

**PARALEL Z-EQUIDISTANT REGLE
YÜZEYLER VE BAZI KARAKTERİSTİK
ÖZELLİKLERİ
ENGİN AS
YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**T.C.
ORDU ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**PARALEL Z-EQUIDISTANTE
REGLE YÜZEYLER VE
BAZI KARAKTERİSTİK ÖZELLİKLERİ**

ENGİN AS

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**AKADEMİK DANIŞMAN
Yrd. Doç. Dr. Süleyman ŞENYURT**

Ordu-2010

T.C.
ORDU ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Bu çalışma jürimiz tarafından 30/07/2010 tarihinde yapılan sınav ile Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Prof. Dr. Mustafa ÇALIŞKAN

Üye : Yrd. Doç. Dr. Süleyman ŞENYURT

Üye : Yrd. Doç. Dr. Selahattin MADEN

ONAY :

Yukarıdaki imzaların adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

.../.../2010

Yrd. Doç. Dr. BeyhanTAŞ
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ÖZET

Bu çalışma dört bölüm halinde düzenlenmiştir. Giriş bölümünde çalışmanın amacı ve konunun ele alınma nedeni tartışıldı. Genel bilgiler bölümünde diferensiyel geometriden temel kavramlara yer verildi. Materyal ve metot bölümünde üç boyutlu Öklid uzayında paralel p-equidistant regle yüzeyler ve Mannheim eğriler tanımlandı ve bu yüzeylerle ilgili bazı karakteristik özellikler verildi.

Bulgular bölümü çalışmamızın orijinal kısmını oluşturmaktadır. Bu bölümde üç boyutlu Öklid uzayında iki regle yüzeyin striksiyon eğrileri boyunca asli normal vektörleri paralel ve uygun noktalardaki merkezi düzlemler arasındaki uzaklık sabit kabul edilerek elde edilen regle yüzeylerin bazı karakteristik özellikleri incelenmiştir. İki regle yüzeyin kapalı olması halinde ise bu yüzeylere ait integral invaryantları arasındaki bağıntılar hesaplanmıştır.

Anahtar Sözcükler: Striksiyon eğrisi, Mannheim eğrisi, regle yüzey ve integral invaryantları.

ABSTRACT

This study consists of four fundamental chapters. In introduction, it is discussed aim of and why this study is taken into consideration. In general in formation part, the basic concepts of differential geometry have been pointed out. In material and method part, the parallel p-equidistant ruled surfaces and mannheim curves are defined in the 3-dimensional Euclidean space E^3 and some characteristics properties of these surfaces have been given.

In the last chapter is the orijinal part of the study. In this chapter, the some characteristic properties are examined of two ruled surfaces that along striction curves of this ruled surfaces whose principal normal are paralel and the distances between of central plane in suitable points are constant in E^3 . On the way the two ruled surfaces is close, the relationships between the integral invariants of this ruled surfaces are computed.

Key Words: Striction curve, Mannheim curve, ruled surface and integral invariants.

TEŐEKKÜR

Yoęun alıőmaları arasında danıőmanlıęımı yapan ve çalıőmalarım boyunca yardımlarını esirgemeyen saygıdeğer hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Süleyman ŞENYURT'a en içten minnet duygularımı ve teőekkürlerimi sunuyorum. Ayrıca çalıőmalarım boyunca desteğini gördüğüm Dekanımız Sayın Prof. Dr. Cemil YAPAR ve Matematik Bölüm Baőkanı Sayın Yrd. Doç. Dr. Selahattin MADEN'e teőekkür etmeyi bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

1. GİRİŞ	1
2. GENEL BİLGİLER	2
2.1 Temel Kavramlar ve Üç Boyutlu Öklid Uzayı E^3 de Regle Yüzeyler	2
3. MATERYAL VE METOT	15
3.1 Paralel p-Equidistant Regle Yüzeyler	15
4. BULGULAR	23
4.1 Paralel z-Equidistant Regle Yüzeyler ve Bazı Karakteristik Özellikleri	23
5. TARTIŞMA	56
6. SONUÇ VE ÖNERİLER	57
7. KAYNAKLAR	58
8. ÖZGEÇMİŞ	59

ŞEKİLLER LİSTESİ

1. Şekil 2.1 Teğetler göstergesi.....	5
2. Şekil 2.2 Binormaller göstergesi.....	7
3. Şekil 2.3 Regle Yüzey	9
4. Şekil 2.4 Ortogonal yörünge eğrisi	12
5. Şekil 4.1 Striksiyon eğrisi	24
6. Şekil 4.2 Striksiyon eğrisinin teğeti	29
7. Şekil 4.3 α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki Darboux vektörü	45
8. Şekil 4.4 $\bar{\alpha}$ eğrisinin $\bar{\alpha}(\bar{s})$ Darboux vektörü	47

1.GİRİŞ

E^3 de Regle yüzeyler ile ilgili temel kavramlar Hacısalihoğlu'nun "Diferensiyel Geometri Dersleri" ve "Yüksek Boyutlu Uzaylarda Dönüşümler ve Geometrilere" isimli kitaplarında verilmiştir. Valeontis'in "Parallel P-Äquidistante Regelflachen" adlı makalesinde Paralel P-Equidistant Regle Yüzeyler tanımlanarak bazı karakteristik özellikleri verilmiştir. Masal ve Kuruoğlu'un "Some Characteristic Properties of The Parallel P-Equidistant Ruled Surfaces In The Euclidean Space", "Some Characteristic Properties of the Shape Operators of Parallel P-Equidistant Ruled Surfaces" ve "Some Characteristic Properties of the Spherical Indicatrices Leading Curves of Parallel P-Equidistant Ruled Surfaces" adlı makalelerinde Paralel P-Equidistant Regle Yüzeylerin integral invaryantları, şekil operatörleri ve bu yüzeylerin dayanak eğrilerinin küresel göstergeleri hesaplanmıştır. Liu ve Wang'ın "Mannheim Partner Curve in 3-Space" adlı makalesinde Mannheim eğriler tanımlanmıştır. Orbay ve Kasap'ın "Mannheim Partner Curves in E^3 " adlı makalesinde Mannheim eğrilerin bazı karakteristik özellikleri verilmiştir.

Bu çalışmada ise üç boyutlu Öklid uzayında iki regle yüzeyin striksiyon eğrileri boyunca asli normal vektörleri paralel ve uygun noktalardaki merkezi düzlemler arasındaki uzaklık sabit kabul edilerek elde edilen regle yüzeylerin bazı karakteristik özellikleri incelenmiştir. İki regle yüzeyin kapalı olması halinde ise bu yüzeylere ait integral invaryantları arasındaki bağıntılar bulunmuştur.

2.GENEL BİLGİLER

2.1 Temel Kavramalar ve Üç Boyutlu Öklid Uzayı E^3 de Regle Yüzeyle

Tanım 2.1: $A(\neq \emptyset)$ bir cümle ve V de \mathfrak{F} cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. Aşağıdaki önermeleri doğrulayan bir $f : A \times A \rightarrow V$ fonksiyonu varsa A ya V ile birleştirilmiş bir **afin uzay** denir:

$$A_1 : \forall P, Q, R \in A \text{ için } f(P, Q) + f(Q, R) = f(P, R),$$

$$A_2 : \forall P \in A \text{ ve } \forall \alpha \in V \text{ için } f(P, Q) = \alpha \text{ olacak biçimde bir tek } Q \in A$$

noktası vardır ($P, Q \in A$ için $f(P, Q) = \overline{PQ}$) biçiminde gösterilir.

Tanım 2.2: V bir vektör uzayı ve A da V ile birleşen bir afin uzay olsun. $P_0, P_1, P_2, \dots, P_n \in A$ noktaları için $\{P_0P_1, P_0P_2, \dots, P_0P_n\}$ cümlesi V nin bir bazı ise $\{P_0, P_1, P_2, \dots, P_n\}$ nokta $(n+1)$ -lisine, A afin uzayının bir **afin çatısı** denir. Burada P_0 noktasına çatının **başlangıç noktası** ve $P_i, 1 \leq i \leq n$, noktalarına da çatının **birim noktaları** denir. Eğer $\text{boy}V = n$ ise A ya **n-boyutlu bir afin uzay** denir.

Tanım 2.3: A bir reel afin uzay ve A ile birleşen vektör uzayı da V olsun. V üzerinde tanımlanan

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$
$$(x, y) \rightarrow \langle x, y \rangle$$

reel değerli fonksiyonu aşağıdaki aksiyomları sağlarsa bu fonksiyona **iç çarpım fonksiyonu** denir: $\forall x, y, z \in V$ için

i) Bilineerlik Aksiyomu;

$$\langle ax + by, z \rangle = a \langle x, z \rangle + b \langle y, z \rangle,$$

$$\langle x, ay + bz \rangle = a \langle x, y \rangle + b \langle x, z \rangle,$$

ii) Simetri Aksiyomu;

$$\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle,$$

iii) Pozitif Tanımlılık (kararlılık) Aksiyomu;

$$\langle x, x \rangle \geq 0, \quad \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = \vec{0}.$$

Örnek 2.1: $X, Y \in \mathbb{R}^2$ olmak üzere

$$\langle \cdot, \cdot \rangle: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad \langle X, Y \rangle = \|X\| \|Y\| \cos \theta, \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

şeklinde tanımlı fonksiyon bir iç çarpım fonksiyonudur.

Tanım 2.4: \mathbb{R}^n standart reel afin uzay olsun. $\forall X, Y \in \mathbb{R}^n$, $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$,

$Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ için

$$\langle \cdot, \cdot \rangle: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad \langle X, Y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

fonksiyonu bir iç çarpım fonksiyonudur. Bu iç çarpıma \mathbb{R}^n de **standart iç çarpım** veya **Öklid iç çarpımı** denir. Standart iç çarpımın tanımlı olduğu \mathbb{R}^n vektör uzayı ile birleşen \mathbb{R}^n afin uzayına **n-boyutlu standart Öklid uzayı** denir. E^n ile gösterilir.

Tanım 2.5: E^n n-boyutlu Öklid uzayında bir x noktasının afin koordinat sistemine göre koordinatları (x_1, x_2, \dots, x_n) olsun. $x_i: E^n \rightarrow \mathbb{R}$ bileşenlerine E^n nin **i-yinci eğrilik fonksiyonu** denir.

Tanım 2.6: $d: E^n \times E^n \rightarrow \mathbb{R}$, $d(X, Y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - x_i)^2}$

şeklinde tanımlanan d fonksiyonuna E^n Öklid uzayında **uzaklık fonksiyonu** ve $d(X, Y)$ reel sayısına da $X, Y \in E^n$ noktaları arasındaki **uzaklık** denir.

Tanım 2.7: n-boyutlu bir reel iç çarpım uzayı V ve V ile birleşen Öklid uzayı da E^n olsun. $P_0, P_1, P_2, \dots, P_n \in E^n$ olmak üzere, $\{P_0, P_1, P_2, \dots, P_n\}$ nokta (n+1)-lisi için, $\{P_0P_1, P_0P_2, \dots, P_0P_n\}$ cümlesi V nin bir ortonormal bazı ise $\{P_0, P_1, P_2, \dots, P_n\}$ nokta (n+1)-lisine E^n de bir **Öklid çatısı** veya **dik çatı** denir.

Tanım 2.8: $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^n$, $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \dots, \alpha_n(t))$ diferensiyellenebilen fonksiyona E^n de bir **eğri** denir. Burada I aralığına α eğrisinin **parametre aralığı** ve $t \in I$ değişkenine de α eğrisinin **parametresi** denir.

Tanım 2.9: $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^n$ diferensiyellenebilir bir eğri olsun. $\|\alpha'\|: I \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\|\alpha'\|(t) = \|\alpha'(t)\| \text{ şeklinde tanımlı } \|\alpha'\| \text{ fonksiyonuna } \mathbf{skaler hız fonksiyonu}, \|\alpha'(t)\|$$

reel sayısına α eğrisinin $\alpha(t)$ noktasındaki **skaler hızı** denir. $\alpha(t) \in E^n$ için

$$\alpha'(t) = \frac{d\alpha}{dt} \Big|_t = \left(\frac{d\alpha_1(t)}{dt}, \frac{d\alpha_2(t)}{dt}, \dots, \frac{d\alpha_n(t)}{dt} \right) \text{ vektörüne de eğrinin } \mathbf{hız vektörü} \text{ denir.}$$

Tanım 2.10: $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^n$ bir eğri ve $\forall s \in I$ için, $\|\alpha'(s)\| = 1$ ise α eğrisine **birim hızlı eğri** denir. Bu durumda $s \in I$ parametresine eğrinin **yay parametresi** denir.

Tanım 2.11: Her noktasındaki hız vektörü sıfırdan farklı olan eğriye **regüler eğri** denir.

Tanım 2.12: $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^n$ bir eğri, $\psi = \{\alpha', \alpha'', \dots, \alpha^{(r)}\}$, $r < n$, sistemi lineer bağımsız ve $\forall \alpha^{(k)}$, $k > r$ için $\alpha^{(k)} \in Sp\{\psi\}$ olmak üzere, ψ den elde edilen $\{V_1, V_2, \dots, V_r\}$ ortonormal sistemine, α eğrisinin **Serret-Frenet r-ayaklı alanı** ve $m \in \alpha$ için $\{V_1(m), V_2(m), \dots, V_r(m)\}$ ye $m \in \alpha$ noktasındaki **Serret-Frenet r-ayaklısı** denir. Her bir, V_i , $1 \leq i \leq r$, ye **Serret-Frenet vektörü** adı verilir.

Tanım 2.13: $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^n$ eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet r-ayaklısı

$\{V_1(s), V_2(s), \dots, V_r(s)\}$ olmak üzere

$$k_i : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad 1 \leq i < r$$

$$s \rightarrow k_i(s) = \left\langle V_i'(s), V_{i+1}(s) \right\rangle \quad (2.1)$$

şeklinde tanımlı, k_i fonksiyonuna α eğrisinin **i-yinci eğrilik fonksiyonu**, $k_i(s) \in \mathbb{R}$ sayısına da α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki **i-yinci eğriliği** denir.

Teorem 2.1: $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^n$ eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet r-ayaklısı $\{V_1(s), V_2(s), \dots, V_r(s)\}$ ve i-yinci eğriliği $k_i(s)$ ise

$$\begin{cases} V_1'(s) = k_1(s)V_2(s) \\ V_i'(s) = -k_{i-1}(s)V_{i-1}(s) + k_i(s)V_{i+1}(s), & 1 \leq i < r \\ V_r'(s) = -k_{r-1}(s)V_{r-1}(s) \end{cases} \quad (2.2)$$

dir (Hacısalihoglu, 1983).

Tanım 2.14: $\alpha : I \rightarrow E^n$ eğrisinin $\alpha(s) \in E^n$ noktasında 1. ve 2. eğrilikleri, sırasıyla, $k_1(s)$ ve $k_2(s)$ olsun.

$$H_1 : I \rightarrow \mathbb{R} \quad H_1(s) = \frac{k_1(s)}{k_2(s)}$$

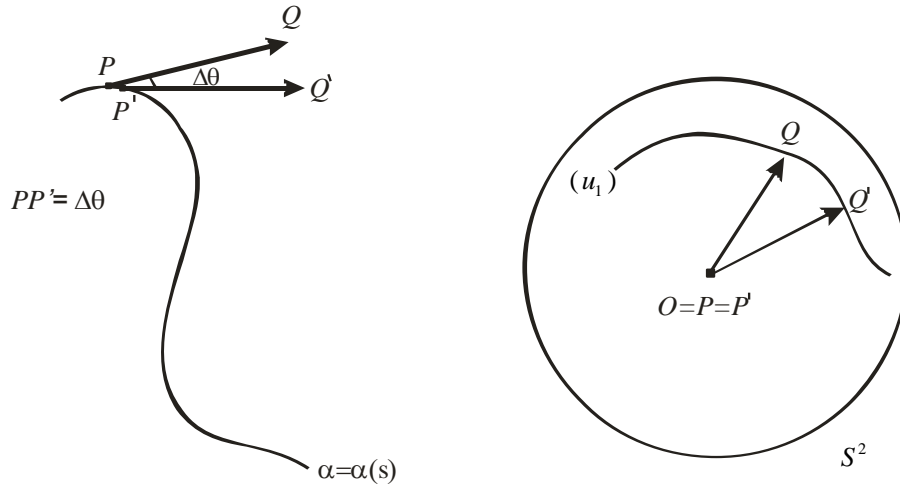
şeklinde tanımlı H_1 fonksiyonuna, α eğrisinin **1-inci harmonik eğriliği** denir.

Tanım 2.15: $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^n$, $\alpha(s) \in E^n$ için $\alpha'(s)$ hız vektörü, sabit bir U vektörü ile sabit açı yapıyorsa, α eğrisine bir **eğilim çizgisi** ve $Sp\{U\}$ ya da α eğilim çizgisinin

eğilim eksenini adı verilir.

Teorem 2.2: $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^n$ eğrisi bir eğilim çizgisidir $\Leftrightarrow \forall s \in I$ için $H_1(s) = sbt$.
(Hacısalihoglu, 1983).

Tanım 2.16: E^3 de bir α eğrisi yay parametresi ile verilsin. α eğrisinin birim teğet vektörü u_1 olmak üzere, $PQ = u_1$ alındığında, P noktası α eğrisini çizerken, Q noktası da birim küre yüzeyi üzerinde bir eğri çizer. Bu eğriye **teğetler göstergesi** denir (Şekil 2.1.).



Şekil 2.1. Teğetler göstergesi

α eğrisinin teğetler göstergesini (u_1) ile gösterirsek (u_1) in denklemi $\alpha_{u_1} = u_1$.

(u_1) eğrisinin yay parametresine s_{u_1} dersek, $s_{u_1} \neq s$ olup yay elementi $ds_{u_1} = \|u_1'\| ds$.

Şekil 2.1. de görülen $\Delta\theta$ açısına **kotangeniz açısı**, $\frac{\Delta\theta}{\Delta s}$ oranına α eğrisinin P

noktasındaki **ortalama eğriliği** ve $\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta s} = \frac{d\theta}{ds}$ değerine de α eğrisinin P

noktasındaki **eğriliği** denir.

Teorem 2.3: Bir α eğrisinin eğriliği, teğetler göstergesinin yay elementinin, esas eğrinin yay elementine oranıdır.

İspat: (u_1) teğetler göstergesinin yay elementi

$$ds_{u_1} = \|u_1'\| ds$$

idi. Buradan

$$\frac{ds_{u_1}}{ds} = \|u_1'\| = \|\alpha''\| ,$$

$$\frac{ds_{u_1}}{ds} = \kappa .$$

Öte yandan,

$$\frac{\Delta\theta}{\Delta s} = \frac{\Delta\theta}{\Delta s_{u_1}} \cdot \frac{\Delta s_{u_1}}{\Delta s}$$

yazılabilir.

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta s} = \lim_{\Delta s_{u_1} \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta s_{u_1}} \cdot \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta s_{u_1}}{\Delta s} ,$$

$$\lim_{\Delta s_{u_1} \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta s_{u_1}} = 1$$

olacağından,

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta s_{u_1}}{\Delta s} .$$

Buradan da

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{ds_{u_1}}{ds}$$

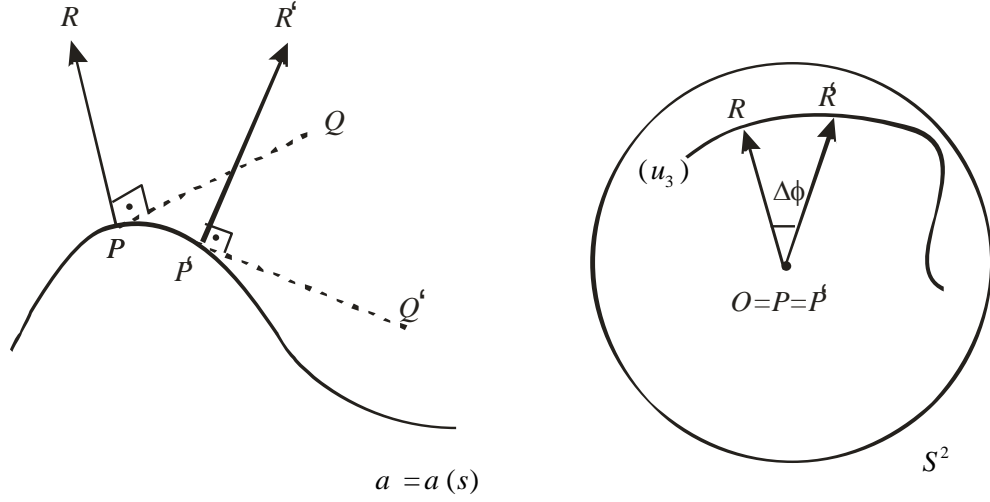
bulunur. $\frac{ds_{u_1}}{ds} = \kappa$ olduğundan

$$\frac{d\theta}{ds} = \kappa$$

elde edilir.

Tanım 2.17: E^3 de bir α eğrisinin birim asli normal vektörü u_2 olsun. α eğrisi çizilirken u_2 vektörünün uç noktalarının birim küre yüzeyi üzerinde meydana getirdiği eğriye α eğrisinin **asli normaller göstergesi** denir. α eğrisinin asli normaller göstergesini (u_2) ile gösterirsek (u_2) nin denklemi, $\alpha_{u_2} = u_2$.

Tanım 2.18: E^3 Öklid uzayında, α eğrisinin bir P noktasındaki binormal vektörü $u_3 = PR$ ve komşu iki binormal vektörü arasındaki açı $\Delta\phi$ olmak üzere P noktası α eğrisini çizerken R noktası da birim küre yüzeyi üzerinde bir eğri çizer. Bu eğriye α eğrisinin **binormaller göstergesi** denir (Şekil 2.2.).



Şekil 2.2. Binormaller göstergesi

α eğrisinin binormaller göstergesini (u_3) ile gösterirsek (u_3) ün denklemini,

$\alpha_{u_3} = u_3 \cdot (u_3)$ eğrisinin yay parametresini s_{u_3} ile gösterilirse $s_{u_3} \neq s$ olup yay-elementi $ds_{u_3} = \|u_3'\| ds$.

$\frac{\Delta\phi}{\Delta s}$ oranına α eğrisinin P noktasındaki **ortalama burulması** ve $\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\phi}{\Delta s} = \frac{d\phi}{ds}$

değerine de α eğrisinin P noktasındaki **burulması** denir.

Teorem 2.4: Bir α eğrisinin burulması, binormaller göstergesinin yay elementinin, esas eğrinin yay elementine oranıdır.

İspat: (u_3) binormaller göstergesinin yay elementini

$$ds_{u_3} = \|u_3'\| ds$$

idi. Buradan

$$\frac{ds_{u_3}}{ds} = \|u_3'\| = \tau .$$

Öte yandan,

$$\frac{\Delta\phi}{\Delta s} = \frac{\Delta\phi}{\Delta s_{u_3}} \cdot \frac{\Delta s_{u_3}}{\Delta s}$$

yazılabilir.

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\phi}{\Delta s} = \lim_{\Delta s_{u_3} \rightarrow 0} \frac{\Delta\phi}{\Delta s_{u_3}} \cdot \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta s_{u_3}}{\Delta s} ,$$

$$\lim_{\Delta s_{u_3} \rightarrow 0} \frac{\Delta \phi}{\Delta s_{u_3}} = 1$$

olacağından,

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \phi}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta s_{u_3}}{\Delta s} \cdot$$

Buradan da

$$\frac{d\phi}{ds} = \frac{ds_{u_3}}{ds}$$

bulunur. $\frac{ds_{u_3}}{ds} = \tau$ olduğundan

$$\frac{d\phi}{ds} = \tau$$

elde edilir.

Tanım 2.19: $\alpha : I \rightarrow E^3$ eğrisinin $\alpha(s) \in E^3$ noktasında $\{u_1, u_2, u_3\}$ Frenet 3-ayaklısı $\forall s \in I$ anında bir eksen etrafında bir ani helis hareketi yapar. Bu eksene eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki **Darboux (ani dönme) eksenini** denir.

Bu eksenin yön ve doğrultusunu veren vektör

$$w = u_2 \wedge u_2' = k_2 u_1 + k_1 u_3 \quad (2.3)$$

şeklinde ve bu vektöre **Darboux vektörü** denir.

Tanım 2.20: n-boyutlu Öklid uzayı E^n de $\forall P \in M$ için $\nabla f|_P \neq 0$ olmak üzere $M = \{x \in U \subset E^n \mid f : U \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow f(x) = c, f \text{ diferensiyellenebilir bir fonksiyon}, U \text{ açık alt küme}\}$ ile tanımlanan boş olmayan bir M kümesine, E^n de (n-1)-boyutlu bir **yüzey** veya **(n-1)-yüzey** denir. Bu yüzey $n > 3$ için **hiperyüzey** olarak adlandırılır.

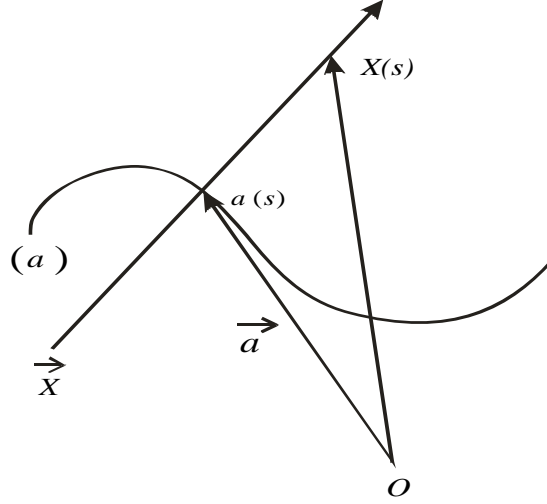
Örnek 2.2: $f : E^3 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ küresi bir yüzeydir.

Tanım 2.21: Bir $M \subset E^3$ yüzeyi verilsin. $\forall P \in M$ noktasında E^3 ün M de kalan bir doğrusu varsa M ye bir **regle yüzey** denir. $\forall P \in M$ noktasından geçen ve M de kalan bu doğruya regle yüzeyin **doğrultmanı** denir.

Bir regle yüzeyin parametrik denklemini elde etmek için, doğrultmanları kesen ve yüzey üzerinde bulunan diferensiyellenebilir bir $\alpha : I \rightarrow E^3$ eğrisi seçilir ve bu eğriye yüzeyin **dayanak eğrisi** adı verilir. $\alpha(s)$ noktasından geçen, doğrultman üzerinde değişken bir nokta

$$\beta: \mathbb{R} \rightarrow M ; \beta(v) = \alpha(s) + vX(s)$$

şeklindedir. Burada $X(s) = (x_1(s), x_2(s), x_3(s))$ birim doğrultman vektörünü göstermektedir.



Şekil 2.3. Regle Yüzey

Böylece φ regle yüzeyi,

$$\begin{aligned} \varphi: I \times \mathbb{R} &\rightarrow E^3 \\ (s, v) &\rightarrow \varphi(s, v) = \alpha(s) + vX(s) \end{aligned} \quad (2.4)$$

dönüşümü ile belirtilmiş olur (Hacısalıhoğlu, 1983).

Örnek 2.3: $f: E^3 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y, z) = (2x - 3z)^2 + (2y + z)^2 - 4 = 0$ silindiri bir regle yüzeydir.

Örnek 2.4: $f: E^3 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y, z) = (z - x)^2 + 2(2z - y)^2 - 2(z - 1)^2 = 0$ konisi bir regle yüzeydir.

Tanım 2.22: $\varphi: I \times \mathbb{R} \rightarrow E^3 \quad \varphi(s, v) = \alpha(s) + vX(s)$ regle yüzeyi, $\forall s \in I$ için

$$\varphi(s + 2\pi, v) = \varphi(s, v)$$

olacak şekilde periyodik ise regle yüzeye **kapalı regle yüzey** denir.

Tanım 2.23: Regle yüzeyin komşu iki ana doğrusu arasındaki en kısa uzaklığın bu iki komşu ana doğru arasındaki açığa oranına, regle yüzeyin **dağılma parametresi (dralı)** denir. Birim doğrultman vektörü X olan bir regle yüzeyin dralı P_x ile gösterilirse

$$P_x = \frac{\det(\alpha', X, X')}{\|X'\|^2} \quad (2.5)$$

şeklinde bulunur.

Tanım 2.24: Bir regle yüzeyin ana doğruları boyunca teğet düzlemleri aynı ise regle yüzeye **açılabilir regle yüzey** denir.

Teorem 2.5: Bir $\varphi(s, v)$ regle yüzeyinin açılabilir olması için gerek ve yeter şart dağılma parametresinin sıfır olmasıdır (Hacısalıhoğlu, 1983).

Tanım 2.25: Bir $\varphi(s, v)$ regle yüzeyinin ana doğrularının her birini dik olarak kesen eğriye, regle yüzeyin **ortogonal yörüngesi** denir.

Tanım 2.26: Bir $\varphi(s, v)$ regle yüzeyinde komşu iki doğrultmanın ortak dikmesinin doğrultmanlar üzerindeki ayaklarına **boğaz (merkez veya striksiyon) noktası** denir.

Regle yüzeyinin ana doğrusu dayanak eğrisi boyunca yüzeyi oluştururken boğaz noktalarının geometrik yerine, regle yüzeyin **boğaz (striksiyon) çizgisi (eğrisi)** denir.

Bir $\varphi(s, v)$ regle yüzeyinin boğaz noktasının yer vektörü $\gamma(s)$ ile gösterilirse, striksiyon eğrisinin yer vektörü için

$$\gamma(s) = \alpha(s) - \frac{\langle \alpha'(s), X'(s) \rangle}{\|X'(s)\|^2} X(s) \quad (2.6)$$

elde edilir.

Eğer $\|X'(s)\| = 0$ ise, regle yüzey striksiyon eğrisine sahip değildir. Bu hal, regle yüzeyin silindir olmasını karakterize eder. Regle yüzeyler için striksiyon eğrisi dayanak eğrisi olarak alınabilir. Bunun için;

$$\langle \alpha'(s), X'(s) \rangle = 0 \quad (2.7)$$

alınması yeterlidir.

Tanım 2.27: α , E^3 de kapalı bir eğri olsun. $\forall s \in I$ için $\alpha(s)$ noktasındaki hareketli uzay $H = Sp\{E_1, E_2, E_3\}$ ve sabit bir uzay da $H' = Sp\{e_1, e_2, e_3\}$ ile gösterilsin. Hareketli uzayda bir birim doğrultman vektör a olmak üzere $da = w \wedge a$ ile ifade edilebilen, diferensiyel geometride Darboux dönme vektörünün rolünü oynayan w vektörüne H/H' hareketinin **ani Pfaff vektörü** denir. Bu vektörün α eğrisi boyunca eğrisel integraliyle belirtilen

$$D = \oint_{(\alpha)} w \quad (2.8)$$

vektörüne H / H' hareketinin **Steiner dönme vektörü** denir.

Tanım 2.28: α , E^3 de diferensiyellenebilir kapalı bir eğri ve bu eğriye bağlı olarak hareket eden bir ortonormal $\{E_1, E_2, E_3\}$ sistemi, H hareketli uzayı olarak seçilsin.

$dX \in T_H(\alpha(s))$ olduğundan

$$dX = x_1 E_1 + x_2 E_2 + x_3 E_3 \quad (2.9)$$

şeklinde tek türlü olarak ifade edilebilir. α eğrisi boyunca eğrisel integral ile belirtilen

$$V = \oint_{(\alpha)} dX \quad (2.10)$$

vektörüne, H / H' hareketinin **Steiner öteleme vektörü** denir.

$\varphi(s, v) = \alpha(s) + v.X(s)$ regle yüzeyinin ana doğrularının dik yörüngeleri için

$$\begin{aligned} \langle X, dX \rangle &= 0, \\ \langle X, d\alpha + v.dX + dv.X \rangle &= 0, \\ \langle X, d\alpha \rangle + dv.\|X\|^2 &= 0, \quad \|X\| = 1, \\ \langle X, d\alpha \rangle &= -dv \end{aligned} \quad (2.11)$$

bulunur. (2.11) ifadesinin dayanak eğrisi boyunca eğrisel integrali alınırsa,

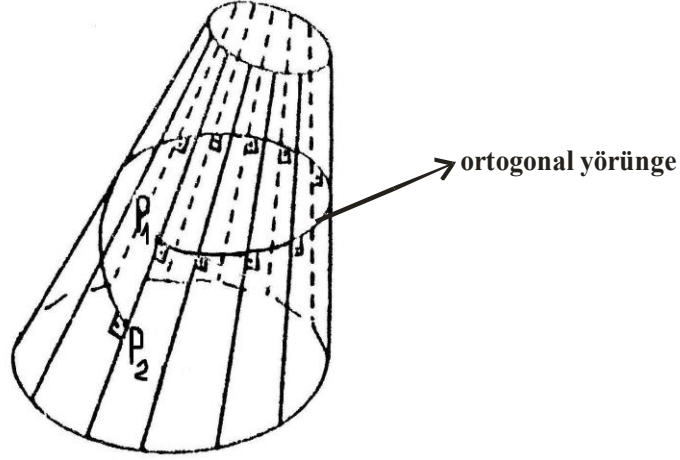
$$L_X = \oint_{(\alpha)} \langle d\alpha, X \rangle = - \oint_{(\alpha)} dv$$

elde edilir.

Tanım 2.29:

$$L_X : I \rightarrow \mathbb{R} \quad L_X(v) = - \oint_{(\alpha)} dv \quad (2.12)$$

şeklinde tanımlanmış olan L_X fonksiyonuna, regle yüzeyin **açılım uzunluğu (adımı)** denir.



Şekil 2.4. Ortogonal yörünge eğrisi

X doğrusunun $\alpha = \alpha(s)$ kapalı eğrisine dayanarak kapalı regle yüzeyi çizdiğinde, kendi doğrultusunda $-\oint_{(\alpha)} dv$ kadar ilerleyerek ilk konumu ile çakıştığını gösterir. Bu nedenle, X ana doğrusunun bir P_1 noktasından başlayan ortogonal yörünge, bir periyot sonra aynı X ana doğrusunu P_1 den farklı bir P_2 noktasında keser.

Tanım 2.30: Ana doğrusunun birim doğrultman vektörü X olan bir kapalı regle yüzeyin ana doğrularına dik bir doğrultunun bir periyot sonra ilk konumu ile yaptığı açıya, regle yüzeyin **açılım açısı** denir ve λ_x ile gösterilir.

Teorem 2.6: Ana doğrusunun birim doğrultman vektörü X olan bir kapalı regle yüzeyin L_x açılım uzunluğu ve λ_x açılım açısı, sırasıyla, X in Steiner öteleme vektörü ve Steiner dönme vektörü üzerindeki dik izdüşümlerine eşittir, yani

$$\begin{cases} L_x = \langle V, X \rangle \\ \lambda_x = \langle D, X \rangle \end{cases} \quad (2.13)$$

dır (Hacısalihoglu, 1983).

Sonuç 2.1: $H = Sp\{E_1, E_2, E_3\}$ olmak üzere, H/H' hareketinde $\varphi(s, v)$ regle yüzeyinin dayanak eğrisi boyunca hareketin Steiner dönme vektörü için (2.3) ve (2.8) bağıntılarından

$$D = \oint_{(\alpha)} (k_2 E_1 + k_1 E_3) ds \quad (2.14)$$

bulunur. Burada k_1 ve k_2 dayanak eğrisinin eğrilik fonksiyonlarıdır. Benzer şekilde bir

$X = (x_1, x_2, x_3) \in H$ doğrultusu için,

$$V = \oint_{(\alpha)} dX$$

Steiner öteleme vektörü için de

$$V = E_1 \oint_{(\alpha)} ds \quad (2.15)$$

elde edilir.

Teorem 2.7: $\varphi(s, v) = \alpha(s) + v.u_1(s)$ kapalı regle yüzeyinin açılım açısı, açılım uzunluğu ve dralı

$$\begin{cases} \lambda_{u_1} = \oint_{(\alpha)} k_2 ds \\ L_{u_1} = \oint_{(\alpha)} ds \\ P_{u_1} = 0 \end{cases} \quad (2.16)$$

şeklindedir (Hacısalıhoğlu, 1983).

Teorem 2.8: $\varphi(s, v) = \alpha(s) + v.u_2(s)$ kapalı regle yüzeyinin açılım açısı, açılım uzunluğu ve dralı

$$\begin{cases} \lambda_{u_2} = 0 \\ L_{u_2} = 0 \\ P_{u_2} = \frac{k_2}{k_1^2 + k_2^2} \end{cases} \quad (2.17)$$

şeklindedir (Hacısalıhoğlu, 1983).

Teorem 2.9: $\varphi(s, v) = \alpha(s) + v.u_3(s)$ kapalı regle yüzeyinin açılım açısı, açılım uzunluğu ve dralı

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_{u_3} = \oint_{(a)} k_1 ds \\ L_{u_3} = 0 \\ P_{u_3} = \frac{1}{k_2} \end{array} \right. \quad (2.18)$$

şeklindedir (Hacısalıhoğlu, 1983).

3.MATERYAL VE METOT

3.1. Paralel p-Equidistant Regle Yüzeyler

E^3 de yay parametresi ile verilen bir α eğrisi diferensiyellenebilir bir eğri ve eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet 3-ayaklısı $\{u_1, u_2, u_3\}$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}u_1(s) &= \alpha'(s) \quad , \\u_2(s) &= \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|} \quad , \\u_3(s) &= u_1(s) \wedge u_2(s)\end{aligned}$$

yazılabilir. Burada u_1 vektörüne **teğet vektör**, u_2 vektörüne **asli normal vektör** ve u_3 vektörüne de **binormal vektör** adı verilir.

α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki eğriliği k_1 ve burulması k_2 olmak üzere, bu noktada Frenet vektörleri ile türev vektörleri arasında

$$\begin{cases}u_1' = k_1 u_2 \\u_2' = -k_1 u_1 + k_2 u_3 \\u_3' = -k_2 u_2\end{cases} \quad (3.1)$$

bağıntısı vardır. E^3 3-boyutlu Öklid uzayında dayanak eğrisi yukarıdaki gibi tanımlanan $\alpha = \alpha(s)$ eğrisi ve doğrultmanı $u_1 = u_1(s)$ Frenet vektörü olan bir φ regle yüzeyinin parametrik denklemi

$$\varphi(s, v) = \alpha(s) + v u_1(s) \quad , \quad (s, v) \in I \times IR \quad (3.2)$$

şeklindedir. Bu regle yüzeyin striksiyon çizgisi γ ile gösterilirse (2.6) dan

$$\gamma(s) = \alpha(s) - \frac{\langle u_1'(s), \alpha'(s) \rangle}{\|u_1'(s)\|^2} \cdot u_1(s) \quad , \quad u_1'(s) \neq 0 \quad . \quad (3.3)$$

Tanım 3.1: Bir φ regle yüzeyi için $P_x = 0$ ise φ ye **açılabilir regle yüzey** , $P_x \neq 0$ ise φ ye **aykırı regle yüzey** adı verilir.

Bir φ regle yüzeyinin γ striksiyon çizgisi dayanak eğrisi ve parametresi de yay parametresi olarak alınır, φ regle yüzeyinin parametrik ifadesi

$$\varphi(s, v) = \gamma(s) + v.u_1(s) \quad (3.4)$$

şeklinde yazılabilir.

Tanım 3.2: φ regle yüzeyinin dayanak eğrisinin birinci eğriliğine φ nin **tabii eğriliği**, ikinci eğriliğine ise φ nin **tabii torsiyonu** denir.

Eğer bir φ regle yüzeyinin striksiyon çizgisinin t birim teğet vektörünün u_1 ile yaptığı açı σ olarak alınır, t vektörü $\{u_1, u_2, u_3\}$ Frenet 3-ayaklısı cinsinden

$$t = (\cos \sigma)u_1 + (\sin \sigma)u_3, \quad -\frac{\pi}{2} < \sigma \leq \frac{\pi}{2} \quad (3.5)$$

şeklinde yazılabilir (Valeontis, 1986). Buradaki σ açısına φ nin **striksiyonu** k_1, k_2, σ invaryantlarının meydana getirdiği $\{k_1, k_2, \sigma\}$ sistemine de φ nin **tamamlanmış invaryant sistemi (kruppa invaryantları)** denir.

Teorem 3.1: φ, γ striksiyon çizgisini dayanak eğrisi kabul eden bir regle yüzey olsun. σ striksiyon, k_1 tabii eğrilik olmak üzere φ nin P dralı

$$P = \frac{\sin \sigma}{k_1} \quad (3.6)$$

ile verilebilir (Valeontis, 1986).

Tanım 3.3: Bir φ regle yüzeyinin dayanak eğrisi boyunca $Sp\{u_1, u_2\}$, $Sp\{u_2, u_3\}$ ve $Sp\{u_1, u_3\}$ uzaylarına karşılık gelen düzlemlere, sırasıyla, **oskülatör düzlem**, **normal düzlem** ve **rektifian düzlem** adı verilir.

Tanım 3.4: Bir φ regle yüzeyinin striksiyon eğrisi boyunca, $Sp\{u_1, u_2\}$, $Sp\{u_2, u_3\}$ ve $Sp\{u_1, u_3\}$ uzaylarına karşılık gelen düzlemlere, sırasıyla, **asimptotik düzlem**, **polar düzlem** ve **merkezi düzlem** adı verilir.

Tanım 3.5: $\alpha : I \rightarrow E^3$ ve $\bar{\alpha} : I \rightarrow E^3$ eğrilerinin $\alpha(s)$ ve $\bar{\alpha}(s)$ noktasındaki Frenet 3-ayaklıları sırasıyla $\{u_1, u_2, u_3\}$ ve $\{v_1, v_2, v_3\}$ olsun. Doğrultmanları $u_1(s)$ ve $v_1(s)$ olan iki regle yüzeyin parametrik denklemleri $\varphi(s, v) = \alpha(s) + v u_1(s)$ ve $\bar{\varphi}(s, v) = \bar{\alpha}(s) + v v_1(s)$ şeklinde verilsin. Bu yüzeyler için

i) Doğrultman vektörler paralel (teğet vektörler),

ii) Uygun noktalardaki polar düzlemler arasındaki uzaklık sabit ve bu uzaklık p ise φ ve $\bar{\varphi}$ regle yüzey çiftine **paralel p-equidistant regle yüzeyler** adı verilir.

Eğer özel olarak uygun noktalardaki polar düzlemler çakışırsa φ ve $\bar{\varphi}$ regle yüzey çiftine **paralel p-equivalent regle yüzeyler** adı verilir.

O halde bu tanıma göre φ ve $\bar{\varphi}$ paralel p-equidistant regle yüzeylerinin parametrik ifadeleri

$$\begin{cases} \varphi(s, v) = \alpha(s) + v u_1(s) \\ \bar{\varphi}(s, v) = \bar{\alpha}(s) + v v_1(s) \end{cases} \quad (3.7)$$

şeklinde verilebilir.

Teorem 3.2: φ ve $\bar{\varphi}$ paralel p-equidistant regle yüzeylerinin dayanak eğrileri, sırasıyla, α ve $\bar{\alpha}$, striksiyonları γ ve $\bar{\gamma}$ olsun. Bu regle yüzeylerin striksiyon eğrileri dayanak eğrileri olarak seçilsin ve bu yüzeylerin uygun noktalarındaki merkezi düzlemler, asimptotik düzlemler ve polar düzlemler arasındaki uzaklıklar da, sırasıyla, $|z|$, $|q|$ ve $|p|$ olsun.

$$\bar{\alpha} = \gamma + p u_1 + z u_2 + q u_3 \quad (3.8)$$

olmak üzere, $\bar{\varphi}$ regle yüzeyinin striksiyon çizgisi,

$$\bar{\gamma} = \gamma + zu_2 + qu_3 - \left(\frac{z' - qk_2}{k_1} \right) u_1 \quad (3.9)$$

şeklinde ifade edilebilir (Valeontis, 1986).

Bu teoremin bir neticesi olarak aşağıdaki sonuç verilebilir:

Sonuç 3.1: φ ve $\bar{\varphi}$ paralel p-equidistant regle yüzeylerinin polar düzlemleri arasındaki uzaklık

$$p = - \left(\frac{z' - qk_2}{k_1} \right) \quad (3.10)$$

dır (Valeontis, 1986).

Teorem 3.3: φ ve $\bar{\varphi}$ paralel p-equidistant regle yüzeyler olsun. $\bar{\varphi}$ regle yüzeyine ait $\{v_1, v_2, v_3\}$ Frenet 3-ayaklısı ile φ regle yüzeyine ait $\{u_1, u_2, u_3\}$ Frenet 3-ayaklısı denktir (Valeontis, 1986).

Teorem 3.4: φ ve $\bar{\varphi}$ paralel p-equidistant regle yüzeyler olsun. φ nin dayanak eğrisinin yay parametresi s , $\bar{\varphi}$ nin dayanak eğrisinin yay parametresi \bar{s} olsun. φ nin k_1 tabii eğriliği ve k_2 tabii torsiyonu ile $\bar{\varphi}$ nin \bar{k}_1 tabii eğriliği ve \bar{k}_2 tabii torsiyonu arasında

$$\bar{k}_1 = k_1 \frac{ds}{d\bar{s}} \quad \text{ve} \quad \bar{k}_2 = k_2 \frac{ds}{d\bar{s}} \quad (3.11)$$

bağıntıları vardır (Valeontis, 1986).

Tanım 3.6: φ regle yüzeyinin tabii eğriliği k_1 , tabii torsiyonu k_2 olmak üzere,

$$k = \frac{k_2}{k_1} \quad (3.12)$$

ifadesine φ nin **konik eğriliği** adı verilir.

Teorem 3.5: φ ve $\bar{\varphi}$ paralel p-equidistant regle yüzeyleri aynı konik eğriliğe sahiptir (Valeontis, 1986).

Teorem 3.6: φ ve $\bar{\varphi}$ paralel p-equidistant regle yüzeyler, $\bar{\varphi}$ nin dralı \bar{P} ve φ nin dralı da P olsun. Bu takdirde draller arasında

$$\bar{P} = \frac{\sin \sigma + q' + zk_2}{k_1} = P + \frac{q' + zk_2}{k_1} \quad (3.13)$$

bağıntısı vardır (Valeontis, 1986).

Teorem 3.7: φ ve $\bar{\varphi}$ paralel p-equidistant regle yüzeyler olsun. $\bar{\varphi}$ regle yüzeyinin striksiyonu $\bar{\sigma}$, φ regle yüzeyinin striksiyonu σ olsun. Bunlar arasında

$$\begin{cases} \cos \bar{\sigma} = \left(\cos \sigma - zk_1 - \left(\frac{z' - qk_2}{k_1} \right)' \right) \frac{ds}{ds} \\ \sin \bar{\sigma} = (\sin \sigma + q' + zk_2) \frac{ds}{ds} \end{cases} \quad (3.14)$$

bağıntıları vardır (Valeontis, 1986).

Teorem 3.8: φ ve $\bar{\varphi}$ kapalı paralel p-equidistant regle yüzey çiftlerinin açılım açıları arasında

$$\begin{cases} \lambda_{v_1} = \lambda_{u_1} + a_1, & a_1 = \oint_{(pu_1+zu_2+qu_3)} k_2 ds \\ \lambda_{v_2} = \lambda_{u_2} = 0 \\ \lambda_{v_3} = \lambda_{u_3} + a_2, & a_2 = \oint_{(pu_1+zu_2+qu_3)} k_1 ds \end{cases} \quad (3.15)$$

bağıntıları vardır (Baykut, 1994).

Teorem 3.9: φ ve $\bar{\varphi}$ kapalı paralel p-equidistant regle yüzeyler olsun. Bu regle yüzeylerin dayanak eğrileri olarak eğilim çizgileri alınırsa açılım uzunlukları arasında

$$\bar{k}_1 L_{v_1} = k_1 (L_{u_1} + a_3), \quad a_3 = \oint_{(pu_1+zu_2+qu_3)} ds \quad (3.16)$$

bağıntısı vardır (Baykut, 1994).

Teorem 3.10: φ ve $\bar{\varphi}$ kapalı paralel p-equidistant regle yüzeylerine ait Frenet 3-ayaklıları, sırasıyla, $\{u_1, u_2, u_3\}$ ve $\{v_1, v_2, v_3\}$ olsun. Frenet vektörlerinin çizdiği regle yüzeylerinin dralleri arasında

$$\begin{cases} P_{v_1} = P_{u_1} = 0 \\ P_{v_2} = P_{u_2} \frac{d\bar{s}}{ds} \\ P_{v_3} = P_{u_3} \frac{d\bar{s}}{ds} \end{cases} \quad (3.17)$$

bağıntıları vardır (Baykut, 1994).

Teorem 3.11: φ ve $\bar{\varphi}$ paralel p-equidistant regle yüzeyler olsun. φ ve $\bar{\varphi}$ regle yüzeyleri için aşağıdaki özelliklerden iki tanesi sağlanırsa üçüncü özellik de sağlanır (Baykut, 1994) :

- 1- φ nin γ striksiyon çizgisi φ nin bir eğilim çizgisidir
- 2- $\bar{\varphi}$ nin $\bar{\gamma}$ striksiyon çizgisi $\bar{\varphi}$ nin bir eğilim çizgidir
- 3- φ ve $\bar{\varphi}$ nin uygun noktalarındaki asimptotik düzlemleri arasındaki q uzaklığı

sabittir.

Teorem 3.12: φ ve $\bar{\varphi}$ paralel p-equivalent regle yüzeyler olsun. φ ve $\bar{\varphi}$ regle yüzeyleri aynı drale sahipse, uygun striksiyon noktaları arasındaki uzaklık sabittir (Baykut, 1994).

Tanım 3.7: $\alpha : I \rightarrow E^3$ ve $\beta : I \rightarrow E^3$ eğrilerinin $\alpha(s)$ ve $\beta(\bar{s})$ noktasındaki Frenet 3-ayaklıları, sırasıyla, $\{u_1, u_2, u_3\}$ ve $\{v_1, v_2, v_3\}$ olsun. α eğrisinin asli normal vektörü ile β eğrisinin binormal vektörü lineer bağımlı ise α eğrisine **Mannheim eğrisi**, β eğrisine α nin **Mannheim eğri partneri** ve $\{\alpha, \beta\}$ çiftine de **Mannheim çifti** denir (Liu ve Wang, 2008).

Teorem 3.13: E^3 de Mannheim eğri çiftlerine karşılık gelen noktalar arasındaki uzaklık sabittir (Orbay ve Kasap, 2009).

Teorem 3.14: E^3 de bir α eğrisinin $\{\alpha, \beta\}$ Mannheim çiftine dahil bir β Mannheim eğri partneri vardır (Orbay ve Kasap, 2009).

Teorem 3.15: E^3 de eğriliği k_1 ve torsiyonu k_2 olan bir α eğrisi Mannheim eğrisidir

$$\Leftrightarrow \lambda = \frac{k_1}{k_1^2 + k_2^2}. \quad (\lambda \neq 0 = sbt).$$

İspat: E^3 de s yay parametresi ile verilen bir Mannheim eğrisi α ve \bar{s} yay parametresi ile verilen α nın Mannheim eğri çifti de β olsun. Tanım 3.7 den,

$$\beta(s) = \alpha(s) + \lambda(s)u_2(s) \quad (3.18)$$

yazılabilir ($\lambda \neq 0 = sbt$). (3.18) ifadesinin s ye göre türevi alınır ve Frenet formülleri yerine yazılırsa

$$v_1 \frac{d\bar{s}}{ds} = (1 - \lambda k_1)u_1 + \frac{d\lambda}{ds}u_2 + \lambda k_2 u_3 \quad (3.19)$$

bulunur ve eşitlik u_2 ile iç çarpılırsa

$$\frac{d\lambda}{ds} = 0$$

olur. Burada λ sıfırdan farklı sabittir. Buna göre (3.19) ifadesi yeniden düzenlenirse

$$v_1 \cdot \frac{d\bar{s}}{ds} = (1 - \lambda k_1)u_1 + \lambda k_2 u_3 \quad (3.20)$$

bulunur. s ye göre türev alınır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$\frac{dv_1}{ds} \cdot \left(\frac{d\bar{s}}{ds} \right)^2 = -\lambda k_1' u_1 + \left[k_1 - \lambda (k_1^2 + k_2^2) \right] u_2 + \lambda k_2' u_3$$

bulunur. u_2 ile v_3 lineer bağımlı olduğundan

$$\lambda = \frac{k_1}{k_1^2 + k_2^2} \quad (\lambda \neq 0 = sbt.). \quad (3.21)$$

elde edilir.

Tanım 3.8: Teğetleri sabit bir doğrultu ile sabit bir açı yapan eğrilere **helis (sabit eğilimli eğriler)** denir.

Tanım 3.9: Sabit eğilimli α eğrisinin, üzerine çizilmiş bulunduğu silindirin, bir dönel silindir olması halinde, α eğrisine **dairesel helis** denir.

Teorem 3.16: Bir dairesel heliste eğrilik ve burulma sabittir (Şenatalar, 1978).

4.BULGULAR

4.1. Paralel z-Equidistant Regle Yüzeyler ve Bazı Karakteristik Özellikleri

Tanım 4.1: E^3 de $\alpha : I \rightarrow E^3$ ve $\bar{\alpha} : I \rightarrow E^3$ eğrilerinin $\alpha(s)$ ve $\bar{\alpha}(s)$ noktasındaki Frenet 3-ayaklıları, sırasıyla, $\{u_1, u_2, u_3\}$ ve $\{v_1, v_2, v_3\}$ olsun. Doğrultmanları $u_2(s)$ ve $v_2(s)$ olan iki regle yüzeyin parametrik denklemleri, $S : \varphi(s, v) = \alpha(s) + v u_2(s)$ ve $\bar{S} : \bar{\varphi}(s, v) = \bar{\alpha}(s) + v v_2(s)$ şeklinde verilsin. Bu yüzeyler için

i) Doğrultman vektörler paralel (asli normal vektörler),

ii) Uygun noktalardaki merkezi düzlemler arasındaki uzaklık sabit ve bu uzaklık z ise bu iki regle yüzey çiftine **paralel z-equidistant regle yüzeyler** adı verilir.

S regle yüzeyinin striksiyon çizgisi $\gamma(s)$, eğrilikleri $k_1(s)$ ve $k_2(s)$, \bar{S} regle yüzeyinin striksiyon çizgisi $\bar{\gamma}(s)$, eğrilikleri $\bar{k}_1(s)$ ve $\bar{k}_2(s)$ olsun. Bu durumda striksiyon çizgilerinin parametrik denklemleri

$$\gamma(s) = \alpha(s) - \frac{\langle u_2'(s), \alpha'(s) \rangle}{\|u_2'(s)\|^2} \cdot u_2(s), \quad u_2'(s) \neq 0 \quad (4.1)$$

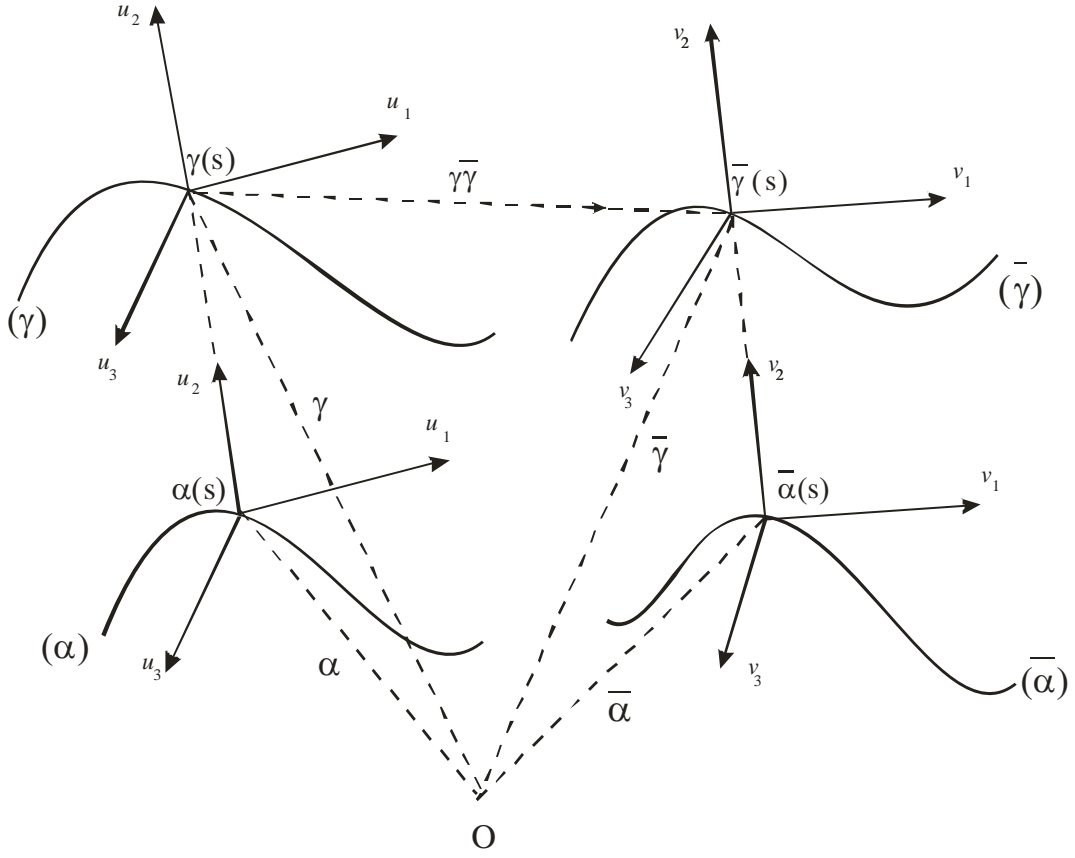
$$\bar{\gamma}(s) = \bar{\alpha}(s) - \frac{\langle v_2'(s), \bar{\alpha}'(s) \rangle}{\|v_2'(s)\|^2} \cdot v_2(s), \quad v_2'(s) \neq 0 \quad (4.2)$$

dır. Frenet formülleri burada yerine yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$\gamma(s) = \alpha(s) + \frac{k_1(s)}{k_1^2(s) + k_2^2(s)} \cdot u_2(s), \quad (4.3)$$

$$\bar{\gamma}(s) = \bar{\alpha}(s) + \frac{\bar{k}_1(s)}{\bar{k}_1^2(s) + \bar{k}_2^2(s)} \cdot v_2(s) \quad (4.4)$$

bulunur.



Şekil 4.1. Striksiyon eğrisi

$\bar{\gamma}\bar{\gamma}$ vektörünün u_1, u_2, u_3 vektörleri üzerine dik izdüşümleri, sırasıyla, p , z ve q olsun. Bu durumda

$$\bar{\gamma}\bar{\gamma} = pu_1 + zu_2 + qu_3, \quad (4.5)$$

$$\bar{\gamma} = \gamma + pu_1 + zu_2 + qu_3. \quad (4.5)$$

Teorem 4.1: S ve \bar{S} paralel z-equidistant regle yüzeylerin striksiyon çizgileri, sırasıyla, γ ve $\bar{\gamma}$ olsun. Bunlar arasında

$$\bar{\gamma} = \gamma + pu_1 + qu_3 + \left[\frac{k_1 \left(1 + p' - \frac{k_1^2}{k_1^2 + k_2^2} \right) - k_2 \left(q' + \frac{k_1 k_2}{k_1^2 + k_2^2} \right)}{k_1^2 + k_2^2} \right] u_2$$

bağıntısı vardır.

İspat: $\bar{\gamma} = \gamma + pu_1 + zu_2 + qu_3$ eşitliğinde $\bar{\gamma}$ yerine (4.4) bağıntısındaki değeri yazılırsa

$$\bar{\alpha} + \frac{\bar{k}_1}{\bar{k}_1 + \bar{k}_2} v_2 = \gamma + pu_1 + zu_2 + qu_3$$

olur. $v_2(s) = u_2(s)$ olduğundan

$$\bar{\alpha} = \gamma + pu_1 + \left(z - \frac{\bar{k}_1}{\bar{k}_1 + \bar{k}_2} \right) u_2 + qu_3 \quad (4.6)$$

yazılabilir. Bu son eşitliğin türevi alınır

$$\bar{\alpha}' = \gamma' + p'u_1 + pu_1' + \left(z - \frac{\bar{k}_1}{\bar{k}_1 + \bar{k}_2} \right)' u_2 + \left(z - \frac{\bar{k}_1}{\bar{k}_1 + \bar{k}_2} \right) u_2' + q'u_3 + qu_3' \quad (4.7)$$

olur. Bu denklemde Frenet formülleri yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}' = \gamma' + p'u_1 + p(k_1u_2) + \left(z - \frac{\bar{k}_1}{\bar{k}_1 + \bar{k}_2} \right)' u_2 + \left(z - \frac{\bar{k}_1}{\bar{k}_1 + \bar{k}_2} \right) (-k_1u_1 + k_2u_3) \\ + q'u_3 + q(-k_2u_2) \end{aligned}$$

olur ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}' = \gamma' + \left[p' - k_1 \left(z - \frac{\bar{k}_1}{\bar{k}_1 + \bar{k}_2} \right) \right] u_1 + \left[pk_1 - qk_2 + \left(z - \frac{\bar{k}_1}{\bar{k}_1 + \bar{k}_2} \right)' \right] u_2 \\ + \left[q' + k_2 \left(z - \frac{\bar{k}_1}{\bar{k}_1 + \bar{k}_2} \right) \right] u_3 \end{aligned} \quad (4.8)$$

bulunur. Diğer taraftan (4.3) ifadesindeki $\gamma = \alpha + \frac{k_1}{k_1^2 + k_2^2} \cdot u_2$ vektörün türevi alınır ve

Frenet formülleri yerine yazılırsa

$$\gamma' = \alpha' + \left(\frac{k_1}{k_1^2 + k_2^2} \right)' \cdot u_2 + \left(\frac{k_1}{k_1^2 + k_2^2} \right) u_2' ,$$

$$\gamma' = u_1 + \left(\frac{k_1}{k_1^2 + k_2^2} \right)' \cdot u_2 + \left(\frac{k_1}{k_1^2 + k_2^2} \right) (-k_1 u_1 + k_2 u_3)$$

olur. Burada gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\gamma' = \left(1 - \frac{k_1^2}{k_1^2 + k_2^2} \right) u_1 + \left(\frac{k_1}{k_1^2 + k_2^2} \right)' u_2 + \left(\frac{k_1 k_2}{k_1^2 + k_2^2} \right) u_3 \quad (4.9)$$

bulunur. (4.9) ifadesi (4.8) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}' &= \left(1 - \frac{k_1^2}{k_1^2 + k_2^2} \right) u_1 + \left(\frac{k_1}{k_1^2 + k_2^2} \right)' u_2 + \left(\frac{k_1 k_2}{k_1^2 + k_2^2} \right) u_3 + \left[p' - k_1 \left(z - \frac{\bar{k}_1}{\bar{k}_1 + \bar{k}_2} \right) \right] u_1 \\ &+ \left[p k_1 - q k_2 + \left(z - \frac{\bar{k}_1}{\bar{k}_1 + \bar{k}_2} \right)' \right] u_2 + \left[q' + k_2 \left(z - \frac{\bar{k}_1}{\bar{k}_1 + \bar{k}_2} \right) \right] u_3 \end{aligned}$$

olur. Burada gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}' &= \left[\left(1 - \frac{k_1^2}{k_1^2 + k_2^2} \right) + p' - \left(z - \frac{\bar{k}_1}{\bar{k}_1 + \bar{k}_2} \right) k_1 \right] u_1 \\ &+ \left[\left(\frac{k_1}{k_1^2 + k_2^2} \right)' + p k_1 - q k_2 + \left(z - \frac{\bar{k}_1}{\bar{k}_1 + \bar{k}_2} \right)' \right] u_2 + \left[\left(\frac{k_1 k_2}{k_1^2 + k_2^2} \right) + q' + \left(z - \frac{\bar{k}_1}{\bar{k}_1 + \bar{k}_2} \right) k_2 \right] u_3 \end{aligned}$$

bulunur. Bu eşitliğin her iki tarafı u_2' ile iç çarpılırsa

$$\begin{aligned} \langle \bar{\alpha}', u_2' \rangle &= \left[\left(1 - \frac{k_1^2}{k_1^2 + k_2^2} \right) + p' - \left(z - \frac{\bar{k}_1}{\bar{k}_1 + \bar{k}_2} \right) k_1 \right] \langle u_1, u_2' \rangle \\ &+ \left[\left(\frac{k_1}{k_1^2 + k_2^2} \right)' + p k_1 - q k_2 + \left(z - \frac{\bar{k}_1}{\bar{k}_1 + \bar{k}_2} \right)' \right] \langle u_2, u_2' \rangle \\ &+ \left[\left(\frac{k_1 k_2}{k_1^2 + k_2^2} \right) + q' + \left(z - \frac{\bar{k}_1}{\bar{k}_1 + \bar{k}_2} \right) k_2 \right] \langle u_3, u_2' \rangle \end{aligned}$$

olur. Burada Frenet formülleri yerine yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned}
\langle \bar{\alpha}', u_2' \rangle &= \left[\left(1 - \frac{k_1^2}{k_1^2 + k_2^2} \right) + p' - \left(z - \frac{\bar{k}_1}{\bar{k}_1^2 + \bar{k}_2^2} \right) k_1 \right] \langle u_1, -k_1 u_1 + k_2 u_3 \rangle \\
&+ \left[\left(\frac{k_1}{k_1^2 + k_2^2} \right)' + pk_1 - qk_2 + \left(z - \frac{\bar{k}_1}{\bar{k}_1^2 + \bar{k}_2^2} \right)' \right] \langle u_2, -k_1 u_1 + k_2 u_3 \rangle \\
&+ \left[\left(\frac{k_1 k_2}{k_1^2 + k_2^2} \right) + q' + \left(z - \frac{\bar{k}_1}{\bar{k}_1^2 + \bar{k}_2^2} \right) k_2 \right] \langle u_3, -k_1 u_1 + k_2 u_3 \rangle \\
\langle \bar{\alpha}', u_2' \rangle &= -k_1 \left[\left(1 - \frac{k_1^2}{k_1^2 + k_2^2} \right) + p' \right] + k_2 \left[\frac{k_1 k_2}{k_1^2 + k_2^2} + q' \right] + \left(z - \frac{\bar{k}_1}{\bar{k}_1^2 + \bar{k}_2^2} \right) (k_1^2 + k_2^2) \quad (4.10)
\end{aligned}$$

elde edilir. $\bar{\gamma} = \bar{\alpha} - \frac{\langle v_2', \bar{\alpha}' \rangle}{\|v_2'\|^2} \cdot v_2$ denkleminde $v_2 = u_2$ alınabileceğinden

$\bar{\gamma} = \bar{\alpha} - \frac{\langle u_2', \bar{\alpha}' \rangle}{\|u_2'\|^2} \cdot u_2$ olur. Burada (4.6), (4.10) ve Frenet formülleri yerlerine

yazılırsa

$$\begin{aligned}
\bar{\gamma} &= \gamma + pu_1 + \left(z - \frac{\bar{k}_1}{\bar{k}_1^2 + \bar{k}_2^2} \right) u_2 + qu_3 \\
&- \frac{-k_1 \left[\left(1 - \frac{k_1^2}{k_1^2 + k_2^2} \right) + p' \right] + k_2 \left[\frac{k_1 k_2}{k_1^2 + k_2^2} + q' \right] + \left(z - \frac{\bar{k}_1}{\bar{k}_1^2 + \bar{k}_2^2} \right) (k_1^2 + k_2^2)}{k_1^2 + k_2^2} u_2
\end{aligned}$$

bulunur. Burada gerekli kısaltmalar yapılırsa

$$\begin{aligned}
\bar{\gamma} &= \gamma + pu_1 + \left(z - \frac{\bar{k}_1}{\bar{k}_1^2 + \bar{k}_2^2} \right) u_2 + qu_3 \\
&- \frac{-k_1 \left[\left(1 - \frac{k_1^2}{k_1^2 + k_2^2} \right) + p' \right] + k_2 \left[\frac{k_1 k_2}{k_1^2 + k_2^2} + q' \right]}{k_1^2 + k_2^2} u_2 - \frac{\left(z - \frac{\bar{k}_1}{\bar{k}_1^2 + \bar{k}_2^2} \right) (k_1^2 + k_2^2)}{k_1^2 + k_2^2} u_2
\end{aligned}$$

$$\bar{\gamma} = \gamma + pu_1 + qu_3 + \left[\frac{k_1 \left(1 + p' - \frac{k_1^2}{k_1^2 + k_2^2} \right) - k_2 \left(q' + \left(\frac{k_1 k_2}{k_1^2 + k_2^2} \right) \right)}{k_1^2 + k_2^2} \right] u_2$$

elde edilir.

Bu teoremin bir neticesi olarak aşağıdaki sonuç verilebilir:

Sonuç 4.1: S ve \bar{S} paralel z-equidistant regle yüzeylerinin merkezi düzlemleri arasındaki uzaklık (4.5) den

$$z = \left[\frac{k_1 \left(1 + p' - \frac{k_1^2}{k_1^2 + k_2^2} \right) - k_2 \left(q' + \left(\frac{k_1 k_2}{k_1^2 + k_2^2} \right) \right)}{k_1^2 + k_2^2} \right] \quad (4.11)$$

dır. Özel olarak $\{\alpha, \gamma\}$ ve $\{\bar{\alpha}, \bar{\beta}\}$ çiftleri Mannheim eğri çifti olması halinde bu sonucun bir neticesi olarak aşağıdaki sonuç verilebilir:

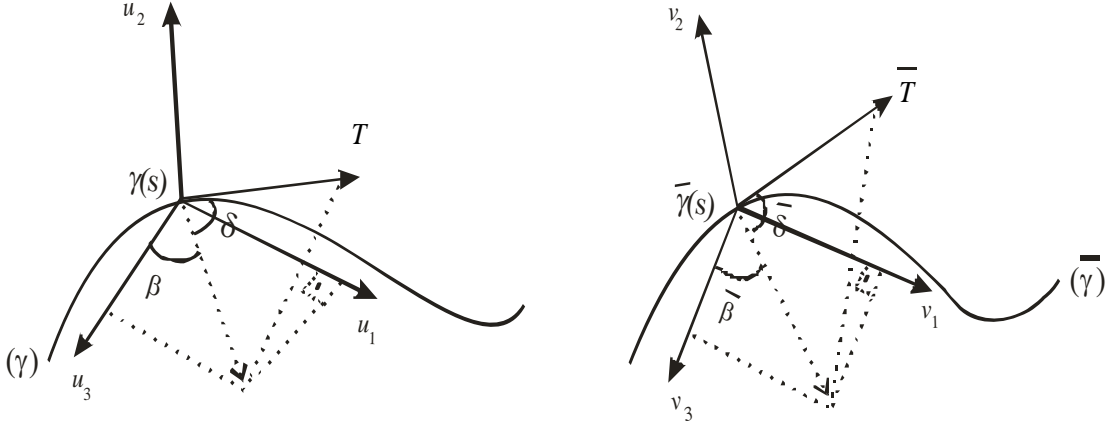
Sonuç 4.2: $\{\alpha, \gamma\}$ ve $\{\bar{\alpha}, \bar{\gamma}\}$ çiftleri Mannheim eğri çifti ise S ve \bar{S} paralel z-equidistant regle yüzeylerinin merkezi düzlemleri arasındaki uzaklık

$$z = \lambda \left(p' - q' \frac{k_2}{k_1} \right), \quad \lambda = \frac{k_1}{k_1^2 + k_2^2}. \quad (4.12)$$

Sonuç 4.3: S ve \bar{S} paralel z-equidistant regle yüzeylerinin striksiyon eğrilerinin yay parametreleri sırasıyla s_γ ve $s_{\bar{\gamma}}$, teğetleri de T ve \bar{T} olsun. T vektörü ile bu vektörün merkezi düzleme dik izdüşüm vektörü arasındaki açı δ ve bu izdüşüm vektörü ile u_3 vektörü arasındaki açı β olsun. \bar{T} vektörü ile bu vektörün merkezi düzleme dik izdüşüm vektörü arasındaki açı $\bar{\delta}$ ve bu izdüşüm vektörü ile v_3 vektörü arasındaki açı $\bar{\beta}$ olsun. Bu durumda bu yüzeylerin merkezi düzlemleri arasındaki uzaklık

$$z = \left[\frac{k_1 \left(\cos \delta \sin \beta \frac{ds_\gamma}{ds} + p' \right) - k_2 \left(\cos \delta \cos \beta \frac{ds_\gamma}{ds} + q' \right)}{k_1^2 + k_2^2} \right].$$

İspat:



Şekil 4.2. Striksiyon eğrisinin teğeti

Şekil 4.2 den T ve \bar{T} birim teğet vektörleri için

$$T = \cos \delta \sin \beta u_1 + \sin \delta u_2 + \cos \delta \cos \beta u_3 \quad (4.13)$$

$$\bar{T} = \cos \bar{\delta} \sin \bar{\beta} v_1 + \sin \bar{\delta} v_2 + \cos \bar{\delta} \cos \bar{\beta} v_3 \quad (4.14)$$

yazılabilir. (4.6) ifadesindeki $\bar{\alpha} = \gamma + pu_1 + \left(z - \frac{\bar{k}_1}{\bar{k}_1^2 + \bar{k}_2^2} \right) u_2 + qu_3$ vektörünün türevi

alınırsa

$$\bar{\alpha}' = \gamma' + p'u_1 + pu_1' + \left(z - \frac{\bar{k}_1}{\bar{k}_1^2 + \bar{k}_2^2} \right)' u_2 + \left(z - \frac{\bar{k}_1}{\bar{k}_1^2 + \bar{k}_2^2} \right) u_2' + q'u_3 + qu_3'$$

olur. Burada Frenet formülleri yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned}\bar{\alpha}' = \gamma' + & \left[p' - k_1 \left(z - \frac{\bar{k}_1}{\bar{k}_1 + \bar{k}_2} \right) \right] u_1 + \left[pk_1 - qk_2 + \left(z - \frac{\bar{k}_1}{\bar{k}_1 + \bar{k}_2} \right)' \right] u_2 \\ & + \left[q' + k_2 \left(z - \frac{\bar{k}_1}{\bar{k}_1 + \bar{k}_2} \right) \right] u_3\end{aligned}\quad (4.15)$$

bulunur. Diğer taraftan γ vektörünün s ye göre türevi

$$\gamma' = \frac{d\gamma}{ds_\gamma} \cdot \frac{ds_\gamma}{ds} = T \cdot \frac{ds_\gamma}{ds}$$

şeklindedir. Bu son eşitlikte T nin yerine (4.13) bağıntısındaki eşiti yazılırsa

$$\gamma' = (\cos \delta \sin \beta u_1 + \sin \delta u_2 + \cos \delta \cos \beta u_3) \cdot \frac{ds_\gamma}{ds}$$

olur. (4.15) denkleminde bu son eşitlik yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned}\bar{\alpha}' = & \left[\cos \delta \sin \beta \frac{ds_\gamma}{ds} + p' - \left(z - \frac{\bar{k}_1}{\bar{k}_1 + \bar{k}_2} \right) k_1 \right] u_1 \\ & + \left[\sin \delta \frac{ds_\gamma}{ds} + pk_1 - qk_2 + \left(z - \frac{\bar{k}_1}{\bar{k}_1 + \bar{k}_2} \right)' \right] u_2 \\ & + \left[\cos \delta \cos \beta \frac{ds_\gamma}{ds} + q' + \left(z - \frac{\bar{k}_1}{\bar{k}_1 + \bar{k}_2} \right) k_2 \right] u_3\end{aligned}$$

bulunur. Bu eşitliğin her iki tarafı u_2' ile iç çarpılırsa

$$\begin{aligned}\langle \bar{\alpha}', u_2' \rangle = & -k_1 \cos \delta \sin \beta \frac{ds_\gamma}{ds} - k_1 p' + k_2 \cos \delta \cos \beta \frac{ds_\gamma}{ds} \\ & + k_2 q' + \left(z - \frac{\bar{k}_1}{\bar{k}_1 + \bar{k}_2} \right) (k_1^2 + k_2^2)\end{aligned}\quad (4.16)$$

elde edilir. $\bar{\gamma} = \bar{\alpha} - \frac{\langle u_2', \bar{\alpha}' \rangle}{\|u_2'\|^2} \cdot u_2$ denkleminde (4.6) ve (4.16) ifadeleri yerlerine

yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$\bar{\gamma} = \gamma + pu_1 + qu_3 + \left[\frac{k_1 \left(\cos \delta \sin \beta \frac{ds_\gamma}{ds} + p' \right) - k_2 \left(\cos \delta \cos \beta \frac{ds_\gamma}{ds} + q' \right)}{k_1^2 + k_2^2} \right] u_2$$

olur ve (4.5) den

$$z = \left[\frac{k_1 \left(\cos \delta \sin \beta \frac{ds_\gamma}{ds} + p' \right) - k_2 \left(\cos \delta \cos \beta \frac{ds_\gamma}{ds} + q' \right)}{k_1^2 + k_2^2} \right]. \quad (4.17)$$

bulunur.

Özel olarak $\{\alpha, \gamma\}$ ve $\{\bar{\alpha}, \bar{\gamma}\}$ çiftleri Mannheim eğri çifti olması halinde bu sonucun bir neticesi olarak aşağıdaki sonuç verilebilir:

Sonuç 4.4: $\{\alpha, \gamma\}$ ve $\{\bar{\alpha}, \bar{\gamma}\}$ çiftleri Mannheim eğri çifti ise S ve \bar{S} paralel z-equidistant regle yüzeylerinin merkezi düzlemleri arasındaki uzaklık sonuç 4.3 ten

$$z = \lambda \left[\left(\cos \delta \sin \beta - \frac{k_2}{k_1} \cos \delta \cos \beta \right) \frac{ds_\gamma}{ds} + p' - \frac{k_2}{k_1} q' \right]. \quad (4.18)$$

Teorem 4.2: S ve \bar{S} paralel z-equidistant regle yüzeyler olsun. $\{u_1, u_2, u_3\}$ ve $\{v_1, v_2, v_3\}$ Frenet 3-ayaklıları arasında aşağıdaki bağıntı vardır:

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & 0 & \sin \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

veya

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & 0 & -\sin \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

İspat: v_1 vektörünün u_1 vektörü ile yaptığı açı φ olsun. Bu durumda

$$v_1 = \cos \varphi u_1 + \sin \varphi u_3$$

olur. v_2 vektörü u_2 vektörüne paralel olduğundan $v_2 = u_2$ dir.

$$v_3 = v_1 \wedge v_2,$$

eşitliğinde v_1 ve v_2 yerine yazılırsa

$$v_3 = \cos \varphi u_1 + \sin \varphi u_3 \wedge u_2$$

olur. Burada gerekli işlemler yapılırsa

$$v_3 = -\sin \varphi u_1 + \cos \varphi u_3$$

bulunur.

Teorem 4.3: S ve \bar{S} paralel z-equidistant regle yüzeyler olsun. S nin dayanak eğrisinin yay parametresi s , \bar{S} in dayanak eğrisinin yay parametresi \bar{s} olsun. S nin eğrilikleri k_1 ve k_2 , \bar{S} nin eğrilikleri \bar{k}_1 ve \bar{k}_2 ise bu eğrilikler arasında

$$\bar{k}_1 = (\cos \varphi k_1 - \sin \varphi k_2) \frac{ds}{d\bar{s}},$$

$$\bar{k}_2 = (\sin \varphi k_1 + \cos \varphi k_2) \frac{ds}{d\bar{s}}$$

bağıntıları vardır.

İspat: S ve \bar{S} paralel z-equidistant regle yüzeyler olduğundan $u_2(s) = v_2(\bar{s})$ alınabilir. s ye göre türevi alınırsa

$$\frac{du_2}{ds} = \frac{dv_2}{d\bar{s}} \cdot \frac{d\bar{s}}{ds}$$

olur ve Frenet formülleri yerlerine yazılırsa

$$-k_1 u_1 + k_2 u_3 = (-\bar{k}_1 v_1 + \bar{k}_2 v_3) \frac{d\bar{s}}{ds}$$

bulunur. Eşitliğin her iki tarafı v_1 ve v_3 ile iç çarpılırsa

$$-k_1 \langle u_1, v_1 \rangle + k_2 \langle u_3, v_1 \rangle = \left(-\bar{k}_1 \langle v_1, v_1 \rangle + \bar{k}_2 \langle v_3, v_1 \rangle \right) \frac{d\bar{s}}{ds}$$

$$-k_1 \langle u_1, v_3 \rangle + k_2 \langle u_3, v_3 \rangle = \left(-\bar{k}_1 \langle v_1, v_3 \rangle + \bar{k}_2 \langle v_3, v_3 \rangle \right) \frac{d\bar{s}}{ds}$$

olur ve burada gerekli işlemler yapılırsa

$$\bar{k}_1 = \left(\cos \varphi k_1 - \sin \varphi k_2 \right) \frac{ds}{d\bar{s}}, \quad (4.20)$$

$$\bar{k}_2 = \left(\sin \varphi k_1 + \cos \varphi k_2 \right) \frac{ds}{d\bar{s}} \quad (4.21)$$

elde edilir.

Teorem 4.4: S ve \bar{S} paralel z-equidistant regle yüzeylerinin striksiyon eğrilerinin teğetlerinin bileşenleri arasında aşağıdaki bağıntılar vardır:

$$\cos \bar{\delta} \sin \bar{\beta} = \left\{ \cos \varphi \left[\cos \delta \sin \beta \frac{ds_\gamma}{ds} + p' - \frac{k_1^2 \left(\cos \delta \sin \beta \frac{ds_\gamma}{ds} + p' \right) - k_1 k_2 \left(\cos \delta \cos \beta \frac{ds_\gamma}{ds} + q' \right)}{k_1^2 + k_2^2} \right] \right. \\ \left. + \sin \varphi \left[\cos \delta \cos \beta \frac{ds_\gamma}{ds} + q' + \frac{k_1 k_2 \left(\cos \delta \sin \beta \frac{ds_\gamma}{ds} + p' \right) - k_2^2 \left(\cos \delta \cos \beta \frac{ds_\gamma}{ds} + q' \right)}{k_1^2 + k_2^2} \right] \right\} \frac{ds}{ds_\gamma},$$

$$\sin \bar{\delta} = \left[\sin \delta \frac{ds_\gamma}{ds} + p k_1 - q k_2 + \frac{k_1 \left(\cos \delta \sin \beta \frac{ds_\gamma}{ds} + p' \right) - k_2 \left(\cos \delta \cos \beta \frac{ds_\gamma}{ds} + q' \right)}{k_1^2 + k_2^2} \right]' \frac{ds}{ds_\gamma},$$

$$\cos \bar{\delta} \cos \bar{\beta} = \left\{ -\sin \varphi \left[\cos \delta \sin \beta \frac{ds_\gamma}{ds} + p' - \frac{k_1^2 \left(\cos \delta \sin \beta \frac{ds_\gamma}{ds} + p' \right) - k_1 k_2 \left(\cos \delta \cos \beta \frac{ds_\gamma}{ds} + q' \right)}{k_1^2 + k_2^2} \right] \right. \\ \left. + \cos \varphi \left[\cos \delta \cos \beta \frac{ds_\gamma}{ds} + q' + \frac{k_1 k_2 \left(\cos \delta \sin \beta \frac{ds_\gamma}{ds} + p' \right) - k_2^2 \left(\cos \delta \cos \beta \frac{ds_\gamma}{ds} + q' \right)}{k_1^2 + k_2^2} \right] \right\} \frac{ds}{ds_\gamma}.$$

$$\text{İspat : } \bar{\gamma} = \gamma + pu_1 + qu_3 + \left[\frac{k_1 \left(\cos \delta \sin \beta \frac{ds_\gamma}{ds} + p' \right) - k_2 \left(\cos \delta \cos \beta \frac{ds_\gamma}{ds} + q' \right)}{k_1^2 + k_2^2} \right] u_2$$

denkleminin s ye göre türevi alınır ve $\frac{d\bar{\gamma}}{ds_\gamma} = \bar{T}$ ve $\frac{d\gamma}{ds} = T$ olduğu dikkate alınırsa

$$\bar{T} \cdot \frac{ds_\gamma}{ds} = T \cdot \frac{ds_\gamma}{ds} + p'u_1 + pu'_1 + q'u_3 + qu'_3 \\ + \left[\frac{k_1 \left(\cos \delta \sin \beta \frac{ds_\gamma}{ds} + p' \right) - k_2 \left(\cos \delta \cos \beta \frac{ds_\gamma}{ds} + q' \right)}{k_1^2 + k_2^2} \right]' u_2 \\ + \left[\frac{k_1 \left(\cos \delta \sin \beta \frac{ds_\gamma}{ds} + p' \right) - k_2 \left(\cos \delta \cos \beta \frac{ds_\gamma}{ds} + q' \right)}{k_1^2 + k_2^2} \right] u'_2$$

olur. Bu son eşitlikte Frenet formülleri yerine yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned} \bar{T} \cdot \frac{ds_{\gamma}}{ds} = T \cdot \frac{ds_{\gamma}}{ds} + & \left[p' - \frac{k_1^2 \left(\cos \delta \sin \beta \frac{ds_{\gamma}}{ds} + p' \right) - k_1 k_2 \left(\cos \delta \cos \beta \frac{ds_{\gamma}}{ds} + q' \right)}{k_1^2 + k_2^2} \right] u_1 \\ & + \left[pk_1 - qk_2 + \frac{k_1 \left(\cos \delta \sin \beta \frac{ds_{\gamma}}{ds} + p' \right) - k_2 \left(\cos \delta \cos \beta \frac{ds_{\gamma}}{ds} + q' \right)}{k_1^2 + k_2^2} \right]' u_2 \\ & + \left[q' + \frac{k_1 k_2 \left(\cos \delta \sin \beta \frac{ds_{\gamma}}{ds} + p' \right) - k_2^2 \left(\cos \delta \cos \beta \frac{ds_{\gamma}}{ds} + q' \right)}{k_1^2 + k_2^2} \right] u_3 \end{aligned}$$

bulunur. Burada T ve \bar{T} yerine, sırasıyla, (4.13) ve (4.14) deki ifadeleri yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned} \left[\cos \bar{\delta} \sin \bar{\beta} v_1 + \sin \bar{\delta} v_2 + \cos \bar{\delta} \cos \bar{\beta} v_3 \right] \frac{ds_{\gamma}}{ds} = & \\ & + \left[\cos \delta \sin \beta \frac{ds_{\gamma}}{ds} + p' - \frac{k_1^2 \left(\cos \delta \sin \beta \frac{ds_{\gamma}}{ds} + p' \right) - k_1 k_2 \left(\cos \delta \cos \beta \frac{ds_{\gamma}}{ds} + q' \right)}{k_1^2 + k_2^2} \right] u_1 \\ & + \left[\sin \delta \frac{ds_{\gamma}}{ds} + pk_1 - qk_2 + \frac{k_1 \left(\cos \delta \sin \beta \frac{ds_{\gamma}}{ds} + p' \right) - k_2 \left(\cos \delta \cos \beta \frac{ds_{\gamma}}{ds} + q' \right)}{k_1^2 + k_2^2} \right]' u_2 \\ & + \left[\cos \delta \cos \beta \frac{ds_{\gamma}}{ds} + q' + \frac{k_1 k_2 \left(\cos \delta \sin \beta \frac{ds_{\gamma}}{ds} + p' \right) - k_2^2 \left(\cos \delta \cos \beta \frac{ds_{\gamma}}{ds} + q' \right)}{k_1^2 + k_2^2} \right] u_3 \end{aligned}$$

bulunur. Eşitliğin her iki tarafı v_1 , v_2 ve v_3 ile iç çarpılırsa

$$\begin{aligned}
& \left[\cos \bar{\delta} \sin \bar{\beta} \langle v_1, v_1 \rangle + \sin \bar{\delta} \langle v_2, v_1 \rangle + \cos \bar{\delta} \cos \bar{\beta} \langle v_3, v_1 \rangle \right] \frac{ds_\gamma}{ds} = \\
& + \left[\cos \delta \sin \beta \frac{ds_\gamma}{ds} + p' - \frac{k_1^2 \left(\cos \delta \sin \beta \frac{ds_\gamma}{ds} + p' \right) - k_1 k_2 \left(\cos \delta \cos \beta \frac{ds_\gamma}{ds} + q' \right)}{k_1^2 + k_2^2} \right] \langle u_1, v_1 \rangle \\
& + \left[\sin \delta \frac{ds_\gamma}{ds} + p k_1 - q k_2 + \frac{\left(k_1 \left(\cos \delta \sin \beta \frac{ds_\gamma}{ds} + p' \right) - k_2 \left(\cos \delta \cos \beta \frac{ds_\gamma}{ds} + q' \right) \right)'}{k_1^2 + k_2^2} \right] \langle u_2, v_1 \rangle \\
& + \left[\cos \delta \cos \beta \frac{ds_\gamma}{ds} + q' + \frac{\left(k_1 k_2 \left(\cos \delta \sin \beta \frac{ds_\gamma}{ds} + p' \right) - k_2^2 \left(\cos \delta \cos \beta \frac{ds_\gamma}{ds} + q' \right) \right)'}{k_1^2 + k_2^2} \right] \langle u_3, v_1 \rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left[\cos \bar{\delta} \sin \bar{\beta} \langle v_1, v_2 \rangle + \sin \bar{\delta} \langle v_2, v_2 \rangle + \cos \bar{\delta} \cos \bar{\beta} \langle v_3, v_2 \rangle \right] \frac{ds_\gamma}{ds} = \\
& + \left[\cos \delta \sin \beta \frac{ds_\gamma}{ds} + p' - \frac{k_1^2 \left(\cos \delta \sin \beta \frac{ds_\gamma}{ds} + p' \right) - k_1 k_2 \left(\cos \delta \cos \beta \frac{ds_\gamma}{ds} + q' \right)}{k_1^2 + k_2^2} \right] \langle u_1, v_2 \rangle \\
& + \left[\sin \delta \frac{ds_\gamma}{ds} + p k_1 - q k_2 + \frac{\left(k_1 \left(\cos \delta \sin \beta \frac{ds_\gamma}{ds} + p' \right) - k_2 \left(\cos \delta \cos \beta \frac{ds_\gamma}{ds} + q' \right) \right)'}{k_1^2 + k_2^2} \right] \langle u_2, v_2 \rangle \\
& + \left[\cos \delta \cos \beta \frac{ds_\gamma}{ds} + q' + \frac{\left(k_1 k_2 \left(\cos \delta \sin \beta \frac{ds_\gamma}{ds} + p' \right) - k_2^2 \left(\cos \delta \cos \beta \frac{ds_\gamma}{ds} + q' \right) \right)'}{k_1^2 + k_2^2} \right] \langle u_3, v_2 \rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left[\cos \bar{\delta} \sin \bar{\beta} \langle v_1, v_3 \rangle + \sin \bar{\delta} \langle v_2, v_3 \rangle + \cos \bar{\delta} \cos \bar{\beta} \langle v_3, v_3 \rangle \right] \frac{ds_\gamma}{ds} = \\
& \left[\cos \delta \sin \beta \frac{ds_\gamma}{ds} + p' - \frac{k_1^2 \left(\cos \delta \sin \beta \frac{ds_\gamma}{ds} + p' \right) - k_1 k_2 \left(\cos \delta \cos \beta \frac{ds_\gamma}{ds} + q' \right)}{k_1^2 + k_2^2} \right] \langle u_1, v_3 \rangle \\
& + \left[\sin \delta \frac{ds_\gamma}{ds} + p k_1 - q k_2 + \frac{\left(k_1 \left(\cos \delta \sin \beta \frac{ds_\gamma}{ds} + p' \right) - k_2 \left(\cos \delta \cos \beta \frac{ds_\gamma}{ds} + q' \right) \right)'}{k_1^2 + k_2^2} \right] \langle u_2, v_3 \rangle \\
& + \left[\cos \delta \cos \beta \frac{ds_\gamma}{ds} + q' + \frac{k_1 k_2 \left(\cos \delta \sin \beta \frac{ds_\gamma}{ds} + p' \right) - k_2^2 \left(\cos \delta \cos \beta \frac{ds_\gamma}{ds} + q' \right)}{k_1^2 + k_2^2} \right] \langle u_3, v_3 \rangle
\end{aligned}$$

olur ve bu denklemlerde gerekli işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned}
\cos \bar{\delta} \sin \bar{\beta} &= \left\{ \cos \varphi \left[\cos \delta \sin \beta \frac{ds_\gamma}{ds} + p' - \frac{k_1^2 \left(\cos \delta \sin \beta \frac{ds_\gamma}{ds} + p' \right) - k_1 k_2 \left(\cos \delta \cos \beta \frac{ds_\gamma}{ds} + q' \right)}{k_1^2 + k_2^2} \right] \right. \\
& \left. + \sin \varphi \left[\cos \delta \cos \beta \frac{ds_\gamma}{ds} + q' + \frac{k_1 k_2 \left(\cos \delta \sin \beta \frac{ds_\gamma}{ds} + p' \right) - k_2^2 \left(\cos \delta \cos \beta \frac{ds_\gamma}{ds} + q' \right)}{k_1^2 + k_2^2} \right] \right\} \frac{ds}{ds_\gamma},
\end{aligned}$$

$$\sin \bar{\delta} = \left[\sin \delta \frac{ds_\gamma}{ds} + p k_1 - q k_2 + \frac{\left(k_1 \left(\cos \delta \sin \beta \frac{ds_\gamma}{ds} + p' \right) - k_2 \left(\cos \delta \cos \beta \frac{ds_\gamma}{ds} + q' \right) \right)'}{k_1^2 + k_2^2} \right] \frac{ds}{ds_\gamma},$$

$$\cos \bar{\delta} \cos \bar{\beta} = \left\{ -\sin \varphi \left[\cos \delta \sin \beta \frac{ds_\gamma}{ds} + p' - \frac{k_1^2 \left(\cos \delta \sin \beta \frac{ds_\gamma}{ds} + p' \right) - k_1 k_2 \left(\cos \delta \cos \beta \frac{ds_\gamma}{ds} + q' \right)}{k_1^2 + k_2^2} \right] \right. \\ \left. + \cos \varphi \left[\cos \delta \cos \beta \frac{ds_\gamma}{ds} + q' + \frac{k_1 k_2 \left(\cos \delta \sin \beta \frac{ds_\gamma}{ds} + p' \right) - k_2^2 \left(\cos \delta \cos \beta \frac{ds_\gamma}{ds} + q' \right)}{k_1^2 + k_2^2} \right] \right\} \frac{ds}{ds_\gamma}$$

elde edilir. Burada sonuç 4.3 deki bağıntı dikkate alınırsa bu teoremin bir neticesi olarak aşağıdaki sonuç verilebilir:

Sonuç 4.5: S ve \bar{S} paralel z-equidistant regle yüzeylerinin striksiyon eğrilerinin teğetlerinin bileşenleri arasında aşağıdaki bağıntılar vardır:

$$\cos \bar{\delta} \sin \bar{\beta} = \left\{ \cos \varphi \left[\cos \delta \sin \beta \frac{ds_\gamma}{ds} + p' - k_1 z \right] + \sin \varphi \left[\cos \delta \cos \beta \frac{ds_\gamma}{ds} + q' + k_2 z \right] \right\} \frac{ds}{ds_\gamma},$$

$$\sin \bar{\delta} = \left[\sin \delta \frac{ds_\gamma}{ds} + p k_1 - q k_2 + z' \right] \frac{ds}{ds_\gamma},$$

$$\cos \bar{\delta} \cos \bar{\beta} = \left\{ -\sin \varphi \left[\cos \delta \sin \beta \frac{ds_\gamma}{ds} + p' - k_1 z \right] + \cos \varphi \left[\cos \delta \cos \beta \frac{ds_\gamma}{ds} + q' + k_2 z \right] \right\} \frac{ds}{ds_\gamma}.$$

$\{\alpha, \gamma\}$ ve $\{\bar{\alpha}, \bar{\gamma}\}$ çiftleri Mannheim eğri çifti olması halinde teorem 4.4 ün bir neticesi olarak aşağıdaki sonuç verilebilir:

Sonuç 4.6: $\{\alpha, \gamma\}$ ve $\{\bar{\alpha}, \bar{\gamma}\}$ çiftleri Mannheim eğri çifti ise S ve \bar{S} paralel z-equidistant regle yüzeylerinin striksiyon eğrilerinin teğetlerinin bileşenleri arasında aşağıdaki bağıntılar vardır:

$$\cos \bar{\delta} \sin \bar{\beta} = \left\{ \cos \varphi \left[\cos \delta \sin \beta \frac{ds_\gamma}{ds} + p' - \lambda \left(k_1 \left(\cos \delta \sin \beta \frac{ds_\gamma}{ds} + p' \right) - k_2 \left(\cos \delta \cos \beta \frac{ds_\gamma}{ds} + q' \right) \right) \right] \right. \\ \left. + \sin \varphi \left[\cos \delta \cos \beta \frac{ds_\gamma}{ds} + q' + \lambda \left(k_2 \left(\cos \delta \sin \beta \frac{ds_\gamma}{ds} + p' \right) - \frac{k_2^2}{k_1} \left(\cos \delta \cos \beta \frac{ds_\gamma}{ds} + q' \right) \right) \right] \right\} \frac{ds}{ds_\gamma},$$

$$\sin \bar{\delta} = \left[\sin \delta \frac{ds_\gamma}{ds} + pk_1 - qk_2 + \lambda \left(\cos \delta \sin \beta \frac{ds_\gamma}{ds} + p' - \frac{k_2}{k_1} \cos \delta \cos \beta \frac{ds_\gamma}{ds} + q' \right) \right] \frac{ds}{ds_\gamma} ,$$

$$\begin{aligned} \cos \bar{\delta} \cos \bar{\beta} = & \left\{ -\sin \varphi \left[\cos \delta \sin \beta \frac{ds_\gamma}{ds} + p' - \lambda \left(k_1 \left(\cos \delta \sin \beta \frac{ds_\gamma}{ds} + p' \right) - k_2 \left(\cos \delta \cos \beta \frac{ds_\gamma}{ds} + q' \right) \right) \right] \right. \\ & \left. + \cos \varphi \left[\cos \delta \cos \beta \frac{ds_\gamma}{ds} + q' + \lambda \left(k_2 \left(\cos \delta \sin \beta \frac{ds_\gamma}{ds} + p' \right) - \frac{k_2^2}{k_1} \left(\cos \delta \cos \beta \frac{ds_\gamma}{ds} + q' \right) \right) \right] \right\} \frac{ds}{ds_\gamma} . \end{aligned}$$

Teorem 4.5: S ve \bar{S} kapalı paralel z-equidistant regle yüzey çiftlerinin açılım açıları arasında aşağıdaki bağıntılar vardır:

$$1- \lambda_{v_1} = \cos \varphi \lambda_{u_1} + \sin \varphi \lambda_{u_3} + b_1 , \quad b_1 = \oint \bar{k}_2 d\bar{s} + \oint \bar{k}_2 d\bar{s} ,$$

$$\left(pu_1 + \left(z - \frac{\bar{k}_1}{k_1^2 + k_2^2} \right) u_2 + qu_3 \right) \quad \left(\frac{k_1}{k_1^2 + k_2^2} \cdot u_2 \right)$$

$$2- \lambda_{v_2} = \lambda_{u_2} = 0 ,$$

$$3- \lambda_{v_3} = -\sin \varphi \lambda_{u_1} + \cos \varphi \lambda_{u_3} + b_2 , \quad b_2 = \oint \bar{k}_1 d\bar{s} + \oint \bar{k}_1 d\bar{s} .$$

$$\left(pu_1 + \left(z - \frac{\bar{k}_1}{k_1^2 + k_2^2} \right) u_2 + qu_3 \right) \quad \left(\frac{k_1}{k_1^2 + k_2^2} \cdot u_2 \right)$$

İspat: Anadoğrusu v_1 olan kapalı regle yüzeyin açılım açısı

$$\lambda_{v_1} = \oint_{(\alpha)} \bar{k}_2 d\bar{s}$$

dır. Bu denklemde $\bar{\alpha}$ nin yerine (4.6) bağıntısındaki eşiti yazılırsa

$$\lambda_{v_1} = \oint \bar{k}_2 d\bar{s} ,$$

$$\left(\gamma + pu_1 + \left(z - \frac{\bar{k}_1}{k_1^2 + k_2^2} \right) u_2 + qu_3 \right)$$

$$\lambda_{v_1} = \oint_{(\gamma)} \bar{k}_2 d\bar{s} + \oint \bar{k}_2 d\bar{s}$$

$$\left(pu_1 + \left(z - \frac{\bar{k}_1}{k_1^2 + k_2^2} \right) u_2 + qu_3 \right)$$

bulunur. γ yerine (4.3) bağıntısındaki eşiti yerine yazılırsa

$$\lambda_{v_1} = \oint \bar{k}_2 d\bar{s} + \oint \bar{k}_2 d\bar{s} ,$$

$$\left(\alpha + \frac{k_1}{k_1^2 + k_2^2} \cdot u_2 \right) \quad \left(pu_1 + \left(z - \frac{\bar{k}_1}{k_1^2 + k_2^2} \right) u_2 + qu_3 \right)$$

$$\lambda_{v_1} = \oint_{(\alpha)} \bar{k}_2 d\bar{s} + \oint_{\left(\frac{k_1}{k_1^2+k_2^2}u_2\right)} \bar{k}_2 d\bar{s} + \oint_{\left(pu_1 + \left(z - \frac{\bar{k}_1}{k_1+k_2}\right)u_2 + qu_3\right)} \bar{k}_2 d\bar{s}$$

olur.

$$b_1 = \oint_{\left(pu_1 + \left(z - \frac{\bar{k}_1}{k_1+k_2}\right)u_2 + qu_3\right)} \bar{k}_2 d\bar{s} + \oint_{\left(\frac{k_1}{k_1^2+k_2^2}u_2\right)} \bar{k}_2 d\bar{s}$$

alınırsa

$$\lambda_{v_1} = \oint_{(\alpha)} \bar{k}_2 d\bar{s} + b_1$$

bulunur. \bar{k}_2 nin yerine (4.21) bağıntısındaki eşiti yazılırsa

$$\lambda_{v_1} = \oint_{(\alpha)} (\sin \varphi k_1 + \cos \varphi k_2) ds + b_1 ,$$

$$\lambda_{v_1} = \sin \varphi \oint_{(\alpha)} k_1 ds + \cos \varphi \oint_{(\alpha)} k_2 ds + b_1$$

olur. Burada $\oint_{(\alpha)} k_1 ds$ ve $\oint_{(\alpha)} k_2 ds$ yerine (2.16) ve (2.18) deki eşitlikleri yerine yazılırsa

$$\lambda_{v_1} = \cos \varphi \lambda_{u_1} + \sin \varphi \lambda_{u_3} + b_1$$

elde edilir. Anadoğrusu v_2 olan kapalı regle yüzeyin açılım açısı (2.17) den

$$\lambda_{v_2} = \lambda_{u_2} = 0.$$

Anadoğrusu v_3 olan kapalı regle yüzeyin açılım açısı $\lambda_{v_3} = \oint_{(\alpha)} \bar{k}_1 d\bar{s}$ dir. Bu denklemden

$\bar{\alpha}$ nin yerine (4.6) bağıntısındaki eşiti yazılırsa

$$\lambda_{v_3} = \oint_{\left(\gamma + pu_1 + \left(z - \frac{\bar{k}_1}{k_1+k_2}\right)u_2 + qu_3\right)} \bar{k}_1 d\bar{s} ,$$

$$\lambda_{v_3} = \oint_{(\gamma)} \bar{k}_1 d\bar{s} + \oint_{\left(pu_1 + \left(z - \frac{\bar{k}_1}{k_1 + k_2} \right) u_2 + qu_3 \right)} \bar{k}_1 d\bar{s}$$

bulunur. γ yerine (4.3) bağıntısındaki eşiti yerine yazılırsa

$$\lambda_{v_3} = \oint_{\left(\alpha + \frac{k_1}{k_1^2 + k_2^2} u_2 \right)} \bar{k}_1 d\bar{s} + \oint_{\left(pu_1 + \left(z - \frac{\bar{k}_1}{k_1 + k_2} \right) u_2 + qu_3 \right)} \bar{k}_1 d\bar{s} ,$$

$$\lambda_{v_3} = \oint_{(\alpha)} \bar{k}_1 d\bar{s} + \oint_{\left(\frac{k_1}{k_1^2 + k_2^2} u_2 \right)} \bar{k}_1 d\bar{s} + \oint_{\left(pu_1 + \left(z - \frac{\bar{k}_1}{k_1 + k_2} \right) u_2 + qu_3 \right)} \bar{k}_1 d\bar{s}$$

olur.

$$b_2 = \oint_{\left(pu_1 + \left(z - \frac{\bar{k}_1}{k_1 + k_2} \right) u_2 + qu_3 \right)} \bar{k}_1 d\bar{s} + \oint_{\left(\frac{k_1}{k_1^2 + k_2^2} u_2 \right)} \bar{k}_1 d\bar{s}$$

alınırsa

$$\lambda_{v_3} = \oint_{(\alpha)} \bar{k}_1 d\bar{s} + b_2$$

bulunur. \bar{k}_1 nin yerine (4.20) bağıntısındaki eşiti yazılırsa

$$\lambda_{v_1} = \oint_{(\alpha)} (\cos \varphi k_1 - \sin \varphi k_2) ds + b_2 ,$$

$$\lambda_{v_1} = \cos \varphi \oint_{(\alpha)} k_1 ds - \sin \varphi \oint_{(\alpha)} k_2 ds + b_2$$

olur. . Burada $\oint_{(\alpha)} k_2 ds$ ve $\oint_{(\alpha)} k_1 ds$ yerine (2.16) ve (2.18) deki eşitlikleri yerine yazılırsa

$$\lambda_{v_3} = -\sin \varphi \lambda_{u_1} + \cos \varphi \lambda_{u_3} + b_2$$

elde edilir.

$\{\alpha, \gamma\}$ ve $\{\bar{\alpha}, \bar{\gamma}\}$ çiftleri Mannheim eğri çifti olması halinde bu teoremin bir neticesi olarak aşağıdaki sonuç verilebilir:

Sonuç 4.7: $\{\alpha, \gamma\}$ ve $\{\bar{\alpha}, \bar{\gamma}\}$ çiftleri Mannheim eğri çifti ise S ve \bar{S} kapalı paralel z-equidistant regle yüzey çiftlerinin açılım açıları arasında aşağıdaki bağıntılar vardır:

$$\begin{aligned}
 1- \quad \lambda_{v_1} &= \cos \varphi \lambda_{u_1} + \sin \varphi \lambda_{u_3} + b_1, & b_1 &= \oint_{(pu_1+(z-\bar{\lambda})u_2+qu_3)} \bar{k}_2 d\bar{s} + \oint_{(\lambda.u_2)} \bar{k}_2 d\bar{s}, \\
 2- \quad \lambda_{v_2} &= \lambda_{u_2} = 0, \\
 3- \quad \lambda_{v_3} &= -\sin \varphi \lambda_{u_1} + \cos \varphi \lambda_{u_3} + b_2, & b_2 &= \oint_{(pu_1+(z-\bar{\lambda})u_2+qu_3)} \bar{k}_1 d\bar{s} + \oint_{(\lambda.u_2)} \bar{k}_1 d\bar{s}.
 \end{aligned}$$

Teorem 4.6: S ve \bar{S} kapalı paralel z-equidistant regle yüzeylerin dayanak eğrileri özel olarak dairesel helis eğrisi alınırsa bu regle yüzeylerin L_{u_1} ve L_{v_1} açılım uzunlukları arasında aşağıdaki bağıntı vardır:

$$L_{v_1} = \left(\cos \varphi \frac{k_1}{k_1} - \sin \varphi \frac{k_2}{k_1} \right) L_{u_1} + b_3, \quad b_3 = \oint_{\left(pu_1 + \left(z - \frac{\bar{k}_1}{k_1 + k_2} \right) u_2 + qu_3 \right)} d\bar{s} + \oint_{\left(\frac{k_1}{k_1^2 + k_2^2} . u_2 \right)} d\bar{s}.$$

İspat: Anadoğrusu v_1 olan kapalı regle yüzeyin açılım uzunluğu (2.16) dan

$$L_{v_1} = \oint_{(\bar{\alpha})} d\bar{s}.$$

Burada $\bar{\alpha}$ nin yerine (4.6) bağıntısındaki eşiti yazılırsa

$$\begin{aligned}
 L_{v_1} &= \oint_{\left(\gamma + pu_1 + \left(z - \frac{\bar{k}_1}{k_1 + k_2} \right) u_2 + qu_3 \right)} d\bar{s}, \\
 L_{v_1} &= \oint_{(\gamma)} d\bar{s} + \oint_{\left(pu_1 + \left(z - \frac{\bar{k}_1}{k_1 + k_2} \right) u_2 + qu_3 \right)} d\bar{s}
 \end{aligned}$$

bulunur. γ yerine (4.3) bağıntısındaki eşiti yerine yazılırsa

$$L_{v_1} = \oint_{\left(\alpha + \frac{k_1}{k_1^2 + k_2^2} . u_2 \right)} d\bar{s} + \oint_{\left(pu_1 + \left(z - \frac{\bar{k}_1}{k_1 + k_2} \right) u_2 + qu_3 \right)} d\bar{s},$$

$$L_{v_1} = \oint_{(\alpha)} d\bar{s} + \oint_{\left(\frac{k_1}{k_1^2+k_2^2} \cdot u_2\right)} d\bar{s} + \oint_{\left(pu_1 + \left(z - \frac{\bar{k}_1}{k_1+k_2}\right)u_2 + qu_3\right)} d\bar{s}$$

olur.

$$b_3 = \oint_{\left(pu_1 + \left(z - \frac{\bar{k}_1}{k_1+k_2}\right)u_2 + qu_3\right)} d\bar{s} + \oint_{\left(\frac{k_1}{k_1^2+k_2^2} \cdot u_2\right)} d\bar{s}$$

alınırsa

$$L_{v_1} = \oint_{(\alpha)} d\bar{s} + b_3$$

bulunur. $d\bar{s}$ yerine (4.20) bağıntısındaki eşiti yerine yazılırsa

$$L_{v_1} = \oint_{(\alpha)} \left(\cos \varphi \frac{k_1}{k_1} - \sin \varphi \frac{k_2}{k_1} \right) ds + b_3$$

olur. Dayanak eğrileri dairesel helis olduğundan

$$L_{v_1} = \left(\cos \varphi \frac{k_1}{k_1} - \sin \varphi \frac{k_2}{k_1} \right) \oint_{(\alpha)} ds + b_3$$

yazılabilir. Bu son eşitlikte $\oint_{(\alpha)} ds$ yerine (2.16) bağıntısındaki eşiti yerine yazılırsa

$$L_{v_1} = L_{u_1} \left(\cos \varphi \frac{k_1}{k_1} - \sin \varphi \frac{k_2}{k_1} \right) + b_3$$

elde edilir.

Teorem 4.7: S ve \bar{S} kapalı paralel z-equidistant regle yüzeylerine ait Frenet 3-ayaklıları, sırasıyla, $\{u_1, u_2, u_3\}$ ve $\{v_1, v_2, v_3\}$ olsun. Frenet vektörlerinin çizdiği regle yüzeylerinin dralları arasında aşağıdaki bağıntılar vardır:

$$1- P_{v_1} = P_{u_1} = 0 ,$$

$$2- P_{v_2} = P_{u_2} \left(\cos \varphi + \sin \varphi \frac{k_1}{k_2} \right) \frac{d\bar{s}}{ds},$$

$$3- P_{v_3} = P_{u_3} \frac{k_2}{(\sin \varphi k_1 + \cos \varphi k_2)} \frac{d\bar{s}}{ds}.$$

İspat: Anadoğrusu v_1 olan kapalı regle yüzeyin dralı (2.16) dan

$$P_{v_1} = 0$$

dır. Anadoğrusu v_2 olan kapalı regle yüzeyin dralı (2.17) den

$$P_{v_2} = \frac{\bar{k}_2}{\bar{k}_1^2 + \bar{k}_2^2}$$

dır. Bu denklemde (4.20) ve (4.21) bağıntıları yerine yazılırsa

$$P_{v_2} = \frac{(\sin \varphi k_1 + \cos \varphi k_2) \frac{ds}{d\bar{s}}}{\left[(\cos \varphi k_1 - \sin \varphi k_2) \frac{ds}{d\bar{s}} \right]^2 + \left[(\sin \varphi k_1 + \cos \varphi k_2) \frac{ds}{d\bar{s}} \right]^2},$$

$$P_{v_2} = \frac{(\sin \varphi k_1 + \cos \varphi k_2) \frac{ds}{d\bar{s}}}{(k_1^2 + k_2^2) \left(\frac{ds}{d\bar{s}} \right)^2},$$

$$P_{v_2} = \cos \varphi \frac{k_2}{(k_1^2 + k_2^2)} \frac{d\bar{s}}{ds} + \sin \varphi \frac{k_2}{(k_1^2 + k_2^2)} \cdot \frac{k_1}{k_2} \frac{d\bar{s}}{ds}$$

bulunur. (2.17) den

$$P_{v_2} = P_{u_2} \left(\cos \varphi + \sin \varphi \frac{k_1}{k_2} \right) \frac{d\bar{s}}{ds}.$$

olur. Anadoğrusu v_3 olan kapalı regle yüzeyin dralı

$$P_{v_3} = \frac{1}{k_2}$$

dır. Bu denklemin pay ve paydası k_2 ile bölünürse

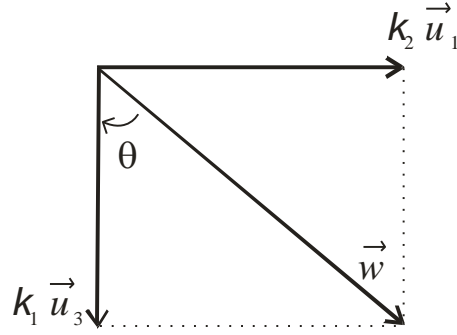
$$P_{v_3} = \frac{1}{k_2} \cdot \frac{k_2}{k_2}$$

bulunur. Bu son eşitlikte (2.18) ve (4.21) bağıntısı yerine yazılırsa

$$P_{v_3} = P_{u_3} \frac{k_2}{(\sin \varphi k_1 + \cos \varphi k_2)} \frac{d\bar{s}}{ds}$$

elde edilir.

α eğrisinin ani pfaaf vektörü w olsun. w ile u_3 vektörü arasındaki açı $\theta = \theta(s)$ ise



Şekil 4.3. α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki Darboux vektörü

Şekil 4.3 den

$$w = k_2 u_1 + k_1 u_3, \quad \|w\| = \sqrt{k_1^2 + k_2^2} \geq 0$$

olmak üzere

$$\cos \theta = \frac{k_1}{\|w\|} = \frac{k_1}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}}, \quad \sin \theta = \frac{k_2}{\|w\|} = \frac{k_2}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}}$$

dır. w vektörü yönündeki birim vektör c ise

$$c = \frac{w}{\|w\|} = \frac{k_2 u_1 + k_1 u_3}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} = \frac{k_2}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} u_1 + \frac{k_1}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} u_3, \quad ,$$

$$c = \sin \theta u_1 + \cos \theta u_3$$

olur. c birim vektörünün oluşturduğu regle yüzeyin açılım açısı

$$\lambda_c = \langle D, c \rangle ,$$

$$\lambda_c = \langle u_1 \oint_{(\alpha)} k_2 ds + u_3 \oint_{(\alpha)} k_1 ds , \sin \theta u_1 + \cos \theta u_3 \rangle ,$$

$$\lambda_c = \sin \theta \oint_{(\alpha)} k_2 ds + \cos \theta \oint_{(\alpha)} k_1 ds$$

olur. Burada $\oint_{(\alpha)} k_2 ds$ ve $\oint_{(\alpha)} k_1 ds$ yerine (2.16) ve (2.18) deki eşitlikleri yerine yazılırsa

$$\lambda_c = \sin \theta \lambda_{u_1} + \cos \theta \lambda_{u_3} \quad (4.22)$$

bulunur. c birim vektörünün oluşturduğu regle yüzeyin açılım uzunluğu

$$L_c = \langle V, c \rangle$$

$$L_c = \langle u_1 \oint_{(\alpha)} ds , \sin \theta u_1 + \cos \theta u_3 \rangle$$

$$L_c = \sin \theta \oint_{(\alpha)} ds$$

dır. (2.16) dan

$$L_c = \sin \theta L_{u_1} \quad (4.23)$$

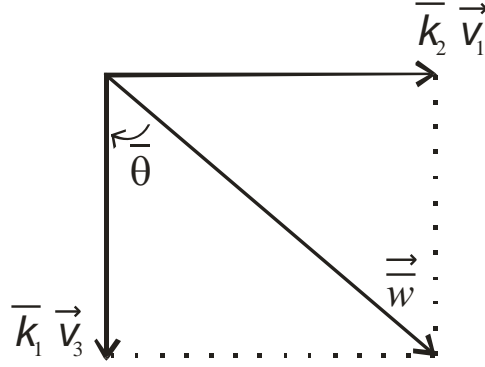
olur. c birim vektörünün oluşturduğu regle yüzeyin dralı

$$P_c = \frac{\det \left(\frac{d\alpha}{ds} , c , \frac{dc}{ds} \right)}{\left\| \frac{dc}{ds} \right\|^2} ,$$

$$P_c = \frac{-\cos \theta (k_1 \sin \theta - k_2 \cos \theta)}{\theta'^2 + (k_1 \sin \theta - k_2 \cos \theta)^2} \quad (4.24)$$

bulunur.

$\bar{\alpha}$ eğrisinin ani pfaff vektörü \bar{w} olsun. \bar{w} vektörü ile v_3 vektörü arasındaki açı $\bar{\theta} = \bar{\theta}(\bar{s})$ ise



Şekil 4.4. $\bar{\alpha}$ eğrisinin $\bar{\alpha}(\bar{s})$ noktasındaki Darboux vektörü

Şekil 4.4 den,

$$\bar{w} = \bar{k}_2 v_1 + \bar{k}_1 v_3 \quad , \quad \|\bar{w}\| = \sqrt{\bar{k}_1^2 + \bar{k}_2^2} \geq 0$$

olmak üzere

$$\cos \bar{\theta} = \frac{\bar{k}_1}{\|\bar{w}\|} = \frac{\bar{k}_1}{\sqrt{\bar{k}_1^2 + \bar{k}_2^2}} \quad , \quad \sin \bar{\theta} = \frac{\bar{k}_2}{\|\bar{w}\|} = \frac{\bar{k}_2}{\sqrt{\bar{k}_1^2 + \bar{k}_2^2}}$$

dır. Bu son eşitliklerde \bar{k}_1 ve \bar{k}_2 yerine (4.20) ve (4.21) ifadelerindeki eşitlikleri yazılırsa

$$\begin{aligned} \cos \bar{\theta} &= \frac{(\cos \varphi k_1 - \sin \varphi k_2) \frac{ds}{d\bar{s}}}{\sqrt{\left[(\cos \varphi k_1 + \sin \varphi k_2)^2 + (-\sin \varphi k_1 + \cos \varphi k_2)^2 \right] \left(\frac{ds}{d\bar{s}} \right)^2}} \\ &= \cos \varphi \frac{k_1}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} - \sin \varphi \frac{k_2}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} = \cos \varphi \cos \theta - \sin \varphi \sin \theta \quad , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin \bar{\theta} &= \frac{(\sin \varphi k_1 + \cos \varphi k_2) \frac{ds}{ds}}{\sqrt{\left[(\cos \varphi k_1 + \sin \varphi k_2)^2 + (-\sin \varphi k_1 + \cos \varphi k_2)^2 \right] \left(\frac{ds}{ds} \right)^2}} \\ &= \sin \varphi \frac{k_1}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} + \cos \varphi \frac{k_2}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} = \sin \varphi \cos \theta + \cos \varphi \sin \theta \quad ,\end{aligned}$$

$$\begin{cases} \cos \bar{\theta} = \cos \theta \cos \varphi - \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \bar{\theta} = \sin \theta \cos \varphi + \sin \varphi \cos \theta \end{cases} \quad (4.25)$$

$$\begin{cases} \cos \bar{\theta} = \cos(\theta + \varphi) \\ \sin \bar{\theta} = \sin(\theta + \varphi) \end{cases} \quad (4.26)$$

olur. Buradan

$$\bar{\theta} = \theta + \varphi \quad (4.27)$$

yazılabilir. \bar{w} vektörü yönündeki birim vektör \bar{c} ise

$$\bar{c} = \frac{\bar{w}}{\|\bar{w}\|} = \frac{\bar{k}_2 v_1 + \bar{k}_1 v_3}{\sqrt{\bar{k}_1^2 + \bar{k}_2^2}} \quad ,$$

$$\bar{c} = \frac{\bar{k}_2}{\sqrt{\bar{k}_1^2 + \bar{k}_2^2}} v_1 + \frac{\bar{k}_1}{\sqrt{\bar{k}_1^2 + \bar{k}_2^2}} v_3$$

$$\bar{c} = \sin \bar{\theta} v_1 + \cos \bar{\theta} v_3 \quad .$$

Teorem 4.8: S ve \bar{S} kapalı paralel z-equidistant regle yüzeyler olsun. $\{u_1, u_2, u_3\}$ sistemine bağlı olarak hareket eden bir c birim vektörünün oluşturduğu kapalı regle yüzey ile $\{v_1, v_2, v_3\}$ sistemine bağlı olarak hareket eden bir \bar{c} birim vektörünün oluşturduğu kapalı regle yüzeylerin açılım açıları arasında

$$\lambda_c = \lambda_{\bar{c}} + b_1 (\sin \theta \cos \varphi + \sin \varphi \cos \theta) + b_2 (\cos \theta \cos \varphi - \sin \theta \sin \varphi)$$

bağıntısı vardır.

İspat: \bar{c} birim vektörünün çizdiği regle yüzeyin açılım açısı

$$\lambda_c = \langle \bar{D}, \bar{c} \rangle ,$$

$$\lambda_c = \langle v_1 \oint_{(\alpha)} \bar{k}_2 ds + v_3 \oint_{(\alpha)} \bar{k}_1 ds , \sin \bar{\theta} v_1 + \cos \bar{\theta} v_3 \rangle ,$$

$$\lambda_c = \sin \bar{\theta} \oint_{(\bar{\alpha})} \bar{k}_2 d\bar{s} + \cos \bar{\theta} \oint_{(\bar{\alpha})} \bar{k}_1 d\bar{s} .$$

dir. Burada $\oint_{(\bar{\alpha})} \bar{k}_2 d\bar{s}$ ve $\oint_{(\bar{\alpha})} \bar{k}_1 d\bar{s}$ yerine (2.16) ve (2.18) deki eşitlikleri yerine yazılırsa

$$\lambda_c = \sin \bar{\theta} \lambda_{v_1} + \cos \bar{\theta} \lambda_{v_3}$$

olur ve (4.25) bağıntısından

$$\lambda_c = (\sin \theta \cos \varphi + \sin \varphi \cos \theta) \lambda_{v_1} + (\cos \theta \cos \varphi - \sin \theta \sin \varphi) \lambda_{v_3}$$

bulunur. Teorem 4.5 den

$$\begin{aligned} \lambda_c = & (\sin \theta \cos \varphi + \sin \varphi \cos \theta) (\cos \varphi \lambda_{u_1} + \sin \varphi \lambda_{u_3} + b_1) \\ & + (\cos \theta \cos \varphi - \sin \theta \sin \varphi) (-\sin \varphi \lambda_{u_1} + \cos \varphi \lambda_{u_3} + b_2) , \end{aligned}$$

$$\lambda_c = \sin \theta \lambda_{u_1} + \cos \theta \lambda_{u_3} + b_1 (\sin \theta \cos \varphi + \sin \varphi \cos \theta) + b_2 (\cos \theta \cos \varphi - \sin \theta \sin \varphi) \quad (4.28)$$

yazılır. Burada

$$\begin{aligned} b_1 = & \oint_{\left(pu_1 + \left(z - \frac{\bar{k}_1}{k_1 + k_2} \right) u_2 + qu_3 \right)} \bar{k}_2 d\bar{s} + \oint_{\left(\frac{k_1}{k_1^2 + k_2^2} u_2 \right)} \bar{k}_2 d\bar{s} , \\ b_2 = & \oint_{\left(pu_1 + \left(z - \frac{\bar{k}_1}{k_1 + k_2} \right) u_2 + qu_3 \right)} \bar{k}_1 d\bar{s} + \oint_{\left(\frac{k_1}{k_1^2 + k_2^2} u_2 \right)} \bar{k}_1 d\bar{s} \end{aligned}$$

şeklindedir. (4.28) denkleminde (4.22) ifadesi yerine yazılırsa

$$\lambda_c = \lambda_c + b_1 (\sin \theta \cos \varphi + \sin \varphi \cos \theta) + b_2 (\cos \theta \cos \varphi - \sin \theta \sin \varphi)$$

elde edilir.

Teorem 4.9: S ve \bar{S} , dayanak eğrileri dairesel helis eğrisi olan kapalı paralel z-equidistant regle yüzeyler olsun. $\{u_1, u_2, u_3\}$ sistemine bağlı olarak hareket eden bir c birim vektörünün oluşturduğu kapalı regle yüzey ile $\{v_1, v_2, v_3\}$ sistemine bağlı olarak hareket eden bir \bar{c} birim vektörünün oluşturduğu kapalı regle yüzeylerin açılım uzunlukları arasında

$$L_c = (\cos \varphi + \sin \varphi \cot \theta) \left(\cos \varphi \frac{k_1}{k_1} - \sin \varphi \frac{k_2}{k_1} \right) L_c + b_3 \sin \bar{\theta}$$

bağıntısı vardır.

İspat: \bar{c} birim vektörünün çizdiği regle yüzeyin açılım uzunluğu (4.23) den

$$L_c = \sin \bar{\theta} \oint_{(\bar{a})} d\bar{s} \quad ,$$

$$L_c = \sin \bar{\theta} L_{v_1}$$

dır. (4.25) den

$$L_c = (\sin \theta \cos \varphi + \sin \varphi \cos \theta) L_{v_1}$$

dır. Teorem 4.6 dan

$$L_c = (\sin \theta \cos \varphi + \sin \varphi \cos \theta) \left[\left(\cos \varphi \frac{k_1}{k_1} - \sin \varphi \frac{k_2}{k_1} \right) L_{u_1} + b_3 \right] \quad (4.29)$$

olur. Burada

$$b_3 = \oint \left(pu_1 + \left(z - \frac{\bar{k}_1}{k_1 + k_2} \right) u_2 + qu_3 \right) d\bar{s} + \oint \left(\frac{k_1}{k_1^2 + k_2^2} \cdot u_2 \right) d\bar{s}$$

dır. (4.29) denkleminde (4.23) ifadesi yerine yazılırsa

$$L_c = (\cos \varphi + \sin \varphi \cot \theta) \left(\cos \varphi \frac{k_1}{k_1} - \sin \varphi \frac{k_2}{k_1} \right) L_c + b_3 (\sin \theta \cos \varphi + \sin \varphi \cos \theta) \quad ,$$

$$L_c = (\cos \varphi + \sin \varphi \cot \theta) \left(\cos \varphi \frac{k_1}{k_1} - \sin \varphi \frac{k_2}{k_1} \right) L_c + b_3 \sin \bar{\theta}$$

elde edilir.

Teorem 4.10: S ve \bar{S} kapalı paralel z-equidistant regle yüzeyler olsun. $\{u_1, u_2, u_3\}$ sistemine bağlı olarak hareket eden bir c birim vektörünün oluşturduğu kapalı regle yüzey ile $\{v_1, v_2, v_3\}$ sistemine bağlı olarak hareket eden bir \bar{c} birim vektörünün oluşturduğu kapalı regle yüzeylerin dralleri arasında

$$P_c = P_c (\cos \varphi - \sin \varphi \tan \theta) \frac{d\bar{s}}{ds}$$

bağıntısı vardır.

İspat: \bar{c} birim vektörünün çizdiği regle yüzeyin dralı (4.24) eşitliğinden

$$P_c = \frac{-\cos \bar{\theta} (\sin \bar{\theta} \bar{k}_1 - \cos \bar{\theta} \bar{k}_2)}{\bar{\theta}'^2 + (\sin \bar{\theta} \bar{k}_1 - \cos \bar{\theta} \bar{k}_2)^2}$$

dır. Burada (4.20), (4.21), (4.25) ve (4.27) ifadeleri yerine yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$P_c = \frac{(-\cos \varphi \cos \theta + \sin \varphi \sin \theta)(k_1 \sin \theta - k_2 \cos \theta)}{\theta'^2 + (k_1 \sin \theta - k_2 \cos \theta)^2} \cdot \frac{d\bar{s}}{ds}$$

bulunur. (4.24) ifadesi bu denklemde yerine yazılırsa

$$P_c = P_c (\cos \varphi - \sin \varphi \tan \theta) \frac{d\bar{s}}{ds}$$

olur.

Teorem 4.11: S ve \bar{S} kapalı paralel z-equidistant regle yüzeyler olsun. $\{u_1, u_2, u_3\}$ sistemine bağlı olarak hareket eden bir x birim vektörü ile $\{v_1, v_2, v_3\}$ sistemine bağlı olarak hareket eden bir \bar{x} birim vektörünün oluşturduğu kapalı regle yüzeylerin açılım açıları λ_x ve $\lambda_{\bar{x}}$ olsun. Bunlar arasında

$$\lambda_x = \lambda_x - p\lambda_{u_1} - q\lambda_{u_3} + b_1(\cos \varphi(x_1 - p) + \sin \varphi(x_3 - q)) + b_2(\cos \varphi(x_3 - q) - \sin \varphi(x_1 - p))$$

bağıntısı vardır.

İspat: $\{u_1, u_2, u_3\}$ sistemine bağlı olarak hareket eden bir x vektörü için

$$x = x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3, \quad \|x\| = 1 \quad (4.30)$$

yazılabilir. x in çizdiği regle yüzeyin açılım açısı

$$\lambda_x = \langle D, x \rangle,$$

$$\lambda_x = \left\langle u_1 \oint_{(\alpha)} k_2 ds + u_3 \oint_{(\alpha)} k_1 ds, x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3 \right\rangle,$$

$$\lambda_x = x_1 \oint_{(\alpha)} k_2 ds + x_3 \oint_{(\alpha)} k_1 ds$$

olur. $\oint_{(\alpha)} k_2 ds$ ve $\oint_{(\alpha)} k_1 ds$ yerine (2.16) ve (2.18) deki eşitlikleri yerine yazılırsa

$$\lambda_x = x_1\lambda_{u_1} + x_3\lambda_{u_3} \quad (4.31)$$

bulunur. Benzer şekilde $\{v_1, v_2, v_3\}$ sistemine göre hareket eden \bar{x} vektörü için

$$\bar{x} = \bar{x}_1v_1 + \bar{x}_2v_2 + \bar{x}_3v_3, \quad \|\bar{x}\| = 1$$

yazılabilir. Ayrıca

$$\bar{x} = x - \gamma\bar{\gamma}$$

şeklinde yazılabilir. (4.5) ve (4.30) ifadeleri bu son denklemde yerine yazılırsa

$$\bar{x} = (x_1 - p)u_1 + (x_2 - z)u_2 + (x_3 - q)u_3$$

dır ve Teorem 4.2 den

$$\bar{x} = (x_1 - p)(\cos \varphi v_1 - \sin \varphi v_3) + (x_2 - z)v_2 + (x_3 - q)(\sin \varphi v_1 + \cos \varphi v_3),$$

$$\begin{aligned}\bar{x} &= (x_1 \cos \varphi + x_3 \sin \varphi - p \cos \varphi - q \sin \varphi)v_1 + (x_2 - z)v_2 \\ &+ (x_3 \cos \varphi - x_1 \sin \varphi + p \sin \varphi - q \cos \varphi)v_3\end{aligned}\quad (4.32)$$

bulunur. \bar{x} in çizdiği regle yüzeyin $\lambda_{\bar{x}}$ açılım açısı için

$$\lambda_{\bar{x}} = \langle \bar{D}, \bar{x} \rangle ,$$

$$\begin{aligned}\lambda_{\bar{x}} &= (x_1 \cos \varphi + x_3 \sin \varphi - p \cos \varphi - q \sin \varphi) \oint_{(\bar{\alpha})} \bar{k}_2 ds \\ &+ (x_3 \cos \varphi - x_1 \sin \varphi + p \sin \varphi - q \cos \varphi) \oint_{(\bar{\alpha})} \bar{k}_1 ds\end{aligned}$$

olur ve burada $\oint_{(\bar{\alpha})} \bar{k}_2 ds$ ve $\oint_{(\bar{\alpha})} \bar{k}_1 ds$ yerine (2.16) ve (2.18) deki karşılıkları yazılırsa

$$\begin{aligned}\lambda_{\bar{x}} &= (x_1 \cos \varphi + x_3 \sin \varphi - p \cos \varphi - q \sin \varphi) \lambda_{v_1} \\ &+ (x_3 \cos \varphi - x_1 \sin \varphi + p \sin \varphi - q \cos \varphi) \lambda_{v_3}\end{aligned}$$

bulunur. Teorem 4.5 ten

$$\begin{aligned}\lambda_{\bar{x}} &= (x_1 \cos \varphi + x_3 \sin \varphi - p \cos \varphi - q \sin \varphi) (\cos \varphi \lambda_{u_1} + \sin \varphi \lambda_{u_3} + b_1) \\ &+ (x_3 \cos \varphi - x_1 \sin \varphi + p \sin \varphi - q \cos \varphi) (-\sin \varphi \lambda_{u_1} + \cos \varphi \lambda_{u_3} + b_2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lambda_{\bar{x}} &= x_1 \lambda_{u_1} + x_3 \lambda_{u_3} - p \lambda_{u_1} - q \lambda_{u_3} \\ &+ b_1 (\cos \varphi (x_1 - p) + \sin \varphi (x_3 - q)) + b_2 (\cos \varphi (x_3 - q) - \sin \varphi (x_1 - p))\end{aligned}$$

yazılabilir. (4.31) ifadesi bu denklemde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}\lambda_{\bar{x}} &= \lambda_x - p \lambda_{u_1} - q \lambda_{u_3} + b_1 (\cos \varphi (x_1 - p) + \sin \varphi (x_3 - q)) \\ &+ b_2 (\cos \varphi (x_3 - q) - \sin \varphi (x_1 - p))\end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 4.12: S ve \bar{S} , dayanak eğrileri dairesel helis eğrisi olan kapalı paralel z-equidistant regle yüzeyler olsun. $\{u_1, u_2, u_3\}$ sistemine bağlı olarak hareket eden bir x

birim vektörü ile $\{v_1, v_2, v_3\}$ sistemine bağlı olarak hareket eden bir \bar{x} birim vektörünün oluşturduğu kapalı regle yüzeylerin açılım açılım uzunlukları L_x ve $L_{\bar{x}}$ olsun. Bunlar arasında

$$L_x = L_x \left(\cos^2 \varphi \frac{k_1}{k_1} - \sin \varphi \cos \varphi \frac{k_2}{k_1} \right) + b_3 \cos \varphi x_1 + (x_3 \sin \varphi - p \cos \varphi - q \sin \varphi) L_{v_1}$$

bağıntısı vardır.

İspat: $\{u_1, u_2, u_3\}$ sistemine bağlı olarak hareket eden bir doğrusunun çizdiği regle yüzeyin açılım uzunluğu

$$L_x = \langle V, x \rangle,$$

$$L_x = x_1 \oint_{(\alpha)} ds$$

dır. (2.16) dan

$$L_x = x_1 L_{u_1} \quad (4.33)$$

olur. $\{v_1, v_2, v_3\}$ sistemine bağlı olarak hareket eden bir \bar{x} doğrusunun çizdiği regle yüzeyin açılım uzunluğu

$$L_{\bar{x}} = \langle \bar{V}, \bar{x} \rangle ,$$

$$L_{\bar{x}} = (x_1 \cos \varphi + x_3 \sin \varphi - p \cos \varphi - q \sin \varphi) \oint_{(\bar{\alpha})} d\bar{s}$$

dır. (2.16) dan

$$L_{\bar{x}} = (x_1 \cos \varphi + x_3 \sin \varphi - p \cos \varphi - q \sin \varphi) L_{v_1}$$

olur. Teorem 4.6 dan

$$L_{\bar{x}} = (x_1 \cos \varphi + x_3 \sin \varphi - p \cos \varphi - q \sin \varphi) \left(\left(\cos \varphi \frac{k_1}{k_1} - \sin \varphi \frac{k_2}{k_1} \right) L_{u_1} + b_3 \right)$$

$$L_x = x_1 L_{u_1} \left(\cos^2 \varphi \frac{k_1}{k_1} - \sin \varphi \cos \varphi \frac{k_2}{k_1} \right) + b_3 \cos \varphi x_1 \\ + (x_3 \sin \varphi - p \cos \varphi - q \sin \varphi) \left(\left(\cos \varphi \frac{k_1}{k_1} - \sin \varphi \frac{k_2}{k_1} \right) L_{u_1} + b_3 \right)$$

elde edilir. Teorem 4.6 kullanılırsa

$$L_x = x_1 L_{u_1} \left(\cos^2 \varphi \frac{k_1}{k_1} - \sin \varphi \cos \varphi \frac{k_2}{k_1} \right) + b_3 \cos \varphi x_1 + (x_3 \sin \varphi - p \cos \varphi - q \sin \varphi) L_{v_1}$$

bulunur. (4.33) ifadesi bu son eşitlikte yerine yazılırsa

$$L_x = L_x \left(\cos^2 \varphi \frac{k_1}{k_1} - \sin \varphi \cos \varphi \frac{k_2}{k_1} \right) + b_3 \cos \varphi x_1 + (x_3 \sin \varphi - p \cos \varphi - q \sin \varphi) L_{v_1}$$

elde edilir.

5.TARTIŞMA

Bu tezde Valenontis'in "Parallel P-Äquidistante Regelflachen" ve Masal'ın "Paralel P-Äquidistante Regle Yüzeylerin Bazı Yeni Karakteristik Özellikleri" isimli çalışmalarını esas alınarak üç boyutlu Öklid uzayında iki regle yüzeyin striksiyon eğrileri boyunca asli normal vektörleri paralel ve uygun noktalardaki merkezi düzlemler arasındaki uzaklık sabit kabul edilerek elde edilen regle yüzeylerin bazı karakteristik özellikleri incelenmiştir. Bu regle yüzeylerin kapalı olması halinde integral invariantları arasındaki bağıntılar hesaplanmıştır. Ayrıca, bu yüzeylere ait dayanak eğrisi ile striksiyon eğrisinin Mannheim eğri çifti olması halinde bazı özel sonuçlar bulunmuştur.

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmadan yola çıkarak paralel z-equidistant regle yüzeyler genelleştirilebilir ve bu yüzeylerin şekil operatörleri ve bu yüzeylere ait dayanak eğrilerinin küresel göstergeleri hesaplanabilir. Ayrıca, Lorentz ve Dual uzayda bu regle yüzeylerin bazı karakteristik özellikleri incelenebilir.

7. KAYNAKLAR

- Blaschke, W., 1949.** *Diferensiyel Geometri Dersleri*, İstanbul Üniversitesi Yayınları.
(Ord. Prof. Dr. K. Erim tarafından Türkçeye çevrilmiştir.)
- Çalışkan, M., 1980.** “Kapalı Eğrilerin Diferensiyel Geometrisi”, Yüksek Lisans Tezi, Malatya.
- Hacısalioğlu, H.H., 1983.** *Diferensiyel Geometri*, İnönü Üniversitesi Fen – Edebiyat Fakültesi Yayınları, Mat. No:7, Malatya.
- Hacısalioğlu, H.H., 1980.** *Yüksek Boyutlu Uzaylarda Dönüşümler ve Geometriler*, İnönü Üniversitesi Temel Bilgiler Fakültesi Yayınları, Mat. No:1, İstanbul.
- Liu, H., Wang, F., 2008.** “Mannheim Partner Curve in 3-Space”, Journal of Geometry 88:120-126,.
- Masal, M., 1994.** Paralel P-Äquidistante Regle Yüzeylerin Bazı Yeni Karakteristik Özellikleri, Yüksek Lisans Tezi, Samsun.
- Masal, M., Kuruoğlu, N., 1999.** “Some Characteristic Properties Of The Parallel P-Equidistant Ruled Surfaces In The Euclidean Space”, Pure Applied Mathematica Sciences, India, Vol:49-50.
- Masal, M., Kuruoğlu, N., 2000.** “Some Characteristic Properties of the Shape Operators of Parallel p-Equidistant Ruled Surfaces” Bulletin of Pure and Applied Sciences, Vol.19E (No.2), 361-364.
- Masal, M., Kuruoğlu, N., 2000.** “Some characteristic properties of the Spherical Indicatrices Leading Curves of Parallel p-Equidistant Ruled Surfaces”, Bulletin of Pure and Applied Sciences, Vol. 19E (No.2), 405-410.
- Orbay, K., Kasap, E., 2009.** “ On Mannheim Partner Curves in E^3 ”, International Journal of Physical Sciences Vol. 4 (5), 261-264.
- Şenatalar, M., 1978.** *Diferensiyel Geometri (Eğriler ve Yüzeyler Teorisi)* İstanbul Devlet Mühendislik Ve Mimarlık Akademisi Yayınları, Sayı:151, İstanbul.
- Valenontis, I., 1986.** “Parallel P-Äquidistante Regelflachen” Manuscripta Math. 54, 391-404.

8. ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı: Engin AS

Doğum Yeri: İstanbul

Doğum Tarihi: 11/11/1987

Medeni Hali: Bekar

Bildiği Yabancı Diller: İngilizce

Eğitim Durumu:

Lise: Şişli Kaptanpaşa Lisesi, 2001-2004

Lisans: Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Ordu Fen-Edebiyat Fakültesi, 2004-2008

Yüksek Lisans: Ordu Üniversitesi, 2008-2010

İletişim Bilgileri: Talatpaşa Mah. Çelebi Cad. No:75 Kağıthane/İstanbul.

e-mail: engin.as@hotmail.com