T.C.
ORDU ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATRİSLERİN GRUP İNVERSLERİ VE PARÇALI MATRİSLERDE GRUP İNVERS

ERMAN OĞUZHAN ÜÇGÜL

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ORDU 2019

TEZ ONAY

Ordu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü öğrencisi Erman Oğuzhan ÜÇGÜL tarafından ve Prof. Dr. Selahattin MADEN danışmanlığında hazırlanan " Matrislerin Grup İnversleri ve Parçalı Matrislerde Grup İnvers " adlı bu tez, jürimiz tarafından 27 / 02 / 2019 tarihinde oy birliği ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Danışman	:	Prof. Dr. Selahattin MADEN	
Başkan	:	Prof. Dr. Selahattin MADEN Matematik, Ordu Üniversitesi	İmza :
Üye	:	Doç. Dr. Yıldıray ÇELİK Matematik, Ordu Üniversitesi	İmza :
Üye	:	Dr. Öğr. Üyesi Sercan TURHAN Matematik, Giresun Üniversitesi	İmza :

ONAY:

27.. /03 / 2019. tarihinde enstitüye teslim edilen bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulu'nun 29/03/2019.. tarih ve .2019. /179 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

Enstitü Müdürü

Dr. Öğr. Üyesi Mehmet Sami GÜLER

TEZ BİLDİRİMİ

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

OĞUZHAN ERMAN ÜÇGÜL

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

MATRİSLERİN GRUP İNVERSLERİ VE PARÇALI MATRİSLERDE GRUP İNVERS

Oğuzhan Erman ÜÇGÜL

Ordu Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı, 2019
Yüksek Lisans Tezi, 81s.

Danışman: Prof. Dr. Selahattin MADEN

Bu tez dört bölüm halinde düzenlenmiştir. Birinci bölümde çalışmanın amacından bahsedilerek bir giriş verilmiştir. İkinci bölümde çalışmamızda gerekli olacak temel tanım ve teoremler ifade edilmiştir. Üçüncü bölümde Grup invers kavramı verilmiş ve 2×2 tipinde blok parçalanmış matrislerin Grup inverslerinin hesaplanmasında kullanılan bazı yöntemler ortaya konulmuştur. Dördüncü bölümde sonuç ve öneriler verilmiştir.

Anahtar Sözcükler: Matris, Kare Matris, Singüler Matris, Rank, Determinant, Bir Matrisin İnversi, Genelleştirilmiş İnvers, Drazin İnvers, Grup invers, Blok Matris.

ABSTRACT

THE GROUP INVERSES OF MATRICES AND GROUP INVERSE IN PARTITIONED MATRICES

Oğuzhan Erman ÜÇGÜL

University of Ordu
Institute for Graduate Studies in Science and Technology
Department of Mathematics, 2019
MSc. Thesis, 81p.

Supervisor: Prof. Dr. Selahattin MADEN

This thesis consist of four chapters. In the first chapter, it is given an introduction and the aim of the thesis. In the second chapter, basic definitions and theorems in this thesis stated and proved. In the third chapter, it is given the concept of Group inverse and some methods are obtained for calculation of the Group inverses of two by two block matrices. It is given results and propositions in the fourth chapter.

Key Words: Matrix, Square Matrix, Singular Matrix, Rank, Determinant, Inverse of a Matrix, Generalized Inverse, Group Inverse, Drazin Inverse, Block Partitioned Matrix.

TEŞEKKÜR

Tüm çalışmalarım boyunca her zaman bilgi ve deneyimleriyle yolumu açan değerli hocam Prof. Dr. Selahattin MADEN' e içten teşekkürlerimi sunarım.

Hem bu zorlu ve uzun süreçte hem de hayatım boyunca yanımda olan ve ideallerimi gerçekleştirmemi sağlayan değerli aileme yürekten teşekkürü bir borç bilirim.

Ayrıca Lisansüstü eğitimim sırasında kendilerinden ders aldığım ve engin tecrübelerinden yararlandığım Ordu Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümündeki tüm hocalarıma teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGELER ve KISALTMALAR

$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{K}$	: K cismi
$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{K}_n^m$	: $\mathbb{K}$ cismi üzerinde tanımlı $m \times n$ tipindeki tüm matrislerin kümesi
$\mathbb{C}_n^m$	: $\mathbb{C}$ üzerinde tanımlı $m \times n$ tipindeki tüm matrislerin kümesi
I_n	: $n \times n$ tipindeki birim matris
A^{T}	: A matrisinin transpoz matrisi
$\overline{A}$	: A matrisinin eşlenik matrisi (eş matrisi)
A^*	: A matrisinin eşlenik transpoz matrisi (Hermitian matrisi)
$\vert A\vert$	: A matrisinin determinantı
$\mathrm{Ek}(A)$	: A matrisinin ek matrisi
A_{ij}	: A matrisinin bir a_{ij} elemanının kofaktörü
A^{-1}	: A matrisinin inversi
$r(A)$	: A matrisinin rankı
$\mathcal{N}(A)$	: A matrisinin null (sıfır) uzayı
$\mathcal{R}(A)$	: A matrisinin ranj (sütun) uzayı
$P_{(\mathcal{R}(A))}$	: A matrisinin $\mathcal{R}(A)$ sütun (ranj) uzayının yansıtıcısı (izdüşümü)
A^- veya $A^{(1)}$	: A matrisinin genelleştirilmiş inversi (iç inversi)
$A^{(2)}$	: A matrisinin dış inversi
A_0 veya $A^{(1,2)}$	: A matrisinin yansımalı genelleştirilmiş inversi
$A^\dagger$	: A matrisinin Moore–Penrose tipi genelleştirilmiş inversi
A^D	: A matrisinin Drazin inversi
$A^\#$	: A matrisinin Grup inversi
$ind(A)$	: A matrisinin indeksi
S	: A matrisinin genelleştirilmiş Schur complementi
$\oplus$	: Direkt toplam

1. GİRİŞ

Bir singüler matrisin inversi fikri ilk defa 1920 yılında Moore (1920, 1935) tarafından ortaya atılmıştır. Bu fikrin genel operatörlere genişletilmesi ise Tseng (1949a, 1949b, 1956) tarafından yapılmıştır. Ancak, daha sonra 1955 yılına kadar bu konuda her hangi bir sistematik çalışmaya rastlanamamaktadır. 1955 yılında, önceki çalışmalardan habersiz olarak, Penrose (1955, 1956) biraz farklı bir yoldan Moore tarafından verilen invers kavramını tekrar tanımlamıştır. Penrose ile aynı zamanlarda yaşayan bilim adamlarından birisi olan Rao (1955), bir singüler matrisin Pseudo İnversi olarak adlandırdığı, en küçük kareler teorisinde singüler matrisli normal denklemlerin çözümünde ve tahmin edicilerin varyanslarının hesaplanmasında kullanılan yeni bir invers kavramı geliştirmiştir. Rao tarafından geliştirilen Pseuda invers, Moore ve Penrose tarafından ortaya konulan kısıtlamaların tümünü sağlamamaktadır. Bu nedenle de bu invers, Moore–Penrose inversten farklıdır, fakat gözlem denklemlerinin rankları üzerinde herhangi bir kısıtlama konulmaması durumunda en küçük kareler yönteminin genel teorisinin ortaya konulmasında oldukça yararlıdır. Rao (1962), daha sonraki bir çalışmasında, lineer denklemlerle ilgili problemlerinin çözümünde yeterli olabilecek ve Moore ve Penrose' un vermiş olduğu tanımdan çok daha zayıf bir tanım ortaya koymuştur. Böyle bir invers, bir genelleştirilmiş invers (g–invers) olarak adlandırılmış ve bunun uygulamaları Rao (1961, 1965a, 1965b, 1966, 1967)' nun birçok çalışmasında yer almıştır.

Genelleştirilmiş inversler üzerinde 1955' lerden itibaren çalışan başlıca bilim adamları arasında Greville (1959), Bjerhammer (1951a, 1951b, 1958), Ben-Israel ve Charnes (1963), Chipman (1964, 1968), Chipman ve Rao (1964), Scroggs ve Odell (1966) sayılabilir. Bose (1959), "Varyans Analizi" adlı ders notlarında g–inversi kullanmıştır. Bott ve Duffin (1953) bir kare matrisin kısıtlamalı inversini tanımlamıştır ki bu invers bilinen g–inversten farklıdır ve bazı uygulamalarda kullanılır. Chernoff (1953), singüler nonnegatif tanımlı bir matrisin g–inversini göz önüne almıştır ki bu invers, bir g–invers olmamasına rağmen bazı tahmin problemlerinin incelenmesinde yararlıdır. Rao (1962) tarafından verilen daha zayıf tanımı sağlayan g–invers tek olmamakla birlikte matris cebirinde ilginç bir çalışma olarak kabul edilir. 1967 yılında bir yayınında Rao (1967), değişik amaçlarla kullanılmak üzere g–inverslerin bir sınıflandırmasını vermiştir. Bu çalışmalar daha sonra genelleştirilmiş inverslerin yeni bir sınıflandırmasını ortaya atan Mitra (1968a, 1968b), Mitra ve Bhimasankaram (1969, 1970) tarafından geliştirilmiştir. Genelleştirilmiş inverslerin diğer çeşitli uygulamaları Mitra ve Rao (1968a, 1968b, 1969) ve Rao (1968) tarafından yapılan bir dizi çalışmada ele alınmıştır.

Genelleştirilmiş inverslerin hesaplanmasındaki sistematik gelişmeler ve onların çeşitli uygulamaları *Generalized Inverse of Matrices and Its Applications* (Rao, 1964) adlı kitapta verilmiştir.

Bu çalışmada özel bir invers çeşidi olan Grup inversler ve parçalı matrislerin Grup inversleri ele alınmıştır. Literatürde $n \times n$ biçimindeki bir M matrisi için M nin Grup inversinin açık bir ifadesini elde etmede kullanılan çok önemli şartlar ortaya konulmuştur. Bu sonuçlar altında 3. kısımda parçalı bir matrisin Grup inversinin bazı ilginç açık gösterimleri ve çeşitli örnekler verilmiştir. Bu durumda verilecek sonuçlar Grup inverslerin bulunmasında oldukça kullanışlıdır.

Grup inversler singüler diferansiyel denklemlerde, fark denklemlerinde, Markov zincirlerinde, kriptolojide, tekrarlamalı metotlarda ve nümerik analizde çok çeşitli uygulamalara sahiptir.

2. GENEL BİLGİLER

2.1. Temel Kavramlar

Tanım 2.1.1 a. $\mathbb{K}$ bir cisim olsun. $m, n \in \mathbb{N}$ ve $1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j\ \leq n$ olmak üzere bütün (i, j) sıralı ikililerinin kümesi $A = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ olsun.

f: $A\ \longrightarrow\ \mathbb{K}$ fonksiyonu

$(i, j) \longrightarrow \mathrm{f}(i, j) = a_{ij}$

olarak tanımlansın. $a_{ij}\ \in \mathbb{K}$ olacak şekilde seçilen $m.n$ tane elemanın oluşturduğu

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

sayı tablosuna $\mathbb{K}$ cismi üzerinde tanımlı $m \times n$ tipinde bir matris denir.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

matrisi kısaca $A = \left[a_{ij}\right]_{m \times n}$ şeklinde gösterilir. Her $(i, j),\ 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n$ ikilisine karşılık gelen a_{ij} elemanına A matrisinin (i, j)–yinci bileşeni denir.

b. $m \times n$ tipinde olan ve bileşenleri bir $\mathbb{K}$ cismi üzerinden seçilen bütün $A = \left[a_{ij}\right]_{m \times n}$ matrislerinin kümesi $\mathbb{K}_n^m$ ile gösterilir.

c. $A = \left[a_{ij}\right]$ ve $B = \left[b_{ij}\right]$ $m \times n$ tipinde her hangi iki matris olmak üzere, her (i, j) için, $a_{ij} = b_{ij},\ 1 \leq i \leq m$ ve $1 \leq j \leq n$ ise, bu iki matrise eşit matrisler denir.

d. $A = \left[a_{ij}\right]$ $m \times n$ tipinde bir matris olmak üzere, her bir a_{ij} elemanı sıfıra eşitse A matrisine sıfır matris denir.

e. $A = \left[a_{ij}\right]$ ve $B = \left[b_{ij}\right]$ $m \times n$ tipinde iki matris olmak üzere, A ve B matrislerinin toplamı, (i, j)–yinci bileşeni $a_{ij} + b_{ij}$ olan bir matris olup,

$+\!:\ \mathbb{K}_n^m \times \mathbb{K}_n^m \longrightarrow \mathbb{K}_n^m$

$(A, B) \longrightarrow A + B = \left[a_{ij}\right] + \left[b_{ij}\right]$

$$A+B=\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}++b_{12} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlanır.

f. $c \in \mathbb{K}$ bir skaler olmak üzere $cA \in \mathbb{K}_n^m$ matrisi (i,j)–yinci bileşeni ca_{ij} olan bir matristir. Yani,

$$.: \ \mathbb{K} \times \mathbb{K}_n^m \longrightarrow \mathbb{K}_n^m$$

$$(c,A) \longrightarrow cA = \begin{bmatrix} ca_{11} & ca_{12} & \dots & ca_{1n} \\ ca_{21} & ca_{22} & \dots & ca_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ ca_{m1} & ca_{m2} & \dots & ca_{mn} \end{bmatrix}$$

olur. O halde her $A \in \mathbb{K}_n^m$ matrisi için $0 \in \mathbb{K}$ olmak üzere, $0A = 0 \in \mathbb{K}_n^m$ matrisi, $m \times n$ tipinde sıfır matristir.

g. $A = [a_{ij}] \in \mathbb{K}_p^m$ ve $B = [b_{ij}] \in \mathbb{K}_n^p$ olmak üzere, A ve B matrislerinin çarpımı $C = [c_{ij}] \in \mathbb{K}_n^m$ şeklinde bir matristir ve

$$.: \ \mathbb{K}_p^m \times \mathbb{K}_n^p \longrightarrow \mathbb{K}_n^m$$

$$(A,B) \longrightarrow A.B = C$$

$$[a_{ij}].[b_{ij}] = [c_{ij}] = \left[\textstyle\sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}\right], \ 1 \leq i \leq m, \ \ 1 \leq j \leq n$$

şeklindedir ve

$$A.B = \begin{bmatrix} (a_{11}b_{11}+\cdots+a_{1p}b_{p1}) & \dots & (a_{11}b_{1n}+\cdots+a_{1p}b_{pn}) \\ \dots & \dots & \dots \\ (a_{m1}b_{11}+\cdots+a_{mp}b_{p1}) & \dots & (a_{m1}b_{1n}+\cdots+a_{mp}b_{pn}) \end{bmatrix}$$

olarak tanımlanır. O halde matris çarpımının tanımlı olabilmesi için birinci çarpanın sütun sayısı, ikinci çarpanın satır sayısına eşit olmalıdır. Herhangi A ve B matrislerinin çarpımı $A.B$ veya AB ile gösterilir (Hacısalihoğlu H.H., 1977).

Tanım 2.1.2 a. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, reel sayılar kümesi olarak alınırsa, $\mathbb{K}$ cismi üzerinde tanımlı $m \times n$ tipindeki A matrisine bir reel matris denir.

b. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, kompleks sayılar kümesi olarak alınırsa, $\mathbb{K}$ cismi üzerinde tanımlı $m \times n$ tipindeki bir A matrisine bir kompleks matris denir (Branson R., 1999).

Tanım 2.1.3 a. Bir $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ matrisinde $m = n$ ise, A matrisine kare matris denir.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{2.3}$$

kare matrisinde $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ elemanlarına köşegen (esas köşegen) elemanları denir.

b. Bir $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ kare matrisinin $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ köşegen elemanları dışındaki tüm elemanları sıfır ise yani, $a_{ij} = 0 \ (i \neq j)$ ise bu matrise köşegen matris denir ve $A =$ Köş$\{a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}\}$ ile gösterilir.

c. Bir köşegen matriste $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn} =$ k, k $\in \mathbb{K}$ ise bu matrise skaler matris denir.

d. Köşegen üzerindeki elemanları 1 ve köşegen dışındaki elemanları 0 olan $n \times n$ tipindeki bir matrise birim matris denir ve

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

şeklinde gösterilir. Her hangi bir $A \in \mathbb{K}_n^m$ matrisi için, $I_m A = A I_n = A$ olur.

e. Bir $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ matrisinden aynı numaralı satırlar ve sütunlar kendi aralarında yer değiştirilerek elde edilen $A^T = [a_{ij}]_{n\times m}$ matrisine A matrisinin transpozu (transpoze matrisi) denir. Buna göre A ve B uygun matrisler olmak üzere,

$$(A+B)^T = A^T + B^T \text{ ve } (AB)^T = B^T A^T$$

eşitlikleri sağlanır.

f. A bir reel kare matris olmak üzere $A^T = A$ ise, A matrisine simetrik matris denir.

g. A ve B kare matrisleri arasında $AB = BA$ bağıntısı varsa, bu matrislere değişmeli (komutatif) matrisler denir (Hacısalihoğlu H.H., 1977).

Tanım 2.1.4 a. $\{1,2, \dots n\}$ kümesinin kendisi üzerine bir birebir ve örten bağıntısı veya eş değer olarak $1,2, \dots n$ sayılarının yeniden bir sıralanmasına $\{1,2, \dots n\}$ kümesinin bir σ permütasyonu denir. Böyle bir permütasyon,

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ j_1 & j_2 & \dots & j_n \end{pmatrix}$$

veya

$$\sigma = j_1, j_2, \dots, j_n \quad , \; j_i = \sigma(i)$$

ile gösterilir. Bu permütasyonların tümünün kümesi S_n ile gösterilir. S_n de gelişigüzel bir σ permütasyonu, örneğin $\sigma = j_1, j_2, \dots, j_n$ düşünüldüğünde σ da çift veya tek sayıda permütasyonlar olmasına göre σ ya çift veya tek permütasyon denir. O halde bir σ nın işareti,

$$sgn\sigma = \begin{cases} 1, & \text{eğer } \sigma \text{ çift ise} \\ -1, & \text{eğer } \sigma \text{ tek ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır ve $sgn\sigma$ ile gösterilir.

b. $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ bir $\mathbb{K}$ cismi üzerinde tanımlı kare matris olsun.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

matrisinin her satırından ve her sütunundan yalnız ve yalnız bir eleman alınmak üzere n elemanın bir çarpımı düşünülsün. Böyle bir çarpım $a_{1j_1}, a_{2j_2}, \dots, a_{nj_n}$ şeklinde yazılır. Burada çarpanlar ardışık satırlardan gelir ve bu yüzden alt indisler $1, 2, \dots, n$ doğal sayı sırasındadır. Çarpanlar farklı sütunlardan geldiğinden, ikinci alt indislerin dizisi S_n de bir $\sigma = j_1, j_2, \dots, j_n$ permütasyonunu oluşturur. Tersine, S_n deki her permütasyon yukarıdaki şekilde bir çarpım tanımlar. Böylece A matrisi bir $n!$ çarpımını kapsar.

$A = [a_{ij}]_{n\times n}$ kare matrisinin determinantı det(A) veya $|A|$ şeklinde gösterilir ve yukarıdaki her çarpanı $sgn\sigma$ ile çarpılan veya $n!$ tane çarpımların toplamıdır. Yani,

$$|A| = \sum_{\sigma} (sgn\sigma) a_{1j_1}, a_{2j_2}, \dots, a_{nj_n}$$

veya

$$|A| = \sum_{\sigma\in S_n} (sgn\sigma) a_{1\sigma(1)}, a_{2\sigma(2)}, \dots, a_{n\sigma(n)}$$

şeklinde n mertebedendir.

$A = [a_{ij}]_{n\times n}$ matrisinin determinantı aşağıdaki şekilde de tanımlanmaktadır.

c. 1×1tipinde bir A matrisinin determinantı kendisidir. $A = [a]$ ise, $\det(A) = |a| = a$ olur.

d. 2×2 tipinde bir A matrisinin determinantı aşağıdaki gibi tanımlıdır.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

olur.

$n > 2$ için bir kare matrisin determinantı, aşağıda gösterildiği gibi bir indirgeme işlemi ve minörleri ile işaretli minörleri kullanılan bir açılımla hesaplanır.

e. Bir $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ matrisinin bir a_{ij} elemanının $|M_{ij}|$ şeklinde tanımlanan minörü, A matrisinden i–yinci satırın ve *j*–yinci sütunun atılması ile oluşan $(n-1) \times (n-1)$ tipindeki kare matrisin determinantıdır.

f. Bir $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ matrisinin bir a_{ij} elemanının minörü $|M_{ij}|$ olsun. A matrisinin bir a_{ij} elemanının A_{ij} şeklinde gösterilen kofaktörü (işaretli minörü veya eş çarpanı), $A_{ij} = (-1)^{i+j}.|M_{ij}|$ şeklinde tanımlanır.

g. Bir $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ matrisinin determinantı herhangi bir satır (sütun) elemanlarının kendi kofaktörleriyle çarpılıp bu çarpanların toplanmasıyla bulunur. Yani herhangi *i* ve *j* $(i, j = 1,2,3, \ldots, n)$ için,

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}.A_{ik} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik}|M_{ik}| \quad (2.4)$$

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}.A_{kj} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{kj}|M_{ik}| \quad (2.5)$$

şeklinde tanımlanır.

Her bir i için, (2.4) ile verilen toplama, *A* matrisinin determinantının i–yinci satır elemanlarına göre açılımı, her bir *j* için, (2.5) ile verilen toplama ise *A* matrisinin determinantının *j*–yinci sütun elemanlarına göre açılımı denir.

h. Bir $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ kare matrisi için $|A| = 0$ ise, *A* matrisine singüler (tekil) matris, $|A| \neq 0$ ise, *A* matrisine nonsingüler (tekil olmayan veya regüler) matris denir (Branson R., 1999).

Tanım 2.1.5 a. Bir $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ matrisinde bir a_{ij} elemanının kofaktörü A_{ij} olsun.

$$\text{Ek}(A) = [A_{ij}]^T = [A_{ji}]$$

şeklinde tanımlanan matrise A matrisinin ek matrisi denir. Buna göre,

$$Ek(A) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

olur.

b. Bir $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ matrisi için $A.B = B.A = I_n$ olacak şekilde bir $B = [b_{ij}]_{n\times n}$ matrisi varsa, B matrisine A matrisinin inversi denir ve $A^{-1} = B$ ile gösterilir (Hacısalihoğlu H.H., 1977).

Teorem 2.1.1 Bir $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ matrisi ile bu matrisin ek matrisinin çarpımı bir skaler matris olup,

$$A.\text{Ek}(A) = \text{Ek}(A).A = |A| \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = |A| I_n \tag{2.6}$$

ile verilir. (Hacısalihoğlu H.H., 1977)

İspat: $$A.\text{Ek}(A) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} |A| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |A| & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & |A| \end{bmatrix}$$

olur ki bu matris bir skaler matristir. Benzer şekilde,

$$\text{Ek}(A).A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} |A| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |A| & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & |A| \end{bmatrix}$$

olduğu görülür. O halde,

$$A.\mathrm{Ek}(A) = \mathrm{Ek}(A).A = |A| \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = |A| I_n$$

bulunur.

Teorem 2.1.2 Bir $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ nonsingüler matrisinin inversi,

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}.\mathrm{Ek}(A) \tag{2.7}$$

dır (Hacısalihoğlu H.H., 1977).

İspat: (2.6) bağıntısından dolayı $A.\mathrm{Ek}(A) = |A|I$ olur. Bu ifadenin her iki yanı A^{-1} ile çarpıldığında,

$$(A^{-1}A).\mathrm{Ek}(A) = A^{-1}|A|I \implies \mathrm{Ek}(A) = |A|A^{-1}I \implies \mathrm{Ek}(A) = |A|A^{-1}$$

olur. Öte yandan A matrisi nonsingüler olduğundan $|A| \neq 0$ olup,

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}.\mathrm{Ek}(A)$$

elde edilir.

Teorem 2.1.3 $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ nonsingüler bir matris, B ve C çarpıma uygun matrisler olmak üzere, $AB = AC$ ise $B = C$ olur. (Hacısalihoğlu H.H.. 1977)

İspat: $AB = AC$ eşitliğinin her iki tarafı soldan A^{-1} ile çarpılmasıyla $A^{-1}AB = A^{-1}AC$ yani $B = C$ elde edilir.

Teorem 2.1.4 a. Bir $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ nonsingüler matris olsun. A^{-1} matrisi tektir.

b. A nonsingüler matris ise A^{-1} matrisi de nonsingüler olup $(A^{-1})^{-1} = A$ dır.

c. A ve B çarpmaya uygun nonsingüler matrisler ise AB matrisi de nonsingüler olup $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ dir.

d. A nonsingüler bir matris ise A^T matrisi de nonsingüler olup $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ dir (Branson R., 1999).

İspat: a. B ve C matrislerinin A matrisinin herhangi iki inversi olduğu varsayılsın. O zaman $AB = BA = I$ ve $AC = CA = I$ olur. Buradan $C = CI = C(AB) = (CA)B = IB = B$ elde edilir.

b. $(A^{-1})^{-1}$ matrisi A^{-1} matrisinin inversidir. Aynı zamanda A matrisi de A^{-1} matrisinin inversidir. Nonsingüler bir matrisin inversinin tekliğinden bu inversler birbirine eşittir.

c. $(AB)^{-1}$ matrisi AB matrisinin inversidir. Ayrıca,

$$B^{-1}A^{-1}(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I$$

ve

$$(AB)B^{-1}A^{-1} = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$$

yazılabilir. Böylece $B^{-1}A^{-1}$ matrisi de AB matrisinin inversi olur. Nonsingüler bir matrisin inversinin tekliğinden bu inversler birbirine eşittir.

d. $(A^T)^{-1}$ matrisi A^T matrisinin inversidir. Ayrıca $I^T = I$ olduğundan $I = I^T = (AA^{-1})^T = (A^{-1})^T(A)^T$ olur. Bu durum, $(A^{-1})^T$ matrisinin A^T matrisinin bir inversi olduğunu gösterir. Nonsingüler bir matrisin inversinin tekliğinden $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ elde edilir.

Tanım 2.1.6 a. Bir $A = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ matrisi için $A^2 = A$ ise, A matrisine idempotent matris denir.

b. $\mathbb{C}$ kompleks sayılar cismi üzerinde tanımlı A matrisinin elemanlarının yerlerine eşlenikleri yazılarak elde edilen matrise A matrisinin eşleniği (eş matrisi) denir ve $\overline{A}$ ile gösterilir.

c. $\mathbb{C}$ kompleks sayılar cismi üzerinde tanımlı A matrisi için $\left(\overline{A}\right)^T = A$ ise, A matrisine hermitian matris denir ve $A^* = \left(\overline{A}\right)^T$ ile gösterilir.

d. Bir A matrisi için $AA^* = A^*A$ ise A matrisine normal matris denir.

e. $A = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ nonsingüler bir matris olmak üzere, $A^{-1} = A^*$ (veya $AA^* = A^*A = I$) ise A matrisine birimsel (unitary) matris denir.

f. $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ bir matris olmak üzere, $A^{-1} = A^T$ ise A matrisine ortogonal (dik) matris denir.

g. $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ reel simetrik bir matris olmak üzere, sıfırdan farklı her $x \in \mathbb{R}_1^n$ vektörü için $x^T A x > 0$ ($x^T A x \geq 0$) ise, A matrisine Pozitif Tanımlı (Pozitif Yarı Tanımlı) Matris denir.

h. A, $n \times n$ tipinde bir kare matris olsun. $(A - \lambda I)x = 0$ eşitliğini sağlayan λ skalerine A matrisinin bir özdeğeri, sıfır olmayan x vektörüne de, A matrisinin bir özvektörü denir (Hacısalihoğlu H.H., 1977).

Teorem 2.1.5 A ve B uygun matrisler olmak üzere,

a. $\left(\overline{A}\right)^T = \overline{(A^T)}$.

b. $(A^*)^* = A$.

c. $(A + B)^* = A^* + B^*$.

d. $(AB)^* = B^* A^*$.

eşitlikleri sağlanır (Branson R., 1999).

İspat: a. $A = [a_{ij}]$ $m \times n$ tipinde bir matris olsun. Bu takdirde $\overline{A} = [\overline{a_{ij}}]$ ve $\left(\overline{A}\right)^T = [\overline{a_{ji}}]$ olur. Diğer taraftan $A^T = [a_{ji}]$ ve $\overline{(A^T)} = [\overline{a_{ji}}]$ olduğundan, $\overline{(A^T)} = \left(\overline{A}\right)^T$ olduğu görülür.

b. $A^* = \left(\overline{A}\right)^T$ olduğundan, $(A^*)^* = \left(\overline{\left(\overline{A}\right)^T}\right)^T = (A^T)^T = A$ elde edilir.

c. Hermitian matris tanımına göre,

$$(A + B)^* = \left(\overline{A + B}\right)^T = \left(\overline{A} + \overline{B}\right)^T = \left(\overline{A}\right)^T + \left(\overline{B}\right)^T = A^* + B^*$$

elde edilir.

d. Hermitian matris tanımına göre,

$$(AB)^* = \left(\overline{AB}\right)^T = \left(\overline{A}\,\overline{B}\right)^T = \left(\overline{B}\right)^T \left(\overline{A}\right)^T = B^* A^*$$

yazılabilir.

Teorem 2.1.6 Reel simetrik bir A matrisinin pozitif tanımlı (pozitif yarı tanımlı) olması için gerek ve yeter şart, tüm özdeğerlerinin (sıfırdan farklı özdeğerlerinin) pozitif olmasıdır (Hacısalihoğlu H.H., 1977).

İspat: A matrisi pozitif tanımlı olmak üzere, λ özdeğerine ve ilgili x özvektörüne sahip olsun. Bu takdirde bu x vektörü için, $Ax = \lambda x$ ve $\langle Ax, x\rangle > 0$ bağıntıları vardır. O halde $0 < \langle Ax, x\rangle = \langle \lambda x, x\rangle = \lambda\langle x, x\rangle$ olur. x bir özvektör olduğundan, sıfırdan farklıdır ve dolayısıyla $\langle x, x\rangle$ pozitiftir. Bu durumda $\lambda > 0$ olmalıdır.

A matrisi pozitif yarı tanımlı olmak üzere, λ özdeğerine ve ilgili x özvektörüne sahip olsun. Bu takdirde bu x vektörü için, $Ax = \lambda x$ ve $\langle Ax, x\rangle \geq 0$ bağıntıları vardır. O halde,

$$0 \leq \langle Ax, x\rangle = \langle \lambda x, x\rangle = \lambda\langle x, x\rangle$$

olur. x bir özvektör olduğundan, sıfırdan farklıdır ve dolayısıyla $\langle x, x\rangle$ pozitiftir. Bu durumda $\lambda \geq 0$ olmalıdır.

Tüm (sıfırdan farklı) özdeğerleri pozitif olması halinde A matrisinin pozitif tanımlı (pozitif yarı tanımlı) olacağı benzer şekilde gösterilebilir (Lanchester, P., 1969).

Tanım 2.1.7 a. $x_1, x_2, \ldots x_n$ vektörler kümesi verilmiş olsun. $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$ eşitliği ancak $a_1, a_2, \ldots, a_n$ skalerlerinin tümü birden sıfır olduğunda sağlanıyorsa bu durumda $x_1, x_2, \ldots x_n$ vektörlerine lineer bağımsızdır denir. Aksi halde yani, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ skalerlerinden en az biri sıfırdan farklı olmak üzere $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$ eşitliği sağlanıyorsa bu durumda $x_1, x_2, \ldots x_n$ vektörlerine lineer bağımlıdır denir.

b. A matrisi $m \times n$ tipinde herhangi bir matris olsun. A matrisinin sütun vektörlerini $A_{*1}, A_{*2}, \ldots, A_{*n}$ ile, ve satır vektörlerini $A_{1*}, A_{2*}, \ldots, A_{m*}$ ile gösterelim. A_{i*}, $i = 1, 2, \ldots, m$ vektörleri arasından oluşturulan en büyük lineer bağımsız vektörler kümesinin eleman sayısına A matrisinin satır rankı, A_{*j}, $j = 1, 2, \ldots, n$ vektörleri arasından oluşturulan en büyük lineer bağımsız vektörler kümesinin eleman sayısına ise A matrisinin sütun rankı denir (Hacısalihoğlu H.H., 1977).

Teorem 2.1.7 Bir matrisin iki satırının kendi aralarında yer değiştirmesi matrisin satır rankını değiştirmez (Branson R., 1999).

İspat: A matrisinin herhangi iki satırı yer değiştirdiğinde satır vektörlerinin kümesi değişmeyeceğinden, bu durum matrisin satırları arasındaki lineer bağımsızlığı değiştirmez. Yani satır rankını değiştirmez.

Teorem 2.1.8 $AX = 0$ ve $BX = 0$ denklemlerinin çözüm kümeleri aynı ise, o zaman A ve B, $n \times n$ tipindeki matrislerin sütun rankları aynıdır (Branson R., 1999).

İspat: $AX = 0$ sistemi,

$$x_1A_1 + x_2A_2 + \cdots + x_nA_n = 0 \tag{2.8}$$

olarak yazılabilir. Burada A_i, A matrisinin i-yinci sütunudur ve $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ olur. Benzer şekilde, $Bx = 0$ sistemi,

$$x_1B_1 + x_2B_2 + \cdots + x_nB_n = 0 \tag{2.9}$$

olarak yazılabilir.

A matrisinin sütun rankı a, B matrisinin sütun rankı b ile gösterilsin. A matrisinin sütun rankı, B matrisinin sütun rankından büyük kabul edilsin. Böylece $a > b$ olur. Bu durumda A matrisinin a tane lineer bağımsız sütunu olmalıdır. Genellik kaybedilmeden, bunların A matrisinin ilk a sütunu olduğu varsayılabilir. (Eğer değilse, A matrisinin sütunları bu şekilde yeniden düzenlenebilir. Bu durum ise Teorem 2.1.7' ye benzer şekilde A matrisinin sütun rankını değiştirmez.) Ancak $a > b$ kabul edildiğinden B matrisinin ilk a sütunu lineer bağımlıdır. Böylece, hepsi sıfır olmayan öyle $d_1, d_2, \dots, d_n$ vardır ki,

$$d_1B_1 + d_2B_2 + \cdots + d_aB_a = 0$$

olur. Buradan,

$$d_1B_1 + d_2B_2 + \cdots + d_aB_a + 0B_{a+1} + \cdots + 0B_n = 0$$

ve (2.9) sisteminin çözümü olarak,

$$x_1 = d_1 \quad x_2 = d_2 \quad \dots \quad x_a = d_a \quad x_{a+1} = x_{a+2} = \cdots = x_n = 0$$

bulunur. Bu aynı değerler (2.8) sisteminin de çözümü olarak verildiğinden,

$$d_1A_1 + d_2A_2 + \cdots + d_aA_a = 0$$

dır. Burada, belirtildiği gibi, $d_1, d_2, \dots, d_a$ sabitlerinin tümü sıfır değildir. Ancak bu $A_1, A_2, \dots, A_a$ matrislerinin lineer bağımlı olduğunu gösterir ki, bu da bir çelişkidir.

A ve B matrislerinin rollerini değiştirerek yapılan benzer bir çalışma, B matrisinin sütun rankının da A matrisinin sütun rankından daha büyük olamayacağını gösterir. Böylece bu iki matrisin sütun rankları eşit olmalıdır.

Teorem 2.1.9 Elemanter satır işlemleri herhangi bir matrisin sütun rankını değiştirmez (Branson R., 1999).

İspat: A matrisine elementer satır işlemleri uygulanarak elde edilen matris B olsun. Bu durumda $Ax = 0$ ve $Bx = 0$ homojen denklem sistemlerinin çözüm kümeleri aynıdır. Teorem 2.8 yardımıyla A ve B matrislerinin sütun rankları aynıdır.

Teorem 2.1.10 Herhangi bir A matrisi için satır rankı sütun rankına eşittir (Branson R., 1999).

İspat: $m \times n$ tipindeki bir A matrisinin satır rankının r ve sütun rankının ise c olduğu kabul edilsin. $r = c$ olduğu gösterilecektir. A matrisinin satırları ilk r satırı lineer bağımsız ve kalan $m - r$ satırı ilk r satırın lineer birleşimi olacak şekilde yeniden düzenlenirse, Teorem 2.1.7 ve Teorem 2.1.8 yardımıyla bu işlemin A matrisinin satır ve sütun ranklarını değiştirmediği görülür. A matrisinin satırları sırasıyla $A_1, A_2, \dots, A_m$ ile gösterilsin ve C ve D matrisleri,

$$C = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \cdots \\ A_r \end{bmatrix} \text{ ve } D = \begin{bmatrix} A_{r+1} \\ A_{r+2} \\ \cdots \\ A_m \end{bmatrix}$$

olarak tanımlansın. O zaman A matrisi $\begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix}$ bloklanmış matrisidir. Ayrıca D matrisinin her bir satırı C matrisinin satırlarının bir lineer birleşimi olduğundan, öyle bir T matrisi vardır ki, $D = TC$ olur. Özel durumda eğer,

$$A_{r+1} = d_1A_1 + d_2A_2 + \cdots + d_rA_r$$

ise, o zaman $[d_1, d_2, \dots, d_r]$ vektörü T matrisinin ilk satırıdır. Buradan, herhangi bir n boyutlu x vektörü için,

$$Ax = \begin{bmatrix} Cx \\ Dx \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Cx \\ TCx \end{bmatrix}$$

yazılabilir. Bu durumda, ancak ve ancak $Cx = 0$ ise, $Ax = 0$ olur ve Teorem 2.1.8'den dolayı A ve B matrislerinin sütun rankı c dir. Ancak B matrisinin sütunları r boyutlu vektörlerdir. Böylece B matrisinin sütun rankı r den büyük olamaz. Yani,

$$c \leq r \tag{2.10}$$

olur.

Yukarıdaki durum A^T matrisi için tekrarlanırsa, A^T matrisinin sütun rankının A^T matrisinin satır rankından büyük olamayacağı görülür. Ancak, A^T matrisinin sütunları A matrisinin satırları olduğundan bu durum A matrisinin satır rankının A matrisinin sütun rankından büyük olamayacağı anlamına gelir. Yani,

$$r \leq c \tag{2.11}$$

olur. (2.10) ve (2.11) bağıntılarından $r = c$ olduğu görülür.

Tanım 2.1.8 Herhangi bir A matrisinin rankı, satır ve sütun rankı olarak tanımlanır ve $\text{rank}(A)$ veya $r(A)$ şeklinde gösterilir (Branson R., 1999).

Teorem 2.1.11 A bir matris olmak üzere $r(A) = r(A^T)$ dir(Hacısalihoğlu H.H., 1977).

İspat: A matrisinin satırları A^T matrisinin sütunları ve A matrisinin sütunları A^T matrisinin satırları olduğundan, Teorem 2.10'dan istenilen sonuç elde edilir.

Tanım 2.1.9 $n \times n$ tipindeki bir A kare matrisi için, eğer $r(A) = n$ ise A matrisine nonsingüler (tekil olmayan) matris denir. Aksi durumda yani, $r(A) < n$ ise A matrisine singüler (tekil) matris denir (Hacısalihoğlu H.H., 1977).

Tanım 2.1.10 a. $A \in \mathbb{K}_n^m$, $m \times n$ tipinde bir matris olsun. $\mathcal{N}(A) = \{x: Ax = 0\}$ şeklinde tanımlanan kümeye A marisinin null (sıfır) uzayı denir.

b. $A \in \mathbb{K}_n^m$, $m \times n$ tipinde bir matris olsun. $\mathcal{R}(A) = \{y: Ax = y\}$ şeklinde tanımlanan kümeye A matrisinin ranj (sütun) uzayı denir (Hacısalihoğlu H.H., 1977).

Teorem 2.1.12 Eğer A, r ranklı $m \times n$ tipinde bir matris ise, bu durumda aşağıdaki şartları sağlayan nonsingüler P ve Q matrisleri vardır. I, $r \times r$ boyutlu birim matris olmak üzere,

a. $m = n = r \Longrightarrow PAQ = I$.

b. $m = r < n \Longrightarrow PAQ = [I\ ,0]$.

c. $m > r,\ n > r \Longrightarrow PAQ = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. (2.12)

İspat: Bakınız Lancaster, P., (1969).

Teorem 2.1.13 Çarpmaya uygun A ve B matrislerinin çarpımının rankı A ve B matrislerinin rankını geçemez. Yani,

$$r(AB) \leq \min\{r(A)\,,\ r(B)\} \tag{2.13}$$

dir (Lancaster, P., 1969).

İspat: AB matrisinin her bir sütunu A matrisinin sütunlarının bir lineer kombinasyonu olduğundan, AB matrisinin sütun uzayı A matrisinin sütun uzayının alt kümesi olur. Böylece $r(AB) \leq r(A)$ eşitsizliği bulunur. Benzer şekilde $r(AB) \leq r(B)$ eşitsizliği de sağlanır. Böylece $r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}$ elde edilir.

2.2. Genelleştirilmiş İnversler

Herhangi bir A matrisi bir inverse sahip olabilmesi için A matrisinin nonsingüler ve kare matris olması gerekir. Bu durumda A matrisi yardımıyla,

$$AX = B \tag{2.14}$$

lineer denklem sisteminin var olan tek çözümü $X = A^{-1}$B şeklindedir. Ayrıca, $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ şartını sağlayan ve A matrisinin inversi olarak adlandırılan A^{-1} matrisi vardır. Bununla birlikte A matrisinin kare matris olmadığı durumlarda ya da A matrisinin kare matris fakat singüler olduğu durumlarda inversi yoktur. Bu durumlarda A^{-1} matrisinin özelliklerini de içeren ve genelleştirilmiş invers (g–invers) matris adını alan yeni bir kavram sayesinde (2.14) sisteminin bir çözümü olabilir.

$\mathbb{C}_n^m$, kompleks sayılar cismi üzerinde tanımlı $m \times n$ tipindeki tüm matrislerin kümesini göstersin. Bir $A \in \mathbb{C}_n^m$ matrisi için aşağıdaki dört şartı (Moore–Penrose şartları) sağlayan bir G matrisine A matrisinin Moore–Penrose inversi denir ve A^{+} veya $A^{\dagger}$ ile gösterilir.

(i) $AGA = A$,

(ii) $GAG = G$,

(iii) $(AG)^{*} = AG$,

(iv) $(GA)^{*} = GA$. (2.15)

Eğer G matrisi sadece (i) şartını sağlıyorsa, bu G matrisine, A matrisinin bir genelleştirilmiş inversi (iç inversi) denir ve A^{-} veya $A^{(1)}$ ile gösterilir. Sadece (ii) şartını sağlayan G matrisine, A matrisinin bir dış inversi denir ve $A^{(2)}$ ile gösterilir. Hem (i) hem de (ii) şartını sağlayan G matrisine ise, A matrisinin bir yansımalı genelleştirilmiş inversi denir ve $A^{(1,2)}$ veya A_0 ile gösterilir.

Moore–Penrose şartlarından sadece (i) şartını sağlayan yani,

$$AGA = A \tag{2.16}$$

olacak şekildeki G matrisine, A matrisinin bir g–inversi (genelleştirilmiş inversi) denir.

Bir matrisin g–inversini bulmak için aşağıdaki algoritma kullanılır.

Algoritma 2.2.1 $A = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ r ranklı herhangi bir matris olsun.

1. Adım: r ranklı A matrisinde, $r \times r$ tipinde nonsingüler her hangi bir B alt matrisi seçilir.

2. Adım: Seçilen B alt matrisinin inversi bulunup bu inversin transpozu alınır.

3. Adım: A matrisinde B alt matrisinin her bir elemanına karşılık gelen yere $(B^{-1})^T$ matrisinin elemanları yerleştirilir.

4. Adım: A matrisinin diğer tüm elemanlarının yerine sıfır yazılır.

5. Adım: Elde edilen matrisin transpozu alınır. Bu matrise G denirse, G matrisi A matrisinin bir g–inversidir.

Örnek 2.2.1 Algoritma 2.2.1 3×3 tipindeki

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 5 & 0 \\ 4 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

matrisine uygulansın. A matrisi rankı 2 olan singüler bir matristir.

1. Adım: A matrisinin 2×2 tipinde bir nonsingüler $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$ alt matrisi seçilsin.

2. Adım: $|B| = 10 - (-3) = 13 \neq 0$ olduğundan B^{-1} mevcut olup,

$$B^{-1} = \frac{1}{|B|}.\mathrm{Ek}(B) = 1/13.\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/13 & -3/13 \\ 1/13 & 2/13 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Bu matrisin transpozu alınırsa,

$$(B^{-1})^T = \begin{bmatrix} 5/13 & 1/13 \\ -3/13 & 2/13 \end{bmatrix}$$

bulunur.

3. ve 4. Adımlar: Bulunan $(B^{-1})^T$ matrisi A matrisinde elemanları B alt matrisinin elemanlarının yerlerine karşılık gelecek şekilde yerleştirilir. Diğer tüm elemanları sıfır alınır. Böylece,

$$\begin{bmatrix} 5/13 & 1/13 & 0 \\ -3/13 & 2/13 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

matrisi elde edilir.

5. Adım: Bir önceki adımda bulunan matrisin transpozu alınarak,

$$G = \begin{bmatrix} 5/13 & -3/13 & 0 \\ 1/13 & 2/13 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

matrisi oluşturulur. Bu şekilde oluşturulan G matrisi A matrisinin bir g–inversidir. Gerçekten,

$$AG = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 5 & 0 \\ 4 & 6 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 5/13 & -3/13 & 0 \\ 1/13 & 2/13 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olup,

$$AGA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 5 & 0 \\ 4 & 6 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 5 & 0 \\ 4 & 6 & 2 \end{bmatrix} = A$$

olduğu görülür.

Verilen A matrisinin başka bir B alt matrisini seçerek, seçilen bu yeni B alt matrisine Algoritma 2.2.1 uygulansın.

1. Adım: A matrisinin rankı 2 olduğundan B matrisi $B = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$ şeklinde seçilsin.

2. Adım: $|B| = 10 - 0 = 10 \neq 0$ olduğundan,

$$B^{-1} = \frac{1}{|B|}.\text{Ek}(B) = 1/10. \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -6 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/5 & 0 \\ -3/5 & 1/2 \end{bmatrix}$$

bulunur. Böylece,

$$(B^{-1})^T = \begin{bmatrix} 1/5 & -3/5 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

elde edilir.

3. ve 4. Adımlar: Bu durumda,

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & -3/5 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

olur.

5. Adım: Bu şekilde bulunan matrisin transpozu alındığında,

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 \\ 0 & -3/5 & 1/2 \end{bmatrix}$$

matrisi elde edilir. Bulunan bu G matrisi A matrisinin bir g–inversi olur. Gerçekten,

$$AG = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 5 & 0 \\ 4 & 6 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 \\ 0 & -3/5 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ve

$$AGA = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 5 & 0 \\ 4 & 6 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 5 & 0 \\ 4 & 6 & 2 \end{bmatrix} = A$$

olduğu görülür.

Sonuç 2.2.1 Yukarıdaki iki seçim, bir matrisin g–inversinin tek olmadığını gösterir. Bu nedenle bir matrisin tanımlı birden çok g–inversi bulunabilir.

Örnek 2.2.2 2×3 tipindeki $E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ dikdörtgen matrisi alınsın. E matrisinin rankının 2 olacağı açıktır. Algoritma 2.2.1 E matrisine uygulansın.

1. Adım: Bu durumda M matrisi $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ olarak seçilebilir.

2. Adım: $|M| = -1 - 1 = -2 \neq 0$ olup,

$$M^{-1} = \frac{1}{|M|}.\mathrm{Ek}(M) = \frac{-1}{2}.\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

ve dolayısıyla,

$$(M^{-1})^T = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

bulunur.

3. ve 4. Adımlar: Buradan $\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \end{bmatrix}$ bulunur.

5. Adım: Bu şekilde elde edilen,

$$G = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

matrisi E matrisinin bir g–inversi olduğu gösterilebilir. Gerçekten,

$$EG = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ve

$$EGE = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = E$$

olduğu görülür.

Örnek 2.2.3 5×2 tipindeki

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \\ -2 & 1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

dikdörtgen matrisi alınsın. E matrisinin rankının 2 olacağı açıktır. Algoritma 2.2.1 E matrisine uygulansın.

1. Adım: Bu durumda M matrisi, $M = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ olarak seçilebilir.

2. Adım: $|M| = -4 - 0 = -4 \neq 0$ olup,

$$M^{-1} = \frac{1}{|M|}.\text{Ek}(M) = -1/4 . \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/4 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

ve dolayısıyla,

$$(M^{-1})^T = \begin{bmatrix} -1/2 & 0 \\ 1/4 & 1/2 \end{bmatrix}$$

bulunur.

3. ve 4. Adımlar: Buradan,

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -1/2 & 0 \\ -1/4 & 1/2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

bulunur.

5. Adım: Bu şekilde elde edilen $G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1/2 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$ matrisi, E matrisinin bir g–inversi olduğu gösterilebilir. Gerçekten,

$$EG = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \\ -2 & 1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1/2 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1/2 & 3/4 & 0 \\ 0 & 0 & -3/2 & 3/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 3/4 & 0 \end{bmatrix}$$

ve

$$EGE = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1/2 & 3/4 & 0 \\ 0 & 0 & -3/2 & 3/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 3/4 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \\ -2 & 1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \\ -2 & 1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = E$$

olduğu görülür.

Algoritma 2.2.1 rankı 1 olan matrislerin g–inversini bulmak için aşağıdaki şekilde uyarlanabilir.

Algoritma 2.2.2

1. Adım: A matrisinin sıfırdan farklı her hangi bir elemanı B olarak seçilir.

2. Adım: Seçilen bu elemanın inversi bulunur.

3. Adım: Bulunan bu invers A matrisinde karşılık gelen yere yazılır.

4. Adım: A matrisinin diğer tüm elemanlarının yerine sıfır yazılır.

Örnek 2.2.4 A matrisi, $A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ olarak alınsın. A matrisinin rankı 1 dir. Algoritma 2.2.2 A matrisine uygulansın.

1. Adım: $B = [3]$ alınsın.

2. Adım: $B^{-1} = [1/3]$ olur.

3. ve 4. Adımlar: Buradan $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{bmatrix}$ olacaktır.

5. Adım: Bu şekilde elde edilen $G = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1/3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ matrisi A matrisinin bir g–inversidir. Gerçekten,

$$AG = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1/3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ve

$$AGA = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} = A$$

olur.

Örnek 2.2.5. 3×4 tipindeki $L = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{bmatrix}$ matrisi alınsın. L matrisinin rankı 1 dir. Algoritma 2.2.2 L matrisine uygulansın.

1. Adım: $M = [8]$ seçilsin.

2. Adım: $M^{-1} = [1/8]$ olur.

3. ve 4. Adımlar: Buradan $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ elde edilir.

5. Adım: Bu şekilde elde edilen $G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/8 & 0 \end{bmatrix}$ matrisi L matrisinin bir g–inversidir. Gerçekten,

$$LG = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/8 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3/2 & 0 \end{bmatrix}$$

ve

$$LGL = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3/2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{bmatrix} = L$$

olur. L matrisi 3×4 tipinde olduğu için 3.4 = 12 tane g–inversi bulunabilir.

Sonuç 2.2.2.. Genel olarak 1 ranklı ve $m \times n$ tipindeki matrislerin m.n tane g–inversi bulunabilir. Matrisin sıfırdan farklı herhangi bir elemanının inversini alıp, diğer tüm elemanlarını sıfır aldıktan sonra elde edilen matrisin transpozu alınarak g–inversi bulunur. Eğer A matrisi,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

şeklinde 1 ranklı bir matris ise, A matrisinin,

1–ncisi; $\begin{bmatrix} (a_{11})^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$

2–ncisi; $\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ (a_{12})^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$

… … … … … … … … … … … …

(m.n)–ncisi; $\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & (a_{mn})^{-1} \end{bmatrix}$

şeklinde m.n tane g–inversi bulunabilir.

2.3. Moore–Penrose İnverslerin Varlığı

A nonsingüler matrisinin inversi olan A^{-1} matrisinin Moore–Penrose şartlarını sağlayacağı açıktır. Yani $A^{-1} = A^{+}$ olur. Bununla birlikte, eğer A bir singüler matris veya kare olmayan bir matris ise, bu durumda Moore–Penrose şartlarını sağlayan bir

A^+ matrisinin mevcut olup olmadığı ile ilgili bir soru ortaya çıkar. Bu kısımda her A matrisi için bir A^+ matrisinin var ve tek olduğu gösterilecektir. Ayrıca bu şekilde tanımlanan Moore–Penrose inversin bir takım özellikleri ifade ve ispat edilecektir.

Teorem 2.3.1 Eğer A matrisi $m \times n$ tipinde sıfır matris ise, A^+ matrisi $n \times m$ tipinde sıfır matristir (Rao ve Ark., 1971).

İspat: Açık olarak $A^+ = 0$ alındığında Moore–Penrose şartlarının sağlandığı görülür.

Teorem 2.3.2 Her A matrisi için Moore–Penrose şartlarını sağlayan bir A^+ matrisi vardır (Rao ve Ark., 1971).

İspat: Eğer $A = 0$ ise, $A^+ = 0$ olduğu açıktır. $A \neq 0$ olsun. A matrisinin r ranklı olduğu kabul edilsin. Bu durumda A matrisi,

$$A = BC \tag{2.17}$$

şeklinde parçalanabilir. Burada B matrisi $m \times r$ tipinde $r > 0$ ranklı ve C matrisi $r \times n$ tipinde $r > 0$ ranklı matrisler olup, B^*B ve CC^* çarpımlarının her ikisi de nonsingülerdir. Bu durumda eğer A^+ matrisi,

$$A^+ = C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^* \tag{2.18}$$

olarak alınırsa, A^+ matrisi Moore–Penrose şartlarını sağlar. Gerçekten,

(i) $AA^+A = (BC)C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^*(BC)$

$= B(CC^*)(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}(B^*B)C = BC = A,$

(ii) $A^+AA^+ = C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^*(BC)C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^*$

$= C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}(B^*B)(CC^*)(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^*$

$= C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^* = A^+,$

(iii) $(AA^+)^* = [(BC)C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^*]^* = B(B^*B)^{-1}(CC^*)^{-1}(CC^*)B^*$

$= B(B^*B)^{-1}B^* = B(CC^*)(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^*$

$= (BC)C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^* = AA^+,$

(iv) $(A^+A)^* = [C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^*(BC)]^*$

$= C^*(B^*B)(B^*B)^{-1}(CC^*)^{-1}C$

$$= C^*(CC^*)^{-1}C$$

$$= C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}(B^*B)C$$

$$= C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^*(BC) = A^+A$$

olduğu görülür.

Teorem 2.3.3 Herhangi bir A matrisi için, Moore–Penrose şartlarını sağlayan bir tek A^+ matrisi vardır. Yani, her A matrisinin bir tek Moore–Penrose inversi vardır (Rao ve Ark., 1971).

İspat: A matrisinin Moore–Penrose şartlarını sağlayan herhangi iki Moore–Penrose inversi A_1^+ ve A_2^+ olsun. Bu durumda,

$$A_1^+ = A_1^+AA_1^+ = A_1^+(AA_1^+)^* = A_1^+(A_1^+)^*A^* = A_1^+(A_1^+)^*(AA_2^+A)^*$$

$$= A_1^+(A_1^+)^*A^*(A_2^+)^*A^* = A_1^+(AA_1^+)^*(AA_2^+)^* = A_1^+AA_1^+AA_2^+ = A_1^+AA_2^+$$

$$= A_1^+A(A_2^+AA_2^+) = (A_1^+A)^*(A_2^+A)^*A_2^+ = A^*(A_1^+)^*A^*(A_2^+)^*A_2^+$$

$$= (AA_1^+A)^*(A_2^+)^*A_2^+ = A^*(A_2^+)^*A_2^+ = (A_2^+A)^*A_2^+ = A_2^+AA_2^+ = A_2^+$$

olduğundan $A_1^+ = A_2^+$ olur. Yani, A^+ matrisi tektir.

Teorem 2.3.4 $m \times n$ tipindeki bir A matrisinin bir Moore–Penrose inversi varsa $n \times m$ tipindedir (Rao ve Ark., 1971).

İspat: AA^+ matrisinin simetrik ve dolayısıyla kare olması gerçeğinden ispat görülür.

Teorem 2.3.5 a. $m \times n$ tipindeki bir $A = [a_{ij}]$ matrisinin tüm elemanları 1 ise bu takdirde, $A^+ = \frac{1}{m.n}A^*$ dir.

b. a, $n \times 1$ tipinde ve $a \neq 0$ olan bir sütun vektörü ise, bu durumda a^+, $a^+ = (a^*a)^{-1}a^*$ şeklindedir.

c. a, $1 \times n$ tipinde ve $a \neq 0$ olan bir satır vektörü ise, bu durumda a^+, $a^+ = a^*(aa^*)^{-1}$ şeklindedir (Rao ve Ark., 1971).

İspat: a. İspat için teoremde verilen A^+ matrisinin Moore–Penrose şartlarını sağladığını göstermek yeterlidir. Bu durumda,

(i) $AA^+A = A\left(\frac{1}{m.n}A^*\right)A = A\frac{1}{m.n}(A^*A) = A.\frac{1}{m.n}.m.n = A,$

(ii) $A^{+}AA^{+} = \left(\frac{1}{m.n}A^{*}\right)A\left(\frac{1}{m.n}A^{*}\right) = \frac{1}{m.n}(A^{*}A)\left(\frac{1}{m.n}A^{*}\right) = \frac{1}{m.n}.m.n.\left(\frac{1}{m.n}A^{*}\right)$

$= \left(\frac{1}{m.n}A^{*}\right) = A^{+},$

(iii) $(AA^{+})^{*} = \left(A\frac{1}{m.n}A^{*}\right)^{*} = A\frac{1}{m.n}A^{*} = AA^{+},$

(iv) $(A^{+}A)^{*} = \left(\frac{1}{m.n}A^{*}A\right)^{*} = \frac{1}{m.n}A^{*}A = A^{+}A$

olduğu görülür.

b. a^{+} matrisi Moore–Penrose şartlarını sağlar. Gerçekten,

(i) $aa^{+}a = a(a^{*}a)^{-1}a^{*}a = a(a^{*}a)^{-1}(a^{*}a) = a,$

(ii) $a^{+}aa^{+} = (a^{*}a)^{-1}a^{*}a(a^{*}a)^{-1}a^{*} = (a^{*}a)^{-1}(a^{*}a)(a^{*}a)^{-1}a^{*}$

$= (a^{*}a)^{-1}a^{*} = a^{+},$

(iii) $(aa^{+})^{*} = [a(a^{*}a)^{-1}a^{*}]^{*} = a(a^{*}a)^{-1}a^{*} = aa^{+},$

(iv) $(a^{+}a)^{*} = [(a^{*}a)^{-1}a^{*}a]^{*} = (a^{*}a)^{-1}a^{*}a = a^{+}a$

olduğu görülür.

c. a^{+} matrisi Moore–Penrose şartlarını sağlar. Gerçekten,

(i) $aa^{+}a = aa^{*}(aa^{*})^{-1}a = (aa^{*})(aa^{*})^{-1}a = a,$

(ii) $a^{+}aa^{+} = a^{*}(aa^{*})^{-1}aa^{*}(aa^{*})^{-1} = a^{*}(aa^{*})^{-1}(aa^{*})(aa^{*})^{-1}$

$= a^{*}(aa^{*})^{-1} = a^{+},$

(iii) $(aa^{+})^{*} = [aa^{*}(aa^{*})^{-1}]^{*} = aa^{*}(aa^{*})^{-1} = aa^{+},$

(iv) $(a^{+}a)^{*} = [a^{*}(aa^{*})^{-1}a]^{*} = a^{*}(aa^{*})^{-1}a = a^{+}a$

olduğu görülür.

Örnek 2.3.1 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ matrisi verilmiş olsun. $m = 2,\ n = 3$ ve $A^{*} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

olarak alınırsa,

$$A^{+} = \frac{1}{m.n}A^{*} = \frac{1}{2.3}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 \end{bmatrix}$$

matrisi Moore–Penrose şartlarını sağlar. Gerçekten,

(i) $AA^{+}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}1/6 & 1/6\\ 1/6 & 1/6\\ 1/6 & 1/6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1/2 & 1/2\\ 1/2 & 1/2\end{bmatrix}$

$AA^{+}A=\begin{bmatrix}1/2 & 1/2\\ 1/2 & 1/2\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}=A,$

(ii) $A^{+}A=\begin{bmatrix}1/6 & 1/6\\ 1/6 & 1/6\\ 1/6 & 1/6\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1/3 & 1/3 & 1/3\\ 1/3 & 1/3 & 1/3\\ 1/3 & 1/3 & 1/3\end{bmatrix}$

$A^{+}AA^{+}=\begin{bmatrix}1/3 & 1/3 & 1/3\\ 1/3 & 1/3 & 1/3\\ 1/3 & 1/3 & 1/3\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}1/6 & 1/6\\ 1/6 & 1/6\\ 1/6 & 1/6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1/6 & 1/6\\ 1/6 & 1/6\\ 1/6 & 1/6\end{bmatrix}=A^{+},$

(iii) $(AA^{+})^{*}=\begin{bmatrix}1/2 & 1/2\\ 1/2 & 1/2\end{bmatrix}^{*}=\begin{bmatrix}1/2 & 1/2\\ 1/2 & 1/2\end{bmatrix}=AA^{+},$

(iv) $(A^{+}A)^{*}=\begin{bmatrix}1/3 & 1/3 & 1/3\\ 1/3 & 1/3 & 1/3\\ 1/3 & 1/3 & 1/3\end{bmatrix}^{*}=\begin{bmatrix}1/3 & 1/3 & 1/3\\ 1/3 & 1/3 & 1/3\\ 1/3 & 1/3 & 1/3\end{bmatrix}=A^{+}A$

olduğu görülür.

Örnek 2.3.2 $a=\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}$ olsun. Bu durumda,

$$a^{+}=(a^{*}a)^{-1}a^{*}=\left(\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}\right)^{-1}.\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}$$

$$=[5]^{-1}.\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}=[1/5].\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1/5 & 2/5\end{bmatrix}$$

matrisi Moore–Penrose şartlarını sağlar. Gerçekten,

(i) $aa^{+}=\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}1/5 & 2/5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1/5 & 2/5\\ 2/5 & 4/5\end{bmatrix}$

$aa^{+}a=\begin{bmatrix}1/5 & 2/5\\ 2/5 & 4/5\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}=a,$

(ii) $a^{+}a=\begin{bmatrix}1/5 & 2/5\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}=[1]$

$a^{+}aa^{+}=[1].\begin{bmatrix}1/5 & 2/5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1/5 & 2/5\end{bmatrix}=a^{+},$

(iii) $(aa^{+})^{*}=\begin{bmatrix}1/5 & 2/5\\ 2/5 & 4/5\end{bmatrix}^{*}=\begin{bmatrix}1/5 & 2/5\\ 2/5 & 4/5\end{bmatrix}=aa^{+},$

(iv) $(a^+a)^* = [1]^* = [1] = a^+a$

olduğu görülür.

Örnek 2.3.3 a $= [1 \quad 2 \quad 1]$ alınırsa,

$$a^+ = a^*(aa^*)^{-1} = \begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}.\left([1 \quad 2 \quad 1].\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}\right)^{-1} = \begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}.[6]^{-1} = \begin{bmatrix}1/6\\1/3\\1/6\end{bmatrix}$$

matrisi Moore–Penrose şartlarını sağlar. Gerçekten,

(i) $aa^+ = [1 \quad 2 \quad 1].\begin{bmatrix}1/6\\1/3\\1/6\end{bmatrix} = [1]$

$aa^+a = [1].[1 \quad 2 \quad 1] = [1 \quad 2 \quad 1] = a,$

(ii) $a^+a = \begin{bmatrix}1/6\\1/3\\1/6\end{bmatrix}.[1 \quad 2 \quad 1] = \begin{bmatrix}1/6 & 1/3 & 1/6\\1/3 & 2/3 & 1/3\\1/6 & 1/3 & 1/6\end{bmatrix}$

$a^+aa^+ = \begin{bmatrix}1/6 & 1/3 & 1/6\\1/3 & 2/3 & 1/3\\1/6 & 1/3 & 1/6\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}1/6\\1/3\\1/6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1/6\\1/3\\1/6\end{bmatrix} = a^+,$

(iii) $(aa^+)^* = [1]^* = [1] = aa^+,$

(iv) $(a^+a)^* = \begin{bmatrix}1/6 & 1/3 & 1/6\\1/3 & 2/3 & 1/3\\1/6 & 1/3 & 1/6\end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix}1/6 & 1/3 & 1/6\\1/3 & 2/3 & 1/3\\1/6 & 1/3 & 1/6\end{bmatrix} = a^+a$

olduğu görülür.

Teorem 2.3.6 A herhangi bir matris olmak üzere,

$$(A^*)^+ = (A^+)^* \tag{2.19}$$

eşitliği geçerlidir (Rao ve Ark., 1971).

İspat: (2.17) bağıntısındaki gibi $A = BC$ olsun. $A^* = C^*B^*$ olduğundan,

$$A^+ = C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^*$$

alınırsa,

$$(A^+)^* = B(B^*B)^{-1}(CC^*)^{-1}C \tag{2.20}$$

olur ki, bu da A^* matrisinin Moore–Penrose inversidir. Gerçekten,

(i) $A^*(A^*)^+A^* = C^*B^*B(B^*B)^{-1}(CC^*)^{-1}CC^*B^* = C^*B^* = A^*$,

(ii) $(A^*)^+A^*(A^*)^+ = B(B^*B)^{-1}(CC^*)^{-1}CC^*B^*B(B^*B)^{-1}(CC^*)^{-1}C$

$= B(B^*B)^{-1}(CC^*)^{-1}C = (A^*)^+$,

(iii) $[A^*(A^*)^+]^* = [(C^*B^*)B(B^*B)^{-1}(CC^*)^{-1}C]^* = [C^*(CC^*)^{-1}C]^*$

$= C^*(CC^*)^{-1}C = C^*(B^*B)(B^*B)^{-1}(CC^*)^{-1}C = A^*(A^*)^+$,

(iv) $[(A^*)^+A^*]^* = [B(B^*B)^{-1}(CC^*)^{-1}C(C^*B^*)]^* = [B(B^*B)^{-1}B^*]^*$

$= B(B^*B)^{-1}B^* = B(B^*B)^{-1}(CC^*)^{-1}(CC^*)B^* = (A^*)^+A^*$

olur. Böylece,

$$(A^*)^+ = B(B^*B)^{-1}(CC^*)^{-1}C \tag{2.21}$$

elde edilir. (2.20) ve (2.21) bağıntılarından ve bir matrisin Moore–Penrose inversi varsa tek olacağından dolayı, $(A^*)^+ = (A^+)^*$ olduğu görülür.

Teorem 2.3.7 Bir matrisin Moore–Penrose inversinin Moore–Penrose inversi matrisin kendisine eşittir. Yani, herhangi bir A matrisi için, $(A^+)^+ = A$ olur (Rao ve Ark., 1971).

İspat: Moore–Penrose invers tanımından,

(i) $A^+(A^+)^+A^+ = A^+AA^+ = A^+$,

(ii) $(A^+)^+A^+(A^+)^+ = AA^+A = A = (A^+)^+$,

(iii) $[A^+(A^+)^+]^* = [A^+A]^* = A^+A = A^+(A^+)^+$,

(iv) $[(A^+)^+A^+]^* = [AA^+]^* = AA^+ = (A^+)^+A +^\dagger$

olduğu görülür.

Teorem 2.3.8 A matrisinin Moore–Penrose inversinin rankı A matrisinin rankına eşittir. Yani,

$$r(A) = r(A^+) \tag{2.22}$$

dır (Rao ve Ark., 1971).

İspat: Teorem 2.1.13 $AA^+A = A$ Moore–Penrose şartına uygulandığında,

$$r(A) = r(AA^+A) \leq \min\{r(A),\ r(A^+)\} \leq r(A^+) \tag{2.23}$$

elde edilir. Benzer şekilde, Teorem 2.13 $A^+AA^+ = A^+$ Moore–Penrose şartına uygulanırsa,

$$r(A^+) = r(A^+AA^+) \leq \min\{r(A),\ r(A^+)\} \leq r(A) \qquad (2.24)$$

elde edilir. (2.23) ve (2.24) bağıntılarından dolayı (2.22) bağıntısı sağlanır.

Sonuç 2.3.1 A matrisinin rankı r ise, $A^+, AA^+, A^+A, AA^+A, A^+AA^+$ matrislerinin her birinin rankı da r dir.

Teorem 2.3.9 A simetrik ve idempotent matris ise, $A^+ = A$ olur (Rao ve Ark., 1971).

İspat: Moore–Penrose invers tanımından,

(i) $AA^+A = AAA = A^2A = AA = A^2 = A$,

(ii) $A^+AA^+ = AAA = A^2A = AA = A^2 = A = A^+$,

(iii) $[AA^+]^* = [AA]^* = [A^2]^* = A^* = A = A^2 = AA = AA^+$,

(iv) $[A^+A]^* = [AA]^* = [A^2]^* = A^* = A = A^2 = AA = A^+A$

olduğu görülür.

Teorem 2.3.10 $B = \text{Köş}\{\mathrm{b}_{11}, \mathrm{b}_{22}, \dots, \mathrm{b}_{nn}\}$ ise, B matrisinin Moore–Penrose inversi B^+, i–yinci satırı ve i–yinci sütununda yer alan köşegen elemanı $\mathrm{b}_{ii} \neq 0$ ise b_{ii}^{-1} ve $\mathrm{b}_{ii} = 0$ ise "0" olan bir köşegen matristir (Rao ve Ark., 1971).

İspat: B^+ matrisinin Moore–Penrose şartlarını sağladığı açıkça görülür.

Örnek 2.3.4 $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ şeklinde verilen D matrisinin Moore–Penrose inversi,

$$D^+ = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

matrisidir. Gerçekten,

$$DD^{+} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ve

$$DD^{+}D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = D$$

olduğu görülür.

Teorem 2.3.11 a. A, $m \times n$ tipinde tam satır ranklı bir matris ise, bu durumda $A^{+} = A^{*}(AA^{*})^{-1}$ ve $AA^{+} = I_m$ olur.

b. A, $m \times n$ tipinde tam sütun ranklı bir matris ise, bu durumda $A^{+} = (A^{*}A)^{-1}A^{*}$ ve $A^{+}A = I_n$ olur (Rao ve Ark., 1971).

İspat: Teoremde verilen A^{+} matrislerinin Moore–Penrose şartlarını sağladığını göstermek yeterlidir. Buna göre,

a. (i) $AA^{+}A = AA^{*}(AA^{*})^{-1}A = (AA^{*})(AA^{*})^{-1}A = A$,

(ii) $A^{+}AA^{+} = A^{*}(AA^{*})^{-1}AA^{*}(AA^{*})^{-1} = A^{*}(AA^{*})^{-1}(AA^{*})(AA^{*})^{-1}$

$= A^{*}(AA^{*})^{-1} = A^{+}$,

(iii) $(AA^{+})^{*} = (AA^{*}(AA^{*})^{-1})^{*} = ((AA^{*})(AA^{*})^{-1})^{*} = I^{*} = I$

$= (AA^{*})(AA^{*})^{-1} = AA^{*}(AA^{*})^{-1} = AA^{+}$,

(iv) $(A^{+}A)^{*} = (A^{*}(AA^{*})^{-1}A)^{*} = A^{*}(AA^{*})^{-1}A = A^{+}A$

olduğu görülür. Benzer şekilde,

b. (i) $AA^{+}A = A(A^{*}A)^{-1}A^{*}A = A(A^{*}A)^{-1}(A^{*}A) = A$,

(ii) $A^{+}AA^{+} = (A^{*}A)^{-1}A^{*}A(A^{*}A)^{-1}A^{*} = (A^{*}A)^{-1}(A^{*}A)(A^{*}A)^{-1}A^{*}$

$= (A^{*}A)^{-1}A^{*} = A^{+}$,

(iii) $(AA^{+})^{*} = (A(A^{*}A)^{-1}A^{*})^{*} = A(A^{*}A)^{-1}A^{*} = AA^{+}$,

(iv) $(A^{+}A)^{*} = ((A^{*}A)^{-1}A^{*}A)^{*} = ((A^{*}A)^{-1}(A^{*}A))^{*} = I^{*} = I$

$$= (A^*A)^{-1}(A^*A) = (A^*A)^{-1}A^*A = A^+A$$

olduğu görülür.

Örnek 2.3.5 2×3 tipindeki bir $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ matrisi alındığında $\text{rank}\,(A) = 2$ olduğu açıktır. Yani, A tam satır ranklı bir matristir. O halde Teorem 2.3.11 a)'dan dolayı,

$$A^+ = A^*(AA^*)^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} . \left(\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \right)^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 9 & 7 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 9/5 & 7/5 \\ 7/5 & 6/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 16/5 & 13/5 \\ 32/5 & 26/5 \end{bmatrix}$$

olur.

Örnek 2.3.6 3×2 tipinde bir $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ matrisi verilmiş olsun. Bu durumda, $\text{rank}(A) = 2$ olduğu açıktır. Yani, A tam sütun ranklı bir matristir. O halde,

$$A^+ = (A^*A)^{-1}A^* = \left(\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} . \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}^{-1} . \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7/3 & 2 & 4/3 \\ 8/9 & 2/3 & 5/9 \end{bmatrix}$$

olduğu görülür.

Teorem 2.3.12 $B \neq 0$ ve $C \neq 0$ matrisleri sırasıyla $m \times r$ ve $r \times n$ tipinde matrisler, r ranklı olsun. Bu durumda,

$$(BC)^+ = C^+B^+ \tag{2.25}$$

eşitliği gerçeklenir (Rao ve Ark., 1971).

İspat: Teorem 2.3.11'e göre $C^+ = C^*(CC^*)^{-1}$ ve $B^+ = (BB^*)^{-1}B^*$ olur ve buradan, $C^+B^+ = C^*(CC^*)^{-1}(BB^*)^{-1}B^*$ elde edilir. Bu değer zaten $(BC)^+$ matrisidir. O halde, $C^+B^+ = (BC)^+$ olduğu görülür.

3. GRUP İNVERS VE BLOK MATRİSLERİN GRUP İNVERSİ

3.1. Bir Kare Matrisin Grup İnversi

Tanım 3.1.1 A nxn tipinde reel veya kompleks bir kare matris olsun. Bu durumda $r(A^{k+1}) = r(A^k)$ koşulunu sağlayan en küçük k pozitif tamsayısına, A matrisinin indeksi denir ve $ind(A)$ ile gösterilir. Eğer $A \in \mathbb{C}^{nxn}$ matrisi için $ind(A) = k$ ise,

$$A^{k+1}X = A^k \text{ , } XAX = X, AX = XA$$

koşullarını sağlayan bir ve yalnız bir tek $X \in \mathbb{C}^{nxn}$ matrisi vardır. Bu X matrisine, A matrisinin Drazin inversi denir ve $X = A^D$ ile gösterilir. Özel olarak $ind(A) \leq 1$ olduğunda A^D matrisine, A matrisin grup inversi adı verilir. Başka bir deyişle, herhangi bir A kare matrisi için

$$AXA = A, XAX = X, AX = XA$$

matris denklemlerini sağlayan X matrisine A matrisin grup inversi denir ve $A^\#$ ile gösterilir. Açıkça görülmektedir ki, $ind(A) = 0$ olması için gerek ve yeter koşul A nın nonsingüler olmasıdır. Bu durumda $A^\# = A^{-1}$ yazılır. Bu çalışma boyunca birim matrisi ve bir A matrisinin transpozunu sırasıyla I ve A^T ile göstereceğiz. I uygun boyutta birim matris olmak üzere A matrisinin grup inversi için $A^\pi = I - AA^\#$ ile $\mathcal{N}(A)$ üzerindeki $\mathcal{R}(A)$ boyunca izdüşümü göstereceğiz.

Bu kısımda, grup inversin varlığı ile ilgili bazı Lemmalar ifade edilerek verilen bir matrisin grup inversi için bazı formlar verilecektir. Aksi belirtilmedikçe ele alınan matrisler bir cisim üzerinde tanımlı olacaktır.

Lemma 3.1.1 A nonsingüler bir matris olmak üzere,

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ D & C \end{pmatrix}$$

olsun. Bu takdirde $r(A) = r(M)$ olması için gerek ve yeter koşul $D = CA^{-1}B$ olmasıdır (Zhang ve Ark., 2012).

Lemma 3.1.2 $A \in K^{mxm}$ keyfi bir kare matris olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktir (Zhang ve Ark., 2012):

(i) $A^\#$ mevcuttur.

(ii) $r(A) = r(A^2)$ ve A^2 matrisi regülerdir.

(iii) $r(A) = r(A^3)$ ve A^3 matrisi regülerdir.

(iv) A matrisi bir $B \in K^{mxm}$ matrisi için ABA formunda bir $\{1\}$ −inverse sahiptir.

Lemma 3.1.3 $A \in K^{mxm}$ keyfi bir kare matris olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktir (Zhang ve Ark., 2012):

(i) $A^{\#}$ mevcuttur.

(ii) Bir $X \in K^{mxm}$ matrisi için $A^2X = A$ dir, bu durumda, $A^{\#} = AX^2$ olur.
(iii) Bir $Y \in K^{mxm}$ matrisi için $YA^2 = A$ dir, bu durumda, $A^{\#} = X^2A$ olur.

Lemma 3.1.4 $A \in K^{mxm}$ keyfi bir kare matris olsun. Bu takdirde $A^{\#}$ grup inversinin mevcut olması için gerek ve yeter koşul

$$A = P\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}P^{-1} \text{ and } A^{\#} = P\begin{bmatrix} {A_1}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}P^{-1},$$

olacak şekilde singüler olmayan $P \in K^{mxm}$ ve $A_1 \in K^{rxr}$ matrislerinin mevcut olmasıdır, burada $r(A) = r$ dir (Zhang ve Ark., 2012).

Lemma 3.1.5 $A = P\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A_1 \end{bmatrix}Q \in K^{mxm}$ olmak üzere $P, Q \in K^{mxm}$ ve $A_1 \in K^{rxr}$ matrisleri tersinir ve $r(A) = r$ olsun. Bu takdirde $X_1 \in K^{rxr}$, $X_2 \in K^{rx(m-r)}$ ve $X_3 \in K^{(m-r)xr}$ keyfi matrisler olmak üzere

$$A^{(1)} = Q^{-1}\begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & {A_1}^{-1} \end{bmatrix}P^{-1},$$

dir (Bu ve Ark., 2009).

Lemma 3.1.6 $A \in K^{mxn}$ ve $B \in K^{nxm}$ olsun. Eğer $r(A) = r(BA)$ ve $r(B) = r(AB)$ ise bu takdirded AB ve BA matris çarpımlarının her ikisinin de grup inversi mevcuttur (Zhang ve Ark., 2012).

İspat: Lemmanın ispatını $A \neq 0$ varsayımı altında vermek yeterlidir. Bu durumda A matrisinin

$$A = P\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}Q$$

formunda yazılabildiğini varsayalım, burada $P \in K^{mxm}$ ve $Q \in K^{nxn}$ matrisleri tersinir ve $r(A) = r(I)$ dır. Öte yandan B_1 matrisi I matrisiyle aynı boyutlu olmak üzere

$$B = Q^{-1} \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{bmatrix} P^{-1},$$

matrisini göz önüne alalım. Bu takdirde

$$AB = P \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1} \text{ ve } BA = Q^{-1} \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ B_3 & 0 \end{bmatrix} Q$$

olduğu kolayca görülür. $r(A) = r(BA)$ olduğundan $\begin{bmatrix} B_1 \\ B_3 \end{bmatrix}$ matris tam sütun ranklı bir matristir. Üstelik $r(AB) = r(AB)$ olduğundan $YB_1 = B_3$ ve $YB_2 = B_4$ olacak şekilde uygun boyutlu bir Y matrisi mevcuttur. Dolayısıyla $r\begin{pmatrix} B_1 \\ B_3 \end{pmatrix} = r(B_1)$ olacaktır. Böylece B_1 matrisi de tersinirdir ve

$$AB = P \begin{bmatrix} I & -B_1{}^{-1}B_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \left(P \begin{bmatrix} I & -B_1{}^{-1}B_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right)^{-1}$$

ve

$$BA = Q^{-1} \begin{bmatrix} I & 0 \\ B_3B_1{}^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \left(Q^{-1} \begin{bmatrix} I & 0 \\ B_3B_1{}^{-1} & I \end{bmatrix} \right)^{-1}$$

eşitlikleri yazılabilir. Bu takdirde AB ve BA matrislerinin her ikisi de $\begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ matrisiyle benzer matrislerdir. Böylece AB ve BA matrislerinin her ikisi de grup tersinir matrislerdir.

Lemma 3.1.7 $A, B \in K^{mxm}$ olsun. Eğer $r(A) = r(BA) = r(B) = r(AB)$ ise bu takdirde aşağıdaki ifadeler sağlanır (Zhang ve Ark., 2012:

(i) $(AB)^{\#}A = A(BA)^{\#}$,

(ii) $(BA)^{\#}B = B(AB)^{\#}$,

(iii) $B(AB)^{\pi} = 0$,

(iv) $(AB)^{\pi}A = 0$.

Lemma 3.1.8 $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \in K^{mxm}$ bir matris olmak üzere $A \in K^{nxn}$ matrisi tersinir ve $S = D - CA^{-1}B$ olsun. Eğer $S^{\#}$ mevcut, $S^{\pi} = I_{m-n} - SS^{\#}$ ve $R = A^2 + BS^{\pi}C$ matrisi tersinir ise bu takdirde aşağıdaki ifadeler sağlanır (Zhang ve Ark., 2012):

(i) $CAR^{-1} = CA^{-1} - DS^{\pi}CR^{-1}$,

(ii) $R^{-1}AB = A^{-1}B - R^{-1}BS^{\pi}D$.

İspat: Kolayca gösterilebilir ki

$$CA^{-1} = CA^{-1}I_n = CA^{-1}(A^2R^{-1} + BS^{\pi}CR^{-1}) = CAR^{-1} + (D - S)S^{\pi}CR^{-1}$$

ve

$$CA^{-1} = CA^{-1}I_n = CA^{-1}(A^2R^{-1} + BS^{\pi}CR^{-1}) = CAR^{-1} + (D - S)S^{\pi}CR^{-1}$$

olup iddia doğrudur.

Lemma 3.1.9 $A \in K^{mxm}$ bir matris olsun. Bu takdirde

$$I_m - AA^{(1)} = P\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{m-r} \end{bmatrix}P^{-1} \text{ and } I_m - A^{(1)}A = Q^{-1}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{m-r} \end{bmatrix}Q\ ,$$

olacak şekilde tersinir $P, Q \in K^{mxm}$ matrisleri mevcuttur, burada $r(A) = r$ ve $A^{(1)}$ matrisi A matrisinin bir $\{1\}-$inversidir, yani $A^{(1)} \in K^{mxm}$ matrisi $AA^{(1)}A = A$ matris eşitliğini sağlayan bir matristir. Verilen bir A matrisinin tüm $\{1\}-$inverslerinin sınıfını $A\{1\}$ ile göstereceğiz.

Lemma 3.1.10 $A, B, C \in K^{mxm}$, B tersinir bir matris olmak üzere $C^{(1)} \in C\{1\}$ ve $Z^{(1)} \in Z\{1\}$ matrisleri için $Z = (I_m - CC^{(1)})B^{-1}A(I_n - C^{(1)}C)$ ve $\Delta = (I_m - C^{(1)}C)Z^{(1)}(I_m - CC^{(1)})$ olsun. Bu durumda eğer $r(Z) = m - r(C)$ ise bu takdirde aşağıdaki ifadeler sağlanır (Bu ve Ark., 2009):

(i) $(I_m - \Delta B^{-1}A)C^{(1)}C = I_m - \Delta B^{-1}A$

(ii) $CC^{(1)}(I_m - BA^{-1}\Delta) = I_m - BA^{-1}\Delta$,

(iii) $(I_m - \Delta B^{-1}A)\Delta = \Delta(I_m - B^{-1}A\Delta) = 0$,

(iv) $(I_m - \Delta B^{-1}A)^2 = I_m - \Delta B^{-1}A$,

(v) $(I_m - B^{-1}A\Delta)^2 = I_m - B^{-1}A\Delta$.

İspat: $r(C) = r$ olduğunu varsayalım. Bu takdirde Lemma 3.1.8 e göre

$$I_m - CC^{(1)} = P\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{m-r} \end{bmatrix} P^{-1} \text{ and } I_m - C^{(1)}C = Q^{-1}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{m-r} \end{bmatrix} Q\,,$$

olacak şekilde tersinin $P, Q \in K^{mxm}$ matrisleri mevcuttur ve dolayısıyla

$$CC^{(1)} = P\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1} \text{ and } C^{(1)}C = Q^{-1}\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q$$

yazılabilir. Farzedelim ki $B^{-1}A = P\begin{bmatrix} X & Y \\ U & V \end{bmatrix} Q,\ U \in K^{(m-r)xr},\ V \in K^{(m-r)x(m-r)}$ ve $Y \in K^{rx(m-r)}, X \in K^{rxr}$ olsun. Bu durumda $r(Z) = m - r(C)$ olduğundan

$$Z = P\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1} P\begin{bmatrix} X & Y \\ U & V \end{bmatrix} QQ^{-1}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{m-r} \end{bmatrix} Q = P\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & V \end{bmatrix} Q$$

elde edilir. Dolayısıyla V matrisi tersinirdir. Buradan Lemma 3.1.5 uygulanarak $X_1 \in K^{rxr}, X_2 \in K^{rx(m-r)}$ ve $X_3 \in K^{(m-r)xr}$ keyfi matrisler olmak üzere

$$Z^{(1)} = Q^{-1}\begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & V \end{bmatrix} P^{-1},$$

olduğu görülür. Sonuç olarak

$$\Delta = Q^{-1}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & V^{-1} \end{bmatrix} P^{-1},$$

$$I_m - B^{-1}A\Delta = P\begin{bmatrix} I_r & -YV^{-1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1},$$

$$I_m - \Delta B^{-1}A = Q^{-1}\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ -V^{-1}U & 0 \end{bmatrix} Q.$$

elde edilmiş olur. Yukarıdaki sonuçlara uygun olarak (i)-(v) şartlarının sağlandığı kolayca görülür.

3.2 Tersinir Bir Altbloğa Sahip Blok Parçalanmış Matrislerin Grup İnversi

Bu kısımda, A, B, C ve D matrislerinin aşağıdaki koşullardan birini sağlaması durumunda $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \in K^{mxm}$, ($A$ kare), blok matrisinin grup inversinin mevcut olması için gerek ve yeter şartlar ele alınacaktır.

(i) A tersinir, $S^{\#}$ mevcut ve $S = D - CA^{-1}B$;

(ii) D tersinir, $S^{\#}$ mevcut ve $S = A - BD^{-1}C$;

(iii) B veya C matrisi tersinirdir.

Theorem 3.2.1 $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \in K^{mxm}$, olmak üsere $A \in K^{nxn}$ matrisi tersinir ve $S = D - CA^{-1}B$ olsun. Eğer $S^{\#}$ grup inversi mevcut ise butakdirde

(i) $M^{\#}$ mevcuttur ancak ve ancak $R = A^2 + BS^{\pi}C$ tersinir ve $S^{\pi} = I_{m-n} - SS^{\#}$ dir.

(ii) Eğer $M^{\#}$ mevcut ise bu takdirde $M^{\#}$

$$M^{\#} = \begin{bmatrix} X & Y \\ Z & W \end{bmatrix}, \tag{3.1}$$

formundadır, burada

$$X = AR^{-1}(A + BS^{\#}C)R^{-1}A,$$

$$Y = AR^{-1}(A + BS^{\#}C)R^{-1}BS^{\pi} - AR^{-1}BS^{\#},$$

$$Z = S^{\pi}CR^{-1}(A + BS^{\#}C)R^{-1}A - S^{\#}CR^{-1}A,$$

$$W = S^{\pi}CR^{-1}(A + BS^{\#}C)R^{-1}BS^{\pi} - S^{\#}CR^{-1}BS^{\pi} - S^{\pi}CR^{-1}BS^{\#} + S^{\#}$$

dir (Bu ve Ark., 2009).

İspat: (i) A matrisi tersinir olduğundan $S = D - CA^{-1}B$ olmak üzere

$$r(M) = r\left(\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}\right) = r\left(\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{bmatrix}\right) = r\left(\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix}\right),$$

olacaktır ve dolayısıyla $r(M) = r(A) + r(S)$ elde edilir. Öte yandan $S^{\#}$ mevcut olduğundan

$$r(M^2) = r\left(\begin{bmatrix} A^2 + BC & AB + BD \\ CA + DC & CB + D^2 \end{bmatrix}\right)$$

$$= r\left(\begin{bmatrix} A^2 + BC & AB + BD \\ CA + DC - CA^{-1}(A^2 + BC) & CB + D^2 - CA^{-1}(AB + BD) \end{bmatrix}\right)$$

$$= r\left(\begin{bmatrix} A^2 + BC & AB + BD \\ SC & SD \end{bmatrix}\right)$$

$$= r\left(\begin{bmatrix} A^2 + BC & AB + BD - (A^2 + BC)A^{-1}B \\ SC & SD - SCA^{-1}B \end{bmatrix}\right)$$

$$= r\left(\begin{bmatrix} A^2 + BC & BS \\ SC & S^2 \end{bmatrix}\right)$$

$$= r\left(\begin{bmatrix} A^2 + BC - BSS^{\#}C & BS \\ SC - S^2S^{\#}C & S^2 \end{bmatrix}\right)$$

ve

$$r\left(\begin{bmatrix} R & RS \\ 0 & S^2 \end{bmatrix}\right) = r\left(\begin{bmatrix} R & BS^{\#}S^2 \\ 0 & S^2 \end{bmatrix}\right) = r\left(\begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & S^2 \end{bmatrix}\right).$$

yazılabilir. Bu nedenle $r(M^2) = r(R) + r(S^2)$ elde edilir. Bu durumda Lemma 3.1.2 ve $S^{\#}$ nin varlığından $r(S) = r(S^2)$ ave dolayısıyla da $r(M^2) = r(R) + r(S)$ olduğu görülür. Bunun sonucu olarak $M^{\#}$ ın mevcut olması için gerek ve yeter koşul $r(A) = r(R)$ olması, yani $M^{\#}$ ın mevcut olması için gerek ve yeter koşul R nin tersinir olması sonucuna ulaşılır.

(ii) $N = \begin{bmatrix} X & Y \\ Z & W \end{bmatrix}$ olsun. Bu takdirde $N = M^{\#}$ olduğunu göstermeliyiz. Bu durumda

$$MN = \begin{bmatrix} AX + BZ & AY + BW \\ CX + DZ & CY + DW \end{bmatrix}$$

ve

$$NM = \begin{bmatrix} XA + YC & XB + YD \\ ZA + WC & ZB + WD \end{bmatrix}.$$

yazılabilir. Bu nedenle Lemma 3.1.7(i) den

$$\begin{aligned} AX + BZ &= A^2R^{-1}(A + BS^{\#}C)R^{-1}A + BS^{\pi}CR^{-1}(A + BS^{\#}C)R^{-1}A - BS^{\pi}CR^{-1}A \\ &= (A^2R^{-1} + BS^{\pi}CR^{-1})(A + BS^{\#}C)R^{-1}A - BS^{\pi}CR^{-1}A \\ &= I_m(A + BS^{\#}C)R^{-1}A - BS^{\pi}CR^{-1}A \\ &= AR^{-1}A, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} AY + BW &= (A^2R^{-1} + BS^{\pi}CR^{-1})(A + BS^{\#}C)R^{-1}BS^{\pi} + BS^{\#} \\ &\quad -(A^2R^{-1} + BS^{\pi}CR^{-1})BS^{\#} - BS^{\#}CR^{-1}BS^{\pi} \\ &= (A + BS^{\#}C)R^{-1}BS^{\pi} + BS^{\#} - BS^{\#} - BS^{\#}CR^{-1}BS^{\pi} \\ &= AR^{-1}BS^{\pi}, \end{aligned}$$

ifadeleri elde edilir. Benzer şekilde

$$\begin{aligned} CX + DZ &= CAR^{-1}(A + BS^{\#}C)R^{-1}A + DS^{\pi}CR^{-1}(A + BS^{\#}C)R^{-1}A \\ &\quad - DS^{\pi}CR^{-1}A \\ &= (CA^{-1} - DS^{\pi}CR^{-1})(A + BS^{\#}C)R^{-1}A - DS^{\pi}CR^{-1} \end{aligned}$$

$$+DS^{\pi}CR^{-1}(A+BS^{\#}C)R^{-1}A$$

$$= CA^{-1}(A+BS^{\#}C)R^{-1}A - DS^{\pi}CR^{-1}A$$

$$= S^{\pi}CR^{-1}A,$$

$$CY + DW = CAR^{-1}(A+BS^{\#}C)R^{-1}BS^{\pi} - CAR^{-1}BS^{\#} - DS^{\pi}CR^{-1}BS^{\#} + DS^{\#}$$
$$+ DS^{\pi}CR^{-1}(A+BS^{\#}C)R^{-1}BS^{\pi} - DS^{\#}CR^{-1}BS^{\pi}$$

$$= CA^{-1}(A+BS^{\#}C)R^{-1}BS^{\pi} - CA^{-1}BS^{\#} - DS^{\#}CR^{-1}BS^{\pi} + DS^{\#}$$

$$= S^{\pi}CR^{-1}BS^{\pi} + SS^{\#},$$

$$XA + YC = AR^{-1}(A+BS^{\#}C)R^{-1}A^2 + AR^{-1}(A+BS^{\#}C)R^{-1}BS^{\pi}C$$
$$- AR^{-1}BS^{\#}C$$

$$= AR^{-1}(A+BS^{\#}C)(R^{-1}A^2 + R^{-1}BS^{\pi}C) - AR^{-1}BS^{\#}C$$

$$= AR^{-1}(A+BS^{\#}C)I_m - AR^{-1}BS^{\#}C$$

$$= AR^{-1}A,$$

yazılabilir. Lemma 3.1.7(ii) den

$$XB + YD = AR^{-1}(A+BS^{\#}C)R^{-1}AB + AR^{-1}(A+BS^{\#}C)R^{-1}BS^{\pi}D$$
$$- AR^{-1}BS^{\#}D$$

$$= AR^{-1}(A+BS^{\#}C)A^{-1}B - AR^{-1}BS^{\#}D$$

$$= AR^{-1}BS^{\pi},$$

$$ZA + WC = S^{\pi}CR^{-1}(A+BS^{\#}C)(R^{-1}A^2 + R^{-1}BS^{\pi}C) - S^{\pi}CR^{-1}BS^{\#}C$$

$$+S^{\#}C - S^{\#}C(R^{-1}A^2 + A^{-1}BS^{\pi}C)$$

$$= S^{\pi}CR^{-1}(A+BS^{\#}C) - S^{\pi}CR^{-1}BS^{\#}C + S^{\#}C - S^{\#}C$$

$$= S^{\pi}CR^{-1}A,$$

$$ZB + WD = S^{\pi}CR^{-1}(A+BS^{\#}C)R^{-1}AB - S^{\#}CR^{-1}AB$$
$$+ S^{\pi}CR^{-1}(A+BS^{\#}C)R^{-1}BS^{\pi}D$$

$$-S^{\#}CR^{-1}BS^{\pi}D - S^{\pi}CR^{-1}BS^{\pi}D + S^{\#}D$$

$$= S^{\pi}CR^{-1}(A+BS^{\#}C)A^{-1}B - S^{\#}CA^{-1}B - S^{\pi}CR^{-1}BS^{\#}D + S^{\#}D$$

$$= S^{\pi}CR^{-1}BS^{\pi} + SS^{\#}$$

olduğu görülür. Bu nedenle

$$MN = NM = \begin{bmatrix} AR^{-1}A & AR^{-1}BS^{\pi} \\ S^{\pi}CR^{-1}A & S^{\pi}CR^{-1}BS^{\pi} + SS^{\#} \end{bmatrix}.$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$MNM = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} AR^{-1}A & AR^{-1}BS^{\pi} \\ S^{\pi}CR^{-1}A & S^{\pi}CR^{-1}BS^{\pi} + SS^{\#} \end{bmatrix}$$

ve

$$NMN = \begin{bmatrix} AR^{-1}A & AR^{-1}BS^{\pi} \\ S^{\pi}CR^{-1}A & S^{\pi}CR^{-1}BS^{\pi} + SS^{\#} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X & Y \\ Z & W \end{bmatrix},$$

elde edilmiş olur. Sonuç olarak $MNM = M$ ve $NMN = N$ olduğu gösterilmiş olur ve böylece de $N = M^{\#}$ elde edilir.

Sonuç 3.2.1 $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} \in K^{mxm}$, $A \in K^{nxn}$ tersinir ve $S = -CA^{-1}B$ olsun. Eğer $S^{\#}$ grup inversi mevcut ise bu takdirde

(i) $M^{\#}$ mevcuttur ancak ve ancak $R = A^2 + BS^{\#}C$tersinir ve $S^{\pi} = I_{m-n} - SS^{\#}$ dir.
(ii) Eğer $M^{\#}$ mevcut ise bu takdirde

$$M^{\#} = \begin{bmatrix} X & Y \\ Z & W \end{bmatrix}, \tag{3.2}$$

formundadır, burada

$$X = AR^{-1}(A + BS^{\#}C)R^{-1}A,$$

$$Y = AR^{-1}(A + BS^{\#}C)R^{-1}BS^{\pi} - AR^{-1}BS^{\#},$$

$$Z = S^{\pi}CR^{-1}(A + BS^{\#}C)R^{-1}A - S^{\#}CR^{-1}A,$$

$$W = S^{\pi}CR^{-1}(A + BS^{\#}C)R^{-1}BS^{\pi} - S^{\#}CR^{-1}BS^{\pi} - S^{\pi}CR^{-1}BS^{\#} + S^{\#}$$

dir (Bu ve Ark., 2009).

İspat: $D = 0$ olmak üzere iddiaların doğruluğu Teorem 3.2.1 den açıkça görülür.

Sonuç 3.2.2 $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}^{mxm}$ ve $A \in K^{nxn}$ olsun. Eğer $AB = B$, $CA = C$ ise bu takdirde

(i) $M^{\#}$ mevcuttur ancak ve ancak $(CB)^{\#}$ ve $A^{\#}$ mevcuttur;

(ii) Eğer $M^{\#}$ mevcut ise, bu takdirde

$$M^{\#} = \begin{bmatrix} A^{\#} - 2B(CB)^{\pi}C - B(CB)^{\#}C & B(CB)^{\#} + B(CB)^{\pi} \\ (CB)^{\#}C + (CB)^{\pi}C & -(CB)^{\#} \end{bmatrix}$$

formundadır (Bu ve Ark., 2009).

İspat: İddiaların doğruluğu direkt olarak Teorem 3.2.1 den açıkça görülür.

Örnek 3.2.1 $\mathbb{Z}$ tam sayılar halkası ve $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix}$ matrisi $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ üzerinde bir matris olmak üzere

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ and } C = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

olsun. Kolayca gösterilebilir ki $AB = B,\ CA = C$ ve $A^2 \neq A$ dir. Ayrıca $(CB)^{\#}$ ve $A^{\#}$ inversleri mevcuttur. Basit bir hesaplamayla,

$$A^{\#} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad (CB)^{\#} = CB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

olduğu gösterilebilir. Böylece Sonuç 3.2.2 ye göre $M^{\#}$ inversi mevcut olup

$$M^{\#} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

Teorem 3.2.2 $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \in K^{mxm},\ D \in K^{nxn}$ matrisi tersinir ve $S = A - BD^{-1}C$ olsun. Eğer $S^{\#}$ grup inversi mevcut ise, bu takdirde

(i) $M^{\#}$ mevcuttur ancak ve ancak $R = D^2 + CS^{\pi}B$ tersinir ve $S^{\pi} = I_{m-n} - SS^{\#}$ dir.

(ii) Eğer $M^{\#}$ mevcut ise,

$$M^{\#} = \begin{bmatrix} X & Y \\ Z & W \end{bmatrix}, \tag{3.3}$$

formundadır, burada

$$X = S^{\pi}BR^{-1}(D + CS^{\#}B)R^{-1}CS^{\pi} - S^{\#}BR^{-1}CS^{\pi} - S^{\pi}BR^{-1}CS^{\#} + S^{\#},$$

$$Y = S^{\pi}BR^{-1}(D + CS^{\#}B)R^{-1}D - S^{\#}BR^{-1}D,$$

$$Z = DR^{-1}(D + CS^{\#}B)R^{-1}CS^{\pi} - DR^{-1}CS^{\#},$$

$$W = DR^{-1}(D + CS^{\#}B)R^{-1}D$$

dir (Bu ve Ark., 2009).

İspat: (i) M matrisi

$$P = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ I_{m-n} & 0 \end{bmatrix} \text{ ve } N = \begin{bmatrix} D & C \\ B & A \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ I_{m-n} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D & C \\ B & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ I_{m-n} & 0 \end{bmatrix}^{-1} = PNP^{-1},$$

şeklinde yazılabilir. Dolayısıyla $M^{\#}$ inversinin mevcut olması için gerek ve yeter koşul $N^{\#}$ inversinin mevcut olmasıdır. Öte yandan $D \in K^{nxn}$ tersinir olduğundan, Teorem 3.2.1(i) kullanılırsa $N^{\#}$ inversinin mevcut olması için gerek ve yeter koşul $R = D^2 + CS^{\pi}B$ matrisnin tersinir olmasıdır. Bu nedenle (i) şartı sağlanmış olur.

(ii) Eğer $M^{\#}$ mevcut ise bu takdirde $M^{\#} = (PNP^{-1})^{\#} = PN^{\#}P^{-1}$ olacaktır. Bu durumda Teorem 3.2.1(ii) kullanılarak $M^{\#}$ ın ifadesinin (3.3) deki gibi olduğu görülür.

Teorem 3.2.3 $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} \in K^{mxm}$ bir matris, $A, B, C \in K^{nxn}$ ve B tersinir ise

(i) $M^{\#}$ inversinin mevcut olması için gerek ve yeter koşul $r(Z) = n - r(C)$ olmasıdır, burada $Z = \left(I_n - CC^{(1)}\right)B^{-1}A\left(I_n - C^{(1)}C\right)$ dir.

(ii) Eğer $M^{\#}$ mevcut ise

$$M^{\#} = \begin{bmatrix} \Delta B^{-1} & X \\ (I_n - BA^{-1}\Delta)B^{-1} & Y \end{bmatrix}, \tag{3.4}$$

dir, burada $C^{(1)} \in C\{1\}$ ve $Z^{(1)} \in Z\{1\}$ olmak üzere

$$\Delta = (I_n - C^{(1)}C)Z^{(1)}(I_n - CC^{(1)}),$$

$$X = \Delta B^{-1}\Delta + (I_n - BA^{-1}\Delta)C^{(1)}(I_n - B^{-1}A\Delta)$$

$$Y = (I_n - BA^{-1}\Delta)B^{-1}\Delta - B^{-1}A(I_n - \Delta B^{-1}A)C^{(1)}(I_n - B^{-1}A\Delta),$$

dir (Bu ve Ark., 2009).

İspat: (i) Kolaylıkla gösterilebilir ki

$$r(M) = r\begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix} r(B) + r(C) = m + r(C)$$

ve

$$r(M^2) = r\begin{bmatrix} A^2 + BC & AB \\ 0 & CB \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} BC & AB \\ 0 & CB \end{bmatrix}$$

$$= r\begin{bmatrix} C & B^{-1} & 0 \\ 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} C & B^{-1}A & 0 \\ 0 & C & 0 \\ 0 & (I_n - CC^{(1)})B^{-1}A & 0 \end{bmatrix}$$

$$= r\begin{bmatrix} C & B^{-1}A - CC^{(1)}B^{-1}A & 0 \\ 0 & C & 0 \\ 0 & (I_n - CC^{(1)})B^{-1}A & 0 \end{bmatrix}$$

$$= r\begin{bmatrix} C & 0 & 0 \\ 0 & C & 0 \\ 0 & (I_n - CC^{(1)})B^{-1}A & 0 \end{bmatrix}$$

$$= r\begin{bmatrix} C & 0 & 0 \\ 0 & C & 0 \\ 0 & (I_n - CC^{(1)})B^{-1}A & (I_n - CC^{(1)})B^{-1}A(I_n - C^{(1)}C) \end{bmatrix}$$

$$= r\begin{bmatrix} C & 0 & 0 \\ 0 & C & 0 \\ 0 & (I_n - CC^{(1)})B^{-1}A & (I_n - CC^{(1)})B^{-1}A(I_n - C^{(1)}C) \end{bmatrix}$$

$$= r\begin{bmatrix} C & 0 & 0 \\ 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & (I_n - CC^{(1)})B^{-1}A(I_n - C^{(1)}C) \end{bmatrix}$$

$$= 2r(C) + r(Z).$$

dir. Böylece Lemma 3.2.1 den görüldüğü üzere $M^{\#}$ inversinin mevcut olması için gerek ve yeter koşul $r(Z) = n - r(C)$ olmasıdır.

(ii) (3.4) eşitliğinin sağ tarafını E ile gösterelim. Direkt bir hesaplamayla

$$ME = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} \text{ ve } EM = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{bmatrix},$$

olduğu gösterilebilir, burada

$$A_1 = A\Delta B^{-1} + B(I_n - B^{-1}A\Delta)B^{-1} = I_n,$$

$$A_2 = A(I_n - \Delta B^{-1}A)C^{(1)}(I_n - B^{-1}A\Delta)B^{-1} + A\Delta B^{-1}\Delta$$

$$+B(I_n - B^{-1}A\Delta)B^{-1}\Delta - A(I_n - \Delta B^{-1}A)C^{(1)}(I_n - B^{-1}A\Delta) = \Delta,$$

$$A_3 = C\Delta B^{-1} = 0,$$

$$A_4 = C\Delta B^{-1} + C(I_n - \Delta B^{-1}A)C^{(1)}(I_n - B^{-1}A\Delta)$$

$$= CC^{(1)}(I_n - B^{-1}A\Delta).$$

dir. Lemma 3.1.10(i) den $A_2 = I_n - B^{-1}A\Delta$;

$$B_1 = \Delta B^{-1}A + \Delta B^{-1}\Delta C + (I_n - \Delta B^{-1}A)C^{(1)}(I_n - B^{-1}A\Delta)C$$

$$= \Delta B^{-1}A + I_n - \Delta B^{-1}A = I_n,$$

$$B_2 = \Delta B^{-1}B = \Delta,$$

$$B_3 = (I_n - B^{-1}A\Delta)B^{-1}A + (I_n - B^{-1}A\Delta)B^{-1}\Delta C$$

$$-B^{-1}A(I_n - \Delta B^{-1}A)C^{(1)}(I_n - B^{-1}A\Delta)$$

$$= (I_n - B^{-1}A\Delta)B^{-1}A - B^{-1}A(I_n - \Delta B^{-1}A)C^{(1)}C.$$

elde edilir. Böylece

$$B_3 = 0,\ B_4 = (I_n - B^{-1}A\Delta)B^{-1}B = I_n - B^{-1}A\Delta.$$

olduğu görülür. Bu nedenle

$$ME = EM = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_n - B^{-1}A\Delta \end{bmatrix}$$

yazılabilir. Ayrıca Lemma 3.1.10 (ii) den

$$MEM = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_n - B^{-1}A\Delta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + \Delta C & B \\ (I_n - B^{-1}A\Delta)C & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} = M,$$

$$EME = \begin{bmatrix} \Delta B^{-1} & X \\ (I_n - B^{-1}A\Delta)B^{-1} & Y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_n - B^{-1}A\Delta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \Delta B^{-1} & \Delta B^{-1}\Delta + (I_n - \Delta B^{-1}A)C^{(1)}(I_n - B^{-1}A\Delta) \\ (I_n - B^{-1}A\Delta)B^{-1} & (I_n - B^{-1}A\Delta)B^{-1}\Delta - B^{-1}A(I_n - \Delta B^{-1}A)C^{(1)}(I_n - B^{-1}A\Delta) \end{bmatrix}$$

$$= E$$

olduğu görülür. Sonuç olarak $ME = EM$, $MEM = M$ ve $EME = E$ eşitlikleri elde edilmiş olur ve böylece $E = M^{\#}$ dir.

Sonuç 3.2.3 $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} \in K^{mxm}$, $A, B, C \in K^{nxn}$ ve C tersinir olsun. Bu takdirde

(i) $M^{\#}$ mevcuttur ancak ve ancak $Z = (I_n - BB^{(1)})AC^{-1}(I_n - B^{(1)}B)$ olmak üzere $r(Z) = n - r(B)$ dir.

(ii) Eğer $M^{\#}$ mevcut ise

$$M^{\#} = \begin{bmatrix} C^{-1}\Delta & C^{-1}(I_n - \Delta AC^{-1}) \\ X & Y \end{bmatrix}, \tag{3.5}$$

formundadır, burada herhangi keyfi $B^{(1)} \in B\{1\}$ ve $Z^{(1)} \in Z\{1\}$ matrisleri için

$$\Delta = (I_n - B^{(1)}B)Z^{(1)}(I_n - BB^{(1)}),$$

$$X = \Delta C^{-1}\Delta + (I_n - \Delta AC^{-1})B^{(1)}(I_n - AC^{-1}\Delta)$$

$$Y = \Delta C^{-1}(I_n - \Delta AC^{-1}) - (I_n - \Delta AC^{-1})B^{(1)}(I_n - AC^{-1}\Delta)AC^{-1},$$

dir (Bu ve Ark., 2009).

İspat: (i) Şimdi $P = \begin{bmatrix} AC^{-1} & I_n \\ I_n & 0 \end{bmatrix}$ ve $N = \begin{bmatrix} CAC^{-1} & C \\ B & 0 \end{bmatrix}$ olmak üzere

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AC^{-1} & I_n \\ I_n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} CAC^{-1} & C \\ B & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} AC^{-1} & I_n \\ I_n & 0 \end{bmatrix}^{-1} = PNP^{-1},$$

olduğunu varsayalım. Bu takdirde $M^{\#}$ nin mevcut olması için gerek ve yeter koşul $N^{\#}$ ın mevcut olmasıdır. Öte yandan C tersinir olduğundan, Teorem 3.2.3 (i) uygulanarak $N^{\#}$ inversinin mevcut olması için gerek ve yeter koşulun $r(Z) = n - r(B)$ eşitliğinin sağlanası olduğu görülür, burada $Z = (I_n - BB^{(1)})AC^{-1}(I_n - B^{(1)}B)$ dir. Bu nedenle (i) şartı ispatlanmış olur.

(ii) İspat Teorem 3.2.3(ii) nin ispatına benzer olduğu için sonucun doğruluğu kolaylıkla gösterilebilir.

Sonuç 3.2.4 $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \in K^{mxm}$ olmak üzere $A, B, C, D \in K^{nxn}$ ve B tersinir bir matris olsun. Bu takdirde

(i) $M^{\#}$ nin mevcut olması için gerek ve yeter şart $r(Z) = n - r(S)$ olmasıdır, burada

$$Z = \left(I_n - SS^{(1)}\right)W\left(I_n - S^{(1)}S\right), \quad W = B^{-1}A + DB^{-1} \text{ ve } S = C - DB^{-1}A$$

dir.

(ii) Eğer $M^{\#}$ mevcut ise bu takdirde

$$M^{\#} = \begin{bmatrix} \Delta B^{-1} - EDB^{-1} & E \\ (I_n - B^{-1}A\Delta)B^{-1} - FDB^{-1} & F \end{bmatrix}, \tag{3.6}$$

formundadır, burada herhangi keyfi $S^{(1)} \in S\{1\}$ ve $Z^{(1)} \in Z\{1\}$ matrisleri için

$\Delta = (I_n - S^{(1)}S)Z^{(1)}(I_n - SS^{(1)})$,

$E = \Delta B^{-1}\Delta + (I_n - \Delta W)S^{(1)}(I_n - W\Delta)$,

$F = (I_n - B^{-1}\Delta A)B^{-1}\Delta - B^{-1}A(I_n - \Delta W)S^{(1)}(I_n - W\Delta)$,

dir (Bu ve Ark., 2009).

İspat: (i) Belirtelim ki $P = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ DB^{-1} & I_n \end{bmatrix}$ ve $N = \begin{bmatrix} A + BDB^{-1} & B \\ C - DB^{-1}A & 0 \end{bmatrix}$ olmak üzere

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ DB^{-1} & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A + BDB^{-1} & B \\ C - DB^{-1}A & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ DB^{-1} & I_n \end{bmatrix}^{-1} = PNP^{-1}$$

dir. Dolayısıyla $M^{\#}$ invrsinin mevcut olması için gerek ve yeter koşul $N^{\#}$ inversinin mevcut olmasıdır. Öte yandan B tersinir olduğundan, Teorem 3.2.3 (i) dikkate alınırsa $N^{\#}$ inversinin mevcut olması için gerek ve yeter koşul $r(Z) = n - r(S)$ eşitliğinin sağlanması olduğu görülür, burada$Z = (I_n - SS^{(1)})W(I_n - S^{(1)}S)$ ve $W = B^{-1}A + DB^{-1}$ dir. Bu nedenle (i) şartı ispatlanmış olur.

(ii) İspat Teorem 3.2.3(ii) nin ispatına benzer olduğu için sonucun doğruluğu kolaylıkla gösterilebilir.

Sonuç 3.2.5 $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \in K^{mxm}$ bir matris, $A, B, C, D \in K^{nxn}$ ve C tersinir olsun. Bu takdirde

(i) $M^{\#}$ mevcuttur ancak ve ancak $r(Z) = n - r(S)$, dir, burada $Z = \left(I_n - SS^{(1)}\right)V\left(I_n - S^{(1)}S\right)$, $V = B^{-1}A + DB^{-1}$ ve $S = C - DB^{-1}A$ dir.

(ii) Eğer $M^{\#}$ mevcut ise bu takdirde

$$M^{\#} = \begin{bmatrix} C^{-1}\Delta - C^{-1}DE & C^{-1}(I_n - \Delta AC^{-1}) - C^{-1}\Delta F \\ E & F \end{bmatrix}, \tag{3.7}$$

formundadır, burada keyfi $S^{(1)} \in S\{1\}$ ve $Z^{(1)} \in Z\{1\}$ matrisleri için

$$\Delta = (I_n - S^{(1)}S)Z^{(1)}(I_n - SS^{(1)}),$$

$$E = \Delta C^{-1}\Delta + (I_n - \Delta V)S^{(1)}(I_n - V\Delta),$$

$$F = \Delta C^{-1}(I_n - \Delta AC^{-1}) - (I_n - V\Delta)S^{(1)}(I_n - V\Delta)AC^{-1},$$

dir (Bu ve Ark., 2009).

İspat: İspat Sonuç 3.2.4 ile aynıdır.

3.3. Bazı Ters-Üçgensel Blok Matrislerin Group İnversleri

1983 yılında, diferansiyel denklemler bağlamında, Campbell ve ark. [9], ters -üçgensel $\begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix}$ blok matrisinin Drazin tersini (grup tersini) bulma problemi üzerine çalışmışlardır. Ancak bu problem hala açık bir problemdir. Sadece bazı özel durumlar için birçok sonuç elde edilmiştir. Daha geniş halkalar üzerinde bu problem ile ilgili çalışmalar da vardır.

Liu ve ark. (2012), bu problemi $A^2 = A,\ CA = C$ koşulları altında kompleks halkalar üzerinde çalışmışlardır. Bu kısımda ise, sadece $A^2 = A$ koşulunu kaldırarak, bir tamlık bölgesi üzerinde matris denklemlerini kullanarak bu problem için bir çözüm araştırılmaktadır. Diğer taraftan, Zhao ve ark. (2010) $B^{\#}$'nin mevcut olduğu ve $BAB^{\pi} = 0$ olması koşulu altında çarpık cisimler üzerinde $\begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix}$ tipindeki blok matrislerin grup inverslerinin gösterimini ve varlığını karakterize etmişlerdir. Bu kısımda ise elde edilen bu sonuçlar bir tamlık bölgesi üzerine genelleştirilmiştir. Özel durumlarda ise bazı sonuçlar birim elemanlı halkalar üzerinde çalışılmıştır.

Lemma 3.3.1. $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ olmak üzere, aşağıdaki ifadeler denktirler:

(i) $A^{\#}$ mevcuttur,

(ii) $\mathbb{R}$ üzerinde verilen keyfi X ve Y matrisleri için $A^2X = A, YA^2 = A$ sağlanır. Bu durumda, $A^{\#} = Y^2A = AX^2 = YAX$'dır (Sheng ve Ark., 2013).

Lemma 3.3.2. $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ olmak üzere, eğer $BAB^{\pi} = 0$ ve $(AB^{\pi})^{\#}$ grup inversi mevcutsa bu durumda,

(i) $B^{\#}AB^{\pi} = 0, (AB^{\pi})^{\#}B = 0, B(AB^{\pi})^{\#} = 0$

(ii) $A(AB^{\pi})^{\#} = (AB^{\pi})^{\#}AB^{\pi}$,

(iii) $A(AB^{\pi})^{\#}AB^{\pi} = AB^{\pi}$

eşitlikleri sağlanır(Sheng ve Ark., 2013).

İspat. (i) $B^{\#}AB^{\pi} = (B^{\#})^2BAB^{\pi} = 0, (AB^{\pi})^{\#}B = ((AB^{\pi})^{\#})^2AB^{\pi}B = 0,$ eşitlikleri sağlanır. Benzer şekilde $B(AB^{\pi})^{\#} = 0$ olduğu açıktır.

(ii) $A(AB^{\pi})^{\#} = AB^{\pi}(AB^{\pi})^{\#} = (AB^{\pi})^{\#}AB^{\pi}$ olduğu görülür.
(iii) Buradaki eşitliğinden sağlandığı (ii) eşitliğinden kolaylıkla görülür.

Şimdi aşağıdaki teoremi bu kısmın temel sonucu olarak verebiliriz.

Teorem 3.3.1. $A \in R^{n\times n}, B \in R^{n\times m}$ ve $C \in R^{m\times n}$ olmak üzere, $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix}$ olsun. Eğer $CA = C$ ise, bu takdirde
(i) $M^{\#}$ nin mevcut olabilmesi içi gerek ve yeter şart $(CB)^{\#}$ ve $A^{\#}$ nın meccut olması ve $A^{\pi}B(CB)^{\pi} = 0$ eşitliğinin sağlanmasıdır.

(ii) Eğer $M^{\#}$ mevcut ise bu takdirde,

$$M_1 = A^{\#} - (A^{\#})^2B(CB)^{\pi}C - A^{\#}B(CB)^{\#}C - A^{\#}B(CB)^{\pi}C - A^{\pi}B[(CB)^{\#}]^2C$$
$$M_2 = (A^{\#})^2B(CB)^{\pi}C + A^{\pi}B[(CB)^{\#}]^2 + A^{\#}B(CB)^{\#} + A^{\pi}B(CB)^{\#}$$
$$M_3 = (CB)^{\pi}C + (CB)^{\#}C$$
$$M_4 = -(CB)^{\#}$$

olmak üzere,

$$M^{\#} = \begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ M_3 & M_4 \end{pmatrix}$$

dir.

İspat (i) ⇒: $CA^2 = CA = C$ olduğundan,

$$\begin{pmatrix} I & B \\ 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & 0 \\ C & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A^2 & AB - BCB \\ 0 & CBCB \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^2 + BC & AB \\ C & CB \end{pmatrix} = M^2 \quad (3.8)$$

olduğunu biliyoruz. Lemma 3.3.1 gereğince, bazı $Y \in R^{(n+m)\times(n+m)}$ matrisi için $M^{\#}$ inversinin mevcut olabilmesi için gerek ve yeter şart $M = YM^2$ olmasıdır. Şimdi, $Y_1 \in R^{n\times n}$ olmak üzere,

$$Y\begin{pmatrix} I & B \\ 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & 0 \\ C & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Y_3 & Y_4 \end{pmatrix}$$

olsun. Böylece,

$$\begin{pmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Y_3 & Y_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A^2 & AB-BCB \\ 0 & CBCB \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix}$$

olur. Sonuç olarak $Y_1A^2 = A$ olduğu görülür ve Lemma 3.3.1 gereğince $A^{\#}$ mevcuttur. Lemma 3.1.1'e göre $M^{\#}$ inversinin mevcut olabilmesi için gerek ve yeter şart $M^2X = M$ olacak şekilde bir $X = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix} \in R^{(n+m)\times(n+m)}$ matrisinin mevcut olmasıdır. Dolayısıyla (3.8) denkleminden,

$$\begin{pmatrix} I & B \\ 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & 0 \\ C & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A^2 & AB-BCB \\ 0 & CBCB \end{pmatrix}X = M$$

olduğu görülür. Bundan dolayı,

$$\begin{pmatrix} A^2 & AB-BCB \\ 0 & CBCB \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ -C & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & -B \\ 0 & I \end{pmatrix}M$$

dir. Yani,

$$A^2X_1 + (AB-BCB)X_3 = A - BC \tag{3.9}$$

$$A^2X_2 + (AB-BCB)X_4 = B \tag{3.10}$$

$$CBCBX_3 = CBC \tag{3.11}$$

$$CBCBX_4 = -CB \tag{3.12}$$

eşitlikleri yazılabilir. (3.12) eşitliği ve Lemma 3.1.1 den $(CB)^{\#}$'ın mevcut olduğu görülür. (3.10) eşitliğinden ise $-A^{\pi}BCBX_4 = A^{\pi}B$ eşitliği elde edilir. Başka bir deyişle, $-A^{\pi}B(CB)^{\#}CBCBX_4 = A^{\pi}B$ yazılabilir Bu son denklemde (3.12) eşitliğini yerine yazarsak, $A^{\pi}B(CB)^{\#}CB = A^{\pi}B$ elde edilir. Bundan dolayı $A^{\pi}B(CB)^{\pi} = 0$'dır.

⇐: Öncelikle

$$X_1 = A^{\#} - (A^{\#})^2B(CB)^{\pi}C - A^{\#}B(CB)^{\#}C\,, \quad X_3 = (CB)^{\#}C$$

$$X_2 = (A^{\#})^2 - B(CB)^{\pi} + A^{\#}B(CB)^{\#}\,, \quad X_4 = -(CB)^{\#}$$

olsunlar. Bu durumda $A^{\pi}B(CB)^{\pi} = 0$ olduğunu belirtelim. Dolayısıyla (3.9)-(3.12) eşitliklerinin doğruluğunu göstermek kolaydır. Bu ise $M = M^2X$ denkleminin bir çözüme sahip olduğunu gösterir, yani $M^{\#}$ mevcuttur.

(ii) Lemma 3.3.1 gereğince, $A^{\pi}B(CB)^{\pi} = 0$ ve $CA^{\#} = CAAA^{\#} = CA^2A^{\#} = CA = C$, olup $M^{\#}$ ifadesi $M^{\#} = MX^2$ denkleminden elde edilebilir. Bu nedenle,

$$M^{\#} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix}$$

$$\times \begin{pmatrix} A^{\#} - (A^{\#})^2 B(CB)^{\pi} C - A^{\#} B(CB)^{\#} C & (A^{\#})^2 - B(CB)^{\pi} + A^{\#} B(CB)^{\#} \\ (CB)^{\#} C & -(CB)^{\#} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} AA^{\#} - A^{\#} B(CB)^{\pi} C + A^{\pi} B(CB)^{\#} C & A^{\#} B(CB)^{\pi} - A^{\pi} B(CB)^{\#} \\ (CB)^{\pi} C & CB(CB)^{\#} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A^{\#} - (A^{\#})^2 B(CB)^{\pi} C - A^{\#} B(CB)^{\#} C & (A^{\#})^2 - B(CB)^{\pi} + A^{\pi} B((CB)^{\#})^2 \\ -A^{\#} B(CB)^{\pi} C - A^{\pi} B((CB)^{\#})^2 C & +A^{\#} B(CB)^{\#} + A^{\pi} B(CB)^{\#} \\ (CB)^{\pi} C + (CB)^{\#} C & -(CB)^{\#} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ M_3 & M_4 \end{pmatrix}$$

elde edilmiş olur.

Örnek 3.3.1. $\mathbb{Z}$ tamsayılar halkası üzerinde $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix}$ olsun, burada

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ ve } \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

seçelim. Bu durumda, kolayca gösterilebilir ki $A^2 \neq A$, $CA = C$ dir. Ayrıca $A^{\#}$ ve $(CB)^{\#}$ ifadelerinin mevcut olduğu aşikardır. Bu nedenle basit bir hesaplamayla

$$A^{\#} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A^{\pi} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (CB)^{\#} = CB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad (CB)^{\pi} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

olduğu ve böylece,$A^{\pi} B(CB)^{\pi} = 0$ olduğu görülür. Bu durumda Teorem 3.3.1 göre $M^{\#}$ mevcut olup

$$M^{\#} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & -1 & 0 & -13 & 3 \\ -2 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

şeklindedir.

Teorem 3.3.2. $A \in R^{n \times n}, B \in R^{n \times m}, C \in R^{m \times n}$ olmak üzere $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix}$ olsun. Eğer $AB = B$ ise bu takdirde,

(i) $M^{\#}$ nın mevcut olabilmesi için gerek ve yeter şart $(CB)^{\#}$ ve $A^{\#}$ inverslerinin mevcut olup $(CB)^{\pi} C A^{\pi} = 0$ eşitliğinin sağlanmasıdır.

(ii) Eğer $M^{\#}$ mevcut ise,

$M_1 = A^\# - B(CB)^\pi CA^\# - B(CB)^\pi C(A^\#)^2 - B(CB)^\# CA^\# - B[(CB)^\#]^2 CA^\pi$

$M_2 = B(CB)^\# + B(CB)^\pi$

$M_3 = (CB)^\# CA^\# + (CB)^\# CA^\pi + [(CB)^\#]^2 CA^\pi + (CB)^\pi C(A^\#)^2$

$M_4 = -(CB)^\#$

olmak üzere $M^\# = \begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ M_3 & M_4 \end{pmatrix}$'dir.

Şimdi Teorem 3.3.1 ve Teorem 3.3.2' nin özel bir durumunu herhangi bir halka üzerinde göz önünde bulunduralım.

Teorem 3.3.3. $A \in R^{n\times n}, B = R^{n\times m}, C \in R^{m\times n}$ olmak üzere $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix}$ olsun. Eğer $AB = B$ ve $CA = C$ ise bu takdirde,

(i) $M^\#$'un mevcut olabilmesi için gerek ve yeter şart $(CB)^\#$ ve $A^\#$ mevcut olmasıdır.

(ii) Eğer $M^\#$varsa,

$$M^\# = \begin{pmatrix} A^\# - 2B(CB)^\pi C - B(CB)^\# C & B(CB)^\# + B(CB)^\pi \\ (CB)^\# C + (CB)^\pi C & -(CB)^\# \end{pmatrix}.$$

İspat (i) ⇒: Eğer $M^\#$ varsa, Lemma 3.3.2 gereğince R üzerinde $M = M^2 X$ ve $M = YM^2$ olacak şekilde X ve Y matrisleri vardır. Öte yandan $AB = B$ ve $CA = C$ olduğundan,

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ C & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^2 & 0 \\ -CBC & CBCB \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & B \\ O & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ C & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^2 + BC & B \\ C & CB \end{pmatrix} = M^2$$

elde edilir.

$$X = \begin{pmatrix} I & 0 \\ -C & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -B \\ O & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & B \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

olsun. Bu durumda

$$\begin{pmatrix} A^2 & 0 \\ -CBC & CBCB \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -CB \end{pmatrix}$$

dır. Bu son eşitlikten

$$A^2 X_1 = A \tag{3.13}$$

$$A^2 X_2 = 0 \tag{3.14}$$

$$-CBCX_1 + CBCBX_3 = 0 \tag{3.15}$$

$$-CBCX_2 + CBCBX_4 = 0 \tag{3.16}$$

eşitlikleri elde edilir. Ayrıca,

$$\begin{pmatrix} I & B \\ O & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & 0 \\ C & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A^2 & B-BCB \\ 0 & CBCB \end{pmatrix} = M^2$$

olduğunu elde etmek kolaydır. Yine elde edilen bu son denklemlerden ve $M = YM^2$ eşitliğinden yararlanarak ve $Y = \begin{pmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Y_3 & Y_4 \end{pmatrix}$ seçerek,

$$Y_1A^2 = A \tag{3.17}$$

$$Y_1(B-BCB) + Y_2CBCB = B \tag{3.18}$$

$$Y_3A^2 = C \tag{3.19}$$

$$Y_3(B-BCB) + Y_4CBCB = 0 \tag{3.20}$$

eşitlikleri elde edilir. Lemma 3.3.2 gereğince yukarıdaki eşitlikler dikkate alınırsa $M^{\#}$ inversinin var olduğunu gösterir. Ayrıca $CX_2 = 0$ ve $Y_3B = CB$ eşitlikleri elde edilir. Bu son iki eşitliği yukarıdaki eşitliklerde yerlerine yazarsak,

$$CBCBX_4 = -CB \text{ ve } CB = (I - Y_4)CBCB$$

bulunur. Lemma 3.1.1 gereğince $(CB)^{\#}$vardır.

⇐: Farz edelim ki

$$X_1 = A^{\#}, X_2 = 0, X_3 = (CB)^{\#}C, X_4 = -(CB)^{\#}$$

$$Y_1 = A^{\#}, Y_2 = B(CB)^{\#}, Y_3 = C, Y_4 = CB(CB)^{\#} - (CB)^{\#}$$

olsunlar. Bu durumda (3.13)-(3.20) denklemlerinin doğruluğunu göstermek kolaydır. Bu ise $M = M^2X$ ve $M = YM^2$ denklemlerinin çözümlerinin mevcut olduğunu gösterir.

(ii) Lemma 3.3.2 gereğince $M^{\#}$ mevcuttur ve $M^{\#} = YMX$'dir.

Örnek 3.3.2. Z tamsayılar halkası ve $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix}$, $Z/6Z$ üzerinde bir matris olmak üzere,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

olsunlar. Bu durumda $A^2 \neq A,\ AB = B,\ CA = C$ olduğunu göstermek kolaydır. Ayrıca $A^{\#}$ ve $(CB)^{\#}$ mevcuttur ve aşağıdaki gibi bulunurlar:

$$A^{\#} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ (CB)^{\#} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Teorem 3.3.3 gereğince $M^{\#}$ vardır ve

$$M^{\#} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

şeklindedir.

Teorem 3.3.4. $A, B \in R^{n\times n}$ olmak üzere $M = \begin{pmatrix} A & B \\ B & 0 \end{pmatrix}$ olsun. Eğer $B^{\#}$ varsa ve $BAB^{\pi} = 0$ ise bu durumda,

(i) $M^{\#}$ nin var olması için gerek ve yeter şart $(AB^{\pi})^{\#}$ nin var olmasıdır.

(ii) Eğer $M^{\#}$ mevcut ise,

$$M_1 = B^{\pi}A(B^{\#})^2 - (AB^{\pi})^{\#}AB^{\pi}A(B^{\#})^2 + (AB^{\pi})^{\#}$$

$$M_2 = -B^{\pi}A(B^{\#})^2 + (AB^{\pi})^{\#}AB^{\pi}A(B^{\#})^2AB^{\#} - (AB^{\pi})^{\#}AB^{\#} + B^{\#}$$

$$M_3 = B^{\#}$$

$$M_4 = -B^{\#}AB^{\#}$$

olmak üzere, $M^{\#} = \begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ M_3 & M_4 \end{pmatrix}$'dir.

İspat (i) ⇒: Bu durumda

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ B & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{\pi}A & B \\ B & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & 0 \\ B^{\#}A & I \end{pmatrix}$$

ve

$$M^2 = \begin{pmatrix} A^2 + B^2 & AB \\ BA & B^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AB^{\pi}A + B^2 & AB \\ 0 & B^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & 0 \\ B^{\#}A & I \end{pmatrix}$$

denklemlerini elde etmek kolaydır. $M^{\#}$ mevcut olduğundan Lemma 3.3.1 gereğince $YM^2 = M$ eşitliğinin bir çözümün olduğunu biliyoruz. $Y = \begin{pmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Y_3 & Y_4 \end{pmatrix}$ olsun.

$$Y_1AB^{\pi}A + Y_1B^2 = B^{\pi}A \tag{3.21}$$

$$Y_1AB + Y_2B^2 = B \tag{3.22}$$

$$Y_3AB^{\pi}A + Y_3B^2 = B \tag{3.23}$$

$$Y_3AB + Y_4B^2 = 0 \tag{3.24}$$

denklemleri elde edilir. (3.21) eşitliğinden $Y_1(AB^{\pi})^2 = B^{\pi}AB^{\pi} = AB^{\pi}$ olduğu görülür. Öte yandan Lemma 3.3.1 gereğince $(AB^{\pi})^{\#}$ nin mevcut olduğunu biliyoruz. Şimdi, $X = \begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ M_3 & M_4 \end{pmatrix}$ alalım. Bu durumda Lemma 3.3.2 den,

$$MX = \begin{pmatrix} A(AB^{\pi})^{\#} + BB^{\#} & -A(AB^{\pi})^{\#}AB^{\#} + B^{\pi}AB^{\#} \\ 0 & BB^{\#} \end{pmatrix} = XM$$

elde edilir. $XMX = M, MXM = M$ olduğunu göstermek kolaydır. Böylece de $X = M^{\#}$ olarak elde edilir.

Teorem 3.3.5. $A, B \in R^{n\times n}$ olmak üzere, $M = \begin{pmatrix} A & B \\ B & 0 \end{pmatrix}$ olsun. Eğer $B^{\#}$ mevcut ve $B^{\pi}AB = 0$ ise bu takdirde

(i) $M^{\#}$ mevcut olması için gerek ve yeter şart $(B^{\pi}A)^{\#}$'ın var olmasıdır.

(ii) Eğer $M^{\#}$ mevcutsa,

$$M_1 = (B^{\#})^2AB^{\pi} - (B^{\#})^2AB^{\pi}A(B^{\pi}A)^{\#} + (B^{\pi}A)^{\#}$$

$$M_2 = B^{\#}$$

$$M_3 = -B^{\#}A(B^{\#})^2AB^{\pi} + B^{\#}A(B^{\#})^2AB^{\pi}A(B^{\pi}A)^{\#} - B^{\#}A(B^{\pi}A)^{\#} + B^{\#}$$

$$M_4 = -B^{\#}AB^{\#}$$

olmak üzere, $M^{\#} = \begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ M_3 & M_4 \end{pmatrix}$'dir.

Bu teoremin ispatı Teorem 3.3.4'ün ispatına benzerdir.

Şimdi Teorem 3.3 4 ve Teorem 3.3.5'in özel bir durumunu herhangi bir halka üzerinde inceleyelim.

Teorem 3.3.6. $A, B \in R^{n\times n}$ olmak üzere, $M = \begin{pmatrix} A & B \\ B & 0 \end{pmatrix}$ olsun. Eğer $B^{\#}$ mevcut ve $BAB^{\pi} = 0,\ B^{\pi}AB = 0$ ise, bu takdirde

(i) $M^{\#}$'ın var olması için gerek ve yeter koşul $(AB^{\pi})^{\#}$'ın mevcut olmasıdır.

(ii) Eğer $M^{\#}$ mevcutsa,

$$M^{\#} = \begin{pmatrix} (AB^{\pi})^{\#} & B^{\#} \\ B^{\#} & -B^{\#}AB^{\#} \end{pmatrix}$$

şeklindedir.

İspat (i) ⇒: Bu durumda

$$M^2 = \begin{pmatrix} I & AB^{\#} \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} AB^{\pi}A + B^2 & 0 \\ 0 & B^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ B^{\#}A & I \end{pmatrix}$$

olsun. M matrisinin ayrışımı Teorem 3.34 deki gibidir. Lemma 3.3.2 den kolayca görülür ki $M^{\#}$ nin var olması için gerek ve yeter koşul $MX^2 = M$ ve $YM^2 = M$ olacak şekilde R üzerinde X ve Y matrislerinin bulunmasıdır.

$$X = \begin{pmatrix} I & O \\ -B^{\#}A & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix} \text{ ve } Y = \begin{pmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Y_3 & Y_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -AB^{\#} \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

olsunlar. Bu durumda,

$$AB^{\pi} = (AB^{\pi}A + B^2)X_1 \tag{3.25}$$

$$B = (AB^{\pi}A + B^2)X_2 \qquad (3.26)$$

$$B = B^2X_3 \qquad (3.26)$$

$$0 = B^2X_4 \tag{3.28}$$

$$Y_1AB^{\pi}A + Y_1B^2 = B^{\pi}A \tag{3.29}$$

$$Y_2B^2 = B \tag{3.30}$$

$$Y_3AB^{\pi}A + Y_3B^2 = B \tag{3.31}$$

$$Y_4B^2 = 0 \tag{3.32}$$

eşitlikleri elde edilir. Bu eşitliklerden sırasıyla,

$$AB^{\pi}AB^{\pi}X_1 = B^{\pi}AB^{\pi}AB^{\pi}X_1 = B^{\pi}AB^{\pi}AX_1 = B^{\pi}AB^{\pi} = AB^{\pi}$$

ve

$$Y_1AB^{\pi}AB^{\pi} = AB^{\pi}$$

olduğu elde edilir. Lemma 3.3 2 den $(AB^{\pi})^{\#}$ inversinin var olduğunu biliyoruz.(i) nin yeterlilik kısmını ve (ii) nin ifadesini elde etmek için,

$$X = \begin{pmatrix} (AB^{\pi})^{\#} & B^{\#} \\ B^{\#} & -B^{\#}AB^{\#} \end{pmatrix}$$

alalım. Lemma 3.3.2 den

$$MX = \begin{pmatrix} A(AB^{\pi})^{\#} + BB^{\#} & 0 \\ 0 & BB^{\#} \end{pmatrix} = XM$$

dir. Dolayısıyla $XMX = M,\ MXM = M$ olduğunu göstermek kolaydır. Böylece $X = M^{\#}$ elde edilir.

3.4. 2x2 Tipinde Bazı Özel Blok Parçalı Matrisler için Grup İnversler

Bu kısımda birim elemanlı bir halka üzerinde verilen 2x2 tipinde bazı özel parçalanmış matrislerin grup inverslerinin varlığı için gerek ve yeter koşullar verip grup inveslerin mevcut olması durumunda bunların gösterimleri verilecektir. Bubnla ilgili olarak daha önce verilenlere ek olarak bazı Lemmaları ifade edebiliriz.

Lemma 3.4.1 R, 1 birimli ve değişmeli bir halka, A ise R halkası üzerinde $n \times n$ bir matris olsun. Bu durumda aşağıda verilen ifadeler denktirler:

(1) $A^{\#}$ mevcuttur.

(2) $A = A^2L = LA^2$ olacak şekilde bir L matrisi mevcut olup $A^{\#} = LAL = AL^2 = LA^2$ dir.

(3) $R(A) = R(A^2), R_r(A) = R_r(A^2)$ dir.

(4) $A = A^2X = YA^2$ olacak şekilde X ve Y matrisleri mevcut olup $A^{\#} = YAX = AX^2 = Y^2A$ eşitlikleri sağlanır.

İspat.

(1) $\Rightarrow$ (2): Eğer $A^{\#}$ mevcut ise, $A = A^2A^{\#} = A^{\#}A^2$ olduğu açıktır.

$(2) \Rightarrow (3), (3) \Rightarrow (4)$: olduğu aşikardır.

$(4) \Rightarrow (1)$: Eğer $A = A^2X = YA^2$ ise $YA = YA^2X = AX$ olur ve dolayısıyla $YAX = Y^2A = AX^2$ olduğu görülür. Buradan basit hesaplamalarla

$$A(AX^2) = AX = YA = (Y^2A)A = (AX^2)A,$$

$$A^2(AX^2) = AA^2XX = A^2X = A$$

$$A(AX^2)^2 = YAAX^2 = YAX = AX^2,$$

yani $A^{\#} = AX^2$ olduğu elde edilmiş olur.

Lemma 3.4.2. R, 1 birimli bir tamlık bölgesi ve $A \in R^{n\times n}$ olsun. Bu durumda aşağıdaki koşullar denktir:

(1) $A^{\#}$ mevcuttur.

(2) Bazı $X \in R^{n\times n}$ matrisleri için $A = A^2X$ sağlanır. Bu durumda, $A^{\#} = AX^2$ olur.

(3) Bazı $Y \in R^{n\times n}$ matrisleri için $A = YA^2$ sağlanır. Bu durumda, $A^{\#} = Y^2A$ dır.

(4) $R(A) = R(A^2)$, burada $R(A) = \{Ax : x \in R^{nx1}\}$ dir.

(5) $R_r(A) = R_r(A^2)$, burada $R_r(A) = \{yA : y \in R^{1xn}\}$ dir.

Lemma 3.4.3. R, 1 birimli ve değişmeli bir halka ve $A, B \in R^{n\times n}$ olsun. Eğer AB, BA ve S matrisleri regüler olmak üzere, $R(B) = R(BA)$, $R_r(B) = R_r(AB)$, $R((AB)^{\pi r}A) = R(S)$ ve $R_r(S) = R_r(A(BA)^{\pi l})$ ise bu takdirde

(1) $B(AB)^{\pi l} = (BA)^{\pi r}B = 0$.

(2) $A(I - S_3A^2)(BA)^{\pi l} = 0$.

(3) $(AB)^{\pi r}(I - A^2S_3)A = 0$.

(4) $BAS_3 = 0$.

(5) $S_3AB = 0$.

(6) $BAS_4B = B$.

(7) $BS_1AB = B$.

(8) $AS_3A^2 + AS_4BA = A$.

(9) $A^2S_3A + ABS_1A = A$.

(10) $S_1A^2 + S_2BA = 0$.

(11) $A^2S_4 + ABS_2 = 0$

dir, burada

$$S_1 = (AB)^{(1)}(I - A^2S_3)$$

$$S_2 = -(AB)^{(1)}(A^2 - A^2S_3A^2)(BA)^{(1)}$$

$$S_3 = (BA)^{\pi l}(S)^{(1)}(AB)^{\pi r}$$

$S_4 = (I - S_3A^2)(BA)^{(1)}$ ve $(AB)^{(1)} \in (AB)\{1\}, (BA)^{(1)} \in (BA)\{1\}, (S)^{(1)} \in S\{1\}$ dir.

İspat:

(1) Eğer $R_r(B) = R_r(AB)$ ise $B = UAB$ olacak şekilde R üzerinde bir U matrisi vardır ve böylece $B = UAB(AB)^{(1)}AB = B(AB)^{(1)}AB$ olur. Başka bir deyişle, $B(AB)^{\pi l} = 0$ dir. Öte yandan $R(B) = R(BA)$ eşitliğinden, R üzerinde $B = BAV$ olacak şekilde bir V matrisnin var olduğu, dolayısıyla $B = BA(BA)^{(1)}BAV = BA(BA)^{(1)}B$ olduğu görülür. Yani $(BA)^{\pi r}B = 0$ eşitliği sağlanır.

$(2), (3)$: Eğer $R_r(S) = R_r\left(A(BA)^{\pi l}\right)$ ise bu durumda R üzerinde $A(BA)^{\pi l} = XS$ olacak şekilde bir X matrisi mevcuttur. Böylece $AS_3A^2(BA)^{\pi l} = A(BA)^{\pi l}S^{(1)}$, $(AB)^{\pi r}A^2(BA)^{\pi l} = A(BA)^{\pi l}S^{(1)}S = XSS^{(1)} = XS = A(BA)^{\pi l}$ eşitlikleri elde edilir. Öte yandan $R((AB)^{\pi r}A) = R(S)$ eşitliği kullanılarak, $(AB)^{\pi r}A = SY$ olacak şekilde R üzerinde bir Y matrisi vardır, böylece,

$$\begin{aligned}(AB)^{\pi r}A^2S_3A &= (AB)^{\pi r}A^2(BA)^{\pi l}S^{(1)}(AB)^{\pi r}A \\ &= SS^{(1)}(AB)^{\pi r}A = SS^{(1)}SY = SY = (AB)^{\pi r}A\end{aligned}$$

olduğu görülür.

$(4), (5)$: İspat aşikardır.

$(6) - (11)$: $(1), (4)$ ve (5) eşitliklerinden (6) ve (7) eşitlikleri elde edilir. (2) eşitliği (8) ile (10) eşitliğinin ve (3) ise (9) ve (11) eşitliklerinin sağlandığını ifade eder.

Lemma 3.4.4. R, 1 birimli bir tamlık bölgesi ve $A, B \in R^{n\times n}$ olsun. Eğer AB ve BA matrsilerinin her ikisi de regüler ise, bu durumda herhangi bir $(AB)^{(1)} \in (AB)\{1\}$ ve $(BA)^{(1)} \in (BA)\{1\}$ matrisleri için

$$r(AB) + r((AB)^{\pi r}A) = r(A) = r(BA) + r\left(A(BA)^{\pi l}\right)$$

rank eşitlikleri sağlanır.

İspat. Verilenlerden

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A & A(BA)^{(1)}BA \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A & A(BA)^{(1)}BA \\ BA & BA \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} A - A(BA)^{(1)}BA & A(BA)^{(1)}BA \\ 0 & BA \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} A(BA)^{\pi l} & 0 \\ 0 & BA \end{pmatrix},$$

ve

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} A & 0 \\ AB(AB)^{(1)}A & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} A & AB \\ AB(AB)^{(1)}A & AB \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} A - AB(AB)^{(1)}A & 0 \\ AB(AB)^{(1)}A & AB \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} (AB)^{\pi r}A & 0 \\ 0 & AB \end{pmatrix}$$

olduğu kolayca görülür.

Teorem 3.4.1. R, 1 birimli ve değişemli bir halka ve $A, B \in R^{n\times n}$ olmak üzere $M = \begin{pmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{A} \\ \mathrm{B} & 0 \end{pmatrix}$ olsun. Bu durumda,

(1) $M^{\#}$'ın mevcut olabilmesi için gerek ve yeter şart,

(i) $R(B) = R(BA)$, $R_r(B) = R_r(AB)$

(ii) AB ve BA'nın her ikisi birden regülerdir.

(iii) S regüler olup keyfi $(AB)^{(1)} \in (AB)\{1\}$ ve $(BA)^{(1)} \in (BA)\{1\}$ matrisleri için $R((AB)^{\pi r}A) = R(S)$, $R_r(S) = R_r(A(BA)^{\pi l})$ dır.

(2) Eğer $M^{\#}$ mevcutsa, S_1, S_2, S_3, S_4 matrisleri Lemma 3.4.3 deki gibi olmak üzere,

$$M^{\#} = \begin{pmatrix} AS_3AS_3A + AS_4BS_1A + AS_3AS_4B + AS_4BS_2B & AS_3AS_3A + AS_4BS_1A \\ BS_1AS_3A + BS_2BS_1A + BS_1AS_4B + BS_2BS_2B & BS_1AS_3A + BS_2BS_1A \end{pmatrix}$$

şeklindedir.

İspat (1): (gerek şart)

Eğer $M^{\#}$ mevcutsa bu durumda Lemma 3.4.1 gereğince, $M = M^2X = YM^2$ olacak şekilde R üzerinde X ve Y matrisleri bulunur.

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ I & I \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I & 0 \\ -I & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Y_3 & Y_4 \end{pmatrix}$$

olsun. Bu durumda

$$A = ABX_2 + A^2X_4 \tag{3.33}$$

$$B = BAX_3 \tag{3.34}$$

$$0 = BAX_4 \tag{3.35}$$

$$0 = ABX_1 + A^2X_3 \tag{3.36}$$

$$A = Y_1A^2 + Y_2BA \tag{3.37}$$

$$B = Y_3AB \tag{3.38}$$

$$0 = Y_1AB \tag{3.39}$$

$$0 = Y_3A^2 + Y_4BA \tag{3.40}$$

eşitlikleri yazılabilir.

(i) (3.34) ve (3.38) eşitliklerinden açıktır.

(ii) Eğer $M^{\#}$ mevcutsa B'nin regüler olduğunu görmek kolaydır. Bu durumda (3.34) ve (3.38) eşitliklerini kullanarak $BA = BB^{(1)}BA = BAX_3B^{(1)}BA$ ve $AB = ABB^{(1)}B = ABB^{(1)}Y_3AB$ elde edilir. Başka bir deyişle BA ve AB'nin her ikisi birden regülerdir.

(iii) Bu durumda kolayca gösterilebilir ki bazı elementer matris dönüşümleri ile $\begin{pmatrix} M^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ matrisi $\begin{pmatrix} AB & 0 & 0 \\ 0 & BA & 0 \\ 0 & 0 & S \end{pmatrix}$ matrisine dönüşebilir. Böylece S regülerdir. Öte yandan (3.33) eşitliğinden

$$(AB)^{\pi r}A = (AB)^{\pi r}(ABX_2 + A^2X_4) = (AB)^{\pi r}A^2X_4 \tag{3.41}$$

elde edilir. Ayrıca (3.37) eşitliğinden

$$A(BA)^{\pi l} = (Y_1A^2 + Y_2BA)(BA)^{\pi l} = Y_1A^2(BA)^{\pi l} \tag{3.42}$$

eşitliği elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}(AB)^{\pi r}A^2(BA)^{\pi l} &= SS^{(1)}(AB)^{\pi r}A^2(BA)^{\pi l} \\ &= SS^{(1)}(AB)^{\pi r}A^2 - SS^{(1)}(AB)^{\pi r}A^2(BA)^{(1)}BA\end{aligned}$$

olduğundan, (3.35) eşitliği kullanılarak $(AB)^{\pi r}A^2(BA)^{\pi l}X_4 = SS^{(1)}(AB)^{\pi r}A^2X_4$ elde edilir. Böylece, (3.35) ve (3.41) eşitlikleri kullanılarak,

$$\begin{aligned}SS^{(1)}(AB)^{\pi r}A = SS^{(1)}(AB)^{\pi r}A^2X_4 &= (AB)^{\pi r}A^2(BA)^{\pi l}X_4 \\ &= (AB)^{\pi r}A^2(I - (BA)^{(1)}BAX_4 = (AB)^{\pi r}A^2X_4 = (AB)^{\pi r}A\end{aligned}$$

bulunur. Benzer olarak (3.39) ve (3.42) eşitlikleri kullanılarak,

$$A(BA)^{\pi l}S^{(1)}S = A(BA)^{\pi l}$$

bulunmuş olur. Sonuç olarak

$$R((AB)^{\pi r}A) = R(S), \qquad R_r(S) = R_r(A(BA)^{\pi l})$$

eşitlikleri yazılabilir.

Şimdi de (2) eşitliğini ve teoremin yeter şartını ispatlayalım.

$$\begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_2B & S_1A \\ S_4B & S_3A \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Y_3 & Y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AS_3 & AS_4 \\ BS_1 & BS_2 \end{pmatrix}$$

olsun. Lemma 3.4.3 ten (3.33)-(3.40) eşitliklerinin sağlandığı kolayca görülür. Ayrıca Aynı Lemma dan Teoeremin gerek kısmının sağlandığı da görülür.

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Y_3 & Y_4 \end{pmatrix}$$

olsun. Bu durumda, $M = M^2X = YM^2$ olacaktır. Sonuç olarak Lemma 3.4.1' e göre $M^{\#}$ mevcut olup

$$\begin{aligned} M^{\#} &= Y^2M \\ &= \begin{pmatrix} AS_3AS_3A + AS_4BS_1A + AS_3AS_4B + AS_4BS_2B & AS_3AS_3A + AS_4BS_1A \\ BS_1AS_3A + BS_2BS_1A + BS_1AS_4B + BS_2BS_2B & BS_1AS_3A + BS_2BS_1A \end{pmatrix} \end{aligned}$$

elde edilir ve böylece ispat tamamlanmış olur.

Örnek 3.4.1. $\mathbb{Z}$ tamsayılar halkası üzerinde olmak üzere, $M = \begin{pmatrix} A & A \\ B & 0 \end{pmatrix}$, $Z/(6Z)$ üzerinde bir matris olsun, burada

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dir. Bu takdirde,

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

olacaktır. Öte yandan

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} AB = BA \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

olduğu için $R(B) = R(BA), R_r(B) = R_r(AB)$ 'dir. AB ve BA 'nın her ikisinin de regüler olduğunu doğrulamak için

$$(AB)^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ (BA)^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

seçilmesi yeterlidir. Böylece,

$$(AB)^{\pi r} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad (BA)^{\pi l} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$(AB)^{\pi r} A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A(BA)^{\pi l} \text{ ve } S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

olup buradan da $S^2 = S$ olduğu açıkça görülür. Ayrıca,

$$(AB)^{\pi r} A = S \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A(BA)^{\pi L} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} S,$$

başka bir deyişle, $R((AB)^{\pi r} A = R(S)$, $R_r(S) = R_r(A(BA)^{\pi l})$ eşitlikleri sağlanır. Teorem 3.4.1 gereğince $M^{\#}$ mevcuttur. Öte yandan $S^{(1)} = I_3$ seçilirse,

$$S_{1=} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ S_{2=} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_{3=} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad S_{4=} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

olur. Bu nedenle,

$$M^{\#} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 3 & 0 & -1 & 3 \\ -2 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

olduğu görülür.

Teorem 3.4.2. R, 1 birimli bir tamlık bölgesi ve $A, B \in R^{n\times n}$ olmak üzere $M = \begin{pmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{A} \\ \mathrm{B} & 0 \end{pmatrix}$ olsun. Bu takdirde,

(1) $M^{\#}$'un mevcut olabilmesi için gerek ve yeter şart,

(i) $r(B) = r(BA) = r(AB)$,

(ii) AB ve BA'nın her ikisi birden regülerdir.

(iii) S regülerdir ve bazı $(AB)^{(1)} \in (AB)\{1\}$ için $r(A) = r(B) + r(S)$

koşullarının sağlanmasıdır.

(2) Eğer $M^{\#}$ mevcutsa, bu durumda Teorem 3.4.1 deki gibi $M^{\#}$ aynı gösterime sahiptir.

İspat (1): (gerek şart)

Teorem 3.4.1 den, $R(B) = R(BA)$, $R_r(B) = R_r(AB)$ olduğunu biliyoruz. Böylece $r(B) = r(BA) = r(AB)$'dir. Yine Teorem 3.4.1 kullanılarak AB, BA ve S'nin regüler olduğu ve $R((AB)^{\pi r}A) = R(S)$ olduğu görülür. Böylece $r((AB)^{\pi r}A) = r(S)$ elde edilir. Sonuç olarak, Lemma 3.4.4'den $r(A) = r(BA) + r(A(BA)^{\pi l}) = r(B) + r(S)$ rank eşitliğinin sağlandığı görülür. Eğer $r(B) = r(BA)$ ise, bu takdirde $B = BAX$ olacak şekilde bir X matrisi vardır. Öte yandan BA matris çarpımının regülerliğinden $BA(BA)^{(1)}B = BAX = B$ olduğu görülür. Böylece de $R(B) = R(BA)$ olduğu sağlanmış olur. Benzer olarak $R_r(B) = R_r(AB)$ dir. Ayrıca $r(A) = r(B) + r(S)$ ve $r(B) = r(BA)$ olduğundan, Lemma 3.4.4 e göre $r(A(BA)^{\pi l}) = r(S)$ rank eşitliği sağlanır. Bundan dolayı, $A(BA)^{\pi l} = JS$ eşitliğini sağlayacak şekilde bir J matrisi mevcuttur. Bu durumda S' nin regülerliği dikkate alınırsa $A(BA)^{\pi l}S^{(1)}S = JS = A(BA)^{\pi l}$elde edilir. Başka bir deyişle $R_r(A(BA)^{\pi l}) = R_r(S)$eşitliği sağlanır. Benzer şekilde $R((AB)^{\pi r}A) = R(S)$ eşitliğinin sağlandığı da gösterilebilir.
(2) nin ispatı ise Teorem 3.4.1 de verilmişti.

Uyarı 3.4.1. Teorem 3.4.2'nin üçüncü koşulundaki $r(A) = r(B) + r(S)$ eşitliği aşağıdakilerden herhangi biri ile değiştirilebilir:

(i) $r((AB)^{\pi r}A) = r(S)$

(ii) $r(A(BA)^{\pi l}) = r(S)$

(iii) $r(A) = r(B) + r((AB)^{\pi r}A)$

(iv) $r(A) = r(B) + r(A(BA)^{\pi l})$

Teorem 3.4.3. R, 1 birimli bir tamlık bölgesi, $A, B \in R^{n\times n}$ olmak üzere $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{A} \\ \mathrm{B} & 0 \end{pmatrix}$ ve $r(B) \geq r(A)$ olsun. Bu durumda,

(1) $M^{\#}$ mevcuttur $\Leftrightarrow r(A) = r(B) = r(AB) = r(BA)$ olup AB ve BA regülerdir.

(2) Eğer $M^{\#}$ mevcutsa,

$$M^{\#} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix}$$

formundadır, burada

$$M_{11} = (AB)^{\#}A - (AB)^{\#}A^2(BA)^{\#}B,$$

$$M_{12} = (AB)^{\#}A,$$

$$M_{21} = (BA)^{\#}B - B(AB)^{\#}A^2(BA)^{\#} + B(AB)^{\#}A(AB)^{\#}A^2(BA)^{\#}B,$$

$$M_{22} = -B(AB)^{\#}A^2(BA)^{\#}$$

dir.

İspat. (1): (gerek şart): Teorem 3.4.2 gereğince $r(B) = r(BA) = r(AB)$ olup hem AB hem de BA matrisi regülerdir. Böylece $r(A) \geq r(BA) = r(B) \geq r(A)$, başka bir deyişle $r(A) = r(B)$ dir.

(yeter şart): Eğer $r(A) = r(B) = r(AB) = r(AB)$ ise, bu takdirde K_R üzerinde $A = ABX = YBA$ ve $B = BAP = QAB$ olacak şekilde X, Y, P ve Q matrisleri bulunur. Böylece,

$$\begin{cases} AB(AB)^{(1)}A = ABX = A, A(BA)^{(1)}BA = YBA = A \\ BA(BA)^{(1)}B = BAP = B, B(AB)^{(1)}AB = QAB = B \end{cases}$$

eşitlikleri sağlanır. Öte yandan $R(A) = R(AB)$, $R(B) = R(BA)$, $R_r(A) = R_r(BA)$, $R_r(B) = R_r(AB)$ ve $S = 0$, olacağından

$$r(A) = r(B) + r(S)$$

ve

$$R(AB) = AR(B) = AR(BA) = ABR(A) = ABR(AB) = R(ABAB)$$

$$R_r(BA) = R_r(B)A = R_r(AB)(A)BA = R_r(BA)BA = R_r(BABA)$$

eşitlikleri elde edilir. Böylece Lemma 3.4.2 gereğince $(AB)^{\#}$ ve $(BA)^{\#}$ 'nin her ikisinin de mevcut olduğu sonucuna ulaşılır. Teorem 3.4.2 den $M^{\#}$ vardır.

(2): (yeter şart) Teorem 3.2 kullanılarak, $(AB)^{(1)} = (AB)^{\#}$ ve $(BA)^{(1)} = (BA)^{\#}$ seçilerek, $S = 0$ ve $S_1 = (AB)^{\#}$, $S_2 = -(AB)^{\#}A^2(BA)^{\#}$, $S_3 = 0$, $S_4 = (BA)^{\#}$ olmak üzere, $M^{\#} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix}$ yazılabilir, burada

$$M_{11} = (AB)^{\#}A - (AB)^{\#}A^2(BA)^{\#}B,$$

$$M_{12} = (AB)^{\#}A,$$

$$M_{21} = (BA)^{\#}B - B(AB)^{\#}A^2(BA)^{\#} + B(AB)^{\#}A(AB)^{\#}A^2(BA)^{\#}B,$$

$$M_{22} = -B(AB)^{\#}A^2(BA)^{\#}$$

olacaktır.

Teorem 3.4.4. R, 1 birimli ve değişmeli bir halka, $A, B \in R^{n\times n}$ ve $A^2 = A$ olmak üzere $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{A} \\ \mathrm{B} & 0 \end{pmatrix}$ olsun. Bu durumda,

(1) $M^{\#}$ inversi mevcuttur $\Leftrightarrow R(B) = R(BAB)$, $R_r(B) = R_r(BAB)$ dir.

(2) Eğer $M^{\#}$ mevcutsa, $M^{\#} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix}$ formundadır, burada,

$$M_{11} = (I - AB(AB)^{\#} + (AB)^{\#})A - (AB)^{\#},$$

$$M_{12} = (I - AB(AB)^{\#} + (AB)^{\#})A$$

$$M_{21} = (BA)^{\#}(B - I + (BA)^{\#}B),$$

$$M_{22} = -(BA)^{\#}$$

dir.

İspat (1): (gerek şart) Teorem 3.4.1'den

(i) $R(B) = R(BA)$, $R_r(B) = R_r(AB)$,

(ii) Hem AB hem de BA regülerdir,

(iii) S regüler olup keyfi $(AB)^{(1)} \in (AB)\{1\}$ ve $(BA)^{(1)} \in (BA)\{1\}$ matrisleri için

$$R((AB)^{\pi r}A) = R(S), \quad R_r(S) = R_r(A(BA)^{\pi l})$$

şartlarının sağlandığı görülür. Bu nedenle $A(BA)^{\pi l} = YS = Y(AB)^{\pi r}A(BA)^{\pi l}$ olacak şekilde bir Y matrisimevcuttur. (i)'den $R_r(B) = R_r(BAB)$ olduğu bulunur. Benzer şekilde $R(B) = R(BAB)$ olduğu görülür.

(yeter şart): Eğer $R(B) = R(BAB)$ ve $R_r(B) = R_r(BAB)$ ise bu takdirde $B = BABX = YBAB$ olacak şekilde keyfi X ve Y matrisleri bulunabilir, bu nedenle $BAB = BABXAB = BABXAYBAB$ yazılabilir, başka bir deyişle BAB matrisi regülerdir. Aynı şekilde $R(B) = R(BAB)$ eşitliğinden $R(AB) = R(ABAB)$ elde edilir. Öte yandan $R_r(B) = R_r(BAB) \subseteq R_r(AB) \subseteq R_r(B)$ olduğundan $R_r(B) = R_r(AB)$ olacaktır. .Bu nedenle $R_r(AB) = R_r(BAB) = R_r(B)AB = R_r(AB)AB = R_r(ABAB)$ yazılabilir. Lemma 3.4.1 gereğince $(AB)^{\#}$ mevcuttur. Benzer olarak $(BA)^{\#}$ da mevcuttur.

$\begin{pmatrix} M^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ matrisi, bazı elementer matris dönüşümleri ile $\begin{pmatrix} AB & 0 & 0 \\ 0 & BA & 0 \\ 0 & 0 & S \end{pmatrix}$ haline getirilebilir. Ayrıca,

$$\begin{pmatrix} M^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} AB & 0 & 0 \\ 0 & BA & 0 \\ 0 & 0 & S \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & A & 0 \\ -BAB & BA & 0 \\ 0 & 0 & O \end{pmatrix}$$
$$\to \begin{pmatrix} 0 & A & 0 \\ BAB & 0 & 0 \\ 0 & 0 & O \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & A & 0 \\ BAB & 0 & 0 \\ 0 & 0 & O \end{pmatrix}$$

yazılabileceğinden S matrisi regülerdir. $S = SS^{(1)}S$ eşitliğinden,

$$(AB)^{\pi r}A\big(I - (BA)^{(1)}BA\big)B = SS^{(1)}(AB)^{\pi r}A(I - (BA)^{(1)}BA)B$$

yani,

$$(AB)^{\pi r}A(BA)^{(1)}BAB = SS^{(1)}(AB)^{\pi r}A(BA)^{(1)}BAB$$

eşitliği elde edilir. Böylece

$$(AB)^{\pi r}A(BA)^{(1)}BABXA = SS^{(1)}(AB)^{\pi r}A(BA)^{(1)}BABXA,$$

başka bir deyişle,

$$(AB)^{\pi r}A(BA)^{(1)}BA = SS^{(1)}(AB)^{\pi r}A(BA)^{(1)}BA$$

elde edilir. Bu nedenle,

$$\begin{aligned}(AB)^{\pi r}A &= (AB)^{\pi r}A(BA)^{\pi l} + (AB)^{\pi r}A(BA)^{(1)}BA \\ &= S(I + S^{(1)}(AB)^{\pi r}A(BA)^{(1)}BA)\end{aligned}$$

olduğu, başka bir deyişle, $R((AB)^{\pi r}A) = R(S)$ eşitliği sağlanır. Benzer şekilde $R_r(A(BA)^{\pi l}) = R_r(S)$ eşitliğinin sağlandığı da gösterilebilir. Dalayışıyla Teorem 3.4.1 kullanılarak $M^{\#}$ grup inversinin mevcut olduğu sonucuna varılır.

(yeter şart): $(AB)^{(1)} = (AB)^{\#}$ ve $(BA)^{(1)} = (BA)^{\#}$ seçelim. Bu durumda Teorem 3.4.1 dikkate alınırsa,

$$S_1 = (AB)^{\#},\ S_2 = -(BA)^{\#}(BA)^{\#},\ S_3 = (BA)^{\pi}(BA)^{\pi},\ S_4 = (BA)^{\#}$$

olduğu ve dolayısıyla da $M^{\#} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix}$ olduğu elde edilir, burada

$$M_{11} = (I - AB(AB)^{\#} + (AB)^{\#})A - (AB)^{\#}$$

$$M_{12} = (I - AB(AB)^{\#} + (AB)^{\#})A$$

$$M_{21} = (BA)^{\#}(B - I + (BA)^{\#}B)$$

$$M_{22} = -(BA)^{\#}$$

dir.

4. SONUÇ ve ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında kare olmayan ya da kare olduğu halde bilinen anlamda inversi mevcut olmayan matrisler için geliştirilen ve lineer denklem sistemlerinin genel durumda çözümünde kullanılan ve bilinen anlamda invers özelliklerini de sağlayan genelleştirilmiş invers, matrislerin Grup inversleri ve parçalı matrislerde grup invers kavramları ele alınmıştır. Bu amaçla bir matrisin genelleştirilmiş inversi, bir matrisin Drazin inversi ve bunun özel durumu olarak bir matrisin grup inversi tanımları verilerek grup inverslerin çeşitli özellikleri ortaya konulmuştur.

Ayrıca keyfi boyutlu bir matrisi 2×2 tipinde alt blok matrislere parçalayarak, oluşturulan alt blok matrislerin özel durumlarına göre parçalı matrisler için grup invers hesaplama yöntemleri geliştirilmiş, verilen yöntemler çeşitli örneklerle açıklanmış ve geliştirilen yöntemlerin çeşitli uygulamaları verilmiştir.

Bunun dışında bir matrisin daha değişik parçalanışları da dikkate alınarak bu parçalı matrisler için grup invers hesaplama yöntemleri geliştirilebilir. Ayrıca grup inverslerin hesaplanmasında bilinen anlamda inversler genelleştirilmiş inversler için verilenlere paralel olarak bazı yeni algoritmalar oluşturulabilir ve çeşitli bilgisayar programları geliştirlebilir.

5. KAYNAKLAR

Ben-Israel, A., Charnes, A., 1963, Contributions to the theory of generalized inverses. SIAM J. Appl. Math., Vol. 11, 667-699 s.

Bhimasankaram, P., Mitra, S. K., 1969, On a theorem of Rao on g-inverses of matrices, Sankhya Ser. A, Vol. 31, 365-368 s.

Bjerhammer, A., 1951, Rectangular reciprocal matrices with special reference to geodetic calculations, Bull. Geodesique, Vol. 52, 188-220 s.

Bjerhammer, A., 1951, Application of the calculus of matrices to the method of least squares with special reference to geodetic calculations, Kungl. Tekn. H11gsk. Hand. Stockholm. No. 49, 1-86 s.

Bjerhammer, A., 1958, A generalized matrix algebra, Kungl. Tekn. Hogsk. Handl. Stockholm. No. 124, 1-32 s.

Bose, R. C., 1959, *Analysis of Variance*. unpublished lecture notes, University of North Carolina.

Bott, R., Duffin, R. J., 1953, On the algebra of Networks. Trans. Amer. Math. Soc.. Vol. 74, 99-109 s.

Branson, R., 1999 Matris İşlemleri, Schaum Serisi. (Editor: H. Hilmi Hacısalihoğlu) Nobel Yayın Dağıtım, Ankara, 212 s.

Bu, C., Li, M., Zhang, K., Zheng, L., 2009, Group inverse for thr block matrices with an invertible subblock, Applied Mathematics and Computation, 215, 132-139 s.

Campbell, S.L. Meyer, C.D. 1979. Genaralized Inverse of Linear Transformations. London,

Campbell, S.L. 1983. The Drazin inverse systems of second order linear differantial equations, Linear Multilinear Algebra, 14:195-198

Campbell, S.L. Meyer, C.D. 1991. Genaralized Inverses of Linear Transformations. Newyork.

Chen, X. Hartwig, R.E. 1996. The group inverse of a triangular matrix, Linear Algebra, 237/238:97-108.

Chernoff, H., 1953, Locally optimal designs for estimating parameters. Ann. Math. Statist., Vol. 24, 586-602 s.

Chipman, J. S., 1968, Specification problems in regression analysis, Theory and Application of Generalized Inverses and Matrices, Symposium Proceedings, Texas Technological College. Mathematics Series No. 4, 114-176 s.

Chipman, J. S., Rao, M. M., 1964, Projections, generalized inverses and quadratic forms. J. Math. Anal. Appl., Vol. 9, 1-11 s.

Dragana, S.C.I. 2009. Expression of the Drazin MP-inverse of partitioned matrix and quotient identity of generalized Schur complement. Applied Mathematics and computation, 213:18-24.

Gonzalez, N.C. Dopazo, E. 2005. Represantations of the Drazin inverse for a class of block matrices. Linear Algebra, 400:253-269

Gonzalez, N.C. Dopazo, E. Robles, J. 2006. Formulas fort he Drazin inverse of special block matrices. Applied Mathematics and Computation, 174:252-270.

Greville, T. N. E., 1959, The pseudo-inverse of a rectangular matrix and its application to the solution of systems of linear equations, SIA M Rev., Vol. 1, 38-43 s.

Gülderen, E. 2014. İki Matrisin Toplamının Drazin İnversi ve Drazin İnverslerin Çeşitli Uygulamaları. Y. Lisans Tezi, Ordu Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Ana Bilim Dalı, Fen Edebiyat Fakültesi.

Hacısalihoğlu H.H., 1977. *Lineer Cebir*. Matbaa Teknisyenleri Koll. Şti., İstanbul, 716 s.

Hartwig, R.E. Li, X. Wei, Y. 2006 Representations fort he Drazin inverse of 2 x 2 block matrix, 27:757-771

Hartwig, R.E. Wang, G. Wei, Y. 2011. Some additive results on Drazin inverse. Lineer Algebra and its Applications, 322:207-217

Lancaster, P., 1969. Theory of matrices, Academic Pres, New York, 570 s.

Li, X. Wei, Y. 2004. An expression of the Drazin inverse of a perturbed matrix, 153:187-198

Li, X. Wei, Y. 2007. A note on the Repsesentations for the Drazin inverse of 2 x 2 block matrices. Lineer Algebra and its Applications, 423 pp.

Li, X. 2011. A repsesentations for the Drazin inverse of block matrices with a singular generalized Schur complement. Applied Mathematics and Computation, 217 pp.

Liu, X., Yang, H. 2012. Further results on the group inverses and Drazin inverses of anti-triangular block matrices. Appl. Math. Comput. 218, 8978-8986.

Mitra, S. K., 1968, On a generalized inverse of a matrix and applications, Sankhya Ser. A, Vol. 30, 107-114 s.

Mitra, S. K., 1968, A new class of g-inverse of square matrices, Sankhya Ser. A, Vol. 30, 323-330 s.

Mitra, S. K., Bhimasankaram, P., 1970, Some results on idempotent matrices and a matrix equation connected with the distribution of quadratic forms, Sankhya Ser. A. Vol. 32, 353-356 s.

Mitra, S. K., Radhakrishna Rao, C., 1968, Simultaneous reduction of a pair of quadratic forms. Sankhya Ser. A, Vol. 30, 313-322 s.

Mitra, S. K., Rao, C. R., 1968, A note on a previous lemma in the theory of least squares and some further results. Sankhya Ser. A. Vol. 30, 245-252 s.

Moore, E. H., 1920, On the reciprocal of the general algebraic matrix (abstract), Bull. Amer. Math. Soc., Vol. 26, 394-395 s.

Moore, E. H., 1935, *General Analysis,* American Philosophical Society, Philadelphia.

Penrose, R., 1955, A generalized inverse for matrices, Proc. Cambridge Philos. Soc., Vol. 51, 406-413 s.

Penrose, R., 1956, On best approximate solutions of linear matrix equations, Proc. Cambridge Philos. Soc., Vol. 52, 17-19 s.

Radhakrishna Rao, C., 1962, A note on a generalized inverse of a matrix with applications to problems in mathematical statistics, J. Roy. Stat. Soc. Ser. B. Vol. 24, 152-158 s.

Radhakrishna Rao, C., 1965, Linear Statistical Inference and its Applications, New York, Wiley.

Radhakrishna Rao, C., 1966, *Generalized inverse for matrices and its applications in mathematical statistics*, Research papers in Statistics, Festschrift for J. Neyman, New York, Wiley,

Radhakrishna Rao, C., 1967, Calculus of generalized inverse of matrices. Part 1: General theory, Sankhya Ser. A, Vol. 29, 317-342 s.

Rao, C.R., Mitra, S.K. 1971. Generalized inverse if matrices and its Applications, Wiley, New York.

Scroggs, J. E., Odell, P. L., 1966, An alternative definition of the pseudo-inverse of a matrix, SIA M J. Appl. Math., Vol. 14, 796-810 s.

Sheng, Y., GE, Y., Zhang, H., Cao, C. 2013. Group inverse for a class of 2x2 block matrices over rings. Appl. Math. Comput. 219 9340-9346

Tseng, Y. Y., 1949, Generalized inverses of unbounded operators between two unitary spaces, Dokl. Akad. Nauk. SSSR., Vol. 67, 431-434 s.

Tseng, Y. Y., 1949, Properties and classifications of generalized inverses of closed operators, Dokl. Akad. Nauk. SSSR, Vol. 67, 607-610 s.

Tseng, Y. Y., 1956, Virtual solutions and general inversions, Uspehi. Mat. Nauk., Vol. 11, 213-215 s.

Zhang, K., Bu, C. 2012. Group inverses of matrices over right ore domains, Applied Mathematics and Computation, 218, 6942-6953.

Zhao, J., Bu, C. 2010. Group inverses for the block matrix with two identical subblock over skew fields, Elektron. J. Linear Algebra 21, 63-75.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	**:**	Erman Oğuzhan ÜÇGÜL
Doğum Yeri	**:**	Ordu
Doğum Tarihi	**:**	29.07.1983
Yabancı Dili	**:**	İngilizce
E-mail	**:**	ermanucgul@gmail.com
İletişim Bilgileri	**:**	Ordu Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi

Öğrenim Durumu :

Derece	**Bölüm/ Program**	**Üniversite**	**Yıl**
Lisans	Matematik	Ordu Üniversitesi	2011
Yüksek Lisans			

İş Deneyimi:

Görev	**Görev Yeri**	**Yıl**
Öğretmen	Final Dershanesi Altınordu/ORDU	2011-2015
Öğretmen	Özel Ordu Final Ortaokulu Altınordu/ORDU	2015-…