaki skaler hızı ,

$$\alpha'(t) = \frac{d\alpha}{dt} \Big|_t = \left(\frac{d\alpha_1(t)}{dt}, \frac{d\alpha_2(t)}{dt}, \dots, \frac{d\alpha_n(t)}{dt} \right) \Big|_t$$

vektörüne de α eğrisinin hız vektörü denir.

Tanım 3.1.10 $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^n$ eğrisi için $\|\alpha'(s)\| = 1$ ise eğriye birim hızlı eğri, $s \in I$ parametresine de eğrinin yay parametresi denir. Her eğri birim hızlı yapılabilir.

Tanım 3.1.11 $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^n$ bir eğri ve $a, b \in I$ için

$$s = \int_a^b \|\alpha'(t)\| ds \quad (3.1.1)$$

reel sayısına $\alpha(a)$ ile $\alpha(b)$ noktaları arasındaki yay uzunluğu denir.

Tanım 3.1.12 $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^n$ bir eğri ve $\varphi = \{\alpha', \alpha'', \alpha''', \dots, \alpha^{(r)}\}$ cümlesi lineer bağımsız olsun.

$$\alpha^{(k)} \in Sp\{\varphi\}, \quad k > r$$

olmak üzere φ cümlesinden Gram Schmidt ortogonalleştirme yöntemi ile elde edilen $\{V_1(s), V_2(s), \dots, V_r(s)\}$ ortonormal sistemine α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki Serret Frenet r -ayaklısı, $\forall V_i$ ($1 \leq i \leq r$) vektörüne de Serret Frenet vektörü denir.

Teorem 3.1.1 $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet 3-ayaklısı;

a) $s \in I$ yay parametresi ise

$$\begin{cases} V_1(s) = \alpha'(s) \\ V_2(s) = \frac{1}{\|\alpha''(s)\|} \alpha''(s) \\ V_3(s) = T(s) \wedge N(s) \end{cases}$$

b) $s \in I$ yay parametresi değilse

$$\begin{cases} V_1(s) = \frac{1}{\|\alpha'(s)\|} \alpha'(s) \\ V_2(s) = B(s) \wedge N(s) \\ V_3(s) = \frac{1}{\|\alpha'(s) \wedge \alpha''(s)\|} (\alpha'(s) \wedge \alpha''(s)) \end{cases}$$

şeklinde verilir, [7].

Tanım 3.1.13 $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^n$ eğrisinin Frenet r -ayaklısı $\{V_1(s), V_2(s), \dots, V_r(s)\}$ olsun.

$$\begin{aligned} k_i : I &\rightarrow \mathbb{R}, \quad 1 \leq i < r \\ s &\rightarrow k_i(s) = \langle V_i'(s), V_{i+1}(s) \rangle \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı k_i fonksiyonuna α eğrisinin i -yinci eğrilik fonksiyonu, $\forall s \in I$ için $k_i(s) \in \mathbb{R}$ sayısına da α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki i -yinci eğriliği denir.

Teorem 3.1.2 $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^n$ eğrisinin Frenet r -ayaklısı $\{V_1(s), V_2(s), \dots, V_r(s)\}$, i -yinci eğriliği $k_i(s)$ olsun. Bu durumda Frenet vektörleri ile bunların türev vektörleri arasında

$$\begin{cases} V_1'(s) = k_1(s)V_2(s) \\ V_i'(s) = -k_{i-1}(s)V_{i-1}(s) + k_i(s)V_{i+1}(s) \quad 1 \leq i < r \\ V_r'(s) = -k_{r-1}(s)V_r(s) \end{cases}$$

bağıntısı vardır, [7].

$n = 3$ özel halinde α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet 3-ayaklısı $\{T, N, B\}$ ile gösterilir. Burada T ye teğet vektör, N ye asli normal vektör ve B ye de binormal vektör denir. α eğrisinin birinci ve ikinci eğrilikleri de sırasıyla κ ve τ ile gösterilir ve κ 'ya eğrinin eğriliği, τ 'ya da burulması adı verilir. Bu halde Frenet formülleri

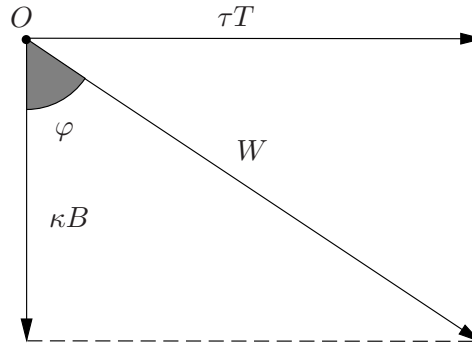
$$\begin{cases} T'(s) = \kappa(s)N(s) \\ N'(s) = -\kappa(s)T(s) + \tau(s)B(s) \\ B'(s) = -\tau(s)N(s) \end{cases} \quad (3.1.2)$$

şeklinde olur, [7].

Diğer taraftan, bir α eğrisi üzerinde $\alpha(s)$ noktası eğriyi çizerken bu noktadaki $\{T, N, B\}$ Frenet 3-ayaklısı her s anında, (bir eksen etrafında) ani bir helis hareketi yaptığı kabul edilir ve bu eksene eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki Darboux (ani dönme) eksenini denir. Bu eksenin yön ve doğrultusunu veren vektör,

$$\begin{aligned} W &= N \wedge N' \\ W &= \tau T + \kappa B \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

şeklinde olur ve bu vektöre Darboux vektörü adı verilir (Şekil 3.1).



Şekil 3.1: Darboux vektörü

W ile B vektörleri arasındaki açı φ ile gösterilirse şekilden,

$$\sin \varphi = \frac{\tau}{\|W\|} \quad \cos \varphi = \frac{\kappa}{\|W\|} \quad (3.1.4)$$

yazılır. W Darboux vektörü yönündeki birim vektör C ile gösterilirse

$$C = \frac{\tau}{\|W\|} T + \frac{\kappa}{\|W\|} B$$

olur. Burada κ ile τ 'nun yerine (3.1.4)'deki karşılıkları yazılırsa

$$C = \sin \varphi T + \cos \varphi B \quad (3.1.5)$$

şeklinde bulunur.

Tanım 3.1.14 $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^n$ eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki 1. ve 2. eğrilikleri sırasıyla $k_1(s)$ ve $k_2(s)$ olsun.

$$H_1 : I \rightarrow \mathbb{R}$$

$$s \rightarrow H_1(s) = \frac{k_1(s)}{k_2(s)}$$

şeklinde tanımlı H_1 fonksiyonuna α eğrisinin 1-inci harmonik eğriliği denir.

Tanım 3.1.15 $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^n$ eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki hız vektörü, sabit bir U vektörü ile sabit açı yapıyorsa eğriye bir eğilim çizgisi, $S_p\{U\}$ ya da eğilim çizgisinin eğilim eksenini denir.

Teorem 3.1.3 $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisi bir eğilim çizgisi ise $H_1(s) = \text{sabit}$ tir, [7].

İspat. " \Rightarrow " Kabul edelim ki α bir eğilim çizgisi olsun. α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet vektörleri $\{T(s), N(s), B(s)\}$ olmak üzere, eğilim çizgisi tanımına göre

$$\langle T(s), U \rangle = \cos \theta$$

olur. Bu ifadenin s 'ye göre türevi alınır

$$\langle T'(s), U \rangle = 0,$$

$$\kappa \langle N(s), U \rangle = 0$$

bulunur. Bu durumda $N \perp U$ olur. $U \in S_p\{T(s), B(s)\}$ olduğundan

$$U = aT(s) + bB(s)$$

şeklinde yazılabilir. Bu ifade sırasıyla T ve B ile iç çarpılırsa

$$\begin{cases} \langle U, T(s) \rangle = a = \cos \theta \\ \langle U, B(s) \rangle = b = \sin \theta \end{cases} \quad (3.1.6)$$

olur. (3.1.6) bağıntısından

$$U = \cos \theta T(s) + \sin \theta B(s)$$

bulunur. Diğer yandan

$$\langle N(s), U \rangle = 0$$

ifadesinin türevi alınır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$\langle N'(s), U \rangle + \langle N(s), U' \rangle = 0,$$

$$\langle \kappa(s)T(s) - \tau(s)B(s), U \rangle = 0,$$

$$\begin{aligned}\kappa(s)\langle T(s), U \rangle - \tau(s)\langle B(s), U \rangle &= 0, \\ \kappa(s) \cos \theta - \tau(s) \sin \theta &= 0, \\ \frac{\kappa(s)}{\tau(s)} &= \text{sabit}, \\ H_1(s) &= \text{sabit}\end{aligned}$$

elde edilir.

” \Leftarrow ” Kabul edelim ki $\forall s \in I$ için $H_1(s) = \text{sabit}$ olsun. İddia ediliyor ki α bir eğilim çizgisidir.

$H_1(s) = \text{sabit}$ ise $H_1(s) = \tan \theta$ alınabilir. Buradan

$$\frac{\kappa(s)}{\tau(s)} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \Rightarrow \cos \theta \kappa(s) - \sin \theta \tau(s) = 0$$

olur. Şimdi

$$\vec{U} = \cos \theta T(s) + \sin \theta B(s)$$

vektörünü tanımlayalım. Açının sabit olduğu dikkate alınır ve türev alınırsa

$$U' = \cos \theta T' + \sin \theta B',$$

$$U' = (\cos \theta \kappa(s) - \sin \theta \tau(s))N(s)$$

olur ve norm alınırsa

$$\|U'\| = 0 \Rightarrow U = \text{sabit}$$

olduğu görülür. Diğer yandan

$$\begin{aligned}\langle \alpha'(s), U \rangle &= \langle T(s), U \rangle \\ &= \langle T(s), \cos \theta T(s) + \sin \theta B(s) \rangle \\ &= \cos \theta = \text{sabit}\end{aligned}$$

olur ki bu da α bir eğilim çizgisi olması demektir.

Teorem 3.1.4 $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisinin düzlemsel bir eğri olması için gerek ve yeter şart $\tau = 0$ olmasıdır, [7].

İspat. ” \Rightarrow ” Kabul edelim ki α birim hızlı düzlemsel bir eğri olsun. Bu durumda $\forall s \in I$ için $\alpha(s)$ noktalarının tümü bir E düzlemi içinde bulunur. Düzlemin normali q , düzlem üzerinde herhangi bir nokta p olsun. Bu durumda

$$\langle \alpha(s) - p, q \rangle = 0$$

olur. Bu ifadenin türevi alınır

$$\langle \alpha'(s), q \rangle + \langle \alpha(s) - p, q' \rangle = 0,$$

$$\langle \alpha'(s), q \rangle = 0$$

olur ve tekrar türev alınır

$$\langle \alpha''(s), q \rangle = 0$$

bulunur. Buradan q vektörünün T ve N ye dik olduğu görülür. Bu durumda q vektörü B ye paralel olur. Dolayısıyla

$$B(s) = \pm \frac{q}{\|q\|}$$

şeklinde alınabilir. Bu ifadenin türevi alınır

$$B' = 0$$

bulunur ve

$$B'(s) = -\tau(s)N(s)$$

eşitliğinden

$$\tau(s) = 0$$

elde edilir.

" \Leftarrow " Kabul edelim ki $\tau(s) = 0$ olsun. $B'(s) = -\tau(s)N(s)$ idi. Buradan

$$\begin{aligned} B'(s) &= 0, \\ B(s) &= c = \text{sabit} \end{aligned}$$

olur. Şimdi

$$\begin{aligned} F : I &\rightarrow \mathbb{R} \\ s &\rightarrow F(s) = \langle \alpha(s) - \alpha(0), B(s) \rangle \end{aligned}$$

fonksiyonu tanımlansın. $s = 0$ ise $F(0) = 0$ 'dır. F 'nin s 'ye göre türevi alınır

$$\begin{aligned} F'(s) &= \langle \alpha'(s), B(s) \rangle + \langle \alpha'(s) - \alpha(0), B'(s) \rangle \\ &= \langle T(s), B(s) \rangle + \langle T(s), -\kappa(s)N(s) \rangle \\ &= 0, \end{aligned}$$

$$F(s) = \text{sabit}$$

olur. Buna göre

$$\langle \alpha(s) - \alpha(0), B(s) \rangle = 0$$

eşitliği, α eğrisinin $\alpha(0)$ noktasından geçen ve B vektörüne dik olan düzlem içinde olduğunu gösterir.

Teorem 3.1.5 $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisinin doğru olması için gerek ve yeter şart $\kappa = 0$ olmasıdır, [7].

İspat. $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ birim hızlı eğrisinin eğriliği

$$\kappa(s) = \|\alpha''(s)\|$$

dir. Bu durumda

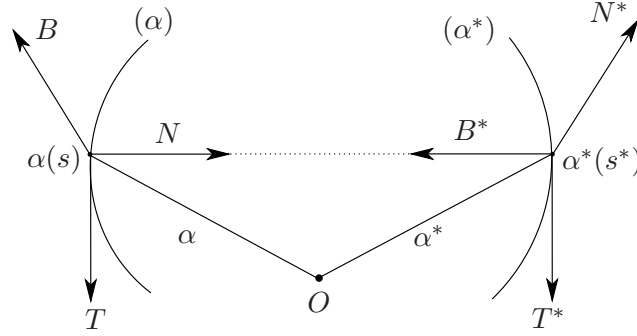
$$\begin{aligned}\kappa(s) = 0 &\Leftrightarrow \|\alpha''(s)\| = 0, \\ &\Leftrightarrow \alpha''(s) = 0, \\ &\Leftrightarrow \alpha'(s) = b, \\ &\Leftrightarrow \alpha(s) = bs + c, \quad b, c \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

4. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölümde Öklid uzayında Mannheim eğri çiftleri ve Smarandache eğrileri ile ilgili temel kavramlara yer verildi.

4.1 Öklid Uzayında Mannheim Eğri Çiftleri

Tanım 4.1.1 $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ ve $\alpha^* : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ diferensiyellenebilir iki eğri ve bu eğrilerin Frenet 3-ayaklıları sırasıyla $\{T(s), N(s), B(s)\}$ ve $\{T^*(s), N^*(s), B^*(s)\}$ olsun. α eğrisinin asli normal vektörü N ile α^* eğrisinin binormal vektörü B^* lineer bağımlı ise α eğrisine Mannheim eğrisi, α^* eğrisine Mannheim partner eğrisi denir, [19].



Şekil 4.1: Mannheim Eğri Çifti

Bu tanıma göre Mannheim eğrisinin denklemi;

$$\alpha^*(s^*) = \alpha(s) - \lambda N(s)$$

veya

$$\alpha(s) = \alpha^*(s^*) + \lambda B^*(s)$$

şeklinde yazılır, [11]. Bu denklemden türev alınırsa

$$T = \frac{ds^*}{ds} T^* - \lambda \tau^* \frac{ds^*}{ds} N^* \quad (4.1.1)$$

olur. T ile T^* arasındaki açı θ ile gösterilirse

$$T = \cos \theta T^* + \sin \theta N^* \quad (4.1.2)$$

bulunur. (4.1.1) ve (4.1.2) denklemleri dikkate alınırsa

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{ds^*}{ds} \\ \sin \theta = \lambda \tau^* \frac{ds^*}{ds} \end{cases} \quad (4.1.3)$$

olduğu görülür. Mannheim eğrisi tanımından $N = B^*$ idi. $B = T \wedge N$ olduğundan

$$B = -\sin \theta T^* + \cos \theta N^* \quad (4.1.4)$$

şeklinde bulunur. (4.1.2) ve (4.1.4) denklemlerinden T^* , N^* ve B^* vektörleri

$$\begin{cases} T^* = \cos \theta T - \sin \theta B \\ N^* = \sin \theta T + \cos \theta B \\ B^* = N \end{cases} \quad (4.1.5)$$

şeklinde olur, [11].

Teorem 4.1.1 (α, α^*) Mannheim eğri çiftleri arasındaki uzaklık sabittir, [9].

İspat. Mannheim eğrisinin tanımından $\alpha(s) = \alpha^*(s^*) + \lambda B^*(s)$ şeklinde yazılır. Buradan türev alınır

$$T = \frac{ds^*}{ds} T^* - \lambda \tau^* \frac{ds^*}{ds} N^*$$

bulunur. N ile B^* lineer bağımlı olduğundan $\langle T, B^* \rangle = 0$ olur ve buradan $\lambda' = 0$ bulunur.

Diğer yandan iki nokta arasındaki uzaklık bağıntısından

$$\begin{aligned} d(\alpha^*(s^*), \alpha(s)) &= \|\alpha(s) - \alpha^*(s^*)\| \\ &= \|\lambda B^*\| \\ &= |\lambda| \end{aligned}$$

olur. λ sıfırdan farklı bir sabit olduğundan (α, α^*) Mannheim eğri çiftleri arasındaki uzaklık sabittir. \square

Teorem 4.1.2 (α, α^*) Mannheim eğri çifti olsun. α eğrisinin eğriliği κ ve burulması τ olmak üzere bu eğrilikler arasında

$$\mu\tau - \lambda\kappa = 1, \mu = \lambda \cot \theta \quad (4.1.6)$$

bağıntısı vardır, [11].

Teorem 4.1.3 (α, α^*) Mannheim eğri çifti olsun. α eğrisinin eğrilikleri κ ve τ , α^* eğrisinin eğrilikleri κ^* ve τ^* olmak üzere bu eğrilikler arasında

$$\begin{cases} \kappa = \tau^* \sin \theta \frac{ds^*}{ds} \\ \tau = -\tau^* \cos \theta \frac{ds^*}{ds} \end{cases} \quad (4.1.7)$$

$$\begin{cases} \kappa^* = \frac{d\theta}{ds^*} = \theta' \frac{\kappa}{\lambda\tau\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} \\ \tau^* = (\kappa \sin \theta - \tau \cos \theta) \frac{ds^*}{ds} \end{cases} \quad (4.1.8)$$

bağıntısı vardır, [11].

Teorem 4.1.4 (α, α^*) Mannheim eğri çifti olsun. α^* eğrisinin burulması τ^* ise

$$\tau^* = \frac{\kappa}{\lambda\tau} \quad (4.1.9)$$

dır, [11].

Teorem 4.1.5 (α, α^*) Mannheim eğri çifti olsun. α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki birim Darboux vektör C ve α^* partner eğrisinin teğet vektörü T^* olmak üzere

$$C = T^* \quad (4.1.10)$$

dır, [14].

Bu teoremin bir neticesi olarak aşağıdaki sonuç verilebilir:

Sonuç 4.1.1 $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ Mannheim eğrisi ile $\alpha^* : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ Mannheim partner eğrisinin Frenet 3- ayaklısı, sırasıyla $\{T(s), N(s), B(s)\}$ ve $\{T^*(s), N^*(s), B^*(s)\}$ olsun. T ile T^* vektörleri arasındaki açı θ , B ile W Darboux vektörü arasındaki φ açı olmak üzere bu açılar arasında

$$\begin{cases} \sin \varphi = \cos \theta \\ \cos \varphi = -\sin \theta \end{cases} \quad (4.1.11)$$

dır . Sonuç (4.1.1) dikkate alındığında (3.1.4), (4.1.3), (4.1.5) bağıntıları

$$\cos \theta = \frac{\tau}{\|W\|}, \quad -\sin \theta = \frac{\kappa}{\|W\|} \quad (4.1.12)$$

$$\begin{cases} \sin \varphi = \frac{ds^*}{ds} \\ \cos \varphi = \lambda\tau^* \frac{ds^*}{ds} \end{cases} \quad (4.1.13)$$

$$\begin{cases} T^* = \sin \varphi T + \cos \varphi B \\ N^* = -\cos \varphi T + \sin \varphi B \\ B^* = N \end{cases} \quad (4.1.14)$$

şekline dönüşmüş olur. (4.1.11) bağıntısının bir neticesi olarak aşağıdaki sonuç verilebilir:

Sonuç 4.1.2 (α, α^*) Mannheim eğri çiftinin $\alpha(s)$ ve $\alpha^*(s)$ noktalarındaki Frenet vektörleri sırasıyla $\{T(s), N(s), B(s)\}$ ve $\{T^*(s), N^*(s), B^*(s)\}$ olsun. $B(s)$ binormal vektörü ile $W(s)$ Darboux vektörü arasındaki açı φ olmak üzere bu çatılar arasında,

$$\begin{cases} T^* = \sin \varphi T + \cos \varphi B \\ N^* = -\cos \varphi T + \sin \varphi B \\ B^* = N \end{cases}$$

bağıntısı vardır.

Teorem 4.1.6 (α, α^*) Mannheim eğri çifti olsun. α eğrisinin W Darboux vektörü ile α^* eğrisinin W^* Darboux vektörü arasında

$$W^* = -\sec \theta W + \frac{\kappa}{\lambda \tau \|W\|} N$$

bağıntısı vardır, [14].

Teorem 4.1.7 (α, α^*) Mannheim eğri çifti olsun. α eğrisinin C birim Darboux vektörü ile α^* eğrisinin C^* birim Darboux vektörü arasında

$$C^* = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\theta'}{\|W\|}\right)^2}} C + \frac{\frac{\theta'}{\|W\|}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\theta'}{\|W\|}\right)^2}} N$$

bağıntısı vardır, [14].

$\alpha^* : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ Mannheim partner eğrisinin (3.1.4) bağıntısından birim Darboux vektörü

$$C^* = \sin \varphi^* T^* + \cos \varphi^* B^* \quad (4.1.15)$$

yazılır. $\sin \varphi^*$ ve $\cos \varphi^*$ değerleri (3.1.4) bağıntısına benzer olarak

$$\begin{cases} \kappa^* = \|W^*\| \cos \varphi^* \\ \tau^* = \|W^*\| \sin \varphi^* \end{cases}$$

şeklinde olur. Burada (4.1.8) dikkate alınırsa

$$\begin{cases} \sin \varphi^* = \frac{\|W\|}{\sqrt{\theta'^2 + \|W\|^2}} \\ \cos \varphi^* = \frac{\theta'}{\sqrt{\theta'^2 + \|W\|^2}} \\ \varphi^{*'} = \left(\frac{\|W\|}{\sqrt{\theta'^2 + \|W\|^2}} \right)' \frac{\sqrt{\theta'^2 + \|W\|^2}}{\theta'} \end{cases} \quad (4.1.16)$$

olur.

Örnek 4.1.1 $\alpha(s) = \left(a \cos\left(\frac{s}{d}\right), a \sin\left(\frac{s}{d}\right), b \frac{s}{d} \right)$, $d = \sqrt{a^2 + b^2}$ helis eğrisidir. Burada

$$a = 1$$

$$b = 1$$

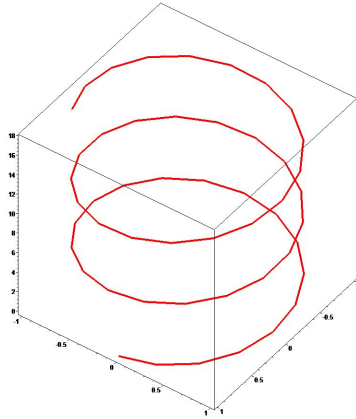
$$d = \sqrt{2}$$

$$\alpha(s) = \left(\cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \frac{s}{\sqrt{2}} \right)$$

olur. Bu eğrinin Frenet elemanları

$$\left\{ \begin{array}{l} T(s) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(\frac{s\sqrt{2}}{2}\right), \frac{\sqrt{2}}{2} \cos\left(\frac{s\sqrt{2}}{2}\right), \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \\ N(s) = \left(-\cos\left(\frac{s\sqrt{2}}{2}\right), -\sin\left(\frac{s\sqrt{2}}{2}\right), 0 \right) \\ B(s) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(\frac{s\sqrt{2}}{2}\right), -\frac{\sqrt{2}}{2} \cos\left(\frac{s\sqrt{2}}{2}\right), \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \\ C(s) = (0, 0, 1) \\ \kappa(s) = \frac{1}{2} \\ \tau(s) = \frac{1}{2} \end{array} \right.$$

şeklinde bulunur. Burada $\frac{\kappa}{\kappa^2 + \tau^2} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = 1$ olduğu için helis eğrisi bir Mannheim eğrisidir.



Şekil 4.2: Helis eğrisi

4.2 Öklid Uzayında Smarandache Eğrileri

Tanım 4.2.1 Konum vektörü, herhangi bir α eğrisinin Frenet çatıları tarafından oluşturulan ve bu vektör tarafından çizilen regüler eğriye Smarandache eğrisi denir, [18].

Bu tanım şu şekilde de verilebilir:

Tanım 4.2.2 $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ birim hızlı regüler eğrinin Frenet çatısı $\{T, N, B\}$ olsun.

$$\beta(s) = \frac{a(s)T(s) + b(s)N(s) + c(s)B(s)}{\sqrt{a(s)^2 + b(s)^2 + c(s)^2}} \quad (4.2.1)$$

regüler eğriye Smarandache eğrisi denir, [15].

Tanım 4.2.3 $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ birim hızlı regüler eğrinin Frenet çatısı $\{T, N, B\}$ olsun. TN -Smarandache eğrisi

$$\beta_{TN} = \frac{1}{\sqrt{2}}(T + N)$$

şeklinde tanımlanır, [1].

Teorem 4.2.1 $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisinin Frenet çatısı $\{T, N, B\}$, eğriliği κ ve torsiyonu τ olsun TN -Smarandache eğrisinin $\kappa_{\beta_{TN}}$ eğriliği ve $\tau_{\beta_{TN}}$ torsiyonu sırasıyla,

$$\kappa_{\beta_{TN}} = \sqrt{2} \frac{\sqrt{\mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2}}{(2\kappa^2 + \tau^2)^2},$$

$$\tau_{\beta_{TN}} = \frac{\sqrt{2}[(\kappa^2 + \tau^2 - \kappa')(\kappa\sigma + \tau w) + \kappa(\kappa\tau + \tau')(\phi - w) + (\kappa^2 + \kappa')(\kappa\sigma - \tau\phi)]}{[\tau(2\kappa^2 + \tau^2) + \kappa\tau' - \kappa'\tau]^2 + (\kappa'\tau - \kappa\tau')^2 + (2\kappa^3 + \kappa\tau^2)^2}$$

dır. Burada

$$\begin{cases} \mu_1 = -[\kappa^2(2\kappa^2 + \tau^2) + \tau(\tau\kappa' - \kappa\tau')] \\ \mu_2 = -[\kappa^2(2\kappa^2 + 3\tau^2) + \tau(\tau^3 - \tau\kappa' + \kappa\tau')] \\ \mu_3 = \kappa[\tau(2\kappa^2 + \tau^2) - 2(\tau\kappa' - \kappa\tau')] \end{cases}$$

$$\begin{cases} w = \kappa^3 + \kappa(\tau^2 - 3\kappa') - \kappa'' \\ \phi = -\kappa^3 - \kappa(\tau^2 + 3\kappa') - 3\tau\tau' + \kappa'' \\ \sigma = -\kappa^2\tau - \tau^3 + 2\tau\kappa' + \kappa\tau' + \tau'' \end{cases}$$

şeklinde birer katsayılarıdır, [1].

İspat.

$$\beta_{TN}(s) = \frac{(T + N)}{\sqrt{2}}$$

Smarandache eğrisinin $s_{\beta_{TN}}$ yay parametresine göre türevi alınırsa

$$T_{\beta_{TN}} \frac{ds_{\beta_{TN}}}{ds} = \frac{(-\kappa T + \kappa N + \tau B)}{\sqrt{2}} \quad (4.2.2)$$

olur ve norm alınırsa $\frac{ds_{\beta_{TN}}}{ds}$ ifadesi

$$\frac{ds_{\beta_{TN}}}{ds} = \sqrt{\frac{2\kappa^2 + \tau^2}{2}}$$

şeklinde bulunur. Bu ifade (4.2.2) de yerine yazılırsa β_{TN} eğrisinin teğet vektörü

$$T_{\beta_{TN}}(s) = \frac{-\kappa T + \kappa N + \tau B}{\sqrt{2\kappa^2 + \tau^2}}$$

olur. Bu ifadenin tekrar türevi alınırsa katsayılar

$$\begin{cases} \mu_1 = -[\kappa^2(2\kappa^2 + \tau^2) + \tau(\tau\kappa' - \kappa\tau')] \\ \mu_2 = -[\kappa^2(2\kappa^2 + 3\tau^2) + \tau(\tau^3 - \tau\kappa' + \kappa\tau')] \\ \mu_3 = \kappa[\tau(2\kappa^2 + \tau^2) - 2(\tau\kappa' - \kappa\tau')]. \end{cases}$$

olmak üzere $T'_{\beta_{TN}}$ türevi

$$T'_{\beta_{TN}}(s) = \frac{\sqrt{2}}{(2\kappa^2 + \tau^2)^2} (\mu_1 T + \mu_2 N + \mu_3 B) \quad (4.2.3)$$

şeklinde bulunur. β_{TN} eğrisinin eğriliği $\kappa_{\beta_{TN}}$ ile gösterilirse (4.2.3) bağıntısından $\kappa_{\beta_{TN}}$ eğriliği

$$\kappa_{\beta_{TN}} = \|T'_{\beta_{TN}}\| ,$$

$$\kappa_{\beta_{TN}} = \sqrt{2} \frac{\sqrt{\mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2}}{(2\kappa^2 + \tau^2)^2}$$

olur. β_{TN} eğrisinin aslinormali $N_{\beta_{TN}}$ ile gösterilirse

$$N_{\beta_{TN}} = \frac{T'_{\beta_{TN}}}{\|T'_{\beta_{TN}}\|},$$

$$N_{\beta_{TN}} = \frac{\mu_1 T + \mu_2 N + \mu_3 B}{\sqrt{\mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2}}$$

şeklinde bulunur. $B_{\beta_{TN}} = T_{\beta_{TN}} \wedge N_{\beta_{TN}}$ olduğundan $B_{\beta_{TN}}$ vektörü

$$B_{\beta_{TN}} = \frac{(\kappa\mu_3 - \tau\mu_2)T + (\kappa\mu_3 + \tau\mu_1)N + (-\kappa\mu_2 - \kappa\mu_1)B}{\sqrt{(\mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2)(2\kappa^2 + \tau^2)}}$$

olur. β_{TN} eğrisinin ikinci ve üçüncü türevleri sırasıyla

$$\beta''_{TN} = \frac{-(\kappa^2 + \kappa')T + (\kappa' - \kappa^2 - \tau^2)N + (\kappa\tau + \tau')B}{\sqrt{2}}$$

ve

$$\beta'''_{TN} = \frac{wT + \phi N + \sigma B}{\sqrt{2}}$$

dır. Burada katsayılar

$$\begin{cases} w = \kappa^3 + \kappa(\tau^2 - 3\kappa') - \kappa'' \\ \phi = -\kappa^3 - \kappa(\tau^2 + 3\kappa') - 3\tau\tau' + \kappa'' \\ \sigma = -\kappa^2\tau - \tau^3 + 2\tau\kappa' + \kappa\tau' + \tau'' \end{cases}$$

şeklindedir. β_{TN} eğrisinin torsiyonu $\tau_{\beta_{TN}}$ ile gösterilirse $\tau_{\beta_{TN}}$ torsiyonu

$$\tau_{\beta_{TN}} = \frac{\det(\beta'_{TN}, \beta''_{TN}, \beta'''_{TN})}{\|\beta'_{TN} \wedge \beta''_{TN}\|^2},$$

$$\tau_{\beta_{TN}} = \frac{\sqrt{2}[(\kappa^2 + \tau^2 - \kappa')(\kappa\sigma + \tau w) + \kappa(\kappa\tau + \tau')(\phi - w) + (\kappa^2 + \kappa')(\kappa\sigma - \tau\phi)]}{[\tau(2\kappa^2 + \tau^2) + \kappa\tau' - \kappa'\tau]^2 + (\kappa'\tau - \kappa\tau')^2 + (2\kappa^3 + \kappa\tau^2)^2}$$

şeklinde elde edilir. \square

Tanım 4.2.4 $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ birim hızlı regüler eğrinin Frenet çatısı $\{T, N, B\}$ olsun. NB -Smarandache eğrisi

$$\beta_{NB} = \frac{1}{\sqrt{2}}(N + B)$$

şeklinde tanımlanır, [1].

Teorem 4.2.2 $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisinin Frenet çatısı $\{T, N, B\}$, eğriliği κ ve torsiyonu τ olsun NB -Smarandache eğrisinin $\kappa_{\beta_{NB}}$ eğriliği $\tau_{\beta_{NB}}$ torsiyonu sırasıyla,

$$\kappa_{\beta_{NB}} = \sqrt{2} \frac{\sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 + \rho_3^2}}{(2\tau^2 + \kappa^2)^2},$$

$$\tau_{\beta_{NB}} = \frac{\sqrt{2}[2\tau^3\varpi + 2\tau^2\kappa\pi + \tau\kappa^2\varpi + \kappa^3\pi - \kappa'\tau\pi - \kappa'\tau\varpi + \kappa\tau'\pi + \kappa\tau'\varpi]}{[\tau(2\tau^2 + \kappa^2)]^2 + [-\tau\kappa' + \kappa\tau']^2 + [2\tau^2\kappa + \kappa^3 - \kappa'\tau + \kappa\tau']^2}$$

dır. Burada

$$\begin{cases} \rho_1 = \tau[2\tau^2\kappa + \kappa^3 - 2\kappa'\tau + 2\kappa\tau'] \\ \rho_2 = -2\tau^4 - 3\tau^2\kappa^2 - \kappa^4 + \kappa'\tau\kappa - \kappa^2\tau' \\ \rho_3 = -2\tau^4 - \tau^2\kappa^2 - \kappa'\tau\kappa + \kappa^2\tau'. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varpi = -\tau^3\kappa + \kappa^3 + \kappa'\tau + 2\kappa\tau' - \kappa'' \\ \varpi = \tau^3 + \tau\kappa^2 - 3\kappa\kappa' + 3\tau^2\tau' - \tau'' \\ \pi = \tau^3 + \tau\kappa^2 - 3\tau\tau' - \tau\tau'' \end{cases}$$

şeklinde birer katsayılarıdır, [15].

İspat.

$$\beta_{NB}(s) = \frac{(N + B)}{\sqrt{2}}$$

Smarandache eğrisinin $s_{\beta_{NB}}$ yay parametresine göre türevi alınırsa

$$T_{\beta_{NB}} \frac{ds_{\beta_{NB}}}{ds} = \frac{(-\kappa T - \tau N + \tau B)}{\sqrt{2}} \quad (4.2.4)$$

olur ve norm alınırsa $\frac{ds_{\beta_{NB}}}{ds}$ ifadesi

$$\frac{ds_{\beta_{NB}}}{ds} = \sqrt{\frac{2\tau^2 + \kappa^2}{2}}$$

şeklinde bulunur. Bu ifade (4.2.4) de yerine yazılırsa β_{NB} eğrisinin teğet vektörü

$$T_{\beta_{NB}}(s) = \frac{-\kappa T - \tau N + \tau B}{\sqrt{2\tau^2 + \kappa^2}}$$

olur. Bu ifadenin tekrar türevi alınırsa katsayılar

$$\begin{cases} \rho_1 = \tau[2\tau^2\kappa + \kappa^3 - 2\kappa'\tau + 2\kappa\tau'] \\ \rho_2 = -2\tau^4 - 3\tau^2\kappa^2 - \kappa^4 + \kappa'\tau\kappa - \kappa^2\tau' \\ \rho_3 = -2\tau^4 - \tau^2\kappa^2 - \kappa'\tau\kappa + \kappa^2\tau'. \end{cases}$$

olmak üzere $T'_{\beta_{NB}}(s)$ türevi

$$T'_{\beta_{NB}}(s) = \frac{\sqrt{2}}{(2\tau^2 + \kappa^2)^2}(\rho_1 T + \rho_2 N + \rho_3 B) \quad (4.2.5)$$

şeklinde bulunur. β_{NB} eğrisinin eğriliği $\kappa_{\beta_{NB}}$ ile gösterilirse (4.2.5) bağıntısından $\kappa_{\beta_{NB}}$ eğriliği

$$\kappa_{\beta_{NB}} = \|T'_{\beta_{NB}}\|$$

$$\kappa_{\beta_{NB}} = \sqrt{2} \frac{\sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 + \rho_3^2}}{(2\tau^2 + \kappa^2)^2}$$

olur. β_{NB} eğrisinin aslinormali $N_{\beta_{NB}}$ ile gösterilirse

$$N_{\alpha_2} = \frac{T'_{\beta_{NB}}}{\|T'_{\beta_{NB}}\|}$$

$$N_{\alpha_2} = \frac{\rho_1 T + \rho_2 N + \rho_3 B}{\sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 + \rho_3^2}}$$

şeklinde bulunur. $B_{\beta_{NB}} = T_{\beta_{NB}} \wedge N_{\beta_{NB}}$ olduğundan $B_{\beta_{NB}}$ vektörü

$$B_{\beta_{NB}} = \frac{(-\tau\rho_3 - \tau\rho_2)T + (\kappa\rho_3 + \tau\rho_1)N + (-\kappa\rho_2 + \tau\rho_1)B}{\sqrt{(\rho_1^2 + \rho_2^2 + \rho_3^2)(2\tau^2 + \kappa^2)}}$$

olur. β_{NB} eğrisinin ikinci ve üçüncü türevleri sırasıyla

$$\beta''_{NB} = \frac{(\kappa' + \kappa\tau)T + (\kappa^2 - \tau' - \tau^2)N + (-\tau^2 + \tau')B}{\sqrt{2}}$$

ve

$$\beta'''_{NB} = \frac{\varpi T + oN + \pi B}{\sqrt{2}}$$

dır. Burada katsayılar

$$\begin{cases} \varpi = -\tau^3\kappa + \kappa^3 + \kappa'\tau + 2\kappa\tau' - \kappa'' \\ o = \tau^3 + \tau\kappa^2 - 3\kappa\kappa' + 3\tau^2\tau' - \tau'' \\ \pi = \tau^3 + \tau\kappa^2 - 3\tau\tau' - \tau\tau'' \end{cases}$$

şeklinindedir. β_{NB} eğrisinin torsiyonu $\tau_{\beta_{NB}}$ ile gösterilirse $\tau_{\beta_{NB}}$ torsiyonu

$$\tau_{\beta_{NB}} = \frac{\det(\beta'_{NB}, \beta''_{NB}, \beta'''_{NB})}{\|\beta'_{NB} \wedge \beta''_{NB}\|^2},$$

$$\tau_{\beta_{NB}} = \frac{\sqrt{2}[2\tau^3\varpi + 2\tau^2\kappa\pi + \tau\kappa^2\varpi + \kappa^3\pi - \kappa'\tau\pi - \kappa'\tau o + \kappa\tau'\pi + \kappa\tau'o]}{[\tau(2\tau^2 + \kappa^2)]^2 + [-\tau\kappa' + \kappa\tau']^2 + [2\tau^2\kappa + \kappa^3 - \kappa'\tau + \kappa\tau']^2}$$

şeklinde elde edilir. \square

Tanım 4.2.5 $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ birim hızlı regüler eğrinin Frenet çatısı $\{T, N, B\}$ olsun. TB -Smarandache eğrisi

$$\beta_{TB} = \frac{1}{\sqrt{2}}(T + B)$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 4.2.3 $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisinin Frenet çatısı $\{T, N, B\}$, eğriliği κ ve torsiyonu τ olsun TB -Smarandache eğrisinin $\kappa_{\beta_{TB}}$ eğriliği $\tau_{\beta_{TB}}$ torsiyonu sırasıyla,

$$\kappa_{\beta_{TB}} = \frac{\sqrt{2(\kappa^2 + \tau^2)}}{\kappa - \tau},$$

$$\tau_{\beta_{TB}} = \frac{\sqrt{2}[\kappa^3\varepsilon_3 - 2\kappa^2\tau\varepsilon_3 + \kappa^2\tau\varepsilon_1 + \kappa\tau^2\varepsilon_3 - 2\kappa\tau^2\varepsilon_1 + \tau^3\varepsilon_1]}{[\tau(\kappa - \tau)^2]^2 + [\kappa(\kappa - \tau)^2]^2}$$

dır. Burada

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = -3\kappa\kappa' + 2\kappa\tau' + \kappa'\tau \\ \varepsilon_2 = \kappa^3 + \tau\kappa^2 - \kappa\tau^2 + \tau^3 + \kappa'' - \tau'' \\ \varepsilon_3 = \kappa\tau' + 2\kappa'\tau - 3\tau\tau' \end{cases}$$

şeklinde birer katsayılarıdır.

İspat.

$$\beta_{TB}(s) = \frac{(T + B)}{\sqrt{2}}$$

Smarandache eğrisinin $s_{\beta_{TB}}$ yay parametresine göre türevi alınırsa

$$T_{\beta_{TB}} \frac{ds_{\beta_{TB}}}{ds} = \frac{(\kappa - \tau)N}{\sqrt{2}} \quad (4.2.6)$$

olur ve norm alınırsa $\frac{ds_{\beta_{TB}}}{ds}$ ifadesi

$$\frac{ds_{\beta_{TB}}}{ds} = \sqrt{\frac{(\kappa - \tau)^2}{2}}$$

şeklinde bulunur. Bu ifade (4.2.6) de yerine yazılırsa β_{TB} eğrisinin teğet vektörü

$$T_{\beta_{TB}}(s) = N$$

olur. Bu ifadenin tekrar türevi alınırsa

$$T'_{\beta_{TB}}(s) = \frac{\sqrt{2}}{\kappa - \tau}(-\kappa T + \tau B) \quad (4.2.7)$$

şeklinde bulunur. β_{TB} eğrisinin eğriliği $\kappa_{\beta_{TB}}$ ile gösterilirse (4.2.7) bağıntısından $\kappa_{\beta_{TB}}$ eğriliği

$$\kappa_{\beta_{TB}} = \|T'_{\beta_{TB}}\|$$

$$\kappa_{\beta_{TB}} = \frac{\sqrt{2(\kappa^2 + \tau^2)}}{\kappa - \tau}$$

olur. β_{TB} eğrisinin aslinormali $N_{\beta_{TB}}$ ile gösterilirse

$$N_{\beta_{TB}} = \frac{T'_{\beta_{TB}}}{\|T'_{\beta_{TB}}\|}$$

$$N_{\beta_{TB}} = \frac{-\kappa T + \tau B}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}$$

şeklinde bulunur. $B_{\beta_{TB}} = T_{\beta_{TB}} \wedge N_{\beta_{TB}}$ olduğundan $B_{\beta_{TB}}$ vektörü

$$B_{\beta_{TB}} = \frac{\tau T + \kappa B}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}$$

olur. β_{TB} eğrisinin ikinci ve üçüncü türevleri sırasıyla

$$\beta''_{TB} = \frac{(-\kappa^2 + \tau\kappa)T + (\kappa' - \tau')N + (\kappa\tau - \tau^2)B}{\sqrt{2}}$$

ve

$$\beta'''_{TB} = \frac{\varepsilon_1 T + \phi N + \varepsilon_3 B}{\sqrt{2}}$$

dır. Burada katsayılar

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = -3\kappa\kappa' + 2\kappa\tau' + \kappa'\tau \\ \varepsilon_2 = \kappa^3 + \tau\kappa^2 - \kappa\tau^2 + \tau^3 + \kappa'' - \tau'' \\ \varepsilon_3 = \kappa\tau' + 2\kappa'\tau - 3\tau\tau' \end{cases}$$

şeklinindedir. β_{TB} eğrisinin torsiyonu $\tau_{\beta_{TB}}$ ile gösterilirse $\tau_{\beta_{TB}}$ torsiyonu

$$\tau_{\beta_{TB}} = \frac{\det(\beta'_{TB}, \beta''_{TB}, \beta'''_{TB})}{\|\beta'_{TB} \wedge \beta''_{TB}\|^2},$$

$$\tau_{\beta_{TNB}} = \frac{\sqrt{2}[\kappa^3\epsilon_3 - 2\kappa^2\tau\epsilon_3 + \kappa^2\tau\epsilon_1 + \kappa\tau^2\epsilon_3 - 2\kappa\tau^2\epsilon_1 + \tau^3\epsilon_1]}{[\tau(\kappa - \tau)^2]^2 + [\kappa(\kappa - \tau)^2]^2}$$

şeklinde elde edilir.

□

Tanım 4.2.6 $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ birim hızlı regüler eğrinin Frenet çatısı $\{T, N, B\}$ olsun. TNB -Smarandache eğrisi

$$\beta_{TNB} = \frac{1}{\sqrt{3}}(T + N + B)$$

şeklinde tanımlanır, [1].

Teorem 4.2.4 $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisinin Frenet çatısı $\{T, N, B\}$, eğriliği κ ve torsiyonu τ olsun TNB -Smarandache eğrisinin $\kappa_{\beta_{TNB}}$ eğriliği ve $\tau_{\beta_{TNB}}$ torsiyonu sırasıyla,

$$\kappa_{\beta_{TNB}} = \frac{\sqrt{3}\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}}{2(\kappa^2 + \tau^2 - \kappa\tau)^2},$$

$$\tau_{\beta_{TNB}} = \frac{\sqrt{3}\left[2\kappa^3\epsilon_3 - 2\kappa^2\tau\epsilon_3 + 2\kappa^2\tau\epsilon_1 + 2\kappa\tau^2\epsilon_3 - 2\kappa\tau^2\epsilon_1 + 2\tau^3\epsilon_1 + \kappa\tau'\epsilon_3 - \kappa'\tau\epsilon_3 + \kappa\tau'\epsilon_2 + \kappa\tau'\epsilon_1 - \kappa'\tau\epsilon_2 - \kappa'\tau\epsilon_1\right]}{[2\kappa\tau(\kappa - \tau) + 2\tau^3 + \kappa\tau' - \kappa'\tau]^2 + [2\kappa^3 - 2\kappa\tau(\kappa - \tau) + \kappa\tau' - \kappa'\tau]^2 + [\kappa\tau' - \kappa'\tau]^2}$$

dır. Burada

$$\begin{cases} v_1 = 2\tau^3\kappa - 4\tau^2\kappa^2 + 4\tau\kappa^3 - 2\kappa^4 - 2\kappa'\tau^2 + \kappa'\tau\kappa + 2\tau\kappa\tau' \\ \quad - \kappa^2\tau' \\ v_2 = -2\tau^4 + 2\tau^3\kappa - 4\tau^2\kappa^2 + 2\tau\kappa^3 - 2\kappa^4 + \kappa'\tau^2 + \kappa'\tau\kappa - \kappa^2\tau' \\ \quad - \tau\kappa\tau' \\ v_3 = -2\tau^4 + 4\tau^3\kappa - 4\tau^2\kappa^2 + 2\tau\kappa^3 + \kappa'\tau^2 - 2\kappa'\tau\kappa - \tau\kappa\tau' \\ \quad + 2\kappa^2\tau' \end{cases}$$

$$\begin{cases} \epsilon_1 = -\kappa'' + \kappa^3 - 3\kappa\kappa' + 2\tau'\kappa + \tau\kappa' + \tau^2\kappa \\ \epsilon_2 = -3\kappa\kappa' + \kappa'' - \tau'' - \kappa^3 - \kappa\tau^2 + \tau\kappa^2 + \tau^3 - 3\tau\tau' \\ \epsilon_3 = -\kappa^2\tau + 2\kappa'\tau - 3\tau\tau' + \kappa\tau' + \tau'' - \tau^3 \end{cases}$$

şeklinde birer katsayılarıdır, [15].

İspat.

$$\beta_{TNB}(s) = \frac{(T + N + B)}{\sqrt{3}}$$

Smarandache eğrisinin $s_{\beta_{TNB}}$ yay parametresine göre türevi alınırsa

$$T_{\beta_{TNB}} \frac{ds_{\beta_{TNB}}}{ds} = \frac{-\kappa T + (\kappa - \tau)N + \tau B}{\sqrt{3}} \quad (4.2.8)$$

olur ve norm alınırsa $\frac{ds_{\beta_{TNB}}}{ds}$ ifadesi

$$\frac{ds_{\beta_{TNB}}}{ds} = \sqrt{\frac{2(\kappa^2 + \tau^2 - \kappa\tau)}{3}}$$

şeklinde bulunur. Bu ifade (4.2.8) de yerine yazılırsa β_{TNB} eğrisinin teğet vektörü

$$T_{\beta_{TNB}}(s) = \frac{-\kappa T + (\kappa - \tau)N + \tau B}{\sqrt{2(\kappa^2 + \tau^2 - \kappa\tau)}}$$

olur. Bu ifadenin tekrar türevi alınırsa katsayılar

$$\begin{cases} v_1 = 2\tau^3\kappa - 4\tau^2\kappa^2 + 4\tau\kappa^3 - 2\kappa^4 - 2\kappa'\tau^2 + \kappa'\tau\kappa + 2\tau\kappa\tau' \\ \quad - \kappa^2\tau' \\ v_2 = -2\tau^4 + 2\tau^3\kappa - 4\tau^2\kappa^2 + 2\tau\kappa^3 - 2\kappa^4 + \kappa'\tau^2 + \kappa'\tau\kappa - \kappa^2\tau' \\ \quad - \tau\kappa\tau' \\ v_3 = -2\tau^4 + 4\tau^3\kappa - 4\tau^2\kappa^2 + 2\tau\kappa^3 + \kappa'\tau^2 - 2\kappa'\tau\kappa - \tau\kappa\tau' \\ \quad + 2\kappa^2\tau' \end{cases}$$

olmak üzere $T'_{\beta_{TNB}}(s)$ türevi

$$T'_{\beta_{TNB}}(s) = \frac{\sqrt{3}}{2(\kappa^2 + \tau^2 - \kappa\tau)^2} (v_1T + v_2N + v_3B) \quad (4.2.9)$$

şeklinde bulunur. β_{TNB} eğrisinin eğriliği $\kappa_{\beta_{TNB}}$ ile gösterilirse (4.2.9) bağıntısından $\kappa_{\beta_{TNB}}$ eğriliği

$$\kappa_{\beta_{TNB}} = \|T'_{\beta_{TNB}}\| ,$$

$$\kappa_{\beta_{TNB}} = \frac{\sqrt{3}\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}}{2(\kappa^2 + \tau^2 - \kappa\tau)^2}$$

olur. β_{TNB} eğrisinin aslinormali $N_{\beta_{TNB}}$ ile gösterilirse

$$N_{\beta_{TNB}} = \frac{T'_{\beta_{TNB}}}{\|T'_{\beta_{TNB}}\|} ,$$

$$N_{\beta_{TNB}} = \frac{v_1T + v_2N + v_3B}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}}$$

şeklinde bulunur. $B_{\beta_{TNB}} = T_{\beta_{TNB}} \wedge N_{\beta_{TNB}}$ olduğundan $B_{\beta_{TNB}}$ vektörü

$$B_{\beta_{TNB}} = \frac{((\kappa - \tau)v_3 - \tau v_2)T + (\kappa v_3 + \tau v_1)N + (-\kappa v_2 - (\kappa - \tau)v_1)B}{\sqrt{2(\kappa^2 + \tau^2 - \kappa\tau)(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2)}}$$

olur. β_{TNB} eğrisinin ikinci ve üçüncü türevleri sırasıyla

$$\beta''_{TNB} = \frac{(-\kappa' - \kappa^2 + \tau\kappa)T + (-\kappa^2 + \kappa' - \tau' - \tau^2)N + (\kappa\tau - \tau^2 + \tau')B}{\sqrt{3}}$$

ve

$$\beta'''_{TNB} = \frac{\epsilon_1T + \epsilon_2N + \epsilon_3B}{\sqrt{3}}$$

dır. Burada katsayılar

$$\begin{cases} \epsilon_1 = -\kappa'' + \kappa^3 - 3\kappa\kappa' + 2\tau'\kappa + \tau\kappa' + \tau^2\kappa \\ \epsilon_2 = -3\kappa\kappa' + \kappa'' - \tau'' - \kappa^3 - \kappa\tau^2 + \tau\kappa^2 + \tau^3 - 3\tau\tau' \\ \epsilon_3 = -\kappa^2\tau + 2\kappa'\tau - 3\tau\tau' + \kappa\tau' + \tau'' - \tau^3 \end{cases}$$

şeklinindedir. β_{TNB} eğrisinin torsiyonu $\tau_{\beta_{TNB}}$ ile gösterilirse $\tau_{\beta_{TNB}}$ torsiyonu

$$\tau_{\beta_{TNB}} = \frac{\det(\beta'_{TNB}, \beta''_{TNB}, \beta'''_{TNB})}{\|\beta'_{TNB} \wedge \beta''_{TNB}\|^2} ,$$

$$\tau_{\beta_{TNB}} = \frac{\sqrt{3} \left[2\kappa^3 \epsilon_3 - 2\kappa^2 \tau \epsilon_3 + 2\kappa^2 \tau \epsilon_1 + 2\kappa \tau^2 \epsilon_3 - 2\kappa \tau^2 \epsilon_1 + 2\tau^3 \epsilon_1 + \kappa \tau' \epsilon_3 - \kappa' \tau \epsilon_3 + \kappa \tau' \epsilon_2 + \kappa \tau' \epsilon_1 - \kappa' \tau \epsilon_2 - \kappa' \tau \epsilon_1 \right]}{[2\kappa \tau (\kappa - \tau) + 2\tau^3 + \kappa \tau' - \kappa' \tau]^2 + [2\kappa^3 - 2\kappa \tau (\kappa - \tau) + \kappa \tau' - \kappa' \tau]^2 + [\kappa \tau' - \kappa' \tau]^2}$$

şeklinde elde edilir. \square

Tanım 4.2.7 $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ birim hızlı regüler eğrinin Frenet çatısı $\{T, N, B\}$ olsun. NC -Smarandache eğrisi

$$\beta_{NC} = \frac{1}{\sqrt{2}}(N + C)$$

şeklinde tanımlanır, [15].

Teorem 4.2.5 $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisinin Frenet çatısı $\{T, N, B\}$, eğriliği κ ve torsiyonu τ olsun NC -Smarandache eğrisinin $\kappa_{\beta_{NC}}$ eğriliği ve $\tau_{\beta_{NC}}$ torsiyonu sırasıyla,

$$\kappa_{\beta_{NC}} = \frac{\sqrt{2} \sqrt{\chi_1^2 + \chi_2^2 + \chi_3^2}}{(\varphi'^2 + \|W\|^2 - 2\varphi' \|W\|)^2},$$

$$\tau_{\beta_{NC}} = \frac{\sqrt{2} \left[-2\iota_1 \tau^2 \varphi' \sin \varphi + \iota_1 \tau \varphi'^2 \sin^2 \varphi - \iota_1 \kappa^2 \varphi' \sin \varphi + \kappa \iota_2 \tau + \varphi'^3 \cos^2 \varphi \iota_2 + \varphi'^2 \cos^2 \varphi \iota_3 \kappa - 2\varphi' \cos \varphi \iota_3 \kappa^2 - \varphi' \cos \varphi \iota_3 \tau^2 - \varphi' \cos \varphi \iota_2 \tau - \kappa \iota_2 \varphi'' \sin \varphi - \kappa \iota_2 \varphi'^2 \cos \varphi + \iota_2 \varphi'' \cos \varphi \tau - \iota_2 \varphi'^2 \sin \varphi \tau + \varphi'^2 \cos \varphi \iota_3 \tau \sin \varphi + \iota_2 \kappa' \varphi' \sin \varphi - \kappa \iota_3 \tau \varphi' \sin \varphi - \iota_1 \kappa \varphi' \cos \varphi \tau + \iota_1 \kappa \varphi'^2 \cos \varphi \sin \varphi + \iota_1 \kappa^2 \tau + \iota_2 \varphi'^3 \sin^2 \varphi - \iota_2 \kappa' \tau + \kappa \iota_3 \tau^2 + \iota_3 \kappa^3 + \iota_1 \tau^3 \right]}{[(\kappa \varphi'^2 \sin \varphi) \cos \varphi + (\tau \varphi'^2 \sin \varphi - \kappa^2 \varphi' - 2\tau^2 \varphi') \sin \varphi + \kappa^2 \tau + \tau^3]^2 + (\tau \varphi'' - \tau' \varphi' - \kappa \varphi'^2) \cos \varphi + (\kappa' \varphi' - \tau \varphi'^2 - \kappa \varphi'') \sin \varphi - \tau \kappa' + \varphi'^3 + \kappa \tau']^2 + [(\kappa \varphi'^2 \cos \varphi + \tau \varphi'^2 \sin \varphi - 2\kappa^2 \varphi' - \tau^2 \varphi') \cos \varphi + \kappa^3 + \kappa \tau^2 - \kappa \tau \varphi' \sin \varphi]^2}$$

dır. Burada

$$\left\{ \begin{array}{l} \chi_1 = 2\tau^2 \varphi'' \cos \varphi - \kappa \varphi' \varphi'' \cos^2 \varphi - \tau \varphi' \varphi'' \sin \varphi \cos \varphi - \varphi'^4 \sin \varphi - \tau^2 \kappa' - \tau^2 \varphi'^2 \sin \varphi + 2\kappa \varphi'^3 \sin \varphi \cos \varphi + 2\tau \varphi'^3 \sin^2 \varphi - \kappa^2 \varphi'^2 \sin \varphi - 2\kappa \kappa' \varphi' \cos \varphi - 2\kappa' \tau \varphi' \sin \varphi - \tau \tau' \varphi' \cos \varphi + \kappa' \varphi' \cos^2 \varphi - \kappa' \varphi'^2 + \tau' \varphi'^2 \sin \varphi \cos \varphi \kappa \varphi' \varphi'' + \kappa \tau \tau' - \kappa \tau \varphi'' \sin \varphi - \varphi' \tau' \kappa \sin \varphi \\ \chi_2 = \kappa \varphi'^3 \cos \varphi + 3\kappa^3 \varphi' \cos \varphi + 3\tau^2 \kappa \varphi' \cos \varphi - 2\kappa^2 \varphi'^2 \cos^2 \varphi - \kappa^2 \varphi'^2 - \tau^2 \varphi'^2 + 3\tau^3 \varphi' \sin \varphi + \tau \varphi'^3 \sin \varphi - 2\tau^2 \varphi'^2 \sin^2 \varphi - 4\kappa \tau \varphi'^2 \sin \varphi \cos \varphi - \kappa^4 - 2\kappa^2 \tau^2 + 3\kappa^2 \tau \varphi' \sin \varphi \\ \chi_3 = 2\tau' \varphi'^2 + \kappa^2 \tau' - 2\kappa \tau' \varphi' \cos \varphi - \kappa^2 \varphi'' \sin \varphi + \kappa \varphi' \varphi'' \sin \varphi \cos \varphi + \tau \varphi' \varphi'' \sin^2 \varphi - \varphi'^4 \cos \varphi - \kappa^2 \varphi'^2 \cos \varphi - \tau' \varphi'^2 \sin^2 \varphi - \tau^2 \varphi'^2 \cos \varphi + 2\kappa \varphi'^3 \cos^2 \varphi + 2\tau \varphi'^3 \sin \varphi \cos \varphi - \tau \varphi' \varphi'' - \tau \kappa \kappa' + \tau \kappa \varphi'' \cos \varphi + \kappa' \tau \varphi' \cos \varphi + \kappa \kappa' \varphi' \sin \varphi - \kappa' \varphi'^2 \sin \varphi \cos \varphi \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} \iota_1 = \varphi''' \cos \varphi - 3\varphi' \varphi'' \sin \varphi - \varphi'^3 \cos \varphi - \kappa'' - \kappa^2 \varphi' \cos \varphi - \kappa \tau \varphi' \sin \varphi \\ \quad + \kappa^3 + \kappa \tau^2 \\ \iota_2 = 2\kappa \varphi'' \cos \varphi - 2\kappa \varphi'^2 \sin \varphi - 3\kappa \kappa' + \kappa \varphi'' \cos \varphi + \tau' \varphi' \sin \varphi + 2\tau \varphi'' \sin \varphi \\ \quad + 2\varphi'^2 \cos \varphi - 3\tau \tau' \\ \iota_3 = (\kappa \tau \varphi' - 3\varphi' \varphi'') \cos \varphi + (\tau^2 \varphi' - \varphi''' + \varphi'^3) \sin \varphi - \kappa^2 \tau - \tau^3 + \tau'' \end{cases}$$

şeklinde birer katsayılarıdır, [15].

İspat.

$$\beta_{NC}(s) = \frac{(N + C)}{\sqrt{2}}$$

Smarandache eğrisinde C birim Darboux vektörünün yerine (3.1.5) den karşılığı yazılırsa

$$\beta_{NC}(s) = \frac{(\sin \varphi T + N + \cos \varphi B)}{\sqrt{2}}$$

olur. Bu eğrinin $s_{\beta_{NC}}$ yay parametresine göre türevi alınır

$$T_{\beta_{NC}} \frac{ds_{\beta_{NC}}}{ds} = \frac{(\varphi' \cos \varphi - \kappa)T + (\tau - \varphi' \sin \varphi)B}{\sqrt{2}} \quad (4.2.10)$$

olur ve norm alınır $\frac{ds_{\beta_{NC}}}{ds}$ ifadesi

$$\frac{ds_{\beta_{NC}}}{ds} = \sqrt{\frac{\varphi'^2 + \|W\|^2 - 2\varphi'\|W\|}{2}}$$

şeklinde bulunur. Bu ifade (4.2.10) de yerine yazılırsa β_{NC} eğrisinin teğet vektörü

$$T_{\beta_{NC}}(s) = \frac{(\varphi' \cos \varphi - \kappa)T + (\tau - \varphi' \sin \varphi)B}{\sqrt{\varphi'^2 + \|W\|^2 - 2\varphi'\|W\|}}$$

olur. Bu ifadenin tekrar türevi alınır katsayılar

$$\left\{ \begin{array}{l} \chi_1 = 2\tau^2\varphi'' \cos \varphi - \kappa\varphi'\varphi'' \cos^2 \varphi - \tau\varphi'\varphi'' \sin \varphi \cos \varphi - \varphi'^4 \sin \varphi - \tau^2\kappa' \\ \quad - \tau^2\varphi'^2 \sin \varphi + 2\kappa\varphi'^3 \sin \varphi \cos \varphi + 2\tau\varphi'^3 \sin^2 \varphi - \kappa^2\varphi'^2 \sin \varphi \\ \quad - 2\kappa\kappa'\varphi' \cos \varphi - 2\kappa'\tau\varphi' \sin \varphi - \tau\tau'\varphi' \cos \varphi + \kappa'\varphi' \cos^2 \varphi - \kappa'\varphi'^2 \\ \quad + \tau'\varphi'^2 \sin \varphi \cos \varphi \kappa\varphi'\varphi'' + \kappa\tau\tau' - \kappa\tau\varphi'' \sin \varphi - \varphi'\tau'\kappa \sin \varphi \\ \chi_2 = \kappa\varphi'^3 \cos \varphi + 3\kappa^3\varphi' \cos \varphi + 3\tau^2\kappa\varphi' \cos \varphi - 2\kappa^2\varphi'^2 \cos^2 \varphi - \kappa^2\varphi'^2 \\ \quad - \tau^2\varphi'^2 + 3\tau^3\varphi' \sin \varphi + \tau\varphi'^3 \sin \varphi - 2\tau^2\varphi'^2 \sin^2 \varphi - 4\kappa\tau\varphi'^2 \sin \varphi \cos \varphi \\ \quad - \kappa^4 - 2\kappa^2\tau^2 + 3\kappa^2\tau\varphi' \sin \varphi \\ \chi_3 = 2\tau'\varphi'^2 + \kappa^2\tau' - 2\kappa\tau'\varphi' \cos \varphi - \kappa^2\varphi'' \sin \varphi + \kappa\varphi'\varphi'' \sin \varphi \cos \varphi \\ \quad + \tau\varphi'\varphi'' \sin^2 \varphi - \varphi'^4 \cos \varphi - \kappa^2\varphi'^2 \cos \varphi - \tau'\varphi'^2 \sin^2 \varphi \\ \quad - \tau^2\varphi'^2 \cos \varphi + 2\kappa\varphi'^3 \cos^2 \varphi + 2\tau\varphi'^3 \sin \varphi \cos \varphi - \tau\varphi'\varphi'' - \tau\kappa\kappa' \\ \quad + \tau\kappa\varphi'' \cos \varphi + \kappa'\tau\varphi' \cos \varphi + \kappa\kappa'\varphi' \sin \varphi - \kappa'\varphi'^2 \sin \varphi \cos \varphi \end{array} \right.$$

olmak üzere $T'_{\beta_{NC}}(s)$ türevi

$$T'_{\beta_{NC}}(s) = \frac{\sqrt{2}}{(\varphi'^2 + \|W\|^2 - 2\varphi'\|W\|)^2} (\chi_1 T + \chi_2 N + \chi_3 B) \quad (4.2.11)$$

şeklinde bulunur. β_{NC} eğrisinin eğriliği $\kappa_{\beta_{NC}}$ ile gösterilirse (4.2.11) bağıntısından $\kappa_{\beta_{NC}}$ eğriliği

$$\kappa_{\beta_{NC}} = \|T'_{\beta_4}\| ,$$

$$\kappa_{\beta_{NC}} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{\chi_1^2 + \chi_2^2 + \chi_3^2}}{(\varphi'^2 + \|\iota_1\|^2 - 2\varphi'\|\iota_1\|)^2}$$

olur. β_{NC} eğrisinin aslinormali $N_{\beta_{NC}}$ ile gösterilirse

$$N_{\beta_{NC}} = \frac{T'_{\beta_4}}{\|T'_{\beta_4}\|} ,$$

$$N_{\beta_{NC}} = \frac{\chi_1 T + \chi_2 N + \chi_3 B}{\sqrt{\chi_1^2 + \chi_2^2 + \chi_3^2}}$$

şeklinde bulunur. $B_{\beta_{NC}} = T_{\beta_{NC}} \wedge N_{\beta_{NC}}$ olduğundan $B_{\beta_{NC}}$ ifadesi

$$B_{\beta_3} = \frac{\chi_2(\varphi' \sin \varphi - \tau)T + (\chi_1(\tau - \varphi' \sin \varphi) - \chi_3(\varphi' \cos \varphi - \kappa))N + \chi_1(\varphi' \cos \varphi - \kappa)B}{\sqrt{(\varphi'^2 + \|W\|^2 - 2\varphi'\|W\|)(\chi_1^2 + \chi_2^2 + \chi_3^2)}}$$

olur. β_{NC} eğrisinin ikinci ve üçüncü türevleri sırasıyla

$$\beta_{NC}'' = \frac{\left[(\varphi'' \cos \varphi - \varphi'^2 \sin \varphi - \kappa')T + (\kappa\varphi' \cos \varphi + \tau\varphi' \sin \varphi - \kappa^2 - \tau^2)N + (\tau - \varphi'' \sin \varphi - \varphi'^2 \cos \varphi)B \right]}{\sqrt{2}}$$

ve

$$\beta_{NC}''' = \frac{\iota_1 T + \iota_2 N + \iota_3 B}{\sqrt{2}}$$

dır. Burada katsayılar

$$\begin{cases} \iota_1 = \varphi''' \cos \varphi - 3\varphi'\varphi'' \sin \varphi - \varphi'^3 \cos \varphi - \kappa'' - \kappa^2\varphi' \cos \varphi - \kappa\tau\varphi' \sin \varphi \\ \quad + \kappa^3 + \kappa\tau^2 \\ \iota_2 = 2\kappa\varphi'' \cos \varphi - 2\kappa\varphi'^2 \sin \varphi - 3\kappa\kappa' + \kappa\varphi'' \cos \varphi + \tau'\varphi' \sin \varphi + 2\tau\varphi'' \sin \varphi \\ \quad + 2\varphi'^2 \cos \varphi - 3\tau\tau' \\ \iota_3 = (\kappa\tau\varphi' - 3\varphi'\varphi'') \cos \varphi + (\tau^2\varphi' - \varphi''' + \varphi'^3) \sin \varphi - \kappa^2\tau - \tau^3 + \tau'' \end{cases}$$

şeklindedir. β_{NC} eğrisinin torsiyonu $\tau_{\beta_{NC}}$ ile gösterilirse $\tau_{\beta_{NC}}$ torsiyonu

$$\tau_{\beta_{NC}} = \frac{\det(\beta'_{NC}, \beta''_{NC}, \beta'''_{NC})}{\|\beta'_{NC} \wedge \beta''_{NC}\|^2},$$

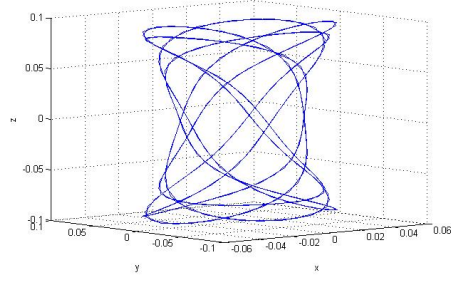
$$\tau_{\beta_{NC}} = \frac{\sqrt{2} \left[-2\iota_1\tau^2\varphi' \sin \varphi + \iota_1\tau\varphi'^2 \sin^2 \varphi - \iota_1\kappa^2\varphi' \sin \varphi + \kappa\iota_2\tau + \varphi'^3 \cos^2 \varphi \iota_2 + \varphi'^2 \cos^2 \varphi \iota_3\kappa - 2\varphi' \cos \varphi \iota_3\kappa^2 - \varphi' \cos \varphi \iota_3\tau^2 - \varphi' \cos \varphi \iota_2\tau - \kappa\iota_2\varphi'' \sin \varphi - \kappa\iota_2\varphi'^2 \cos \varphi + \iota_2\varphi'' \cos \varphi \tau - \iota_2\varphi'^2 \sin \varphi \tau + \varphi'^2 \cos \varphi \iota_3\tau \sin \varphi + \iota_2\kappa'\varphi' \sin \varphi - \kappa\iota_3\tau\varphi' \sin \varphi - \iota_1\kappa\varphi' \cos \varphi \tau + \iota_1\kappa\varphi'^2 \cos \varphi \sin \varphi + \iota_1\kappa^2\tau + \iota_2\varphi'^3 \sin^2 \varphi - \iota_2\kappa'\tau + \kappa\iota_3\tau^2 + \iota_3\kappa^3 + \iota_1\tau^3 \right]}{\left[(\kappa\varphi'^2 \sin \varphi) \cos \varphi + (\tau\varphi'^2 \sin \varphi - \kappa^2\varphi' - 2\tau^2\varphi') \sin \varphi + \kappa^2\tau + \tau^3 \right]^2 + \left[(\tau\varphi'' - \tau'\varphi' - \kappa\varphi'^2) \cos \varphi + (\kappa'\varphi' - \tau\varphi'^2 - \kappa\varphi'') \sin \varphi - \tau\kappa' + \varphi'^3 + \kappa\tau' \right]^2 + \left[(\kappa\varphi'^2 \cos \varphi + \tau\varphi'^2 \sin \varphi - 2\kappa^2\varphi' - \tau^2\varphi') \cos \varphi + \kappa^3 + \kappa\tau^2 - \kappa\tau\varphi' \sin \varphi \right]^2}$$

şeklinde elde edilir, [15]. \square

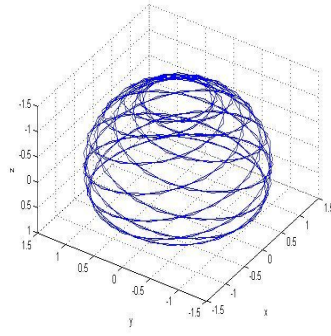
Örnek 4.2.1 $\gamma(s) = \left(\frac{9}{208} \sin 16s - \frac{1}{117} \sin 36s, -\frac{9}{208} \cos 16s + \frac{1}{117} \cos 36s, \frac{6}{65} \sin 10s \right)$
 eğrisinin Frenet vektörleri, [1], ve birim Darboux vektörü

$$\left\{ \begin{array}{l} T(s) = \left(\frac{9}{13} \cos 16s - \frac{4}{13} \cos 36s, \frac{9}{13} \sin 16s - \frac{4}{13} \sin 36s, \frac{12}{13} \cos 10s \right) \\ N(s) = \left(\frac{12}{13} \cos 26s, \frac{12}{13} \sin 26s, -\frac{5}{13} \right) \\ B(s) = \left(-\frac{9}{13} \sin 16s - \frac{4}{13} \sin 36s, \frac{9}{13} \cos 16s + \frac{4}{13} \cos 36s, \frac{12}{13} \sin 10s \right) \\ C(s) = \left(\frac{5}{13} \cos 26s, \frac{5}{13} \sin 26s, \frac{12}{13} \right) \end{array} \right.$$

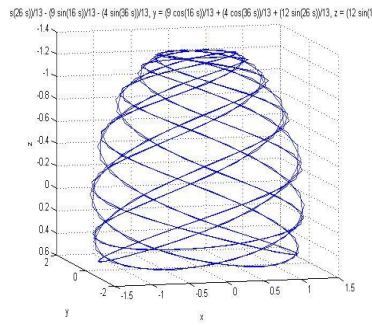
şeklinde bulunur. Bu eğriye ait Smarandache eğrilerinin Mapple ile çizimi aşağıdaki şekillerde gösterilmiştir.



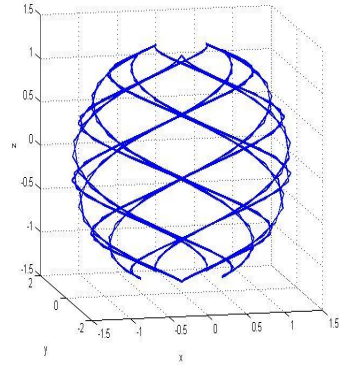
Şekil 4.3: $\gamma = \gamma(s)$ eğrisi



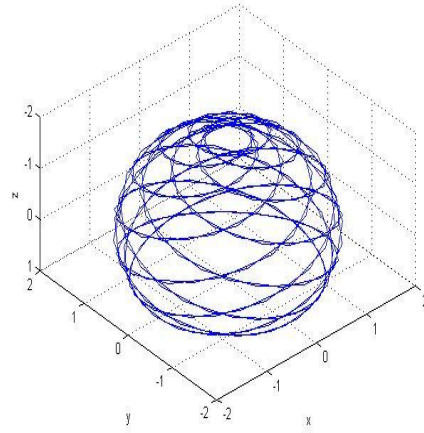
Şekil 4.4: $\gamma(s)$ eğrisine ait $TN - Smarandache$ eğrisi



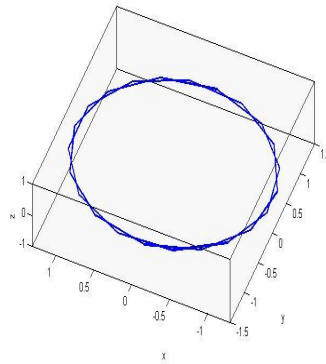
Şekil 4.5: $\gamma(s)$ eğrisine ait $NB - Smarandache$ eğrisi



Şekil 4.6: $\gamma(s)$ eğrisine ait $TB - Smarandache$ eğrisi



Şekil 4.7: $\gamma(s)$ eğrisine ait $TNB - Smarandache$ eğrisi



Şekil 4.8: $\gamma(s)$ eğrisine ait $NC - Smarandache$ eğrisi

5. BULGULAR

Bu bölüm çalışmanın orijinal kısmını oluşturmaktadır. Burada, $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ Mannheim eğrisi $\alpha^* : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ Mannheim partner eğrisi olarak alındığında konum vektörü, partner eğrisinin Frenet çatıları tarafından çizilen regüler Smarandache eğrileri

$$\begin{aligned}\beta_1 = \beta_{T^*N^*} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(T^* + N^*) \quad T^*N^*\text{-Smarandache eğrisi} \\ \beta_2 = \beta_{N^*B^*} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(N^* + B^*) \quad N^*B^*\text{-Smarandache eğrisi} \\ \beta_3 = \beta_{T^*B^*} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(T^* + B^*) \quad T^*B^*\text{-Smarandache eğrisi} \\ \beta_4 = \beta_{T^*N^*B^*} &= \frac{1}{\sqrt{3}}(T^* + N^* + B^*) \quad T^*N^*B^*\text{-Smarandache eğrisi} \\ \beta_5 = \beta_{N^*C^*} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(N^* + C^*) \quad N^*C^*\text{-Smarandache eğrisi}[1].\end{aligned}$$

şeklinde gösterilecek ve bu eğrilerin eğrilik ve burulmaları hesaplanacaktır. Smarandache eğrilerinin eğrilik ve burulmaları Mannheim eğrisinin eğrilik ve burulmalarına bağlı olarak ifade edilecektir.

5.1 T^*N^* Smarandache Eğrisi

$$\beta_1(s) = \frac{(T^* + N^*)}{\sqrt{2}} \quad (5.1.1)$$

Smarandache eğrisinin s_{β_1} yay parametresine göre türevi alınırsa

$$T_{\beta_1} \frac{ds_{\beta_1}}{ds} = \frac{(-\kappa^*T^* + \kappa^*N^* + \tau^*B^*)}{\sqrt{2}} \quad (5.1.2)$$

olur ve norm alınırsa $\frac{ds_{\beta_1}}{ds}$ ifadesi

$$\frac{ds_{\beta_1}}{ds} = \sqrt{\frac{2\kappa^{*2} + \tau^{*2}}{2}} \quad (5.1.3)$$

bulunur. Bu ifade (5.1.2) de yerine yazılırsa β_1 eğrisinin teğet vektörü

$$T_{\beta_1}(s) = \frac{-\kappa^* T^* + \kappa^* N^* + \tau^* B^*}{\sqrt{2\kappa^{*2} + \tau^{*2}}} \quad (5.1.4)$$

şeklinde olur. (5.1.1) ifadesinde T^* ve N^* in yerine (4.1.5) den karşılıkları yazılırsa Smarandache eğrisinin Mannheim eğrisine bağlı ifadesi

$$\beta_1(s) = \frac{(\cos \theta + \sin \theta)T + (\cos \theta - \sin \theta)B}{\sqrt{2}} \quad (5.1.5)$$

olur. (5.1.4) denkleminde (4.1.5), (4.1.8) ve (4.1.9) bağıntıları dikkate alınır (5.1.5) ifadesindeki β_1 eğrisinin teğet vektörü

$$T_{\beta_1}(s) = \frac{\theta' \kappa (\sin \theta - \cos \theta)T + \kappa (\sqrt{\kappa^2 + \tau^2} + \theta' \sin \theta)N + \kappa \theta' \cos \theta B}{\sqrt{\kappa^2 (2\theta'^2 + \kappa^2 + \tau^2)}} \quad (5.1.6)$$

şeklinde bulunur. (5.1.4) ifadesinin tekrar türevi alınır katsayılar

$$\begin{cases} \ell_1 = -[\kappa^{*2}(2\kappa^{*2} + \tau^{*2}) + \tau^*(\tau^* \kappa^{*'} - \kappa^* \tau^{*'})] \\ \ell_2 = -[\kappa^{*2}(2\kappa^{*2} + 3\tau^{*2}) + \tau^*(\tau^{*3} - \tau^* \kappa^{*'} + \kappa^* \tau^{*'})] \\ \ell_3 = \kappa^* [\tau^*(2\kappa^{*2} + \tau^{*2}) - 2(\tau^* \kappa^{*'} - \kappa^* \tau^{*'})]. \end{cases} \quad (5.1.7)$$

olmak üzere $T'_{\beta_1}(s)$ türevi

$$T'_{\beta_1}(s) = \frac{\sqrt{2}}{(2\kappa^{*2} + \tau^{*2})^2} (\ell_1 T^* + \ell_2 N^* + \ell_3 B^*) \quad (5.1.8)$$

olur. (5.1.7) ifadesinde κ^* ve τ^* in yerine (4.1.8) ve (4.1.9) den karşılıkları yazılırsa yeni katsayılar

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\ell}_1 = -\frac{\theta'^2 \kappa^4 (2\theta'^2 + \kappa^2 + \tau^2)}{\lambda^4 \tau^4 (\kappa^2 + \tau^2)^2} - \frac{\kappa^3 (\theta'' \kappa^2 + \theta'' \tau^2 - \theta' \kappa \kappa' - \theta' \tau \tau')}{\lambda^3 \tau^3 (\kappa^2 + \tau^2)^{\frac{3}{2}}} \\ \bar{\ell}_2 = -\frac{\kappa^3 (\kappa^3 \sqrt{\kappa^2 + \tau^2} + \kappa \tau^2 \sqrt{\kappa^2 + \tau^2} - \theta'' \lambda \tau \kappa^2 - \theta'' \lambda \tau^3 + \theta' \lambda \tau \kappa \kappa' + \theta' \lambda \tau^2 \tau')}{\lambda^4 \tau^4 (\kappa^2 + \tau^2)^{\frac{3}{2}}} \\ \quad - \frac{\theta'^2 \kappa^4 (2\theta'^2 + 3\kappa^2 + 3\tau^2)}{\lambda^4 \tau^4 (\kappa^2 + \tau^2)^2} \\ \bar{\ell}_3 = \frac{\theta' \kappa^4 (2\theta'^2 + \kappa^2 + \tau^2)}{\lambda^4 \tau^4 (\kappa^2 + \tau^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{2\theta' \kappa^3 (\theta'' \kappa^2 + \theta'' \tau^2 - \theta' \kappa \kappa' - \theta' \tau \tau')}{\lambda^3 \tau^3 (\kappa^2 + \tau^2)^2}. \end{array} \right. \quad (5.1.9)$$

şeklinde olur. $T'_{\beta_1}(s)$ türev ifadesinde (4.1.5) ve (5.1.9) bağıntıları yerine yazılırsa T'_{β_1} vektörünün Mannheim eğrisinin Frenet elemanları cinsinden ifadesi

$$\begin{aligned} T'_{\beta_1}(s) = & \sqrt{2} \frac{\lambda^4 \tau^4 (\kappa^2 + \tau^2)^2}{\kappa^4 (2\theta'^2 + \kappa^2 + \tau^2)^2} \left[(\bar{\ell}_1 \cos \theta + \bar{\ell}_2 \sin \theta) T \right. \\ & \left. + \bar{\ell}_3 N + (\bar{\ell}_2 \cos \theta - \bar{\ell}_1 \sin \theta) B \right]. \end{aligned} \quad (5.1.10)$$

şeklinde bulunur. β_1 eğrisinin eğriliği κ_{β_1} ile gösterilirse (5.1.8) bağıntısından κ_{β_1} eğriliği

$$\begin{aligned} \kappa_{\beta_1} &= \|T'_{\beta_1}\|, \\ \kappa_{\beta_1} &= \sqrt{2} \frac{\sqrt{\bar{\ell}_1^2 + \bar{\ell}_2^2 + \bar{\ell}_3^2}}{(2\kappa^{*2} + \tau^{*2})^2} \end{aligned} \quad (5.1.11)$$

olur. Burada κ^* ve τ^* in yerine (4.1.8) ve (4.1.9) dan karşılıkları yazılırsa κ_{β_1} eğriliğinin Mannheim eğrisinin eğriliklerine bağlı ifadesi

$$\kappa_{\beta_1} = \sqrt{2} \frac{\lambda^4 \tau^4 (\kappa^2 + \tau^2)^2}{\kappa^4 (2\theta'^2 + \kappa^2 + \tau^2)^2} \sqrt{\bar{\ell}_1^2 + \bar{\ell}_2^2 + \bar{\ell}_3^2} \quad (5.1.12)$$

şekline dönüşür. β_1 eğrisinin aslimormali N_{β_1} ile gösterilirse (5.1.8) bağıntısından

$$N_{\beta_1} = \frac{T'_{\beta_1}}{\|T'_{\beta_1}\|},$$

$$N_{\beta_1} = \frac{\ell_1 T^* + \ell_2 N^* + \ell_3 B^*}{\sqrt{\ell_1^2 + \ell_2^2 + \ell_3^2}}$$

olur. Burada T^* , N^* ve B^* in yerine (4.1.5) den karşılıkları yazılırsa N_{β_1} ifadesinin Mannheim eğrisinin Frenet elemanları cinsinden ifadesi

$$N_{\beta_1} = \frac{(\bar{\ell}_1 \cos \theta + \bar{\ell}_2 \sin \theta)T + \bar{\ell}_3 N + (\bar{\ell}_2 \cos \theta - \bar{\ell}_1 \sin \theta)B}{\sqrt{\bar{\ell}_1^2 + \bar{\ell}_2^2 + \bar{\ell}_3^2}} \quad (5.1.13)$$

şeklindedir. $B_{\beta_1} = T_{\beta_1} \wedge N_{\beta_1}$ olduğundan B_{β_1} vektörü

$$B_{\beta_1} = \frac{(\kappa^* \ell_3 - \tau^* \ell_2)T^* + (\kappa^* \ell_3 + \tau^* \ell_1)N^* + (-\kappa^* \ell_2 - \kappa^* \ell_1)B^*}{\sqrt{(\ell_1^2 + \ell_2^2 + \ell_3^2)(2\kappa^{*2} + \tau^{*2})}} \quad (5.1.14)$$

olur. Burada T^* , N^* , B^* , κ^* ve τ^* in yerine (4.1.5), (4.1.8) ve (4.1.9) dan karşılıkları yazılırsa B_{β_1} binormal vektörünün Mannheim eğrisinin Frenet elemanları cinsinden ifadesi

$$\begin{aligned} B_{\beta_1} = & \frac{(\bar{\ell}_2 \cos \theta - \bar{\ell}_1 \sin \theta)\kappa(\|W\| + \theta' \sin \theta) - \bar{\ell}_3 \kappa \theta' \cos \theta}{\sqrt{\kappa^2(\kappa^2 + \tau^2 + 2\theta'^2)(\bar{\ell}_1^2 + \bar{\ell}_2^2 + \bar{\ell}_3^2)}} \mathbf{T} \\ & + \frac{(\bar{\ell}_1 \cos \theta + \bar{\ell}_2 \sin \theta)\kappa \theta' \cos \theta - (\bar{\ell}_2 \cos \theta - \bar{\ell}_1 \sin \theta)\theta' \kappa(\sin \theta - \cos \theta)}{\sqrt{\kappa^2(\kappa^2 + \tau^2 + 2\theta'^2)(\bar{\ell}_1^2 + \bar{\ell}_2^2 + \bar{\ell}_3^2)}} \mathbf{N} \\ & + \frac{\bar{\ell}_3 \theta' \kappa(\sin \theta - \cos \theta) - (\bar{\ell}_1 \cos \theta + \bar{\ell}_2 \sin \theta)\kappa(\|W\| + \theta' \sin \theta)}{\sqrt{\kappa^2(\kappa^2 + \tau^2 + 2\theta'^2)(\bar{\ell}_1^2 + \bar{\ell}_2^2 + \bar{\ell}_3^2)}} \mathbf{B} \end{aligned} \quad (5.1.15)$$

şeklinde bulunur. β_1 eğrisinin ikinci ve üçüncü türevleri sırasıyla

$$\beta_1'' = \frac{-(\kappa^{*2} + \kappa'^*)T^* + (\kappa'^* - \kappa^{*2} - \tau^{*2})N^* + (\kappa^* \tau^* + \tau'^*)B^*}{\sqrt{2}}$$

ve

$$\beta_1''' = \frac{j_1 T^* + j_2 N^* + j_3 B^*}{\sqrt{2}}$$

olur. Burada

$$\begin{cases} J_1 = \kappa^{*3} + \kappa^*(\tau^{*2} - 3\kappa^{*'}) - \kappa^{*''} \\ J_2 = -\kappa^{*3} - \kappa^*(\tau^{*2} + 3\kappa^{*'}) - 3\tau^*\tau^{*'} + \kappa^{*''} \\ J_3 = -\kappa^{*2}\tau^* - \tau^{*3} + 2\tau^*\kappa^{*'} + \kappa^*\tau^{*'} + \tau^{*''} \end{cases} \quad (5.1.16)$$

şeklinde katsayılarıdır. β_1 eğrisinin torsiyonu τ_{β_1} ile gösterilirse τ_{β_1} torsiyonu

$$\tau_{\beta_1} = \frac{\det(\beta_1', \beta_1'', \beta_1''')}{\|\beta_1' \wedge \beta_1''\|^2}$$

dır. Burada β_1' , β_1'' ve β_1''' türevleri yerine yazılır ve gerekli hesaplamalar yapılırsa τ_{β_1} torsiyonu

$$\tau_{\beta_1} = \frac{\sqrt{2}[(\kappa^{*2} + \tau^{*2} - \kappa^{*'}) (\kappa^* J_3 + \tau^* J_1) + \kappa^* (\kappa^* \tau^* + \tau^{*'}) (J_2 - J_1) + (\kappa^{*2} + \kappa^{*'}) (\kappa^* J_3 - \tau^* J_2)]}{[\tau^* (2\kappa^{*2} + \tau^{*2}) + \kappa^* \tau^{*'} - \kappa^{*'} \tau^*]^2 + (\kappa^{*'} \tau^* - \kappa^* \tau^{*'})^2 + (2\kappa^{*3} + \kappa^* \tau^{*2})^2} \quad (5.1.17)$$

olur. (5.1.16) katsayılar ifadesinde κ^* ve τ^* ın yerine (4.1.8) ve (4.1.9) dan karşılıkları yazılırsa yeni katsayılar

$$\left. \begin{aligned}
\bar{j}_1 = & \frac{2\kappa^5\tau^2\theta'\kappa^3\tau^4\theta' + \kappa^3\tau^2\theta'^3 - 3\kappa^4\tau\theta'\lambda\theta''\sqrt{\kappa^2 + \tau^2} - 3\kappa^2\tau^3\theta'\lambda\theta''\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}{\lambda^3\tau^3\|W\|^5} \\
& - \frac{3\kappa\tau^3\theta'^2\lambda\kappa'\sqrt{\kappa^2 + \tau^2} - 2\kappa^2\tau^4\theta'\lambda\kappa'\lambda' + 6\kappa^3\tau^3\theta'\lambda\lambda'\tau' + 4\kappa\tau^5\theta'\lambda\lambda'\tau'}{\lambda^3\tau^3\|W\|^5} \\
& - \frac{2\kappa^5\tau\theta'\lambda\lambda'\tau' - 6\theta'^2\kappa^2\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}\tau^2\lambda\tau' + 2\kappa^2\tau^3\theta'\lambda^2\kappa'\tau' - 3\kappa^3\tau^3\theta'\lambda^2\tau''}{\lambda^3\tau^3\|W\|^5} \\
& + \frac{2\kappa\tau^5\theta'\lambda^2\tau'' - \kappa^2\tau^4\theta'\lambda^2\kappa' - 2\kappa^2\tau^4\lambda^2\kappa'\theta' + 2\kappa^5\tau^2\lambda\lambda'\theta'' + 4\kappa^3\tau^4\lambda\lambda'\theta''}{\lambda^3\tau^3\|W\|^5} \\
& + \frac{2\kappa\tau^6\lambda\lambda'\theta'' + 2\kappa^5\tau\lambda^2\tau'\theta'' + 6\kappa^3\tau^3\lambda^2\tau''\theta'' - 2\kappa\tau^6\theta'\lambda'^2 - 2\kappa^5\theta'\lambda^2\tau'^2}{\lambda^3\tau^3\|W\|^5} \\
& + \frac{4\tau^5\lambda^2\tau'\theta'' + \kappa^5\tau^2\theta'\lambda\lambda'' + 2\kappa^3\tau^4\theta'\lambda\lambda'' + \kappa\tau^6\theta'\lambda\lambda'' + \kappa^5\tau\theta'\lambda^2\tau'' + \kappa^5\theta'^3}{\lambda^3\tau^3\|W\|^5} \\
& + \frac{3\kappa^4\theta'^2\lambda\tau'\sqrt{\kappa^2 + \tau^2} + 3\kappa^4\tau\theta'^2\lambda'\sqrt{\kappa^2 + \tau^2} + 3\kappa^2\tau^3\theta'^2\lambda'\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}{\lambda^3\tau^3\|W\|^5} \\
& + \frac{2\tau^6\theta'\lambda\kappa'\lambda' + 4\tau^5\theta'\lambda^2\kappa'\tau' - 5\kappa^3\tau^2\theta'\lambda^2\tau'^2 - 6\kappa\tau^4\theta'\lambda^2\tau'^2 + 3\kappa\tau^4\theta'\lambda^2\kappa'^2}{\lambda^3\tau^3\|W\|^5} \\
& + \frac{\kappa^7\theta' - \tau^6\theta'\lambda^2\kappa'' - \kappa^5\tau^2\lambda^2\theta''' - 2\kappa^3\tau^4\lambda^2\theta''' - \kappa\tau^6\lambda^2\theta''' - 2\tau^6\lambda^2\kappa'\theta''}{\lambda^3\tau^3\|W\|^5} \\
& - \frac{2\kappa^5\tau^2\theta'\lambda'^2 + 4\kappa^3\tau^4\theta'\lambda'^2}{\lambda^3\tau^3\|W\|^5}
\end{aligned} \right. \quad (5.1.18)$$

$$\begin{aligned}
\bar{j}_2 = & - \frac{3\kappa^5\tau\lambda\kappa'\|W\| + 6\kappa^3\tau^3\lambda\kappa'\|W\| + 3\kappa\tau^5\lambda\kappa'\|W\| - 6\kappa^4\tau^2\tau'\lambda\|W\|}{\lambda^3\tau^3\|W\|^5} \\
& + \frac{3\kappa^2\tau^4\tau'\lambda\|W\| - \kappa\tau^6\theta'\lambda\lambda'' - \kappa^5\tau\theta'\lambda^2\tau'' + \kappa^2\tau^4\theta'\lambda^2\kappa'' + 3\kappa^3\tau^3\theta'\lambda^2\tau''}{\lambda^3\tau^3\|W\|^5} \\
& - \frac{2\kappa^2\tau^4\lambda^2\kappa'\theta'' - 2\kappa\tau^5\theta'\lambda^2\tau'' - 6\kappa^3\tau^3\lambda^2\tau'\theta'' - 6\kappa\tau^4\theta'\lambda^2\tau'^2 + 2\kappa^2\tau^4\theta'\lambda\kappa'\lambda'}{\lambda^3\tau^3\|W\|^5} \\
& - \frac{4\kappa\tau^5\lambda^2\tau'\theta'' + 2\kappa^5\tau^2\lambda\lambda'\theta'' + 4\kappa^3\tau^4\lambda\lambda'\theta'' + 2\kappa\tau^6\lambda\lambda'\theta'' + 2\tau^6\theta'\lambda\kappa'\lambda'}{\lambda^3\tau^3\|W\|^5} \\
& - \frac{2\kappa^5\tau\lambda^2\tau'\theta'' + \kappa^5\tau^2\theta'\lambda\lambda'' + 2\kappa^3\tau^4\theta'\lambda\lambda'' + 3\kappa^4\theta'\tau\theta''\lambda\|W\|}{\lambda^3\tau^3\|W\|^5} \\
& - \frac{3\kappa^2\theta'\tau^3\theta''\lambda\|W\| + 3\kappa\theta'^2\tau^3\lambda\kappa'\|W\| + \kappa^5\theta'^3 + \kappa^7\theta' + 2\kappa^5\tau^2\theta' + \kappa^3\tau^4\theta'}{\lambda^3\tau^3\|W\|^5} \\
& - \frac{\kappa^3\tau^2\theta'^3 - 3\kappa^6\tau'\lambda\|W\| - 3\kappa^6\tau\lambda'\|W\| - 6\kappa^4\tau^3\lambda'\|W\| - 3\kappa^2\tau^5\lambda'\|W\|}{\lambda^3\tau^3\|W\|^5} \\
& + \frac{\kappa^5\tau^2\lambda^2\theta''' + 2\kappa^3\tau^4\lambda^2\theta''' + \kappa\tau^6\lambda^2\theta''' + \tau^6\theta'\lambda^2\kappa'' + 2\tau^6\lambda^2\kappa'\theta'' + 2\kappa^5\tau^2\theta'\lambda'^2}{\lambda^3\tau^3\|W\|^5} \\
& + \frac{4\kappa^3\tau^4\theta'\lambda'^2 + 2\kappa\tau^6\theta\lambda'^2 + 2\kappa^5\theta'\lambda^2\tau'^2 + 3\kappa^4\theta'^2\tau\lambda'\|W\| + 2\kappa^2\tau^3\theta'\lambda^2\kappa'\tau'}{\lambda^3\tau^3\|W\|^5} \\
& + \frac{3\kappa^2\theta'^2\tau^3\lambda'\|W\| + 3\kappa^4\theta'^2\lambda\tau'\|W\| + 5\kappa^3\tau^2\theta'\lambda^2\tau'^2 - 3\kappa\tau^4\theta'\lambda^2\kappa'^2 - 4\tau^5\theta'\lambda^2\kappa'\tau'}{\lambda^3\tau^3\|W\|^5} \\
& + \frac{6\kappa^3\tau^3\theta'\lambda\lambda'\tau' + 4\kappa\tau^5\theta'\lambda\lambda'\tau' + 2\kappa^5\tau\theta'\lambda\lambda'\tau' + 6\theta'^2\kappa^2\|W\|\tau^2\lambda\tau'}{\lambda^3\tau^3\|W\|^5}
\end{aligned}$$

(5.1.19)

$$\left\{ \begin{aligned}
\bar{j}_3 &= -\frac{5\theta'\kappa^2\lambda\tau^2\tau' - 3\theta'\kappa\lambda\tau^3\kappa' - \theta'\kappa^3\lambda\tau\kappa' + 2\lambda\tau^4\kappa\lambda'\|W\| + 2\lambda^2\tau^3\kappa'\tau'\|W\| + \kappa^5\|W\|}{\lambda^3\tau^3\|W\|^3} \\
&\frac{2\kappa\lambda^2\tau^2\tau'^2\|W\| - \kappa^3\tau^2\|W\| - \theta'^2\kappa^3\|W\| + 2\kappa^2\lambda^2\tau\kappa'\tau'\|W\| + 2\kappa^2\lambda\tau^2\kappa'\lambda'\|W\|}{\lambda^3\tau^3\|W\|^3} \\
&+ \frac{2\kappa^2\lambda\tau^3\theta'' + \lambda^2\tau^4\kappa''\|W\| - 3\theta'\kappa^4\lambda\tau' - 3\theta'\kappa^4\tau\lambda' - 3\theta'\kappa^2\tau^3\lambda' + 2\kappa^3\tau^2\lambda'^2\|W\|}{\lambda^3\tau^3\|W\|^3} \\
&+ \frac{2\kappa\tau^4\lambda'^2\|W\| + 2\kappa^3\lambda^2\tau'^2\|W\| + \kappa^2\lambda^2\tau^2\kappa''\|W\| + 2\kappa^3\lambda\tau\lambda'\tau'\|W\| + 2\kappa\lambda\tau^3\lambda'\tau'\|W\|}{\lambda^3\tau^3\|W\|^3} \\
&\frac{\kappa^3\lambda\tau^2\lambda''\|W\| + \kappa\lambda\tau^4\lambda''\|W\| + \kappa^3\lambda^2\tau\tau''\|W\| + \kappa\lambda^2\tau^3\tau''\|W\| + 2\kappa^4\lambda\tau\theta''}{\lambda^3\tau^3\|W\|^3}
\end{aligned} \right. \tag{5.1.20}$$

şeklinde bulunur ve bu katsayılar (5.1.17) de yerine yazılırsa T^*N^* Smarandache eğrisinin τ_{β_1} torsiyonunun Mannheim eğrisinin Frenet elemanları cinsinden ifadesi

$$\tau_{\beta_1} = \frac{\sqrt{2} \left[\kappa^5\theta'\bar{j}_3 + \kappa^5\|W\|\bar{j}_1 + 2\kappa^4\theta\tau\lambda'\bar{j}_1 + 2\kappa^4\theta'\lambda\tau'\bar{j}_1 - \kappa^4\tau\lambda\theta''\bar{j}_2 - \kappa^4\tau\lambda\theta''\bar{j}_1 \right. \\
+ \bar{j}_2\kappa^3\theta'\kappa'\lambda\tau - \kappa^3\theta'\tau\lambda\kappa'\bar{j}_1 + \theta'^3\kappa^3\bar{j}_3 + \kappa^3\theta'^2\bar{j}_1\|W\| + \kappa^3\tau^2\theta'\bar{j}_3 + \kappa^3\theta'^2\|W\| \\
+ \kappa^3\tau^2\|W\|\bar{j}_1 + 2\kappa^2\tau^3\theta'\lambda'\bar{j}_1 + \bar{j}_2\kappa^2\theta'\tau'\lambda\tau^2 + 3\kappa^2\theta'\tau'\lambda\tau^2\bar{j}_1 - \kappa^2\tau^3\lambda\theta''\bar{j}_2 \\
\left. - \kappa^2\tau^3\lambda\theta''\bar{j}_1 + \theta'^2\kappa^2\lambda\tau\|W\| - 2\kappa\tau^3\theta'\lambda\kappa'\bar{j}_1 \right] \lambda^3\tau^3\|W\|^3}{\left[2\kappa^8\tau^2\lambda^2\theta''^2 + 4\kappa^6\lambda^2\tau^4\theta''^2 + 2\kappa^4\lambda^2\tau^6\theta''^2 + 16\kappa^8\tau^2\theta'^2 + 8\kappa^6\tau^4\theta'^2 \right. \\
+ 5\kappa^6\tau^2\theta'^4 - 4\kappa^7\tau^2\theta'\lambda^2\kappa'\theta'' - 4\kappa^6\tau^3\theta'\lambda^2\tau'\theta'' - 4\kappa^5\tau^4\theta'\lambda^2\kappa'\theta'' + \kappa^6\theta'^6 \\
+ 4\kappa^5\tau^3\theta'^2\lambda^2\kappa'\tau' - 4\kappa^4\tau^5\theta'\lambda^2\tau'\theta'' - 4\kappa^9\tau\theta'\lambda\theta'' - 8\kappa^7\tau^3\theta'\lambda\theta'' + 4\kappa^{12} \\
- 2\kappa^7\tau\theta'^3\lambda\theta'' - 4\kappa^5\tau^5\theta'\lambda\theta'' - 2\kappa^5\tau^3\theta'^3\lambda\theta'' + 2\kappa^6\tau^2\theta'^2\lambda^2\kappa'^2 + 5\kappa^8\theta'^4 \\
+ 4\kappa^8\theta'^2\kappa'\lambda\tau + 4\kappa^7\theta'^2\tau'\lambda\tau^2 + 4\kappa^6\tau^3\theta'^2\lambda\kappa' + 2\kappa^6\tau\theta'^4\lambda\kappa' + 4\kappa^5\tau^4\theta'^2\lambda\tau' \\
\left. + 2\kappa^5\tau^2\theta'^4\lambda\tau' + 12\kappa^{10}\tau^2 + 8\kappa^{10}\theta'^2 + 12\kappa^8\tau^4 + 4\kappa^6\tau^6 + 2\kappa^4\tau^4\theta'^2\lambda^2\tau'^2 \right]}$$

şeklinde elde edilir.

5.2 N^*B^* Smarandache Eğrisi

$$\beta_2(s) = \frac{(N^* + B^*)}{\sqrt{2}} \quad (5.2.1)$$

Smarandache eğrisinin s_{β_2} yay parametresine göre türevi alınırsa

$$T_{\beta_2} \frac{ds_{\beta_2}}{ds} = \frac{(-\kappa^*T^* - \tau^*N^* + \tau^*B^*)}{\sqrt{2}} \quad (5.2.2)$$

olur ve norm alınırsa $\frac{ds_{\beta_2}}{ds}$ ifadesi

$$\frac{ds_{\beta_2}}{ds} = \sqrt{\frac{2\tau^{*2} + \kappa^{*2}}{2}} \quad (5.2.3)$$

bulunur. Bu ifade (5.2.2) de yerine yazılırsa β_2 eğrisinin teğet vektörü

$$T_{\beta_2}(s) = \frac{-\kappa^*T^* - \tau^*N^* + \tau^*B^*}{\sqrt{2\tau^{*2} + \kappa^{*2}}} \quad (5.2.4)$$

şeklinde olur. (5.2.1) ifadesinde T^* ve N^* in yerine (4.1.5) den karşılıkları yazılırsa Smarandache eğrisinin Mannheim eğrisine bağlı ifadesi

$$\beta_2(s) = \frac{\sin \theta T + N + \cos \theta B}{\sqrt{2}} \quad (5.2.5)$$

olur. (5.2.4) denkleminde (4.1.5), (4.1.8) ve (4.1.9) dan karşılıkları yazılırsa (5.2.5) ifadesinde verilen β_2 eğrisinin teğet vektörü

$$T_{\beta_2}(s) = \frac{-\kappa(\theta' \cos \theta + \|W\| \sin \theta)T + \kappa\|W\|N + \kappa(\theta' \sin \theta - \|W\| \cos \theta)B}{\sqrt{\kappa^2(\theta'^2 + 2\kappa^2 + 2\tau^2)}} \quad (5.2.6)$$

şeklinde bulunur. (5.2.4) ifadesinin tekrar türevi alınırsa katsayılar

$$\begin{cases} \Delta_1 = \tau^*[2\tau^{*2}\kappa^* + \kappa^{*3} - 2\kappa^{*'}\tau^* + 2\kappa^*\tau^{*'}] \\ \Delta_2 = -2\tau^{*4} - 3\tau^{*2}\kappa^{*2} - \kappa^{*4} + \kappa^{*'}\tau^*\kappa^* - \kappa^{*2}\tau^{*'} \\ \Delta_3 = -2\tau^{*4} - \tau^{*2}\kappa^{*2} - \kappa^{*'}\tau^*\kappa^* + \kappa^{*2}\tau^{*'} \end{cases} \quad (5.2.7)$$

olmak üzere $T'_{\beta_2}(s)$ türevi

$$T'_{\beta_2}(s) = \frac{\sqrt{2}}{(2\tau^{*2} + \kappa^{*2})^2} (\Delta_1 T^* + \Delta_2 N^* + \Delta_3 B^*) \quad (5.2.8)$$

olur. (5.2.7) ifadesinde κ^* ve τ^* in yerine (4.1.8) ve (4.1.9) dan karşılıkları yazılırsa yeni katsayılar

$$\begin{cases} \bar{\Delta}_1 = \frac{-2\lambda\theta''\kappa^5\tau + 2\lambda\theta'\kappa^4\kappa'\tau - 2\lambda\theta''\kappa^3\tau^3 + 2\lambda\theta'\kappa^3\tau^2\tau' + 2\theta'\kappa^6 + 2\theta'\kappa^4\tau^2 + \theta''\kappa^4}{\lambda^4\tau^4(\kappa^2 + \tau^2)^{\frac{3}{2}}} \\ \bar{\Delta}_2 = -\frac{\lambda\theta''\theta'\kappa^5\tau - \lambda\theta'^2\kappa^4\kappa'\tau + \lambda\theta''\theta'\kappa^3\tau^3 - \lambda\theta'^2\kappa^3\tau^2\tau' - 2\kappa^8 - 4\kappa^6\tau^2 - 3\theta'^2\kappa^6}{\lambda^4\tau^4(\kappa^2 + \tau^2)^2} \\ \quad - \frac{2\kappa^4\tau^4 + 3\theta'^2\kappa^4\tau^2 + \theta'^4\kappa^4}{\lambda^4\tau^4(\kappa^2 + \tau^2)^2} \\ \bar{\Delta}_3 = \frac{-\lambda\theta''\theta'\kappa^5\tau + \lambda\theta'^2\kappa^4\kappa'\tau - \lambda\theta''\theta'\kappa^3\tau^3 + \lambda\theta'^2\kappa^3\tau^2\tau' - 2\kappa^8 - 4\kappa^6\tau^2 - \theta'^2\kappa^6}{\lambda^4\tau^4(\kappa^2 + \tau^2)^2} \\ \quad - \frac{2\kappa^4\tau^4 + \theta'^2\kappa^4\tau^2}{\lambda^4\tau^4(\kappa^2 + \tau^2)^2} \end{cases} \quad (5.2.9)$$

şeklinde olur. $T'_{\beta_2}(s)$ türev ifadesinde (4.1.5) ve (5.2.9) bağıntıları yerine yazılırsa T'_{β_2} vektörünün Mannheim eğrisinin Frenet elemanları cinsinden ifadesi

$$\begin{aligned} T'_{\beta_2}(s) = \sqrt{2} \frac{\lambda^4\tau^4\|W\|^4}{\kappa^4(\theta'^2 + 2\kappa^2 + 2\tau^2)^2} & \left[(\bar{\Delta}_1 \cos \theta + \bar{\Delta}_2 \sin \theta) T \right. \\ & \left. + \bar{\Delta}_3 N + (\bar{\Delta}_2 \cos \theta - \bar{\Delta}_1 \sin \theta) B \right]. \end{aligned} \quad (5.2.10)$$

şeklinde bulunur. β_2 eğrisinin eğriliği κ_{β_2} ile gösterilirse (5.2.8) bağıntısından κ_{β_2} eğriliği

$$\begin{aligned}\kappa_{\beta_2} &= \|T'_{\beta_2}\|, \\ \kappa_{\beta_2} &= \sqrt{2} \frac{\sqrt{\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2}}{(2\tau^{*2} + \kappa^{*2})^2}\end{aligned}\quad (5.2.11)$$

dır. Burada κ^* ve τ^* in yerine (4.1.8) ve (4.1.9) dan karşılıkları yazılırsa κ_{β_2} Mannheim eğrisinin eğriliklerine bağlı ifadesi

$$\kappa_{\beta_2} = \sqrt{2} \frac{\lambda^4 \tau^4 \|W\|^4}{\kappa^4 (\theta'^2 + 2\kappa^2 + 2\tau^2)^2} \sqrt{\bar{\Delta}_1^2 + \bar{\Delta}_2^2 + \bar{\Delta}_3^2} \quad (5.2.12)$$

şekline dönüşür. β_2 eğrisinin aslinormali N_{β_2} ile gösterilirse (5.2.8) bağıntısından

$$\begin{aligned}N_{\beta_2} &= \frac{T'_{\beta_2}}{\|T'_{\beta_2}\|}, \\ N_{\beta_2} &= \frac{\Delta_1 T^* + \Delta_2 N^* + \Delta_3 B^*}{\sqrt{\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2}}\end{aligned}$$

olur. Burada T^* , N^* ve B^* in yerine (4.1.5) den karşılıkları yazılırsa N_{β_2} ifadesinin Mannheim eğrisinin Frenet elemanları cinsinden ifadesi

$$N_{\beta_2} = \frac{(\bar{\Delta}_1 \cos \theta + \bar{\Delta}_2 \sin \theta)T + \bar{\Delta}_3 N + (\bar{\Delta}_2 \cos \theta - \bar{\Delta}_1 \sin \theta)B}{\sqrt{\bar{\Delta}_1^2 + \bar{\Delta}_2^2 + \bar{\Delta}_3^2}} \quad (5.2.13)$$

şeklindedir. $B_{\beta_2} = T_{\beta_2} \wedge N_{\beta_2}$ olduğundan B_{β_2} vektörü

$$B_{\beta_2} = \frac{(-\tau^* \Delta_3 - \tau^* \Delta_2)T^* + (\kappa^* \Delta_3 + \tau^* \Delta_1)N^* + (-\kappa^* \Delta_2 + \tau^* \Delta_1)B^*}{\sqrt{(\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2)(2\tau^{*2} + \kappa^{*2})}} \quad (5.2.14)$$

olur. Burada T^* , N^* , B^* , κ^* ve τ^* in yerine (4.1.5), (4.1.8) ve (4.1.9) dan karşılıkları yazılırsa B_{β_2} binormal vektörünün Mannheim eğrisinin Frenet elemanları cinsinden ifadesi

$$\begin{aligned}
B_{\beta_2} = & \frac{-\kappa(\theta' \sin \theta \bar{\Delta}_3 - \cos \theta \|W\| \bar{\Delta}_2 - \cos \theta \|W\| \bar{\Delta}_3 + \sin \theta \|W\| \bar{\Delta}_1)}{\sqrt{\kappa^2(\theta'^2 + 2\kappa^2 + 2\tau^2)(\bar{\Delta}_1^2 + \bar{\Delta}_2^2 + \bar{\Delta}_3^2)}} \mathbf{T} \\
& + \frac{\kappa(-\|W\| \bar{\Delta}_1 + \theta' \bar{\Delta}_2)}{\sqrt{\kappa^2(\theta'^2 + 2\kappa^2 + 2\tau^2)(\bar{\Delta}_1^2 + \bar{\Delta}_2^2 + \bar{\Delta}_3^2)}} \mathbf{N} \\
& + \frac{-\kappa(\theta' \cos \theta \bar{\Delta}_3 + \cos \theta \|W\| \bar{\Delta}_1 + \sin \theta \|W\| \bar{\Delta}_2 + \sin \theta \|W\| \bar{\Delta}_3)}{\sqrt{\kappa^2(\theta'^2 + 2\kappa^2 + 2\tau^2)(\bar{\Delta}_1^2 + \bar{\Delta}_2^2 + \bar{\Delta}_3^2)}} \mathbf{B} \quad (5.2.15)
\end{aligned}$$

şekline bulunur. β_2 eğrisinin ikinci ve üçüncü türevleri sırasıyla

$$\beta_2'' = \frac{(\kappa^{*'} + \kappa^* \tau^*) T^* + (\kappa^{*2} - \tau^{*'} - \tau^{*2}) N^* + (-\tau^{*2} + \tau^{*'}) B^*}{\sqrt{2}}$$

ve

$$\beta_2''' = \frac{\hbar_1 T^* + \hbar_2 N^* + \hbar_3 B^*}{\sqrt{2}}$$

olur. Burada

$$\begin{cases} \hbar_1 = -\tau^{*3} \kappa^* + \kappa^{*3} + \kappa^{*'} \tau^* + 2\kappa^* \tau^{*'} - \kappa^{*''} \\ \hbar_2 = \tau^{*3} + \tau^* \kappa^{*2} - 3\kappa^* \kappa^{*'} + 3\tau^{*2} \tau^{*'} - \tau^{*''} \\ \hbar_3 = \tau^{*3} + \tau^* \kappa^{*2} - 3\tau^* \tau^{*'} - \tau^* \tau^{*''} \end{cases} \quad (5.2.16)$$

şeklinde katsayılarıdır. β_2 eğrisinin torsiyonu τ_{β_2} ile gösterilirse τ_{β_2} torsiyonu

$$\tau_{\beta_2} = \frac{\det(\beta_2', \beta_2'', \beta_2''')}{\|\beta_2' \wedge \beta_2''\|^2}$$

dır. Burada β_2' , β_2'' ve β_2''' türevleri yerine yazılır ve gerekli hesaplamalar yapılırsa τ_{β_1} torsiyonu

$$\tau_{\beta_2} = \frac{\sqrt{2}[2\tau^{*3} \hbar_1 + 2\tau^{*2} \kappa^* \hbar_3 + \tau^* \kappa^{*2} \hbar_1 + \kappa^{*3} \hbar_3 - \kappa^{*'} \tau^* \hbar_3 - \kappa^{*'} \tau^* \hbar_2 + \kappa^* \tau^{*'} \hbar_3 + \kappa^* \tau^{*'} \hbar_2]}{[\tau^*(2\tau^{*2} + \kappa^{*2})]^2 + [-\tau^* \kappa^{*'} + \kappa^* \tau^{*'}]^2 + [2\tau^{*2} \kappa^* + \kappa^{*3} - \kappa^{*'} \tau^* + \kappa^* \tau^{*'}]^2} \quad (5.2.17)$$

olur. (5.2.16) katsayılar ifadesinde κ^* ve τ^* ın yerine (4.1.8) ve (4.1.9) dan karşılıkları yazılırsa yeni katsayılar

$$\left\{ \begin{aligned}
\bar{h}_1 = & - \frac{\theta' \kappa'' \lambda^3 \tau^5 \kappa^2 + 2\theta'' \kappa' \lambda^3 \tau^5 \kappa^2 - 2\theta'' \kappa^5 \lambda' \lambda^2 \tau^3 - 4\theta'' \kappa^3 \lambda' \lambda^2 \tau^5 - 2\theta'' \kappa \lambda' \lambda^2 \tau^7}{\lambda^4 \tau^4 \|W\|^5} \\
& + \frac{2\theta'' \kappa^5 \tau' \lambda^3 \tau^2 + 6\theta'' \kappa^3 \tau' \lambda^3 \tau^4 + 4\theta'' \kappa \tau' \lambda^3 \tau^6 + \theta' \kappa^5 \lambda'' \lambda^2 \tau^3 + 2\theta' \kappa^3 \lambda'' \lambda^2 \tau^5}{\lambda^4 \tau^4 \|W\|^5} \\
& + \frac{\theta' \kappa \lambda'' \lambda^2 \tau^7 + 3\theta' \kappa^3 \tau'' \lambda^3 \tau^4 + 2\theta' \kappa \tau'' \lambda^3 \tau^6 - 2\theta''' \kappa^3 \lambda^3 \tau^5 - \theta''' \kappa \lambda^3 \tau^7 - \kappa^8 \theta'}{\lambda^4 \tau^4 \|W\|^5} \\
& + \frac{\kappa^6 \lambda^2 \tau^2 \theta'' + 2\kappa^4 \lambda^2 \tau^4 \theta'' + \kappa^2 \lambda^2 \tau^6 \theta'' - 2\theta'' \kappa' \lambda^3 \tau^7 + \theta'^3 \kappa^5 \lambda \tau + \theta'^3 \kappa^3 \lambda \tau^3}{\lambda^4 \tau^4 \|W\|^5} \\
& - \frac{6\theta' \kappa \lambda^3 \tau^5 \tau'^2 - 2\kappa^5 \lambda^2 \tau^2 \theta' \kappa' - 5\kappa^3 \lambda^2 \tau^4 \theta' \kappa' + 7\kappa^4 \lambda^2 \tau^3 \theta' \tau' - \theta' \kappa^5 \tau'' \lambda^3 \tau^2}{\lambda^4 \tau^4 \|W\|^5} \\
& - \frac{4\kappa^2 \lambda^2 \tau^5 \theta' \tau' + 5\theta' \kappa^3 \lambda^3 \tau^3 \tau'^2 - 3\kappa \lambda^2 \tau^6 \theta' \kappa + 3\kappa^6 \lambda \tau^2 \theta' \lambda' + 6\kappa^4 \lambda \tau^4 \theta' \lambda'}{\lambda^4 \tau^4 \|W\|^5} \\
& - \frac{3\kappa^2 \lambda \tau^6 \theta' \lambda' + 3\kappa^6 \lambda^2 \tau \theta' \tau' - 2\theta' \kappa' \lambda' \lambda^2 \tau^7 - 4\theta' \kappa' \tau \lambda^3 \tau^6 + 2\theta' \kappa^5 \tau'^2 \lambda^3 \tau}{\lambda^4 \tau^4 \|W\|^5} \\
& - \frac{2\theta' \kappa^5 \lambda'^2 \lambda \tau^3 + 4\theta' \kappa^3 \lambda'^2 \lambda \tau^5 + 2\theta' \kappa \lambda'^2 \lambda \tau^7 - 3\theta' \kappa'^2 \lambda^3 \tau^5 \kappa + 2\kappa^6 \theta' \tau^2}{\lambda^4 \tau^4 \|W\|^5} \\
& - \frac{\kappa^4 \theta' \tau^4 + \theta' \kappa'' \lambda^3 \tau^7 + 2\theta' \kappa^2 \lambda^3 \tau^4 \kappa' \tau' - 2\theta' \kappa^2 \lambda' \lambda^2 \tau^5 \kappa' + 6\theta' \kappa^3 \lambda' \lambda^2 \tau^4 \tau'}{\lambda^4 \tau^4 \|W\|^5} \\
& - \frac{4\theta' \kappa \lambda' \lambda^2 \tau^6 \tau' + 2\theta' \kappa^5 \lambda' \tau' \lambda^2 \tau^2 + \theta''' \kappa^5 \lambda^3 \tau^3}{\lambda^4 \tau^4 \|W\|^5}
\end{aligned} \right.$$

(5.2.18)

$$\left\{ \begin{aligned}
\bar{h}_2 &= \frac{\kappa^5 \lambda'' \lambda^2 \tau^3 + \kappa^5 \tau'' \lambda^3 \tau^2 - \kappa^4 \kappa'' \lambda^3 \tau^3 + 2\kappa^3 \lambda'' \lambda^2 \tau^5 + 2\kappa^3 \tau'' \lambda^3 \tau^4 - 2\kappa^2 \kappa'' \lambda^3 \tau^5}{\lambda^4 \tau^4 \|W\|^4} \\
&+ \frac{\kappa \tau'' \lambda^3 \tau^6 \kappa \lambda'' \lambda^2 \tau^7 - 3\theta' \kappa^2 \lambda^2 \tau^4 \theta'' - 3\theta' \kappa^4 \lambda^2 \tau^2 \theta'' - \kappa'' \lambda^3 \tau^7 - 6\kappa^5 \lambda' \tau^3}{\lambda^4 \tau^4 \|W\|^4} \\
&+ \frac{2\kappa^5 \lambda \tau^3 - 3\kappa^3 \lambda' \tau^5 + \kappa^3 \lambda \tau^5 - 3\lambda' \kappa^7 \tau - 3\tau' \lambda \kappa^7 + \lambda \kappa^7 \tau + 4\kappa^2 \kappa' \lambda' \lambda^2 \tau^5}{\lambda^4 \tau^4 \|W\|^4} \\
&+ \frac{4\kappa^2 \kappa' \tau' \lambda^3 \tau^4 - 2\kappa \lambda' \tau' \lambda^2 \tau^6 - 2\kappa^5 \lambda' \tau' \lambda^2 \tau^2 + 2\kappa^4 \kappa' \lambda' \lambda^2 \tau^3 + 2\kappa^4 \kappa' \tau' \lambda^3 \tau^2}{\lambda^4 \tau^4 \|W\|^4} \\
&- \frac{4\kappa^3 \lambda' \tau' \lambda^2 \tau^4 - 3\theta'^2 \kappa^4 \lambda^2 \tau \tau' - 3\theta'^2 \kappa^2 \lambda \tau^4 \lambda' - 3\theta'^2 \kappa^4 \lambda \tau^2 \lambda' + 3\theta'^2 \kappa \lambda^2 \tau^4 \kappa'}{\lambda^4 \tau^4 \|W\|^4} \\
&+ \frac{6\theta'^2 \kappa^2 \lambda^2 \tau^3 \tau' + 3\kappa' \lambda \tau \kappa^6 - 2\kappa^5 \lambda'^2 \lambda \tau^3 - 2\kappa \tau'^2 \lambda^3 \tau^5 + 2\kappa' \lambda' \lambda^2 \tau^7 + 2\kappa' \tau' \lambda^3 \tau^6}{\lambda^4 \tau^4 \|W\|^4} \\
&- \frac{2\kappa^5 \tau'^2 \lambda^3 \tau + 6\kappa^5 \tau' \lambda \tau^2 - \kappa^5 \theta^2 \lambda \tau - 6\kappa^4 \kappa \lambda \tau^3 + 4\kappa^3 \lambda'^2 \lambda \tau^5 + 4\kappa^3 \tau'^2 \lambda^3 \tau^3}{\lambda^4 \tau^4 \|W\|^4} \\
&- \frac{3\kappa^3 \tau' \lambda \tau^4 - \kappa^3 \theta'^2 \lambda \tau^3 - 3\kappa^2 \kappa \lambda \tau^5 + 2\kappa \lambda'^2 \lambda \tau^7}{\lambda^4 \tau^4 \|W\|^4}
\end{aligned} \right. \tag{5.2.19}$$

$$\left\{ \begin{aligned}
\bar{h}_3 &= + \frac{\tau'' \lambda^2 \kappa^2 \tau^3 - \kappa'' \lambda^2 \kappa^3 \tau^2 + \lambda'' \lambda \kappa^4 \tau^2 + \lambda'' \lambda \kappa^2 \tau^4 + \tau'' \lambda^2 \kappa^4 \tau - \kappa \kappa'' \lambda^2 \tau^4}{\lambda^4 \tau^4 \|W\|^2} \\
&+ \frac{2\kappa' \lambda' \lambda \kappa^3 \tau^2 + 2\kappa' \tau' \lambda^2 \kappa^3 \tau - 2\lambda' \tau' \lambda \kappa^4 \tau - 2\lambda' \tau' \lambda \kappa^2 \tau^3 + \lambda \kappa^5 \tau - 2\lambda'^2 \kappa^4 \tau^2}{\lambda^4 \tau^4 \|W\|^2} \\
&- \frac{2\lambda'^2 \kappa^2 \tau^4 + 2\tau'^2 \lambda^2 \kappa^4 - \lambda \kappa^3 \tau^3 + 3\kappa \kappa' \lambda^2 \tau^4 - 2\kappa \kappa' \lambda' \lambda \tau^4 - 2\kappa \kappa' \tau' \lambda^2 \tau^3}{\lambda^4 \tau^4 \|W\|^2} \\
&+ \frac{\theta'^2 \kappa^3 \lambda \tau - 3\kappa' \lambda^2 \kappa^3 \tau^2 + 3\lambda' \lambda \kappa^4 \tau^2 + 3\lambda' \lambda \kappa^2 \tau^4 + 3\tau' \lambda^2 \kappa^4 \tau + 3\tau' \lambda^2 \kappa^2 \tau^3}{\lambda^4 \tau^4 \|W\|^2} \\
&+ \frac{2\tau'^2 \lambda^2 \kappa^2 \tau^2}{\lambda^4 \tau^4 \|W\|^2}
\end{aligned} \right. \tag{5.2.20}$$

şeklinde bulunur ve bu katsayılar (5.2.17) de yerine yazılırsa N^*B^* Smarandache eğrisinin τ_{β_2} torsiyonunun Mannheim eğrisinin Frenet elemanları cinsinden ifadesi

$$\tau_{\beta_2} = \frac{\sqrt{2} \left[2\kappa^5 \theta' \bar{h}_3 - \kappa^4 \theta'' \lambda \tau \bar{h}_3 - \kappa^4 \theta'' \lambda \tau \bar{h}_2 + 2\kappa^3 \theta' \tau^2 \bar{h}_3 + \kappa^3 \theta' \kappa' \lambda \tau \bar{h}_3 \right. \\ \left. + 2\lambda^2 \tau^2 \|W\| \kappa^3 \bar{h}_1 + \kappa^3 \theta'^2 \|W\| \bar{h}_1 + \kappa^3 \theta' \kappa' \lambda \tau \bar{h}_2 + \theta'^3 \kappa^3 \bar{h}_3 + \kappa^2 \theta' \tau' \lambda \tau^2 \bar{h}_3 \right. \\ \left. - \kappa^2 \theta'' \lambda \tau^3 \bar{h}_2 - \kappa^2 \theta'' \lambda \tau^3 \bar{h}_3 + \kappa^2 \theta' \tau' \lambda \tau^2 \bar{h}_2 + 2\kappa \lambda^2 \tau^4 \|W\| \bar{h}_1 \right] \lambda^3 \tau^3 \|W\|^3}{\left[2\lambda^2 \tau^2 \theta'^2 \kappa^6 \kappa'^2 + 2\lambda^2 \tau^4 \theta'^2 \tau'^2 \kappa^4 + 2\theta'^4 \kappa^6 \lambda \tau \kappa' + 2\theta'^4 \kappa^5 \lambda \tau^2 \tau' - 8\kappa^7 \theta' \theta'' \lambda \tau^3 \right. \\ \left. + \theta'^6 \kappa^6 + 4\kappa^8 \theta'^2 \kappa' \lambda \tau + 4\kappa^7 \theta'^2 \tau' \lambda \tau^2 - 4\kappa^9 \theta' \theta'' \lambda \tau + 4\lambda^2 \tau^3 \theta'^2 \kappa^5 \kappa' \tau' \right. \\ \left. - 4\kappa^5 \theta' \theta'' \lambda \tau^5 - 2\kappa^7 \theta'^3 \theta'' \lambda \tau + 4\kappa^6 \theta'^2 \lambda \tau^3 \kappa' - 2\kappa^5 \theta'^3 \theta'' \lambda \tau^3 + 4\kappa^5 \theta'^2 \lambda \tau^4 \tau' \right. \\ \left. - 4\kappa^6 \lambda^2 \tau^3 \theta'' \theta' \tau' - 4\kappa^5 \lambda^2 \tau^4 \theta'' \theta' \kappa' - 4\kappa^4 \lambda^2 \tau^5 \theta'' \theta' \tau' + 5\kappa^8 \theta'^4 + 8\kappa^{10} \theta'^2 \right. \\ \left. + 8\kappa^6 \theta'^2 \tau^4 + 2\kappa^8 \theta''^2 \lambda^2 \tau^2 + 12\kappa^{10} \tau^2 + 12\kappa^8 \tau^4 + 4\kappa^6 \tau^6 + 16\kappa^8 \theta'^2 \tau^2 \right. \\ \left. + 4\kappa^{12} + 2\kappa^4 \lambda^2 \tau^6 \theta''^2 - 4\kappa^7 \lambda^2 \tau^2 \theta'' \theta' \kappa' + 4\kappa^6 \lambda^2 \tau^4 \theta''^2 + 5\kappa^6 \theta'^4 \tau^2 \right]}$$

şeklinde elde edilir.

5.3 T^*B^* Smarandache Eğrisi

$$\beta_3(s) = \frac{(T^* + B^*)}{\sqrt{2}} \quad (5.3.1)$$

Smarandache eğrisinin s_{β_3} yay parametresine göre türevi alınırsa

$$T_{\beta_3} \frac{ds_{\beta_3}}{ds} = \frac{(\kappa^* - \tau^*)N^*}{\sqrt{2}} \quad (5.3.2)$$

olur ve norm alınırsa $\frac{ds_{\beta_3}}{ds}$ ifadesi

$$\frac{ds_{\beta_3}}{ds} = \sqrt{\frac{(\kappa^* - \tau^*)^2}{2}} \quad (5.3.3)$$

bulunur. Bu ifade (5.3.2) de yerine yazılırsa β_3 eğrisinin teğet vektörü

$$T_{\beta_3}(s) = N^* \quad (5.3.4)$$

şeklinde olur. (5.3.1) ifadesinde T^* ve B^* in yerine (4.1.5) den karşılıkları yazılırsa Smarandache eğrisinin Mannheim eğrisine bağlı ifadesi

$$\beta_3(s) = \frac{\cos \theta T + N - \sin \theta B}{\sqrt{2}} \quad (5.3.5)$$

olur. (5.3.4) denkleminde (4.1.5), (4.1.8) ve (4.1.9) bağıntıları dikkate alınırsa (5.3.5) ifadesindeki β_3 eğrisinin teğet vektörü

$$T_{\beta_3}(s) = \sin \theta T + \cos \theta B \quad (5.3.6)$$

şeklinde bulunur. (5.3.4) ifadesinin tekrar türevi alınırsa $T'_{\beta_3}(s)$ türevi

$$T'_{\beta_3}(s) = \frac{\sqrt{2}}{\kappa^* - \tau^*} (-\kappa^* T^* + \tau^* B^*) \quad (5.3.7)$$

olur veya bu ifadelerin yerine T^* , B^* κ^* ve τ^* in yerine (4.1.5), (4.1.8) ve (4.1.9) dan karşılıkları yazılırsa katsayılar

$$\begin{cases} \bar{o}_1 = -\sqrt{2}\lambda^2\tau^2\theta' \cos \theta \|W\| + \kappa^2\theta'^2 \cos \theta \\ \bar{o}_2 = \sqrt{2}\lambda^2\kappa^2\tau^2 + \sqrt{2}\lambda^2\tau^4 - \kappa^2\theta' \|W\| \\ \bar{o}_3 = \sqrt{2}\lambda^2\tau^2\theta' \sin \theta \|W\| - \kappa^2\theta'^2 \sin \theta \end{cases} \quad (5.3.8)$$

şeklinde olur. $T'_{\beta_3}(s)$ türev ifadesindeki (4.1.5) ve (5.3.8) bağıntıları yerine yazılırsa $T'_{\beta_3}(s)$ vektörünün Mannheim eğrisinin Frenet elemanları cinsinden ifadesi

$$T'_{\beta_3}(s) = \frac{\bar{o}_1 T + \bar{o}_2 N + \bar{o}_3 B}{\theta' \lambda^2 \tau^2 \|W\|} \quad (5.3.9)$$

şeklinde bulunur. β_3 eğrisinin eğriliği κ_{β_3} ile gösterilirse (5.3.7) bağıntısından κ_{β_3} eğriliği

$$\begin{aligned} \kappa_{\beta_3} &= \|T'_{\beta_3}\|, \\ \kappa_{\beta_3} &= \frac{\sqrt{2(\kappa^{*2} + \tau^{*2})}}{\kappa^* - \tau^*} \end{aligned} \quad (5.3.10)$$

olur. Burada κ^* ve τ^* in yerine (4.1.8) ve (4.1.9) dan karşılıkları yazılırsa κ_{β_3} eğriliğinin Mannheim eğrisinin eğriliklerine bağlı ifadesi

$$\kappa_{\beta_3} = \frac{\sqrt{\bar{o}_1^2 + \bar{o}_2^2 + \bar{o}_3^2}}{\theta' \lambda^2 \tau^2 \|W\|} \quad (5.3.11)$$

şekline dönüşür. β_3 eğrisinin aslinormali N_{β_3} ile gösterilirse (5.3.7) bağıntısından

$$\begin{aligned} N_{\beta_3} &= \frac{T'_{\beta_3}}{\|T'_{\beta_3}\|}, \\ N_{\beta_3} &= \frac{-\kappa^* T^* + \tau^* B^*}{\sqrt{\kappa^{*2} + \tau^{*2}}} \end{aligned}$$

olur. Burada T^* , N^* ve B^* in yerine (4.1.5) den karşılıkları yazılırsa N_{β_3} ifadesinin Mannheim eğrisinin Frenet elemanları cinsinden ifadesi

$$N_{\beta_3} = \frac{\bar{o}_1 T + \bar{o}_2 N + \bar{o}_3 B}{\sqrt{\bar{o}_1^2 + \bar{o}_2^2 + \bar{o}_3^2}} \quad (5.3.12)$$

şeklinde bulunur. $B_{\beta_3} = T_{\beta_3} \wedge N_{\beta_3}$ olduğundan B_{β_3} vektörü

$$B_{\beta_3} = \frac{\tau^* T^* + \kappa^* B^*}{\sqrt{\kappa^{*2} + \tau^{*2}}} \quad (5.3.13)$$

olur. Burada T^* , B^* , κ^* ve τ^* in yerine (4.1.5), (4.1.8) ve (4.1.9) den karşılıkları yazılırsa B_{β_3} binormal vektörünün Mannheim eğrisinin Frenet elemanları cinsinden ifadesi

$$B_{\beta_3} = \frac{-\bar{o}_2 \cos \theta T + (\bar{o}_1 \cos \theta - \bar{o}_3 \sin \theta) N + \bar{o}_2 \sin \theta B}{\sqrt{\bar{o}_1^2 + \bar{o}_2^2 + \bar{o}_3^2}} \quad (5.3.14)$$

şeklinde bulunur. β_3 eğrisinin ikinci ve üçüncü türevleri sırasıyla

$$\beta_3'' = \frac{(-\kappa^{*2} + \tau^* \kappa^*) T^* + (\kappa^{*'} - \tau^{*'}) N^* + (\kappa^* \tau^* - \tau^{*2}) B^*}{\sqrt{2}}$$

ve

$$\beta_3''' = \frac{p_1 T^* + p_2 N^* + p_3 B^*}{\sqrt{2}}$$

olur. Burada

$$\begin{cases} p_1 = -3\kappa^* \kappa^{*'} + 2\kappa^* \tau^{*'} + \kappa^{*'} \tau^* \\ p_2 = \kappa^{*3} + \tau^* \kappa^{*2} - \kappa^* \tau^{*2} + \tau^{*3} + \kappa^{*''} - \tau^{*''} \\ p_3 = \kappa^* \tau^{*'} + 2\kappa^{*'} \tau^* - 3\tau^* \tau^{*'} \end{cases} \quad (5.3.15)$$

şeklinde katsayılarıdır. β_3 eğrisinin torsiyonu τ_{β_3} ile gösterilirse τ_{β_3} torsiyonu

$$\tau_{\beta_3} = \frac{\det(\beta_3', \beta_3'', \beta_3''')}{\|\beta_3' \wedge \beta_3''\|^2}$$

dır.

Burada β_3' , β_3'' ve β_3''' türevleri yerine yazılır ve gerekli hesaplamalar yapılırsa τ_{β_3} torsiyonu

$$\tau_{\beta_3} = \frac{\sqrt{2}[\kappa^{*3}p_3 - 2\kappa^{*2}\tau^*p_3 + \kappa^{*2}\tau^*p_1 + \kappa^*\tau^{*2}p_3 - 2\kappa^*\tau^{*2}p_1 + \tau^{*3}p_1]}{[\tau^*(\kappa^* - \tau^*)^2]^2 + [\kappa^*(\kappa^* - \tau^*)^2]^2} \quad (5.3.16)$$

olur. (5.3.15) katsayılar ifadesinde κ^* ve τ^* in yerine (4.1.8) ve (4.1.9) dan karşılıkları yazılırsa yeni katsayılar

$$\left\{ \begin{aligned} \bar{p}_1 &= \frac{3\kappa^4\tau\theta'^2\lambda' - 3\kappa^4\tau\theta'\lambda'\|W\| - 3\kappa^4\tau\theta'\lambda\theta'' + \kappa^4\tau\lambda\theta''\|W\| + 3\kappa^4\theta'^2\lambda\tau' - 3\kappa^4\theta'\lambda\tau'\|W\|}{\lambda^3\tau^3\|W\|^4} \\ &+ \frac{2\kappa^3\tau\theta'\|W\|\lambda\kappa' + 3\kappa^2\tau^3\theta'^2\lambda' - 3\kappa^2\tau^3\theta'\lambda'\|W\| - 3\kappa^2\tau^3\theta'\lambda\theta'' + \kappa^2\tau^3\lambda\theta''\|W\|}{\lambda^3\tau^3\|W\|^4} \\ &+ \frac{6\kappa^2\tau^2\theta'^2\lambda\tau' - 4\kappa^2\tau^2\theta'\|W\|\lambda\tau' - 3\kappa\tau^3\theta'^2\lambda\kappa' + 3\kappa\tau^3\theta'\lambda\kappa'\|W\|}{\lambda^3\tau^3\|W\|^4} \end{aligned} \right. \quad (5.3.17)$$

$$\begin{aligned}
\bar{p}_2 = & \frac{4\lambda\tau^5\theta'\tau'\kappa\theta' + 6\lambda\tau^3\theta'\tau'\kappa^3\theta' + 2\lambda\tau\theta'\tau'\kappa^5\theta' + 2\kappa'\lambda^2\tau^3\tau'\kappa^2\theta' - 2\kappa'\lambda\tau^4\lambda'\kappa^2\theta'}{\lambda^3\tau^3\|W\|^5} \\
& + \frac{4\kappa'\lambda\tau^4\lambda'\kappa^2\|W\| + 2\kappa'\lambda\tau^2\theta'\kappa^4\|W\| + 4\kappa'\lambda^2\tau^3\tau\kappa^2\|W\| + 2\kappa'\lambda^2\tau\tau'\kappa^4\|W\|}{\lambda^3\tau^3\|W\|^5} \\
& - \frac{2\lambda\tau^5\theta'\tau'\kappa\|W\| + 4\lambda\tau^3\theta'\tau'\kappa^3\|W\| + 2\lambda\tau\theta'\tau'\kappa^5\|W\| + 2\lambda^2\tau'^2\kappa^5\|W\|}{\lambda^3\tau^3\|W\|^5} \\
& - \frac{2\tau^6\theta'^2 + 4\tau^4\theta'^2\kappa^3\|W\| + 2\tau^2\theta'^2\kappa^5\|W\| - 2\tau^6\theta'^2\kappa\theta' - 4\tau^4\theta'^2\kappa^3\theta'\kappa\|W\|}{\lambda^3\tau^3\|W\|^5} \\
& + \frac{2\tau^2\theta'^2\kappa^5\theta' + 2\lambda^2\tau'^2\kappa^5\theta' + \tau^2\kappa^3\theta'^2\|W\| + \lambda^2\tau^6\kappa\theta''' + 2\lambda^2\tau^4\kappa^3\theta''' + \lambda^2\tau^2\kappa^5\theta'''}{\lambda^3\tau^3\|W\|^5} \\
& + \frac{\lambda^2\tau^6\kappa''\theta' + 2\kappa'\lambda^2\tau^6\theta'' - \lambda^2\tau^6\kappa''\|W\| + \kappa^5\theta'^2\|W\| - \tau^4\kappa^3\theta' - 2\tau^2\kappa^5\theta'}{\lambda^3\tau^3\|W\|^5} \\
& + \frac{\tau^4\kappa^3\|W\| + 2\tau^2\kappa^5\|W\| + \tau^2\kappa^3\theta'^3 + \kappa^5\theta'^3 - \kappa^7\theta' + \kappa^7\|W\| - 4\lambda^2\tau^2\tau'^2\kappa^3\|W\|}{\lambda^3\tau^3\|W\|^5} \\
& + \frac{\lambda^2\tau^5\kappa\tau''\|W\| + 2\lambda^2\tau^3\kappa^3\tau''\|W\| + \lambda^2\tau\kappa^5\tau''\|W\| + \lambda\tau^6\kappa\lambda''\|W\| + 2\lambda\tau^4\kappa^3\lambda''\|W\|}{\lambda^3\tau^3\|W\|^5} \\
& + \frac{\lambda\tau^2\kappa^5\lambda''\|W\| + 2\kappa'\lambda\tau^6\theta''\|W\| + 2\kappa'\lambda^2\tau^5\tau''\|W\| - 2\lambda\tau^6\lambda'\kappa\theta'' - 4\lambda\tau^4\lambda'\kappa^3\theta''}{\lambda^3\tau^3\|W\|^5} \\
& - \frac{2\lambda\tau^2\theta'\kappa^5\theta'' + 2\lambda^2\tau\tau'\kappa^5\theta'' + 2\kappa'\lambda\tau^6\lambda'\theta' + \lambda\tau^6\kappa\lambda''\theta' + 2\lambda\tau^4\kappa^3\lambda''\theta' + \lambda\tau^2\kappa^5\lambda''\theta'}{\lambda^3\tau^3\|W\|^5} \\
& - \frac{\lambda^2\tau\kappa^5\tau''\theta' + 2\lambda^2\tau^4\kappa^2\kappa''\|W\| + \lambda^2\tau^2\kappa^4\kappa''\|W\| + 3\theta'\kappa\lambda^2\tau^4\kappa'^2 + 2\theta'\kappa\lambda^2\tau^5\tau''}{\lambda^3\tau^3\|W\|^5} \\
& + \frac{6\theta'\kappa\lambda^2\tau^4\tau'^2 + \theta'\kappa^2\lambda^2\tau^4\kappa'' - 3\theta'\kappa^3\lambda^2\tau^3\tau'' + 5\theta'\kappa^3\lambda^2\tau^2\tau^2 + 2\kappa'\lambda^2\tau^4\kappa^2\theta''}{\lambda^3\tau^3\|W\|^5} \\
& - \frac{6\lambda^2\tau^3\tau'\kappa^3\theta'' + 4\kappa'\lambda^2\tau^5\tau'\theta' + 2\lambda^2\tau^4\tau'^2\kappa\|W\| + 4\lambda^2\tau^5\tau\kappa\theta''}{\lambda^3\tau^3\|W\|^5}
\end{aligned}$$

(5.3.18)

$$\left\{ \begin{aligned} \bar{p}_3 &= \frac{2\kappa^4\tau\theta''\lambda - 3\kappa^4\tau\theta'\lambda' + 3\kappa^4\tau\lambda'\|W\| - 3\kappa^4\lambda\theta'\tau' + 3\kappa^4\lambda\tau'\|W\| + \kappa^3\tau\lambda\theta'\kappa'}{\lambda^3\tau^3\|W\|^3} \\ &+ \frac{2\kappa^2\tau^3\theta''\lambda - 3\kappa^3\tau\lambda\kappa'\|W\| - 3\kappa^2\tau^3\theta'\lambda' + 3\kappa^2\tau^3\lambda'\|W\| - 5\kappa^2\tau^2\lambda\theta'\tau'}{\lambda^3\tau^3\|W\|^3} \\ &+ \frac{3\kappa^2\tau^2\lambda\tau'\|W\| + 3\kappa\tau^3\lambda\theta'\kappa' - 3\kappa\tau^3\lambda\kappa'\|W\|}{\lambda^3\tau^3\|W\|^3} \end{aligned} \right. \quad (5.3.19)$$

şeklinde bulunur ve bu katsayılar (5.3.16) da verilen yerine yazılırsa T^*B^* Smarandache eğrisinin τ_{β_3} torsiyonunun Mannheim eğrisinin Frenet elemanları cinsinden ifadesi

$$\tau_{\beta_3} = \frac{\sqrt{2} \left[\kappa^5\theta'\bar{p}_3 - 2\kappa^5\theta'\bar{p}_1 + \kappa^5\|W\|\bar{p}_1 + \kappa^3\theta'^3\bar{p}_3 - 2\kappa^3\bar{p}_3\theta'^2\|W\| + \kappa^3\bar{p}_1\theta'^2\|W\| + \kappa^3\theta'\tau^2\bar{p}_3 - 2\kappa^3\theta'\tau^2\bar{p}_1 + \kappa^3\tau^2\|W\|\bar{p}_1 \right] \lambda^3\tau^3\|W\|^3}{\left[-8\kappa^8\|W\|\theta'\tau^2 + \kappa^6\theta'^6 + \kappa^{12} + \kappa^6\tau^6 + 3\kappa^{10}\tau^2 + 7\kappa^{10}\theta'^2 + 3\kappa^8\tau^4 + 7\kappa^6\tau^4\theta'^2 + 7\kappa^8\theta'^4 + 7\kappa^6\theta'^4\tau^2 - 4\kappa^6\|W\|\theta'^5 - 8\kappa^6\|W\|\theta'^3\tau^2 - 4\kappa^{10}\|W\|\theta' - 4\kappa^6\|W\|\theta'\tau^4 - 8\kappa^8\|W\|\theta'^3 + 14\kappa^8\tau^2\theta'^2 \right]}$$

şeklinde elde edilir.

5.4 $T^*N^*B^*$ Smarandache Eğrisi

$$\beta_4(s) = \frac{(T^* + N^* + B^*)}{\sqrt{3}} \quad (5.4.1)$$

Smarandache eğrisinin s_{β_4} yay parametresine göre türevi alınırsa

$$T_{\beta_4} \frac{ds_{\beta_4}}{ds} = \frac{-\kappa^* T^* + (\kappa^* - \tau^*) N^* + \tau^* B^*}{\sqrt{3}} \quad (5.4.2)$$

olur ve norm alınırsa $\frac{ds_{\beta_4}}{ds}$ ifadesi

$$\frac{ds_{\beta_4}}{ds} = \sqrt{\frac{2(\kappa^{*2} + \tau^{*2} - \kappa^* \tau^*)}{3}} \quad (5.4.3)$$

bulunur. Bu ifade (5.4.2) de yerine yazılırsa β_4 eğrisinin teğet vektörü

$$T_{\beta_4}(s) = \frac{-\kappa^* T^* + (\kappa^* - \tau^*) N^* + \tau^* B^*}{\sqrt{2(\kappa^{*2} + \tau^{*2} - \kappa^* \tau^*)}} \quad (5.4.4)$$

şeklinde olur. (5.4.1) ifadesinde T^* ve N^* in yerine (4.1.5) den karşılıkları yazılırsa Smarandache eğrisinin Mannheim eğrisine bağlı ifadesi

$$\beta_4(s) = \frac{(\sin \theta + \cos \theta) T + N + (\cos \theta - \sin \theta) B}{\sqrt{3}} \quad (5.4.5)$$

olur. (5.4.4) denkleminde (4.1.5), (4.1.8) ve (4.1.9) bağıntıları dikkate alınırsa (5.4.5) ifadesindeki β_4 eğrisinin teğet vektörü

$$\begin{aligned}
T_{\beta_4}(s) = & \left(\frac{-\kappa\|W\|\sqrt{\|W\|}\sin\theta - \kappa\theta'\sqrt{\|W\|}(\cos\theta - \sin\theta)}{\sqrt{-2\kappa^2(\kappa^2\theta' - \kappa^2\|W\| + \theta'\tau^2 - \tau^2\|W\| - \theta'^2\|W\|)}} \right) T \\
& + \left(\frac{\kappa\|W\|\sqrt{\|W\|}}{\sqrt{-2\kappa^2(\kappa^2\theta' - \kappa^2\|W\| + \theta'\tau^2 - \tau^2\|W\| - \theta'^2\|W\|)}} \right) N \\
& + \left(\frac{-\kappa\|W\|\sqrt{\|W\|}\cos\theta + \kappa\theta'\sqrt{\|W\|}(\cos\theta + \sin\theta)}{\sqrt{-2\kappa^2(\kappa^2\theta' - \kappa^2\|W\| + \theta'\tau^2 - \tau^2\|W\| - \theta'^2\|W\|)}} \right) B \quad (5.4.6)
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur.(5.4.4) ifadesinin tekrar türevi alınırsa katsayılar

$$\begin{cases}
g_1 = 2\tau^{*3}\kappa^* - 4\tau^{*2}\kappa^{*2} + 4\tau^*\kappa^{*3} - 2\kappa^{*4} - 2\kappa^{*'}\tau^{*2} + \kappa^{*'}\tau^*\kappa^* + 2\tau^*\kappa^*\tau^{*'} \\
\quad - \kappa^{*2}\tau^{*'} \\
g_2 = -2\tau^{*4} + 2\tau^{*3}\kappa^* - 4\tau^{*2}\kappa^{*2} + 2\tau^*\kappa^{*3} - 2\kappa^{*4} + \kappa^{*'}\tau^{*2} + \kappa^{*'}\tau^*\kappa^* - \kappa^{*2}\tau^{*'} \\
\quad - \tau^*\kappa^*\tau^{*'} \\
g_3 = -2\tau^{*4} + 4\tau^{*3}\kappa^* - 4\tau^{*2}\kappa^{*2} + 2\tau^*\kappa^{*3} + \kappa^{*'}\tau^{*2} - 2\kappa^{*'}\tau^*\kappa^* - \tau^*\kappa^*\tau^{*'} \\
\quad + 2\kappa^{*2}\tau^{*'}
\end{cases} \quad (5.4.7)$$

olmak üzere $T'_{\beta_4}(s)$ türevi

$$T'_{\beta_4}(s) = \frac{\sqrt{3}}{2(\kappa^{*2} + \tau^{*2} - \kappa^*\tau^*)^2} (g_1T^* + g_2N^* + g_3B^*) \quad (5.4.8)$$

olur. (5.4.7) ifadesinde κ^* ve τ^* in yerine (4.1.8) ve (4.1.9) dan karşılıkları yazılırsa yeni katsayılar

$$\left\{ \begin{aligned}
\bar{g}_1 &= \frac{\kappa^3 \tau^3 \theta' \lambda \theta'' - 2\kappa^3 \tau^3 \lambda \theta'' \|W\| - \theta'^2 \kappa^3 \tau' \lambda \tau^2 + 2\kappa^3 \|W\| - \tau^2 \theta' \lambda \tau' - \theta'^2 \kappa^4 \kappa' \lambda \tau}{\lambda^4 \tau^4 \|W\|^4} \\
&+ \frac{\kappa^5 \tau \theta' \lambda \theta'' + 2\kappa^4 \tau \theta' \lambda \|W\| - \kappa' - 2\kappa^5 \tau \lambda \theta'' \|W\| - 4\kappa^4 \tau^2 \theta'^2 + 2\kappa^4 \tau^2 \theta' \|W\|}{\lambda^4 \tau^4 \|W\|^4} \\
&- \frac{2\theta'^4 \kappa^4 - 4\kappa^4 \theta'^3 \|W\| + 4\kappa^6 \theta'^2 - 2\kappa^6 \theta' \|W\|}{\lambda^4 \tau^4 \|W\|^4} \\
\bar{g}_2 &= \frac{\kappa^3 \tau^3 \theta' \lambda \theta'' + \kappa^3 \tau^3 \lambda \theta'' \|W\| - \theta'^2 \kappa^3 \tau' \lambda \tau^2 - \kappa^3 \|W\| \tau^2 \theta' \lambda \tau' - \theta'^2 \kappa^4 \kappa' \lambda \tau - 2\kappa^8}{\lambda^4 \tau^4 \|W\|^4} \\
&- \frac{\kappa^4 \tau \theta' \lambda \|W\| \kappa' - \kappa^5 \tau \lambda \theta'' \|W\| + 2\kappa^4 \tau^4 + 4\kappa^4 \tau^2 \theta'^2 - 2\kappa^4 \tau^2 \theta' \|W\| - \kappa^5 \tau \theta' \lambda \theta''}{\lambda^4 \tau^4 \|W\|^4} \\
&- \frac{4\kappa^6 \tau^2 + 2\theta'^4 \kappa^4 - 2\kappa^4 \theta'^3 \|W\| + 4\kappa^6 \theta'^2 - 2\kappa^6 \theta' \|W\|}{\lambda^4 \tau^4 \|W\|^4} \\
\bar{g}_3 &= \frac{\kappa^3 \tau^3 \lambda \theta'' \|W\| - 2\kappa^3 \tau^3 \theta' \lambda \theta'' + 2\theta'^2 \kappa^3 \tau' \lambda \tau^2 - \kappa^3 \|W\| \tau^2 \theta' \lambda \tau' + 2\theta'^2 \kappa^4 \kappa' \lambda \tau}{\lambda^4 \tau^4 \|W\|^4} \\
&- \frac{\kappa^4 \tau \theta' \lambda \|W\| \kappa' - \kappa^5 \tau \lambda \theta'' \|W\| + 2\kappa^4 \tau^4 + 4\kappa^4 \tau^2 \theta'^2 - 4\kappa^4 \tau^2 \theta' \|W\| + 4\kappa^6 \tau^2}{\lambda^4 \tau^4 \|W\|^4} \\
&+ \frac{2\kappa^4 \theta'^3 \|W\| - 4\kappa^6 \theta'^2 + 4\kappa^6 \theta' \|W\| - 2\kappa^8 - 2\kappa^5 \tau \theta' \lambda \theta''}{\lambda^4 \tau^4 \|W\|^4}
\end{aligned} \right. \quad (5.4.9)$$

şeklinde olur. $T'_{\beta_4}(s)$ türev ifadesinde (4.1.5) ve (5.1.9) bağıntıları yerine yazılırsa T'_{β_4} vektörünün Mannheim eğrisinin Frenet elemanları cinsinden ifadesi

$$\begin{aligned}
T'_{\beta_4}(s) &= \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\lambda^8 \tau^8 \|W\|^4}{\kappa^4 (\kappa^2 \tau^2 \lambda^2 + \tau^4 \lambda^2 + \theta'^2 \lambda^2 \tau^2 - \theta'^2 \kappa^2)^2} \left[(\bar{g}_1 \cos \theta + \bar{g}_2 \sin \theta) T \right. \\
&\quad \left. + \bar{g}_3 N + (\bar{g}_2 \cos \theta - \bar{g}_1 \sin \theta) B \right]. \quad (5.4.10)
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. β_4 eğrisinin eğriliği κ_{β_4} ile gösterilirse (5.4.8) bağıntısından κ_{β_4} eğriliği

$$\kappa_{\beta_4} = \|T'_{\beta_4}\| ,$$

$$\kappa_{\beta_4} = \frac{\sqrt{3}\sqrt{g_1^2 + g_2^2 + g_3^2}}{2(\kappa^{*2} + \tau^{*2} - \kappa^*\tau^*)^2} \quad (5.4.11)$$

olur. Burada κ^* ve τ^* in yerine (4.1.8) ve (4.1.9) dan karşılıkları yazılırsa κ_{β_4} eğriliğinin Mannheim eğrisinin eğriliklerine bağlı ifadesi

$$\kappa_{\beta_4} = \frac{\sqrt{3}\lambda^8\tau^8\|W\|^4\sqrt{\bar{g}_1^2 + \bar{g}_2^2 + \bar{g}_3^2}}{2\kappa^4(\kappa^2\tau^2\lambda^2 + \tau^4\lambda^2 + \theta'^2\lambda^2\tau^2 - \theta'^2\kappa^2)^2} \quad (5.4.12)$$

şekline dönüşür. β_4 eğrisinin aslinormali N_{β_4} ile gösterilirse (5.4.8) bağıntısından

$$N_{\beta_4} = \frac{T'_{\beta_4}}{\|T'_{\beta_4}\|} ,$$

$$N_{\beta_4} = \frac{g_1T^* + g_2N^* + g_3B^*}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2 + g_3^2}}$$

olur. Burada T^* , N^* ve B^* in yerine (4.1.5) den karşılıkları yazılırsa N_{β_4} ifadesinin Mannheim eğrisinin Frenet elemanları cinsinden ifadesi

$$N_{\beta_4} = \frac{(\bar{g}_1 \cos \theta + \bar{g}_2 \sin \theta)T + \bar{g}_3N + (g_2 \cos \theta - g_1 \sin \theta)B}{\sqrt{\bar{g}_1^2 + \bar{g}_2^2 + \bar{g}_3^2}} \quad (5.4.13)$$

şeklinde bulunur. $B_{\beta_4} = T_{\beta_4} \wedge N_{\beta_4}$ olduğundan B_{β_4} vektörü

$$B_{\beta_4} = \frac{((\kappa^* - \tau^*)g_3 - \tau^*g_2)T^* + (\kappa^*g_3 + \tau^*g_1)N^* + (-\kappa^*g_2 - (\kappa^* - \tau^*)g_1)B^*}{\sqrt{2(\kappa^{*2} + \tau^{*2} - \kappa^*\tau^*)(g_1^2 + g_2^2 + g_3^2)}} \quad (5.4.14)$$

olur. Burada T^* , N^* , B^* κ^* ve τ^* in yerine (4.1.5), (4.1.8) ve (4.1.9) dan karşılıkları yazılırsa B_{β_4} binormal vektörünün Mannheim eğrisinin Frenet elemanları cinsinden ifadesi

$$\begin{aligned}
B_{\beta_4} = & \left(\frac{-\kappa\sqrt{\|W\|}(\sin\theta\|W\|\bar{g}_1 - \cos\theta\|W\|(\bar{g}_2 + \bar{g}_3) + \theta'\bar{g}_3(\sin\theta + \cos\theta))}{\sqrt{-2\kappa^2(\bar{g}_1^2 + \bar{g}_2^2 + \bar{g}_3^2)(\kappa^2\theta' - \kappa^2\|W\| + \theta'\tau^2 - \tau^2\|W\| - \theta'^2\|W\|)}} \right) \mathbf{T} \\
& + \left(\frac{-\|W\|\bar{g}_1 + \theta'\bar{g}_1 + \theta'\bar{g}_2}{\sqrt{-2\kappa^2(\bar{g}_1^2 + \bar{g}_2^2 + \bar{g}_3^2)(\kappa^2\theta' - \kappa^2\|W\| + \theta'\tau^2 - \tau^2\|W\| - \theta'^2\|W\|)}} \right) \mathbf{N} \\
& + \left(\frac{\kappa\sqrt{\|W\|}(-\cos\theta\|W\|\bar{g}_1 - \sin\theta\|W\|(\bar{g}_2 + \bar{g}_3) + \theta'\bar{g}_3(\sin\theta - \cos\theta))}{\sqrt{-2\kappa^2(\bar{g}_1^2 + \bar{g}_2^2 + \bar{g}_3^2)(\kappa^2\theta' - \kappa^2\|W\| + \theta'\tau^2 - \tau^2\|W\| - \theta'^2\|W\|)}} \right) \mathbf{B}
\end{aligned} \tag{5.4.15}$$

şeklinde bulunur. β_4 eğrisinin ikinci ve üçüncü türevleri sırasıyla

$$\beta_4'' = \frac{(-\kappa^{*'} - \kappa^{*2} + \tau^*\kappa^*)T^* + (-\kappa^{*2} + \kappa^{*'} - \tau^{*'} - \tau^{*2})N^* + (\kappa^*\tau^* - \tau^{*2} + \tau^{*'})B^*}{\sqrt{3}}$$

ve

$$\beta_4''' = \frac{f_1T^* + f_2N^* + f_3B^*}{\sqrt{3}}$$

olur. Burada

$$\begin{cases} f_1 = -\kappa^{*''} + \kappa^{*3} - 3\kappa^*\kappa^{*'} + 2\tau^{*'}\kappa^* + \tau^*\kappa^{*'} + \tau^{*2}\kappa^* \\ f_2 = -3\kappa^*\kappa^{*'} + \kappa^{*''} - \tau^{*''} - \kappa^{*3} - \kappa^*\tau^{*2} + \tau^*\kappa^{*2} + \tau^{*3} - 3\tau^*\tau^{*'} \\ f_3 = -\kappa^{*2}\tau^* + 2\kappa^{*'}\tau^* - 3\tau^*\tau^{*'} + \kappa^*\tau^{*'} + \tau^{*''} - \tau^{*3} \end{cases} \tag{5.4.16}$$

şeklinde katsayılarıdır. β_4 eğrisinin torsiyonu τ_{β_4} ile gösterilirse τ_{β_4} torsiyonu

$$\tau_{\beta_4} = \frac{\det(\beta_4', \beta_4'', \beta_4''')}{\|\beta_4' \wedge \beta_4''\|^2}$$

dır. Burada β_4' , β_4'' ve β_4''' türevleri yerine yazılır ve gerekli hesaplamalar yapılırsa τ_{β_4} torsiyonu

$$\tau_{\beta_4} = \frac{\sqrt{3} \left[2\kappa^{*3} f_3 - 2\kappa^{*2} \tau^* f_3 + 2\kappa^{*2} \tau^* f_1 + 2\kappa^* \tau^{*2} f_3 - 2\kappa^* \tau^{*2} f_1 + 2\tau^{*3} f_1 + \kappa^* \tau^{*'} f_3 - \kappa^{*'} \tau^* f_3 + \kappa^* \tau^{*'} f_2 + \kappa^* \tau^{*'} f_1 - \kappa^{*'} \tau^* f_2 - \kappa^{*'} \tau^* f_1 \right]}{[2\kappa^* \tau^* (\kappa^* - \tau^*) + 2\tau^{*3} + \kappa^* \tau^{*'} - \kappa^{*'} \tau^*]^2 + [2\kappa^{*3} - 2\kappa^* \tau^* (\kappa^* - \tau^*) + \kappa^* \tau^{*'} - \kappa^{*'} \tau^*]^2 + [\kappa^* \tau^{*'} - \kappa^{*'} \tau^*]^2} \quad (5.4.17)$$

olur. (5.4.16) katsayılar ifadesinde κ^* ve τ^* in yerine (4.1.8) ve (4.1.9) dan karşılıkları yazılırsa yeni katsayılar

$$\left\{ \begin{aligned} \bar{f}_1 = & - \frac{\kappa^2 \tau^4 \theta' \lambda^2 \kappa'' + 7\kappa^4 \tau^2 \theta' \lambda \tau' + 4\kappa^2 \tau^4 \theta' \lambda \tau' + 2\kappa^2 \tau^4 \lambda^2 \kappa' \theta'' + 5\kappa^3 \tau^2 \theta' \lambda^2 \tau'^2}{\lambda^3 \tau^3 \|W\|^5} \\ & + \frac{2\kappa^5 \tau \theta' \lambda \kappa' + 5\kappa^3 \tau^3 \theta' \lambda \kappa' + 3\kappa \tau^5 \theta' \lambda \kappa' + 6\kappa^3 \tau^3 \lambda^2 \tau' \theta'' + 4\kappa \tau^5 \lambda^2 \tau' \theta'' + \kappa^5 \theta'^3}{\lambda^3 \tau^3 \|W\|^5} \\ & + \frac{4\tau^5 \theta' \lambda^2 \kappa' \tau' + 2\kappa^5 \tau^2 \lambda \lambda' \theta' + 4\kappa^3 \tau^4 \lambda \lambda' \theta'' + 2\kappa \tau^6 \lambda \lambda' \theta'' + 2\kappa^5 \tau \lambda^2 \tau' \theta'' + \kappa^7 \theta'}{\lambda^3 \tau^3 \|W\|^5} \\ & + \frac{2\tau^6 \theta' \lambda \lambda' \kappa' + \kappa^5 \tau^2 \theta' \lambda \lambda'' + 2\kappa^3 \tau^4 \theta' \lambda \lambda'' + \kappa \tau^6 \theta' \lambda \lambda'' + \kappa^5 \tau \theta' \lambda^2 \tau'' + 2\kappa^2 \tau^4 \theta' \lambda \lambda' \kappa'}{\lambda^3 \tau^3 \|W\|^5} \\ & + \frac{3\kappa^3 \tau^3 \theta' \lambda^2 \tau'' + 2\kappa \tau^5 \theta' \lambda^2 \tau'' + 3\kappa \tau^4 \theta' \lambda^2 \kappa'^2 - 6\kappa \tau^4 \theta' \lambda^2 \tau'^2 + 6\theta'^2 \kappa^2 \|W\| \tau^2 \lambda \tau'}{\lambda^3 \tau^3 \|W\|^5} \\ & - \frac{2\kappa^2 \tau^3 \theta' \lambda^2 \kappa' \tau' - \kappa^3 \tau^2 \theta'^3 - 2\kappa^5 \tau^2 \theta' - \kappa^3 \tau^4 \theta' + \kappa^5 \tau^2 \lambda^2 \theta''' + 3\kappa \tau^3 \theta'^2 \lambda \kappa' \|W\|}{\lambda^3 \tau^3 \|W\|^5} \\ & - \frac{2\kappa^3 \tau^4 \lambda^2 \theta''' + \kappa \tau^6 \lambda^2 \theta''' + \tau^6 \theta' \lambda^2 \kappa'' + 3\kappa^6 \tau \theta' \lambda' + 6\kappa^4 \tau^3 \theta' \lambda' + 2\kappa^5 \tau \theta' \lambda \lambda' \tau'}{\lambda^3 \tau^3 \|W\|^5} \\ & - \frac{3\kappa^2 \tau^5 \theta' \lambda' + 3\kappa^6 \theta' \lambda \tau' - \kappa^6 \tau \lambda \theta'' - 2\kappa^4 \tau^3 \lambda \theta'' + 6\kappa^3 \tau^3 \theta' \lambda \lambda' \tau' + 3\kappa^2 \tau^3 \theta' \lambda \theta'' \|W\|}{\lambda^3 \tau^3 \|W\|^5} \\ & - \frac{2\tau^6 \lambda^2 \kappa' \theta'' + 2\kappa^5 \tau^2 \theta' \lambda'^2 + 4\kappa^3 \tau^4 \theta' \lambda'^2 + 2\kappa \tau^6 \theta' \lambda'^2 + 2\kappa^5 \theta' \lambda^2 \tau'^2 + 4\kappa \tau^5 \theta' \lambda \lambda' \tau'}{\lambda^3 \tau^3 \|W\|^5} \\ & + \frac{3\kappa^4 \tau \theta'^2 \lambda \|W\| + 3\kappa^2 \tau^3 \theta'^2 \lambda \|W\| + 3\kappa^4 \theta'^2 \lambda \tau' \|W\| - 3\kappa^4 \tau \theta' \lambda \theta'' \|W\| + \kappa^2 \tau^5 \lambda \theta''}{\lambda^3 \tau^3 \|W\|^5} \end{aligned} \right. \quad (5.4.18)$$

$$\begin{aligned}
\bar{f}_2 = & \frac{3\kappa^7\tau^2 + 3\kappa^5\tau^4 + \tau^4\kappa^3\theta'^2 - \kappa''\lambda^2\tau^8 + 3\lambda\kappa^8\tau' + 3\tau^7\kappa^2\lambda' + 9\tau^5\kappa^4\lambda' + 9\tau^3\kappa^6\lambda'}{\lambda^3\tau^3\|W\|^6} \\
& + \frac{3\tau\kappa^8\lambda' - 2\tau^8\kappa\lambda'^2 - 6\tau^6\kappa^3\lambda'^2 - 6\tau^4\kappa^5\lambda'^2 - 2\tau^2\kappa^7\lambda'^2 - 2\lambda^2\kappa^7\tau'^2 + 2\tau^2\kappa^5\theta'^2}{\lambda^3\tau^3\|W\|^6} \\
& - \frac{+\kappa^7\theta'\|W\| + \kappa^5\theta'^3\|W\| - \tau^6\kappa^3 - \kappa^7\theta'^2 - 6\lambda\tau^6\kappa^2\kappa'\lambda' - 6\lambda^2\tau^5\kappa^2\kappa'\tau' + 2\lambda\tau^7\kappa\tau'\lambda'}{\lambda^3\tau^3\|W\|^6} \\
& + \frac{6\lambda^2\tau^3\kappa^4\kappa'\tau' - 6\lambda\tau^5\kappa^3\tau'\lambda' - 6\lambda\tau^3\kappa^5\tau'\lambda' - 2\lambda\tau\kappa^7\tau'\lambda' + 6\lambda\tau^4\kappa^4\kappa'\lambda' + 2\lambda\tau^2\kappa^6\kappa'\lambda'}{\lambda^3\tau^3\|W\|^6} \\
& + \frac{2\lambda^2\tau\kappa^6\kappa'\tau' - 3\theta'\kappa^6\lambda\tau\theta'' + 9\theta'^2\kappa^4\lambda\tau^2\tau' - 3\theta'^2\kappa^3\lambda\tau^3\kappa' - 6\theta'\kappa^4\lambda\tau^3\theta'' + 6\theta'^2\kappa^2\lambda\tau^4\tau'}{\lambda^3\tau^3\|W\|^6} \\
& + \frac{2\tau^2\kappa^5\theta'\lambda'^2\|W\| - 3\theta'^2\kappa\lambda\tau^5\kappa' - 3\theta'\kappa^2\lambda\tau^5\theta' + 2\tau^6\kappa\theta'\lambda'^2\|W\| + 4\tau^4\kappa^3\theta'\lambda'^2\|W\|}{\lambda^3\tau^3\|W\|^6} \\
& + \frac{2\lambda^2\kappa^5\theta'\tau'^2\|W\| + \kappa''\lambda^2\tau^6\theta'\|W\| + 2\lambda^2\tau^6\kappa\theta''\|W\| + \lambda^2\tau^6\kappa\theta'''\|W\| + 2\lambda^2\tau^4\kappa^3\theta'''\|W\|}{\lambda^3\tau^3\|W\|^6} \\
& + \frac{\lambda^2\tau^2\kappa^5\theta'''\|W\| + 2\lambda^2\tau^3\kappa^2\theta'\kappa'\tau'\|W\| + 2\lambda\tau\kappa^5\theta'\tau'\lambda'\|W\| + 4\theta'\kappa\lambda'\lambda\tau^5\|W\|\tau'}{\lambda^3\tau^3\|W\|^6} \\
& + \frac{6\theta'\kappa^3\lambda'\lambda\tau^3\|W\|\tau' - 2\theta'\kappa^2\lambda'\lambda\tau^4\|W\|\kappa' + \theta'\kappa^2\lambda^2\tau^4\|W\|\kappa'' - 2\theta'\kappa\lambda^2\tau^5\|W\|\tau''}{\lambda^3\tau^3\|W\|^6} \\
& + \frac{6\theta'\kappa\lambda^2\tau^4\|W\|\tau'^2 - 3\theta'\kappa\lambda^2\tau^4\|W\|\kappa'^2 - 3\theta'\kappa^3\lambda^2\tau^3\|W\|\tau'' + 5\theta'\kappa^3\lambda^2\tau^2\|W\|\tau'^2}{\lambda^3\tau^3\|W\|^6} \\
& - \frac{4\lambda\tau^4\kappa^3\lambda'\theta''\|W\| + 2\lambda\tau^2\kappa^5\lambda'\theta''\|W\| + 4\lambda^2\tau^5\kappa\tau'\theta''\|W\| + 6\lambda^2\tau^3\kappa^3\tau'\theta''\|W\|}{\lambda^3\tau^3\|W\|^6} \\
& - \frac{4\lambda^2\tau^5\theta'\kappa'\tau'\|W\| + \lambda\tau^6\kappa\theta'\lambda''\|W\| + 2\lambda\tau^4\kappa^3\theta'\lambda'\|W\| + \lambda\tau^2\kappa^5\theta'\lambda''\|W\|}{\lambda^3\tau^3\|W\|^6} \\
& + \frac{2\lambda^2\tau^4\kappa^2\kappa'\theta''\|W\| + 2\lambda^2\tau^7\kappa'\tau' - 3\kappa''\lambda^2\tau^6\kappa^2 - 3\kappa''\lambda^2\tau^4\kappa^4 - \kappa''\lambda^2\tau^2\kappa^6}{\lambda^3\tau^3\|W\|^6} \\
& + \frac{\lambda^2\tau\kappa^7\tau'' + \lambda\tau^8\kappa\lambda'' + 3\lambda\tau^4\kappa^5\lambda'' + \lambda\tau^2\kappa^7\lambda'' + \lambda^2\tau^7\kappa\tau'' + 3\lambda^2\tau^5\kappa^3\tau'' + 3\lambda^2\tau^3\kappa^5\tau''}{\lambda^3\tau^3\|W\|^6} \\
& + \frac{9\lambda\tau^2\kappa^6\tau' - 3\lambda\tau\kappa^7\kappa' - 2\lambda^2\tau^6\kappa\tau'^2 - 6\lambda^2\tau^4\kappa^3\tau'^2 - 6\lambda^2\tau^2\kappa^5\tau'^2 + 2\lambda\tau^8\kappa'\lambda' + 3\theta'^2\kappa^6\tau\lambda'}{\lambda^3\tau^3\|W\|^6} \\
& + \frac{3\theta'^2\kappa^6\lambda\tau' - \tau^2 + 6\theta'^2\kappa^4\tau^3\lambda' + 3\theta'^2\kappa^2\tau^5\lambda'\kappa^3\theta'^3\|W\| - \tau^4\kappa^3\theta'\|W\| - 2\tau^2\kappa^5\theta'\|W\| + \kappa^9}{\lambda^3\tau^3\|W\|^6} \\
& + \frac{3\lambda\tau^6\kappa^2\tau' - 9\lambda\tau^5\kappa^3\kappa' + 9\lambda\tau^4\kappa^4\tau' - 9\lambda\tau^3\kappa^5\kappa' + 2\lambda^2\tau\kappa^5\tau'\theta''\|W\| + 2\lambda\tau^6\theta'\kappa'\lambda'\|W\|}{\lambda^3\tau^3\|W\|^6} \\
& + \frac{3\lambda\tau^6\kappa^3\lambda'' - 3\lambda\tau^7\kappa\kappa' - 2\lambda\tau^6\kappa\lambda'\theta''\|W\| + \lambda^2\tau\kappa^5\theta'\tau''\|W\|}{\lambda^3\tau^3\|W\|^6}
\end{aligned}$$

(5.4.19)

$$\left\{ \begin{aligned}
\bar{f}_3 &= -\frac{2\lambda\tau^4\kappa'\lambda'\|W\| + 2\lambda^2\tau^3\kappa'\tau'\|W\| + \kappa^3\lambda\tau^2\lambda''\|W\| + \kappa\lambda\tau^4\lambda''\|W\|}{\lambda^3\tau^3\|W\|^3} \\
&+ \frac{2\kappa\lambda^2\tau^2\tau'^2\|W\| - \kappa^3\lambda^2\tau\tau''\|W\| - \kappa\lambda^2\tau^3\tau''\|W\| + 3\kappa^4\lambda\tau'\|W\|}{\lambda^3\tau^3\|W\|^3} \\
&+ \frac{3\kappa^4\tau\lambda'\|W\| + 3\kappa^2\tau^3\lambda'\|W\| + \lambda^2\tau^4\kappa''\|W\| + 2\kappa^3\tau^2\lambda'^2\|W\|}{\lambda^3\tau^3\|W\|^3} \\
&+ \frac{2\kappa\tau^4\lambda'^2\|W\| + 2\kappa^3\lambda^2\tau'^2\|W\| - \kappa^3\theta'^2\|W\| - 3\kappa\lambda\tau^3\kappa'\|W\| - \kappa^5\|W\|}{\lambda^3\tau^3\|W\|^3} \\
&+ \frac{2\kappa^4\lambda\tau\theta'' - 3\kappa^4\theta'\tau\lambda' - 3\kappa^2\tau^3\theta'\lambda' + 2\kappa^2\tau^3\lambda\theta'' - 3\kappa^4\theta'\lambda\tau' - \kappa^3\tau^2\|W\|}{\lambda^3\tau^3\|W\|^3} \\
&+ \frac{3\kappa\tau^3\theta'\lambda\kappa' - 5\tau^2\kappa^2\theta'\lambda\tau' + \theta'\kappa^3\lambda\tau\kappa' - 3\kappa^3\lambda\tau\kappa'\|W\| + 3\kappa^2\lambda\tau^2\tau'\|W\|}{\lambda^3\tau^3\|W\|^3}
\end{aligned} \right. \quad (5.4.20)$$

şeklinde bulunur ve bu katsayılar (5.4.17) de yerine yazılırsa $T^*N^*B^*$ Smarandache eğrisinin τ_{β_4} torsiyonunun Mannheim eğrisinin Frenet elemanları cinsinden ifadesi

$$\tau_{\beta_4} = \frac{\sqrt{3} \left[2\kappa^5\theta'\bar{f}_3 - 2\kappa^5\theta'\bar{f}_1 + 2\kappa^5\|W\|\bar{f}_1 - \kappa^4\tau\lambda\theta''\bar{f}_2 - \kappa^4\tau\lambda\theta''\bar{f}_3 - \kappa^2\tau^3\lambda\theta''\bar{f}_2 - \kappa^2\tau^3\lambda\theta''\bar{f}_3 \right. \\
- \kappa^4\tau\lambda\theta''\bar{f}_1 + \bar{f}_2\kappa^3\tau\theta'\lambda\kappa' + \bar{f}_3\kappa^3\tau\theta'\lambda\kappa' + \bar{f}_1\kappa^3\tau\theta'\lambda\kappa' + 2\kappa^3\tau^2\theta'\bar{f}_3 - \kappa^2\tau^3\lambda\theta''\bar{f}_1 \\
+ \bar{f}_3\kappa^2\tau^2\theta'\lambda\tau' + \bar{f}_1\kappa^2\tau^2\theta'\lambda\tau' + \bar{f}_2\kappa^2\tau^2\theta'\lambda\tau' - 2\kappa^3\tau^2\theta'\bar{f}_1 + 2\kappa^3\tau^2\|W\|\bar{f}_1 + 2\theta'^3\kappa^3\bar{f}_3 \\
\left. - 2\kappa^3\theta'^2\bar{f}_3\|W\| + 2\kappa^3\theta'^2\bar{f}_1\|W\| \right] \lambda^3\tau^3\|W\|^3}{\left[-16\kappa^8\theta'^3\|W\| - 8\kappa^{10}\theta'\|W\| + 16\kappa^6\tau^2\theta'^4 + 32\kappa^8\tau^2\theta'^2 + 16\kappa^6\tau^4\theta'^2 - 8\kappa^6\theta'^5\|W\| \right. \\
+ 4\kappa^{12} + 16\kappa^8\theta'^4 + 16\kappa^{10}\theta'^2 + 12\kappa^{10}\tau^2 + 12\kappa^8\tau^4 + 4\kappa^6\tau^6 + 4\kappa^6\theta'^6 - 4\kappa^9\tau\lambda\theta''\|W\| \\
- 8\kappa^7\tau^3\lambda\theta''\|W\| - 4\kappa^5\tau^5\lambda\theta''\|W\| + 3\kappa^4\tau^4\theta'^2\lambda^2\tau'^2 - 4\kappa^7\tau\theta'^3\lambda\theta' - 4\kappa^5\tau^3\theta'^3\lambda\theta'' \\
+ 3\kappa^6\tau^2\theta'^2\lambda^2\kappa'^2 + 4\kappa^6\tau\theta'^4\lambda\kappa' + 4\kappa^5\tau^2\theta'^4\lambda\tau' + 4\kappa^8\tau\theta'\lambda\kappa'\|W\| + 4\kappa^6\tau^3\theta'\lambda\kappa'\|W\| \\
+ 4\kappa^7\tau^2\theta'\lambda\tau'\|W\| + 4\kappa^5\tau^4\theta'\lambda\tau'\|W\| - 6\kappa^6\tau^3\theta'\lambda^2\tau'\theta'' - 6\kappa^7\tau^2\theta'\lambda^2\kappa'\theta'' + 3\kappa^8\tau^2\lambda^2\theta''^2 \\
+ 6\kappa^5\tau^3\theta'^2\lambda^2\kappa'\tau' - 6\kappa^4\tau^5\theta'\lambda^2\tau'\theta'' - 16\kappa^6\tau^2\theta'^3\|W\| - 16\kappa^8\tau^2\theta'\|W\| - 8\kappa^6\tau^4\theta'\|W\| \\
\left. - 6\kappa^5\tau^4\theta'\lambda^2\kappa'\theta'' + 6\kappa^6\tau^4\lambda^2\theta''^2 + 3\kappa^4\tau^6\lambda^2\theta''^2 \right]}$$

şeklinde elde edilir.

5.5 N^*C^* Smarandache Eğrisi

$$\beta_5(s) = \frac{(N^* + C^*)}{\sqrt{2}}$$

Smarandache eğrisinde C^* birim Darboux vektörünün yerine (4.1.15) den karşılığı yazılırsa

$$\beta_5(s) = \frac{(\sin \varphi^* T^* + N^* + \cos \varphi^* B^*)}{\sqrt{2}} \quad (5.5.1)$$

olur. Bu eğrinin s_{β_5} yay parametresine göre türevi alınırsa

$$T_{\beta_5} \frac{ds_{\beta_5}}{ds} = \frac{(\varphi^{*'} \cos \varphi^* - \kappa^*) T^* + (\tau^* - \varphi^{*'} \sin \varphi^*) B^*}{\sqrt{2}} \quad (5.5.2)$$

olur ve norm alınırsa $\frac{ds_{\beta_5}}{ds}$ ifadesi

$$\frac{ds_{\beta_5}}{ds} = \sqrt{\frac{\varphi^{*'}{}^2 + \|W^*\|^2 - 2\varphi^* \|W^*\|}{2}} \quad (5.5.3)$$

bulunur. Bulunan bu ifade (5.5.2) de yerine yazılırsa β_5 eğrisinin teğet vektörü

$$T_{\beta_5}(s) = \frac{(\varphi^{*'} \cos \varphi^* - \kappa^*) T^* + (\tau^* - \varphi^{*'} \sin \varphi^*) B^*}{\sqrt{\varphi^{*'}{}^2 + \|W^*\|^2 - 2\varphi^* \|W^*\|}} \quad (5.5.4)$$

şeklinde olur. (5.5.1) ifadesinde T^* , N^* , B^* , $\sin \varphi^*$ ve $\cos \varphi^*$ in yerine (4.1.5) ve (4.1.16) dan karşılıkları yazılırsa Smarandache eğrisinin Mannheim eğrisine bağlı ifadesi

$$\beta_5(s) = \frac{(\cos \theta \|W\| + \sin \theta \sqrt{\theta'^2 + \|W\|^2}) T + \theta' N + (\cos \theta \sqrt{\theta'^2 + \|W\|^2} - \sin \theta \|W\|) B}{\sqrt{\theta'^2 + \|W\|^2}} \quad (5.5.5)$$

olur. (5.5.4) denkleminde (4.1.5), (4.1.8), (4.1.9) ve (4.1.16) bağıntıları dikkate alınırsa (5.5.5) ifadesindeki β_5 eğrisinin teğet vektörü

$$\begin{aligned}
T_{\beta_5}(s) = & \frac{\left[\left(\frac{\|W\|}{\sqrt{\theta'^2 + \|W\|^2}} \right)' \cos \theta - \frac{\theta' \kappa \cos \theta}{\lambda \tau \|W\|} \right] T + \left[\frac{\kappa}{\lambda \tau} - \left(\frac{\|W\|}{\sqrt{\theta'^2 + \|W\|^2}} \right)' \frac{\|W\|}{\theta'} \right] N}{\sqrt{\left[\left(\frac{\|W\|}{\sqrt{\theta'^2 + \|W\|^2}} \right)' \frac{\sqrt{\theta'^2 + \|W\|^2}}{\theta'} \right]^2 + \frac{\kappa(\theta'^2 + \|W\|^2)}{\lambda \tau \|W\|} \left[\frac{\kappa}{\lambda \tau \|W\|} - 2 \left(\frac{\|W\|}{\sqrt{\theta'^2 + \|W\|^2}} \right)' \frac{1}{\theta'} \right]}} \\
& + \frac{\left[\frac{\theta' \kappa \sin \theta}{\lambda \tau \|W\|} - \left(\frac{\|W\|}{\sqrt{\theta'^2 + \|W\|^2}} \right)' \sin \theta \right] B}{\sqrt{\left[\left(\frac{\|W\|}{\sqrt{\theta'^2 + \|W\|^2}} \right)' \frac{\sqrt{\theta'^2 + \|W\|^2}}{\theta'} \right]^2 + \frac{\kappa(\theta'^2 + \|W\|^2)}{\lambda \tau \|W\|} \left[\frac{\kappa}{\lambda \tau \|W\|} - 2 \left(\frac{\|W\|}{\sqrt{\theta'^2 + \|W\|^2}} \right)' \frac{1}{\theta'} \right]}}
\end{aligned} \tag{5.5.6}$$

şeklinde bulunur. (5.5.4) ifadesinin tekrar türevi alınırsa katsayılar

$$\left\{ \begin{aligned}
r_1 &= 2\tau^{*2} \varphi^{*''} \cos \varphi^* - \kappa^* \varphi^{*'} \varphi^{*''} \cos^2 \varphi^* - \tau^* \varphi^{*'} \varphi^{*''} \sin \varphi^* \cos \varphi^* - \varphi^{*4} \sin \varphi^* - \tau^{*2} \kappa^{*'} \\
&\quad - \tau^{*2} \varphi^{*1/2} \sin \varphi^* + 2\kappa^* \varphi^{*3} \sin \varphi^* \cos \varphi^* + 2\tau^* \varphi^{*3} \sin^2 \varphi^* - \kappa^{*2} \varphi^{*2} \sin \varphi^* \\
&\quad - 2\kappa^* \kappa^{*'} \varphi^{*'} \cos \varphi^* - 2\kappa^{*'} \tau^* \varphi^{*'} \sin \varphi^* - \tau^* \tau^{*'} \varphi^{*'} \cos \varphi^* + \kappa^{*'} \varphi^{*'} \cos^2 \varphi^* - \kappa^{*'} \varphi^{*1/2} \\
&\quad + \tau^{*'} \varphi^{*1/2} \sin \varphi^* \cos \varphi^* \kappa^* \varphi^{*'} \varphi^{*''} + \kappa^* \tau^* \tau^{*'} - \kappa^* \tau^* \varphi^{*''} \sin \varphi^* - \varphi^{*1} \tau^{*'} \kappa^* \sin \varphi^* \\
r_2 &= \kappa^* \varphi^{*3} \cos \varphi^* + 3\kappa^{*3} \varphi^{*'} \cos \varphi^* + 3\tau^{*2} \kappa^* \varphi^{*'} \cos \varphi^* - 2\kappa^{*2} \varphi^{*2} \cos^2 \varphi^* - \kappa^{*2} \varphi^{*1/2} \\
&\quad - \tau^{*2} \varphi^{*1/2} + 3\tau^{*3} \varphi^{*'} \sin \varphi^* + \tau^* \varphi^{*3} \sin \varphi^* - 2\tau^{*2} \varphi^{*1/2} \sin^2 \varphi^* - 4\kappa^* \tau^* \varphi^{*1/2} \sin \varphi^* \cos \varphi^* \\
&\quad - \kappa^{*4} - 2\kappa^{*2} \tau^{*2} + 3\kappa^{*2} \tau^* \varphi^{*'} \sin \varphi^* \\
r_3 &= 2\tau^{*'} \varphi^{*1/2} + \kappa^{*2} \tau^{*'} - 2\kappa^* \tau^{*'} \varphi^{*'} \cos \varphi^* - \kappa^{*2} \varphi^{*''} \sin \varphi^* + \kappa^* \varphi^{*'} \varphi^{*''} \sin \varphi^* \cos \varphi^* \\
&\quad + \tau^* \varphi^{*'} \varphi^{*''} \sin^2 \varphi^* - \varphi^{*4} \cos \varphi^* - \kappa^{*2} \varphi^{*1/2} \cos \varphi^* - \tau^{*'} \varphi^{*1/2} \sin^2 \varphi^* \\
&\quad - \tau^{*2} \varphi^{*1/2} \cos \varphi^* + 2\kappa^* \varphi^{*3} \cos^2 \varphi^* + 2\tau^* \varphi^{*3} \sin \varphi^* \cos \varphi^* - \tau^* \varphi^{*'} \varphi^{*''} - \tau^* \kappa^* \kappa^{*'} \\
&\quad + \tau^* \kappa^* \varphi^{*''} \cos \varphi^* + \kappa^{*'} \tau^* \varphi^{*'} \cos \varphi^* + \kappa^* \kappa^{*'} \varphi^{*'} \sin \varphi^* - \kappa^{*'} \varphi^{*1/2} \sin \varphi^* \cos \varphi^*
\end{aligned} \right. \tag{5.5.7}$$

olmak üzere $T'_{\beta_5}(s)$ türevi

$$T'_{\beta_5}(s) = \frac{\sqrt{2}}{(\varphi^{*1/2} + \|W^*\|^2 - 2\varphi^{*'} \|W^*\|)^2} (r_1 T^* + r_2 N^* + r_3 B^*) \tag{5.5.8}$$

olur. (5.5.7) ifadesinde κ^* , τ^* ve φ^* in yerine (4.1.8) ve (4.1.9) dan karşılıkları yazılırsa yeni katsayılar

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{\theta' \kappa}{\lambda \tau \|W\|} \right) \left(\frac{\kappa}{\lambda \tau} \right) \left(\frac{\kappa}{\lambda \tau} \right)' - \left(\frac{\theta' \kappa}{\lambda \tau \|W\|} \right) \left(\frac{\kappa}{\lambda \tau} \right) \left(\left[\left(\frac{\|W\|}{\sqrt{\theta'^2 + \|W\|^2}} \right)' \frac{\sqrt{\theta'^2 + \|W\|^2}}{\theta'} \right]' \right) \\
& \left(\frac{\|W\|}{\sqrt{\theta'^2 + \|W\|^2}} \right) - \left[\left(\frac{\|W\|}{\sqrt{\theta'^2 + \|W\|^2}} \right)' \frac{\sqrt{\theta'^2 + \|W\|^2}}{\theta'} \right] \left(\frac{\kappa}{\lambda \tau} \right)' \left(\frac{\theta' \kappa}{\lambda \tau \|W\|} \right) \left(\frac{\|W\|}{\sqrt{\theta'^2 + \|W\|^2}} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{r}_2 = & \left(\frac{\theta' \kappa}{\lambda \tau \|W\|} \right) \left[\left(\frac{\|W\|}{\sqrt{\theta'^2 + \|W\|^2}} \right)' \frac{\sqrt{\theta'^2 + \|W\|^2}}{\theta'} \right]^3 \left(\frac{\theta'}{\sqrt{\theta'^2 + \|W\|^2}} \right) + 3 \left(\frac{\theta' \kappa}{\lambda \tau \|W\|} \right)^3 \\
& \left[\left(\frac{\|W\|}{\sqrt{\theta'^2 + \|W\|^2}} \right)' \frac{\sqrt{\theta'^2 + \|W\|^2}}{\theta'} \right] \left(\frac{\theta'}{\sqrt{\theta'^2 + \|W\|^2}} \right) + 3 \left(\frac{\kappa}{\lambda \tau} \right)^2 \left(\frac{\theta' \kappa}{\lambda \tau \|W\|} \right) \\
& \left[\left(\frac{\|W\|}{\sqrt{\theta'^2 + \|W\|^2}} \right)' \frac{\sqrt{\theta'^2 + \|W\|^2}}{\theta'} \right] \left(\frac{\theta'}{\sqrt{\theta'^2 + \|W\|^2}} \right) - 2 \left(\frac{\theta' \kappa}{\lambda \tau \|W\|} \right)^2 \\
& \left[\left(\frac{\|W\|}{\sqrt{\theta'^2 + \|W\|^2}} \right)' \frac{\sqrt{\theta'^2 + \|W\|^2}}{\theta'} \right]^2 \left(\frac{\theta'}{\sqrt{\theta'^2 + \|W\|^2}} \right)^2 - \left(\frac{\theta' \kappa}{\lambda \tau \|W\|} \right)^2 \\
& \left[\left(\frac{\|W\|}{\sqrt{\theta'^2 + \|W\|^2}} \right)' \frac{\sqrt{\theta'^2 + \|W\|^2}}{\theta'} \right]^2 - \left(\frac{\kappa}{\lambda \tau} \right)^2 \left[\left(\frac{\|W\|}{\sqrt{\theta'^2 + \|W\|^2}} \right)' \frac{\sqrt{\theta'^2 + \|W\|^2}}{\theta'} \right]^2 \\
& + 3 \left(\frac{\kappa}{\lambda \tau} \right)^3 \left[\left(\frac{\|W\|}{\sqrt{\theta'^2 + \|W\|^2}} \right)' \frac{\sqrt{\theta'^2 + \|W\|^2}}{\theta'} \right] \left(\frac{\|W\|}{\sqrt{\theta'^2 + \|W\|^2}} \right) + \left(\frac{\kappa}{\lambda \tau} \right) \\
& \left[\left(\frac{\|W\|}{\sqrt{\theta'^2 + \|W\|^2}} \right)' \frac{\sqrt{\theta'^2 + \|W\|^2}}{\theta'} \right]^3 \left(\frac{\|W\|}{\sqrt{\theta'^2 + \|W\|^2}} \right) - 2 \left(\frac{\kappa}{\lambda \tau} \right)^2 \left[\left(\frac{\|W\|}{\sqrt{\theta'^2 + \|W\|^2}} \right)' \right. \\
& \left. \frac{\sqrt{\theta'^2 + \|W\|^2}}{\theta'} \right]^2 \left(\frac{\|W\|}{\sqrt{\theta'^2 + \|W\|^2}} \right)^2 - 4 \left(\frac{\theta' \kappa}{\lambda \tau \|W\|} \right) \left(\frac{\kappa}{\lambda \tau} \right) \left[\left(\frac{\|W\|}{\sqrt{\theta'^2 + \|W\|^2}} \right)' \right. \\
& \left. \frac{\sqrt{\theta'^2 + \|W\|^2}}{\theta'} \right]^2 \left(\frac{\|W\|}{\sqrt{\theta'^2 + \|W\|^2}} \right) \left(\frac{\theta'}{\sqrt{\theta'^2 + \|W\|^2}} \right) - \left(\frac{\theta' \kappa}{\lambda \tau \|W\|} \right)^4 - 2 \left(\frac{\theta' \kappa}{\lambda \tau \|W\|} \right)^2 \\
& \left(\frac{\kappa}{\lambda \tau} \right)^2 + 3 \left(\frac{\theta' \kappa}{\lambda \tau \|W\|} \right)^2 \left(\frac{\kappa}{\lambda \tau} \right) \left[\left(\frac{\|W\|}{\sqrt{\theta'^2 + \|W\|^2}} \right)' \frac{\sqrt{\theta'^2 + \|W\|^2}}{\theta'} \right] \left(\frac{\|W\|}{\sqrt{\theta'^2 + \|W\|^2}} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left. \frac{\sqrt{\theta'^2 + \|W\|^2}}{\theta'} \right] \left(\frac{\|W\|}{\sqrt{\theta'^2 + \|W\|^2}} \right) - \left(\frac{\theta' \kappa}{\lambda \tau \|W\|} \right)' \left[\left(\frac{\|W\|}{\sqrt{\theta'^2 + \|W\|^2}} \right)' \frac{\sqrt{\theta'^2 + \|W\|^2}}{\theta'} \right]^2 \\ & \left(\frac{\|W\|}{\sqrt{\theta'^2 + \|W\|^2}} \right) \left(\frac{\theta'}{\sqrt{\theta'^2 + \|W\|^2}} \right) \end{aligned}$$

şeklinde olur. Bulunan bu ifadeler $T'_{\beta_5}(s)$ türev ifadesinde yerine yazılırsa $T'_{\beta_5}(s)$ vektörünün Mannheim eğrisinin Frenet elemanları cinsinden ifadesi

$$\begin{aligned} & \sqrt{2} \left[(\bar{r}_1 \cos \theta + \bar{r}_2 \sin \theta) T + \bar{r}_3 N + (-\bar{r}_1 \sin \theta + \bar{r}_2 \cos \theta) B \right] \\ T'_{\beta_5}(s) = & \frac{\sqrt{2} \left[(\bar{r}_1 \cos \theta + \bar{r}_2 \sin \theta) T + \bar{r}_3 N + (-\bar{r}_1 \sin \theta + \bar{r}_2 \cos \theta) B \right]}{\left(\left[\left(\frac{\|W\|}{\sqrt{\theta'^2 + \|W\|^2}} \right)' \frac{\sqrt{\theta'^2 + \|W\|^2}}{\theta'} \right]^2 + \frac{\kappa(\theta'^2 + \|W\|^2)}{\lambda \tau \|W\|} \left[\frac{\kappa}{\lambda \tau \|W\|} - 2 \left(\frac{\|W\|}{\sqrt{\theta'^2 + \|W\|^2}} \right)' \frac{1}{\theta'} \right] \right)^2} \end{aligned} \quad (5.5.9)$$

şeklinde bulunur. β_5 eğrisinin eğriliği κ_{β_5} ile gösterilirse (5.5.8) bağıntısından κ_{β_5} eğriliği

$$\begin{aligned} \kappa_{\beta_5} &= \|T'_{\beta_4}\|, \\ \kappa_{\beta_5} &= \frac{\sqrt{2} \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2}}{(\varphi^{*'}^2 + \|W^*\|^2 - 2\varphi^{*'} \|W^*\|)^2} \end{aligned} \quad (5.5.10)$$

olur. Burada κ^* , τ^* ve $\varphi^{*'}$ in yerine (4.1.8), (4.1.9) ve (4.1.16) dan karşılıkları yazılırsa κ_{β_5} eğriliğinin Mannheim eğrisinin eğriliklerine bağlı ifadesi

$$\begin{aligned} \kappa_{\beta_5} = & \frac{\sqrt{2}(\sqrt{\bar{r}_1^2 + \bar{r}_2^2 + \bar{r}_3^2})}{\left(\left[\left(\frac{\|W\|}{\sqrt{\theta'^2 + \|W\|^2}} \right)' \frac{\sqrt{\theta'^2 + \|W\|^2}}{\theta'} \right]^2 + \frac{\kappa(\theta'^2 + \|W\|^2)}{\lambda \tau \|W\|} \left[\frac{\kappa}{\lambda \tau \|W\|} - 2 \left(\frac{\|W\|}{\sqrt{\theta'^2 + \|W\|^2}} \right)' \frac{1}{\theta'} \right] \right)^2} \end{aligned} \quad (5.5.11)$$

şekline dönüşür. β_5 eğrisinin aslinormali N_{β_5} ile gösterilirse (5.5.8) bağıntısından

$$\begin{aligned} N_{\beta_5} &= \frac{T'_{\beta_4}}{\|T'_{\beta_4}\|}, \\ N_{\beta_5} &= \frac{r_1 T^* + r_2 N^* + r_3 B^*}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2}} \end{aligned}$$

olur. Burada T^* , N^* ve B^* in yerine (4.1.5) den karşılıkları yazılırsa N_{β_5} ifadesinin Mannheim eğrisinin Frenet elemanları cinsinden ifadesi

$$N_{\beta_5} = \frac{(\bar{r}_1 \cos \theta + \bar{r}_2 \sin \theta)T + \bar{r}_3 N + (-\bar{r}_1 \sin \theta + \bar{r}_2 \cos \theta)B}{\sqrt{\bar{r}_1^2 + \bar{r}_2^2 + \bar{r}_3^2}} \quad (5.5.12)$$

şeklinde bulunur. $B_{\beta_4} = T_{\beta_4} \wedge N_{\beta_4}$ olduğundan B_{β_5} vektörü

$$B_{\beta_5} = \frac{r_2(\varphi^{*'} \sin \varphi^* - \tau^*)T^* + (r_1(\tau^* - \varphi^{*'} \sin \varphi^*) - r_3(\varphi^{*'} \cos \varphi^* - \kappa^*))N^* + r_1(\varphi^{*'} \cos \varphi^* - \kappa^*)B^*}{\sqrt{(\varphi^{*'}^2 + \|W^*\|^2 - 2\varphi^{*'}\|W^*\|)(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2)}} \quad (5.5.13)$$

olur. Burada T^* , N^* , B^* , κ^* , τ^* , $\sin \varphi^*$, $\cos \varphi^*$ ve $\varphi^{*'}$ in yerine karşılıkları yazılırsa B_{β_5} binormal vektörünün Mannheim eğrisinin Frenet elemanları cinsinden ifadesi

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi_1 = \bar{r}_2 \cos \theta \left(\frac{\|W\|}{\sqrt{\theta'^2 + \|W\|^2}} \right)' \frac{\|W\|}{\theta'} - \bar{r}_2 \cos \theta \frac{\kappa}{\lambda\tau} - \left[\bar{r}_1 \frac{\kappa}{\lambda\tau} - \bar{r}_1 \left(\frac{\|W\|}{\sqrt{\theta'^2 + \|W\|^2}} \right)' \frac{\|W\|}{\theta'} - \bar{r}_3 \left(\frac{\|W\|}{\sqrt{\theta'^2 + \|W\|^2}} \right)' + \bar{r}_3 \left(\frac{\theta' \kappa}{\lambda\tau \|W\|} \right) \right] \sin \theta \\ \xi_2 = \bar{r}_1 \left[\left(\frac{\|W\|}{\sqrt{\theta'^2 + \|W\|^2}} \right)' - \frac{\theta' \kappa}{\lambda\tau \|W\|} \right] \\ \xi_3 = \bar{r}_2 \sin \theta \left[\left(\frac{\|W\|}{\sqrt{\theta'^2 + \|W\|^2}} \right)' \frac{\|W\|}{\theta'} - \frac{\kappa}{\lambda\tau} \right] + \left[\bar{r}_1 \frac{\kappa}{\lambda\tau} - \bar{r}_1 \left(\frac{\|W\|}{\sqrt{\theta'^2 + \|W\|^2}} \right)' \frac{\|W\|}{\theta'} - \bar{r}_3 \left(\frac{\|W\|}{\sqrt{\theta'^2 + \|W\|^2}} \right)' + \bar{r}_3 \frac{\theta' \kappa}{\lambda\tau \|W\|} \right] \cos \theta \\ \xi_4 = \sqrt{\left((\bar{r}_1^2 + \bar{r}_2^2 + \bar{r}_3^2) \left[\left(\frac{\|W\|}{\sqrt{\theta'^2 + \|W\|^2}} \right)' \frac{\sqrt{\theta'^2 + \|W\|^2}}{\theta'} \right]^2 + (\bar{r}_1^2 + \bar{r}_2^2 + \bar{r}_3^2) \frac{\kappa(\theta'^2 + \|W\|^2)}{\lambda\tau \|W\|} \right.} \\ \left. \left[\frac{\kappa}{\lambda\tau \|W\|} - 2 \left(\frac{\|W\|}{\sqrt{\theta'^2 + \|W\|^2}} \right)' \frac{1}{\theta'} \right] \right)} \end{array} \right. \quad (5.5.14)$$

olmak üzere

$$B_{\beta_5}(s) = \frac{\xi_1}{\xi_4} T + \frac{\xi_2}{\xi_4} N + \frac{\xi_3}{\xi_4} B \quad (5.5.15)$$

şeklinde bulunur. β_5 eğrisinin ikinci ve üçüncü türevleri sırasıyla

$$\beta_5'' = \frac{\left[(\varphi^{*''} \cos \varphi^* - \varphi^{*I2} \sin \varphi^* - \kappa^{*'}) T^* + (\kappa^* \varphi^{*'} \cos \varphi^* + \tau^* \varphi^{*'} \sin \varphi^* - \kappa^{*2} - \tau^{*2}) N^* + (\tau^* - \varphi^{*''} \sin \varphi^* - \varphi^{*I2} \cos \varphi^*) B^* \right]}{\sqrt{2}}$$

ve

$$\beta_5''' = \frac{t_1 T^* + t_2 N^* + t_3 B^*}{\sqrt{2}}$$

olur. Burada

$$\begin{cases} t_1 = \varphi^{*'''} \cos \varphi^* - 3\varphi^{*'} \varphi^{*''} \sin \varphi^* - \varphi^{*I3} \cos \varphi^* - \kappa^{*''} - \kappa^{*2} \varphi^{*'} \cos \varphi^* - \kappa^* \tau^* \varphi^{*'} \sin \varphi^* \\ \quad + \kappa^{*3} + \kappa^* \tau^{*2} \\ t_2 = 2\kappa^* \varphi^{*''} \cos \varphi^* - 2\kappa^* \varphi^{*I2} \sin \varphi^* - 3\kappa^* \kappa^{*'} + \kappa^* \varphi^{*''} \cos \varphi^* + \tau^{*'} \varphi^{*'} \sin \varphi^* + 2\tau^* \varphi^{*''} \sin \varphi^* \\ \quad + 2\varphi^{*I2} \cos \varphi^* - 3\tau^* \tau^{*'} \\ t_3 = (\kappa^* \tau^* \varphi^{*'} - 3\varphi^{*'} \varphi^{*''}) \cos \varphi^* + (\tau^{*2} \varphi^{*'} - \varphi^{*'''} + \varphi^{*I3}) \sin \varphi^* - \kappa^{*2} \tau^* - \tau^{*3} + \tau^{*''} \end{cases} \quad (5.5.16)$$

şeklinde katsayılarıdır. β_5 eğrisinin torsiyonu τ_{β_5} ile gösterilirse τ_{β_5} torsiyonu

$$\tau_{\beta_5} = \frac{\det(\beta_5', \beta_5'', \beta_5''')}{\|\beta_5' \wedge \beta_5''\|^2}$$

dır. Burada β_5' , β_5'' ve β_5''' türevleri yerine yazılır ve gerekli hesaplamalar yapılırsa τ_{β_5} torsiyonu

$$\tau_{\beta_5} = \frac{\sqrt{2} \left[-2t_1 \tau^{*2} \varphi^{*'} \sin \varphi^* + t_1 \tau^* \varphi^{*I2} \sin^2 \varphi^* - t_1 \kappa^{*2} \varphi^{*'} \sin \varphi^* + \kappa^* t_2 \tau^* + \varphi^{*I3} \cos^2 \varphi^* t_2 + \varphi^{*I2} \cos^2 \varphi^* t_3 \kappa^* - 2\varphi^{*'} \cos \varphi^* t_3 \kappa^{*2} - \varphi^{*'} \cos \varphi^* t_3 \tau^{*2} - \varphi^{*'} \cos \varphi^* t_2 \tau^* - \kappa^* t_2 \varphi^{*''} \sin \varphi^* - \kappa^* t_2 \varphi^{*I2} \cos \varphi^* + t_2 \varphi^{*''} \cos \varphi^* \tau^* - t_2 \varphi^{*I2} \sin \varphi^* \tau^* + \varphi^{*I2} \cos \varphi^* t_3 \tau^* \sin \varphi^* + t_2 \kappa^{*'} \varphi^{*'} \sin \varphi^* - \kappa^* t_3 \tau^* \varphi^{*'} \sin \varphi^* - t_1 \kappa^* \varphi^{*'} \cos \varphi^* \tau^* + t_1 \kappa^* \varphi^{*I2} \cos \varphi^* \sin \varphi^* + t_1 \kappa^{*2} \tau^* + t_2 \varphi^{*I3} \sin^2 \varphi^* - t_2 \kappa^{*'} \tau^* + \kappa^* t_3 \tau^{*2} + t_3 \kappa^{*3} + t_1 \tau^{*3} \right]}{\left[(\kappa^* \varphi^{*I2} \sin \varphi^*) \cos \varphi^* + (\tau^* \varphi^{*I2} \sin \varphi^* - \kappa^{*2} \varphi^{*'} - 2\tau^{*2} \varphi^{*'}) \sin \varphi^* + \kappa^{*2} \tau^* + \tau^{*3} \right]^2 \left[(\tau^* \varphi^{*''} - \tau^{*'} \varphi^{*'} - \kappa^* \varphi^{*I2}) \cos \varphi^* + (\kappa^{*'} \varphi^{*'} - \tau^* \varphi^{*I2} - \kappa^* \varphi^{*''}) \sin \varphi^* - \tau^* \kappa^{*'} + \varphi^{*I3} + \kappa^* \tau^{*'} \right]^2 + \left[(\kappa^* \varphi^{*I2} \cos \varphi^* + \tau^* \varphi^{*I2} \sin \varphi^* - 2\kappa^{*2} \varphi^{*'} - \tau^{*2} \varphi^{*'}) \cos \varphi^* + \kappa^{*3} + \kappa^* \tau^{*2} - \kappa^* \tau^* \varphi^{*'} \sin \varphi^* \right]^2} \quad (5.5.17)$$

olur. (5.5.16) katsayılar ifadesinde κ^* , τ^* , $\sin \varphi^*$, $\cos \varphi^*$ ve $\varphi^{*'} in yerine (4.1.8), (4.1.9) ve (4.1.16) dan karşılıkları yazılırsa yeni katsayılar$

$$\begin{aligned}
t_1 = & \left[\left(\frac{\|W\|}{\sqrt{\theta'^2 + \|W\|^2}} \right)' \frac{\sqrt{\theta'^2 + \|W\|^2}}{\theta'} \right]'' \frac{\theta'}{\sqrt{\theta'^2 + \|W\|^2}} - 3 \left[\left(\frac{\|W\|}{\sqrt{\theta'^2 + \|W\|^2}} \right)' \right. \\
& \left. \frac{\sqrt{\theta'^2 + \|W\|^2}}{\theta'} \right] \left[\left(\frac{\|W\|}{\sqrt{\theta'^2 + \|W\|^2}} \right)' \frac{\sqrt{\theta'^2 + \|W\|^2}}{\theta'} \right]' \frac{\|W\|}{\sqrt{\theta'^2 + \|W\|^2}} \\
& - \left[\left(\frac{\|W\|}{\sqrt{\theta'^2 + \|W\|^2}} \right)' \frac{\sqrt{\theta'^2 + \|W\|^2}}{\theta'} \right]^3 \frac{\theta'}{\sqrt{\theta'^2 + \|W\|^2}} - \left(\frac{\theta' \kappa}{\lambda \tau \|W\|} \right)'' \\
& - \left(\frac{\theta' \kappa}{\lambda \tau \|W\|} \right)^2 \left[\left(\frac{\|W\|}{\sqrt{\theta'^2 + \|W\|^2}} \right)' \frac{\sqrt{\theta'^2 + \|W\|^2}}{\theta'} \right] \frac{\theta'}{\sqrt{\theta'^2 + \|W\|^2}} - \left(\frac{\theta' \kappa}{\lambda \tau \|W\|} \right) \left(\frac{\kappa}{\lambda \tau} \right) \\
& \left[\left(\frac{\|W\|}{\sqrt{\theta'^2 + \|W\|^2}} \right)' \frac{\sqrt{\theta'^2 + \|W\|^2}}{\theta'} \right] \frac{\|W\|}{\sqrt{\theta'^2 + \|W\|^2}} + \left(\frac{\theta' \kappa}{\lambda \tau \|W\|} \right)^3 + \left(\frac{\theta' \kappa}{\lambda \tau \|W\|} \right) \left(\frac{\kappa}{\lambda \tau} \right)^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
t_2 = & 2 \left(\frac{\theta' \kappa}{\lambda \tau \|W\|} \right) \left[\left(\frac{\|W\|}{\sqrt{\theta'^2 + \|W\|^2}} \right)' \frac{\sqrt{\theta'^2 + \|W\|^2}}{\theta'} \right]' \frac{\theta'}{\sqrt{\theta'^2 + \|W\|^2}} - 2 \left(\frac{\theta' \kappa}{\lambda \tau \|W\|} \right) \\
& \left[\left(\frac{\|W\|}{\sqrt{\theta'^2 + \|W\|^2}} \right)' \frac{\sqrt{\theta'^2 + \|W\|^2}}{\theta'} \right]^2 \frac{\|W\|}{\sqrt{\theta'^2 + \|W\|^2}} - 3 \left(\frac{\theta' \kappa}{\lambda \tau \|W\|} \right) \left(\frac{\theta' \kappa}{\lambda \tau \|W\|} \right)' \\
& + \left(\frac{\theta' \kappa}{\lambda \tau \|W\|} \right) \left[\left(\frac{\|W\|}{\sqrt{\theta'^2 + \|W\|^2}} \right)' \frac{\sqrt{\theta'^2 + \|W\|^2}}{\theta'} \right]' \frac{\theta'}{\sqrt{\theta'^2 + \|W\|^2}} + \left(\frac{\kappa}{\lambda \tau} \right)' \\
& \left[\left(\frac{\|W\|}{\sqrt{\theta'^2 + \|W\|^2}} \right)' \frac{\sqrt{\theta'^2 + \|W\|^2}}{\theta'} \right] \frac{\|W\|}{\sqrt{\theta'^2 + \|W\|^2}} + 2 \left(\frac{\kappa}{\lambda \tau} \right) \left[\left(\frac{\|W\|}{\sqrt{\theta'^2 + \|W\|^2}} \right)' \right. \\
& \left. \frac{\sqrt{\theta'^2 + \|W\|^2}}{\theta'} \right]' \frac{\|W\|}{\sqrt{\theta'^2 + \|W\|^2}} + 2 \left[\left(\frac{\|W\|}{\sqrt{\theta'^2 + \|W\|^2}} \right)' \frac{\sqrt{\theta'^2 + \|W\|^2}}{\theta'} \right]^2 \\
& \frac{\theta'}{\sqrt{\theta'^2 + \|W\|^2}} - 3 \left(\frac{\kappa}{\lambda \tau} \right) \left(\frac{\kappa}{\lambda \tau} \right)'
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
t_3 = & \left(\left(\frac{\theta' \kappa}{\lambda \tau \|W\|} \right) \left(\frac{\kappa}{\lambda \tau} \right) \left[\left(\frac{\|W\|}{\sqrt{\theta'^2 + \|W\|^2}} \right)' \frac{\sqrt{\theta'^2 + \|W\|^2}}{\theta'} \right] - 3 \left[\left(\frac{\|W\|}{\sqrt{\theta'^2 + \|W\|^2}} \right)' \right. \right. \\
& \left. \left. \frac{\sqrt{\theta'^2 + \|W\|^2}}{\theta'} \right] \left[\left(\frac{\|W\|}{\sqrt{\theta'^2 + \|W\|^2}} \right)' \frac{\sqrt{\theta'^2 + \|W\|^2}}{\theta'} \right]' \right) \frac{\theta'}{\sqrt{\theta'^2 + \|W\|^2}} + \left(\frac{\kappa}{\lambda \tau} \right)^2 \\
& \left[\left(\frac{\|W\|}{\sqrt{\theta'^2 + \|W\|^2}} \right)' \frac{\sqrt{\theta'^2 + \|W\|^2}}{\theta'} \right] - \left[\left(\frac{\|W\|}{\sqrt{\theta'^2 + \|W\|^2}} \right)' \frac{\sqrt{\theta'^2 + \|W\|^2}}{\theta'} \right]'' \\
& + \left[\left(\frac{\|W\|}{\sqrt{\theta'^2 + \|W\|^2}} \right)' \frac{\sqrt{\theta'^2 + \|W\|^2}}{\theta'} \right]^3 \frac{\|W\|}{\sqrt{\theta'^2 + \|W\|^2}} - \left(\frac{\theta' \kappa}{\lambda \tau \|W\|} \right)^2 \left(\frac{\kappa}{\lambda \tau} \right) \\
& - \left(\frac{\kappa}{\lambda \tau} \right)^3 + \left(\frac{\kappa}{\lambda \tau} \right)''
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur ve bu katsayılar (5.5.17) de verilen yerine yazılırsa N^*C^* Smarandache eğrisinin τ_{β_5} torsiyonunun Mannheim eğrisinin Frenet elemanları cinsinden ifadesi

$$\tau_{\beta_5} = \sqrt{2} \frac{\Omega_1}{\Omega_2}$$

şeklinde elde edilir.

Örnek 5.5.1 $\alpha(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\cos s, -\sin s, s)$ helis eğrisi bir Mannheim eğrisidir. Bu eğrinin Frenet vektörleri, birim darboux vektörü, eğrilik ve torsiyonu

$$\left\{ \begin{array}{l} T(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin s, -\cos s, 1) \\ N(s) = (\cos s, \sin s, 0) \\ B(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\sin s, \cos s, 1) \\ C(s) = (0, 0, 1) \\ \kappa(s) = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \tau(s) = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{array} \right.$$

şeklinde bulunur. Her Mannheim eğrisinin bir Partner eğrisi vardır. Partner eğrisinin denklemi

$$\alpha^*(s) = \alpha(s) - \lambda N(s)$$

idi. Burada $\lambda = \frac{\sqrt{2}}{2}$ alınırsa

Mannheim Partner eğrisinin denklemi

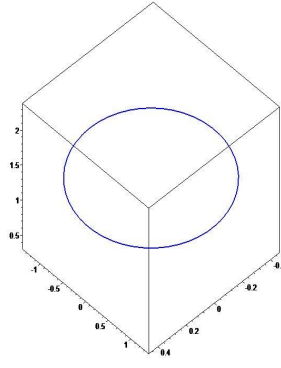
$$\alpha^*(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-2\cos s, -2\sin s, s)$$

olur.

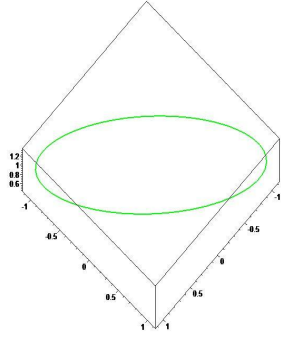
Bu eğrinin Frenet vektörleri, birim darboux vektörü, eğrilik ve torsiyonu

$$\left\{ \begin{array}{l} T^*(s) = \frac{1}{\sqrt{5}}(2 \sin s, -2 \cos s, 1) \\ N^*(s) = \frac{1}{\sqrt{5}}(\sin s, \cos s, -2) \\ B^*(s) = (\cos s, \sin s, 0) \\ C^*(s) = \left(\frac{2}{5} \sin s + \frac{2}{\sqrt{5}} \cos s, -\frac{2}{5} \cos s + \frac{2}{\sqrt{5}} \sin s, \frac{1}{5} \right) \\ \kappa^*(s) = \frac{2\sqrt{2}}{5} \\ \tau^*(s) = \frac{\sqrt{2}}{5} \end{array} \right.$$

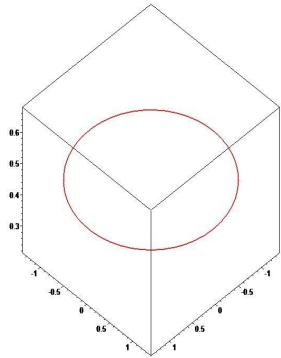
şeklinde bulunur. Mannheim Partner eğrisine ait Smarandache eğrilerinin Mapple ile çizimi aşağıdaki şekillerde gösterilmiştir.



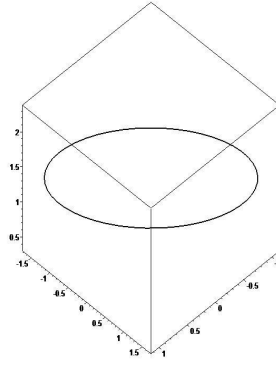
Şekil 5.1: $\alpha^*(s)$ eğrisine ait T^*N^* – *Smarandache* eğrisi



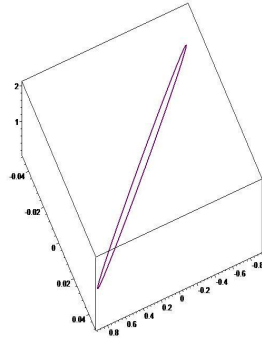
Şekil 5.2: $\alpha^*(s)$ eğrisine ait N^*B^* – *Smarandache* eğrisi



Şekil 5.3: $\alpha^*(s)$ eğrisine ait T^*B^* – *Smarandache* eğrisi



Şekil 5.4: $\alpha^*(s)$ eğrisine ait $T^*N^*B^*$ – *Smarandache* eğrisi



Şekil 5.5: $\alpha^*(s)$ eğrisine ait N^*C^* – *Smarandache* eğrisi

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

6.1 Sonuçlar

Bu tezde ilk olarak, $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ Mannheim eğrisi $\alpha^* : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ Mannheim partner eğrisi olarak alındığında konum vektörü, partner eğrisinin Frenet çatıları tarafından çizilen regüler Smarandache eğrileri

$$\begin{aligned}\beta_1 = \beta_{T^*N^*} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(T^* + N^*) \quad T^*N^*\text{-Smarandache eğrisi} \\ \beta_2 = \beta_{N^*B^*} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(N^* + B^*) \quad N^*B^*\text{-Smarandache eğrisi} \\ \beta_3 = \beta_{T^*B^*} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(T^* + B^*) \quad T^*B^*\text{-Smarandache eğrisi} \\ \beta_4 = \beta_{T^*N^*B^*} &= \frac{1}{\sqrt{3}}(T^* + N^* + B^*) \quad T^*N^*B^*\text{-Smarandache eğrisi} \\ \beta_5 = \beta_{N^*C^*} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(N^* + C^*) \quad N^*C^*\text{-Smarandache eğrisi}[1].\end{aligned}$$

şeklinde gösterildi ve bu eğrilerin eğrilik ve burulmaları hesaplandı.

İkinci olarak α^* eğrisinin $\{T^*, N^*, B^*\}$ Frenet vektörleri ve C^* birim Darboux vektörü konum vektörü olarak alındığında elde edilen Smarandache eğrilerinin eğrilik ve burulmaları Mannheim eğrisinin Frenet elemanlarına bağlı olarak ifade edildi.

Son olarak aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir.

Sonuç 6.1.1 (α, α^*) Mannheim eğri çiftinden elde edilen Smarandache eğrilerinin hiçbiri Mannheim eğri çiftine dahil değildir.

Sonuç 6.1.2 (α, α^*) Mannheim eğri çifti olsun. α eğrisinin T ile B vektörleri tarafından oluşturulan TB – Smarandache eğrisi, α^* Mannheim partner eğrisi ile Bertrand eğri çiftine dahildir.

İspat. TB – Smarandache eğrisinin Frenet vektörleri T_{TB}, N_{TB}, B_{TB} ile gösterilsin. Bu durumda N_{TB} nin denklemi

$$N_{TB} = \frac{-\kappa}{\|W\|}T + \frac{\tau}{\|W\|}B.$$

veya (4.1.12) den

$$N_{TB} = \sin \theta T + \cos \theta B$$

olur. (4.1.5) denkleminde Mannheim partner eğrisinin aslinormal vektörü

$$N^* = \sin \theta T + \cos \theta B$$

dir. $N_{TB} = N^*$ olduğundan N_{TB} ile N^* lineer bağımlı olur. Ayrıca TB smarandache eğrisi ile α^* partner eğrisi arasındaki uzaklık sabittir. Sonuç olarak Bertrand eğri çifti tanımı gereğince TB – Smarandache eğrisi ve α^* Mannheim partner eğrisi Bertrand eğri çiftine dahildir. \square

6.2 Öneriler

Bu çalışma (α, α^*) Mannheim eğri çifti alınarak yapılmıştır.

a) (α, α^*) Bertrand eğri çifti olması durumunda yapılabilir.

b) α^* eğrisi α nın bir involütü olması durumunda (α, α^*) Evolüt-involüt eğrileri içinde yapılabilir.

Bu iki durum Ordu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitü'sünde Yüksek Lisans Tezi olarak yapılmaktadır. Benzer şekilde (α, α^*) Mannheim eğri çifti, (α, α^*) Bertrand eğri çifti ve (α, α^*) Evolüt-İnvolüt eğrileri için yapılan bu çalışmalar Lorenzt uzayında ve Dual uzayda da yapılabilir. Hatta bu uzaylar üzerinde değişik çatılar alınarak bu çatılar tarafından üretilecek Smarandache eğrileri tanımlanabilir ve bu eğrilerin bazı özellikleri incelenebilir.

Not: Tezdeki tüm hesaplamalar Mapple programı ile hesaplanmıştır.

KAYNAKLAR

- [1] **Ali, A. T., 2010.** Special Smarandache Curves in the Euclidean Space , International Journal of Mathematical Combinatorics, Vol.2, pp.30-36.
- [2] **Bektaş, Ö. and Yüce, S., 2013.** Special Smarandache Curves According to Darboux Frame in Euclidean 3-Space, Romanian Journal of Mathematics and Computer science, vol:3, issue:1. pp: 48-59.
- [3] **Bayrak, N., Bektaş, Ö. and Yüce, S., 2012.** Special Smarandache Curves in \mathbb{E}_1^3 , International Conference on Applied Analysis and Algebra, 20-24 Haziran 2012, Yıldız Teknik Üniversitesi, pp. 209, İstanbul.
- [4] **Çalışkan, A. and Şenyurt, S., 2013.** Smarandache Curves In terms of Sabban Frame of, Spherical Indicatrix Curves, XI. Geometri Sempozyumu, 01-05 Temmuz 2013, Ordu Üniversitesi, Ordu.
- [5] **Çetin, M., Tuncer, Y. and Karacan M.K., 2011.** Smarandache Curves According to Bishop Frame in Euclidean 3-Space, arxiv:1106.3202 v1 [math.DG].
- [6] **Fenchel, W., 1951.** On The Differential Geometry of Closed Space Curves, Bull. Amer. Math. Soc. 57, 44-54.
- [7] **Hacısalıhoğlu, H.H., 1983.** Diferensiyel Geometri, İnönü Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Yayınları, Malatya, Mat. no.7.
- [8] **Kahraman, T., Önder, M. and Uğurlu, H.H., 2008.** Dual Smarandache Curves and Smarandache Ruled Surfaces, arXiv:1205.2180 [math.GM].
- [9] **Liu, H. and Wang, F., 2008.** Mannheim partner curves in 3-space, Journal of Geometry, vol. 88, no. 1-2, pp. 120-126(7).
- [10] **Millman, R.S. and Parker, G.D., 1977.** Elements of Differential Geometry, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 265p.
- [11] **Orbay, K. and Kasap, E., 2009.** On Mannheim partner curves in, International Journal of Physical Sciences vol. 4 (5), pp. 261-264.
- [12] **Özdamar, D., 2012.** Üç Boyutlu Uzayda Mannheim Eğri Çifti, Yüksek Lisans Tezi, Afyon Kocatepe Üniversitesi, Afyon.

- [13] **Sabuncuoğlu, A., 2006.** “Diferansiyel Geometri”, Nobel Yayın Dağıtım, Ankara.
- [14] **Şenyurt, S., 2012.** Natural Lifts and The Geodesic Sprays for the Spherical Indicatrices of the Mannheim Partner Curves in E^3 , International Journal of the Physical Sciences, vol.7, no.16, pp. 2414-2421.
- [15] **Şenyurt, S. and Sivas, S., 2013.** Smarandache Eğrilerine Ait Bir Uygulama, Ordu Üniv. Bilim ve Teknoloji Dergisi, Cilt:3, Sayı:1, pp. 46-60.
- [16] **Taşköprü, K. and Tosun, M., 2014.** Smarandache Curves According to Sabban Frame on S^2 , Boletim da Sociedade parananse de Mathemtica 3 srie. vol:32, no:1, pp.51-59 issn-0037-8712.
- [17] **Thorpe, J.A, 1979.** Elementary Topics in Differential Geometry, Springer-Verlag, New York, Heidelberg-Berlin.
- [18] **Turgut, M. and Yılmaz, S., 2008.** Smarandache Curves in Minkowski space-time, International Journal of Mathematical Combinatorics, Vol.3, pp.51-55.
- [19] **Wang, F.,and Liu, H., 2007.** Mannheim Partner Curves in 3-Space, Proceedings of The Eleventh International Workshop on Diff. Geom. pp.25-31.
- [20] **Woestijne, V.D.I., 1990.** Minimal Surfaces of the 3-dimensional Minkowski space. Proc. Congres “Geometrie differentielle et applications” Avignon (30 May 1988), Wold Scientific Publishing. Singapore. 344-369.

DİZİN

- NB – Smarandache eğrisi, 20
 NC – Smarandache eğrisi, 28
 N^*B^* – Smarandache eğrisi, 43
 N^*C^* – Smarandache eğrisi, 64
 TB – Smarandache eğrisi, 22
 TN – Smarandache eğrisi, 17
 TNB – Smarandache eğrisi, 25
 T^*B^* – Smarandache eğrisi, 50
 T^*N^* – Smarandache eğrisi, 35
 $T^*N^*B^*$ – Smarandache eğrisi, 56
 i -yinci eğriliği , 6
 i -yinci eğrilik fonksiyonu, 6
 i -yinci koordinat fonksiyonu, 5
 n -boyutlu standart Öklid uzayı, 5
Öklid çatı, 5
Öklid iç çarpım, 5
1-inci harmonik eğriliği, 8
- afin çatısı, 4
afin uzay, 4
asli normal vektör, 7
- başlangıç noktası, 4
binormal vektör, 7
birim hızlı eğri, 5
birim noktalar, 4
- Darboux (ani dönme) eksenini, 7
Darboux vektörü, 7
dik çatı, 5
- eğilim çizgisi, 8
eğilim eksenini, 8
eğri, 5
- Gram Schmidt ortogonalleştirme yöntemi,
6
- hız vektörü, 5
- Mannheim eğrisi, 12
Mannheim partner eğrisi, 12
- parametre, 5
parametre aralığı, 5
- Serret Frenet r -ayaklısı, 6
- Serret Frenet vektörü, 6
skaler hız, 5
skaler hız fonksiyonu, 5
Smarandache eğrisi, 17
standart iç çarpım, 5
teğet vektör, 7
uzaklık, 5
uzaklık fonksiyonu, 5
yay parametresi, 5
yay uzunluğu, 6

ÖZGEÇMİŞ

- Adı-Soyadı** : Abdussamet ÇALIŞKAN
Doğum Yeri : Van
Doğum Tarihi : 25.09.1988
Medeni Hali : Evli
Bildiği Yabancı Dil : İngilizce
İletişim Bilgileri : Ordu Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik
Bölümü
abdussamet65@hotmail.com,abdussamet65@gmail.com
Lise : Yalova Lisesi
Lisans : Ordu Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik
Bölümü-2008
Yüksek Lisans : Ordu Üniversitesi 2014