T.C.
ORDU ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BERTRAND EĞRİ ÇİFTLERİNİN KÜRESEL GÖSTERGELERİNİN EĞRİLİKLERİ VE TABİİ LİFTLERİ

ZEYNEP ÖZGÜNER

Bu tez,
Matematik Anabilim Dalında
Yüksek Lisans
derecesi için hazırlanmıştır

ORDU-2013

TEZ ONAY

Ordu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü öğrencisi Zeynep ÖZGÜNER tarafından ve Yrd. Doç. Dr. Süleyman ŞENYURT danışmanlığında hazırlanan "Bertrand Eğri Çiftlerinin Küresel Göstergelerinin Eğrilikleri ve Tabii Liftleri" adlı bu tez, jürimiz tarafından 11 / 09 / 2013 tarihinde oy birliği ileMatematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Süleyman ŞENYURT İmza:

Başkan : Prof. Dr. Emin KASAP İmza:

Üye : Yrd. Doç. Dr. Süleyman ŞENYURT İmza:

Üye : Yrd. Doç. Seher ASLANCI İmza:

ONAY:

Bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulu'nun 11.09.2013 tarih ve 2013/243 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

11 / 09 /2013

Enstitü Müdürü

Doç. Dr. Fikret BALTA

TEZ BİLDİRİMİ

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu,başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu,tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

İmza

Zeynep ÖZGÜNER

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirimlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

BERTRAND EĞRİ ÇİFTLERİNİN
KÜRESEL GÖSTERGELERİNİN EĞRİLİKLERİ
VE TABİİ LİFTLERİ

Zeynep ÖZGÜNER

Ordu Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı, 2013
Yüksek Lisans Tezi, 66s.

Danışman: Yrd.Doç.Dr.Süleyman ŞENYURT

Bu çalışma beş bölüm halinde düzenlenmiştir. Giriş Bölümünde çalışmanın amacı ve konunun ele alınma nedeni tartışıldı. Genel Bilgiler Bölümünde Öklid uzayı ile ilgili bilgilere yer verildi. Materyal ve Yöntem Bölümünde Öklid uzayında Bertrand eğri çiftleri ile ilgili temel kavramlara yer verildi.

Bulgular Bölümü çalışmamızın orijinal kısmını oluşturmaktadır.Bu bölümde $\left(\alpha,\alpha^{*}\right)$ Bertrand eğri çifti alınarak bu eğri çiftlerinin küresel gösterge eğrileri ile sabit pol eğrisinin yay uzunlukları, E^3 ve S^2 ye göre geodezik eğrilikleri hesaplandı bunlar arasındaki bağıntılar bulundu. Ayrıca α^{*} eğrisinin küresel göstergelerinin tabii lift eğrileri geodezik spray için integral eğrisi olma şartı α eğrisine bağlı olarak ifade edildi.

Anahtar Sözcükler: Öklid uzayı, Bertrand eğri çifti, Geodezik eğrilik, Geodezik spray, Tabii Lift

ABSTRACT

NATURAL LIFTS AND CURVATURES OF THE SPHERICAL INDICATRICES OF THE BERTRAND CURVES

Zeynep ÖZGÜNER

University of Ordu
Institute for Graduate Studies in Science and Technology
Department of Mathematic, 2013
MSc. Thesis, 66p.

Supervisor:Asst.Prof.Dr.Süleyman ŞENYURT

This study consists five fundamental chapter. In introduction, it is discussed aim of and why this study is taken into consideration. In general in formation part, the basic consepts of Euclidean space have been pointed out. In material and method part, Bertrand curves are defined in the 3-dimensional Euclidean space.

In the last chapter is the original part of the study. In this chapter, Arc-lengths and geodesic curvatures of the spherical indicatrix curves with the fixed pole curve of Bertrand curves to E^3 and E^3 or S^2. In addition, the relations among the geodesic curvatures and arc-lengths are given. Finally, the condition being the natural lifts of the spherical indicatrix curves of the α^* curve are an integral curve of the geodesic spray has expressed depending on α curve.

Key Words: Euclidean space, Bertrand curve, Geodesic spray, Geodesic curvatures, Natural Lift.

TEŞEKKÜR

Yoğun çalışmaları arasında danışmanlığımı yapan ve çalışmalarım boyunca yardımlarını esirgemeyen saygıdeğer hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Süleyman ŞENYURT'a en içten minnet duygularımı ve teşekkürlerimi sunuyorum.Ayrıca her zaman desteklerini gördüğüm Matematik Bölüm Başkanı Sayın Prof. Dr. Cemil YAPAR'a, Sayın Doç. Dr. Selahattin Maden'e, Sayın Yrd. Doç. Dr. Erdal ÜNLÜYOL'a ve Yrd. Doç. Dr. Seher ASLANCI'ya teşekkür etmeyi bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ŞEKİLLER LİSTESİ

SİMGE VE KISALTMALAR LİSTESİ

D	: Levi-Civita konneksiyonu
$\overline{D}$	: S^2 deki konneksiyon
E^3	:3-boyutlu Öklid uzayı
S^2	:Birim küre
$\langle\ \rangle$	: İç çarpım
$\wedge$	: Vektörel çarpım
κ	: Eğrinin eğriliği
τ	: Eğrinin burulması (torsiyon)
k_g	: E^3 e göre geodezik eğrilik
γ_g	: S^2 ye göre geodezik eğrilik
$\\| \\|$	:Norm
W	:Darboux vektörü
C	: Birim Darboux vektörü
S	:Şekil operatörü (Weingarten dönüşümü)
$T_M(P)$	: P noktasındaki tanjant uzayı
TM	: M nin vektör alanları uzayı
$\overline{\alpha}$	: Tabii lift eğrisi

1.GİRİŞ

3-Boyutlu Öklid uzayında eğrilerin diferansiyel geometrisi üzerinde birçok çalışmalar yapılmıştır. Özellikle iki eğrinin karşılıklı noktalarında Frenet çatıları arasında bağıntılar kurularak, birçok teoriler geliştirilmiştir. İnvolüt - Evolüt eğriler, Bertrand eğri çiftleri ve Manheim eğrileri birer örnek olarak gösterilebilir. Bir α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet vektörleri birim kürenin merkezine yerleştirildiğinde uç noktaları birim küre yüzeyi üzerinde küresel gösterge eğrilerini oluşturular.Eğrinin Frenet 3-ayaklısının her s anında , bir eksen etrafında , bir ani helis hareketi yaptığı kabul edilir.Bu eksene eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki **Frenet ani dönme** ekseni denir.Bu eksenin yön ve doğrultusunu veren vektöre eğrinin **Frenet ani dönme vektörü** adı verilir ve bu vektör $W = \tau T + \kappa B = N' \wedge N$ şeklinde ifade edilir.

Çalışkan, Sivridağ ve Hacısalihoğlu (1984) çalışmasında bir α eğrisinin küresel gösterge eğrileri ile sabit pol eğrisinin tabii liftleri ve geodezik sprayları üzerinde durmuşlardır.Burada tabii lift eğrilerinin tanjant demeti üzerindeki geodezik sprayın bir integral eğrisi olması için esas eğrinin nasıl bir eğri olması gerektiğine dair sonuçlar elde etmişlerdir .

Bertrand eğri çifti ilk olarak; 1850 yılında Bertrand Russel tarafından tanımlanmıştır.Birinci ve ikinci eğrinin aslinormal vektörleri lineer bağımlı olduğunda bu eğri çiftine Bertrand eğri çifti denilmektedir.

Bu çalışmada (α, α^*) Bertrand eğri çifti olarak alındığında α^* eğrisinin $(T^*),(N^*)$ ve (B^*) küresel gösterge eğrileri ile (C^*) sabit pol eğrisinin yay uzunlukları E^3 ve S^2 ye göre geodezik eğrilikleri hesaplanarak ve bunlar arasındaki bağıntılar bulundu. Ayrıca α^* eğrisinin küresel gösterge eğrilerinin tabii liftlerinin geodezik sprayın integral eğrisi olması için, α eğrisinin nasıl bir eğri olduğuna dair sonuçlar bulundu.

2.ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Çalışkan, Sivridağ ve Hacısalihoğlu (1984), $\alpha : I \to M$ eğrisinin $\overline{\alpha} : I \to \chi(M)$ tabii liftinin, geodezik sprayın bir integral eğrisi olması için gerek ve yeter şartın M üzerinde bir geodezik eğri olması gerektiğini belirtmişlerdir. Ayrıca bir α eğrisinin küresel gösterge eğrilerinin tabii liftlerinin geodezik sprayın integral eğrisi olması için α eğrisinin nasıl bir eğri olması gerektiğine dair sonuçlar bulmuşlardır.

Bilici (1999), İnvolüt-Evolüt eğrilerin küresel gösterge eğrilerinin eğrilikleri,tabii liftleri ve tabii lift eğrilerinin tanjant demeti üzerinde geodezik spray için integral eğrisi olma şartları ile ilgili değişik sonuçlar bulmuşlardır.

Ekmekçi ve İlarslan (2001), IL^n Lorentz uzayında Bertrand eğri çiftlerini tanımlayarak bu eğri çiftler arasında uzaklığın sabit olduğunu ve eğrilerin teğet vektörleri arasındaki açının sabit olduğunu belirtmişlerdir. Ayrıca Bertrand eğri çiftleri için Manheim ve Schell teoremlerini ispatlamışlardır.

Bilici (2009), Lorentz uzayında non-null eğrilerin involütleri için eğrilikler ve burulmalar, Frenet vektörleri, Frenet vektörlerinin S_1^2 birim Lorenz küresi veya H_0^2 hiperbolik birim küresi üzerindeki küresel gösterge eğrilerinin yay uzunlukları, IL^3, S_1^2 veya H_0^2 ye göre geodezik eğrilikleri ve Frenet ani dönme vektörlerinden bahsedilerek bazı önemli sonuçlar elde etmiştir.

Ergun ve Çalışkan (2011), Lorentz uzayında integral eğrisi, tabii lift eğrisi ve geodezik eğriyi tanımlayarak, $\alpha : I \to \overline{M}$ eğrisinin $\overline{\alpha} : I \to \chi(\overline{M})$tabii liftinin, geodezik sprayın bir integral eğrisi olması için gerek ve yeter şartın $\overline{M}$ üzerinde bir geodezik eğri olması gerektiğini belirtmişlerdir.

Şenyurt (2012), Öklid uzayında Manheim eğrilerinin küresel göstergelerinin yay uzunluklarını, geodezik eğriliklerini hesaplamıştır. Ayrıca (α, α^*) Manheim eğri çifti olmak üzere, α^* eğrisinin küresel göstergelerinin tabii litlerinin geodezik sprayın integral eğrisi olması için α eğrisinin nasıl bir eğri olaması gerektiğine dair sonuçlar belirtmiştir.

Demet (2012), Timelike-Spacelike Manheim eğri çiftlerinin küresel gösterge eğrilerinin eğrilikleri,tabii liftleri ve tabii lift eğrilerinin tanjant demeti üzerinde geodezik spray için integral eğrisi olma şartları ile ilgili değişik sonuçlar bulmuşlardır.

Çalışkan Ö.(2013), Timelike Bertrand eğri çiftlerinin küresel gösterge eğrilerinin eğrilikleri,tabii liftleri ve tabii lift eğrilerinin tanjant demeti üzerinde geodezik spray için integral eğrisi olma şartları ile ilgili değişik sonuçlar bulmuşlardır.

3.GENEL BİLGİLER

Bu bölümde 3-boyutlu Öklid uzayına ait temel kavramlara yer verilmiştir.

3.1 Öklid Uzayı

Tanım 3.1.1: $A \neq \varnothing$ bir cümle ve V de K cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun.

$f : A \times A \to V$ fonksiyonu aşağıdaki aksiyomları sağlarsa A ya V ile birleştirilmiş **afin uzay** denir:

A1: $\forall P, Q, R \in A$ için $f(P,Q) + f(Q,R) = f(P,R)$

A2: $\forall P \in A$ ve $\forall \alpha \in V$ için $f(P,Q) = \alpha$ olacak şekilde bir tek $Q \in A$ noktası vardır.

Tanım 3.1.2: IR^n afin uzayı ile birleşen vektör uzayı IR^n olsun.

$$\langle , \rangle : IR^n \times IR^n \to IR$$

$$(X, Y) \to \langle X, Y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlar. Bu fonksiyona **standart iççarpım** veya **Öklid iç çarpımı** denir:

i) **Bilineer aksiyomu** : $\forall X, Y, Z \in V$ ve $\forall a, b \in IR$ için

$$\langle aX + bY, Z \rangle = a\langle X, Z \rangle + b\langle Y, Z \rangle$$

$$\langle X, aY + bZ \rangle = a\langle X, Y \rangle + b\langle X, Z \rangle$$

ii) **Simetri aksiyomu**: $\forall X, Y \in V$ için $\langle X, Y \rangle = \langle Y, X \rangle$

iii) **Pozitif tanımlılık aksiyomu**: $\forall X \in V$ için $\langle X, X \rangle \geq 0$ ve $\langle X, X \rangle = 0 \Leftrightarrow X = 0$

Tanım 3.1.3: Üzerinde standart iç çarpım tanımlı IR^n afın uzayına n-boyutlu **Öklid uzayı** denir ve E^n ile gösterilir.

Tanım 3.1.4: $\forall X \in E^n$ olmak üzere

$$\| \; \| : E^n \to IR$$

$$X \to \|X\| = \sqrt{\langle X, X \rangle}$$

şeklinde tanımlı fonksiyona E^n de **norm fonksiyonu** ve $\|X\| \in IR$ sayısına X vektörünün **normu** denir.

Tanım 3.1.5: $\forall X, Y \in E^n$ olmak üzere

$$d : E^n \times E^n \to \mathbb{R}$$

$$(X,Y) \to d(X,Y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (Y_i - X_i)^2}$$

şeklinde tanımlı d fonksiyonuna E^n de **uzaklık fonksiyonu**, $d(X,Y) \in IR$ sayısına da X ile Y noktaları arasındaki **uzaklık** denir.

Tanım 3.1.6: $\forall X, Y \in E^n$ olmak üzere

$$\wedge : E^3 \times E^3 \to E^3$$

$$(X,Y) \to X \wedge Y = \sum_{i=1}^{3} \det(e_i, X, Y) e_i$$

şeklinde tanımlı $\wedge$ fonksiyonuna **vektörel çarpım fonksiyonu**, $X \wedge Y$ vektörüne de X ile Y nin **vektörel çarpımı** denir.

Tanım3.1.7: $\alpha : I \to E^n$ $\alpha(s) = (\alpha_1(s), \alpha_2(s), ..., \alpha_n(s))$ şeklinde tanımlı diferen-siyellenebilir fonksiyona E^n de bir **eğri** denir.

Tanım 3.1.8: $\alpha : I \to E^n$ diferensiyellenebilir bir eğri olsun.

$$\|\alpha'\| : I \to IR$$

$$s \to \|\alpha'\|(s) = \|\alpha'(s)\|$$

şeklinde tanımlı $\|\alpha'\|$ fonksiyonuna **skaler hızfonksiyonu**, $\|\alpha'(s)\|$ reel sayısına da eğrinin **skaler hızı** denir.

Tanım 3.1.9: $\alpha : I \to E^n$ bir eğri olsun. $\forall s \in I$ için $\|\alpha'(s)\| = 1$ ise eğriye birim hızlı eğri, $s \in I$ parametresine de **yay parametresi** denir.

Tanım 3.1.10: $\alpha : I \subseteq IR \to E^n$ bir eğri ve $a, b \in I$ için

$$s = \int_a^b \|\alpha'(s)\| ds \qquad (3.1.1)$$

reel sayısına $\alpha(a)$ ile $\alpha(b)$ noktaları arasındaki **yay uzunluğu** denir.

Tanım 3.1.11: $\alpha : I \subset IR \to E^n$ bir eğri ve $\phi = \{\alpha', \alpha'', \alpha''', ...\alpha^{(r)}\}$ cümlesi lineer bağımsız olsun.

$$\alpha^{(k)} \in Sp\{\phi\}, \quad k > r$$

olmak üzere ϕ cümlesinden **Gram Schmidt ortogonalleştirme yöntemi** ile elde edilen $\{V_1(s), V_2(s), ..., V_r(s)\}$ ortonormal sistemine α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki **Serret-Frenet r-ayaklısı,** $\forall\ V_i,\ 1 \le i \le r$, vektörüne de **Serret -Frenet** vektörü denir.

Teorem 3.1.1: $\alpha : I \subset IR \to E^3$ eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet 3-ayaklısı;

1) $s \in I$ yay parametresi ise

$$\begin{cases} V_1(s) = \alpha'(s) \\ V_2(s) = \dfrac{1}{\|\alpha''(s)\|}\alpha''(s) \\ V_3(s) = T(s) \times N(s) \end{cases}$$

2) $s \in I$ yay parametresi değilse

$$\begin{cases} V_1(s) = \dfrac{1}{\|\alpha'(s)\|}\alpha'(s) \\ V_2(s) = B(s) \times N(s) \\ V_3(s) = \dfrac{1}{\|\alpha'(s) \times \alpha''(s)\|}\left(\alpha'(s) \times \alpha''(s)\right) \end{cases}$$

şeklinde verilir (Hacısalihoğlu 1983).

Tanım 3.1.12: $\alpha : I \to E^n$ eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet r-ayaklısı $\{V_1(s), V_2(s), ..., V_r(s)\}$ olsun.

$$k_i : I \to \mathbb{R}$$

$$s \to k_i(s) = \langle V_i'(s), V_{i+1}(s) \rangle \quad , \; 1 \le i < r \, ,$$

şeklinde tanımlı k_i fonksiyonuna **i-yinci eğrilik fonksiyonu** ve $k_i(s) \in \mathbb{R}$ sayısına eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki **i-yinci eğriliği** denir.

Özel olarak $n = 3$ alınırsa $k_1(s) = \kappa(s)$ ve $k_2(s) = \tau(s)$ ile gösterilir. κ ya eğrinin **eğriliği**, τ ya eğrinin **burulması (torsiyonu)** denir,(Hacısalihoğlu 1983).

Teorem 3.1.2: $\alpha : I \to E^n$ eğrisinin Frenet r -ayaklısı $\{V_1(s), V_2(s), ..., V_r(s)\}$,

i -yinci eğriliği $k_i(s)$ olsun. Bu durumda Frenet vektörleri ile bunların türev vektörleri arasında

$$\begin{cases} V_1'(s) = k_1(s) V_2(s) \\ \\ V_i'(s) = -k_{i-1}(s) V_{i-1}(s) + k_i(s) V_{i+1}(s), \qquad 1 \le i < r \\ \\ V_r'(s) = -k_{r-1}(s) V_r(s) \end{cases}$$

bağıntısı vardır,(Hacısalihoğlu 1983).

$n = 3$ özel halinde α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet 3-ayaklısı $\{T, N, B\}$ ile gösterilir. Burada T ye teğet vektör, N ye asli normal vektör ve B ye de binormal vektör denir. α eğrisinin birinci ve ikinci eğrilikleri de sırasıyla κ ve τ olmak üzere Frenet formülleri

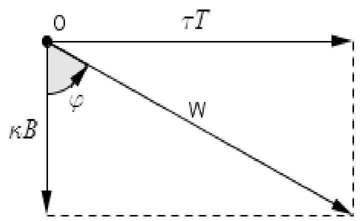
$$\begin{cases} T'(s) = \kappa(s) N(s), \\ N'(s) = -\kappa(s) T(s) + \tau(s) B(s), \\ B'(s) = -\tau(s) N(s) \end{cases} \qquad (3.1.2)$$

şeklinde olur,(Hacısalihoğlu 1983).Diğer yandan α eğrisi üzerinde $\alpha(s)$ noktası eğriyi çizerken bu noktadaki $\{T, N, B\}$ Frenet 3-ayaklısı her s anında, (bir eksen etrafında) ani bir helis hareketi yaptığı kabul edilir ve bu eksene eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki **Darboux (ani dönme) ekseni** denir. Bu eksenin yön ve doğrultusunu veren vektör,

$$W = N \wedge N' ,$$

$$W = \tau T + \kappa B \qquad (3.1.3)$$

şeklinde olur ve bu vektöre Darboux vektörü adı verilir.



Şekil 3.1 Darboux vektörü

W ile B vektörleri arasındaki açı φ ile gösterilirse şekilden,

$$\sin\varphi = \frac{\tau}{\|W\|} \quad , \quad \cos\varphi = \frac{\kappa}{\|W\|} \qquad (3.1.4)$$

dır. W Darboux vektörü yönündeki birim vektör C ile gösterilirse

$$C = \frac{\tau}{\left\|\vec{W}\right\|}T + \frac{\kappa}{\left\|\vec{W}\right\|}B$$

olur. Burada κ ile τ nun yerine $(3.1.4)$ deki karşılıkları yazılırsa

$$C = \sin\varphi T + \cos\varphi B \qquad (3.1.5)$$

bulunur.

Tanım 3.1.13: $\alpha : I \to E^n$ eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki birinci ve ikinci eğrilikleri sırasıyla $k_1(s)$ ve $k_2(s)$ olsun.

$$H : I \to IR$$
$$s \to H_1(s) = \frac{k_1(s)}{k_2(s)}$$

şeklinde tanımlı H_1 fonksiyonuna α eğrisinin **1-inci harmonik eğriliği** denir.

Tanım 3.1.14 : $\alpha : I \to E^n$ eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki hız vektörü sabit bir U vektörü ile sabit açı yapıyorsa eğriye **eğilim çizgisi (helis)** ve $S_P\{U\}$ ya da eğilim çizgisinin **eğilim ekseni** denir.

Teorem 3.1.3: $\alpha : I \to E^3$ eğrisi bir eğilim çizgisidir $\Leftrightarrow H_1(s) = sbt$ (Hacısalihoğlu 1983).

İspat: $\Rightarrow$ Kabul edelim ki α bir eğilim çizgisi olsun. α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet vektörleri $\{T(s), N(s), B(s)\}$ olmak üzere , eğilim çizgisi tanımına göre

$$\langle T(s), U\rangle = \cos\theta$$

olur.Bu ifadenin s ye göre türevi alınırsa

$$\langle T'(s), U\rangle = 0 \Rightarrow \kappa\langle N(s), U\rangle = 0$$
$$\Rightarrow N \perp U$$

olduğu görülür. Buradan $U \in S_p\{T(s), B(s)\}$ olacağından

$$U = aT(s) + bB(s)$$

şeklinde yazılabilir.Bu ifade sırasıyla T ve B ile iç çarpılırsa

$$\langle U, T(s)\rangle = a = \cos\theta,$$

$$\langle U, B(s)\rangle = b = \sin\theta$$

olur ve buradan

$$U = \cos\theta T(s) + \sin\theta B(s)$$

bulunur.Diğer yandan

$$\langle N(s), U\rangle = 0 \Rightarrow \langle N'(s), U\rangle + \langle N(s), U'\rangle = 0$$

$$\Rightarrow \langle \kappa(s)T(s) - \tau(s)B(s), U\rangle = 0$$

$$\Rightarrow \kappa(s)\langle T(s), U\rangle - \tau(s)\langle B(s), U\rangle = 0$$

$$\Rightarrow \kappa(s)\cos\theta - \tau(s)\sin\theta = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\kappa(s)}{\tau(s)} = sbt$$

$$\Rightarrow H_1(s) = sbt.$$

$\Leftarrow$ Kabul edelim ki $\forall s \in I$ için $H_1(s) = sbt$ olsun.İddia ediliyor ki α bir eğilim çizgisidir.

$H_1(s) = sbt$ ise $H_1(s) = \tan\theta = sbt$ alınabilir.Buradan

$$\frac{\kappa(s)}{\tau(s)} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \Rightarrow \kappa(s)\cos\theta - \tau(s)\sin\theta = 0$$

olur.

$$\vec{U} = \cos\theta T(s) + \sin\theta B(s)$$

vektörünü tanımlayalım.Türev alınırsa

$$U' = \cos\theta T' + \sin\theta B'$$

$$U' = \left(\underbrace{\kappa(s) c\,os\,\theta - \tau(s)\sin\theta}_{=0} \right) N(s),$$

$$U' = 0 \;\Rightarrow\; U = sbt.$$

bulunur.Buradan da

$$\langle \alpha'(s), U \rangle = \langle T(s), U \rangle$$

$$= \langle T(s), \cos\theta T(s) + \sin\theta B(s) \rangle$$

$$= \cos\theta$$

$$= \text{sbt}$$

olur ki bu da α bir eğilim çizgisi olması demektir.

Teorem 3.1.4: $\alpha : I \to E^3$ eğrisinin düzlemsel bir eğri olması için gerek ve yeter şart $\tau = 0$ olmasıdır,(Hacısalihoğlu 1983).

İspat: $\Rightarrow$ Kabul edelim ki α birim hızlı düzlemsel bir eğri olsun.Bu durumda $\forall s \in I$ için $\alpha(s)$ noktalarının tümü bir E düzlemi içinde bulunur.Düzlemin normali q, düzlem üzerinde herhangi bir nokta p olsun.Bu durumda

$$\langle \alpha(s) - p, q \rangle = 0$$

olur. Bu ifadenin türevi alınırsa

$$\langle \alpha'(s), q \rangle + \langle \alpha(s) - p, q' \rangle = 0 \;\Rightarrow \langle \alpha'(s), q \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \langle T(s), q \rangle = 0$$

olur ve tekrar türev alınırsa

$$\langle \alpha''(s), q \rangle = 0 \;\Rightarrow \langle \kappa(s) N(s), q \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \langle N(s), q \rangle = 0$$

bulunur.Buradan q vektörünün T ve N vektörlerine dik olduğu görülür.Bu durumda q vektörü B ye paralel olur.

$$B(s) = \pm \frac{q}{\|q\|}$$

alınabilir. Bu ifadenin türevi alınırsa

$$B' = 0$$

bulunur ve

$$B'(s) = -\tau(s) N(s)$$

eşitliğinden

$$\tau(s) = 0$$

elde edilir.

$\Leftarrow$ Kabul edelim ki $\tau(s) = 0$ olsun. $B'(s) = -\tau(s) N(s)$ idi. Buradan

$$B'(s) = 0 \Rightarrow B(s) = sbt$$

olur.

$$F : I \to IR$$
$$\mathrm{s} \to \mathrm{F}(s) = \langle \alpha(s) - \alpha(0), B(s) \rangle$$

fonksiyonunu tanımlayalım. $s = 0$ ise $F(0) = 0$ dır. F nin s ye göre türevi alınırsa

$$F'(s) = \langle \alpha'(s), B(s) \rangle + \langle \alpha'(s) - \alpha(0), B'(s) \rangle$$

$$= \langle T(s), B(s) \rangle + \langle T(s) - \kappa(s), N(s) \rangle$$

$$=0,$$
$$\mathrm{F}(s) = sbt.$$

olur.Buna göre

$$\langle \alpha(s) - \alpha(0), B(s) \rangle = 0$$

eşitliği α eğrisinin $\alpha(0)$ noktasından geçen ve B vektörüne dik olan düzlem içinde olduğunu gösterir.

Teorem 3.1.5: $\alpha : I \to E^3$ eğrisinin doğru olması için gerek ve yeter şart $\kappa = 0$ olmasıdır,(Hacısalihoğlu 1983).

İspat: $\alpha : I \to E^3$ birim hızlı bir eğri olsun.

$$\kappa(s) = \|\alpha''(s)\|$$

olduğundan

$$\kappa(s) = 0 \Leftrightarrow \|\alpha''(s)\| = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha''(s) = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha'(s) = b$$

$$\Leftrightarrow \alpha(s) = bs + c, \quad b, c \in IR.$$

Tanım 3.1.15: $X, Y \in \chi(M)$ ve Y nin bileşenler

$$y_i : E^n \xrightarrow{C^\infty} \mathbb{R}, \ 1 \leq i \leq n,$$

diferensiyellenebilir fonksiyonlar olsun.

$$D_X Y = \left(X_p[y_1], X_p[y_2], \ldots, X_p[y_n]\right)$$

ifadesine Y nin X e göre **kovaryant türevi** denir.

Tanım 3.1.16: E^n nin bir hiperyüzeyi M ve M nin birim normal vektör alanı N olsun. E^n nin Riemann konneksiyonu D olmak üzere , $X \in \chi(M)$ için

$$S(X) = D_X N \tag{3.1.6}$$

şeklinde tanımlanan S dönüşümüne **şekil operatörü (weingarten dönüşümü)** denir,(Hacısalihoğlu 1983).

Tanım 3.1.17: E^n de bir hiperyüzey M, şekil operatörü S ve Riemann konneksiyonu D olsun. $X, Y \in \chi(M)$ için

$$\overline{D}_X Y = D_X Y + \langle S(X), Y \rangle N \tag{3.1.7}$$

şeklinde tanımlı $\overline{D}$ operatörüne M üzerinde **Gauss anlamında türev operatörü,** denkleme de **Gauss denklemi** denir.

Tanım 3.1.18: $\alpha : I \to E^n$ birim hızlı bir eğri olsun. α eğrisinin teğet vektörü T olmak üzere

$$D_T T = 0 \qquad (3.1.8)$$

ise α eğrisine E^n de bir **geodezik eğri**,

$$\overline{D}_T T = 0 \qquad (3.1.9)$$

ise α eğrisine M yüzeyi üzerinde bir **geodezik eğri** denir (Hacısalihoğlu 1983).

Tanım 3.1.19: $\alpha : I \to E^3$ birim hızlı bir eğri olsun. $\alpha(s)$ noktasındaki teğet vektörü T olmak üzere

$$k_g = \left\| D_T T \right\| \qquad (3.1.10)$$

ifadesine eğrinin E^3 e göre **geodezik eğriliği** ,

$$\gamma_g = \left\| \overline{D}_T T \right\| \qquad (3.1.11)$$

ifadesine de eğrinin S^2 ye göre **geodezik eğriliği** denir.

Tanım 3.1.20: $\alpha : I \to E^3$ de birim hızlı bir eğri olsun. α eğrisinin birim teğet vektörü $T = \overrightarrow{PQ}$ alındığında, P noktası α eğrisini çizerken Q noktasının birim küre yüzeyi üzerinde çizdiği eğriye α eğrisinin **birinci küresel göstergesi** veya **teğetler göstergesi** adı verilir.

α eğrisinin teğetler göstergesi (T) ile gösterilirse denklemi,

$$\alpha_T(s) = T(s)$$

dir. (T) nin yay parametresi s_T ile gösterilirise

$$ds_T = \left\| T' \right\| ds$$

olur.

Tanım 3.1.21: $\alpha : I \to E^3$ de birim hızlı bir eğri olsun. α eğrisinin asli normal vektörünün birim küre yüzeyi üzerinde çizdiği eğriye α eğrisinin **ikinci küresel göstergesi** veya **asli normaller göstergesi**denir.

α eğrisininasli normaller göstergesi (N) ile gösterilirse denklemi,

$$\alpha_N(s) = N(s)$$

dir. (N) nin yay parametresi s_N gösterilirse

$$ds_N = \left\| N' \right\| ds$$

olur.

Tanım 3.1.22: $\alpha : I \to E^3$ de birim hızlı bir eğri olsun. α eğrisininbinormal vektörünün birim küre yüzeyi üzerinde çizdiği eğriye α eğrisinin **üçüncü küresel göstergesi** veya **binormaller göstergesi** adı verilir.

α eğrisinin binormaller göstergesi (B) ile gösterilirse denklemi,

$$\alpha_B(s) = B(s)$$

dir. (B) nin yay parametresi s_B ile gösterilirse

$$ds_B = \|B'\| ds$$

olur.

Tanım 3.1.23: $\alpha : I \to E^3$ de bir eğri olsun. α eğrisinin Frenet vektörlerine bağlı olarak oluşan birim Darboux vektörünün sabit birim küre üzerinde çizdiği eğriye **sabit pol eğrisi** adı verilir.

α eğrisine ait birim Darboux vektörü (C) ile gösterilirse denklemi,

$$\alpha_C(s) = C(s)$$

dir. (C) nin yay parametresi s_C ile gösterilirse

$$ds_C = \varphi' ds$$

olur.

Tanım 3.1.24 : $M, N \subset E^3$ eğrileri (I, α) ve (I, β) koordinat komşulukları ile verilsin. M ve N eğrilerinin Frenet 3-ayaklıları sırasıyla $\{T(s), N(s), B(s)\}$ ve $\{T^*(s), N^*(s), B^*(s)\}$ olsun $\forall s \in I$ için

$$\langle T(s), T^*(s) \rangle = 0$$

ise N ye M nin **involütü**, M ye de N nin **evolütü** denir.

3.2 Küresel Gösterge Eğrilerinin Yay Uzunlukları

Çalışmamızın bu bölümünde α eğrisinin (T), (N), (B) küresel gösterge eğrileri ile (C) sabit pol eğrisinin yay uzunlukları hesaplanmıştır.

(T) Teğetler göstergesinin yay uzunluğu s_T ile gösterilirse

$$s_T = \int_0^s \left\| \frac{dT}{ds} \right\| ds,$$

$$= \int_0^s \|\kappa N\| ds,$$

$$= \int_0^s \kappa ds. \qquad (3.2.1)$$

(N) Asli normaller göstergesinin yay uzunluğu s_N ile gösterilirse

$$s_N = \int_0^s \left\| \frac{dN}{ds} \right\| ds,$$

$$= \int_0^s \|-\kappa T + \tau B\| ds,$$

$$= \int_0^s \sqrt{\kappa^2 + \tau^2} ds,$$

$$= \int_0^s \|W\| ds. \qquad (3.2.2)$$

(B) Binormaller göstergesinin yay uzunluğu s_B ile gösterilirse

$$s_B = \int_0^s \left\| \frac{dB}{ds} \right\| ds,$$

$$= \int_0^s \left\| -\tau N \right\| ds,$$

$$= \int_0^s \tau ds. \qquad (3.2.3)$$

(C) Sabit pol eğrisinin yay uzunluğu s_C ile gösterilirse

$$s_C = \int_0^s \left\| \frac{dC}{ds} \right\| ds,$$

$$= \int_0^s \varphi' \left\| \cos\varphi T - \sin\varphi B \right\| ds,$$

$$= \int_0^s \varphi' ds. \qquad (3.2.4)$$

3.3 Küresel Gösterge Eğrilerinin E^3 e Göre Geodezik Eğrilikleri

(T) teğetler göstergesinin E^3 e göre geodezik eğriliği k_T ile gösterilsin. (T) nin yay parametresi s_T ve birim teğet vektörü T_T ın geodezik eğriliği

$$k_T = \left\| D_{T_T} T_T \right\|$$

dır. (T) teğetler göstergesinin denklemi

$$\alpha_T(s_T) = T(s)$$

şeklinde yazılır. Bu ifadenin s_T parametresine göre türevi alınırsa,

$$\frac{d\alpha}{ds_T} = \frac{dT}{ds}\frac{ds}{ds_T} \Rightarrow \frac{d\alpha}{ds_T} = \kappa N \frac{ds}{ds_T}$$

$$\Rightarrow T_T = \kappa N \frac{ds}{ds_T}$$

olur ve her iki tarafın normu alınırsa

$$\frac{ds}{ds_T} = \frac{1}{\kappa}$$

$$T_T\left(s_T\right) = N\left(s\right)$$

bulunur. Bu ifadenin tekrar türev alınır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$D_{T_T} T_T = \frac{dT_T}{ds}\frac{ds}{ds_T} \Rightarrow D_{T_T} T_T = \frac{dN}{ds}\frac{ds}{ds_T}$$

$$\Rightarrow D_{T_T} T_T = \left(-\kappa T + \tau B\right)\frac{1}{\kappa}$$

$$\Rightarrow D_{T_T} T_T = -T + \frac{\tau}{\kappa} B$$

olur.Norm alınırsa

$$k_T = \sqrt{1 + \frac{\tau^2}{\kappa^2}}$$

veya

$$k_T = \sqrt{1 + \tan^2 \varphi}$$

$$k_T = \frac{1}{\cos\varphi} \qquad (3.3.1)$$

elde edilir.

(N) aslinormaller göstergesinin E^3 e göre geodezik eğriliği k_N ile gösterilsin. (N) nin yay parametresi s_N ve birim teğet vektörü T_N ın geodezik eğriliği

$$k_N = \left\| D_{T_N} T_N \right\|$$

dır. (N) asli normaller göstergesinin denklemi

$$\alpha_N(s_N) = N(s)$$

dir. Burada s_N ye göre türev alınırsa

$$\frac{d\alpha}{ds_N} = \frac{dN}{ds}\frac{ds}{ds_N} \Rightarrow \frac{d\alpha}{ds_N} = (-\kappa T + \tau B)\frac{ds}{ds_N}$$

$$\Rightarrow \frac{d\alpha}{ds_N} = (-\kappa T + \tau B)\frac{ds}{ds_N}$$

$$\Rightarrow T_N = (-\kappa T + \tau B)\frac{ds}{ds_N}$$

olur ve her iki tarafın normu alınırsa

$$\frac{ds}{ds_N} = \frac{1}{\|W\|},$$

$$T_N = -\frac{\kappa}{\|W\|}T + \frac{\tau}{\|W\|}B,$$

$$T_N = -\cos\varphi T + \sin\varphi B$$

bulunur. Bu ifadenin tekrar türevi alınır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$D_{T_N}T_N = \frac{dT_N}{ds}\frac{ds}{ds_N} \Rightarrow D_{T_N}T_N = \frac{d\left(-\cos\varphi T + \sin\varphi B\right)}{ds}\frac{ds}{ds_N}$$

$$\Rightarrow D_{T_N}T_N = \frac{\varphi'}{\|W\|}\left(\sin\varphi T + \cos\varphi B\right) - N$$

olur.Normu alınırsa

$$k_N = \sqrt{1+\left(\frac{\varphi'}{\|W\|}\right)^2} \qquad (3.3.2)$$

bulunur.

(B) binormaller göstergesinin E^3 e göre geodezik eğriliği k_B ile gösterilsin. (B) nin yay parametresi s_B ve birim teğet vektörü T_B ın geodezik eğriliği

$$k_B = \left\|D_{T_B}T_B\right\|$$

dır. (B) binormaller göstergesinin denklemi

$$\alpha_B\left(s_B\right) = B(s)$$

dir. Her iki tarafın s_B parametresine göre türevi alınırsa,

$$\frac{d\alpha}{ds_B} = \frac{dB}{ds}\frac{ds}{ds_B} \Rightarrow \frac{d\alpha}{ds_B} = -\tau N\frac{ds}{ds_B}$$

$$\Rightarrow T_B = -\tau N\frac{ds}{ds_B}$$

olur ve normu alınırsa

$$\frac{ds}{ds_B} = \frac{1}{\tau},$$

$$T_B = -N$$

olur.Bu ifadenin tekrar türev alınır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$D_{T_B} T_B = \frac{dT_B}{ds}\frac{ds}{ds_B} \quad \Rightarrow D_{T_B} T_B = -\frac{dN}{ds}\frac{ds}{ds_B}$$

$$\Rightarrow D_{T_B} T_B = -\left(-\kappa T + \tau B\right)\frac{1}{\tau}$$

$$\Rightarrow D_{T_B} T_B = \frac{\kappa}{\tau} T - B$$

olur.Norm alınırsa

$$k_B = \sqrt{\frac{\kappa^2}{\tau^2} + 1}$$

veya

$$k_B = \sqrt{1 + \cot^2 \varphi}\,,$$

$$k_B = \frac{1}{\sin \varphi} \tag{3.3.3}$$

bulunur.

$\left(C\right)$ sabit pol eğrisinin E^3 e göre geodezik eğriliği k_C ile gösterilsin. $\left(C\right)$ nin yay parametresi s_C ve birim teğet vektörü T_C ın geodezik eğriliği

$$k_C = \left\| D_{T_C} T_C \right\|$$

dır. $\left(C\right)$ nin denklemi

$$\alpha_C\left(s_C\right) = C\left(s\right)$$

dir.Bu denklemin türevi alınırsa

$$\frac{d\alpha}{ds_C} = \frac{dC}{ds}\frac{ds}{ds_C} \quad \Rightarrow \frac{d\alpha}{ds_C} = \varphi'\left(\cos\varphi T - \sin\varphi B\right)\frac{ds}{ds_C}$$

$$\Rightarrow T_C = \varphi'\left(\cos\varphi T - \sin\varphi B\right)\frac{ds}{ds_C}$$

olur ve normu alınırsa

$$\frac{ds}{ds_C} = \frac{1}{\varphi'},$$

$$T_C = \cos\varphi T - \sin\varphi B$$

bulunur. Bu ifadenin tekrar türev alınır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$D_{T_C}T_C = \frac{dT_C}{ds}\frac{ds}{ds_C} \quad \Rightarrow D_{T_C}T_C = \frac{d\left(\cos\varphi T - \sin\varphi B\right)}{ds}\frac{ds}{ds_C}$$

$$\Rightarrow D_{T_C}T_C = -\left(\sin\varphi T + \cos\varphi B\right) + \frac{\|W\|}{\varphi'}N$$

olur.Norm alınırsa

$$k_C = \sqrt{1 + \left(\frac{\|W\|}{\varphi'}\right)^2} \qquad (3.3.4)$$

3.4 Küresel Gösterge Eğrilerinin S^2 ye Göre Geodezik Eğrilikleri

S^2 küreye göre (T), (N), (B) küresel gösterge eğrilerinin geodezik eğriliklerini hesaplayabilmek için E^3 deki konneksiyon D, S^2 deki konneksiyon $\bar{D}$, birim normal vektör alanı N olmak üzere

$$\bar{D}_X Y = D_X Y + \langle S(X), Y\rangle N$$

Gauss denklemlerinden yararlanılacaktır.

(T) teğetler göstergesinin S^2 deki geodezik eğriliği γ_T ile gösterilirse,

$$\gamma_T = \left\| \overline{D}_{T_T} T_T \right\|$$

dir. Gauss denkleminden

$$\overline{D}_{T_T} T_T = D_{T_T} T_T + \left\langle S(T_T), T_T \right\rangle T$$

yazılır.

$$S(T_T) = T_T \text{ ve} \left\langle S(T_T), T_T \right\rangle = 1$$

olduğundan

$$\overline{D}_{T_T} T_T = D_{T_T} T_T + T \quad \Rightarrow \overline{D}_{T_T} T_T = -T + \frac{\tau}{\kappa} B + T$$

$$\Rightarrow \overline{D}_{T_T} T_T = \tan \varphi B$$

olur.Her iki tarafın normu alınırsa

$$\gamma_T = \tan \varphi \tag{3.4.1}$$

bulunur.

(N) aslinormaller göstergesinin S^2 deki geodezik eğriliği γ_N ile gösterilirse,

$$\gamma_N = \left\| \overline{D}_{T_N} T_N \right\|$$

dir. Gauss denkleminden

$$\overline{D}_{T_N} T_N = D_{T_N} T_N + \left\langle S(T_N), T_N \right\rangle N$$

yazılır.

$$S(T_N) = T_N \text{ ve} \left\langle S(T_N), T_N \right\rangle = 1$$

olduğundan

$$\overline{D}_{T_N} T_N = D_{T_N} T_N + N \quad \Rightarrow \overline{D}_{T_N} T_N = \left(\frac{\varphi'}{\|W\|} (\sin\varphi T + \cos\varphi B) - N \right) + N$$

$$\Rightarrow \overline{D}_{T_N} T_N = \frac{\varphi'}{\|W\|} (\sin\varphi T + \cos\varphi B)$$

olur.Her iki tarafın normu alınırsa

$$\gamma_N = \frac{\varphi'}{\|W\|} \tag{3.4.2}$$

bulunur.

(B) binormaller göstergesinin S^2 deki geodezik eğriliği γ_B ile gösterilirse,

$$\gamma_B = \left\| \bar{D}_{T_B} T_B \right\|$$

dir. Gauss denkleminden

$$\overline{D}_{T_B} T_B = D_{T_B} T_B + \langle S(T_B), T_B \rangle B$$

yazılır.

$$S(T_B) = T_B \text{ ve} \langle S(T_B), T_B \rangle = 1$$

olduğundan

$$\overline{D}_{T_B} T_B = D_{T_B} T_B + B \Rightarrow \overline{D}_{T_B} T_B = \frac{\kappa}{\tau} T - B + B$$

$$\Rightarrow \overline{D}_{T_B} T_B = \cot\varphi T$$

olur.Her iki tarafın normu alınırsa

$$\gamma_B = \cot\varphi \tag{3.4.3}$$

bulunur.

(C)sabit pol eğrisinin S^2 deki geodezik eğriliği γ_C ile gösterilirse,

$$\gamma_C = \left\| \bar{D}_{T_C} T_C \right\|$$

dir. Gauss denkleminden

$$\bar{D}_{T_C} T_C = D_{T_C} T_C + \left\langle S\left(T_C\right), T_C \right\rangle C$$

yazılır.

$$S\left(T_C\right) = T_C \text{ ve} \left\langle S\left(T_C\right), T_C \right\rangle = 1$$

olduğundan

$$\bar{D}_{T_C} T_C = D_{T_C} T_C + C \Rightarrow \bar{D}_{T_C} T_C = \left(-\sin\varphi T + \frac{\|W\|}{\varphi'} N - \cos\varphi B \right) + \sin\varphi T + \cos\varphi B$$

$$\Rightarrow \bar{D}_{T_C} T_C = \frac{\|W\|}{\varphi'} N$$

olur.Her iki tarafın normu alınırsa

$$\gamma_C = \frac{\|W\|}{\varphi'} \tag{3.4.4}$$

elde edilir.

4.MATERYAL VE YÖNTEM

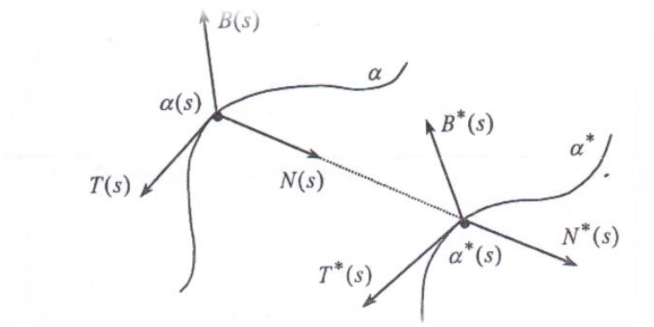
Bu bölümde Öklid uzayında Bertrand eğri çiftleri ile ilgili temel kavramlara yer verildi.

4.1 Öklid Uzayında Bertrand Eğri Çiftleri

Tanım 4.1.1 : $\alpha : I \to E^3$ ve $\alpha^* : I \to E^3$ diferensiyellenebilir iki eğri , bu eğrilerin Frenet 3-ayaklıları sırasıyla $\{T(s), N(s), B(s)\}$ ve $\{T^*(s), N^*(s), B^*(s)\}$ olsun. $\forall s \in I$ için

$$\{N(s), N^*(s)\}$$

lineer bağımlı ise (α, α^*) ikilisine bir Bertrand eğri çifti denir(Hacısalihoğlu 1983).



Şekil 4.1 Bertrand eğri çifti

Teorem 4.1.1: (α, α^*) Bertrand eğri çifti olsun. λ sabit bir sayı olmak üzere α^* eğrisi

$$\alpha^* = \alpha + \lambda N \tag{4.1.1}$$

şeklindedir(Sabuncuoğlu 2006).

İspat: $\alpha : I \to E^3$ birim hızlı bir eğri olsun.Bertrand eğri çifti tanımına göre

$$\alpha^*(s) = \alpha(s) + u(s) N(s) \tag{4.1.2}$$

biçiminde verilebilir.

$$\left(\alpha^*\right)' = \alpha' + u'N + uN' = \alpha' + u'N + u(-\kappa T + \tau B)$$

ve buradan $\left(\alpha^*\right)' = (1-u\lambda)T + u'N + u\tau B$ (4.1.3)

bulunur. $\left(\alpha^*\right)'(s)$ vektörü $T^*(s)$ vektörüne paralel olduğundan

$$\left(\alpha^*\right)' \perp N^*(s)$$

dir. $N^*(s)$ vektörü $N(s)$ vektörüne paralel olduğundan

$$\left(\alpha^*\right)' \perp N(s)$$

olur.Öyleyse

$$\left\langle \left(\alpha^*\right)', N \right\rangle = 0$$

dır. Burada $\left(\alpha^*\right)'$ ın yerine yukarıda bulunan eşiti yazılarak

$$u' = 0$$

$$u = sbt$$

bulunur. $u = \lambda$ alınırsa (4.1.2) ifadesinden

$$\alpha^*(s) = \alpha(s) + \lambda N(s)$$

elde edilir.

Teorem 4.1.2: $\left(\alpha, \alpha^*\right)$ Bertrand eğri çiftinin karşılıklı noktalarındaki birim teğet vektörleri arasındaki açı sabittir (Hacısalihoğlu 1983).

İspat : $\alpha : I \to E^3$ ve $\alpha^* : I \to E^3$ diferensiyellenebilir iki eğri , bu eğrilerin Frenet 3-ayaklıları sırasıyla $\{T(s), N(s), B(s)\}$ ve $\{T^*(s), N^*(s), B^*(s)\}$ olsun. Bu durumda

$$\frac{d}{ds}\left\langle T(s),T^*(s)\right\rangle=\left\langle \frac{dT}{ds},T^*\right\rangle+\left\langle T,\frac{dT^*}{ds^*}.\frac{ds^*}{ds}\right\rangle$$

$$=\left\langle \kappa N,T^*\right\rangle+\frac{ds^*}{ds}\left\langle T,\kappa^* N^*\right\rangle$$

$$=\kappa\left\langle N,T^*\right\rangle+\frac{ds^*}{ds}\kappa^*\left\langle T,N^*\right\rangle$$

yazılabilir. $\left\{N(s),N^*(s)\right\}$ sistemi lineer bağımlı olduğundan

$$\left\langle N,T^*\right\rangle=0 \text{ ve} \left\langle T,N^*\right\rangle=0$$

dır.Bu neticeler yukarıda kullanılırsa

$$\frac{d}{ds}\left\langle T(s),T^*(s)\right\rangle=0$$

bulunur. O halde

$$\left\langle T(s),T^*(s)\right\rangle=sbt$$

dir.Kabul edelim ki $T(s)$ ile $T^*(s)$ arasındaki açı θ olsun. O zaman

$$\left\langle T(s),T^*(s)\right\rangle=\cos\theta=sbt$$

bulunur.Bu ise ispatı tamamlar.

Teorem 4.1.3: $\left(\alpha,\alpha^*\right)$ Bertrand eğri çiftlerinin birim teğet vektörleri arasındaki açı θ olmak üzere Frenet vektörleri arasında

$$\begin{bmatrix} T^* \\ N^* \\ B^* \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}$$

bağıntısı vardır,(Kasap 1996).

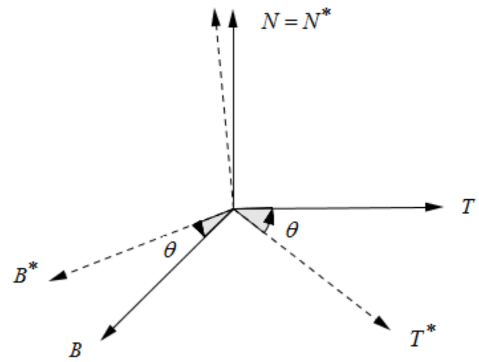
İspat : $\left(\alpha,\alpha^*\right)$ Bertrand eğri çifti olduğundan teğetler arasındaki açı ile binormaller arasındaki açı aynı olur,(şekil 4.2).Bu durumda çatılar arasında

$$T^* = \cos\theta T - \sin\theta B$$

$$N^* = N \tag{4.1.4}$$

$$B^* = \sin\theta T + \cos\theta B$$

bağıntıları yazılabilir. Bu da ispatı tamamlanır.



Şekil 4.2 Bertrand Eğri Çiftinin Frenet Çatılarının Gösterimi

Teorem 4.1.4: (α, α^*) Bertrand eğri çifti olsun. α eğrisinin eğrilikleri κ ve τ ise bunlar arasında

$$\lambda\kappa + \mu\tau = 1,\ \mu = -\lambda\cot\theta \tag{4.1.5}$$

bağıntısı vardır(Hacısalihoğlu 1983).

İspat: α ve α^* eğrilerinin $\alpha(s)$ ve $\alpha^*(s)$ noktalarında Frenet 3-ayaklıları sırasıyla $\{T(s), N(s), B(s)\}$ ve $\{T^*(s), N^*(s), B^*(s)\}$ olsun.Buna göre $T(s)$ ile $T^*(s)$ arasındaki açı θ olmak üzere

$$T^* = \cos\theta T + \sin\theta B$$

yazılabilir. Diğer yandan

$$\alpha^{*\prime} = \frac{ds^*}{ds} T^* = \left(1 - \lambda\kappa\right) T + \lambda\tau B$$

dir. Buradan

$$\begin{cases} \cos\theta = \left(1 - \lambda\kappa\right) \dfrac{ds}{ds^*} \\ \\ \sin\theta = \lambda\tau \dfrac{ds}{ds^*} \end{cases}$$

bulunur. Bu ifade taraf tarafa oranlanırsa

$$\lambda\kappa + \lambda\tau \cot\theta = 1$$

veya $\mu = \lambda \cot\theta$ alınırsa

$$\lambda\kappa + \mu\tau = 1,$$

bulunur.

Teorem 4.1.5: $\left(\alpha, \alpha^*\right)$ Bertrand eğri çifti olsun. α eğrisinin eğrilikleri κ ve τ , α^* eğrisinin eğrilikleri κ^* ve τ^* olmak üzere bu eğrilikler arasında

$$\begin{cases} \kappa^* = \dfrac{\lambda\kappa - \sin^2\theta}{\lambda(1 - \lambda\kappa)}, \\ \\ \tau^* = \dfrac{\sin^2\theta}{\lambda^2\tau} \end{cases} \tag{4.1.6}$$

bağıntısı vardır(Sabuncuoğlu 2006).

İspat: $\left(\alpha, \alpha^*\right)$ Bertrand eğri çifti olsun.

$$T^* = \frac{\left(\alpha^*\right)'}{\left\|\left(\alpha^*\right)'\right\|}$$

olduğundan $\left(\alpha^{*}\right)' = v^{*}T^{*}$ dır.

$(4.1.4)$ eşitliğinden yararlanarak

$$\left(\alpha^{*}\right)' = v^{*}\cos\theta T - v^{*}\sin\theta B$$

bulunur. $(4.1.3)$ eşitliğine göre

$$\left(\alpha^{*}\right)' = (1-u\lambda)T + u'N + u\tau B$$

olduğundan

$$\begin{cases} v^{*}(s)\cos\theta = 1-\lambda\kappa(s) \\ v^{*}(s)\sin\theta = -\lambda\tau(s) \end{cases} \qquad (4.1.7)$$

olur. $\alpha : I \to E^{3}$ eğrisinin yay uzunluğu fonksiyonu f^{*} olmak üzere

$$\left(f^{*}\right)^{-1} = h^{*}$$

olsun. $f^{*}(s) = t$ ise $h^{*}(t) = s$ olur. $f^{*}(I) = J$ olmak üzere $\alpha^{*}oh^{*} : J \to E^{3}$ eğrisi birim hızlı bir eğri olur. $\alpha^{*} = \alpha + \lambda N$ eşitliğinin her iki yanının h^{*} fonksiyonu ile bileşkesi alınarak

$$\alpha^{*}oh^{*} = \alpha oh^{*} + \lambda\left(Noh^{*}\right)$$

$$\alpha oh^{*} = \alpha^{*}oh^{*} - \lambda\left(Noh^{*}\right)$$

elde edilir. $N^{*} = N$ olduğundan bu eşitlik

$$\alpha oh^{*} = \alpha^{*}oh^{*} - \lambda\left(N^{*}oh^{*}\right)$$

şeklinde yazılabilir.Bu durumda αoh^{*} eğrisi ile $\alpha^{*}oh^{*}$ eğrisi Bertrand eğri çifti oluşturur. $\left(\alpha oh^{*}\right)o\left(h^{*}\right)^{-1} = \alpha$ ve α birim hızlı bir eğri olduğundan αoh^{*} eğrisinin yay uzunluğu fonksiyonu h^{*} dir. $f^{*}(s) = t$ olsun.

$$\left(f^{*}\right)'(s)=\left\|\left(f^{*}\right)'(s)\right\|=v^{*}(s)$$

$$\left(h^{*}\right)'(t)=\left\|\left(\alpha o h^{*}\right)'(t)\right\|=v(t)$$

$$\left(h^{*}\right)'(t)=\frac{1}{\left(f^{*}\right)'(s)}=\frac{1}{v^{*}(s)}$$

olduğundan

$$v(t)=\frac{1}{v^{*}(s)}$$

olur.

Şimdi $\alpha o h^{*}$ eğrisi ile $\alpha^{*} o h^{*}$ eğrisinin Bertrand eğri çifti oluşturduğunu göz önüne alarak $(4.1.7)$ eşitliklerinde λ yerine $-\lambda$, θ yerine $-\theta$ yazılırsa

$$v(t)\cos\theta=1+\lambda\kappa^{*1}(t)$$
$$v(t)\sin\theta=-\lambda\tau^{*1}(t)$$

elde edilir.Burada $\kappa^{*1}(t)$ ve $\tau^{*1}(t)$ ile $\alpha^{*} o h^{*}$ birim hızlı eğrisinin eğrilik ve burulması olmak üzere $\kappa^{*1}(t)=\kappa^{*}(s)$ ve $\tau^{*1}(t)=\tau^{*}(s)$ olduğundan

$$\begin{cases} v(t)\cos\theta=1+\lambda\kappa^{*}(s) \\ \\ v(t)\sin\theta=-\lambda\tau^{*}(s) \end{cases} \qquad (4.1.8)$$

olur. $(4.1.7)$ ve $(4.1.8)$ ifadelerindeki birinci eşitliklikler taraf tarafa çarpılırsa

$$\cos^{2}\theta=(1-\lambda\kappa)\left(1+\lambda\kappa^{*}\right)$$

$$\kappa^{*}=\frac{\lambda\kappa-\sin^{2}\theta}{\lambda(1-\lambda\kappa)}$$

elde edilir.Benzer şekilde $(4.1.7)$ ve $(4.1.8)$ ifadelerindeki ikinci eşitlikler taraf tarafa çarpılırsa

$$\sin^2\theta=\lambda^2\tau\tau^*$$

$$\tau^*=\frac{\sin^2\theta}{\lambda^2\tau}$$

elde edilir.

4.2. Tabii Lift Eğrileri ve Geodezik Spraylar İçin Bazı Karakterizasyonlar

Tanım 4.2.1: M , E^{n+1} de bir hiperyüzey ve α da M üzerinde bir parametrik eğri olsun. M üzerinde bir diferansiyellenbilir vektör alanı X olmak üzere ,eğer

$$\frac{d}{ds}=\left(\alpha(s)\right)=X\left(\alpha(s)\right)\ ,\ \forall s\in I$$

ise α ya X in bir **integral eğrisidir** denir.

M nin bir P noktasındaki tangent uzayı T_PM olmak üzere

$$TM=\bigcup_{p\in M}T_PM$$

dir. Burada TM ye M nin vektör alanları uzayıdır,(Çalışkan,Sivridağ,Hacısalihoğlu 1984).

Tanım 4.2.2: $\alpha:I\to M$ herhangi bir parametrik eğri olmak üzere

$$\overline{\alpha}(s)=\left(\alpha(s),\alpha'(s)\right)=\alpha'(s)\big|\alpha(s) \qquad (4.2.1)$$

ile verilen $\overline{\alpha}:I\to M$ parametrik eğrisine α nin TM deki **tabii lifti** denir.

Böylece E^{n+1} deki konneksiyonu D olmak üzere

$$\frac{d\overline{\alpha}}{ds}=\frac{d}{ds}\left(\alpha'(s)\right)\big|\alpha(s)=D_{\alpha'(s)}\alpha'(s) \qquad (4.2.2)$$

yazabiliriz,(Çalışkan,Sivridağ,Hacısalihoğlu 1984).

Tanım 4.2.3: $v\in TM$ için

$$X(v)=-\langle v,S(v)\rangle \mathrm{N}\big|_P \qquad (4.2.3)$$

şeklinde tanımlanan $X\in TM$ vektör alanına **geodezik spray** denir,(Çalışkan,Sivridağ,Hacısalihoğlu 1984).

Teorem 4.2.1. $\alpha : I \to M$ eğrisinin $\overline{\alpha} : I \to TM$ tabii lifti, X geodezik sprayının bir integral eğrisi olması için gerek ve yeter şart M üzerinde bir geodezik eğri olmasıdır,(Çalışkan, Sivridağ, Hacısalihoğlu 1984).

İspat: $\Rightarrow$ X geodezik sprayın bir integral eğrisi olsun.Bu durumda

$$X\left(\overline{\alpha}(t)\right) = \frac{d}{dt}\left(\overline{\alpha}(t)\right)\Big|_{\alpha(t)}$$

olur. X , $\chi(M)$ üzerinde bir geodezik spray olduğundan

$$X\left(\overline{\alpha}(t)\right) = -\left\langle \overline{\alpha}(t), S\left(\overline{\alpha}(t)\right)\right\rangle N\Big|_{\alpha(t)}$$

yazılır.Tabii lift tanımından

$$\frac{d}{dt}\left(\dot{\alpha}(t)\big|_{\alpha(t)}\right) = -\left\langle \dot{\alpha}(t)\big|_{\alpha(t)}, S\left(\dot{\alpha}(t)\big|_{\alpha(t)}\right)\right\rangle \frac{d}{dt} N\Big|_{\alpha(t)}$$

bulunur.Bu son eşitlik bütün $\alpha(t)$ ler için doğru olduğundan ve

$$\frac{d\overline{\alpha}}{ds} = D_{\alpha'(s)}\left(\alpha'(s)\right)$$

eşitliği de göz önüne alındığında

$$D_{\dot{\alpha}(t)}\dot{\alpha}(t) = -\left\langle \dot{\alpha}(t), S\left(\dot{\alpha}(t)\right)\right\rangle N$$

olur.Gauss denkleminden

$$\overline{D}_{\dot{\alpha}(t)}\dot{\alpha}(t) = 0$$

bulunur.Böylece α nın M üzerinde bir geodezik olduğu görülür.

$\Leftarrow$ α , M üzerinde bir geodezik olsun.Bu durumda

$$\overline{D}_{\dot{\alpha}(t)}\dot{\alpha}(t) = 0$$

olur.Gauss denkleminden

$$D_{\dot{\alpha}(t)}\dot{\alpha}(t)\Big|_{\alpha(t)} + \left\langle \dot{\alpha}(t), S\left(\dot{\alpha}(t)\right)\right\rangle N\Big|_{\alpha(t)} = 0$$

yazılır. X bir geodezik spray olduğundan

$$\frac{d}{dt}\left(\dot{\alpha}(t)\big|_{\alpha(t)}\right) - X\left(\dot{\alpha}(t)\right)\Big|_{\alpha(t)} = 0,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\dot{\alpha}(t)\big|_{\alpha(t)}\right) = X\left(\dot{\alpha}(t)\right)\Big|_{\alpha(t)}$$

olur.Tabii lift tanımından

$$\frac{d}{dt}\left(\overline{\alpha}(t)\right)\Big|_{\alpha(t)} = X\left(\overline{\alpha}(t)\right)$$

bulunur ki bu da ispatı tamamlar.

Bir α eğrisinin (T) teğetler göstergesinin tabii lifti $(\overline{T})$ olmak üzere bu eğrinin geodezik sprayın bir integral eğrisi olması için

$$\overline{D}_{\dot{\alpha}_T}\dot{\alpha}_T = 0$$

dır.Gauss denkleminden

$$D_{\dot{\alpha}_T}\dot{\alpha}_T + \left\langle \dot{\alpha}_T, S\left(\dot{\alpha}_T\right)\right\rangle T(s) = 0$$

yazılır.Birim küre için $S = I_2$ olduğundan

$$D_{\dot{\alpha}_T}\dot{\alpha}_T + \left\|\dot{\alpha}_T\right\|^2 T(s) = 0 \Rightarrow D_{\dot{\alpha}_T}\kappa N + \kappa^2 T(s) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{ds_T}(\kappa N) + \kappa^2 T(s) = 0$$

$$\Rightarrow \left(\kappa^2 - \kappa\right)T + \left(\frac{\kappa'}{\kappa}\right)N - \tau B = 0$$

bulunur. $\overline{D}_{\dot{\alpha}_T}\dot{\alpha}_T = 0$ olması için

$$\begin{cases} \kappa^2 - \kappa = 0, & (\kappa = 0,1) \\ \dfrac{\kappa'}{\kappa} = 0 \quad , & (\kappa = sbt, \kappa \neq 0) \\ \tau = 0 & \end{cases}$$

olmalıdır. Böylece aşağıdaki sonuç verilebilir:

Sonuç 4.2.1. α eğrisi bir birim çember ise α nın teğetler göstergesi birim küre yüzeyi üzerinde bir büyük çemberdir. Bu durumda, $(\overline{T})$ tabii lifti $T\left(S^2\right)$ tanjant demeti üzerinde geodezik sprayın bir integral eğrisidir,(Çalışkan,Sivridağ,Hacısalihoğlu 1984).

Bir α eğrisinin (N) asli normaller göstergesinin tabii lifti $(\overline{N})$ olmak üzere bu eğrinin geodezik sprayın bir integral eğrisi olması için

$$\overline{D}_{\dot{\alpha}_N}\dot{\alpha}_N = 0$$

dır.Gauss denkleminden

$$D_{\dot{\alpha}_N}\dot{\alpha}_N + \langle \dot{\alpha}_N, S(\dot{\alpha}_N)\rangle N(s) = 0 \Rightarrow D_{\dot{\alpha}_N}\dot{\alpha}_N + \|\dot{\alpha}_N\|^2 N(s) = 0$$

$$\Rightarrow D_{\dot{\alpha}_N}(-\kappa T + \tau B) + (\kappa^2 + \tau^2) N(s) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{ds_N}(-\kappa T + \tau B) + \left(\|W\|^2\right) N(s) = 0$$

$$\Rightarrow -\kappa T + \left(\|W\|^3 - \|W\|^2\right) N + \tau B = 0$$

bulunur. $\overline{D}_{\dot{\alpha}_N}\dot{\alpha}_N = 0$ olması için

$$\begin{cases} \kappa' = 0 \quad , \quad (\kappa = sbt) \\ \tau' = 0 \quad , \quad (\tau = sbt) \\ \kappa = \tau = 0 \quad \text{veya} \quad \kappa^2 + \tau^2 = 1 \end{cases}$$

olmalıdır. Böylece aşağıdaki sonuç verilebilir:

Sonuç 4.2.2. α eğrisi bir dairesel helis ise α nın asli normaller göstergesi, birim küre yüzeyi üzerinde bir büyük çemberdir. Bu durumda, $(\overline{N})$ tabii lifti $T(S^2)$ tanjant demeti üzerinde geodezik sprayın bir integral eğrisidir,(Çalışkan,Sivridağ,Hacısalihoğlu 1984).

Bir α eğrisinin (B) teğetler göstergesinin tabii lifti $(\overline{B})$ olmak üzere bu eğrinin geodezik sprayın bir integral eğrisi olması için

$$\overline{D}_{\dot{\alpha}_B}\dot{\alpha}_B = 0$$

dır.Gauss denkleminden

$$D_{\dot{\alpha}_B}\dot{\alpha}_B + \langle \dot{\alpha}_B, S(\dot{\alpha}_B) \rangle B(s) = 0$$

$$\frac{d}{ds_B}(\dot{\alpha}_B) + \|\dot{\alpha}_B\|^2 B(s) = 0$$

bulunur.Türev alınırsa ,

$$\kappa T + \left(\frac{\tau'}{\tau}\right) N + \left(\tau^2 - \tau\right) B = 0$$

bulunur. $\overline{D}_{\dot{\alpha}_B}\dot{\alpha}_B = 0$ olması için

$$\begin{cases} \kappa = 0 \\ \dfrac{\tau'}{\tau} = 0 \\ \tau^2 - \tau = 0 \end{cases}$$

olmalıdır. Böylece aşağıdaki sonuç verilebilir:

Sonuç 4.2.3: (B) binormaller göstergesi, birim küre üzerinde bir büyük çember olacak şekilde herhangi bir α eğrisi yoktur. Bu durumda, $(\overline{B})$ tabii lifti $T(S^2)$ tanjant demeti üzerinde geodezik sprayın bir integral eğrisi olamaz,(Çalışkan,Sivridağ,Hacısalihoğlu 1984).

Bir α eğrisinin (C) teğetler göstergesinin tabii lifti $(\overline{C})$ olmak üzere bu eğrinin geodezik sprayın bir integral eğrisi olması için

$$\overline{D}_{\dot{\alpha}_C}\dot{\alpha}_C = 0$$

dır.Gauss denkleminden

$$D_{\dot{\alpha}_C}\dot{\alpha}_C + \langle \dot{\alpha}_C, S(\dot{\alpha}_C) \rangle C(s) = 0$$

$$\frac{d}{ds_C}(\dot{\alpha}_C) + \|\dot{\alpha}_C\|^2 C(s) = 0$$

bulunur. $C = \sin\theta T + \cos\theta B$ olduğu dikkate alınır ve türev alınırsa ,

$$\left(\theta''\cos\theta-\theta'^2\sin\theta+\theta'^3\sin\theta\right)T+\left(\kappa\theta'\cos\theta+\theta'\sin\theta\right)N$$

$$+\left(\theta''\sin\theta-\theta'^2\cos\theta+\theta'^3\cos\theta\right)B=0$$

bulunur. $\overline{D}_{\dot{\alpha}_B}\dot{\alpha}_B=0$ olması için

$$\begin{cases}\theta''\cos\theta-\theta'^2\sin\theta+\theta'^3\sin\theta=0,\\ \kappa\theta'\cos\theta+\theta'\sin\theta=0,\\ \theta''\sin\theta-\theta'^2\cos\theta+\theta'^3\cos\theta=0\end{cases}$$

olmalıdır. Bu son denklemler $\theta'=0$ veya $\kappa=\tau=0$ olduğunu gösterir.Böylece aşağıdaki sonuç verilebilir:

Sonuç 4.2.4: α eğrisi bir helis ise (C) sabit pol eğrisi birim küre üzerinde bir büyük çemberdir. Bu durumda, $(\overline{C})$ tabii lifti $T(S^2)$ tanjant demeti üzerinde geodezik sprayın bir integral eğrisidir,(Çalışkan,Sivridağ,Hacısalihoğlu 1984).

5.BULGULAR

Bu bölüm çalışmamızın orijinal kısmını oluşturmaktadır.Burada (α,α^*) Bertrand eğri çiftlerinin küresel gösterge eğrileri ile sabit pol eğrisinin yay uzunlukları, E^3 ve S^2 ye göre geodezik eğrilikleri hesaplanarak bunlar arasındaki bağıntılar bulundu. Ayrıca α^* eğrisinin küresel göstergelerinin tabii liftlerinin geodezik spray için integral eğrisi olma şartı α eğrisine bağlı olarak ifade edildi.

5.1.1 $(T^*),(N^*),(B^*)$ Küresel Gösterge Eğrileri ile (C^*) Sabit Pol Eğrisinin Yay Uzunlukları

Teorem 5.1.1: (α,α^*) Bertrand eğri çifti ve bu eğrilerin Darboux vektörleri sırasıyla W ve W^* olsun.Bu vektörler arasında

$$W^* = -\frac{\sin\theta}{\lambda\tau}\cdot W \tag{5.1.1}$$

bağıntısı vardır.

İspat: α ve α^* vektörünün Darboux vektörleri

$$W = \tau T + \kappa B \text{ ve } W^* = \tau^* T^* + \kappa^* B^*$$

olur.Burada T^*, B^*, κ^* ve τ^* yerine $(4.1.4)$ ve $(4.1.6)$ daki karşılıkları yazılırsa

$$W^* = \tau^*(\cos\theta T - \sin\theta B) + \kappa^*(\sin\theta T + \cos\theta B)$$

$$= (\tau^*\cos\theta + \kappa^*\sin\theta)T + (\kappa^*\cos\theta - \tau^*\sin\theta)B$$

$$= \left(\frac{\sin^2\theta}{\lambda^2\tau}\cos\theta + \frac{\sin^2\theta - \lambda\kappa}{\lambda^2\tau}\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\sin\theta\right)T +$$

$$\left(\frac{\sin^2\theta-\lambda\kappa}{\lambda^2\tau}\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\cos\theta-\frac{\sin^2\theta}{\lambda^2\tau}\sin\theta\right)B$$

$$=\frac{\sin^2\theta}{\lambda^2\tau}\left(\cos\theta+\frac{\sin^2\theta-\lambda\kappa}{\cos\theta}\right)T+\frac{\sin\theta}{\lambda^2\tau}\left(\sin^2\theta-\lambda\kappa-\sin^2\theta\right)B$$

$$=\frac{\sin^2\theta}{\lambda^2\tau}\left(\frac{\cos^2\theta+\sin^2\theta-\lambda\kappa}{\cos\theta}\right)T+\frac{\sin\theta}{\lambda^2\tau}\left(-\lambda\kappa\right)B$$

$$=\frac{\sin^2\theta}{\lambda^2\tau}\left(\frac{1-\lambda\kappa}{\cos\theta}\right)T-\frac{\sin\theta}{\lambda\tau}\kappa B$$

$$=\frac{\sin^2\theta}{\lambda^2\tau}\left(\frac{1-\lambda\kappa}{\cos\theta}\right)T-\frac{\sin\theta}{\lambda\tau}\left(W-\tau T\right)$$

$$=\frac{\sin\theta}{\lambda\tau}\left(\frac{\sin\theta}{\lambda}\frac{1-\lambda\kappa}{\cos\theta}T-W+\tau T\right)$$

$$=\frac{\sin\theta}{\lambda\tau}\left[\left(\frac{1-\lambda\kappa}{\lambda}\tan\theta+\tau\right)T-W\right]$$

$$=\frac{\sin\theta}{\lambda\tau}\left[\left(\frac{-\lambda\tau\cot\theta}{\lambda}\tan\theta+\tau\right)T-W\right]$$

$$W^*=-\frac{\sin\theta}{\lambda\tau}W$$

bulunur.

Sonuç 5.1.1: $\left(\alpha,\alpha^*\right)$ Bertrand eğri çiftinin Darboux vektörleri yönündeki birim vektörler C ve C^* ise bunlar arasında

$$C^*=-C \qquad (5.1.2)$$

bağıntısı vardır.

İspat : α^* eğrisinin Darboux yönündeki birim vektörü C^* ile gösterilirse

$$C^* = \frac{W^*}{\|W^*\|}$$

yazılır. W^* ın yerine $(5.1.1)$ den karşılığı yazılırsa

$$C^* = \frac{-\dfrac{\sin\theta}{\lambda\tau}W}{\dfrac{\sin\theta}{\lambda\tau}\|W\|},$$

$$C^* = -\frac{W}{\|W\|},$$

$$C^* = -C$$

elde edilir.

(T^*) teğetler göstergesinin yay uzunluğu s_{T^*} ile gösterilirse $(3.1.1)$ bağıntısından

$$s_{T^*} = \int_0^S \left\|\frac{dT^*}{ds}\right\| ds$$

dır. $(4.1.4)$ bağıntısından T^* ın türevi alınırsa

$$\frac{dT^*}{ds} = (\kappa\cos\theta + \tau\sin\theta)N$$

olur. Norm alınırsa

$$s_{T^*} = \int_0^S (\kappa\cos\theta + \tau\sin\theta)ds$$

$$s_{T^*} = \cos\theta\int_0^S \kappa ds + \sin\theta\int_0^S \tau ds$$

bulunur. $(3.2.1)$ ve $(3.2.3)$ bağıntısı dikkate alınır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$s_{T^*} = \cos\theta\cdot s_T + \sin\theta\cdot s_B \qquad (5.1.3)$$

bulunur.

$\left(N^*\right)$ aslinormaller göstergesinin yay uzunluğu s_{N^*} ile gösterilirse

$$s_{N^*} = \int_0^S \left\| \frac{dN^*}{ds} \right\| ds$$

dır. $(4.1.4)$ bağıntısından N^* ile N lineer bağımlı olduğundan

$$s_{N^*} = s_N \qquad (5.1.4)$$

olur.

$\left(B^*\right)$ binormaller göstergesinin yay uzunluğu s_{B^*} ile gösterilirse

$$s_{B^*} = \int_0^S \left\| \frac{dB^*}{ds} \right\| ds$$

dır. $(4.1.4)$ bağıntısından B^* ın türevi alınırsa

$$\frac{dB^*}{ds} = \left(\kappa \sin\theta - \tau \cos\theta\right) N$$

olur.Norm alınırsa

$$s_{B^*} = \int_0^S \left(\kappa \sin\theta - \tau \cos\theta\right) ds$$

veya

$$s_{B^*} = \sin\theta \int_0^S \kappa ds - \cos\theta \int_0^S \tau ds$$

bulunur. $(3.2.1)$ ve $(3.2.3)$ bağıntısı dikkate alınır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$s_{B^*} = \sin\theta \cdot s_T - \cos\theta \cdot s_B \qquad (5.1.5)$$

elde edilir.

$\left(C^*\right)$ sabit pol eğrisinin yay uzunluğu s_{C^*} ile gösterilirse $(3.1.1)$ bağıntısından

$$s_{C^*} = \int_0^s \left\| \frac{dC^*}{ds} \right\| ds$$

yazılır.

$$C^* = \sin\varphi^* T^* + co\varphi^* B^*$$

ifadesinin türevi alınırsa

$$\frac{dC^*}{ds} = \left(\left(\varphi^*\right)' \cos\varphi^* T^* - \left(\varphi^*\right)' \sin\varphi^* B^* \right) + \left(\kappa^* \sin\varphi^* - \tau^* \cos\varphi^* \right) N$$

$$= \left(\left(\varphi^*\right)' \cos\varphi^* T^* - \left(\varphi^*\right)' \sin\varphi^* B^* \right) + \left(\kappa^* \frac{\tau^*}{\left\|W^*\right\|} - \tau^* \frac{\kappa^*}{\left\|W^*\right\|} \right) N$$

$$= \left(\varphi^*\right)' \left(\cos\varphi^* T^* - \sin\varphi^* B^* \right)$$

olur.Norm alınırsa

$$s_{C^*} = \int_0^s \left(\varphi^*\right)' .ds \qquad (5.1.6)$$

bulunur. Diğer yandan

$$\left. \begin{aligned} \sin\varphi^* &= \frac{\tau^*}{\left\|W^*\right\|} \\ \cos\varphi^* &= \frac{\kappa^*}{\left\|W^*\right\|} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \tan\varphi^* = \frac{\tau^*}{\kappa^*}$$

olur. τ^* ve κ^* ın yerine $(4.1.6)$ daki karşılıkları yazılır ve sonra da türev alınırsa

$$\left(\varphi^*\right)' = \frac{\lambda\kappa' \cdot \sin\theta\cos\theta}{\lambda^2\kappa^2 + (1-2\lambda\kappa)\sin^2\theta} \tag{5.1.7}$$

bulunur. Bu ifade $(5.1.6)$ de yerine yazılırsa

$$s_{C^*} = \int_0^s \frac{\lambda\kappa' \cdot \sin\theta\cos\theta}{\lambda^2\kappa^2 + (1-2\lambda\kappa)\sin^2\theta}.ds \tag{5.1.8}$$

olur.Böylece şu sonuç verilebilir:

Sonuç5.1.1: (α,α^*) Bertrand eğri çifti olsun. α^* eğrisinin (T^*),(N^*) ve (B^*) küresel gösterge eğrileri ile (C^*) sabit pol eğrisinin göre yay uzunlukları

1. $s_{T^*} = \cos\theta s_T + \sin\theta s_B,$

2. $s_{N^*} = s_N,$

3. $s_{B^*} = \sin\theta s_T - \cos\theta s_B,$

4. $s_{C^*} = \displaystyle\int_0^s \frac{\lambda\kappa' \cdot \sin\theta\cos\theta}{\lambda^2\kappa^2 + (1-2\lambda\kappa)\sin^2\theta} ds.$

şeklinde verilir.

5.1.2 (T^*),(N^*) ve (B^*) Küresel Gösterge Eğrileri ile (C^*) Sabit Pol Eğrisinin E^3 e Göre Geodezik Eğrilikleri

(T^*) teğetler göstergesinin E^3 e göre geodezik eğriliği k_{T^*} ile gösterilsin. (T^*) nin yay parametresi s_{T^*} ve birim teğet vektörü T_{T^*} olmak üzere geodezik eğrilik

$$k_{T^*} = \left\| D_{T_{T^*}} T_{T^*} \right\|$$

şeklinde yazılır. $\alpha_{T^*}\left(s_{T^*}\right) = T^*(s)$ ifadesinin s_{T^*} ye göre türevi alınırsa

$$T_{T^*} = \left(\kappa\cos\theta + \tau\sin\theta\right) N \frac{ds}{ds_{T^*}}$$

olur. Norm alınırsa

$$\frac{ds}{ds_{T^*}} = \frac{1}{\kappa\cos\theta + \tau\sin\theta}$$

bulunur ve bu değer yukarıda yerine yazılırsa

$$T_{T^*} = N$$

olur.Tekrar türev alınır ve gerekli işlemler yapılırsa,

$$D_{T_{T^*}} T_{T^*} = \frac{dT_{T^*}}{ds}\frac{ds}{ds_{T^*}},$$

$$D_{T_{T^*}} T_{T^*} = \frac{-\kappa T + \tau B}{\kappa\cos\theta + \tau\sin\theta} \qquad (5.1.9)$$

olur.Norm alınırsa geodezik eğrilik

$$k_{T^*} = \frac{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}{\kappa\cos\theta + \tau\sin\theta} \qquad (5.1.10)$$

şeklinde bulunur. Bu ifade

$$k_{T^*} = \frac{1}{\frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\cos\theta + \frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\sin\theta}$$

şeklinde yazılırsa ve $(3.1.4)$ bağıntısından

$$k_{T^*} = \frac{1}{\cos\varphi\cdot\cos\theta + \sin\varphi\cdot\sin\theta}$$

olur. Burada $(3.3.1)$ ve $(3.3.3)$ bağıntıları yerine yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$k_{T^*}=\frac{k_T\cdot k_B}{k_B\cdot\cos\theta+k_T\cdot\sin\theta} \tag{5.1.11}$$

bulunur.

(N^*) aslinormaller göstergesinin E^3 e göre geodezik eğriliği k_{N^*} ile gösterilsin. (N^*) nin yay parametresi s_{N^*} ve birim teğet vektörü T_{N^*} olmak üzere geodezik eğrilik

$$k_{N^*}=\left\|D_{T_{N^*}}T_{N^*}\right\| \tag{5.1.12}$$

yazılır. $\alpha_{N^*}\left(s_{N^*}\right)=N^*(s)$ ifadesinin s_{N^*} ye göre türevi alınırsa

$$T_{N^*}=(-\kappa T+\tau B)\frac{ds}{ds_{N^*}}$$

olur.Norm alınırsa

$$\frac{ds}{ds_{N^*}}=\frac{1}{\|W\|}=\frac{1}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}$$

bulunur.Bu değer yukarıda yerine yazılırsa

$$T_{N^*}=\frac{-\kappa}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}T+\frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}B,$$

veya

$$T_{N^*}=-\cos\varphi T+\sin\varphi B$$

olur. Tekrar türev alınır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$D_{T_{N^*}}T_{N^*}=\frac{dT_{N^*}}{ds}\frac{ds}{ds_{N^*}}$$

$$= \frac{\left[\varphi' \sin\varphi T + \varphi' \cos\varphi B - \left(\kappa\cos\varphi + \tau\sin\varphi\right)N\right]}{\|W\|}$$

$$= \frac{\left[\varphi' \sin\varphi T + \varphi' \cos\varphi B - \left(\kappa\frac{\kappa}{\|W\|} + \tau\frac{\tau}{\|W\|}\right)N\right]}{\|W\|}$$

$$= \frac{\left[\varphi' \sin\varphi T + \varphi' \cos\varphi B - \|W\| N\right]}{\|W\|}$$

$$D_{T_{N^*}} T_{N^*} = \left[\frac{\varphi' \sin\varphi T + \varphi' \cos\varphi B}{\|W\|} - N\right] \qquad (5.1.13)$$

bulunur. Bu ifadenin normu alınırsa geodezik eğrilik

$$k_{N^*} = k_N = \sqrt{\left(\frac{\varphi'}{\|W\|}\right)^2 + 1} \qquad (5.1.14)$$

bulunur.Diğer yandan

$$\left.\begin{aligned} \sin\varphi &= \frac{\tau}{\|W\|} \\ \cos\varphi &= \frac{\kappa}{\|W\|} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \tan\varphi = \frac{\tau}{\kappa}$$

olur ve her iki tarafın türevi alınırsa

$$\varphi' = \frac{\tau'\kappa - \kappa'\tau}{\|W\|^2} \qquad (5.1.15)$$

bulunur ve bu değer yukarıda yerine yazılırsa

$$k_{N^*} = k_N = \sqrt{\left(\frac{\tau'\kappa - \kappa'\tau}{\|W\|^3}\right)^2 + 1}$$

elde edilir.

$\left(B^*\right)$aslinormaller göstergesinin E^3 e göre geodezik eğriliği k_{B^*} ile gösterilsin. $\left(B^*\right)$ nin yay parametresi s_{B^*} ve birim teğet vektörü T_{B^*} olmak üzere geodezik eğrilik

$$k_{B^*} = \left\| D_{T_{B^*}} T_{B^*} \right\| \tag{5.1.16}$$

yazılır. $\alpha_{B^*}\left(s_{B^*}\right) = B^*(s)$ ifadesinin s_{B^*} ye göre türevi alınırsa

$$T_{B^*} = \left(\kappa \sin\theta - \tau\cos\theta\right) N \cdot \frac{ds}{ds_{B^*}}$$

olur. Norm alınırsa

$$\frac{ds}{ds_{B^*}} = \frac{1}{\kappa\sin\theta - \tau\cos\theta}$$

Bulunur. Bu değer yukarıda yerine yazılırsa

$$T_{B^*} = N$$

olur. Tekrar türev alınır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$D_{T_{B^*}} T_{B^*} = \frac{dT_{B^*}}{ds_{B^*}} = \frac{dT_{B^*}}{ds}\frac{ds}{ds_{B^*}},$$

$$= \frac{dN}{ds}\frac{ds}{ds_{B^*}}$$

$$= \frac{-\kappa T + \tau B}{\kappa \sin\theta - \tau \cos\theta} \tag{5.1.17}$$

bulunur.Bu ifadenin normu alınırsa geodezik eğrilik

$$k_{B^*} = \left\| \frac{-\kappa T + \tau B}{\kappa \sin\theta - \tau \cos\theta} \right\|,$$

$$k_{B^*} = \frac{\|W\|}{\kappa \sin\theta - \tau \cos\theta},$$

$$k_{B^*} = \frac{1}{\frac{\kappa}{\|W\|} \sin\theta - \frac{\tau}{\|W\|} \cos\theta},$$

$$k_{B^*} = \frac{1}{\cos\varphi \cdot \sin\theta - \sin\varphi \cdot \cos\theta}$$

olur .Burada $(3.3.1)$ ve $(3.3.3)$ bağıntısı dikkate alınır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$k_{B^*} = \frac{k_T \cdot k_B}{k_B \cdot \sin\theta - k_T \cdot \cos\theta}$$

elde edilir.

(C^*) aslinormaller göstergesinin E^3 e göre geodezik eğriliği k_{C^*} ile gösterilsin. (C^*) nin yay parametresi s_{C^*} ve birim teğet vektörü T_{C^*} olmak üzere geodezik eğrilik

$$k_{C^*} = \left\| D_{T_{C^*}} T_{C^*} \right\| \tag{5.1.18}$$

dır. $\alpha_{C^*}(s_{C^*}) = C^*(s)$ ifadesinin s_{C^*} ye göre türevi alınırsa

$$T_{C^*}=\left[\left(\varphi^*\right)'\left(\cos\varphi^* T^*-\sin\varphi^* B^*\right)\right]\frac{ds}{ds_{C^*}}$$

olur. Norm alınırsa

$$\frac{ds}{ds_{c^*}}=\frac{1}{\left(\varphi^*\right)'}$$

bulunur ve bu değer yukarıda yerine yazılırsa

$$T_{C^*}=\cos\varphi^* T^*-\sin\varphi^* B^*$$

olur. Tekrar türev alınır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$D_{T_{C^*}}T_{C^*}=\frac{dT_{C^*}}{ds_{C^*}}=\frac{dT_{C^*}}{ds}\frac{ds}{ds_{C^*}}$$

$$D_{T_{C^*}}T_{C^*}=\left[-\left(\varphi^*\right)'\left(\sin\varphi^* T^*+\cos\varphi^* B^*\right)+\left(\kappa^*\cos\varphi^*+\tau^*\sin\varphi^*\right)N^*\right]\frac{1}{\left(\varphi^*\right)'}$$

$$D_{T_{C^*}}T_{C^*}=-\left(\sin\varphi^* T^*+\cos\varphi^* B^*\right)+\frac{\left\|W^*\right\|}{\left(\varphi^*\right)'}N, \qquad (5.1.19)$$

Bulunur.Bu ifadenin normu alınırsa geodezik eğrilik

$$k_{C^*}=\left\|-\left(\sin\varphi^* T^*+\cos\varphi^* B^*\right)+\frac{\left\|W^*\right\|}{\left(\varphi^*\right)'}N\right\|,$$

$$k_{C^*} = \sqrt{1+\left(\frac{\|W^*\|}{(\varphi^*)'}\right)^2}$$

olur. W^* ve $(\varphi^*)'$ ın yerine $(5.1.1)$ ve $(5.1.7)$ dan karşılıkları yazılır ve gerekli işlemle yapılırsa

$$k_{C^*} = \sqrt{\frac{(\kappa^2+\tau^2)\left[\lambda^2\kappa^2+(1-2\lambda\kappa)\sin^2\theta\right]^2}{(\lambda^2\tau\kappa')^2}+1} \tag{5.1.20}$$

bulunur. Buna göre şu sonuç verilebilir:

Sonuç 5.1.2. (α,α^*) Bertrand eğri çifti olsun. α^* eğrisinin küresel gösterge eğrileri ile sabit pol eğrisinin E^3 e göre geodezik eğrilikleri

1. $$k_{T^*} = \frac{k_T k_B}{k_B\cos\theta + k_T\sin\theta}$$

2. $$k_{N^*} = k_N = \sqrt{\left(\frac{\tau'\kappa-\kappa'\tau}{\|W\|^3}\right)^2+1}$$

3. $$k_{B^*} = \frac{k_T k_B}{k_B\sin\theta - k_T\cos\theta}$$

4. $$k_{C^*} = \sqrt{\frac{(\kappa^2+\tau^2)(\lambda^2\kappa^2+(1-2\lambda\kappa)\sin^2\theta)^2}{(\lambda^2\tau\kappa')^2}+1}$$

denklemleri ile verilir.

5.1.3 $(T^*),(N^*),(B^*)$ Küresel Gösterge Eğrileri ile (C^*) Sabit Pol Eğrisinin S^2 ye Göre Geodezik Eğriliği

$\left(T^*\right)$ teğetler göstergesinin S^2 ye göre geodezik eğriliği γ_{T^*} ile gösterilirse $(3.1.11)$ bağıntısından

$$\gamma_{T^*} = \left\| \overline{D}_{T_{T^*}} T_{T^*} \right\|$$

dır. $(3.1.7)$ bağıntısındaki Gauss denkleminden

$$\overline{D}_{T_{T^*}} T_{T^*} = D_{T_{T^*}} T_{T^*} + \left\langle S\left(T_{T^*}\right), T_{T^*} \right\rangle T^*,$$

$$\overline{D}_{T_{T^*}} T_{T^*} = D_{T_{T^*}} T_{T^*} + T^*,$$

bulunur. $D_{T_{T^*}} T_{T^*}$ ın yerine $(5.1.9)$ dan değeri yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$\overline{D}_{T_{T^*}} T_{T^*} = \left(\frac{-\kappa}{\kappa\cos\theta + \tau\sin\theta} + \cos\theta \right) T + \left(\frac{\tau}{\kappa\cos\theta + \tau\sin\theta} - \sin\theta \right) B \qquad (5.1.21)$$

bulunur.Norm alınırsa

$$\gamma_{T^*} = \left\| \left(\frac{-\kappa}{\kappa\cos\theta + \tau\sin\theta} + \cos\theta \right) T + \left(\frac{\tau}{\kappa\cos\theta + \tau\sin\theta} - \sin\theta \right) B \right\|,$$

$$\gamma_{T^*} = \sqrt{\frac{\kappa^2 + \tau^2}{\left(\kappa\cos\theta + \tau\sin\theta\right)^2} - 1}$$

olur.Burada $(3.3.1)$ ve $(3.3.3)$ bağıntısı dikkate alınır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$\gamma_{T^*} = \sqrt{\left(\frac{k_T k_B}{k_B\cos\theta + k_T\sin\theta} \right)^2 - 1} \qquad (5.1.22)$$

bulunur.

$\left(N^*\right)$ aslinormaller göstergesinin S^2ye göre geodezik eğriliği γ_{N^*} ile gösterilirse $(3.1.11)$ bağıntısından

$$\gamma_{N^*} = \left\| \overline{D}_{T_{N^*}} T_{N^*} \right\|$$

dır. $(3.1.7)$ bağıntısındaki Gauss denkleminden

$$\overline{D}_{T_{N^*}} T_{N^*} = D_{T_{N^*}} T_{N^*} + \left\langle S\left(T_{N^*}\right), T_{N^*} \right\rangle N^*,$$

$$\overline{D}_{T_{N^*}} T_{N^*} = D_{T_{N^*}} T_{N^*} + N^*$$

bulunur. $D_{T_{N^*}} T_{N^*}$ ın yerine $(5.1.13)$ deki karşılığı yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$\overline{D}_{T_{N^*}} T_{N^*} = \frac{\varphi'\left(\sin\varphi T + \cos\varphi B\right)}{\|W\|} \qquad (5.1.23)$$

bulunur.Norm alınırsa

$$\gamma_{N^*} = \left\| \frac{\varphi'\left(\sin\varphi T + \cos\varphi B\right)}{\|W\|} \right\|,$$

$$\gamma_{N^*} = \frac{\varphi'}{\|W\|}$$

Olur. φ' ın yerine $(5.1.15)$. deki karşılığı yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$\gamma_{N^*} = \gamma_N = \frac{\tau'\kappa - \kappa'\tau}{\|W\|^3} \tag{5.1.24}$$

elde edilir.

(B^*)binormaller göstergesinin S^2ye göre geodezik eğriliği γ_{B^*} ile gösterilirse $(3.1.11)$ bağıntısından

$$\gamma_{B^*} = \left\| \overline{D}_{T_{B^*}} T_{B^*} \right\|$$

dır.$(3.1.7)$bağıntısındaki Gauss denkleminden

$$\overline{D}_{T_{B^*}} T_{B^*} = D_{T_{B^*}} T_{B^*} + \left\langle S\left(T_{B^*}\right), T_{B^*} \right\rangle B^*,$$

$$\overline{D}_{T_{B^*}} T_{B^*} = D_{T_{B^*}} T_{B^*} + B^*.$$

bulunur. $D_{T_{B^*}} T_{B^*}$ ın yerine $(5.1.17)$ deki karşılığı yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$\overline{D}_{T_{B^*}} T_{B^*} = \left(\frac{-\kappa}{\kappa\cos\theta - \tau\sin\theta} + \sin\theta \right) T + \left(\frac{\tau}{\kappa\cos\theta - \tau\sin\theta} + \cos\theta \right) B \tag{5.1.25}$$

bulunur.Norm alınırsa

$$\gamma_{B^*} = \left\| \left(\frac{-\kappa}{\kappa\cos\theta - \tau\sin\theta} + \sin\theta \right) T + \left(\frac{\tau}{\kappa\cos\theta - \tau\sin\theta} + \cos\theta \right) B \right\|,$$

$$\gamma_{B^*} = \sqrt{\frac{\kappa^2 + \tau^2}{\left(\kappa\cos\theta - \tau\sin\theta\right)^2} + 1 - \frac{2\left(\kappa\sin\theta - \tau\cos\theta\right)}{\kappa\cos\theta - \tau\sin\theta}}$$

olur.Burada$(3.3.1)$ve $(3.3.3)$ bağıntıları dikkate alınırsa

$$\gamma_{B^*} = \sqrt{\left(\frac{k_T k_B}{k_B \cos\theta - k_T \sin\theta}\right)^2 + 1 - \frac{2(\kappa \sin\theta - \tau\cos\theta)}{\kappa\cos\theta - \tau\sin\theta}}$$

elde edilir.

(C^*) sabit pol eğrisinin S^2 ye göre geodezik eğriliği γ_{C^*} ile gösterilirse $(3.1.11)$ bağıntısından

$$\gamma_{C^*} = \left\| \overline{D}_{T_{C^*}} T_{C^*} \right\|$$

dır. $(3.1.7)$ bağıntısındaki Gauss denkleminden

$$\overline{D}_{T_{C^*}} T_{C^*} = D_{T_{C^*}} T_{C^*} + \left\langle S\left(T_{C^*}\right), T_{C^*} \right\rangle C^*,$$

$$\overline{D}_{T_{C^*}} T_{C^*} = D_{T_{C^*}} T_{C^*} + C^*.$$

yazılır. $D_{T_{C^*}} T_{C^*}$ ın yerine $(5.1.19)$ daki karşılığı yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$\overline{D}_{T_{C^*}} T_{C^*} = \frac{\left\|W^*\right\|}{\left(\varphi^*\right)'} N \tag{5.1.26}$$

bulunur.Bu ifadenin normu alınırsa

$$\gamma_{C^*} = \frac{\left\|W^*\right\|}{\left(\varphi^*\right)'}$$

olur. Burada W^* ve $\left(\varphi^*\right)'$ ın yerine $(5.1.1)$ ve $(5.1.7)$ deki karşılıkları yazılırsa

$$\gamma_{c^*} = \frac{\|W\|\left[\lambda^2\kappa^2 + (1-2\lambda\kappa)\sin^2\theta\right]}{\lambda^2\tau\kappa'}$$

elde edilir.Böylece şu sonuç verilebilir.

Sonuç 5.1.3. (α, α^*) Bertrand eğri çifti olsun. α^* eğrisinin küresel gösterge eğrileri ile sabit pol eğrisinin S^2 ye göre geodezik eğrilikleri

1. $$\gamma_{T^*} = \sqrt{\left(\frac{k_T k_B}{k_B\cos\theta + k_T\sin\theta}\right)^2 - 1}$$

2. $$\gamma_{N^*} = \gamma_N = \frac{\tau'\kappa - \kappa'\tau}{\|W\|^3}$$

3. $$\gamma_{B^*} = \sqrt{\left(\frac{k_T k_B}{k_B\cos\theta - k_T\sin\theta}\right)^2 + 1 - \frac{2(\kappa\sin\theta - \tau\cos\theta)}{\kappa\cos\theta - \tau\sin\theta}}$$

4. $$\gamma_{c^*} = \frac{\|W\|\left[\lambda^2\kappa^2 + (1-2\lambda\kappa)\sin^2\theta\right]}{\lambda^2\tau\kappa'}$$

denklemleri ile verilir.

5.1.4 Küresel Gösterge Eğrilerinin Tabii Liftleri ve Geodezik Sprayları

$\left(\overline{T^*}\right)$ eğrisi geodezik sprayın bir integral eğrisi ise

$$\overline{D}_{T_{T^*}} T_{T^*} = 0$$

dır.Buna göre

$$\overline{D}_{T_{T^*}} T_{T^*} = \left(\frac{-\kappa}{\kappa\cos\theta + \tau\sin\theta} + \cos\theta\right)T + \left(\frac{\tau}{\kappa\cos\theta + \tau\sin\theta} - \sin\theta\right)B = 0$$

olmalıdır.Buradan

$$\begin{cases} \dfrac{-\kappa}{\kappa\cos\theta+\tau\sin\theta}+\cos\theta=0 \\ \\ \dfrac{\tau}{\kappa\cos\theta+\tau\sin\theta}-\sin\theta=0 \end{cases}$$

olur.Bu ifade ancak $\kappa\neq 0\,,\tau=0$ ve $\theta=0$ olması halinde sağlanır. $\theta=0$ olması çatıların denk olması demektir.Böylece şu sonuç verilebilir:

Sonuç 5.1.4. $\left(\alpha,\alpha^*\right)$ Bertrand eğri çiftileri için α eğrisi düzlemsel ve Frenet çatıları birbirlerine denk ise ise α^* eğrisinin $\left(T^*\right)$ teğetler göstergesinin $\left(\overline{T^*}\right)$ tabii lifti $T\left(S^2\right)$ tanjant demeti üzerinde geodezik sprayın bir integral eğrisidir.

$\left(\overline{N^*}\right)$ eğrisi geodezik sprayın bir integral eğrisi ise

$$\overline{D}_{T_{N^*}}T_{N^*}=0$$

dır. $(5.1.23)$ bağıntısından

$$\overline{D}_{T_{N^*}}T_{N^*}=\frac{\varphi'\left(\sin\varphi T+\cos\varphi B\right)}{\|W\|}=0$$

olmalıdır.Buradan

$$\begin{cases} \dfrac{\varphi'\sin\varphi}{\|W\|}=0, \\ \\ \dfrac{\varphi'\cos\varphi}{\|W\|}=0, \end{cases}$$

olur.Bu ise

$$\varphi' = 0$$

olması demektir.Bu durumda $(3.1.4)$ bağıntısından helis olması demektir.Böylece şu sonuç verilebilir:

Sonuç 5.1.5. (α, α^*) Bertrand eğri çifti olsun. α eğrisi bir helis ise α^* eğrisinin $(\overline{N^*})$ tabii lifti $T(S^2)$ tanjant demeti üzerinde geodezik sprayın bir integral eğrisidir.

$(\overline{B^*})$ eğrisi geodezik sprayın bir integral eğrisi ise

$$\overline{D}_{T_{B^*}} T_{B^*} = 0$$

olur. $(5.1.25)$ bağıntısından

$$\overline{D}_{T_{B^*}} T_{B^*} = \left(\frac{-\kappa}{\kappa\cos\theta - \tau\sin\theta} + \sin\theta \right) T + \left(\frac{\tau}{\kappa\cos\theta - \tau\sin\theta} + \cos\theta \right) B = 0$$

olmalıdır.Buradan

$$\begin{cases} \dfrac{-\kappa}{\kappa\cos\theta - \tau\sin\theta} + \sin\theta = 0 \\[2ex] \dfrac{\tau}{\kappa\cos\theta - \tau\sin\theta} + \cos\theta = 0 \end{cases}$$

olur.Bu ifade hiçbir zaman sağlanmaz.Bu durumda şu sonuç verilebilir:

Sonuç 5.1.6. (α, α^*) Bertrand eğri çifti olsun. α^* eğrisinin $(\overline{B^*})$ tabii lift eğrisi geodezik sprayın integral eğrisi olmaz.

$\left(\overline{C^*}\right)$ eğrisi geodezik sprayın bir integral eğrisi ise

$$\overline{D}_{T_{C^*}} T_{C^*} = 0$$

olur. $(5.1.26)$ bağıntısından

$$\overline{D}_{T_{C^*}} T_{C^*} = \frac{\|W^*\|}{(\varphi^*)'} N = 0$$

olmalıdır.Buradan

$$\|W^*\| = 0$$

olur.Bu ise

$$\kappa^* = 0 \text{ ve } \tau^* = 0$$

olması demektir. (4.1.6) dan

$$\begin{cases} \dfrac{\lambda\kappa - \sin^2\theta}{\lambda(1-\lambda\kappa)} = 0 \\ \\ \dfrac{\sin^2\theta}{\lambda^2\tau} = 0 \end{cases}$$

olur.Buradan da

$$\kappa = 0$$

bulunur.Bu ise α eğrisinin bir doğru olması demektir.Buna göre şu sonuç verilebilir.

Sonuç 5.1.7. (α,α^*) Bertrand eğri çifti olsun. α^* eğrisine ait sabit pol eğrisinin tabii lifti yoktur.

Teorem 5.1.2. (α,α^*) Bertrand eğri çifti olsun. α^* eğrisinin (T^*) teğetler göstergesi ile (B^*) binormaller göstergesi (C^*) sabit pol eğrisinin iki tane küresel involütüdür.

İspat: $C^*(s)=\sin\varphi^* T^*+\cos\varphi^* B^*$, $T^*(s)=\cos\theta T-\sin\theta B$ ve $B^*(s)=\sin\theta T+\cos\theta B$ ifadelerinin türevleri sırasıyla

$$\frac{dC^*}{ds_{C^*}}\frac{ds_{C^*}}{ds}=(\varphi^*)'\left(\cos\varphi^* T^*-\sin\varphi^* B^*\right),$$

$$\frac{dT^*}{ds_{T^*}}\frac{ds_{T^*}}{ds}=(\kappa\cos\theta+\tau\sin\theta)N,$$

$$\frac{dB^*}{ds_{B^*}}\frac{ds_{B^*}}{ds}=(\kappa\sin\theta-\tau\cos\theta)N$$

olur. N ile N^* lineer bağımlı olduğundan

$$\left\langle \frac{dC^*}{ds_{C^*}}\frac{ds_{C^*}}{ds},\frac{dT^*}{ds_{T^*}}\frac{ds_{T^*}}{ds}\right\rangle=\left\langle (\varphi^*)'\left(\cos\varphi^* T^*-\sin\varphi^* B^*\right),(\kappa\cos\theta+\tau\sin\theta)N\right\rangle=0$$

ve

$$\left\langle \frac{dC^*}{ds_{C^*}}\frac{ds_{C^*}}{ds},\frac{dB^*}{ds_{B^*}}\frac{ds_{B^*}}{ds}\right\rangle=\left\langle (\varphi^*)'\left(\cos\varphi^* T^*-\sin\varphi^* B^*\right),(\kappa\sin\theta-\tau\cos\theta)N\right\rangle=0$$

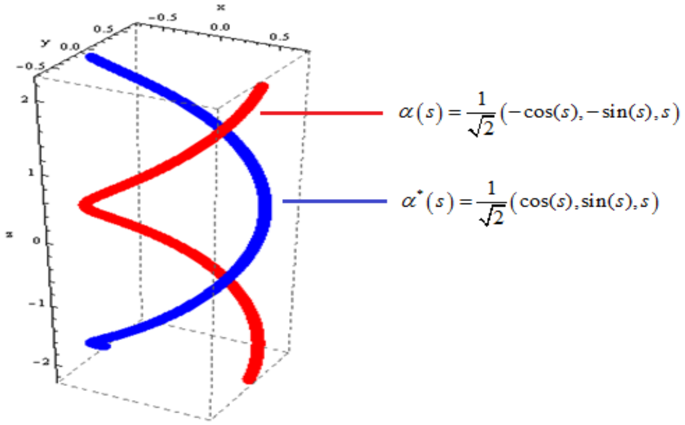
bulunur.Bu da ispatı tamamlar.

Örnek 5.1. (α,α^*) Bertrand eğri çifti olsun. $\alpha(s)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(-\cos(s),-\sin(s),s)$ ise

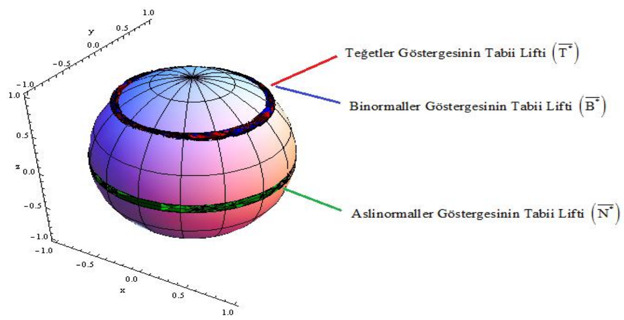
$\alpha^*(s)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(\cos(s),\sin(s),s)$ dir.Tabii lift eğrileri

$\overline{T^*(s)}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(-\sin s,\cos,1)$, $\overline{N^*(s)}=(-\cos s,-\sin s,0)$ ve

$\overline{B^*(s)}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(\sin s,-\cos s,1)$



Şekil 5.1 Bertrand Eğri Çifti



Şekil 5.2Küresel GöstergelerinTabii Liftleri

TARTIŞMA

Bu tezde ilk olarak (α,α^*) Bertrand eğri çifti alınarak α eğrisinin $\{T,N,B\}$ Frenet vektörleri ile α^* eğrisinin $\{T^*,N^*,B^*\}$ Frenet vektörleri arasındaki bağıntılar yararlanılarak α eğrinin W Darboux vektörü ile α^* eğrisinin W^* Darboux vektörünün lineer bağımlı olduğu gösterildi.

İkinci olarak α^* eğrisinin $\{T^*,N^*,B^*\}$ Frenet vektörlerinin ve bu vektörlere bağlı olarak oluşan C^* birim vektörünün birim küre üzerinde meydana getirdikleri $(T^*),(N^*),(B^*)$ küresel gösterge eğrileri ile (C^*) sabit pol eğrisinin E^3 e ve S^2 ye göre yay uzunlukları ve E^3 e ve S^2 ye göre geodezik eğrilikleri hesaplandı. Bunlardan faydalanılarak α eğrisi ile α^* eğrisinin yay uzunlukları ve geodezik eğrilikleri arasındaki bağıntılar bulundu.

Son olarak da α^* Bertrand eğrisinin küresel gösterge eğrilerinin tabii liftleri geodezik sprayın integral eğrisi olma şartları α Bertrand eğrisine bağlı olarak ifade edildi.

SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışma (α, α^*) Bertrand eğri çifti alınarak yapılmıştır. Benzer şekilde $\alpha : I \to IL^3$ ve $\alpha^* : I \to IL^3$ Bertrand eğri çiftleri Lorentz uzayında da sırasıyla timelike-spacelike ve spacelike-spacelike alınarak yapılabilir. Ayrıca bu çalışmanın Dual ve Dual-Lorentz uzaylarında da karşılıkları bulunabilir.

KAYNAKLAR

Bilici, M., 1999. İnvolüt-Evolüt Eğrilerinin Küresel Göstergelerinin Eğrilikleri ve Tabii Liftleri, Yüksek Lisans Tezi, Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü,Samsun,49s.

Bilici, M., 2002. Çalışkan, M. and Aydemir, İ., The Natural Lift Curves And The Geodezic Sprays For The Spherical Indicatrices Of The Pair Of Evolute-Involute Curves, International Journal of App. Math. vol.11, pp.415-420.

Bilici,M., 1984. Doktora Tezi, Ondokuzmayıs Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Samsun.

Çalışkan, M., Sivridağ, A.İ., Hacısalihoğlu, H. H., 1984. "Some Characterizations For The Natural Lift Curves And The Geodesic Sprays" Ankara Üniv., Fen Fak., Communications, Cilt 33, 235-242.

Çalışkan, Ö.F., 2013. Timelike Bertrand Eğri Çiftlerinin Küresel Göstergelerinin Geodezik Eğrilerinin Eğrilikleri ve Tabii Liftleri, Yüksek Lisans Tezi, Ordu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ordu.

Demet,S., 2012. Timelike-Spacelike Manheim Eğri Çiftleri Üzerine, Yüksek Lisans Tezi, Ordu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ordu.

Ekmekçi,N. and Ilarslan, K., 2001. On Bertrand Curves and Their Characterization, Dıfferential Geometry-Dynamıcal Systems, Vol.3, No.2, 2001, pp. 17-24.

Ergun, E. and Çalışkan, M., 2010. "On Geodesic Sprays In Minkowski 3-Space"VIII. UlusalGeometri Sempozyumu, Akdeniz Universitesi.

Hacısalioğlu,H.H., 1983. Diferensiyel Geometri, İnönü Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Yayınları, Mat. no.7, Malatya.

Kasap, E., 1996. "Bertrand Regle Yüzey Çiftleri İle İlgili Yeni Karakteristik Özellikler",Yüksek Lisans Tezi,Samsun.

Liu, H. and Wang,F.,2008. Mannheim partner curves in 3-space, Journal of Geometry, vol. 88, no. 1-2, pp. 120-126(7).

O'neill,B., 1983. Semi Riemann Geometry, Academic Press, New York, London, 468p.

Ratcliffe, J. G., 1994. Foundations of Hyperbolic Manifolds, Springer-Verlag New York, Inc., New York, 736., 1994.7

Sabuncuoğlu,A., 2006. "Diferansiyel Geometri", Nobel Yayın Dağıtım, Ankara.

Sivridağ,A.İ., Çalışkan, M., 1991. " On The M-Integral Curves And M-Geodesic Sprays " Erciyes Üniv., Fen Bilimleri Dergisi, Cilt 7, Sayı 1-2, 1283-1287.

Şenol, A., Zıplar,E. And Yaylı,Y., 2012. General Helices and Bertrand Curves in Riemannian Space Form, Mathematica Aeterna, Vol.2, 2012, no.2, 155-161.

Şenyurt, S., 2012. Natural Lifts and The Geodesic Sprays for the Spherical Indicatrices of the Mannheim Partner Curves in E^3, International Journal of the Physical Sciences, vol. (7), no.16, pp. 2414-2421.

Şenyurt, S. And Bektaş, Ö.,2012. Timelike-Spacelike Manheim Partner Curves in IR_1^3 İnternational Journal of The Physical Science Vol.7(1), pp 100-106.

Şenyurt, S. And Çalışkan,Ö.F., 2013. Spherical İnvolutes of The Fixed Pole Curve C^* On The Timelike Bertrand Curve Couple. J.Math.Comput Sci.3 No:1, 32-37 ISSN:1927-5307.

Thorpe, J.A. 1979. Elemantry Topics İn Differential Geometry, Springer-Verlag, New York,Heidelberg-Berlin , 276 pp.

ÖZGEÇMİŞ

Adı-Soyadı **:** Zeynep ÖZGÜNER
Doğum Yeri **:** Ordu
Doğum Tarihi **:** 06.07.1980
Medeni Hali **:** Evli
Bildiği Yabancı Dil **:** İngilizce
E-mail **:** zeyneptarakci@hotmail.com
İletişim Bilgileri : Ordu Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi

Öğrenim Durumu :

Derece	**Bölüm/ Program**	**Üniversite**	**Yıl**
Lisans	Matematik	Ondokuz Mayıs Üniversitesi	2003
TezsizY. Lisans	Matematik	Başkent Üniversitesi	2004
Y.Lisans	Matematik	Ordu Üniversitesi	2013