T.C.
ORDU ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KONVEKS FONKSİYONLARIN FARKLI SINIFLARI İÇİN KESİRLİ HERMİTE-HADAMARD TİPLİ EŞİTSİZLİKLER

NECLA KORKUT

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ORDU 2017

TEZ ONAY

Ordu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü öğrencisi Necla KORKUT tarafından hazırlanan ve Doç. Dr. Erhan SET danışmanlığında yürütülen "Konveks Fonksiyonların Farklı Sınıfları için Kesirli Hermite-Hadamard Tipli Eşitsizlikler" adlı bu tez, jürimiz tarafından 15/08/2017 tarihinde oy birliği / ~~oy çokluğu~~ ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Doç. Dr. Erhan SET

Başkan	:	Yrd. Doç. Dr. Mehmet KUNT Matematik Bölümü, Karadeniz Teknik Üniversitesi	İmza : M.Kunt
Üye	:	Yrd. Doç. Dr. Mehmet KORKMAZ Matematik Bölümü, Ordu Üniversitesi	İmza :
Üye	:	Doç. Dr. Erhan SET Matematik Bölümü, Ordu Üniversitesi	İmza :

ONAY:

24/08/2017.. tarihinde enstitüye teslim edilen bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulu'nun 24/08/2017... tarih ve .2017./391. sayılı kararı ile onaylanmıştır.

T.C. ORDU ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ 1923

Enstitü Müdürü Y.

Yrd. Doç. Dr. Mehmet Sami GÜLER

TEZ BİLDİRİMİ

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

İmza

Necla KORKUT

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

KONVEKS FONKSİYONLARIN FARKLI SINIFLARI İÇİN KESİRLİ HERMİTE-HADAMARD TİPLİ EŞİTSİZLİKLER

Necla KORKUT

Ordu Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı, 2017
Yüksek Lisans Tezi, 61s.

Danışman: Doç. Dr. Erhan SET

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş kısmından oluşmaktadır. İkinci bölümde, tezin diğer bölümlerinde kullanılacak olan konveks fonksiyonlar, eşitsizlikler ve kesirli integraller ile ilgili tanım ve teoremler verilmiştir. Üçüncü bölümde, konveks, s-konveks ve s-Godunova-Levin fonksiyonları için Riemann-Liouville kesirli integrallerini içeren Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler verilmiştir.

Dördüncü bölümde ise, ilk olarak Riemann-Liouville kesirli integralleri kullanarak quasi konveksi ve (α*,m)-konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler elde edilmiştir. İkinci olarak uyumlu kesirli integraller kullanılarak quasi-konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler elde edilmiştir. Son olarak da, üstel çekirdekli kesirli integraller ve genelleştirilmiş kesirli integraller kullanılarak harmonik konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Quasi konveks fonksiyon, (α*,m)-konveks fonksiyon, Harmonik konveks fonksiyon, Hermite-Hadamard eşitsizliği, Riemann-Liouville kesirli integraller, Uyumlu kesirli integraller

ABSTRACT

FRACTIONAL HERMITE-HADAMARD TYPE INEQUALITIES FOR DIFFERENT CLASSES OF CONVEX FUNCTIONS

Necla KORKUT

Ordu University
Institute for Graduate Studies in Science and Technology
Department of Mathematics, 2017
MSc. Thesis, 61p.

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Erhan SET

This thesis consists of four chapters. The first chapter consist of the introduction part. In the second chapter, some definitions and theorems, related to convex functions, inequalities and fractional integrals that will be needed for later use are given. In the third chapter, Hermite-Hadamard type inequalities involving Riemann-Liouville fractional integrals for convex, s-convex and s-Godunova-Levin functions are given.

In the fourth chapter, firstly, using Riemann-Liouville fractional integrals, Hermite-Hadamard type inequalities for quasi-convex and (α*,m)- convex functions are obtained. Secondly, by using conformable fractional integrals, Hermite-Hadamard type inequalities for quasi-convex functions are established. Lately, by using exponential kernel fractional integrals and generalized fractional integrals, Hermite-Hadamard type inequalities for harmonically convex functions are obtained.

Keywords: Quasi convex function, and (α*,m)- convex functions, Harmonic convex function, Hermite-Hadamard inequality, Riemann-Liouville fractional integral, Conformable fractional integral

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans tezi olarak sunduğum bu çalışma Ordu Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde yapılmıştır.

Yüksek Lisans çalışmalarımın başlangıcından bu yana, tez konumda çalışmamı sağlayan, bütün enerjisi ve engin birikimiyle beni motive eden, çalışmalarımda eşsiz katkıları bulunan, bana bilimsel çalışma ve düşünme yeteneğini aşılayan saygıdeğer danışman hocam, Sayın Doç. Dr. Erhan SET'e teşekkür ve şükranlarımı sunarım.

Ayrıca tez çalışmalarım boyunca öneri ve desteklerini eksik etmeyen Ordu Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Öğretim Üyeleri ve Araştırma görevlilerine en içten şükranlarımı sunarım.

Yüksek Lisans tez çalışmalarım süresince yanımda olan ve yardımlarını esirgemeyen arkadaşım Sayın Barış Çelik'e teşekkür ederim.

Öğrenim hayatım boyunca sabırla, güvenle ve sevgiyle hep yanımda olan desteklerini hiç eksik etmeyen Aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ŞEKİLLER LİSTESİ

SİMGELER ve KISALTMALAR

β	: Beta fonksiyonu
Γ	: Gamma fonksiyonu
K_s^2	: İkinci Anlamda s-Konveks Fonksiyon Sınıfı
$K_m(b)$	: m- Konveks Fonksiyonlar Sınıfı
$K_m^{\alpha}(b)$	: (α, m) - Konveks Fonksiyonlar Sınıfı
f'	: f Fonksiyonun Birinci Mertebeden Türevi
f''	: f Fonksiyonun İkinci Mertebeden Türevi
I	: Reel Sayılar Kümesinde Bir Aralık
I°	: I 'nın İçi
J_{a+}^{α}	: α. Dereceden Sağ Riemann-Liouville Kesirli İntegral
J_{b-}^{α}	: α. Dereceden Sol Riemann-Liouville Kesirli İntegral
$L[a,b]$	: $[a,b]$ Aralığında İntegrallenebilen Fonksiyonlar Kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel Sayılar Kümesi
β_x	: Tamamlanmamış Beta Fonksiyonu
I_{α}^{a}	: α. Mertebeden Sol Uyumlu Kesirli İntegral
I_{α}	: α. Mertebeden Sağ Uyumlu Kesirli İntegral
$\mathcal{J}_{\rho,\lambda a+;w}^{\sigma}\varphi$	: Sol Taraflı Genelleştirilmiş İntegral Operatörü
$\mathcal{J}_{\rho,\lambda b-;w}^{\sigma}\varphi$	: Sağ Taraflı Genelleştirilmiş İntegral Operatörü

1. GİRİŞ

Hemen hemen tüm hesaplamalar birtakım yaklaşımlarla ilgilidir ve bir yaklaşımın kaynağıda eşitsizliktir. Eşitsizlikler son yüzyılda ve günümüzde matematiğin tüm alanlarında çok önemli bir yere sahip olmakla birlikte bugünlerde çok aktif ve ilgi çekici bir araştırma alanıdır. Eşitsizlikler teorisinin temeli 18.yüzyıla kadar dayanmakta olup bu teori üzerine günümüze kadar G.H. Hardy, D.S. Mitronović, J.E. Pečarić, A.M. Fink, Niculescu, S.S. Dragomir ve daha birçok bilim insanı tarafından eserler literatüre kazandırıl
mıştır. Eşitsizlikler teorisi içerisinde ön plana çıkmış birçok eşitsizlik vardır. Bunlardan biride eşitsizlikler teorisinin gelişmesinde önemli rol oynayan konveks fonksiyonlar ile ilişkili olan Hermite-Hadamard eşitsizliğidir. Bu eşitsizlik ilk olarak 1881'de Ch. Hermite'nin Mathesis dergisine gönderdiği bir mektupta elde edilmesine rağmen uzun yıllar bu durum anlaşılmamıştır. Hatta 1948'de E.F. Beckenback [3] bu eşitsizliğin 1893'de Hadamard tarafından ispatlandığını belirtmiştir. Fakat bu durum ile ilgili gerçekler daha sonraki yıllarda anlaşılmış ve bu eşitsizlik literatürde ya Hadamard eşitsizliği yada daha çok Hermite-Hadamard eşitsizliği olarak girmiştir.
Konveks fonksiyonlar teoriside oldukça eski olup temeli Archimedes'in ünlü π(pi) değerinin hesaplamasına kadar uzanmaktadır . Konveks fonksiyonlar teorisi başlangıçtan bugüne kadar matematiğin tüm alanlarında önemli bir rol oynamıştır. Son yıllarda da konveks fonksiyonların farklı sınıfları üzerine birçok yeni tanımlar ve özellikleri literatüre kazandırılmıştır. Bunlardan bazıları bu tez çalışmasında da kullanılacak olup $s-$ konveks, quasi-konveks, $(\alpha^*, m)-$ konveks, m-konveks, harmonik konveks, h-konveks v.s. gibi fonksiyon sınıflarıdır.
Tamsayı olmayan bir basamaktan türev veya integral alma fikri 1695 yılında Marquis'de L'Hospital'e tarafından Gottfried Wilhelm Leibniz'e yöneltilen "$n \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ olmak üzere $\frac{d^n y}{dx^n}$ notasyonunda $n = \frac{1}{2}$ olursa ne olur ?" sorusu ile ortaya çıkmıştır. Ve daha sonra Liouville, Riemann, Wely, Euler, Abel, Lagrange gibi birçok matematikçinin öncü çalışmalarıyla hızlı bir gelişme göstermiştir. Bu teori üzerine başta Samko, Kilbas ve Marichev [30] tarafından yazılan "Fractional Integrals and Derivatives Theory and Applications" adlı kitap olmak üzere, Kilbas, Srivastava ve Trujillo [19] tarafından yazılan "Theory and Applications of Fractional Differential Equations", Miller and Ross [25] tarafından yazılan "An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional differential equations " ve Zhou [41] tarafından yazılan "Basic Theory of Fractional Differential Equations " adlı kitaplar literatürde yer almakla birlikte üzerine birçok makale bulunmaktadır. Ayrıca literatürde birçok kesirli integral tanımı mevcuttur. Bu tanımlardan en meşhur

olanı Riemann-Liouville kesirli integraller olup bunlardan başka bazı kesirli integral operatörleri Weyl, Erdelyci-Kober, Hadamard, Katugampola, Uyumlu, Üstel Çekirdekli, Genelleştirilmiş kesirli integral operatörleri şeklindedir.

Bu tezin amacı Riemann-Liouville, kesirli integralleri, uyumlu kesirli integraller, üstel çekirdekli kesirli integraller ve Raina ve arkadaşları tarafından genelleştirilen kesirli integraller kullanılarak yeni elde edilmiş Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikleri literatüre uyumlu bir şekilde sunmaktır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

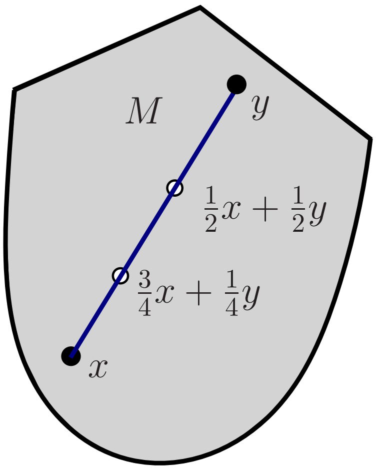
Bu bölümde, çalışmamızda kullanılacak olan tanımlar, teoremler, bazı iyi bilinen eşitsizlikler ve temel özellikler ile gerekli olan ispatlar verilecektir.

2.1 Bazı Konveks Fonksiyon Sınıfları

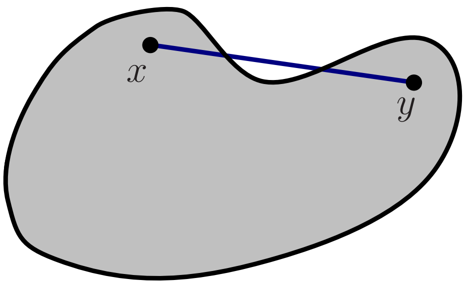
Tanım 2.1.1 (**Konveks Küme**): X bir vektör uzayı, $A \subseteq X$ ve $x, y \in A$ keyfi olmak üzere

$$M = \{z \in X : z = \alpha x + (1-\alpha)y, \quad 0 \leq \alpha \leq 1\} \subseteq A$$

ise A kümesine konveks küme denir [21].



Şekil 2.1: Konveks Küme

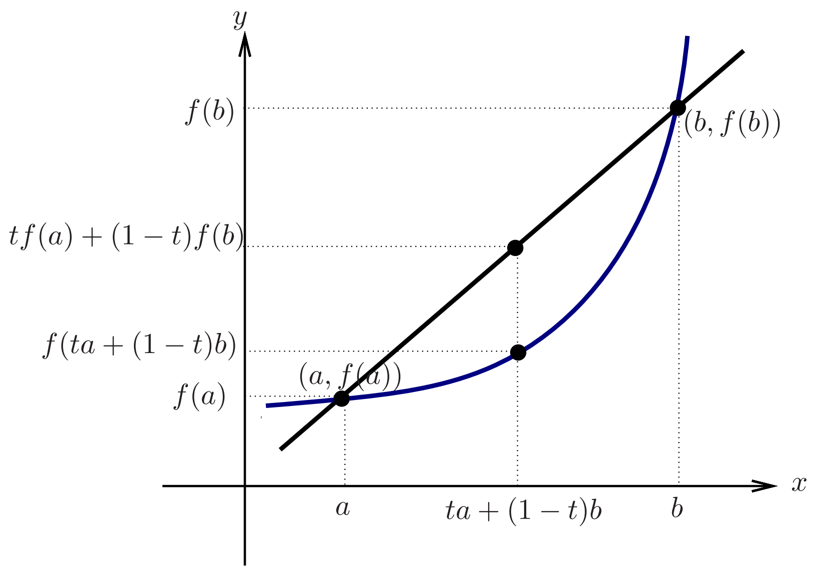


Şekil 2.2: Konkav Küme

Tanım 2.1.2 (Konveks Fonksiyon): $I, \mathbb{R}$ de bir aralık ve $f : I \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere her $x, y \in I$ ve $t \in [0,1]$ için,

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) \tag{2.1.1}$$

şartını sağlayan f fonksiyonuna konveks fonksiyon denir. Eşitsizlikte " $\geq$" olması durumunda ise f fonksiyonuna konkav fonksiyon denir [26].



Şekil 2.3: Konveks Fonksiyon

Teorem 2.1.1 (Hermite-Hadamard Eşitsizliği): I, $\mathbb{R}$'de bir aralık, $a, b \in I$ ve $a < b$ olmak üzere $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konveks bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{2.1.2}$$

eşitsizliği geçerlidir [27].

(2.1.2) eşitsizliğin genelleştirilmesi, genişletilmesi ile ilgili bazı sonuçlar için ([7],[18], [29],[37],[38]) nolu referanslara bakılabilir.

Tseng ve arkadaşları aşağıdaki gibi Hermite-Hadamard tipli yeni bir eşitsizlik elde etmişlerdir:

Teorem 2.1.2 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $[a, b]$ üzerinde konveks bir fonksiyon olsun. Bu takdirde

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a+b}{2}\right) &\leq \frac{1}{2}\left[f\left(\frac{3a+b}{4}\right)+f\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right] \\ &\leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \\ &\leq \frac{1}{2}\left[f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{f(a)+f(b)}{2}\right] \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \end{aligned} \tag{2.1.3}$$

eşitsizliği geçerlidir. (2.1.3)'deki üçüncü eşitsizlik literatürde Bullen eşitsizliği olarak bilinmektedir [37].

Dragomir ve Agarwal (2.1.2)'deki ikinci eşitsizlik ile bağlantılı aşağıdaki sonucu elde etmişlerdir:

Teorem 2.1.3 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, (a,b) üzerinde differansiyellenebilir bir fonksiyon ve $a < b$ olsun. $|f'|$, $[a,b]$ aralığında konveks bir fonksiyon ise

$$\left| \frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)dt \right| \leq \frac{b-a}{8} (|f'(a)| + |f'(b)|) \tag{2.1.4}$$

eşitsizliği geçerlidir [7].

Kırmacı ve Özdemir (2.1.2)'deki birinci eşitsizlik ile bağlantılı aşağıdaki sonucu elde etmişlerdir:

Teorem 2.1.4 Teorem 2.1.3'deki şartlar altında

$$\left| \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| \leq \frac{b-a}{8} (|f'(a)| + |f'(b)|) \tag{2.1.5}$$

eşitsizliği geçerlidir [18].

Tanım 2.1.3 (Breckner Konveks veya İkinci Anlamda $s-$ Konveks Fonksiyon): Her $x, y \in [0, \infty)$, $t \in [0,1]$ ve $s \in (0,1]$ için

$$f(tx + (1-t)y) \leq t^s f(x) + (1-t)^s f(y) \tag{2.1.6}$$

şartını sağlayan $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna ikinci anlamda s-konveks fonksiyon veya Breckner konveks fonksiyon denir ve ikinci anlamda s-konveks fonksiyonlar sınıfı genellikle K_s^2 ile gösterilir. Burada $s = 1$ için $[0, \infty)$ aralığında s-konvekslik kavramından konveksliğin elde edildiği kolaylıkla görülebilir ([4],[12]).

Örnek 2.1.1 $0 < s < 1$ ve $a, b, c \in \mathbb{R}$ olsun. $b \geq 0$ ve $0 \leq c \leq a$ olmak üzere $u \in \mathbb{R}^+$ için,

$$f(u) = \begin{cases} a, & u = 0 \\ bu^s + c, & u > 0 \end{cases}$$

olarak tanımlanan f fonksiyonu ikinci anlamda s-konveks bir fonksiyondur [12].

Dragomir ve Fitzpatrik, ikinci anlamda s-konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliğini aşağıdaki gibi elde etmişlerdir:

Teorem 2.1.5 $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ ikinci anlamda $s-$konveks bir fonksiyon, $s \in (0,1]$, $a, b \in [0, \infty)$ ve $a < b$ olsun. $f \in L[a,b]$ ise

$$2^{s-1} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{s+1} \tag{2.1.7}$$

eşitsizliği geçerlidir [8].

Tanım 2.1.4 (s- Godunova-Levin Fonksiyonu): $I, \mathbb{R}$ de bir aralık ve $f : I \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Her $x, y \in I$ ve $\lambda \in (0,1)$ olmak üzere $s \in [0,1]$ için

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \frac{f(x)}{\lambda^s} + \frac{f(y)}{(1-\lambda)^s}$$

şartını sağlayan f fonksiyonuna $s - Godunova - Levin$ fonksiyonu denir ([5],[6]).

Tanım 2.1.5 (Quasi Konveks Fonksiyon): $I, \mathbb{R}$ de bir aralık ve $f : I \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Her $x, y \in I$ ve $\lambda \in [0,1]$ için

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \max\left\{f(x), f(y)\right\}$$

ise f'ye quasi konveks fonksiyon denir [9].
Aynı şartlar altında

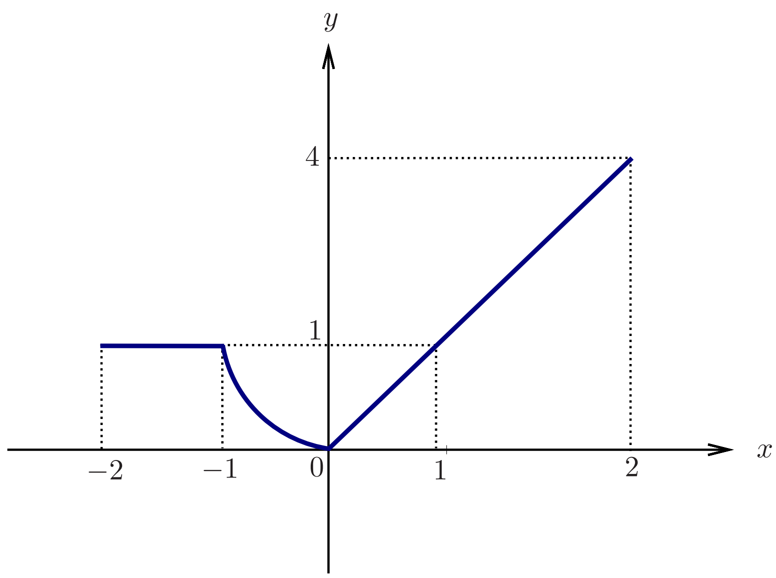
$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \max\left\{f(x), f(y)\right\}$$

ise f'ye quasi konkav fonksiyon denir [9].

Not 2.1.1 Her konveks fonksiyon aynı zamanda bir quasi konveks fonksiyondur. Fakat bunun tersi her zaman doğru değildir. Yani quasi konveks olup konveks olmayan fonksiyonlar vardır. Örneğin $g : [-2,2] \to \mathbb{R}$ olmak üzere

$$g(t) = \begin{cases} 1, & t \in [-2,-1], \\ t^2, & t \in (-1,2] \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $g(t)$ fonksiyonu $[-2,2]$ aralığında quasi konveks bir fonksiyon iken konveks bir fonksiyon değildir [14].



Şekil 2.4: Quasi-konveks olup konveks olmayan

Teorem 2.1.6 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, (a,b) aralığında differensiyellenebilir bir fonksiyon, $a,b\in\mathbb{R}$ ve $a<b$ olsun. $|f'|$, $[a,b]$ aralığında quasi konveks fonksiyon ise

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right| \leq \frac{(b-a)max\{|f(a)|,|f(b)|\}}{4} \qquad (2.1.8)$$

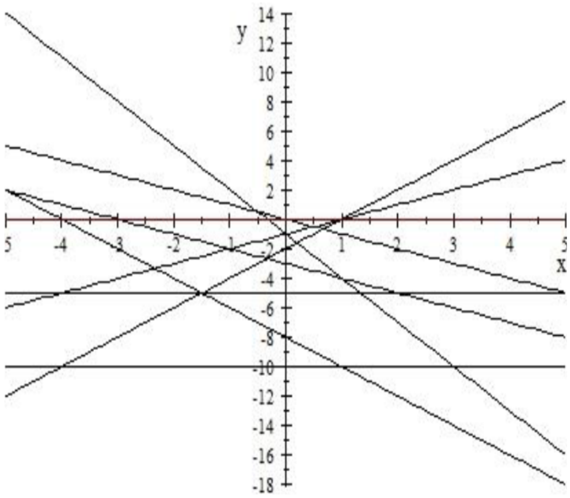
eşitsizliği geçerlidir [14].

Tanım 2.1.6 (m-Konveks Fonksiyon): $f:[0,b]\to\mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $b>0$ olsun. Her $x,y\in[0,b]$, $m\in[0,1]$ ve $t\in[0,1]$ için

$$f(tx+m(1-t)y)\leq tf(x)+m(1-t)f(y)$$

şartını sağlayan f fonksiyonuna $m-$konveks fonksiyon denir [36].
$-f$ fonksiyonu $m-$konveks ise bu takdirde f fonksiyonu $m-$konkavdır. Ayrıca $f(0)\leq 0$ için $[0,b]$ aralığında tanımlı tüm $m-$konveks fonksiyonların sınıfı $K_m(b)$ ile gösterilir. Eğer $m=1$ alınırsa $[0,b]$ üzerinde $m-$konveks fonksiyonunun bilinen konveks fonksiyona dönüştüğü kolayca görülebilir.

Örnek 2.1.2 $f:[0,r]\to\mathbb{R}$, $x\in[0,r]$ olmak üzere $f(x)=ax+b$ şeklindeki $(a,b\in\mathbb{R};a\neq 0,b\leq 0)$ doğrusal fonksiyonlar $m-$ konveks fonksiyonlardır [11].



Şekil 2.5: m-Konveks fonksiyonlar

Şekil 2.5 'ten görüleceği gibi, grafiği y ekseninin pozitif kısmını kesmeyen her doğrusal fonksiyon $m-$konvekstir [11].

Tanım 2.1.7 ((α^*,m)-Konveks Fonksiyon): $f:[0,b]\to\mathbb{R}$ ve $b>0$ olsun. Her $x,y\in[0,b]$, $t\in[0,1]$ ve $(\alpha^*,m)\in[0,1]^2$ için

$$f(tx+m(1-t)y)\leq t^{\alpha^*}f(x)+m(1-t^{\alpha^*})f(y)$$

şartı sağlanıyorsa f fonksiyonuna (α^*, m)-konveks fonksiyon denir [22].

$f(0) \leq 0$ için $[0, b]$ aralığında tanımlı tüm (α^*, m)-konveks fonksiyonlar sınıfı $K_m^{\alpha}(b)$ ile gösterilir. Ayrıca, $(\alpha^*, m) \in \{(1, m), (1, 1)\}$ için sırasıyla $m-$konveks ve konveks fonksiyon sınıfları elde edilir. $f(0) \leq 0$ olmak üzere $K_1^1(b)$ sınıfında sadece $f : [0, b] \to \mathbb{R}$ tanımlı konveks fonksiyonlar yer alır, yani $K_1^1(b)$, $[0, b]$ üzerinde tanımlı tüm konveks fonksiyonlar sınıfının uygun bir alt sınıfıdır.

Tanım 2.1.8 (Harmonik Konveks Fonksiyon): $I \subseteq \mathbb{R} \backslash \{0\}$ reel bir aralık ve $f : I \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere her $x, y \in I$ ve $t \in [0, 1]$ için

$$f\left(\frac{xy}{tx + (1-t)y}\right) \leq tf(x) + (1-t)f(y) \tag{2.1.9}$$

şartını sağlayan f fonksiyonuna harmonik konveks fonksiyon denir. f fonksiyonun (2.1.9) eşitsizliği ters çevrilirse f' ye harmonik konkav fonksiyon denir [16].

Harmonik konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliği aşağıdaki gibi elde edilmiştir:

Teorem 2.1.7 $f : I \subseteq \mathbb{R} \backslash \{0\} \to \mathbb{R}$ harmonik konveks fonksiyon ve $a, b \in I$ ve $a < b$ olsun. $f \in L[a, b]$ olmak üzere

$$f\left(\frac{2ab}{a+b}\right) \leq \frac{ab}{b-a} \int_a^b \frac{f(x)}{x^2} dx \leq \frac{f(a) + f(b)}{2} \tag{2.1.10}$$

eşitsizliği geçerlidir [16].

Teorem 2.1.8 (Hölder Eşitsizliği): $a = (a_1, \ldots, a_n)$ ve $b = (b_1, \ldots, b_n)$ reel veya kompleks sayıların iki $n-$lisi olsun. Bu takdirde

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

olmak üzere,

a) $p > 1$ ise,

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k b_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

b) $p < 0$ veya $a < 0$ ise,

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k b_k| \geq \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir [23].

Teorem 2.1.9 (İntegraller için Hölder Eşitsizliği): $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. f ve g, $[a, b]$ aralığında tanımlı reel fonksiyonlar, $|f|^p$ ve $|g|^p$, $[a, b]$ aralığında integrallenebilir fonksiyonlar ise

$$\int_a^b |f(x)g(x)|dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir [24].

Benzer şekilde iki katlı integraller için Hölder eşitsizliği aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\int_a^b \int_a^b |f(x,y)g(x,y)|dxdy \leq \left(\int_a^b \int_a^b |f(x,y)|^p dxdy\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b \int_a^b |g(x,y)|^q dxdy\right)^{\frac{1}{q}}$$

Ayrıca Hölder eşitsizliğinin bir sonucu olan power mean eşitsizliği de aşağıdaki gibi ifade edilir.

Sonuç 2.1.1 (Power Mean Eşitsizliği): $q \geq 1$ olsun. f ve g, $[a, b]$ aralığında tanımlı reel fonksiyonlar, $|f|$ ve $|g|^q$, $[a, b]$ aralığında integrallenebilir fonksiyonlar ise

$$\int_a^b |f(x)g(x)|dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|dx\right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_a^b |f(x)||g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir.
Benzer şekilde iki katlı integraller için power mean eşitsizliği aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\int_a^b \int_a^b |f(x,y)g(x,y)|dxdy \leq \left(\int_a^b \int_a^b |f(x,y)|dxdy\right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_a^b \int_a^b |f(x,y)||g(x,y)|^q dxdy\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Reel sayılar için temel eşitsizliklerden bir tanesi de üçgen eşitsizliğidir.

Teorem 2.1.10 (Üçgen Eşitsizliği): Herhangi x, y reel sayıları için

$$|x + y| \leq |x| + |y|,$$

$$\big||x| - |y|\big| \leq |x - y|,$$

$$\big||x| - |y|\big| \leq |x + y|,$$

ve tümevarım metoduyla

$$|x_1 + ... + x_n| \leq |x_1| + ... + |x_n|$$

eşitsizlikleri geçerlidir [24].

Teorem 2.1.11 (Üçgen Eşitsizliğinin İntegral Versiyonu): f, $[a, b]$ aralığında sürekli reel değerli bir fonksiyon olsun. Bu takdirde

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx \quad (a < b)$$

eşitsizliği geçerlidir [24].

2.2 Kesirli İntegral Operatörler

Tanım 2.2.1 (Gamma Fonksiyonu): $n > 0$ için

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty e^{-u} u^{n-1} du$$

ile tanımlanır. Bu integral $n > 0$ için yakınsaktır. Gamma fonksiyonunun en önemli özelliklerinden biri $n > 0$ için $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$ ve $n = 0, 1, 2, \dots$ için

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n!$$

şeklindedir.

Tanım 2.2.2 (Beta Fonksiyonu): $x > 0$ ve $y > 0$ için

$$\beta(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$$

şeklinde ifade edilen $\beta(x, y)$ gösterimine β fonksiyonu denir. Gamma ve Beta fonksiyonları arasındaki

$$\beta(m, n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} \quad m, n > 0$$

ilişki literatürde sıkça kullanılmaktadır.

Tanım 2.2.3 (Tamamlanmamış Beta Fonksiyonu): $m, n > 0$ ve $0 < x \leq 1$ için

$$\beta_x(m, n) = \beta(x; m, n) = \int_0^x t^{m-1}(1-t)^{n-1} dt$$

şeklinde tanımlanan β fonksiyonuna tamamlanmamış Beta fonksiyonu denir.

Tanım 2.2.4 (Riemann-Liouville Kesirli İntegraller): $[a, b]$ $(-\infty < a < b < \infty)$, reel eksen üzerinde sonlu bir aralık ve $f \in L[a, b]$ olsun. Bu durumda,

$$(J_{a^+}^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x f(t)(x-t)^{\alpha-1} dt, \quad x > a \tag{2.2.1}$$

$$(J_{b^-}^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b f(t)(t-x)^{\alpha-1} dt, \quad x < b \tag{2.2.2}$$

integrallerine sırasıyla $\alpha > 0$ için α. mertebeden sağ ve sol Riemann-Liouville kesirli integralleri denir [19].

Bu tanımda $\alpha = n \in \mathbb{N}$ olduğu zaman (2.2.1) ve (2.2.2) tanımları

$$\begin{aligned}(J_{a^+}^n f)(x) &= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x f(t)(x-t)^{n-1} dt, \\ (J_{b^-}^n f)(x) &= \frac{1}{(n-1)!} \int_x^b f(t)(t-x)^{n-1} dt,\end{aligned}$$

şeklindeki n-katlı integraller ile çakışır.

Riemann-Liouville kesirli integralleri yardımıyla konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliği Sarıkaya ve arkadaşları tarafından aşağıdaki gibi elde edilmiştir:

Teorem 2.2.1 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ pozitif bir fonksiyon, $0 \leq a < b$ ve $f \in L[a, b]$ olsun. f, $[a, b]$ aralığında konveks bir fonksiyon ise $\alpha > 0$ için

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}}[J_{a^+}^{\alpha} f(b) + J_{b^-}^{\alpha} f(a)] \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{2.2.3}$$

eşitsizliği geçerlidir [29].

Zhu ve arkadaşları (2.1.2)'deki birinci eşitsizlik ile bağlantılı aşağıdaki sonucu elde etmişlerdir:

Teorem 2.2.2 Teorem 2.1.3'deki şartlar altında ve $\alpha > 0$ için

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}}[J_{a^+}^{\alpha} f(b) + J_{b^-}^{\alpha} f(a)] - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| \\ \leq & \frac{(b-a)}{4(\alpha+1)}\left(\alpha + 3 - \frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)(|f'(a)| + |f'(b)|) \end{aligned} \tag{2.2.4}$$

eşitsizliği geçerlidir [38].

Riemann-Liouville kesirli integralleri yardımıyla harmonik konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliği İşcan ve Wu tarafından aşağıdaki gibi elde edilmiştir:

Teorem 2.2.3 $f : I \subseteq (0, \infty) \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon, $a, b \in I$, $a < b$ ve $f \in L[a, b]$ olsun. Eğer f, $[a, b]$ aralığında harmonik konveks fonksiyon ise $\alpha > 0$ için

$$\begin{aligned} f\left(\frac{2ab}{a+b}\right) & \leq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2}\left(\frac{ab}{b-a}\right)^{\alpha}\left\{J_{\frac{1}{a}^-}^{\alpha}(fog)\left(\frac{1}{b}\right) + J_{\frac{1}{a}^+}^{\alpha}(fog)\left(\frac{1}{a}\right)\right\} \\ & \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \end{aligned} \tag{2.2.5}$$

eşitsizliği geçerlidir ve $g(x) = \frac{1}{x}$'dir [15].

Khalil ve arkadaşları tarafından ilk defa tanıtılan ve daha sonra Abdeljawad tarafından aşağıdaki gibi literatüre kazandırılan uyumlu kesirli integral kavramlarını verelim.

Tanım 2.2.5 (Uyumlu Kesirli İntegraller): $\alpha \in (n, n+1]$, $n = 0, 1, 2, ...$, $\beta = \alpha - n$ $a, b \in \mathbb{R}$ ve $a < b$ ve $f \in L[a, b]$ olsun. $\alpha > 0$ için α. mertebeden sol uyumlu kesirli integral

$$(I_{\alpha}^{a} f)(t) = \frac{1}{n!}\int_{a}^{t}(t-x)^{n}(x-a)^{\beta-1} f(x)dx, \quad t > a$$

şeklinde ve α. mertebeden sağ uyumlu kesirli integral

$$({}^{b}I_{\alpha}f)(t) = \frac{1}{n!}\int_{t}^{b}(x-t)^{n}(b-x)^{\beta-1}f(x)dx, \quad t<b$$

şeklinde tanımlanır [2].

Eğer $\alpha = n+1$ alınırsa bu takdirde $\beta = \alpha - n = n+1-n = 1$ olur. Böylece $(I_{\alpha}^{a}f)(t) = (J_{a+}^{\alpha}f)(t)$ ve $({}^{b}I_{\alpha}f)(t) = (J_{b-}^{\alpha}f)(t)$ olduğu görülür. Yani $\alpha = n+1$, $n = 0,1,2,...$, sağ ve sol uyumlu kesirli integraller sırasıyla sağ ve sol Riemann-Liouville kesirli integrallerine indirgenir ([2], [17]).

Şimdide Kirane ve Torebek tarafından son yıllarda tanıtılan üstel çekirdekli kesirli integral operatörlerinin tanımını verelim.

Tanım 2.2.6 $a,b \in \mathbb{R}$, $a<b$ ve $f \in L[a,b]$ olsun. $\alpha \in (0,1)$ için α. mertebeden sol ve sağ üstel çekirdekli kesirli integralleri sırasıyla

$$\mathcal{I}_{a}^{\alpha}f(x) = \frac{1}{\alpha}\int_{a}^{x} exp\left\{-\frac{1-\alpha}{\alpha}(x-s)\right\} f(s)ds, \quad x>a$$

ve

$$\mathcal{I}_{b}^{\alpha}f(x) = \frac{1}{\alpha}\int_{x}^{b} exp\left\{-\frac{1-\alpha}{\alpha}(s-x)\right\} f(s)ds, \quad x<b$$

şeklinde tanımlanır [20].

$\sigma(k)\,(k \in \mathbb{N} = \mathbb{N}\cup\{0\})$ pozitif reel sayıların sınırlı bir dizisi olmak üzere

$$\mathcal{F}_{\rho,\lambda}^{\sigma}(x) = \mathcal{F}_{\rho,\lambda}^{\sigma(0),\sigma(1),\dots}(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sigma(k)}{\Gamma(\rho k+\lambda)}x^{k} \quad (\rho,\lambda>0; |x|<\mathbb{R}), \tag{2.2.6}$$

şeklinde tanımlanmış fonksiyonların bir sınıfı Raina tarafından tanıtıldı [28]. (2.2.6) yardımıyla, $\lambda,\rho,w \in \mathbb{R}$, $\lambda,\rho>0$ ve $\varphi(t)$ integrallenebilir bir fonksiyon olmak üzere sol taraflı genelleştirilmiş kesirli integral operatörü Raina [28] tarafından

$$\left(\mathcal{J}_{\rho,\lambda,a+;w}^{\sigma}\varphi\right)(x) = \int_{a}^{x}(x-t)^{\lambda-1}\mathcal{F}_{\rho,\lambda}^{\sigma}[w(x-t)^{\rho}]\varphi(t)dt \qquad (x>a>0), \tag{2.2.7}$$

şeklinde ve sağ taraflı genelleştirilmiş kesirli integral operatörü ise Agarwal ve arkadaşları [1] tarafından

$$\left(\mathcal{J}_{\rho,\lambda,b-;w}^{\sigma}\varphi\right)(x) = \int_{x}^{b}(t-x)^{\lambda-1}\mathcal{F}_{\rho,\lambda}^{\sigma}[w(t-x)^{\rho}]\varphi(t)dt \qquad (0<x<b), \tag{2.2.8}$$

şeklinde tanımlamıştır.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1 Riemann-Liouville Kesirli İntegraller Yardımıyla Konveks Fonksiyonlar için Kesirli Hermite-Hadamard Tipli Eşitsizlikler

Hwang ve arkadaşları aşağıdaki lemmaları ispatlamıştır.

Lemma 3.1.1 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, (a,b) aralığında differansiyellenebilir bir fonksiyon ve $a < b$ olsun. $f' \in L[a,b]$ ve

$$h_1 = \begin{cases} (b-x)^\alpha - (x-a)^\alpha - (b-a)^\alpha, & x \in [a, \frac{a+b}{2}) \\ (b-x)^\alpha - (x-a)^\alpha + (b-a)^\alpha, & x \in [\frac{a+b}{2}, b] \end{cases}$$

olmak üzere $\alpha > 0$ için

$$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^\alpha}\big[J_{a^+}^\alpha f(b) + J_{b^-}^\alpha f(a)\big] - f\big(\frac{a+b}{2}\big) = \frac{1}{2(b-a)^\alpha}\int_a^b h_1(x) f'(x)dx$$

eşitliği geçerlidir [13].

Lemma 3.1.2 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, (a,b) aralığında differansiyellenebilir bir fonksiyon ve $a < b$ olsun. $f' \in L[a,b]$ ve

$$h_2 = \begin{cases} (b-x)^\alpha - (x-a)^\alpha - (b-a)^\alpha, & x \in [a, \frac{3a+b}{4}) \\ (b-x)^\alpha - (x-a)^\alpha, & x \in [\frac{3a+b}{4}, \frac{a+3b}{4}) \\ (b-x)^\alpha - (x-a)^\alpha + (b-a)^\alpha, & x \in [\frac{a+3b}{4}, b] \end{cases}$$

olmak üzere $\alpha > 0$ için

$$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^\alpha}\big[J_{a^+}^\alpha f(b) + J_{b^-}^\alpha f(a)\big] - \frac{1}{2}\Big[f\big(\frac{3a+b}{4} + \frac{a+3b}{4}\big)\Big] = \frac{1}{2(b-a)^\alpha}\int_a^b h_2(x) f'(x)dx$$

eşitliği geçerlidir [13].

Teorem 3.1.1 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, (a,b) aralığında differansiyellenebilir bir fonksiyon ve $a < b$ olsun. Eğer $|f'|$, $[a,b]$ aralığında konveks bir fonksiyon ise $\alpha > 0$ için

$$\begin{aligned} &\left|\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^\alpha}[J_{a^+}^\alpha f(b) + J_{b^-}^\alpha f(a)] - f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| \\ \leq\ & \frac{(b-a)}{4(\alpha+1)}\left(\alpha - 1 + \frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)(|f'(a)| + |f'(b)|) \end{aligned} \tag{3.1.1}$$

kesirli integral eşitsizliği geçerlidir [13].

İspat. İlk olarak $x = a + b - x$ değişken değişikliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
&\int_a^{\frac{a+b}{2}} [(b-a)^\alpha - (b-x)^\alpha + (x-a)^\alpha] \frac{b-x}{b-a} |f'(a)| dx \\
&+ \int_{\frac{a+b}{2}}^b [(b-x)^\alpha - (x-a)^\alpha + (b-a)^\alpha] \frac{b-x}{b-a} |f'(a)| dx \\
= &\int_a^{\frac{a+b}{2}} [(b-a)^\alpha - (b-x)^\alpha + (x-a)^\alpha] \frac{b-x}{b-a} |f'(a)| dx \\
&+ \int_a^{\frac{a+b}{2}} [(b-a)^\alpha - (b-x)^\alpha + (x-a)^\alpha] \frac{x-a}{b-a} |f'(a)| dx \\
= &|f'(a)| \int_a^{\frac{a+b}{2}} [(b-a)^\alpha - (b-x)^\alpha + (x-a)^\alpha] dx := M_1
\end{aligned} \tag{3.1.2}$$

ve

$$\begin{aligned}
&\int_a^{\frac{a+b}{2}} [(b-a)^\alpha - (b-x)^\alpha + (x-a)^\alpha] \frac{x-a}{b-a} |f'(b)| dx \\
&+ \int_{\frac{a+b}{2}}^b [(b-x)^\alpha - (x-a)^\alpha + (b-a)^\alpha] \frac{x-a}{b-a} |f'(b)| dx \\
= &\int_a^{\frac{a+b}{2}} [(b-a)^\alpha - (b-x)^\alpha + (x-a)^\alpha] \frac{x-a}{b-a} |f'(b)| dx \\
&+ \int_a^{\frac{a+b}{2}} [(b-a)^\alpha - (b-x)^\alpha + (x-a)^\alpha] \frac{b-x}{b-a} |f'(b)| dx \\
= &|f'(b)| \int_a^{\frac{a+b}{2}} [(b-a)^\alpha - (b-x)^\alpha + (x-a)^\alpha] dx := M_2
\end{aligned} \tag{3.1.3}$$

yazılır. Buradan Lemma 3.1.1, $|f'|$ konveksliği ile (3.1.2) ve (3.1.3) özdeşlikleri kullanılarak

$$x = \frac{b-x}{b-a} a + \frac{x-a}{b-a} b \quad (x \in [a,b]) \tag{3.1.4}$$

için

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{1}{2(b-a)^\alpha} \int_a^b h_1(x) f'(x) dx \right| \\
\leq &\frac{1}{2(b-a)^\alpha} \int_a^b |h_1(x)| \, |f'(x)| \, dx \\
= &\frac{1}{2(b-a)^\alpha} \int_a^{\frac{a+b}{2}} [(b-a)^\alpha - (b-x)^\alpha + (x-a)^\alpha] |f'(x)| dx \\
&+ \frac{1}{2(b-a)^\alpha} \int_{\frac{a+b}{2}}^b [(b-x)^\alpha - (x-a)^\alpha + (b-a)^\alpha] |f'(x)| dx \\
\leq &\frac{M_1 + M_2}{2(b-a)^\alpha} \\
= &\frac{|f'(a)| + |f'(b)|}{2(b-a)^\alpha} \int_a^{\frac{a+b}{2}} [(b-a)^\alpha - (b-x)^\alpha + (x-a)^\alpha] dx \\
= &\frac{(b-a)}{4(\alpha+1)} \left(\alpha - 1 + \frac{1}{2^{\alpha-1}} \right) (|f'(a)| + |f'(b)|)
\end{aligned}$$

yazılır. Böylece Lemma 3.1.1 ve (3.1.1)' den istenilen sonuç elde edilir.

Sonuç 3.1.1

$$\begin{aligned} & \alpha - 1 + \frac{1}{2^{\alpha-1}} \\ &= \alpha + 3 - \frac{2^{\alpha+1}-1}{2^{\alpha-1}} \\ &< \alpha + 3 - \frac{1}{2^{\alpha-1}} \quad (\alpha > 0) \end{aligned}$$

olduğundan dolayı (3.1.1) eşitsizliği (2.2.4) eşitsizliğinden daha iyi bir sonuçtur [13].

Sonuç 3.1.2 Teoremde 3.1.1'de $\alpha = 1$ alınırsa Teorem 3.1.1 Teorem 2.1.4'ye indirgenir [13].

Teorem 3.1.2 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, (a, b) aralığında differansiyellenebilir bir fonksiyon ve $a < b$ olsun. Eğer $|f'|$, $[a, b]$ aralığında konveks bir fonksiyon ise $\alpha > 0$ için

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}} \left[J_{a^+}^{\alpha} f(b) + J_{b^-}^{\alpha} f(a) \right] - \frac{1}{2} \left[f(\frac{3a+b}{4}) + f(\frac{a+3b}{4}) \right] \right| \\ \leq & \left(\frac{1}{8} + \frac{3^{\alpha+1} - 2^{\alpha+1} + 1}{4^{\alpha+1}(\alpha+1)} - \frac{1}{2(\alpha+1)} \right) (b-a)(|f'(a)| + |f'(b)|) \end{aligned} \tag{3.1.5}$$

eşitsizliği geçerlidir [13].

İspat. $x = a + b - x$ değişken değişikliği yapılarak

$$\begin{aligned} & \int_a^{\frac{3a+b}{4}} [(b-a)^{\alpha} - (b-x)^{\alpha} + (x-a)^{\alpha}] \frac{b-x}{b-a} |f'(a)| dx \\ & + \int_{\frac{a+3b}{4}}^{b} [(b-x)^{\alpha} - (x-a)^{\alpha} + (b-a)^{\alpha}] \frac{b-x}{b-a} |f'(a)| dx \\ = & \int_a^{\frac{3a+b}{4}} [(b-a)^{\alpha} - (b-x)^{\alpha} + (x-a)^{\alpha}] \frac{b-x}{b-a} |f'(a)| dx \\ & + \int_a^{\frac{3a+b}{4}} [(b-a)^{\alpha} - (b-x)^{\alpha} + (x-a)^{\alpha}] \frac{x-a}{b-a} |f'(a)| dx \\ = & \ |f'(a)| \int_a^{\frac{3a+b}{4}} [(b-a)^{\alpha} - (b-x)^{\alpha} + (x-a)^{\alpha}] dx := N_1, \end{aligned} \tag{3.1.6}$$

$$\begin{aligned} & \int_a^{\frac{3a+b}{4}} [(b-a)^{\alpha} - (b-x)^{\alpha} + (x-a)^{\alpha}] \frac{x-a}{b-a} |f'(b)| dx \\ & + \int_{\frac{a+3b}{4}}^{b} [(b-x)^{\alpha} - (x-a)^{\alpha} + (b-a)^{\alpha}] \frac{x-a}{b-a} |f'(b)| dx \\ = & \int_a^{\frac{3a+b}{4}} [(b-a)^{\alpha} - (b-x)^{\alpha} + (x-a)^{\alpha}] \frac{x-a}{b-a} |f'(b)| dx \\ & + \int_a^{\frac{3a+b}{4}} [(b-a)^{\alpha} - (b-x)^{\alpha} + (x-a)^{\alpha}] \frac{b-x}{b-a} |f'(b)| dx \end{aligned} \tag{3.1.7}$$

$$\begin{aligned} &= |f'(b)|\int_a^{\frac{3a+b}{4}}[(b-a)^\alpha-(b-x)^\alpha+(x-a)^\alpha]dx := N_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\int_{\frac{3a+b}{4}}^{\frac{a+b}{2}}[(b-x)^\alpha-(x-a)^\alpha]\frac{b-x}{b-a}|f'(a)|dx \\ &+\int_{\frac{a+b}{2}}^{\frac{a+3b}{4}}[(x-a)^\alpha-(b-x)^\alpha]\frac{b-x}{b-a}|f'(a)|dx \\ =& \int_{\frac{3a+b}{4}}^{\frac{a+b}{2}}[(b-x)^\alpha-(x-a)^\alpha]\frac{b-x}{b-a}|f'(a)|dx \\ &+\int_{\frac{3a+b}{4}}^{\frac{a+b}{2}}[(b-x)^\alpha-(x-a)^\alpha]\frac{x-a}{b-a}|f'(a)|dx \\ =& |f'(a)|\int_{\frac{3a+b}{4}}^{\frac{a+b}{2}}[(b-x)^\alpha-(x-a)^\alpha]dx := N_3 \end{aligned} \tag{3.1.8}$$

ve

$$\begin{aligned} &\int_{\frac{3a+b}{4}}^{\frac{a+b}{2}}[(b-x)^\alpha-(x-a)^\alpha]\frac{x-a}{b-a}|f'(b)|dx \\ &+\int_{\frac{a+b}{2}}^{\frac{a+3b}{4}}[(x-a)^\alpha-(b-x)^\alpha]\frac{x-a}{b-a}|f'(b)|dx \\ =& \int_{\frac{3a+b}{4}}^{\frac{a+b}{2}}[(b-x)^\alpha-(x-a)^\alpha]\frac{x-a}{b-a}|f'(b)|dx \\ &+\int_{\frac{3a+b}{4}}^{\frac{a+b}{2}}[(b-x)^\alpha-(x-a)^\alpha]\frac{b-x}{b-a}|f'(b)|dx \\ =& |f'(b)|\int_{\frac{3a+b}{4}}^{\frac{a+b}{2}}[(b-x)^\alpha-(x-a)^\alpha]dx := N_4 \end{aligned} \tag{3.1.9}$$

özdeşlikleri yazılır. Daha sonra Lemma 3.1.2, $|f'|$ konveksliği ile (3.1.6),(3.1.7),(3.1.8) ve (3.1.9) özdeşlikleri kullanılarak

$$x = \frac{b-x}{b-a}a + \frac{x-a}{b-a}b \quad (x \in [a,b]) \tag{3.1.10}$$

için

$$\begin{aligned} &\left|\frac{1}{2(b-a)^\alpha}\int_a^b h_2(x)f'(x)dx\right| \\ \leq& \frac{1}{2(b-a)^\alpha}\int_a^b |h_2(x)|\,|f'(x)|\,dx \\ =& \frac{1}{2(b-a)^\alpha}\int_a^{\frac{3a+b}{4}}[(b-a)^\alpha-(b-x)^\alpha+(x-a)^\alpha]|f'(x)|dx \\ &+\frac{1}{2(b-a)^\alpha}\int_{\frac{3a+b}{4}}^{\frac{a+b}{2}}[(b-x)^\alpha-(x-a)^\alpha]|f'(x)|dx \\ &+\frac{1}{2(b-a)^\alpha}\int_{\frac{a+b}{2}}^{\frac{a+3b}{4}}[(x-a)^\alpha-(b-x)^\alpha]|f'(x)|dx \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{1}{2(b-a)^\alpha}\int_{\frac{a+3b}{4}}^{b}[(b-x)^\alpha-(x-a)^\alpha+(b-a)^\alpha]|f'(x)|dx \\
\leq\ & \frac{N_1+N_2+N_3+N_4}{2(b-a)^\alpha} \\
=\ & \frac{|f'(a)|+|f'(b)|}{2(b-a)^\alpha}\int_a^{\frac{3a+b}{4}}[(b-a)^\alpha-(b-x)^\alpha+(x-a)^\alpha]dx \\
&+\frac{|f'(a)|+|f'(b)|}{2(b-a)^\alpha}\int_{\frac{3a+b}{4}}^{\frac{a+b}{2}}[(b-x)^\alpha-(x-a)^\alpha]dx \\
=\ & \left(\frac{1}{8}+\frac{3^{\alpha+1}-2^{\alpha+1}+1}{4^{\alpha+1}(\alpha+1)}-\frac{1}{2(\alpha+1)}\right)(b-a)(|f'(a)|+|f'(b)|)
\end{aligned}
$$

yazılır. Böylece Lemma 3.1.2 ve (3.1.5)' den istenilen sonuç elde edilir.

3.2 Beta Fonksiyonlar için Uygulamalar

Bu bölüm boyunca $\alpha > 0$, $\rho \geq 3$, $a = 0$, $b = 1$, $\Gamma(\alpha)$ gamma fonksiyonu ve $f(x) = x^{\rho-1}$ $(x \in [0,1])$ olsun. Bu taktirde $|f'|$, $[0,1]$ aralığında bir konveks fonksiyon olur. Ayrıca

$$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^\alpha}J_{a+}^{\alpha}f(b) = \frac{\alpha}{2}\int_0^1(1-x)^{\alpha-1}x^{\rho-1}dx = \frac{\alpha}{2}B(\rho,\alpha)$$

ve

$$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^\alpha}J_{b-}^{\alpha}f(a) = \frac{\alpha}{2}\int_0^1 x^{\alpha+\rho-2}dx = \frac{\alpha}{2(\alpha+\rho-1)}$$

olduğu gözönüne alınarak aşağıdaki uygulamalar verilir.

Önerme 3.2.1 Teorem 3.1.1'den,

$$\left|\frac{\alpha}{2}B(\rho,\alpha)+\frac{\alpha}{2(\alpha+\rho-1)}-\frac{1}{2^{\rho-1}}\right| \leq \left[\frac{1}{4}-\frac{2^\alpha-1}{2^{\alpha+1}(\alpha+1)}\right](\rho-1)$$

elde edilir [13].

Önerme 3.2.2 Teorem 3.1.2'den

$$\left|\frac{\alpha}{2}B(\rho,\alpha)+\frac{\alpha}{2(\alpha+\rho-1)}-\frac{3^{\rho-1}+1}{2.4^{\rho-1}}\right| \leq \left[\frac{3^{\alpha+1}+1}{4^{\alpha+1}(\alpha+1)}+\frac{1}{8}-\frac{(2^\alpha+1)}{2^{\alpha+1}(\alpha+1)}\right](\rho-1)$$

elde edilir [13].

3.3 Riemann-Liouville Kesirli İntegraller Yardımıyla s-konveks ve s-Godunova-Levin Fonksiyonlar için Hermite-Hadamard Tipli Eşitsizlikler

Bu bölümde özdeşlikler yardımıyla s-konveks ve s-Godunova-Levin fonksiyonları için kesirli Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler verilecektir.

Lemma 3.3.1 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, (a,b) aralığında differansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. $f'\in L[a,b]$, $0<\alpha\leq 1$ ve $a<x<b$ olmak üzere Riemann-Liouville kesirli integralleri için

$$\begin{aligned}
& \frac{(x-a)[(a+x)f(x)-xf(a)]+(b-x)[(x+b)f(x)-xf(b)]}{(b-a)^2} \\
& -\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^2}\left(\frac{a}{(x-a)^{\alpha-1}}J^{\alpha}_{x^-}f(a)+\frac{b}{(b-x)^{\alpha-1}}J^{\alpha}_{x^+}f(b)\right) \\
= & \frac{(x-a)^2}{(b-a)^2}\int_0^1 (at^{\alpha}+x)f'(tx+(1-t)a)dt \\
& -\frac{(b-x)^2}{(b-a)^2}\int_0^1 (b(1-t)^{\alpha}+x)f'(tb+(1-t)x)dt
\end{aligned}$$

eşitliği geçerlidir [10].

Lemma 3.3.2 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, (a,b) aralığında iki kez differansiyellenebilir bir fonksiyon ve $f''\in L[a,b]$ olsun. $0<\alpha\leq 1$ ve $a<x<b$ olmak üzere Riemann-Liouville kesirli integralleri için

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{(b-a)^2}\left[\frac{(x(\alpha+1)+b)f(x)-bf(b)}{(b-x)}+\frac{(b(\alpha+1)+x)f(x)-xf(a)}{(x-a)}\right] \\
& -\frac{(\alpha+1)\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^2}\left(\frac{x}{(b-x)^{\alpha+1}}J^{\alpha}_{x^+}f(b)+\frac{b}{(x-a)^{\alpha+1}}J^{\alpha}_{x^-}f(a)\right) \\
= & \frac{(x-b)}{(b-a)^2}\int_0^1 (t^{\alpha+1}x+tb)f''(tx+(1-t)b)dt \\
& +\frac{(a-x)}{(b-a)^2}\int_0^1 (b(1-t)^{\alpha+1}+(1-t)x)f''(ta+(1-t)x)dt
\end{aligned}$$

eşitliği geçerlidir [10].

Şimdi teoremlerin ispatlarında kullanılacak olan aşağıdaki lemmayı verelim:

Lemma 3.3.3 $A>0$, $B>0$ için $\theta\geq 1$ olmak üzere

$$A^{\theta}+B^{\theta}\leq (A+B)^{\theta}\leq 2^{\theta-1}(A^{\theta}+B^{\theta})$$

eşitzisliği geçerlidir ([39],[40]).

Teorem 3.3.1 $f : [a,b] \subseteq \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}$, (a,b) aralığında differansiyellenebilir bir fonksiyon ve $a < b$ olsun. $|f'| \in L[a,b]$ ve $|f'|$ s-konveks fonksiyon ise $0 < \alpha \leq 1$ $s \in (0,1]$ ve $a < x < b$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
&\Bigg|\frac{(x-a)[(a+x)f(x)-xf(a)]+(b-x)[(x+b)f(x)-xf(b)]}{(b-a)^2}\\
&-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^2}\left(\frac{a}{(x-a)^{\alpha-1}}J^{\alpha}_{x^-}f(a)+\frac{b}{(b-x)^{\alpha-1}}J^{\alpha}_{x^+}f(b)\right)\Bigg|\\
\leq\ & \frac{(x-a)^2}{(b-a)^2}\left[\left(\frac{a}{\alpha+s+1}+\frac{x}{s+1}\right)|f'(x)|+\left(\frac{a\Gamma(\alpha+1)\Gamma(s+1)}{\Gamma(\alpha+s+2)}+\frac{x}{s+1}\right)|f'(a)|\right]\\
&+\frac{(b-x)^2}{(b-a)^2}\left[\left(\frac{b\Gamma(\alpha+1)\Gamma(s+1)}{\Gamma(\alpha+s+2)}+\frac{x}{s+1}\right)|f'(b)|+\left(\frac{b}{\alpha+s+1}+\frac{x}{s+1}\right)|f'(x)|\right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir [10].

İspat. Lemma 3.3.1, $|f'| \in L[a,b]$ ve $|f'|$'nin s-konveksliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
&\Bigg|\frac{(x-a)[(a+x)f(x)-xf(a)]+(b-x)[(x+b)f(x)-xf(b)]}{(b-a)^2}\\
&-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^2}\left(\frac{a}{(x-a)^{\alpha-1}}J^{\alpha}_{x^-}f(a)+\frac{b}{(b-x)^{\alpha-1}}J^{\alpha}_{x^+}f(b)\right)\Bigg|\\
\leq\ & \frac{(x-a)^2}{(b-a)^2}\int_0^1 (at^{\alpha}+x)|f'(tx+(1-t)a)|dt\\
&+\frac{(b-x)^2}{(b-a)^2}\int_0^1 (b(1-t)^{\alpha}+x)|f'(tb+(1-t)x)|dt\\
\leq\ & \frac{(x-a)^2}{(b-a)^2}\int_0^1 (at^{\alpha}+x)\Big[t^s|f'(x)|+(1-t)^s|f'(a)|\Big]dt\\
&+\frac{(b-x)^2}{(b-a)^2}\int_0^1 (b(1-t)^{\alpha}+x)\Big[t^s|f'(b)|+(1-t)^s|f'(x)|\Big]dt\\
=\ & \frac{(x-a)^2}{(b-a)^2}\left[\left(\frac{a}{\alpha+s+1}+\frac{x}{s+1}\right)|f'(x)|+\left(\frac{a\Gamma(\alpha+1)\Gamma(s+1)}{\Gamma(\alpha+s+2)}+\frac{x}{s+1}\right)|f'(a)|\right]\\
&+\frac{(b-x)^2}{(b-a)^2}\left[\left(\frac{b\Gamma(\alpha+1)\Gamma(s+1)}{\Gamma(\alpha+s+2)}+\frac{x}{s+1}\right)|f'(b)|+\left(\frac{b}{\alpha+s+1}+\frac{x}{s+1}\right)|f'(x)|\right]
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır [10].

Teorem 3.3.2 $f : [a,b] \subseteq \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}$, (a,b) aralığında differansiyellenebilir bir fonksiyon ve $a < b$ olsun. $|f'| \in L[a,b]$ ve $|f'|$ s-Godunova- Levin konveks fonksiyon ise

$0<\alpha\leq 1$, $a<x<b$ ve $s\in(0,1]$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{(x-a)[(a+x)f(x)-xf(a)]+(b-x)[(x+b)f(x)-xf(b)]}{(b-a)^2}\right.\\
&\left.-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^2}\left(\frac{a}{(x-a)^{\alpha-1}}J^{\alpha}_{x^-}f(a)+\frac{b}{(b-x)^{\alpha-1}}J^{\alpha}_{x^+}f(b)\right)\right|\\
\leq\;&\frac{(x-a)^2}{(b-a)^2}\left[\left(\frac{a}{\alpha-s+1}+\frac{x}{1-s}\right)|f'(x)|+\left(\frac{a\Gamma(\alpha+1)\Gamma(1-s)}{\Gamma(\alpha-s+2)}+\frac{x}{1-s}\right)|f'(a)|\right]\\
&+\frac{(b-x)^2}{(b-a)^2}\left[\left(\frac{b\Gamma(\alpha+1)\Gamma(1-s)}{\Gamma(\alpha-s+2)}+\frac{x}{1-s}\right)|f'(b)|+\left(\frac{b}{\alpha-s+1}+\frac{x}{1-s}\right)|f'(x)|\right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir [10].

İspat. Lemma 3.3.1, $|f'|\in L[a,b]$ ve $|f'|$'nin s-Godunova-Levin konveksliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{(x-a)[(a+x)f(x)-xf(a)]+(b-x)[(x+b)f(x)-xf(b)]}{(b-a)^2}\right.\\
&\left.-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^2}\left(\frac{a}{(x-a)^{\alpha-1}}J^{\alpha}_{x^-}f(a)+\frac{b}{(b-x)^{\alpha-1}}J^{\alpha}_{x^+}f(b)\right)\right|\\
\leq\;&\frac{(x-a)^2}{(b-a)^2}\int_0^1(at^{\alpha}+x)|f'(tx+(1-t)a)|dt\\
&+\frac{(b-x)^2}{(b-a)^2}\int_0^1(b(1-t)^{\alpha}+x)|f'(tb+(1-t)x)|dt\\
\leq\;&\frac{(x-a)^2}{(b-a)^2}\int_0^1(at^{\alpha}+x)\Big[t^{-s}|f'(x)|+(1-t)^{-s}|f'(a)|\Big]dt\\
&+\frac{(b-x)^2}{(b-a)^2}\int_0^1(b(1-t)^{\alpha}+x)\Big[t^{-s}|f'(b)|+(1-t)^{-s}|f'(x)|\Big]dt\\
=\;&\frac{(x-a)^2}{(b-a)^2}\left[\left(\frac{a}{\alpha-s+1}+\frac{x}{1-s}\right)|f'(x)|+\left(\frac{a\Gamma(\alpha+1)\Gamma(1-s)}{\Gamma(\alpha-s+2)}+\frac{x}{1-s}\right)|f'(a)|\right]\\
&+\frac{(b-x)^2}{(b-a)^2}\left[\left(\frac{b\Gamma(\alpha+1)\Gamma(1-s)}{\Gamma(\alpha-s+2)}+\frac{x}{1-s}\right)|f'(b)|+\left(\frac{b}{\alpha-s+1}+\frac{x}{1-s}\right)|f'(x)|\right]
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır [10].

Sonuç 3.3.1 Teorem 3.3.1'de $x=\frac{a+b}{2}$ seçilirse

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{(a+b)\Big(4f\big(\frac{a+b}{2}\big)-f(a)-f(b)\Big)}{4(b-a)}-\frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha+1}}\left(aJ^{\alpha}_{\frac{a+b}{2}^-}f(a)+bJ^{\alpha}_{\frac{a+b}{2}^+}f(b)\right)\right|\\
\leq\;&\frac{1}{4}M_1+\frac{1}{4}M_2
\end{aligned}$$

olur. Burada M_1 ve M_2

$$M_1=\left(\frac{a}{\alpha+s+1}+\frac{a+b}{2(s+1)}\right)|f'\Big(\frac{a+b}{2}\Big)|+\left(\frac{a\Gamma(\alpha+1)\Gamma(s+1)}{\Gamma(\alpha+s+2)}+\frac{a+b}{2(s+1)}\right)|f'(a)|$$

$$M_2 = \left(\frac{b\Gamma(\alpha+1)\Gamma(s+1)}{\Gamma(\alpha+s+2)} + \frac{a+b}{2(s+1)}\right)|f'(b)| + \left(\frac{b}{\alpha+s+1} + \frac{a+b}{2(s+1)}\right)|f'\Big(\frac{a+b}{2}\Big)|$$

şeklindedir [10].

Sonuç 3.3.2 Teorem 3.3.2'de $x = \frac{a+b}{2}$ seçilirse

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{(a+b)\Big(4f\big(\frac{a+b}{2}\big) - f(a) - f(b)\Big)}{4(b-a)} - \frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha+1}}\left(aJ^{\alpha}_{\frac{a+b}{2}-}f(a) + bJ^{\alpha}_{\frac{a+b}{2}+}f(b)\right)\right| \\
\leq\ & \frac{1}{4}N_1 + \frac{1}{4}N_2
\end{aligned}$$

olur. Burada N_1 ve N_2

$$N_1 = \left(\frac{a}{\alpha-s+1} + \frac{a+b}{2(1-s)}\right)|f'\Big(\frac{a+b}{2}\Big)| + \left(\frac{a\Gamma(\alpha+1)\Gamma(1-s)}{\Gamma(\alpha-s+2)} + \frac{a+b}{2(1-s)}\right)|f'(a)|$$

$$N_2 = \left(\frac{b\Gamma(\alpha+1)\Gamma(1-s)}{\Gamma(\alpha-s+2)} + \frac{a+b}{2(1-s)}\right)|f'(b)| + \left(\frac{b}{\alpha-s+1} + \frac{a+b}{2(1-s)}\right)|f'\Big(\frac{a+b}{2}\Big)$$

şeklindedir [10]. Sonuç 3.3.1 ve Sonuç 3.3.2'den

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{(a+b)\Big(4f\big(\frac{a+b}{2}\big) - f(a) - f(b)\Big)}{4(b-a)} - \frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha+1}}\left(aJ^{\alpha}_{\frac{a+b}{2}-}f(a) + bJ^{\alpha}_{\frac{a+b}{2}+}f(b)\right)\right| \\
\leq\ & \frac{1}{4}min\{M_1 + M_2, N_1 + N_2\}
\end{aligned}$$

sonucu elde edilir [10].

Teorem 3.3.3 $f : [a,b] \subseteq \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}$, (a,b) aralığında differansiyellenebilir bir fonksiyon ve $a < b$ olsun. $|f'|^q \in L[a,b]$ ve $|f'|^q$ s-konveks fonksiyon ise $0 < \alpha \leq 1$ ve $a < x < b$, $q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ve $s \in (0,1]$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{(x-a)[(a+x)f(x) - xf(a)] + (b-x)[(x+b)f(x) - xf(b)]}{(b-a)^2}\right. \\
&\left.-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^2}\left(\frac{a}{(x-a)^{\alpha-1}}J^{\alpha}_{x-}f(a) + \frac{b}{(b-x)^{\alpha-1}}J^{\alpha}_{x+}f(b)\right)\right| \\
\leq\ & \frac{(x-a)^2}{(b-a)^2}\left(\frac{2^{p-1}a^p}{p\alpha+1} + 2^{p-1}x^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{|f'(a)|^q + |f'(x)|^q}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}} \\
&+\frac{(b-x)^2}{(b-a)^2}\left(\frac{2^{p-1}b^p}{p\alpha+1} + 2^{p-1}x^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{|f'(b)|^q + |f'(x)|^q}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir [10].

İspat. Lemma 3.3.1 ve Lemma 3.3.3 üzerine Hölder eşitsizliği, $|f'|^q \in L[a,b]$ ve $|f'|^q$'nin s-konveksliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
&\Bigg|\frac{(x-a)[(a+x)f(x)-xf(a)]+(b-x)[(x+b)f(x)-xf(b)]}{(b-a)^2}\\
&-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^2}\left(\frac{a}{(x-a)^{\alpha-1}}J^{\alpha}_{x^-}f(a)+\frac{b}{(b-x)^{\alpha-1}}J^{\alpha}_{x^+}f(b)\right)\Bigg|\\
\leq\ &\frac{(x-a)^2}{(b-a)^2}\int_0^1 (at^{\alpha}+x)|f'(tx+(1-t)a)|dt\\
&+\frac{(b-x)^2}{(b-a)^2}\int_0^1 (b(1-t)^{\alpha}+x)|f'(tb+(1-t)x)|dt\\
\leq\ &\frac{(x-a)^2}{(b-a)^2}\left(\int_0^1 (at^{\alpha}+x)^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 |f'(tx+(1-t)a)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\\
&+\frac{(b-x)^2}{(b-a)^2}\left(\int_0^1 (b(1-t)^{\alpha}+x)^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 |f'(tb+(1-t)x)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\\
\leq\ &\frac{(x-a)^2}{(b-a)^2}\left(\int_0^1 2^{p-1}(a^p t^{p\alpha}+x^p)dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 |f'(tx+(1-t)a)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\\
&+\frac{(b-x)^2}{(b-a)^2}\left(\int_0^1 2^{p-1}(b^p(1-t)^{p\alpha}+x^p)dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 |f'(tb+(1-t)x)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\\
=\ &\frac{(x-a)^2}{(b-a)^2}\left(\frac{2^{p-1}a^p}{p\alpha+1}+2^{p-1}x^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{|f'(a)|^q+|f'(x)|^q}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}\\
&+\frac{(b-x)^2}{(b-a)^2}\left(\frac{2^{p-1}b^p}{p\alpha+1}+2^{p-1}x^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{|f'(b)|^q+|f'(x)|^q}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$\begin{aligned}
\int_0^1 |f'(tx+(1-t)a)|^q dt &\leq \frac{|f'(a)|^q+|f'(x)|^q}{s+1}\\
\int_0^1 |f'(tb+(1-t)x)|^q dt &\leq \frac{|f'(b)|^q+|f'(x)|^q}{s+1}
\end{aligned}$$

olduğu kullanılır. Böylece ispat tamamlanır [10].

Sonuç 3.3.3 Teorem 3.3.3'de, $x=\frac{a+b}{2}$ seçilirse

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{(a+b)\Big(4f\big(\frac{a+b}{2}\big)-f(a)-f(b)\Big)}{4(b-a)}-\frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha+1}}\left(aJ^{\alpha}_{\frac{a+b}{2}^-}f(a)+bJ^{\alpha}_{\frac{a+b}{2}^+}f(b)\right)\right|\\
\leq\ &\frac{1}{4}\left(\frac{2^{p-1}a^p}{p\alpha+1}+\frac{(a+b)^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{|f'(a)|^q+|f'(\frac{a+b}{2})|^q}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}\\
&+\frac{1}{4}\frac{(b-x)^2}{(b-a)^2}\left(\frac{2^{p-1}b^p}{p\alpha+1}+\frac{(a+b)^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{|f'(b)|^q+|f'(\frac{a+b}{2})|^q}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

elde edilir [10].

Teorem 3.3.4 $f : [a,b] \subseteq \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}$, (a,b) aralığında differansiyellenebilir bir fonksiyon ve $a < b$ olsun. $|f'|^q \in L[a,b]$ ve $|f'|^q$ s-konveks fonksiyon ise $0 < \alpha \leq 1$, $a < x < b$, $q > 1$ ve $s \in (0,1]$ olmak üzere

$$\begin{aligned}&\Bigg|\frac{(x-a)[(a+x)f(x)-xf(a)]+(b-x)[(x+b)f(x)-xf(b)]}{(b-a)^2}\\&-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^2}\left(\frac{a}{(x-a)^{\alpha-1}}J^{\alpha}_{x^-}f(a)+\frac{b}{(b-x)^{\alpha-1}}J^{\alpha}_{x^+}f(b)\right)\Bigg|\\ \leq\ & \frac{(x-a)^2}{(b-a)^2}\left(\frac{a}{\alpha+1}+x\right)^{1-\frac{1}{q}}\psi(\alpha,s,x)+\frac{(b-x)^2}{(b-a)^2}\left(\frac{b}{\alpha+1}+x\right)^{1-\frac{1}{q}}\omega(\alpha,s,x),\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada

$$\begin{aligned}\psi(\alpha,s,x) &= \left(\left(\frac{a}{\alpha+s+1}+\frac{x}{s+1}\right)|f'(x)|^q+\left(\frac{a\Gamma(\alpha+1)\Gamma(s+1)}{\Gamma(\alpha+s+2)}+\frac{x}{s+1}\right)|f'(a)|^q\right)^{\frac{1}{q}}\\ \omega(\alpha,s,x) &= \left(\left(\frac{b\Gamma(\alpha+1)\Gamma(s+1)}{\Gamma(\alpha+s+2)}+\frac{x}{s+1}\right)|f'(b)|^q+\left(\frac{b}{\alpha+s+1}+\frac{x}{s+1}\right)|f'(x)|\right)^{\frac{1}{q}}\end{aligned}$$

şeklindedir [10].

İspat. Lemma 3.3.1 $|f'|^q \in L[a,b]$, $|f'|^q$ s-konveksliği ve power-mean eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned}&\Bigg|\frac{(x-a)[(a+x)f(x)-xf(a)]+(b-x)[(x+b)f(x)-xf(b)]}{(b-a)^2}\\&-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^2}\left(\frac{a}{(x-a)^{\alpha-1}}J^{\alpha}_{x^-}f(a)+\frac{b}{(b-x)^{\alpha-1}}J^{\alpha}_{x^+}f(b)\right)\Bigg|\\ \leq\ & \frac{(x-a)^2}{(b-a)^2}\int_0^1 (at^{\alpha}+x)|f'(tx+(1-t)a)|dt\\&+\frac{(b-x)^2}{(b-a)^2}\int_0^1 (b(1-t)^{\alpha}+x)|f'(tb+(1-t)x)|dt\\ \leq\ & \frac{(x-a)^2}{(b-a)^2}\left(\int_0^1 (at^{\alpha}+x)dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1 (at^{\alpha}+x)|f'(tx+(1-t)a)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\\&+\frac{(b-x)^2}{(b-a)^2}\left(\int_0^1 (b(1-t)^{\alpha}+x)dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1 (b(1-t)^{\alpha}+x)|f'(tb+(1-t)x)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\\ \leq\ & \frac{(x-a)^2}{(b-a)^2}\left(\int_0^1 (at^{\alpha}+x)dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1 (at^{\alpha}+x)(t^s|f'(x)|^q+(1-t)^s|f'(a)|^q)dt\right)^{\frac{1}{q}}\\&+\frac{(b-x)^2}{(b-a)^2}\left(\int_0^1 (b(1-t)^{\alpha}+x)dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1 (b(1-t)^{\alpha}+x)(t^s|f'(b)|^q+(1-t)^s|f'(x)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\\ \leq\ & \frac{(x-a)^2}{(b-a)^2}\left(\frac{a}{\alpha+1}+x\right)^{1-\frac{1}{q}}\psi(\alpha,s,x)+\frac{(b-x)^2}{(b-a)^2}\left(\frac{b}{\alpha+1}+x\right)^{1-\frac{1}{q}}\omega(\alpha,s,x)\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır [10].

Teorem 3.3.5 $f : [a,b] \subseteq \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, (a,b) aralığında differansiyellenebilir bir fonksiyon ve $a < b$ olsun. $|f'|^q \in L[a,b]$ ve $|f'|^q$ s-Godunova-Levin fonksiyon ise $0 < \alpha \leq 1$, $a < x < b$, $s \in (0,1]$, $q > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere

$$
\begin{aligned}
&\Bigg|\frac{(x-a)[(a+x)f(x)-xf(a)]+(b-x)[(x+b)f(x)-xf(b)]}{(b-a)^2}\\
&-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^2}\left(\frac{a}{(x-a)^{\alpha-1}}J^{\alpha}_{x^-}f(a)+\frac{b}{(b-x)^{\alpha-1}}J^{\alpha}_{x^+}f(b)\right)\Bigg|\\
\leq\ &\frac{(x-a)^2}{(b-a)^2}\left(\left(\frac{a^p}{p\alpha+1}\right)^{\frac{1}{q}}+x\right)\left(\frac{|f'(x)|^q}{1-s}+\frac{|f'(a)|^q}{1-s}\right)^{\frac{1}{q}}\\
&+\frac{(b-x)^2}{(b-a)^2}\left(\left(\frac{b^p}{p\alpha+1}\right)^{\frac{1}{q}}+x\right)\left(\frac{|f'(b)|^q}{1-s}+\frac{|f'(x)|^q}{1-s}\right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}
$$

eşitsizliği geçerlidir [10].

İspat. Lemma 3.3.1, Hölder eşitsizliği ve $|f'|^q$ s-Godunova-Levin fonksiyonu kullanılarak

$$
\begin{aligned}
&\Bigg|\frac{(x-a)[(a+x)f(x)-xf(a)]+(b-x)[(x+b)f(x)-xf(b)]}{(b-a)^2}\\
&-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^2}\left(\frac{a}{(x-a)^{\alpha-1}}J^{\alpha}_{x^-}f(a)+\frac{b}{(b-x)^{\alpha-1}}J^{\alpha}_{x^+}f(b)\right)\Bigg|\\
\leq\ &\frac{(x-a)^2}{(b-a)^2}\int_0^1(at^{\alpha}+x)|f'(tx+(1-t)a)|dt\\
&+\frac{(b-x)^2}{(b-a)^2}\int_0^1((1-t)^{\alpha}b+x)|f'(tb+(1-t)x)|dt\\
\leq\ &\frac{(x-a)^2}{(b-a)^2}\left(\int_0^1(at^{\alpha}+x)^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1|f'(tx+(1-t)a)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\\
&+\frac{(b-x)^2}{(b-a)^2}\left(\int_0^1(b(1-t)^{\alpha}+x)^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1|f'(tb+(1-t)x)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\\
\leq\ &\frac{(x-a)^2}{(b-a)^2}\left[\left(\int_0^1 a^p t^{p\alpha}dt\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int_0^1 x^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\right]\\
&\times\left(\int_0^1(t^{-s}|f'(x)|^q+(1-t)^{-s}|f'(a)|^q)dt\right)^{\frac{1}{q}}\\
&+\frac{(b-x)^2}{(b-a)^2}\left[\left(\int_0^1 b^p(1-t)^{p\alpha}dt\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int_0^1 x^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\right]\\
&\times\left(\int_0^1(t^{-s}|f'(b)|^q+(1-t)^{-s}|f'(x)|^q)dt\right)^{\frac{1}{q}}\\
=\ &\frac{(x-a)^2}{(b-a)^2}\left(\left(\frac{a^p}{p\alpha+1}\right)^{\frac{1}{q}}+x\right)\left(\frac{|f'(x)|^q}{1-s}+\frac{|f'(a)|^q}{1-s}\right)^{\frac{1}{q}}\\
&+\frac{(b-x)^2}{(b-a)^2}\left(\left(\frac{b^p}{p\alpha+1}\right)^{\frac{1}{q}}+x\right)\left(\frac{|f'(b)|^q}{1-s}+\frac{|f'(x)|^q}{1-s}\right)^{\frac{1}{q}},
\end{aligned}
$$

elde edilir. Burada $p > 1$ için Minkowski eşitsizliğine bağlı olarak

$$\begin{aligned}
\left(\int_0^1 (at^\alpha + x)^p dt\right)^{\frac{1}{p}} &\leq \left(\int_0^1 a^p t^{p\alpha} dt\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_0^1 x^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \\
\left(\int_0^1 (b(1-t)^\alpha + x)^p dt\right)^{\frac{1}{p}} &\leq \left(\int_0^1 b^p (1-t)^{p\alpha} dt\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_0^1 x^p dt\right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

eşitsizlikleri kullanılmıştır. Böylece ispat tamamlanır [10].

Sonuç 3.3.4 Teorem 3.3.5'de $x = \frac{a+b}{2}$ seçilirse

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{(a+b)\Big(4f\big(\frac{a+b}{2}\big) - f(a) - f(b)\Big)}{4(b-a)} - \frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha+1}}\Big(aJ^\alpha_{\frac{a+b}{2}-} f(a) + bJ^\alpha_{\frac{a+b}{2}+} f(b)\Big)\right| \\
\leq\ & \frac{1}{4}\left(\left(\frac{a^p}{p\alpha+1}\right)^{\frac{1}{q}} + \frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{|f'(\frac{a+b}{2})|^q + |f'(a)|^q}{1-s}\right)^{\frac{1}{q}} \\
&+\frac{1}{4}\left(\frac{b^p}{p\alpha+1}\right)^{\frac{1}{q}} + \frac{a+b}{2}\Bigg)\left(\frac{|f'(b)|^q + |f'(\frac{a+b}{2})|^q}{1-s}\right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

elde edilir [10].

Teorem 3.3.6 $f : [a,b] \subseteq \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}$, (a,b) aralığında iki kez differansiyellenebilir bir fonksiyon ve $a < b$ olsun. $|f''| \in L[a,b]$ ve $|f''|$ s-konveks fonksiyon ise $0 < \alpha \leq 1$, $a < x < b$ ve $s \in (0,1]$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
&\Bigg|\frac{1}{(b-a)^2}\left[\frac{(x(\alpha+1)+b)f(x) - bf(b)}{(b-x)} + \frac{(b(\alpha+1)+x)f(x) - xf(a)}{(x-a)}\right] \\
&-\frac{(\alpha+1)\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^2}\left(\frac{x}{(b-x)^{\alpha+1}}J^\alpha_{x+} f(b) + \frac{b}{(x-a)^{\alpha+1}}J^\alpha_{x-} f(a)\right)\Bigg| \\
\leq\ & \frac{(b-x)}{(b-a)^2}\Bigg[\left(\frac{x}{\alpha+s+2} + \frac{b}{s+2}\right)|f''(x)| \\
&+\left(\frac{x\Gamma(\alpha+2)\Gamma(s+1)}{\Gamma(\alpha+s+3)} + \frac{b}{(s+1)(s+2)}\right)|f''(b)|\Bigg] \\
+\ & \frac{(x-a)}{(b-a)^2}\Bigg[\left(\frac{b\Gamma(\alpha+2)\Gamma(s+1)}{\Gamma(\alpha+s+3)} + \frac{x}{(s+1)(s+2)}\right)|f''(a)| \\
&+\left(\frac{b}{\alpha+s+2} + \frac{x}{s+2}\right)|f''(x)|\Bigg]
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir [10].

İspat. Lemma 3.3.2 ve $|f''|$'nin s-konveksliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
&\Bigg|\frac{1}{(b-a)^2}\left[\frac{(x(\alpha+1)+b)f(x)-bf(b)}{(b-x)}+\frac{(b(\alpha+1)+x)f(x)-xf(a)}{(x-a)}\right] \\
&-\frac{(\alpha+1)\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^2}\left(\frac{x}{(b-x)^{\alpha+1}}J^{\alpha}_{x^+}f(b)+\frac{b}{(x-a)^{\alpha+1}}J^{\alpha}_{x^-}f(a)\right)\Bigg| \\
\leq\ & \frac{(b-x)}{(b-a)^2}\int_0^1 (xt^{\alpha+1}+tb)|f''(tx+(1-t)b)|dt \\
&+\frac{(x-a)}{(b-a)^2}\int_0^1 ((1-t)^{\alpha+1}b+(1-t)x)|f''(ta+(1-t)x)|dt \\
\leq\ & \frac{(b-x)}{(b-a)^2}\int_0^1 (xt^{\alpha+1}+tb)\Big[t^s|f''(x)|+(1-t)^s|f''(b)|\Big]dt \\
&+\frac{(x-a)}{(b-a)^2}\int_0^1 ((1-t)^{\alpha+1}b+(1-t)x)\Big[t^s|f''(a)|+(1-t)^s|f''(x)|\Big]dt \\
=\ & \frac{(b-x)}{(b-a)^2}\Bigg[\left(\frac{x}{\alpha+s+2}+\frac{b}{s+2}\right)|f''(x)| \\
&+\left(\frac{x\Gamma(\alpha+2)\Gamma(s+1)}{\Gamma(\alpha+s+3)}+\frac{b}{(s+1)(s+2)}\right)|f''(b)|\Bigg] \\
&+\frac{(x-a)}{(b-a)^2}\Bigg[\left(\frac{b\Gamma(\alpha+2)\Gamma(s+1)}{\Gamma(\alpha+s+3)}+\frac{x}{(s+1)(s+2)}\right)|f''(a)| \\
&+\left(\frac{b}{\alpha+s+2}+\frac{x}{s+2}\right)|f''(x)|\Bigg]
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır [10].

Teorem 3.3.7 $f:[a,b]\subseteq\mathbb{R}^+\cup\{0\}\to\mathbb{R}$, (a,b) aralığında iki kez differansiyellenebilir bir fonksiyon ve $a<b$ olsun. $|f''|\in L[a,b]$ ve $|f''|$ s-Godunova-Levin fonksiyon ise $0<\alpha\leq 1$, $s\in(0,1]$ ve $a<x<b$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
&\Bigg|\frac{1}{(b-a)^2}\left[\frac{(x(\alpha+1)+b)f(x)-bf(b)}{(b-x)}+\frac{(b(\alpha+1)+x)f(x)-xf(a)}{(x-a)}\right] \\
&-\frac{(\alpha+1)\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^2}\left(\frac{x}{(b-x)^{\alpha+1}}J^{\alpha}_{x^+}f(b)+\frac{b}{(x-a)^{\alpha+1}}J^{\alpha}_{x^-}f(a)\right)\Bigg| \\
\leq\ & \frac{(b-x)}{(b-a)^2}\Bigg[\left(\frac{x}{\alpha-s+2}+\frac{b}{2-s}\right)|f''(x)| \\
&+\left(\frac{x\Gamma(\alpha+2)\Gamma(1-s)}{\Gamma(\alpha-s+3)}+\frac{b}{(1-s)(2-s)}\right)|f''(b)|\Bigg] \\
&+\frac{(x-a)}{(b-a)^2}\Bigg[\left(\frac{b\Gamma(\alpha+2)\Gamma(1-s)}{\Gamma(\alpha-s+3)}+\frac{x}{(1-s)(2-s)}\right)|f''(a)| \\
&+\left(\frac{b}{\alpha-s+2}+\frac{x}{2-s}\right)|f''(x)|\Bigg]
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir [10].

İspat. Lemma 3.3.2, $|f''|$'nin s-Godunova-Levin konveks fonksiyon olduğu kullanılarak

$$\begin{aligned}
&\Bigg|\frac{1}{(b-a)^2}\left[\frac{(x(\alpha+1)+b)f(x)-bf(b)}{(b-x)}+\frac{(b(\alpha+1)+x)f(x)-xf(a)}{(x-a)}\right] \\
&-\frac{(\alpha+1)\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^2}\left(\frac{x}{(b-x)^{\alpha+1}}J^{\alpha}_{x^+}f(b)+\frac{b}{(x-a)^{\alpha+1}}J^{\alpha}_{x^-}f(a)\right)\Bigg| \\
\leq\ & \frac{(b-x)}{(b-a)^2}\int_0^1 (xt^{\alpha+1}+tb)|f''(tx+(1-t)b)|dt \\
&+\frac{(x-a)}{(b-a)^2}\int_0^1 ((1-t)^{\alpha+1}b+(1-t)x)|f''(ta+(1-t)x)|dt \\
\leq\ & \frac{(b-x)}{(b-a)^2}\int_0^1 (xt^{\alpha+1}+tb)(t^{-s}|f''(x)|+(1-t)^{-s}|f''(b)|)dt \\
&+\frac{(x-a)}{(b-a)^2}\int_0^1 ((1-t)^{\alpha+1}b+(1-t)x)(t^{-s}|f''(a)|+(1-t)^{-s}|f''(x)|)dt \\
=\ & \frac{(b-x)}{(b-a)^2}\Bigg[\left(\frac{x}{\alpha-s+2}+\frac{b}{2-s}\right)|f''(x)| \\
&+\left(\frac{x\Gamma(\alpha+2)\Gamma(1-s)}{\Gamma(\alpha-s+3)}+\frac{b}{(1-s)(2-s)}\right)|f''(b)|\Bigg] \\
&+\frac{(x-a)}{(b-a)^2}\Bigg[\left(\frac{b\Gamma(\alpha+2)\Gamma(1-s)}{\Gamma(\alpha-s+3)}+\frac{x}{(1-s)(2-s)}\right)|f''(a)| \\
&+\left(\frac{b}{\alpha-s+2}+\frac{x}{2-s}\right)|f''(x)|\Bigg]
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır [10].

Teorem 3.3.8 $f:[a,b]\subseteq\mathbb{R}^+\cup\{0\}\to\mathbb{R}$, (a,b) aralığında iki kez differansiyellenebilir bir fonksiyon ve $a<b$ olsun. $|f''|^q\in L[a,b]$ ve $|f''|^q$ s-konveks fonksiyon ise $0<\alpha\leq 1$, $a<x<b$, $q>1$, $s\in(0,1]$ ve $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
&\Bigg|\frac{1}{(b-a)^2}\left[\frac{(x(\alpha+1)+b)f(x)-bf(b)}{(b-x)}+\frac{(b(\alpha+1)+x)f(x)-xf(a)}{(x-a)}\right] \\
&-\frac{(\alpha+1)\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^2}\left(\frac{x}{(b-x)^{\alpha+1}}J^{\alpha}_{x^+}f(b)+\frac{b}{(x-a)^{\alpha+1}}J^{\alpha}_{x^-}f(a)\right)\Bigg| \\
\leq\ & \frac{(b-x)}{(b-a)^2}\left(\frac{2^{p-1}x^p}{(p\alpha+1)+1}+\frac{2^{p-1}b^p}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{|f''(x)|^q}{s+1}+\frac{|f''(b)|^q}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}} \\
&+\frac{(x-a)}{(b-a)^2}\left(\frac{2^{p-1}a^p}{(p\alpha+1)+1}+\frac{2^{p-1}x^p}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{|f''(a)|^q}{s+1}+\frac{|f''(x)|^q}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir [10].

İspat. Lemma 3.3.2 ve Lemma 3.3.3 üzerine Hölder eşitsizliği, $|f''|^q \in L[a,b]$ ve $|f''|^q$'nin s-konveksliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
&\Bigg|\frac{1}{(b-a)^2}\left[\frac{(x(\alpha+1)+b)f(x)-bf(b)}{(b-x)}+\frac{(b(\alpha+1)+x)f(x)-xf(a)}{(x-a)}\right] \\
&-\frac{(\alpha+1)\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^2}\left(\frac{x}{(b-x)^{\alpha+1}}J^{\alpha}_{x^+}f(b)+\frac{b}{(x-a)^{\alpha+1}}J^{\alpha}_{x^-}f(a)\right)\Bigg| \\
\leq\ &\frac{(b-x)}{(b-a)^2}\int_0^1 (xt^{\alpha+1}+tb)|f''(tx+(1-t)b)|dt \\
&+\frac{(x-a)}{(b-a)^2}\int_0^1 ((1-t)^{\alpha+1}b+(1-t)x)|f''(ta+(1-t)x)|dt \\
\leq\ &\frac{(b-x)}{(b-a)^2}\left(\int_0^1 (xt^{\alpha+1}+tb)^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 |f''(tx+(1-t)b)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \\
&+\frac{(x-a)}{(b-a)^2}\left(\int_0^1 ((1-t)^{\alpha+1}b+(1-t)x)^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 |f''(ta+(1-t)x)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \\
\leq\ &\frac{(b-x)}{(b-a)^2}\left(\int_0^1 2^{p-1}(x^p t^{p(\alpha+1)}+t^p b^p)dt\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\times\left(\int_0^1 (t^s|f''(x)|^q+(1-t)^s|f''(b)|^q)dt\right)^{\frac{1}{q}} \\
&+\frac{(x-a)}{(b-a)^2}\left(\int_0^1 2^{p-1}((1-t)^{p(\alpha+1)}a^p+(1-t)^p x^p)dt\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\times\left(\int_0^1 (t^s|f''(a)|^q+(1-t)^s|f''(x)|^q)dt\right)^{\frac{1}{q}} \\
=\ &\frac{(b-x)}{(b-a)^2}\left(\frac{2^{p-1}x^p}{p(\alpha+1)+1}+\frac{2^{p-1}b^p}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{|f''(x)|^q}{s+1}+\frac{|f''(b)|^q}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}} \\
&+\frac{(x-a)}{(b-a)^2}\left(\frac{2^{p-1}a^p}{p(\alpha+1)+1}+\frac{2^{p-1}x^p}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{|f''(a)|^q}{s+1}+\frac{|f''(x)|^q}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır [10].

Sonuç 3.3.5 Teorem 3.3.8'de $x=\frac{a+b}{2}$ seçilirse

$$\begin{aligned}
&\Bigg|\frac{((a+3b)(\alpha+1)+(a+3b))f\left(\frac{a+b}{2}\right)-2bf(a)-(a+b)f(a)}{(b-a)^3} \\
&-\frac{(\alpha+1)\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^2}\left(\frac{2^{\alpha}(a+b)}{(b-a)^{\alpha+1}}J^{\alpha}_{\frac{a+b}{2}^+}f(b)+\frac{2^{\alpha+1}b}{(b-a)^{\alpha+1}}J^{\alpha}_{\frac{a+b}{2}^-}f(a)\right)\Bigg| \\
\leq\ &\frac{1}{2(b-a)}\left(\frac{(a+b)^p}{2(p(\alpha+1)+1)}+\frac{2^{p-1}b^p}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{|f''(\frac{a+b}{2})|^q+|f''(b)|^q}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}} \\
&+\frac{1}{2(b-a)}\left(\frac{2^{p-1}a^p}{p(\alpha+1)+1}+\frac{(a+b)^p}{2(p+1)}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{|f''(\frac{a+b}{2})|^q+|f''(a)|^q}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

elde edilir [10].

4. BULGULAR

4.1 Riemann-Liouville Kesirli İntegraller Yardımıyla Quası Konveks Fonksiyonlar için Hermite-Hadamard Tipli Eşitsizlikler

Bu bölümde, Riemann-Liouville kesirli integraller yardımıyla birinci mertebeden türevlerinin mutlak değerleri quasi konveks olan fonksiyonlar için Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler verilecektir.

Teorem 4.1.1 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, (a,b) aralığında differansiyellenebilir bir fonksiyon ve $a<b$ olsun. Eğer $|f'|$ $[a,b]$ aralığında quasi konveks fonksiyon ise $\alpha>0$ için

$$\begin{aligned}
&\Big|\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}}\big[J_{a^+}^{\alpha}f(b)+J_{b^-}^{\alpha}f(a)\big]-f\big(\frac{a+b}{2}\big)\Big| \\
\leq\ & \frac{(b-a)}{2(\alpha+1)}\Big[\alpha-1+\frac{1}{2^{\alpha-1}}\Big]max\{|f'(a)|,|f'(b)|\}
\end{aligned}\tag{4.1.1}$$

eşitsizliği geçerlidir [33].

İspat. Lemma 3.1.1'den

$$\begin{aligned}
&\Big|\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}}\big[J_{a^+}^{\alpha}f(b)+J_{b^-}^{\alpha}f(a)\big]-f\big(\frac{a+b}{2}\big)\Big| \\
\leq\ & \frac{1}{2(b-a)^{\alpha}}\Bigg[\int_a^{\frac{a+b}{2}}\big[(b-a)^{\alpha}-(b-x)^{\alpha}+(x-a)^{\alpha}\big]|f'(x)|dx \\
&+\int_{\frac{a+b}{2}}^{b}\big[(b-x)^{\alpha}-(x-a)^{\alpha}+(b-a)^{\alpha}\big]|f'(x)|dx\Bigg]
\end{aligned}\tag{4.1.2}$$

olur. $|f'|$, $[a,b]$ kapalı aralığında quasi konveks fonksiyon olduğundan $x\in[a,b]$ olmak üzere

$$|f'(x)|=\Big|f'\Big(\frac{b-x}{b-a}a+\frac{x-a}{b-a}b\Big)\Big|\leq max\{|f'(a)|,|f'(b)|\}$$

yazılır. Buradan da

$$\begin{aligned}
&\Big|\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}}\big[J_{a^+}^{\alpha}f(b)+J_{b^-}^{\alpha}f(a)\big]-f\Big(\frac{a+b}{2}\Big)\Big| \\
\leq\ & \frac{1}{2(b-a)^{\alpha}}\Bigg[\int_a^{\frac{a+b}{2}}\big[(b-a)^{\alpha}-(b-x)^{\alpha}+(x-a)^{\alpha}\big]max\{|f'(a)|,|f'(b)|\}dx \\
&+\int_{\frac{a+b}{2}}^{b}\big[(b-x)^{\alpha}-(x-a)^{\alpha}+(b-a)^{\alpha}\big]max\{|f'(a)|,|f'(b)|\}dx\Bigg] \\
=\ & \frac{1}{2(b-a)^{\alpha}}\Bigg[\int_a^{\frac{a+b}{2}}\big[(b-a)^{\alpha}-(b-x)^{\alpha}+(x-a)^{\alpha}\big]dx \\
&+\int_{\frac{a+b}{2}}^{b}\big[(b-x)^{\alpha}-(x-a)^{\alpha}+(b-a)^{\alpha}\big]dx\Bigg]max\{|f'(a)|,|f'(b)|\}
\end{aligned}$$

$$= \frac{(b-a)}{2(\alpha+1)}\Big[\alpha - 1 + \frac{1}{2^{\alpha-1}}\Big] max\{|f'(a)|, |f'(b)|\}$$

elde edilir. Burada

$$\begin{aligned}
&\int_a^{\frac{a+b}{2}} \big[(b-a)^\alpha - (b-x)^\alpha + (x-a)^\alpha\big]dx \\
&= \int_{\frac{a+b}{2}}^b \big[(b-x)^\alpha - (x-a)^\alpha + (b-a)^\alpha\big]dx \\
&= \frac{(b-a)^{\alpha+1}}{2(\alpha+1)}\left[\alpha - 1 + \frac{1}{2^{\alpha-1}}\right]
\end{aligned}$$

olduğu kullanılır. Böylece ispat tamamlanmış olur [33].

Sonuç 4.1.1 (4.1.1) eşitsizliğinde $\alpha = 1$ olarak alınırsa (4.1.1) eşitsizliği (2.1.8) eşitsizliğine indirgenir.

Teorem 4.1.2 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, (a, b) aralığında differansiyellenebilir bir fonksiyon ve $a < b$ olsun. Eğer $|f'|$, $[a, b]$ aralığında quasi konveks fonksiyon ise $\alpha > 0$ için

$$\begin{aligned}
&\Big|\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^\alpha}\big[J^\alpha_{a^+}f(b) + J^\alpha_{b^-}f(a)\big] - \frac{1}{2}\Big[f\big(\frac{3a+b}{4} + \frac{a+3b}{4}\big)\Big]\Big| \\
\le\ &\left[\frac{1}{4} + \frac{2(1+3^{\alpha+1})}{4^{\alpha+1}(\alpha+1)} - \frac{1}{(\alpha+1)}\left(1 + \frac{1}{2^\alpha}\right)\right](b-a) max\{|f'(a)|, |f'(b)|\}
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir [33].

İspat. Lemma 3.1.2'den

$$\begin{aligned}
&\Big|\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^\alpha}\big[J^\alpha_{a^+}f(b) + J^\alpha_{b^-}f(a)\big] - \frac{1}{2}\Big[f\big(\frac{3a+b}{4} + \frac{a+3b}{4}\big)\Big]\Big| \\
\le\ &\frac{1}{2(b-a)^\alpha}\left[\int_a^{\frac{3a+b}{4}} \big[(b-a)^\alpha - (b-x)^\alpha + (x-a)^\alpha\big]|f'(x)|dx\right. \\
&+ \int_{\frac{3a+b}{4}}^{\frac{a+b}{2}} \big[(b-x)^\alpha - (x-a)^\alpha\big]|f'(x)|dx \\
&+ \int_{\frac{a+b}{2}}^{\frac{a+3b}{4}} \big[(x-a)^\alpha - (b-x)^\alpha\big]|f'(x)|dx \\
&\left.+ \int_{\frac{a+3b}{4}}^b \big[(b-x)^\alpha - (x-a)^\alpha + (b-a)^\alpha\big]|f'(x)|dx\right]
\end{aligned}$$

yazılır. $|f'|$, $[a, b]$ aralığında quasi konveks fonksiyon olduğundan

$$|f'(x)| = \left|f'\Big(\frac{b-x}{b-a}a + \frac{x-a}{b-a}b\Big)\right| \le max\{|f'(a)|, |f'(b)|\}$$

dir. Böylece

$$
\begin{aligned}
&\Big|\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-x)^{\alpha}}\big[J^{\alpha}_{a^+}f(b)+J^{\alpha}_{b^-}f(a)\big]-\frac{1}{2}\Big[f\big(\frac{3a+b}{4}+\frac{a+3b}{4}\big)\Big]\Big| \\
\leq\ & \frac{1}{2(b-a)^{\alpha}}\Bigg[\int_a^{\frac{3a+b}{4}}\big[(b-a)^{\alpha}-(b-x)^{\alpha}+(x-a)^{\alpha}\big]max\{|f'(a)|,|f'(b)|\}dx \\
&+\int_{\frac{3a+b}{4}}^{\frac{a+b}{2}}\big[(b-x)^{\alpha}-(x-a)^{\alpha}\big]max\{|f'(a)|,|f'(b)|\}dx \\
&+\int_{\frac{a+b}{2}}^{\frac{a+3b}{4}}\big[(x-a)^{\alpha}-(b-x)^{\alpha}\big]max\{|f'(a)|,|f'(b)|\}dx \\
&+\int_{\frac{a+3b}{4}}^{b}\big[(b-x)^{\alpha}-(x-a)^{\alpha}+(b-a)^{\alpha}\big]max\{|f'(a)|,|f'(b)|\}dx\Bigg] \\
=\ & \left[\frac{1}{4}+\frac{2(1+3^{\alpha+1})}{4^{\alpha+1}(\alpha+1)}-\frac{1}{(\alpha+1)}\left(1+\frac{1}{2^{\alpha}}\right)\right](b-a)max\{|f'(a)|,|f'(b)|\}
\end{aligned}
$$

sonucu elde edilir. Burada

$$
\begin{aligned}
&\int_a^{\frac{3a+b}{4}}\big[(b-a)^{\alpha}-(b-x)^{\alpha}+(x-a)^{\alpha}\big]dx \\
&=\int_{\frac{a+3b}{4}}^{b}\big[(b-x)^{\alpha}-(x-a)^{\alpha}+(b-a)^{\alpha}\big]dx=(b-a)^{\alpha+1}\left[\frac{1}{4}+\frac{3^{\alpha+1}+1}{4^{\alpha+1}(\alpha+1)}-\frac{1}{\alpha+1}\right] \\
&\int_{\frac{3a+b}{4}}^{\frac{a+b}{2}}\big[(b-x)^{\alpha}-(x-a)^{\alpha}\big]dx=\int_{\frac{a+b}{2}}^{\frac{a+3b}{4}}\big[(x-a)^{\alpha}-(b-x)^{\alpha}\big]dx \\
&=(b-a)^{\alpha+1}\left[\frac{1+3^{\alpha+1}}{4^{\alpha+1}(\alpha+1)}-\frac{1}{2^{\alpha}(\alpha+1)}\right]
\end{aligned}
$$

olduğu kullanılmıştır. Böylece ispat tamamlanmış olur [33].

Sonuç 4.1.2 Teorem 4.1.2'de $\alpha=1$ olarak alınırsa

$$
\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt-\frac{f(\frac{3a+b}{4})+f(\frac{a+3b}{4})}{2}\right|\leq\frac{(b-a)}{8}max\{|f'(a)|,|f'(b)|\}
$$

eşitliği elde edilir [33].

4.2 Beta Fonksiyonlar için Uygulamalar

Bu bölüm boyunca $\alpha>0$, $\rho\geq 3$, $a=0$, $b=1$, $\Gamma(\alpha)$ gamma fonksiyonu ve $f(x)=x^{\rho-1}$ $(x\in[0,1])$ olsun. Bu taktirde $|f'|$, $[0,1]$ aralığında bir quasi konveks fonksiyon olur. Ayrıca

$$
\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}}J^{\alpha}_{a^+}f(b)=\frac{\alpha}{2}\int_0^1(1-x)^{\alpha-1}x^{\rho-1}dx=\frac{\alpha}{2}B(\rho,\alpha)
$$

ve

$$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}}J_{b^-}^{\alpha}f(a)=\frac{\alpha}{2}\int_0^1 x^{\alpha+\rho-2}dx=\frac{\alpha}{2(\alpha+\rho-1)}$$

olduğu gözönüne alınarak aşağıdaki uygulamalar verilir.

Önerme 4.2.1 Teorem 4.1.1'den,

$$\left|\frac{\alpha}{2}B(\rho,\alpha)+\frac{\alpha}{2(\alpha+\rho-1)}-\frac{1}{2^{\rho-1}}\right|\leq\frac{1}{2(\alpha+1)}\left[\alpha-1+\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right](\rho-1)$$

elde edilir.

Önerme 4.2.2 Teorem 4.1.2'den

$$\left|\frac{\alpha}{2}B(\rho,\alpha)+\frac{\alpha}{2(\alpha+\rho-1)}-\frac{3^{\rho-1}+1}{2.4^{\rho-1}}\right|\leq\left[\frac{1}{4}+\frac{2(1+3^{\alpha+1})}{4^{\alpha+1}(\alpha+1)}-\frac{(2^{\alpha}+1)}{2^{\alpha}(\alpha+1)}\right](\rho-1)$$

elde edilir.

4.3 Riemann-Liouville Kesirli İntegraller Yardımıyla (α^*,m)-konveks Fonksiyonlar için Hermite-Hadamard Tipli Eşitsizlikler

Bu bölümde ilk olarak teoremlerin ispatında kullanılacak olan iki lemma verilecektir.

Lemma 4.3.1 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ differansiyellenebilir bir fonksiyon ve $f'\in L[a,b]$ olsun. $0<\alpha$, $m\in[0,1]$ ve $a<x<b$ olmak üzere Riemann-Liouville kesirli integralleri için

$$\begin{aligned}&\frac{(x-ma)[(a+x)f(x)-xf(ma)]+(b-mx)[(x+b)f(mx)-xf(b)]}{(b-a)^2}\\&-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^2}\left(\frac{a}{(x-ma)^{\alpha-1}}J_{x^-}^{\alpha}f(a)+\frac{b}{(b-mx)^{\alpha-1}}J_{x^+}^{\alpha}f(b)\right)\\=&\frac{(x-ma)^2}{(b-a)^2}\int_0^1(at^{\alpha}+x)f'(tx+m(1-t)a)dt\\&-\frac{(b-mx)^2}{(b-a)^2}\int_0^1(b(1-t)^{\alpha}+x)f'(tb+m(1-t)x)dt\end{aligned}$$

eşitliği geçerlidir. Ayrıca

$ma\to a$ ve $mb\to b$ için bu Lemma, Lemma 3.3.1'ün özel bir durumudur.

İspat. İlk olarak

$$\begin{aligned}I&=\frac{(x-ma)^2}{(b-a)^2}\int_0^1(at^{\alpha}+x)f'(tx+m(1-t)a)dt\\&\quad-\frac{(b-mx)^2}{(b-a)^2}\int_0^1(b(1-t)^{\alpha}+x)f'(tb+m(1-t)x)dt\\&=I_1-I_2\end{aligned}\tag{4.3.1}$$

yazılır. Daha sonra kısmi integrasyon yardımıyla

$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{(x-ma)^2}{(b-a)^2}\int_0^1 (at^\alpha + x) f'(tx+m(1-t)a)dt \\
&= \frac{(x-ma)^2}{(b-a)^2}\left[\left.\frac{(at^\alpha + x) f(tx+m(1-t)a)}{(x-ma)}\right|_0^1 - \int_0^1 \frac{a\alpha t^{\alpha-1} f(tx+m(1-t)a)}{(x-ma)}dt\right] \\
&= \frac{(x-ma)^2}{(b-a)^2}\left(\frac{(a+x)f(x)-xf(ma)}{(x-ma)} - \frac{a\alpha}{(x-ma)}\int_0^1 t^{\alpha-1} f(tx+m(1-t)a)dt\right) \\
&= \frac{(x-ma)^2[(a+x)f(x)-xf(ma)]}{(b-a)^2(x-ma)} - \frac{a\alpha}{(b-a)^2}\int_{ma}^x \left(\frac{\tau - ma}{x-ma}\right)^{\alpha-1} f(\tau)d\tau \\
&= \frac{(x-ma)[(a+x)f(x)-xf(ma)]}{(b-a)^2} - \frac{a\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^2(x-ma)^{\alpha-1}} J_{x^-}^\alpha f(a) \qquad (4.3.2)
\end{aligned}$$

ve benzer şekilde

$$\begin{aligned}
I_2 &= \frac{(b-mx)^2}{(b-a)^2}\int_0^1 (b(1-t)^\alpha + x) f'(tb+m(1-t)x)dt \\
&= \frac{(b-mx)^2}{(b-a)^2}\left[\left.\frac{(b(1-t)^\alpha + x) f(tb+m(1-t)x)}{(b-mx)}\right|_0^1\right. \\
&\quad \left. - \int_0^1 \frac{(b\alpha(1-t)^{\alpha-1}) f(tb+m(1-t)x)}{(b-mx)}dt\right] \\
&= \frac{(b-mx)^2}{(b-a)^2}\left(\frac{[(x)f(b)-(b+x)f(mx)]}{(b-mx)}\right. \\
&\quad \left. - \frac{b\alpha(b-mx)^2}{(b-a)^2(b-mx)}\int_0^1 (1-t)^{\alpha-1} f(tb+m(1-t)x)dx\right) \\
&= \frac{(b-mx)^2[(x)f(b)-(b+x)f(mx)]}{(b-a)^2(b-mx)} + \frac{b\alpha}{(b-a)^2}\int_{mx}^b \left(\frac{b-\tau}{b-mx}\right)^{\alpha-1} f(\tau)d\tau \\
&= \frac{(b-mx)[(x)f(b)-(b+x)f(mx)]}{(b-a)^2} - \frac{b\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^2(b-mx)^{\alpha-1}} J_{x^+}^\alpha f(b) \qquad (4.3.3)
\end{aligned}$$

olarak bulunur. (4.3.2) ve (4.3.3) eşitlikleri (4.3.1)'de yerine yazılarak

$$\begin{aligned}
I &= \frac{(x-ma)[(a+x)f(x)-xf(ma)] - (b-mx)[(b+x)f(mx)-xf(b)]}{(b-a)^2} \\
&- \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^2}\left(\frac{a}{(x-ma)^{\alpha-1}} J_{x^-}^\alpha f(a) + \frac{b}{(b-mx)^{\alpha-1}} J_{x^+}^\alpha f(b)\right)
\end{aligned}$$

istenilen sonuç elde edilir.

Lemma 4.3.2 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, iki kez differansiyellenebilir bir fonksiyon ve $f'' \in L[a,b]$ olsun. $0 < \alpha$, $m \in [0,1]$ ve $a < x < b$ olmak üzere Riemann-Liouville kesirli integraller için aşağıdaki eşitlik,

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{(b-a)^2}\left[\frac{(x(\alpha+1)+b)f(x)-bf(mb)}{(mb-x)}+\frac{(b(\alpha+1)+x)f(mx)-xf(a)}{(mx-a)}\right] \\
& -\frac{(\alpha+1)\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^2}\left(\frac{x}{(mb-x)^{\alpha+1}}J^{\alpha}_{x^+}f(b)+\frac{b}{(mx-a)^{\alpha+1}}J^{\alpha}_{x^-}f(a)\right) \\
= & \frac{(x-b)}{(b-a)^2}\int_0^1 (t^{\alpha+1}x+tb)f''(tx+m(1-t)b)dt \\
& +\frac{(a-x)}{(b-a)^2}\int_0^1 (b(1-t)^{\alpha}+(1-t)x)f''(ta+m(1-t)x)dt
\end{aligned}
$$

eşitliği geçerlidir. Ayrıca, $ma \to a$ ve $mb \to b$ için bu Lemma, Lemma 3.3.2'nin özel bir durumudur.

İspat. İlk olarak

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{(x-mb)}{(b-a)^2}\int_0^1 (t^{\alpha+1}x+tb)f''(tx+m(1-t)b)dt \\
&= \frac{(a-mx)}{(b-a)^2}\int_0^1 (b(1-t)^{\alpha}+(1-t)x)f''(ta+m(1-t)x)dt \\
&= I_3+I_4
\end{aligned}
\tag{4.3.4}
$$

yazılır. Kısmi integrasyon yardımıyla

$$
\begin{aligned}
I_3 &= \frac{(x-mb)}{(b-a)^2}\int_0^1 (t^{\alpha+1}x+tb)f''(tx+m(1-t)b)dt \\
&= \frac{(x-mb)}{(b-a)^2}\left[\left.\frac{(t^{\alpha+1}x+tb)f'(tx+m(1-t)b)}{(x-mb)}\right|_0^1\right. \\
&\quad \left.-\int_0^1 \frac{f'(tx+m(1-t)b)((\alpha+1)t^{\alpha}x+b)}{(x-mb)}dt\right] \\
&= \frac{(x+b)f'(x)}{(b-a)^2}-\frac{1}{(b-a)^2}\int_0^1 ((\alpha+1)t^{\alpha}x+b)f'(tx+m(1-t)b)dt \\
&= \frac{(x+b)f'(x)}{(b-a)^2}-\left(\frac{(x(\alpha+1)+b)f(x)-bf(mb)}{(x-mb)(b-a)^2}\right. \\
&\quad \left.+\frac{\alpha(\alpha+1)x}{(x-mb)(b-a)^2}\int_{mb}^{x}\left(\frac{\tau-mb}{x-mb}\right)^{\alpha-1}f(\tau)\frac{1}{x-mb}d\tau\right) \\
&= \frac{(x+b)f'(x)}{(b-a)^2}+\frac{(x(\alpha+1)+b)f(x)-bf(mb)}{(mb-x)(b-a)^2} \\
&\quad -\frac{x(\alpha+1)\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^2(mb-x)^{\alpha+1}}J^{\alpha}_{x^+}f(b)
\end{aligned}
\tag{4.3.5}
$$

ve benzer şekilde

$$\begin{aligned}
I_4 &= \frac{(a-mx)}{(b-a)^2}\int_0^1 ((1-t)^{\alpha+1}b+(1-t)x)f''(ta+m(1-t)x)dt \\
&= \frac{(a-mx)}{(b-a)^2}\left[\frac{((1-t)^{\alpha+1}b+(1-t)x)f'(ta+m(1-t)x)}{a-mx}\Bigg|_0^1\right. \\
&\quad \left. -\int_0^1 \frac{((\alpha+1)(1-t)^{\alpha}b+x)f'(ta+m(1-t)x)}{a-mx}dt\right] \\
&= -\frac{(a-mx)[(b+x)f'(mx)]}{(b-a)^2} \\
&\quad -\frac{(a-mx)}{(b-a)^2}\int_0^1 \frac{((\alpha+1)(1-t)^{\alpha}b+x)f'(ta+m(1-t)x)dt}{a-mx} \\
&= -\frac{(b+x)f'(mx)}{(b-a)^2}+\left(\frac{(xf(a)-((\alpha+1)b+x)f(mx))}{(b-a)^2(mx-a)}\right. \\
&\quad \left. +\frac{(\alpha(\alpha+1)b}{(b-a)^2(a-mx)}\int_{mx}^{a}\left(\frac{a-\tau}{a-mx}\right)^{\alpha-1} f(\tau)\frac{1}{a-mx}d\tau\right) \\
&= -\frac{(b+x)f'(mx)}{(b-a)^2}+\frac{(xf(a)-((\alpha+1)b+x)f(mx))}{(b-a)^2(mx-a)} \\
&\quad -\frac{b(\alpha+1)\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^2(mx-a)^{\alpha+1}}J_{x^-}^{\alpha}f(a)
\end{aligned} \tag{4.3.6}$$

olarak bulunur. (4.3.5) ve (4.3.6) eşitlikleri (4.3.4)'de yerine yazılarak

$$\begin{aligned}
I: &= \frac{1}{(b-a)^2}\left[\frac{(x(\alpha+1)+b)f(x)-bf(mb)}{(mb-x)}+\frac{(b(\alpha+1)+x)f(mx)-xf(a)}{(mx-a)}\right] \\
&\quad -\frac{(\alpha+1)\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^2}\left(\frac{x}{(mb-x)^{\alpha+1}}J_{x^+}^{\alpha}f(b)+\frac{b}{(mx-a)^{\alpha+1}}J_{x^-}^{\alpha}f(a)\right)
\end{aligned}$$

istenilen sonuç elde edilir.

Teorem 4.3.1 $[0,\infty)\subset I$ olacak şekilde I, $\mathbb{R}$'de bir açık aralık, $f: I\to\mathbb{R}$, I°'de differensiyellenebilir bir fonksiyon, $ma, mb\in I$, $0\le a<b<\infty$ ve $f'\in L[ma,mb]$ olsun. Eğer $|f'|$, $[ma,mb]$ aralığında (α^*,m) konveks fonksiyon ise $(\alpha^*,m)\in[0,1]\times(0,1]$ olmak üzere $\alpha>0$ için

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{[(x-ma)(a+x)f(x)-xf(ma)]+(b-mx)[(x+b)f(mx)-xf(b)]}{(b-a)^2}\right. \\
&\quad \left. -\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^2}\left(\frac{a}{(x-ma)^{\alpha-1}}J_{x^-}^{\alpha}f(a)+\frac{b}{(b-mx)^{\alpha-1}}J_{x^+}^{\alpha}f(b)\right)\right| \\
\le\ & \frac{(x-ma)^2}{(b-a)^2}\left[\left(\frac{a}{\alpha+\alpha^*+1}+\frac{x}{\alpha^*+1}\right)|f'(x)|\right. \\
&\quad \left. +\left(\frac{am}{\alpha+1}-\frac{am}{\alpha+\alpha^*+1}+xm-\frac{xm}{\alpha^*+1}\right)|f'(a)|\right]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ \quad \frac{(b-mx)^2}{(b-a)^2}\Bigg[\Bigg(\frac{b\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha^*+1)}{\Gamma(\alpha+\alpha^*+2)}+\frac{x}{\alpha^*+1}\Bigg)|f'(b)| \\
&+\Bigg(\frac{bm}{\alpha+1}-\frac{bm\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha^*+1)}{\Gamma(\alpha+\alpha^*+2)}+xm-\frac{xm}{\alpha^*+1}\Bigg)|f'(x)|\Bigg]
\end{aligned}
$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. Lemma 4.3.1 ve $|f'|$ 'nin (α^*, m) konveksliği kullanılarak

$$
\begin{aligned}
&\Bigg|\frac{(x-ma)[(a+x)f(x)-xf(ma)]+(b-mx)[(x+b)f(mx)-xf(b)]}{(b-a)^2} \\
&-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^2}\Bigg(\frac{a}{(x-ma)^{\alpha-1}}J^{\alpha}_{x-}f(a)+\frac{b}{(b-mx)^{\alpha-1}}J^{\alpha}_{x+}f(b)\Bigg)\Bigg| \\
\leq\ & \frac{(x-ma)^2}{(b-a)^2}\int_0^1 (at^{\alpha}+x)|f'(tx+m(1-t)a)|dt \\
&+\frac{(b-mx)^2}{(b-a)^2}\int_0^1 (b(1-t)^{\alpha}+x)|f'(tb+m(1-t)x)|dt \\
\leq\ & \frac{(x-ma)^2}{(b-a)^2}\int_0^1 (at^{\alpha}+x)\Big[t^{\alpha^*}|f'(x)|+m(1-t^{\alpha^*})|f'(a)|\Big]dt \\
&+\frac{(b-mx)^2}{(b-a)^2}\int_0^1 (b(1-t)^{\alpha}+x)\Big[t^{\alpha^*}|f'(b)|+m(1-t^{\alpha^*})|f'(x)|\Big]dt \\
\leq\ & \frac{(x-ma)^2}{(b-a)^2}\Bigg[\int_0^1 (at^{\alpha}+x)t^{\alpha^*}|f'(x)|dt+\int_0^1 (at^{\alpha}+x)m(1-t^{\alpha^*})|f'(a)|dt\Bigg] \\
&+\frac{(b-mx)^2}{(b-a)^2}\Bigg[\int_0^1 (b(1-t)^{\alpha}+x)t^{\alpha^*}|f'(b)|dt \\
&+\int_0^1 (b(1-t)^{\alpha}+x)m(1-t^{\alpha^*})|f'(x)|dt\Bigg] \\
=\ & \frac{(x-ma)^2}{(b-a)^2}\Bigg[\Bigg(\frac{a}{\alpha+\alpha^*+1}+\frac{x}{\alpha^*+1}\Bigg)|f'(x)| \\
&+\Bigg(\frac{am}{\alpha+1}-\frac{am}{\alpha+\alpha^*+1}+xm-\frac{xm}{\alpha^*+1}\Bigg)|f'(a)|\Bigg] \\
+\ & \frac{(b-mx)^2}{(b-a)^2}\Bigg[\Bigg(\frac{b\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha^*+1)}{\Gamma(\alpha+\alpha^*+2)}+\frac{x}{\alpha^*+1}\Bigg)|f'(b)| \\
&+\Bigg(\frac{bm}{\alpha+1}-\frac{bm\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha^*+1)}{\Gamma(\alpha+\alpha^*+2)}+xm-\frac{xm}{\alpha^*+1}\Bigg)|f'(x)|\Bigg]
\end{aligned}
$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 4.3.1 Teorem 4.3.1, $(\alpha^*, m) = (1,1)$ ve $x = \frac{a+b}{2}$ seçilirse

$$\begin{aligned}
&\Bigg|\frac{(a+b)\Big(4f\big(\frac{a+b}{2}\big) - f(a) - f(b)\Big)}{4(b-a)} \\
&-\frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha+1}}\bigg(aJ^{\alpha}_{\frac{a+b}{2}^-}f(a) + bJ^{\alpha}_{\frac{a+b}{2}^+}f(b)\bigg)\Bigg| \\
\leq\ & \frac{1}{4}\bigg[\Big(\frac{a}{\alpha+2} + \frac{a+b}{4}\Big)|f'\Big(\frac{a+b}{2}\Big)| + \Big(\frac{a}{\alpha+1} - \frac{a}{\alpha+2} + \frac{a+b}{4}\Big)|f'(a)|\bigg] \\
&+\frac{1}{4}\bigg[\Big(\frac{b\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+3)} + \frac{a+b}{4}\Big)|f'(b)| + \Big(\frac{b}{\alpha+1} - \frac{b\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+3)} + \frac{a+b}{4}\Big)\Big|f'\Big(\frac{a+b}{2}\Big)\Big|\bigg]
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

Teorem 4.3.2 $[0,\infty) \subset I$ olacak şekilde I, $\mathbb{R}$'de bir açık aralık, $f : I \to \mathbb{R}$, I°'de differensiyellenebilir bir fonksiyon, $ma, mb \in I$, $0 \leq a < b < \infty$ ve $f' \in L[ma, mb]$ olsun. Eğer $|f'|$, $[ma, mb]$ aralığında (α^*, m) konveks fonksiyon ise $(\alpha^*, m) \in [0,1] \times (0,1]$, $\alpha > 0$ olmak üzere $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ve $q > 1$ için

$$\begin{aligned}
&\Bigg|\frac{(x-ma)[(a+x)f(x) - xf(ma)] + (b-mx)[(x+b)f(mx) - xf(b)]}{(b-a)^2} \\
&-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^2}\bigg(\frac{a}{(x-ma)^{\alpha-1}}J^{\alpha}_{x^-}f(a) + \frac{b}{(b-mx)^{\alpha-1}}J^{\alpha}_{x^+}f(b)\bigg)\Bigg| \\
\leq\ & \frac{(x-ma)^2}{(b-a)^2}\bigg(\frac{2^{p-1}a^p}{p\alpha+1} + 2^{p-1}x^p\bigg)^{\frac{1}{p}}\bigg(\frac{|f'(x)|^q}{\alpha^*+1} + m|f'(a)|^q - \frac{m|f'(a)|^q}{\alpha^*+1}\bigg)^{\frac{1}{q}} \\
&+\frac{(b-mx)^2}{(b-a)^2}\bigg(\frac{2^{p-1}b^p}{p\alpha+1} + 2^{p-1}x^p\bigg)^{\frac{1}{p}}\bigg(\frac{|f'(b)|^q}{\alpha^*+1} + m|f'(x)|^q - \frac{m|f'(x)|^q}{\alpha^*+1}\bigg)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. Lemma 4.3.1 ve Lemma 3.3.3 üzerine Hölder eşitsizliği ve $|f'|^q$'nin (α^*, m)-konveks fonksiyonu kullanılarak

$$\begin{aligned}
&\Bigg|\frac{(x-ma)[(a+x)f(x) - xf(ma)] + (b-mx)[(x+b)f(mx) - xf(b)]}{(b-a)^2} \\
&-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^2}\bigg(\frac{a}{(x-ma)^{\alpha-1}}J^{\alpha}_{x^-}f(a) + \frac{b}{(b-mx)^{\alpha-1}}J^{\alpha}_{x^+}f(b)\bigg)\Bigg| \\
\leq\ & \frac{(x-ma)^2}{(b-a)^2}\int_0^1 (at^{\alpha} + x)|f'(tx + m(1-t)a)|dt \\
&+\frac{(b-mx)^2}{(b-a)^2}\int_0^1 (b(1-t)^{\alpha} + x)|f'(tb + m(1-t)x)|dt \\
\leq\ & \frac{(x-ma)^2}{(b-a)^2}\bigg(\int_0^1 (at^{\alpha} + x)^p dt\bigg)^{\frac{1}{p}}\bigg(\int_0^1 |f'(tx + m(1-t)a)|^q dt\bigg)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{(b-mx)^2}{(b-a)^2}\left(\int_0^1 (b(1-t)^\alpha+x)^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 |f'(tb+m(1-t)x)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\\
\leq\;& \frac{(x-ma)^2}{(b-a)^2}\left(\int_0^1 2^{p-1}(a^p t^{p\alpha}+x^p)dt\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\times\left(\int_0^1 \left[t^{\alpha^*}|f'(x)|^q+m(1-t^{\alpha^*})|f'(a)|^q\right]dt\right)^{\frac{1}{q}}\\
&+\frac{(b-mx)^2}{(b-a)^2}\left(\int_0^1 2^{p-1}(b^p(1-t)^{p\alpha}+x^p)dt\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\times\left(\int_0^1 \left[t^{\alpha^*}|f'(b)|^q+m(1-t^{\alpha^*})|f'(x)|^q\right]dt\right)^{\frac{1}{q}}\\
=\;& \frac{(x-ma)^2}{(b-a)^2}\left(\frac{2^{p-1}a^p}{p\alpha+1}+2^{p-1}x^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{|f'(x)|^q}{\alpha^*+1}+m|f'(a)|^q-\frac{m|f'(a)|^q}{\alpha^*+1}\right)^{\frac{1}{q}}\\
&+\frac{(b-mx)^2}{(b-a)^2}\left(\frac{2^{p-1}b^p}{p\alpha+1}+2^{p-1}x^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{|f'(b)|^q}{\alpha^*+1}+m|f'(x)|^q-\frac{m|f'(x)|^q}{\alpha^*+1}\right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 4.3.1 Teorem 4.3.2'de $(\alpha^*, m) = (1, 1)$ seçilirse

$$
\begin{aligned}
&\Bigg|\frac{(x-a)[(a+x)f(x)-xf(a)]+(b-x)[(x+b)f(x)-xf(b)]}{(b-a)^2}\\
&-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^2}\left(\frac{a}{(x-a)^{\alpha-1}}J^\alpha_{x^-}f(a)+\frac{b}{(b-x)^{\alpha-1}}J^\alpha_{x^+}f(b)\right)\Bigg|\\
\leq\;& \frac{(x-a)^2}{(b-a)^2}\left(\frac{2^{p-1}a^p}{p\alpha+1}+2^{p-1}x^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{|f'(x)|^q}{2}+\frac{|f'(a)|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}\\
&+\frac{(b-x)^2}{(b-a)^2}\left(\frac{2^{p-1}b^p}{p\alpha+1}+2^{p-1}x^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{|f'(b)|^q}{2}+\frac{|f'(x)|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}
$$

$s = 1$ için Teorem 3.3.3'ün özel bir durumu elde edilir.

Teorem 4.3.3 $[0, \infty) \subset I$ olacak şekilde I, $\mathbb{R}$'de bir açık aralık, $f : I \to \mathbb{R}$, I°'de differensiyellenebilir bir fonksiyon, $ma, mb \in I$, $0 \leq a < b < \infty$ ve $f' \in L[ma, mb]$ olsun. Eğer $|f'|$, $[ma, mb]$ aralığında (α^*, m) konveks fonksiyon ise $(\alpha^*, m) \in [0, 1] \times (0, 1]$ olmak üzere $\alpha > 0$ ve $q \geq 1$ için

$$
\begin{aligned}
&\Bigg|\frac{(x-ma)[(a+x)f(x)-xf(ma)]+(b-mx)[(x+b)f(mx)-xf(b)]}{(b-a)^2}\\
&-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^2}\left(\frac{a}{(x-ma)^{\alpha-1}}J^\alpha_{x^-}f(a)+\frac{b}{(b-mx)^{\alpha-1}}J^\alpha_{x^+}f(b)\right)\Bigg|\\
\leq\;& \frac{(x-ma)^2}{(b-a)^2}\left(\frac{a}{\alpha+1}+x\right)^{1-\frac{1}{q}}\psi(\alpha,m,x)+\frac{(b-mx)^2}{(b-a)^2}\left(\frac{b}{\alpha+1}+x\right)^{1-\frac{1}{q}}\omega(\alpha,m,x)
\end{aligned}
$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada

$$\begin{aligned}
\psi(\alpha,m,x) &= \Bigg[\left(\frac{a}{\alpha+\alpha^*+1}+\frac{x}{\alpha^*+1}\right)|f'(x)|^q \\
&\quad +\left(\frac{am}{\alpha+1}-\frac{am}{\alpha+\alpha^*+1}+xm-\frac{xm}{\alpha^*+1}\right)|f'(a)|^q\Bigg]^{\frac{1}{q}} \\
\omega(\alpha,m,x) &= \Bigg[\left(\frac{b\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha^*+1)}{\Gamma(\alpha+\alpha^*+2)}+\frac{x}{\alpha^*+1}\right)|f'(b)|^q \\
&\quad +\left(\frac{bm}{\alpha+1}-\frac{mb\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha^*+1)}{\Gamma(\alpha+\alpha^*+2)}+xm-\frac{xm}{\alpha^*+1}\right)|f'(x)|^q\Bigg]^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

şeklindedir.

İspat. Lemma 4.3.1, iyi bilinen power-mean eşitsizliğini ve $|f'|^q$'nin (α^*,m)-konveksliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
&\Bigg|\frac{(x-ma)[(a+x)f(x)-xf(ma)]+(b-mx)[(x+b)f(mx)-xf(b)]}{(b-a)^2} \\
&-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^2}\left(\frac{a}{(x-ma)^{\alpha-1}}J^{\alpha}_{x^-}f(a)+\frac{b}{(b-mx)^{\alpha-1}}J^{\alpha}_{x^+}f(b)\right)\Bigg| \\
\leq\ & \frac{(x-ma)^2}{(b-a)^2}\int_0^1(at^\alpha+x)|f'(tx+m(1-t)a)|dt \\
&+\frac{(b-mx)^2}{(b-a)^2}\int_0^1(b(1-t)^\alpha+x)|f'(tb+m(1-t)x)|dt \\
\leq\ & \frac{(x-ma)^2}{(b-a)^2}\left(\int_0^1(at^\alpha+x)dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1(at^\alpha+x)|f'(tb+m(1-t)x)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \\
&+\frac{(b-mx)^2}{(b-a)^2}\left(\int_0^1(b(1-t)^\alpha+x)dt\right)^{1-\frac{1}{q}} \\
&\times\left(\int_0^1(b(1-t)^\alpha+x)|f'(tb+m(1-t)x)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \\
\leq\ & \frac{(x-ma)^2}{(b-a)^2}\left(\int_0^1(at^\alpha+x)dt\right)^{1-\frac{1}{q}} \\
&\times\left(\int_0^1(at^\alpha+x)\left[t^{\alpha^*}|f'(x)|^q+m(1-t^{\alpha^*})|f'(a)|^q\right]dt\right)^{\frac{1}{q}} \\
+\ & \frac{(b-mx)^2}{(b-a)^2}\left(\int_0^1(b(1-t)^\alpha+x)dt\right)^{1-\frac{1}{q}} \\
&\times\left(\int_0^1(b(1-t)^\alpha+x)\left[t^{\alpha^*}|f'(b)|^q+m(1-t^{\alpha^*})|f'(x)|^q\right]\right) \\
=\ & \frac{(x-ma)^2}{(b-a)^2}\left(\frac{a}{\alpha+1}+x\right)^{1-\frac{1}{q}}\psi(\alpha,m,x)+\frac{(b-mx)^2}{(b-a)^2}\left(\frac{b}{\alpha+1}+x\right)^{1-\frac{1}{q}}\omega(\alpha,m,x)
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece istenilen ifade elde edilmiş olur.

Sonuç 4.3.2 Teorem 4.3.3'de, $(\alpha^*, m) = (1,1)$ ve $x = \frac{a+b}{2}$ seçilirse

$$\begin{aligned}
&\Bigg|\frac{(a+b)\Big(4f\big(\frac{a+b}{2}\big) - f(a) - f(b)\Big)}{4(b-a)} \\
&-\frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha+1}}\Big(aJ^{\alpha}_{\frac{a+b}{2}-}f(a) + bJ^{\alpha}_{\frac{a+b}{2}+}f(b)\Big)\Bigg| \\
\leq\ & \frac{1}{4}\Big(\frac{a}{\alpha+1} + \frac{a+b}{2}\Big)^{1-\frac{1}{q}}\psi(\alpha,m,x) + \frac{1}{4}\Big(\frac{b}{\alpha+1} + \frac{a+b}{2}\Big)^{1-\frac{1}{q}}\omega(\alpha,m,x)
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$\begin{aligned}
\psi(\alpha,m,x) &= \Bigg[\Big(\frac{a}{\alpha+2} + \frac{a+b}{4}\Big)\Big|f'\Big(\frac{a+b}{2}\Big)\Big|^q \\
&\quad + \Big(\frac{a}{\alpha+1} - \frac{a}{\alpha+2} + \frac{a+b}{4}\Big)|f'(a)|^q\Bigg]^{\frac{1}{q}} \\
\omega(\alpha,m,x) &= \Bigg[\Big(\frac{b\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+3)} + \frac{a+b}{4}\Big)|f'(b)|^q \\
&\quad + \Big(\frac{b}{\alpha+1} - \frac{b\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+3)} + \frac{a+b}{4}\Big)\Big|f'\Big(\frac{a+b}{2}\Big)\Big|^q\Bigg]^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

dir.

Teorem 4.3.4 $[0,\infty) \subset I$ olacak şekilde I, $\mathbb{R}$'de bir açık aralık, $f: I \to \mathbb{R}$, I°'de iki kez differensiyellenebilir bir fonksiyon, $ma, mb \in I$, $0 \leq a < b < \infty$ ve $f'' \in L[ma, mb]$ olsun. Eğer $|f''|$, $[ma, mb]$ aralığında (α^*, m) konveks fonksiyon ise $(\alpha^*, m) \in [0,1] \times (0,1]$ olmak üzere $\alpha > 0$ için

$$\begin{aligned}
&\Bigg|\frac{1}{(b-a)^2}\Bigg[\frac{(x(\alpha+1)+b)f(x) - bf(mb)}{(mb-x)} + \frac{(b(\alpha+1)+x)f(mx) - xf(a)}{(mx-a)}\Bigg] \\
&-\frac{(\alpha+1)\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^2}\Big(\frac{x}{(mb-x)^{\alpha+1}}J^{\alpha}_{x+}f(b) + \frac{b}{(mx-a)^{\alpha+1}}J^{\alpha}_{x-}f(a)\Big)\Bigg| \\
\leq\ & \frac{(x-mb)}{(b-a)^2}\Bigg[\Big(\frac{x}{\alpha+\alpha^*+2} + \frac{b}{\alpha^*+2}\Big)|f''(x)| \\
&+\Big(\frac{mx}{\alpha+2} - \frac{mx}{\alpha+\alpha^*+2} + \frac{bm}{2} - \frac{bm}{\alpha^*+2}\Big)|f''(b)|\Bigg] \\
&+\frac{(a-mx)}{(b-a)^2}\Bigg[\Big(\frac{b\Gamma(\alpha^*+1)\Gamma(\alpha+2)}{\Gamma(\alpha+\alpha^*+3)} + \frac{x}{\alpha^*+1} - \frac{x}{\alpha^*+2}\Big)|f''(a)| \\
&+\Big(\frac{bm}{\alpha+2} - \frac{bm\Gamma(\alpha^*+1)\Gamma(\alpha+2)}{\Gamma(\alpha+\alpha^*+3)} + \frac{mx}{2} - \frac{mx}{\alpha^*+1} + \frac{mx}{\alpha^*+2}\Big)|f''(x)|\Bigg]
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. Lemma 4.3.2 ve $|f''|$'nin (α^*, m)-konveksliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
&\Bigg|\frac{1}{(b-a)^2}\left[\frac{(x(\alpha+1)+b)f(x)-bf(mb)}{(mb-x)}+\frac{(b(\alpha+1)+x)f(mx)-xf(a)}{(mx-a)}\right] \\
&-\frac{(\alpha+1)\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^2}\left(\frac{x}{(mb-x)^{\alpha+1}}J^{\alpha}_{x^+}f(b)+\frac{b}{(mx-a)^{\alpha+1}}J^{\alpha}_{x^-}f(a)\right)\Bigg| \\
\le\ & \frac{(x-mb)}{(b-a)^2}\int_0^1 (xt^{\alpha+1}+tb)|f''(tx+m(1-t)b)|dt \\
&+\frac{(a-mx)}{(b-a)^2}\int_0^1 ((1-t)^{\alpha+1}b+(1-t)x)|f''(ta+m(1-t)x)|dt \\
\le\ & \frac{(x-mb)}{(b-a)^2}\int_0^1 (xt^{\alpha+1}+tb)\left[t^{\alpha^*}|f''(x)|+m(1-t^{\alpha^*})|f''(b)|\right]dt \\
&+\frac{(a-mx)}{(b-a)^2}\int_0^1 ((1-t)^{\alpha+1}b+(1-t)x)\left[t^{\alpha^*}|f''(a)|+m(1-t^{\alpha^*})|f''(x)|\right]dt \\
=\ & \frac{(x-mb)}{(b-a)^2}\Bigg[\left(\frac{x}{\alpha+\alpha^*+2}+\frac{b}{\alpha^*+2}\right)|f''(x)| \\
&+\left(\frac{mx}{\alpha+2}-\frac{mx}{\alpha+\alpha^*+2}+\frac{bm}{2}-\frac{bm}{\alpha^*+2}\right)|f''(b)|\Bigg] \\
&+\frac{(a-mx)}{(b-a)^2}\Bigg[\left(\frac{b\Gamma(\alpha^*+1)\Gamma(\alpha+2)}{\Gamma(\alpha+\alpha^*+3)}+\frac{x}{\alpha^*+1}-\frac{x}{\alpha^*+2}\right)|f''(a)| \\
&+\left(\frac{bm}{\alpha+2}-\frac{bm\Gamma(\alpha^*+1)\Gamma(\alpha+2)}{\Gamma(\alpha+\alpha^*+3)}+\frac{mx}{2}-\frac{mx}{\alpha^*+1}+\frac{mx}{\alpha^*+2}\right)|f''(x)|\Bigg]
\end{aligned}$$

istenilen eşitsizlik elde edilir.

Sonuç 4.3.3 Teorem 4.3.4'de, $(\alpha^*, m) = (1, 1)$ ve $x = \frac{a+b}{2}$ seçilirse

$$\begin{aligned}
&\Bigg|\frac{((a+3b)(\alpha+1)+(a+3b))f\left(\frac{a+b}{2}\right)-2bf(a)-(a+b)f(a)}{(b-a)^3} \\
&-\frac{(\alpha+1)\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^2}\left(\frac{2^{\alpha}(a+b)}{(b-x)^{\alpha+1}}J^{\alpha}_{\frac{a+b}{2}^+}f(b)+\frac{2^{\alpha+1}b}{(b-a)^{\alpha+1}}J^{\alpha}_{\frac{a+b}{2}^-}f(a)\right)\Bigg| \\
\le\ & \frac{1}{2(a-b)}\left[\left(\frac{x}{\alpha+3}+\frac{b}{3}\right)\left|f''\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|+\left(\frac{1}{\alpha+2}-\frac{1}{\alpha+3}+\frac{b}{6}\right)|f''(b)|\right] \\
&+\frac{1}{2(a-b)}\left[\left(\frac{b\Gamma(\alpha+2)}{\Gamma(\alpha+4)}+\frac{a+b}{12}\right)|f''(a)|+\left(\frac{b}{\alpha+2}-\frac{b\Gamma(\alpha+2)}{\Gamma(\alpha+4)}+\frac{a+b}{12}\right)\left|f''\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|\right]
\end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 4.3.5 $[0, \infty) \subset I$ olacak şekilde I, $\mathbb{R}$'de bir açık aralık, $f : I \to \mathbb{R}$, I°'de iki kez differensiyellenebilir bir fonksiyon, $ma, mb \in I$, $0 \le a < b < \infty$ ve $f'' \in L[ma, mb]$ olsun. Eğer $|f''|$, $[ma, mb]$ aralığında (α^*, m) konveks fonksiyon ise $(\alpha^*, m) \in [0, 1] \times (0, 1]$ olmak üzere $\alpha > 0$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ ve $q>1$ için

$$\begin{aligned}
&\Bigg|\frac{1}{(b-a)^2}\left[\frac{(x(\alpha+1)+b)f(x)-bf(mb)}{(mb-x)}+\frac{(b(\alpha+1)+x)f(mx)-xf(a)}{(mx-a)}\right]\\
&-\frac{(\alpha+1)\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^2}\left(\frac{x}{(mb-x)^{\alpha+1}}J^{\alpha}_{x^+}f(b)+\frac{b}{(mx-a)^{\alpha+1}}J^{\alpha}_{x^-}f(a)\right)\Bigg|\\
\leq\ &\frac{(x-mb)}{(b-a)^2}\left(\frac{2^{p-1}x^p}{p(\alpha+1)+1}+\frac{2^{p-1}b^p}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{|f''(x)|^q}{\alpha^*+1}+m|f''(b)|^q-\frac{m|f''(b)|^q}{\alpha^*+1}\right)^{\frac{1}{q}}\\
&+\frac{(a-mx)}{(b-a)^2}\left(\frac{2^{p-1}b^p}{p(\alpha+1)+1}+\frac{2^{p-1}x^p}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{|f''(a)|^q}{\alpha^*+1}+m|f''(x)|^q-\frac{m|f''(x)|^q}{\alpha^*+1}\right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. Lemma 4.3.2 ve Lemma 3.3.3 üzerine Hölder eşitsizliği ve $|f''|^q$'nin konveksliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
&\Bigg|\frac{1}{(b-a)^2}\left[\frac{(x(\alpha+1)+b)f(x)-bf(mb)}{(mb-x)}+\frac{(b(\alpha+1)+x)f(mx)-xf(a)}{(mx-a)}\right]\\
&-\frac{(\alpha+1)\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^2}\left(\frac{x}{(mb-x)^{\alpha+1}}J^{\alpha}_{x^+}f(b)+\frac{b}{(mx-a)^{\alpha+1}}J^{\alpha}_{x^-}f(a)\right)\Bigg|\\
\leq\ &\frac{(x-mb)}{(b-a)^2}\int_0^1(t^{\alpha+1}x+tb)|f''(tx+m(1-t)b)|dt\\
&+\frac{(a-mx)}{(b-a)^2}\int_0^1((1-t)^{\alpha+1}b+(1-t)x)|f''(ta+m(1-t)x)|dt\\
\leq\ &\frac{(x-mb)}{(b-a)^2}\left(\int_0^1\left(t^{\alpha+1}x+tb\right)^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1\left|f''(tx+m(1-t)b)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\\
&+\frac{(a-mx)}{(b-a)^2}\left(\int_0^1\left((1-t)^{\alpha+1}b+(1-t)x\right)^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1\left|f''(ta+m(1-t)x)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\\
\leq\ &\frac{(x-mb)}{(b-a)^2}\left(\int_0^1 2^{p-1}(x^pt^{p(\alpha+1)}+t^pb^p)dt\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\times\left(\int_0^1\left[t^{\alpha^*}|f''(x)|^q+m(1-t^{\alpha^*})|f''(b)|^q\right]dt\right)^{\frac{1}{q}}\\
&+\frac{(a-mx)}{(b-a)^2}\left(\int_0^1 2^{p-1}((1-t)^{p(\alpha+1)})b^p+(1-t)^px^p)dt\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\times\left(\int_0^1\left[t^{\alpha^*}|f''(a)|^q+m(1-t^{\alpha^*})|f''(x)|^q\right]dt\right)^{\frac{1}{q}}\\
=\ &\frac{(x-mb)}{(b-a)^2}\left(\frac{2^{p-1}x^p}{p(\alpha+1)+1}+\frac{2^{p-1}b^p}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{|f''(x)|^q}{\alpha^*+1}+m|f''(b)|^q-\frac{m|f''(b)|^q}{\alpha^*+1}\right)^{\frac{1}{q}}\\
&+\frac{(a-mx)}{(b-a)^2}\left(\frac{2^{p-1}b^p}{p(\alpha+1)+1}+\frac{2^{p-1}x^p}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{|f''(a)|^q}{\alpha^*+1}+m|f''(x)|^q-\frac{m|f''(x)|^q}{\alpha^*+1}\right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

istenilen eşitsizlik elde edilir.

Sonuç 4.3.2 Teorem 4.3.5'de, $(\alpha^*, m) = (1,1)$ seçilirse

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{(b-a)^2}\left[\frac{(x(\alpha+1)+b)f(x)-bf(b)}{(b-x)}+\frac{(b(\alpha+1)+x)f(x)-xf(a)}{(x-a)}\right]\right. \\
&\left.-\frac{(\alpha+1)\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^2}\left(\frac{x}{(b-x)^{\alpha+1}}J^{\alpha}_{x^+}f(b)+\frac{b}{(x-a)^{\alpha+1}}J^{\alpha}_{x^-}f(a)\right)\right| \\
\leq\ & \frac{(x-b)}{(b-a)^2}\left[\left(\frac{2^{p-1}x^p}{p(\alpha+1)+1}+\frac{2^{p-1}b^p}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{|f''(x)|^q}{2}+\frac{|f''(b)|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}\right] \\
&+\frac{(a-x)}{(b-a)^2}\left[\left(\frac{2^{p-1}b^p}{p(\alpha+1)+1}+\frac{2^{p-1}x^p}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{|f''(a)|^q}{2}+\frac{|f''(x)|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}\right]
\end{aligned}$$

$s=1$ Teorem 3.3.8'in özel bir durumu elde edilir.

Teorem 4.3.6 $[0,\infty) \subset I$ olacak şekilde I, $\mathbb{R}$'de bir açık aralık, $f: I \to \mathbb{R}$, I°'de iki kez differensiyellenebilir bir fonksiyon, $ma, mb \in I$, $0 \leq a < b < \infty$ ve $f'' \in L[ma, mb]$ olsun. Eğer $|f''|$, $[ma, mb]$ aralığında (α^*, m) konveks fonksiyon ise $(\alpha^*, m) \in [0,1] \times (0,1]$ olmak üzere $\alpha > 0$ ve $q \geq 1$ için

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{(b-a)^2}\left[\frac{(x(\alpha+1)+b)f(x)-bf(mb)}{(mb-x)}+\frac{(b(\alpha+1)+x)f(mx)-xf(a)}{(mx-a)}\right]\right. \\
&\left.-\frac{(\alpha+1)\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^2}\left(\frac{x}{(mb-x)^{\alpha+1}}J^{\alpha}_{x^+}f(b)+\frac{b}{(mx-a)^{\alpha+1}}J^{\alpha}_{x^-}f(a)\right)\right| \\
\leq\ & \frac{(x-mb)}{(b-a)^2}\left(\frac{x}{\alpha+2}+\frac{b}{2}\right)^{1-\frac{1}{q}}\psi(\alpha,m,x)+\frac{(a-mx)}{(b-a)^2}\left(\frac{b}{\alpha+2}+\frac{x}{2}\right)^{1-\frac{1}{q}}\omega(\alpha,m,x)
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada

$$\begin{aligned}
\psi(\alpha,m,x) &= \left[\left(\frac{x}{\alpha+\alpha^*+2}+\frac{b}{\alpha^*+2}\right)|f'(x)|^q\right. \\
&\left.+\left(\frac{mx}{\alpha+2}-\frac{mx}{\alpha+\alpha^*+2}+\frac{mb}{2}-\frac{mb}{\alpha^*+2}\right)|f'(b)|^q\right]^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\omega(\alpha,m,x) &= \left[\left(\frac{b\Gamma(\alpha+2)\Gamma(\alpha^*+1)}{\Gamma(\alpha+\alpha^*+3)}+\frac{x}{\alpha^*+1}-\frac{x}{\alpha^*+2}\right)|f'(b)|^q\right. \\
&\left.+\left(\frac{mb}{\alpha+2}-\frac{mb\Gamma(\alpha+2)\Gamma(\alpha^*+1)}{\Gamma(\alpha+\alpha^*+3)}+\frac{mx}{2}-\frac{mx}{\alpha^*+1}+\frac{mx}{\alpha^*+2}\right)|f'(x)|^q\right]^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

dir.

İspat. Lemma 4.3.2, iyi bilinen power-mean eşitsizliği ve $|f''|^q$'nin (α^*, m)-konveksliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
&\Bigg|\frac{1}{(b-a)^2}\left[\frac{(x(\alpha+1)+b)f(x)-bf(mb)}{(mb-x)}+\frac{(b(\alpha+1)+x)f(mx)-xf(a)}{(mx-a)}\right] \\
&-\frac{(\alpha+1)\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^2}\left(\frac{x}{(mb-x)^{\alpha+1}}J^{\alpha}_{x+}f(b)+\frac{b}{(mx-a)^{\alpha+1}}J^{\alpha}_{x-}f(a)\right)\Bigg| \\
\leq\ & \frac{(x-mb)}{(b-a)^2}\int_0^1 (t^{\alpha+1}x+tb)|f''(tx+m(1-t)b)|dt \\
&+\frac{(a-mx)}{(b-a)^2}\int_0^1 ((1-t)^{\alpha+1}b+(1-t)x)|f''(ta+m(1-t)x)|dt \\
\leq\ & \frac{(x-mb)}{(b-a)^2}\left(\int_0^1 t^{\alpha+1}x+tbdt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1 (t^{\alpha+1}x+tb)\Big|f''(tx+m(1-t)b)\Big|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \\
&+\frac{(a-mx)}{(b-a)^2}\left(\int_0^1 ((1-t)^{\alpha+1}b+(1-t)x)dt\right)^{1-\frac{1}{q}} \\
&\times\left(\int_0^1 ((1-t)^{\alpha+1}b+(1-t)x)\Big|f''(ta+m(1-t)x)\Big|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \\
\leq\ & \frac{(x-mb)}{(b-a)^2}\left(\int_0^1 t^{\alpha+1}x+tbdt\right)^{1-\frac{1}{q}} \\
&\times\left(\int_0^1 (t^{\alpha+1}x+tb)\Big[t^{\alpha^*}|f''(x)|^q+m(1-t^{\alpha^*})|f''(b)|^q\Big]dt\right)^{\frac{1}{q}} \\
&+\frac{(a-mx)}{(b-a)^2}\left(\int_0^1 ((1-t)^{\alpha+1}b+(1-t)x)dt\right)^{1-\frac{1}{q}} \\
&\times\left(\int_0^1 ((1-t)^{\alpha+1}b+(1-t)x)\Big[t^{\alpha^*}|f''(b)|^q+m(1-t^{\alpha^*})|f''(x)|^q\Big]dt\right)^{\frac{1}{q}} \\
=\ & \frac{(x-mb)}{(b-a)^2}\left(\frac{x}{\alpha+2}+\frac{b}{2}\right)^{1-\frac{1}{q}}\psi(\alpha,m,x)+\frac{(a-mx)}{(b-a)^2}\left(\frac{b}{\alpha+2}+\frac{x}{2}\right)^{1-\frac{1}{q}}\omega(\alpha,m,x)
\end{aligned}$$

olur. Böylece istenilen eşitsizlik elde edilir.

Sonuç 4.3.4 Teorem 4.3.6'de, $(\alpha^*, m) = (1,1)$ ve $x = \frac{a+b}{2}$, seçilirse

$$\begin{aligned}
&\Bigg|\frac{((a+3b)(\alpha+1)+(a+3b))f\left(\frac{a+b}{2}\right)-2bf(a)-(a+b)f(a)}{(b-a)^3} \\
&-\frac{(\alpha+1)\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^2}\left(\frac{2^{\alpha}(a+b)}{(b-x)^{\alpha+1}}J^{\alpha}_{\frac{a+b}{2}+}f(b)+\frac{2^{\alpha+1}b}{(b-a)^{\alpha+1}}J^{\alpha}_{\frac{a+b}{2}-}f(a)\right)\Bigg| \\
\leq\ & \frac{(a-b)}{2(b-a)^2}\left(\frac{a+b}{2\alpha+4}+\frac{b}{2}\right)^{1-\frac{1}{q}}\psi(\alpha,m,x)+\frac{(a-b)}{2(b-a)^2}\left(\frac{b}{\alpha+2}+\frac{a+b}{4}\right)^{1-\frac{1}{q}}\omega(\alpha,m,x)
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$\psi(\alpha,m,x) = \left[\left(\frac{a+b}{2\alpha+6}+\frac{b}{3}\right)\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q + \left(\frac{a+b}{2\alpha+4}-\frac{a+b}{2\alpha+6}+\frac{b}{6}\right)|f'(b)|^q\right]^{\frac{1}{q}}$$

$$\omega(\alpha,m,x) = \left[\left(\frac{b\Gamma(\alpha+2)}{\Gamma(\alpha+4)}+\frac{a+b}{12}\right)|f'(b)|^q + \left(\frac{b}{\alpha+2}-\frac{b\Gamma(\alpha+2)}{\Gamma(\alpha+4)}+\frac{a+b}{6}\right)\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q\right]^{\frac{1}{q}}$$

dir.

4.4 Uyumlu Kesirli İntegraller Yardımıyla Quasi-Konveks Fonksiyonlar için Hermite-Hadamard Tipli Eşitsizlikler

Bu bölümde quasi konveks fonksiyonlar için uyumlu kesirli integraller yardımıyla Hermite-Hadamard eşitsizlikler verilecektir.

Lemma 4.4.1 *$f:[a,b]\to\mathbb{R}$, (a,b) aralığında differansiyellenebilir bir fonksiyon ve $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$ olsun. Eğer $f'\in L[a,b]$ ise $\alpha>0$, $n=0,1,2,\ldots$ için*

$$\begin{aligned}
&\Psi_\alpha(a,b)\\
&= \frac{-(b-a)\alpha}{16}\left[\int_0^1 B_t(n+1,\alpha-n)f'\left(ta+(1-t)\frac{3a+b}{4}\right)dt\right.\\
&\quad-\int_0^1 B_{1-t}(\alpha-n,n+1)f'\left(t\frac{3a+b}{4}+(1-t)\frac{a+b}{2}\right)dt\\
&\quad+\int_0^1 B_t(n+1,\alpha-n)f'\left(t\frac{a+b}{2}+(1-t)\frac{a+3b}{4}\right)dt\\
&\quad\left.-\int_0^1 B_{1-t}(\alpha-n,n+1)f'\left(t\frac{a+3b}{4}+(1-t)b\right)dt\right]
\end{aligned} \tag{4.4.1}$$

olur. Burada $B_t(.,.)$ tamamlanmamış beta fonksiyonu ve

$$\begin{aligned}
&\Psi_\alpha(a,b)\\
&= \frac{\alpha}{4}\left[B(n+1,\alpha-n)\left(f(a)+f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)\right.\\
&\quad+B(\alpha-n,n+1)\left(f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right)-\frac{\alpha 4^{\alpha-1}n!}{(b-a)^\alpha}\\
&\quad\times\left.\left(I_\alpha^a f\left(\frac{3a+b}{4}\right)+I_\alpha^{\frac{3a+b}{4}} f\left(\frac{a+b}{2}\right)+I_\alpha^{\frac{a+b}{2}} f\left(\frac{a+3b}{4}\right)+I_\alpha^{\frac{a+3b}{4}} f(b)\right)\right]
\end{aligned}$$

dir [32].

İspat. İlk olarak $u = ta + (1-t)\frac{3a+b}{4}$ değişken değişikliği ve kısmi integrasyon yardımıyla

$$\begin{aligned}
\Phi_1 &= \frac{-(b-a)\alpha}{16}\int_0^1 B_t(n+1,\alpha-n) f'\left(ta+(1-t)\frac{3a+b}{4}\right)dt \\
&= \frac{-(b-a)\alpha}{16}\left[B_t(n+1,\alpha-n)\frac{f\left(ta+(1-t)\frac{3a+b}{4}\right)}{\left(-\frac{b-a}{4}\right)}\Bigg|_0^1 \right. \\
&\quad \left. -\left(-\frac{4}{b-a}\right)\int_0^1 t^n(1-t)^{\alpha-n-1} f\left(ta+(1-t)\frac{3a+b}{4}\right)dt\right] \\
&= \frac{\alpha}{4}\left[B(n+1,\alpha-n)f(a) - \int_0^1 t^n(1-t)^{\alpha-n-1} f\left(ta+(1-t)\frac{3a+b}{4}\right)dt\right] \\
&= \frac{\alpha}{4}\left[B(n+1,\alpha-n)f(a) \right. \\
&\quad \left. -\int_a^{\frac{3a+b}{4}} \left(\frac{4}{b-a}\right)^n\left(\frac{3a+b}{4}-u\right)^n\left(\frac{4}{b-a}\right)^{\alpha-n-1}(u-a)^{\alpha-n-1}\left(\frac{4}{b-a}\right)f(u)du\right] \\
&= \frac{\alpha}{4}\left[B(n+1,\alpha-n)f(a) \right. \\
&\quad \left. -\frac{4^\alpha n!}{(b-a)^\alpha}\frac{1}{n!}\int_a^{\frac{3a+b}{4}}\left(u-\frac{3a+b}{4}\right)^n(u-a)^{\alpha-n-1}f(u)du\right] \\
&= \frac{\alpha}{4}\left[B(n+1,\alpha-n)f(a) - \frac{\alpha 4^{\alpha-1} n!}{(b-a)^\alpha}(I_\alpha^a f)\left(\frac{3a+b}{4}\right)\right], \\
\Phi_2 &= \frac{(b-a)\alpha}{16}\int_0^1 B_{1-t}(\alpha-n,n+1) f'\left(t\frac{3a+b}{4}+(1-t)\frac{a+b}{2}\right)dt \\
&= \frac{(b-a)\alpha}{16}\left[B_{1-t}(\alpha-n,n+1)\frac{f\left(t\frac{3a+b}{4}+(1-t)\frac{a+b}{2}\right)}{\left(\frac{a-b}{4}\right)}\Bigg|_0^1 \right. \\
&\quad \left. -\frac{4}{b-a}\int_0^1 t^n(1-t)^{\alpha-n-1} f\left(t\frac{3a+b}{4}+(1-t)\frac{a+b}{2}\right)dt\right] \\
&= \frac{(b-a)\alpha}{16}\left[B(\alpha-n,n+1)f\left(\frac{a+b}{2}\right)\frac{4}{b-a} \right. \\
&\quad +\frac{4^2}{(b-a)^2}\int_{\frac{a+b}{2}}^{\frac{3a+b}{4}}\left(\frac{4}{b-a}\right)^n\left(u-\frac{a+b}{2}\right)^n \\
&\quad \left. \times\left(\frac{4}{b-a}\right)^{\alpha-n-1}\left(u-\frac{3a+b}{4}\right)^{\alpha-n-1}f(u)du\right] \\
&= \frac{\alpha}{4}B(\alpha-n,n+1)f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{\alpha 4^{\alpha-1} n!}{(b-a)^\alpha}(I_\alpha^{\frac{3a+b}{4}} f)\left(\frac{a+b}{2}\right),
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\Phi_3 &= \frac{-(b-a)\alpha}{16}\int_0^1 B_t(n+1,\alpha-n)f'\left(t\frac{a+b}{2}+(1-t)\frac{a+3b}{4}\right)dt \\
&= \frac{-(b-a)\alpha}{16}\left[B_t(n+1,\alpha-n)\frac{f\left(t\frac{a+b}{2}+(1-t)\frac{a+3b}{4}\right)}{\left(\frac{a-b}{4}\right)}\Bigg|_0^1\right. \\
&\quad \left.+\frac{4}{(b-a)}\int_0^1 t^n(1-t)^{\alpha-n-1}f\left(t\frac{a+b}{2}+(1-t)\frac{a+3b}{4}\right)dt\right] \\
&= \frac{-(b-a)\alpha}{16}\left[B(n+1,\alpha-n)f\left(\frac{a+b}{2}\right)\frac{4}{(a-b)}\right. \\
&\quad +\frac{4}{(b-a)}\int_{\frac{a+3b}{4}}^{\frac{a+b}{2}}\left(u-\frac{a+3b}{4}\right)^n\left(\frac{4}{(a-b)}\right)^n\left(\frac{4}{(a-b)}\right)^{\alpha-n-1} \\
&\quad \left.\times\left(\frac{a+b}{2}-u\right)^{\alpha-n-1}\frac{4}{(a-b)}f(u)du\right] \\
&= \frac{\alpha}{4}\left[B(n+1,\alpha-n)f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{\alpha 4^{\alpha-1}n!}{(b-a)^\alpha}(I_\alpha^{\frac{a+b}{2}}f)\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right.
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
\Phi_4 &= \frac{(b-a)\alpha}{16}\int_0^1 B_{1-t}(\alpha-n,n+1)f'\left(t\frac{a+3b}{4}+(1-t)b\right)dt \\
&= \frac{(b-a)\alpha}{16}\left[B_{1-t}(\alpha-n,n+1)\frac{f\left(t\frac{a+3b}{4}+(1-t)b\right)}{\left(\frac{a-b}{4}\right)}\Bigg|_0^1\right. \\
&\quad \left.-\frac{4}{b-a}\int_0^1 t^n(1-t)^{\alpha-n-1}f\left(t\frac{a+3b}{4}+(1-t)b\right)dt\right] \\
&= \frac{(b-a)\alpha}{16}\left[B(\alpha-n,n+1)f(b)\frac{4}{b-a}\right. \\
&\quad -\frac{4^2}{(b-a)^2}\int_b^{\frac{a+3b}{4}}\left(\frac{4}{b-a}\right)^n(b-u)^n \\
&\quad \left.\times\left(\frac{4}{b-a}\right)^{\alpha-n-1}\left(u-\frac{a+3b}{4}\right)^{\alpha-n-1}f(u)du\right] \\
&= \frac{\alpha}{4}B(\alpha-n,n+1)f(b)-\frac{\alpha 4^{\alpha-1}n!}{(b-a)^\alpha}(I_\alpha^{\frac{a+3b}{4}}f)(b)
\end{aligned}
$$

olarak bulunur. Buradan da bu özdeşlikler taraf tarafa toplanarak istenilen sonuç elde edilir.

Sonuç 4.4.1 Eğer (4.4.1) eşitsizliğinde $\alpha = n+1$ seçilirse, bu takdirde Lemma 4.4.1 [35] 'deki Lemma 2.1'e indirgenir.

Teorem 4.4.1 I, $\mathbb{R}$'de bir aralık olmak üzere $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I°'de differansiyellenebilir bir fonksiyon, $a, b \in I$, $a < b$ ve $f' \in L[a,b]$ olsun. Eğer $|f'|^q$, $[a,b]$ aralığında quasi-konveks fonksiyon ise $q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $\alpha > 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ ve $B_t(.,.)$ tamamlanmamış Beta fonksiyon olmak üzere

$$\begin{aligned}
&|\Psi_\alpha(a,b)| \\
\leq\ & \frac{(b-a)\alpha}{16}\Bigg[\left(\int_0^1 |B_t(n+1,\alpha-n)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \max\left\{|f'(a)|^q, \left|f'\left(\frac{3a+b}{4}\right)\right|^q\right\}^{\frac{1}{q}} \\
&+ \left(\int_0^1 |B_{1-t}(\alpha-n,n+1)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \max\left\{\left|f'\left(\frac{3a+b}{4}\right)\right|^q, \left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q\right\}^{\frac{1}{q}} \\
&+ \left(\int_0^1 |B_t(n+1,\alpha-n)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \max\left\{\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q, \left|f'\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right|^q\right\}^{\frac{1}{q}} \\
&+ \left(\int_0^1 |B_{1-t}(\alpha-n,n+1)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \max\left\{\left|f'\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right|^q, |f'(b)|^q\right\}^{\frac{1}{q}}\Bigg]
\end{aligned} \tag{4.4.2}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. Lemma 4.4.1, Hölder eşitsizliği ve $|f'|^q$'nin $[a,b]$ aralığında quasi-konveksliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
&|\Psi_\alpha(a,b)| \\
\leq\ & \frac{(b-a)\alpha}{16}\Bigg[\int_0^1 B_t(n+1,\alpha-n)\left|f'\left(ta+(1-t)\frac{3a+b}{4}\right)\right| dt \\
&+ \int_0^1 B_{1-t}(\alpha-n,n+1)\left|f'\left(t\frac{3a+b}{4}+(1-t)\frac{a+b}{2}\right)\right| dt \\
&+ \int_0^1 B_t(n+1,\alpha-n)\left|f'\left(t\frac{a+b}{2}+(1-t)\frac{a+3b}{4}\right)\right| dt \\
&+ \int_0^1 B_{1-t}(\alpha-n,n+1)\left|f'\left(t\frac{a+3b}{4}+(1-t)b\right)\right| dt\Bigg] \\
\leq\ & \frac{(b-a)\alpha}{16}\Bigg[\left(\int_0^1 |B_t(n+1,\alpha-n)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \max\left\{|f'(a)|^q, \left|f'\left(\frac{3a+b}{4}\right)\right|^q\right\}^{\frac{1}{q}} \\
&+ \left(\int_0^1 |B_{1-t}(\alpha-n,n+1)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \max\left\{\left|f'\left(\frac{3a+b}{4}\right)\right|^q, \left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q\right\}^{\frac{1}{q}} \\
&+ \left(\int_0^1 |B_t(n+1,\alpha-n)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \max\left\{\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q, \left|f'\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right|^q\right\}^{\frac{1}{q}} \\
&+ \left(\int_0^1 |B_{1-t}(\alpha-n,n+1)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \max\left\{\left|f'\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right|^q, |f'(b)|^q\right\}^{\frac{1}{q}}\Bigg].
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 4.4.2 (4.4.2)'de eşitliğinde $\alpha = n+1$ olarak seçilirse bu takdirde Teorem 4.4.1 [31]'deki Teorem 2.3 indirgenir.

Teorem 4.4.2 I, $\mathbb{R}$'de bir aralık olmak üzere $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I°'de differansiyellenebilir bir fonksiyon, $a, b \in I$, $a < b$ ve $f' \in L[a, b]$ olsun. Eğer $|f'|^q$, $[a, b]$ aralığında quasi-konveks fonksiyon ise $q \geq 1$, $\alpha \in (n, n+1]$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ ve $B(a, b)$ tamamlanmamış Beta fonksiyon olmak üzere

$$\begin{aligned} & |\Psi_\alpha(a,b)| \\ \leq \; & \frac{(b-a)\alpha}{16}(B(n+1,\alpha-n+1))^{1-\frac{1}{q}}(B(n+1,\alpha-n+1))^{\frac{1}{q}}\left(K_1^{\frac{1}{q}}+K_3^{\frac{1}{q}}\right) \\ & +(B(n+2,\alpha-n))^{1-\frac{1}{q}}(B(n+2,\alpha-n))^{\frac{1}{q}}\left(K_2^{\frac{1}{q}}+K_4^{\frac{1}{q}}\right), \end{aligned} \tag{4.4.3}$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada

$$\begin{aligned} K_1 &= \max\left\{|f'(a)|^q, \left|f'\left(\frac{3a+b}{4}\right)\right|^q\right\}, \\ K_2 &= \max\left\{\left|f'\left(\frac{3a+b}{4}\right)\right|^q, \left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q\right\}, \\ K_3 &= \max\left\{\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q, \left|f'\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right|^q\right\}, \\ K_4 &= \max\left\{\left|f'\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right|^q, |f'(b)|^q\right\} \end{aligned}$$

dir.

İspat. Lemma 4.4.1, power-mean eşitsizliği ve $|f'|^q$'nin $[a, b]$ aralığında quasi-konveksliği kullanılarak

$$\begin{aligned} & |\Psi_\alpha(a,b)| \\ \leq \; & \frac{(b-a)\alpha}{16}\left[\int_0^1 B_t(n+1,\alpha-n)\left|f'\left(ta+(1-t)\frac{3a+b}{4}\right)\right|dt\right. \\ & +\int_0^1 B_{1-t}(\alpha-n,n+1)\left|f'\left(t\frac{3a+b}{4}+(1-t)\frac{a+b}{2}\right)\right|dt \\ & +\int_0^1 B_t(n+1,\alpha-n)\left|f'\left(t\frac{a+b}{2}+(1-t)\frac{a+3b}{4}\right)\right|dt \\ & \left.+\int_0^1 B_{1-t}(\alpha-n,n+1)\left|f'\left(t\frac{a+3b}{4}+(1-t)b\right)\right|dt\right] \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \frac{(b-a)\alpha}{16}\left[\left(\int_0^1 B_t(n+1,\alpha-n)dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\right.\\
&\times\left(\int_0^1 B_t(n+1,\alpha-n)\max\left\{|f'(a)|^q,\left|f'\left(\frac{3a+b}{4}\right)\right|^q\right\}dt\right)^{\frac{1}{q}}\\
&+\left(\int_0^1 B_{1-t}(\alpha-n,n+1)dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\\
&\times\left(\int_0^1 B_{1-t}(\alpha-n,n+1)\max\left\{\left|f'\left(\frac{3a+b}{4}\right)\right|^q,\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q\right\}dt\right)^{\frac{1}{q}}\\
&+\left(\int_0^1 B_t(n+1,\alpha-n)dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\\
&\times\left(\int_0^1 B_t(n+1,\alpha-n)\max\left\{\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q,\left|f'\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right|^q\right\}dt\right)^{\frac{1}{q}}\\
&+\left(\int_0^1 B_{1-t}(\alpha-n,n+1)dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\\
&\left.\times\left(\int_0^1 B_{1-t}(\alpha-n,n+1)\max\left\{\left|f'\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right|^q,|f'(b)|^q\right\}dt\right)^{\frac{1}{q}}\right]
\end{aligned}
$$

yazılır. Öte yandan beta fonksiyonun özellikleri ve kısmi integrasyon kullanılarak

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 B_t(n+1,\alpha-n)dt &= B_t(n+1,\alpha-n)t\Big|_0^1-\int_0^1 t^n(1-t)^{\alpha-n-1}tdt\\
&= B(n+1,\alpha-n)-B(n+2,\alpha-n)\\
&= B(n+1,\alpha-n+1), \qquad (4.4.4)\\
\int_0^1 B_{1-t}(\alpha-n,n+1)dt &= B_{1-t}(\alpha-n,n+1)t\Big|_0^1+\int_0^1 t^n(1-t)^{\alpha-n-1}tdt\\
&= \int_0^1 t^{n+1}(1-t)^{\alpha-n-1}dt\\
&= B(n+2,\alpha-n) \qquad (4.4.5)
\end{aligned}
$$

yazılabilir. (4.4.4) ve (4.4.5) eşitlikleri yukarıdaki eşitsizlikte kullanılırsa istenilen sonuç elde edilir.

Sonuç 4.4.3 (4.4.3) eşitsizliğinde $\alpha = n+1$ olarak alınırsa Teorem 4.4.2, [31]'deki Teorem 2.1'e indirgenir.

4.5 Üstel Çekirdekli Kesirli İntegraller Yardımıyla Harmonik Konveks Fonksiyonlar için Hermite-Hadamard Eşitsizlikleri

Bu bölümde boyunca $\alpha \in (0,1)$ için $\mathcal{A} = \frac{1-\alpha}{\alpha}\frac{b-a}{ab}$ olarak alınacaktır.

Teorem 4.5.1 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon, $0 \le a < b$ ve $f \in L[a,b]$ olsun. Eğer f, $[a,b]$ aralığında bir harmonik konveks fonksiyon ise üstel çekirdekli kesirli integral operatörleri için

$$\begin{aligned} f\left(\frac{2ab}{a+b}\right) &\le \frac{1-\alpha}{2[1-exp(-\mathcal{A})]}\left[I^{\alpha}_{\frac{1}{a}}(fog)\left(\frac{1}{b}\right) + I^{\alpha}_{\frac{1}{b}}(fog)\left(\frac{1}{a}\right)\right] \\ &\le \frac{f(a)+f(b)}{2} \end{aligned} \tag{4.5.1}$$

eşitsizliği geçerlidir ve $g(x) = \frac{1}{x}$'dir.

İspat. f, $[a,b]$ aralığında bir harmonik konveks fonksiyon olduğundan her $x, y \in [a,b]$ için

$$f\left(\frac{2xy}{x+y}\right) \le \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

dır. $x = \frac{ab}{tb+(1-t)a}$, $y = \frac{ab}{ta+(1-t)b}$, için

$$f\left(\frac{2ab}{a+b}\right) \le \frac{f\left(\frac{ab}{tb+(1-t)a}\right) + f\left(\frac{ab}{ta+(1-t)b}\right)}{2} \tag{4.5.2}$$

yazılır. Buradan (4.5.2) eşitsizliğinin her iki tarafı $exp(-\mathcal{A}t)$ ile çarpılıp, daha sonra $[0,1]$ üzerinde t'ye göre integral alınırsa

$$\begin{aligned} &\int_0^1 f\left(\frac{2ab}{a+b}\right) exp(-\mathcal{A}t)dt \\ \le\ &\frac{1}{2}\left\{\int_0^1 exp(-\mathcal{A}t) f\left(\frac{ab}{tb+(1-t)a}\right)dt + \int_0^1 exp(-\mathcal{A}t) f\left(\frac{ab}{ta+(1-t)b}\right)dt\right\} \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece $g(x) = \frac{1}{x}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} &\frac{2(1-exp(-\mathcal{A}))}{\mathcal{A}} f\left(\frac{2ab}{a+b}\right) \\ \le\ &\frac{ab}{b-a}\left[\int_{\frac{1}{b}}^{\frac{1}{a}} exp\left\{-\frac{1-\alpha}{\alpha}\left(\frac{b-a}{ab}\right)\left(s-\frac{1}{b}\right)\left(\frac{ab}{b-a}\right)\right\} f\left(\frac{1}{s}\right)ds \right. \\ &\left. + \int_{\frac{1}{b}}^{\frac{1}{a}} exp\left\{-\frac{1-\alpha}{\alpha}\left(\frac{b-a}{ab}\right)\left(\frac{1}{a}-s\right)\left(\frac{ab}{b-a}\right)\right\} f\left(\frac{1}{s}\right)ds\right] \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{ab\alpha}{b-a}\left[\frac{1}{\alpha}\int_{\frac{1}{b}}^{\frac{1}{a}} exp\left\{-\frac{1-\alpha}{\alpha}\left(s-\frac{1}{b}\right)\right\} f\left(\frac{1}{s}\right) ds\right. \\
&\quad \left. +\frac{1}{\alpha}\int_{\frac{1}{b}}^{\frac{1}{a}} exp\left\{-\frac{1-\alpha}{\alpha}\left(\frac{1}{a}-s\right)\right\} f\left(\frac{1}{s}\right) ds\right] \\
&= \frac{ab\alpha}{b-a}\left[I^{\alpha}_{\frac{1}{a}}(fog)\left(\frac{1}{b}\right)+I^{\alpha}_{\frac{1}{b}}(fog)\left(\frac{1}{a}\right)\right]
\end{aligned}
$$

yazılır. Dolayısıyla birinci eşitsizlik ispatlanmış olur.

(4.5.1) eşitsizliğinin ikinci tarafının ispatı için ilk olarak f, $[a,b]$ aralığında bir harmonik konveks fonksiyon ise $t \in [0,1]$ olmak üzere,

$$
f\left(\frac{ab}{tb+(1-t)a}\right) \leq tf(b)+(1-t)f(a)
$$

ve

$$
f\left(\frac{ab}{ta+(1-t)b}\right) \leq tf(a)+(1-t)f(b)
$$

yazılır. Buradan da bu eşitsizlikler taraf tarafa toplanırsa

$$
f\left(\frac{ab}{tb+(1-t)a}\right)+f\left(\frac{ab}{ta+(1-t)b}\right) \leq f(a)+f(b) \tag{4.5.3}
$$

olur. Daha sonra Burada (4.5.3) eşitsizliğinin her iki tarafı $exp(-\mathcal{A}t)$ ile çarpılıp, daha sonra $[0,1]$ üzerinde t'ye göre integral alınırsa

$$
\begin{aligned}
&\int_0^1 exp(-\mathcal{A}t)f\left(\frac{ab}{tb+(1-t)a}\right)dt+\int_0^1 exp(-\mathcal{A}t)\left(f\frac{ab}{ta+(1-t)b}\right)dt \\
\leq\ & [f(a)+f(b)]\int_0^1 exp(-\mathcal{A}t)dt
\end{aligned}
$$

elde edilir. Eşitsizliğin birinci tarafının ispatındaki benzer argümanlar kullanarak

$$
\frac{1-\alpha}{(1-exp(-\mathcal{A}))}\left[I^{\alpha}_{\frac{1}{a}}(fog)\left(\frac{1}{b}\right)+I^{\alpha}_{\frac{1}{b}}(fog)\left(\frac{1}{a}\right)\right] \leq [f(a)+f(b)]
$$

yazılır. Böylece ispat tamamlanır.

4.6 Genelleştirilmiş Kesirli İntegraller Yardımıyla Harmonik Konveks Fonksiyonlar için Hermite-Hadamard Eşitsizlikleri

Şimdi, Raina [28] ve Agarwal ve arkadaşları [1] çalışmalarından faydalanarak genelleştirilmiş kesirli integral operatörleri yardımıyla harmonik konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliğini verelim.

Teorem 4.6.1 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon, $a < b$, $a, b \in I$ ve $f \in L[a, b]$ olsun. Eğer f, $[a, b]$ aralığında bir harmonik konveks fonksiyon ise genelleştirilmiş kesirli integraller operatörleri için $\lambda > 0$ ve $g(x) = \frac{1}{x}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} & f\left(\frac{2ab}{a+b}\right) \\ \leq & \left(\frac{ab}{b-a}\right)^{\lambda} \frac{1}{2\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}[w\left(\frac{b-a}{ab}\right)^{\rho}]} \left[\mathcal{J}^{\alpha}_{\rho,\lambda,\frac{1}{a}-;w}(fog)\left(\frac{1}{b}\right) + \mathcal{J}^{\alpha}_{\rho,\lambda,\frac{1}{b}+;w}(fog)\left(\frac{1}{a}\right)\right] \\ \leq & \left(\frac{f(a)+f(b)}{2}\right) \end{aligned} \tag{4.6.1}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. $t \in [0, 1]$, için $x = \frac{ab}{tb+(1-t)a}$, $y = \frac{ab}{ta+(1-t)b}$ olsun. f, harmonik konveks fonksiyon olduğundan

$$f\left(\frac{2ab}{a+b}\right) \leq \frac{f\left(\frac{ab}{tb+(1-t)a}\right) + f\left(\frac{ab}{ta+(1-t)b}\right)}{2} \tag{4.6.2}$$

yazılır. Buradan (4.6.2)'nin her iki tarafı $t^{\lambda-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}[w\left(\frac{b-a}{ab}\right)^{\rho} t^{\rho}]$ ile çarpılıp, $[0, 1]$ üzerinde t'ye göre integral alınırsa

$$\begin{aligned} & 2f\left(\frac{2ab}{a+b}\right)\int_0^1 t^{\lambda-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}\left[w\left(\frac{b-a}{ab}\right)^{\rho} t^{\rho}\right]dt \\ \leq & \int_0^1 t^{\lambda-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}\left[w\left(\frac{b-a}{ab}\right)^{\rho} t^{\rho}\right] f\left(\frac{ab}{tb+(1-t)a}\right)dt \\ & + \int_0^1 t^{\lambda-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}\left[w\left(\frac{b-a}{ab}\right)^{\rho} t^{\rho}\right] f\left(\frac{ab}{ta+(1-t)b}\right)dt \end{aligned}$$

elde edilir. Daha sonra (2.2.6)'den faydalanarak

$$\begin{aligned} \int_0^1 t^{\lambda-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}\left[w\left(\frac{b-a}{ab}\right)^{\rho} t^{\rho}\right]dt &= \int_0^1 t^{\lambda-1}\left[\sum_{k\to 0}^{\infty}\frac{\sigma(k)w^k\left(\frac{b-a}{ab}\right)^{\rho k}}{\Gamma(\rho k+\lambda)}t^{\rho k}\right]dt \\ &= \sum_{k\to 0}^{\infty}\frac{\sigma(k)w^k\left(\frac{b-a}{ab}\right)^{\rho k}}{\Gamma(\rho k+\lambda)}\int_0^1 t^{\lambda+\rho k-1}dt \\ &= \sum_{k\to 0}^{\infty}\frac{\sigma(k)w^k\left(\frac{b-a}{ab}\right)^{\rho k}}{\Gamma(\rho k+\lambda+1)} \\ &= \mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}\left[w\left(\frac{b-a}{ab}\right)^{\rho}\right], \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\int_0^1 t^{\lambda-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}\left[w\left(\frac{b-a}{ab}\right)^{\rho}t^{\rho}\right]f\left(\frac{ab}{tb+(1-t)a}\right)dt \\
= &\int_{\frac{1}{b}}^{\frac{1}{a}}\left(s-\frac{1}{b}\right)^{\lambda-1}\left(\frac{ab}{b-a}\right)^{\lambda-1} \\
&\times\left[\sum_{k\to 0}^{\infty}\frac{\sigma(k)w^k\left(\frac{b-a}{ab}\right)^{\rho k}}{\Gamma(\rho k+\lambda)}\left(s-\frac{1}{b}\right)^{\rho k}\left(\frac{ab}{b-a}\right)^{\rho k}\right]\left(\frac{1}{s}\right)\left(\frac{ab}{b-a}\right)ds \\
= &\left(\frac{ab}{b-a}\right)^{\lambda}\int_{\frac{1}{b}}^{\frac{1}{a}}\left(s-\frac{1}{b}\right)^{\lambda-1}\left[\sum_{k\to 0}^{\infty}\frac{\sigma(k)w^k}{\Gamma(\rho k+\lambda)}\left(s-\frac{1}{b}\right)^{\rho k}\right]\left(\frac{1}{s}\right)ds \\
= &\left(\frac{ab}{b-a}\right)^{\lambda}\int_{\frac{1}{b}}^{\frac{1}{a}}\left(s-\frac{1}{b}\right)^{\lambda-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}\left[w\left(s-\frac{1}{b}\right)^{\rho}\right]\left(\frac{1}{s}\right)ds
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
&\int_0^1 t^{\lambda-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}\left[w\left(\frac{b-a}{ab}\right)^{\rho}t^{\rho}\right]f\left(\frac{ab}{ta+(1-t)b}\right)dt \\
= &\int_{\frac{1}{b}}^{\frac{1}{a}}\left(\frac{1}{a}-s\right)^{\lambda-1}\left(\frac{ab}{b-a}\right)^{\lambda-1} \\
&\times\left[\sum_{k\to 0}^{\infty}\frac{\sigma(k)w^k\left(\frac{b-a}{ab}\right)^{\rho k}}{\Gamma(\rho k+\lambda)}\left(\frac{1}{a}-s\right)^{\rho k}\left(\frac{ab}{b-a}\right)^{\rho k}\right]\left(\frac{1}{s}\right)\left(\frac{ab}{b-a}\right)ds \\
= &\left(\frac{ab}{b-a}\right)^{\lambda}\int_{\frac{1}{b}}^{\frac{1}{a}}\left(\frac{1}{a}-s\right)^{\lambda-1}\left[\sum_{k\to 0}^{\infty}\frac{\sigma(k)w^k}{\Gamma(\rho k+\lambda)}\left(\frac{1}{a}-s\right)^{\rho k}\right]\left(\frac{1}{s}\right)ds \\
= &\left(\frac{ab}{b-a}\right)^{\lambda}\int_{\frac{1}{b}}^{\frac{1}{a}}\left(\frac{1}{a}-s\right)^{\lambda-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}\left[w\left(\frac{1}{a}-s\right)^{\rho}\right]\left(\frac{1}{s}\right)ds
\end{aligned}
$$

şeklinde integralleri hesaplanır. Sonuç olarak $g(x)=\frac{1}{x}$ için

$$
\begin{aligned}
&2\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}\left[w\left(\frac{b-a}{ab}\right)^{\rho}\right]f\left(\frac{2ab}{a+b}\right) \\
\leq &\left(\frac{ab}{a+b}\right)^{\lambda}\left[\mathcal{J}^{\alpha}_{\rho,\lambda,\frac{1}{a}-;w}(fog)\left(\frac{1}{b}\right)+\mathcal{J}^{\alpha}_{\rho,\lambda,\frac{1}{b}+;w}(fog)\left(\frac{1}{a}\right)\right]
\end{aligned}
$$

elde edilerek birinci eşitsizlik ispatlanır. f, harmonik konveks fonksiyon olduğundan $t\in[a,b]$ için

$$
f\left(\frac{ab}{tb+(1-t)a}\right)+f\left(\frac{ab}{ta+(1-t)b}\right)\leq f(a)+f(b) \tag{4.6.3}
$$

yazılır.

Buradan (4.6.3) eşitsizliğinin her iki tarafı $t^{\lambda-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}[w\left(\frac{b-a}{ab}\right)^{\rho}t^{\rho}]$ ile çarpılıp, $[0,1]$ üzerinde

t'ye göre integral alınırsa

$$\begin{aligned}
&\leq \int_0^1 t^{\lambda-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}\left[w\left(\frac{b-a}{ab}\right)^{\rho} t^{\rho}\right] f\left(\frac{ab}{tb+(1-t)a}\right) dt \\
&\quad + \int_0^1 t^{\lambda-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}\left[w\left(\frac{b-a}{ab}\right)^{\rho} t^{\rho}\right] f\left(\frac{ab}{ta+(1-t)b}\right) dt \\
&\leq [f(a)+f(b)] \int_0^1 t^{\lambda-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}\left[w\left(\frac{b-a}{ab}\right)^{\rho} t^{\rho}\right] dt
\end{aligned}$$

elde edilir. Daha sonra birinci eşitsizliğinin ispatındakine benzer argümanlar kullanarak

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{ab}{a+b}\right)^{\lambda}\left[\mathcal{J}^{\alpha}_{\rho,\lambda,\frac{1}{a}-;w}(fog)\left(\frac{1}{b}\right) + \mathcal{J}^{\alpha}_{\rho,\lambda,\frac{1}{b}+;w}(fog)\left(\frac{1}{a}\right)\right] \\
&\leq \mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}\left[w\left(\frac{b-a}{ab}\right)^{\rho} t^{\rho}\right][f(a)+f(b)]
\end{aligned}$$

yazılır. Böylece ispat tamamlanır.

5. TARTIŞMA ve SONUÇ

Araştırmanın temelini oluşturan dördüncü bölümde ilk olarak quasi-konveks ve (α^*, m)-konveks fonksiyonlar için Riemann-Liouville kesirli integralleri içeren Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler ve bazı uygulamalar verilip daha sonra uyumlu kesirli integraller kullanılarak quasi konveks fonksiyonlar için yeni Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler verilmiştir. Bu bölümün son iki kısmında ise sırası ile üstel çekirdekli kesirli integraller ve genelleştirilmiş kesirli integraller yardımıyla harmonik konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizlikleri elde edilmiştir. Elde edilen bu yeni sonuçlar dört farklı makale olarak hazırlanmıştır. Bunlardan birincisi Antalya'da düzenlenen "II. International Conference on Advances in Natural and Applied Sciences" isimli kongrede sunulmuş olup "E. Set and N. Korkut, On new fractional integral inequalities for quasi-convex functions, AIP Conf. Proc., 1833,020052,2017" [33] şeklinde makale olarak yayınlanmıştır. İkincisi ise Giresun'da düzenlenen "X^{th} International Statistics Days Conference", isimli kongrede sunulmuş olup "E. Set, B. Çelik and N. Korkut, On new conformable Fractional Hermite-Hadamard type inequalities" [34], X^{th} International Statistics Days Conference, 2016, Giresun, Turkey şeklinde konferans tam metin bildirisi olarak basılmıştır. Üçüncüsü ise "Certain new Hermite-Hadamard type inequalities for convex functions via fractional integrals " başlığı altında " Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1: Mathematics and Statistics" isimli dergide yayın için kabul edilmiştir. Dördüncü makale ise dergiye gönderilmiş olup hakem inceleme aşamasındadır. Konuyla ilgilenen araştırmacılar bu tezde kullanılan yöntemlerden, lemmalardan yararlanarak kesirli integrallerin bu tezde kullanılan sınıfları ve daha farklı sınıfları yardımıyla yeni Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler ve farklı türden eşitsizlikler elde edebilirler.

KAYNAKLAR

[1] Agarwal, R.P., Luo, M.J., Raina, R.K. 2016. On Ostrowski type inequalities. Fasciculi Mathematici, DOI:10.1515/fascmath-2016-0001.

[2] Abdeljawad, T., 2015. On conformable fractional calculus. Journal of Computational and Applied Mathematics, 279: 57-66.

[3] Beckenback, E.F., 1948. Convex functions. Bulletin of the American Mathematical Society, 54: 439-460.

[4] Breckner, W.W., 1978. Stetigkeitsaussagen fur eine Klasse verallgemeinerter konvexer functionen in topologischen linearen Raumen. Publications Deinstıtut Mathematique, 23(37): 13-20.

[5] Dragomir, S.S., 2016. Integral inequalities of Jensen type for λ-convex functions. Matematicki Vesnik, 68(1): 45-57.

[6] Dragomir, S.S., 2015. Inequalities of Hermite-Hadamard type for h-convex functions on Linear spaces. Proyecciones Journal of Mathematics, 34(4): 323-341.

[7] Dragomir, S.S., Agarwal, R.P. 1998. Two inequalities for differentiable mappings and applications to special means of real numbers and to trapezoidal formula. Applied Mathematics Letters, 11: 91-95.

[8] Dragomir, S. S., Fitzpatrik, S. 1999. The Hadamard's inequality for s-convex functions in the second sense. Demonstratio Mathematica. Warsaw Technical University Institute of Mathematics, 31(3): 633-642.

[9] Dragomir, S.S., and Pearce, C.E.M. 1998. Quasi-convex functions and Hadamard 's inequality. Bulletin of the Australian Mathematical Society, 57(3): 377-385.

[10] Gao, Z., Li, M., Wang, J. 2016. On some fractional Hermite-Hadamard inequalities via s-convex and s-Godunova-Levin functions and their applications. Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana, 4(7): 173.

[11] Gürbüz, M., 2013. Farklı Türden Konveks Fonksiyonların Çarpımı Üzerine İntegral Eşitsizlikleri ve Uygulamaları. Doktora Tezi, Atatürk Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.

[12] Hudzik, H., Maligranda, L. 1994. Some remarks on s-convex functions. Aequationes mathematicae, 48(1): 100-111.

[13] Hwang, S.R., Tseng, K.L., Hsu, K.C. 2016. New inequalities for fractional integrals and their applications. Turkish Journal of Mathematics, 40: 471-486.

[14] Ion, D.A., 2007. Some estimates on the Hermite-Hadamard inequality through quasi-convex functions. Annals of University of Craiova Mathematics and Computer Science, 34: 82-87.

[15] İşcan, İ., Wu, S. 2014. Hermite-Hadamard type inequalities for harmonically convex functions. Applied Mathematics and Computation, 238: 237-244.

[16] İşcan, İ., 2014. Hermite-Hadamard type inequalities for harmonically convex functions. Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, 43(6): 935-942.

[17] Khalil, R., Al Horani, M., Yousef, A., Sababheh, M. 2014. A new definition of fractional derivative. Journal of Computational and Applied Mathematics, 264: 65-70.

[18] Kirmaci, U.S., Özdemir, M.E. 2004. On some inequalities for differentiable mappings and applications to special means of real numbers and to midpoint formula. Applied Mathematics and Computation, 153: 361-368.

[19] Kilbas, A.A., Srivastava, H.M., Trujillo, J.J. 2006. Theory and Applications of Fractional Differential Equations. North-Holland Mathematics Studies, 204 pp.

[20] Kirane, M., Torebek, B.T. 2016. Hermite-Hadamard, Hermite-Hadamard-Fejer, Dragomir-Agarwal and Pachpatte type inequalities for convex functions via fractional integrals, arXiv:1701.00092v1 [math.FA].

[21] Kreyszing, E., 1989. Introductory Functional Analysis with Applications, John Wiley & Sons, New York.

[22] Miheşan, V.G., 1993. A generalization of the convexity. Seminar on Functional Equations, Approximately and Convexitly, Cluj-Napoca, Romania.

[23] Mitrinović, D.S., 1970. Analytic Inequalities, Springer-Verlag, Berlin.

[24] Mitrinović, D.S., Pečarić, J.E., Fink, A.M. 1993. Classical and New Inequalities in Analysis. Kluwer Academic Publishers.

[25] Miller, S., Ross, B. 1993. An introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations. Wiley-Interscience, edition USA, 1 pp.

[26] Niculescu, C.P., Persson, L.E. 2006. Convex functions and their applications. A Contemporary Approach, springer Science+ Business Media, Inc., 255 pp.

[27] Pecaric, J.E., Proschan, F., Tong, Y.L. 1992. Convex Functions, Partial Orderings and Statistical Appl., Academic, Inc, San Diego.

[28] Raina, R.K. 2005. On generalized Wright's hypergeometric functions and fractional calculus operators. East Asian Mathematics Journal, 21(2): 191-203.

[29] Sarıkaya, M.Z., Set, E., Yaldız, H., Başak, N. 2013. Hermite-Hadamard's inequalities for fractional integrals and related fractional inequalities. Mathematics Computational Modeling, 57: 2403-2407.

[30] Samko, S.G., Kilbas, A.A., Marichev, O.I. 1993. Fractional Integrals and Derivatives Theory and Applications, Gordon and Breach, Longhorne, PA.

[31] Set, E., Çelik, B. 2016. Fractional Hermite-Hadamard type inequalities for quasi-convex functions. Ordu Universty Journal Science Techonology, 6(1): 137-149.

[32] Set, E., Çelik, B. 2017. Certain Hermite-Hadamard type inequalities associated with conformable fractional integral operators. Creative Mathematics and Informatics, 3 pp.

[33] Set, E., Korkut, N. 2017. On new fractional integral inequalities for quasi-convex functions. AIP Conference Proceedings 1833, 020052; doi: 10.1063/1.4981700.

[34] Set, E., Çelik, B., Korkut, N. 2016. On New Conformable Fractional Hermite-Hadamard type ınequalities. International Statistics Days Conference, Giresun, Turkey.

[35] Shi, D.P., Xi, B.Y., and Qi, F. 2014. Hermite-Hadamard type inequalities for Riemann-Liouville fractional integrals of (α, m)-convex functionsh. Fractional Differential Calculus, 4(1): 31-43.

[36] Toader, G., 1984. Some generalizations of the convexity. Proceedings of The Colloquium On Appraximation and Optimization. University Cluj-Napoca, 329-338.

[37] Tseng, K.L., Hwang, S.R., Dragomir, S.S. 2010. Fejer-type inequalities (I). Journal of Inequalities and Applications, Article ID 531976: 7 pp.

[38] Zhu, C., Fečkan, M., Wang, J.R. 2012. Fractional integral inequalities for differentiable convex mappings and applications to special means and a midpoint formula. Journal of Applied Mathematics, Statistics and Informatics, 8: 21-28.

[39] Wang, J., Deng, J., Fečkan, M. 2013. Hermite-Hadamard type inequalities for r-convex functions via Riemann-Liouville fractional integrals. Ukrains' kyi Matematychnyi Zhurnal, 65: 193-211.

[40] Wang, J., Li, X., Fečkan, M., Zhou, Y. 2013. Hermite-Hadamard type inequalities for Riemann-Liouville fractional integrals via two kinds of convexity. Applicable Analysis International Journal, 92: 2241-2253.

[41] Zhou, Y., 2014. Basic Theory of Fractional Differential Equations. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. Singapure.

ÖZGEÇMİŞ

Adı-Soyadı	:	Necla KORKUT
Doğum Yeri	:	ŞANLIURFA
Doğum Tarihi	:	20.10.1989
Medeni Hali	:	Bekar
Bildiği Yabancı Dil	:	İngilizce
İletişim Bilgileri	:	Ordu Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü, `neclakrkt63@gmail.com`
Lise	:	Orhan Gazi Lisesi, 2009
Lisans	:	Ordu Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü, 2011-2015
Yüksek Lisans	:	Ordu Üniversitesi 2017