



T.C.

ORDU ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SALKOWSKI EĞRİSİ VE ANTI-SALKOWSKI EĞRİSİNİN
FRENET VEKTÖRLERİNDEN ELDE EDİLEN
SMARANDACHE EĞRİLERİ

BURAK ÖZTÜRK

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

ORDU 2019

T.C.
ORDU ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

SALKOWSKI EĞRİSİ VE ANTI-SALKOWSKI EĞRİSİNİN
FRENET VEKTÖRLERİNDEN ELDE EDİLEN
SMARANDACHE EĞRİLERİ

BURAK ÖZTÜRK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ORDU 2019

TEZ ONAY

Burak ÖZTÜRK tarafından hazırlanan “SALKOWSKI EĞRİSİ VE ANTI-SALKOWSKI EĞRİSİNİN FRENET VEKTÖRLERİNDEN ELDE EDİLEN SMARANDACHE EĞRİLERİ” adlı tez çalışmasının savunma sınavı 13.03.2019 tarihinde yapılmış ve jüri tarafından oy birliği / oy çökluğu ile Ordu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü MATEMATİK ANABİLİM DALI YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman
Dr. Öğr. Üyesi Süleyman ŞENYURT

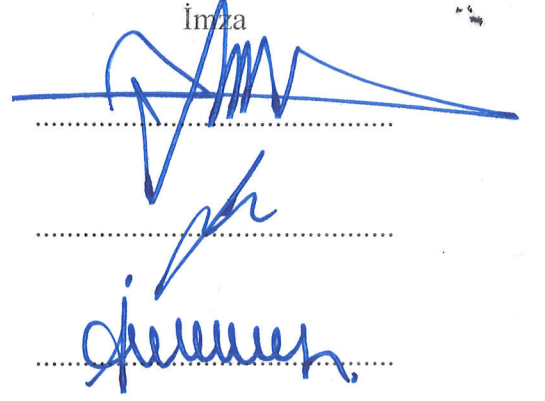
Jüri Üyeleri

Danışman
Dr. Öğr. Üyesi Süleyman ŞENYURT

Üye
Prof. Dr. Emin KASAP
Matematik, Ondokuz Mayıs Üniversitesi

Üye
Prof. Dr. İsmail AYDEMİR
Matematik, Ondokuz Mayıs Üniversitesi

İmza



11 / 04 / 2019 tarihinde enstitüye teslim edilen bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulu'nun 12 / 04 / 2019 tarih ve 2019. / 192 sayılı kararı ile onaylanmıştır.



Enstitü Müdürü

Dr. Öğr. Üyesi Mehmet Sami GÜLER

TEZ BİLDİRİMİ

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan ve kullanılan intihal tespit programının sonuçlarına göre; bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

BURAK ÖZTÜRK



Bu çalışma Ordu Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinatörlüğünün 1829 numaralı projesi ile desteklenmiştir.

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

SALKOWSKI EĞRİSİ VE ANTI-SALKOWSKI EĞRİSİNDEN ELDE EDİLEN SMARANDACHE EĞRİLERİ

BURAK ÖZTÜRK

ORDU ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ 116 SAYFA

TEZ DANIŞMANI: DR ÖĞR. ÜYESİ SÜLEYMAN ŞENYURT

Bu çalışma altı bölüm halinde düzenlenmiştir. Giriş bölümünde çalışmanın amacı ve konunun ele alınma nedeni tartışıldı. Önceki Çalışmalar bölümünde Salkowski ve anti-Salkowski eğrileri, Smarandache eğrileriyle ilgili çalışmalara yer verildi. Materyal ve Yöntem bölümünde, 3- boyutlu Öklid uzayına ait temel kavramlar, Salkowski ve anti-Salkowski eğrisiyle ilgili temel bilgilere yer verildi. Daha sonra Öklid uzayında Smarandache eğrileri ve Küresel Frenet formülleri ile ilgili temel kavramlar ifade edildi.

Bulgular Bölümü çalışmamızın orijinal kısmını oluşturmaktadır. Bu bölümde ilk olarak, Salkowski ve anti-Salkowski eğrilerinin Frenet vektörleri konum vektörlerinden elde edilen Smarandache eğrileri tanımlanıp, bu eğrilerin Frenet aparatları hesaplandı. Daha sonra bu eğrilerin Frenet vektörleri tarafından birim küre yüzeyi üzerinde çizilen küresel gösterge eğrilerine ait Sabban çatıları oluşturuldu. Son olarak, Sabban çatılarından elde edilen Smarandache eğrileri tanımlanıp, her bir eğrinin geodezik eğrilikleri hesaplanmıştır. Maple program kullanılarak elde edilen eğrilerin çizimleri yapılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Salkowski eğrisi, anti-Salkowski eğrisi, Smarandache eğrileri, Sabban çatısı

ABSTRACT

SMARANDACHE CURVES RECEIVED FROM FRENET VECTORS FOR SALKOWSKI CURVE AND ANTI-SALKOWSKI CURVE

BURAK ÖZTÜRK

ORDU UNIVERSITY INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED
SCIENCES

MATHEMATICS

SCIENCE TEACHER EDUCATION

MASTER'S THESIS, 116 PAGE

SUPERVISOR: DR. ÖĞR. ÜYESİ SÜLEYMAN ŞENYURT

This thesis is organized in six chapters. In introduction, main purpose of the is discussed. Preliminaries part of the thesis is included studies on Salkowski and anti-Salkowski curves, Smarandache curves. Third chapter is made up of material and methods that we used those of concepts related to 3-dimensional Euclidean space, Salkowski and anti-Salkowski curves. Then, basic concepts related to Smarandache curves and spherical Frenet formulas were expressed in Euclidean space.

Discussion and results part is the original chapter of our study. In this part, at first the Smarandache curves obtained from the position vectors of the Frenet vectors of Salkowski and anti-Salkowski curves are defined and Frenet apparatus of these curves are calculated. Then, the Sabban frames of the spherical indicator curves drawn on the surface of the sphere by Frenet vectors of these curves are formed. Finally, the Smarandache curves obtained from the Sabban frames are identified and the geodesic curvatures of each curve are computed. By making use of maple program we draw the pictures of the curves obtained from the calculations.

Keywords: Salkowski curve, anti-Salkowski curve, Smarandache curves, Sabban frame.

TEŐEKKÖR

Tez konumun belirlenmesi, alıőmanın yűrűtűlmesi ve yazımı esnasında baőta danıőman hocam Sayın Sűleyman ŐENYURT'a teőekkűr ederim.

Aynı zamanda, manevi desteklerini her an űzerimde hissettiđim babam, annem, kardeőlerime ve Sevgi DEMİR'e teőekkűrű bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

TEZ BİLDİRİMİ	I
ÖZET	II
ABSTRACT	III
TEŞEKKÜR	IV
ŞEKİLLER LİSTESİ	VII
SİMGELER VE KISALTMALAR	IX
1. GİRİŞ	1
2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR	3
3. MATERYAL VE YÖNTEM	5
3.1 Öklid Uzayı	5
3.2 Öklid Uzayında Salkowski Eğrisi ve Anti-Salkowski Eğrisi	8
3.3 Öklid Uzayında Smarandache Eğrileri	10
3.4 Küresel Serret-Frenet Formülleri	20
4. BULGULAR ve TARTIŞMA	22
4.1 Salkowski Eğrisinin Frenet Vektörlerinden Elde Edilen Smarandache Eğrileri	22
4.2 Anti-Salkowski Eğrisinin Frenet Vektörlerinden Elde Edilen Smarandache Eğrileri	39

4.3	Salkowski Eğrisinin Frenet Vektörlerinden Elde Edilen Sabban Çatısına Göre Smarandache Eğrileri	56
4.4	Anti-Salkowski Eğrisinin Frenet Vektörlerinden Elde Edilen Sabban Çatısına Göre Smarandache Eğrileri	83
5.	SONUÇ ve ÖNERİLER	112
6.	KAYNAKLAR	113
	DİZİN	115

ŞEKİLLER LİSTESİ

1.1	Ernst Leopold Salkowski	1
3.1	Salkowski eğrisi	8
3.2	Anti-Salkowski eğrisi	9
4.1	TN -Smarandache eğrisi	22
4.2	NB -Smarandache eğrisi	26
4.3	TB -Smarandache eğrisi	30
4.4	TNB -Smarandache eğrisi	34
4.5	T^*N^* -Smarandache eğrisi	39
4.6	N^*B^* -Smarandache eğrisi	43
4.7	T^*B^* -Smarandache eğrisi	47
4.8	$T^*N^*B^*$ -Smarandache eğrisi	51
4.9	TT_T -Smarandache eğrisi	58
4.10	$T(T \wedge T_T)$ -Smarandache eğrisi	60
4.11	$T_T(T \wedge T_T)$ -Smarandache eğrisi	61
4.12	$TT_T(T \wedge T_T)$ -Smarandache eğrisi	63
4.13	NT_N -Smarandache eğrisi	65
4.14	$N(N \wedge T_N)$ -Smarandache eğrisi	68
4.15	$T_N(N \wedge T_N)$ -Smarandache eğrisi	70
4.16	$NT_N(N \wedge T_N)$ -Smarandache eğrisi	72
4.17	BT_B -Smarandache eğrisi	75
4.18	$B(B \wedge T_B)$ -Smarandache eğrisi	77
4.19	$T_B(B \wedge T_B)$ -Smarandache eğrisi	79

4.20	$BT_B(B \wedge T_B)$ -Smarandache eğrisi	81
4.21	$T^*T_{T^*}$ -Smarandache eğrisi	85
4.22	$T^*(T^* \wedge T_{T^*})$ -Smarandache eğrisi	87
4.23	$T_{T^*}(T^* \wedge T_{T^*})$ -Smarandache eğrisi	89
4.24	$T^*T_{T^*}(T^* \wedge T_{T^*})$ -Smarandache eğrisi	91
4.25	$N^*T_{N^*}$ -Smarandache eğrisi	93
4.26	$N^*(N^* \wedge T_{N^*})$ -Smarandache eğrisi	96
4.27	$T_{N^*}(N^* \wedge T_{N^*})$ -Smarandache eğrisi	98
4.28	$N^*T_{N^*}(N^* \wedge T_{N^*})$ -Smarandache eğrisi	101
4.29	$B^*T_{B^*}$ -Smarandache eğrisi	104
4.30	$B^*(B^* \wedge T_{B^*})$ -Smarandache eğrisi	106
4.31	$T_{B^*}(B^* \wedge T_{B^*})$ -Smarandache eğrisi	108
4.32	$B^*T_{B^*}(B^* \wedge T_{B^*})$ -Smarandache eğrisi	110

SİMGELER VE KISALTMALAR

E^3 : 3-boyutlu Öklid Uzayı	α_1 : TT_T -Smarandache eğrisi
S^2 : Öklid uzayında birim Küre	α_2 : $T(T \wedge T_T)$ -Smarandache eğrisi
$\ \cdot \ $: Norm	α_3 : $T_T(T \wedge T_T)$ -Smarandache eğrisi
T : Salkowski Teğet vektör	α_4 : $TT_T(T \wedge T_T)$ -Smarandache eğrisi
N : Salkowski Aslinormal vektör	δ_1 : NT_N -Smarandache eğrisi
B : Salkowski Binormal vektör	δ_2 : $N(N \wedge T_N)$ -Smarandache eğrisi
T^* : Anti-Salkowski Teğet vektör	δ_3 : $T_N(N \wedge T_N)$ -Smarandache eğrisi
N^* : Anti-Salkowski Aslinormal vektör	δ_4 : $NT_N(N \wedge T_N)$ -Smarandache eğrisi
B^* : Anti-Salkowski Binormal vektör	ζ_1 : BT_B -Smarandache eğrisi
(T) : Teğetler Göstergesi	ζ_2 : $B(B \wedge T_B)$ -Smarandache eğrisi
(N) : Aslinormaller Göstergesi	ζ_3 : $T_B(B \wedge T_B)$ -Smarandache eğrisi
(B) : Binormaller Göstergesi	ζ_4 : $BT_B(B \wedge T_B)$ -Smarandache eğrisi
κ : Salkowski eğr. ait eğrilik	θ_1 : $T^*T_{T^*}$ -Smarandache eğrisi
τ : Salkowski eğr. ait burulma	θ_2 : $T^*(T^* \wedge T_{T^*})$ -Smarandache eğrisi
κ^* : Anti-Salkowski eğr. ait eğrilik	θ_3 : $T_{T^*}(T^* \wedge T_{T^*})$ -Smarandache eğrisi
τ^* : Anti-Salkowski eğr. ait burulma	θ_4 : $T^*T_{T^*}(T^* \wedge T_{T^*})$ -Smarandache eğrisi
K_g : Geodezik eğrilik	ϕ_1 : $N^*T_{N^*}$ -Smarandache eğrisi
γ_1 : TN -Smarandache eğrisi	ϕ_2 : $N^*(N^* \wedge T_{N^*})$ -Smarandache eğrisi
γ_2 : NB -Smarandache eğrisi	ϕ_3 : $T_{N^*}(N^* \wedge T_{N^*})$ -Smarandache eğrisi
γ_3 : TB -Smarandache eğrisi	ϕ_4 : $N^*T_{N^*}(N^* \wedge T_{N^*})$ -Smarandache eğrisi
γ_4 : TNB -Smarandache eğrisi	ω_1 : $B^*T_{B^*}$ -Smarandache eğrisi
β_1 : T^*N^* -Smarandache eğrisi	ω_2 : $B^*(B^* \wedge T_{B^*})$ -Smarandache eğrisi
β_2 : N^*B^* -Smarandache eğrisi	ω_3 : $T_{B^*}(B^* \wedge T_{B^*})$ -Smarandache eğrisi
β_3 : T^*B^* -Smarandache eğrisi	ω_4 : $B^*T_{B^*}(B^* \wedge T_{B^*})$ -Smarandache eğrisi
β_4 : $T^*N^*B^*$ -Smarandache eğrisi	

1. GİRİŞ



Şekil 1.1: Ernst Leopold Salkowski

E.L. Salkowski (1844-1923), Königsberg’te doğmuş Alman bir biyokimyagerdir.

Salkowski, (1909) "Zur Transformation von Raumkurven" isimli çalışmasında, eğriliği sabit ve torsiyonu sabit olmayan eğri ailelerini tanımlamıştır. Literatürde bu tür eğriler Salkowski eğrisi olarak bilinmektedir. Benzer şekilde eğriliği sabit olmayan ve torsiyonu sabit olan eğriler de anti-Salkowski eğrisi olarak bilinmektedir. Daha sonra "Salkowski curves revisited: A family of curves with constant curvature and non-constant torsion" isimli çalışmada kapalı eğriler için bir yöntem oluşturulmuştur. Salkowski eğrisinin parametrik denklemi yazılmıştır (Monterde, 2009). Eğrinin aslinormalinin sabit doğrultu ile sabit açı yaptığını göstermiştir.

Herhangi bir eğrinin Frenet vektörleri konum vektörü olarak alındığında bu vektörler tarafından çizilen regüler eğriler Smarandache eğrileri olarak bilinmektedir (Turgut ve Yılmaz, 2008). Daha sonra, Öklid uzayında özel Smarandache eğrileri tanımlanıp, bu eğrilere ait bazı özellikler verilmiştir (Ali, 2010). İnvolut eğrisinin Frenet vektörleri konum vektörü olarak alındığında elde edilen Smarandache eğrilerinin bazı özellikleri Sivas, (2014) tarafından incelenmiştir. Benzer çalışmalar Bertrand ve Mannheim eğri çiftleri için de yapılmıştır (Çelik, 2016, Çalışkan, 2014).

Koenderink, (1990) tarafından küresel gösterge eğrilerine ait Sabban çatısı tanımlanarak

bir küresel eğrinin geodezik eğriliği tanımlanmıştır. Daha sonra Sabban çatısından elde edilen Smarandache eğrileri tanımlanıp bu eğrilerin geodezik eğrilikleri hesaplanmıştır (Tosun ve Taşköprü, 2014). Altun, (2016) İnvolut-evolüt eğrileri, Bertrand eğrileri ve Mannheim eğrilerine ait Frenet vektörlerinin birim küre yüzeyi üzerinde çizdiği küresel eğrilerin Sabban çatılarını oluşturmuştur. Elde edilen bu çatılardan elde edilen Smarandache eğrilerini tanımlamış ve bu eğrilerin geodezik eğriliklerini hesaplamıştır.

Bu çalışmada ise, ilk olarak, Salkowski ve anti-Salkowski eğrilerinin Frenet vektörlerinden Smarandache eğrileri tanımlandı ve bu eğrilerin Frenet aparatları hesaplandı. İkinci olarak, Salkowski ve anti-Salkowski eğrisinin Frenet vektörleri tarafından birim küre yüzeyi üzerinde çizilen küresel eğrilerin Sabban çatıları oluşturuldu. Bu çatılara ait bazı özellikler verildi. Son olarak, elde edilen Sabban çatılarından Smarandache eğrileri tanımlanıp her bir eğrinin geodezik eğrilikleri hesaplandı. Maple programı kullanılarak her bir eğrinin çizimleri yapıldı.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

J.Monterde, "Salkowski curves revisited: A family of curves with constant curvature and non-constant torsion" isimli çalışmada Salkowski ve anti-Salkowski eğrilerinin parametrik denklemini vererek Frenet aparatlarını hesaplamıştır (Monterde, 2009).

Turgut ve Yılmaz, "Smarandache curves in Minkowski spacetime" isimli çalışmada Minkowski uzayında Smarandache eğrisinin tanımını vermiştir (Turgut ve Yılmaz, 2008).

Ali A.T., "Spacelike Salkowski and anti-Salkowski curves with a spacelike principal normal in Minkowski 3-Space" isimli çalışmada spacelike Salkowski ve spacelike anti-Salkowski eğrilerini incelemiştir (Ali, 2009).

Gür ve Şenyurt, "Frenet vectors and geodesic curvatures of spheric indicators of Salkowski curve in E^3 " isimli çalışmada Salkowski eğrisinin küresel göstergelerinin Frenet vektörlerini ve geodezik eğriliklerini hesaplamıştır (Gür ve Şenyurt, 2010).

Şenyurt ve Sivas, "Smarandache eğrilerine ait bir uygulama" isimli çalışmada bir α eğrisinin Frenet vektörleri T, N, B ve birim Darboux vektörü C olmak üzere NC - Smarandache eğrisini tanımlamışlardır. Bununla birlikte NB ve TNB - Smarandache eğrilerinin eğrilik ve torsiyonlarını hesaplamışlardır (Şenyurt ve Sivas, 2013).

Şenyurt ve Çalışkan, "Smarandache curves in terms of Sabban frame of spherical indicatrix curves" isimli çalışmada küresel gösterge eğrilerinin Sabban çatısına göre özel Smarandache eğrilerini araştırmışlardır. Bunun yanında Smarandache eğrilerinin bazı karakterizasyonları ile ilgili sonuçlar vermişlerdir (Şenyurt ve Çalışkan, 2013).

Taşköprü ve Tosun, "Smarandache curves according to Sabban frame on S^2 " isimli çalışmada S^2 birim küresi üzerinde oluşan Sabban çatısına göre Smarandache eğrilerinin karakterizasyonları ile ilgili sonuçlar elde etmişlerdir (Taşköprü ve Tosun, 2014).

Şenyurt ve Çalışkan, 2015 yılında " N^*C^* -Smarandache curves of Mannheim curve couple according to Frenet frame" isimli çalışmalarında Frenet çatısına göre Mannheim eğri çiftine ait Frenet vektörlerinden elde ettikleri Darboux vektörü ile N^*C^* -Smarandache eğrisini incelemişlerdir (Şenyurt ve Çalışkan, 2015).

Gürses, Bektaş ve Yüce,"Special Smarandache Curves in R^3 " isimli çalışmada spacelike ve timelike eğrilerini tanımlayıp bazı karakteristik özelliklerini incelemişlerdir (Gürses ve ark., 2016).

3. MATERYAL VE YÖNTEM

3.1 Öklid Uzayı

Bu bölümde, 3-boyutlu Öklid Uzayı ile ilgili temel kavramlara yer verilmiştir.

Tanım 3.1.1 A boştan farklı bir cümle ve V de K cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun.

$$f : A \times A \rightarrow V$$

fonksiyonu aşağıdaki aksiyomları sağlarsa A ya V ile birleştirilmiş bir afin uzay denir:

$$A_1 : \forall P, Q, R \in A \text{ için } f(P, Q) + f(Q, R) = f(P, R)$$

$$A_2 : \forall P \in A, \forall \alpha \in V \text{ için } f(P, Q) = \alpha$$

olacak şekilde bir tek $Q \in A$ noktası vardır.

Tanım 3.1.2 V , A ile birleşen bir afin uzay olsun. $P_0, P_1, P_2, P_3 \in A$ noktaları için $\{P_0P_1, P_0P_2, P_0P_3\}$ cümlesi V nin bir bazı ise $\{P_0, P_1, P_2, P_3\}$ nokta 4-lüsüne bir afin çatısı denir. Burada P_0 noktasına çatının başlangıç noktası, $P_i, 1 \leq i \leq 3$, noktalarına da çatının birim noktaları denir. $\dim V = 3$ ise A ya 3-boyutlu bir afin uzay denir.

Tanım 3.1.3 A ile birleşen afin uzay V olsun.

$$\langle, \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonu aşağıdaki aksiyomları sağlarsa bu fonksiyona iç çarpım fonksiyonu denir:
 $\forall x, y, z \in V, \forall a, b \in \mathbb{R}$ için

a. Bilineerlik Aksiyomu;

$$\langle ax + by, z \rangle = a\langle x, z \rangle + b\langle y, z \rangle,$$

$$\langle x, ay + bz \rangle = a\langle x, y \rangle + b\langle x, z \rangle,$$

b. Simetri Aksiyomu;

$$\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle,$$

c. Pozitif Tanımlılık (kararlılık) Aksiyomu;

$$\langle x, x \rangle \geq 0, \quad \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Tanım 3.1.4 \mathbb{R}^3 afin uzay, $\forall X, Y \in \mathbb{R}^3$ olsun,

$$\langle , \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \langle X, Y \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$

şeklinde tanımlı fonksiyon iç çarpımdır. Bu fonksiyona standart iç çarpımın tanımlı olduğu \mathbb{R}^3 vektör uzayı ile birleşen afin uzayına 3-boyutlu standart Öklid uzayı denir ve \mathbb{R}^3 ile gösterilir.

Tanım 3.1.5 $X = (x_1, x_2, x_3), Y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ olmak üzere,

$$d : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(X, Y) \rightarrow d(X, Y) = \|\vec{XY}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^3 (x_i - y_i)^2}$$

şeklinde tanımlanan d fonksiyonuna uzaklık fonksiyonu, $d(X, Y)$ reel sayısına da X ve Y noktaları arasındaki uzaklık denir.

Tanım 3.1.6 $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \alpha(s) = (\alpha_1(s), \alpha_2(s), \alpha_3(s))$ diferensiyellenebilir fonksiyona \mathbb{R}^3 te bir eğri denir. Burada I aralığına α eğrisinin parametre aralığı, $s \in I$ değişkenine de α eğrisinin parametresi denir.

Tanım 3.1.7 $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ birim hızlı eğrisinin teğet, aslinormal ve binormal vektörleri sırasıyla

$$T(s) = \alpha'(s), \quad N(s) = \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|}, \quad B(s) = T(s) \wedge N(s)$$

şeklinde tanımlanır. Bu vektörlere Frenet vektörleri adı verilir. α birim hızlı eğri değil ise bu vektörler

$$T(s) = \frac{\alpha'(s)}{\|\alpha'(s)\|}, \quad N(s) = \frac{\alpha'(s) \wedge \alpha''(s)}{\|\alpha'(s) \wedge \alpha''(s)\|}, \quad B(s) = \frac{\alpha'(s) \wedge \alpha''(s)}{\|\alpha'(s) \wedge \alpha''(s)\|}$$

şeklinde verilir (Hacısalihoglu, 1983).

Tanım 3.1.8 Birim hızlı $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisinin teğet vektörü T olsun.

$$\kappa : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad \kappa(s) = \|T'(s)\|$$

şeklinde tanımlı fonksiyona α eğrisinin eğrilik fonksiyonu, $\kappa(s)$ sayısına eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki eğriliği denir (Sabuncuoğlu, 2014).

Tanım 3.1.9 Birim hızlı $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisinin Frenet vektörleri T, N, B olsun.

$$\tau : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad \tau(s) = -\langle B'(s), N(s) \rangle$$

şeklinde tanımlı fonksiyona burulma fonksiyonu, $\tau(s)$ sayısına da eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki burulması denir (Sabuncuoğlu, 2014).

Eğer eğri yay parametresi ile verilmemiş ise κ eğriligi ve τ burulması sırasıyla

$$\kappa(s) = \frac{\|\alpha'(s) \wedge \alpha''(s)\|}{\|\alpha'(s)\|^3}, \quad \tau(s) = \frac{\det(\alpha'(s), \alpha''(s), \alpha'''(s))}{\|\alpha'(s) \wedge \alpha''(s)\|^2} \quad (3.1.1)$$

denklemleriyle verilir (Hacısalihoglu, 1983).

Teorem 3.1.1 $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisinin Frenet 3-ayaklısı $\{T, N, B\}$, eğriligi κ ve torsiyonu τ olsun. Bu durumda Frenet formülleri

$$\begin{aligned} T'(s) &= \kappa(s)N(s) \\ N'(s) &= -\kappa(s)T(s) + \tau(s)B(s) \\ B'(s) &= -\tau(s)N(s) \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

bağıntısıyla verilir (Hacısalihoglu, 1983).

3.2 Öklid Uzayında Salkowski Eğrisi ve Anti-Salkowski Eğrisi

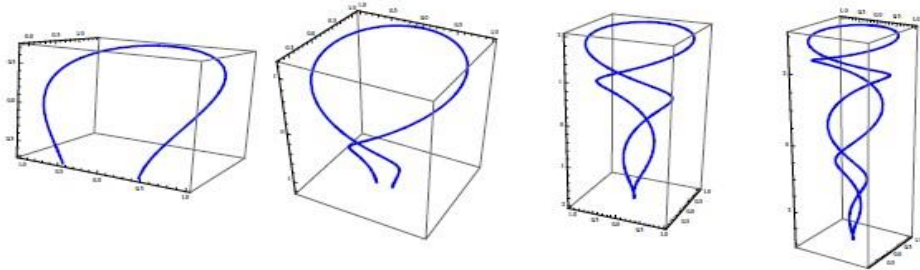
Tanım 3.2.1 (Salkowski eğrisi) Herhangi bir $m \in \mathbb{R}$ için $m \neq \mp \frac{1}{\sqrt{3}}$, 0 ve $n = \frac{m}{\sqrt{1+m^2}}$ olmak üzere;

$$\gamma_m(s) = \frac{1}{\sqrt{1+m^2}} \left(-\frac{1-n}{4(1+2n)} \sin((1+2n)s) - \frac{1+n}{4(1-2n)} \sin((1-2n)s) - \frac{1}{2} \sin(s), \right. \\ \left. \frac{1-n}{4(1+2n)} \cos((1+2n)s) + \frac{1+n}{4(1-2n)} \cos((1-2n)s) + \frac{1}{2} \cos(s), \frac{1}{4m} \cos(2ns) \right)$$

şeklinde tanımlı eğriye Salkowski eğrisi denir. Salkowski eğrisinin geometrik elemanları ve Frenet vektörleri

$$\begin{aligned} \kappa(s) &= 1 \quad \text{ve} \quad \tau(s) = \tan(ns), \quad \|\gamma'_m(s)\| = \frac{\cos(ns)}{\sqrt{1+m^2}} \\ T(s) &= -\left(\cos(s) \cos(ns) + n \sin(s) \sin(ns), \sin(s) \cos(ns) - n \cos(s) \sin(ns), \frac{n}{m} \sin(ns) \right) \\ N(s) &= n \left(\frac{\sin(s)}{m}, -\frac{\cos(s)}{m}, -1 \right) \\ B(s) &= \left(-\cos(s) \sin(ns) + n \sin(s) \cos(ns), -\sin(s) \sin(ns) - n \cos(s) \cos(ns), \frac{n}{m} \cos(ns) \right) \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

şeklinde verilir (Monterde, 2008). $m = \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$ değerleri için Salkowski eğrisine ait grafikler Şekil (3.1) de verilmiştir.



Şekil 3.1: Salkowski eğrisi

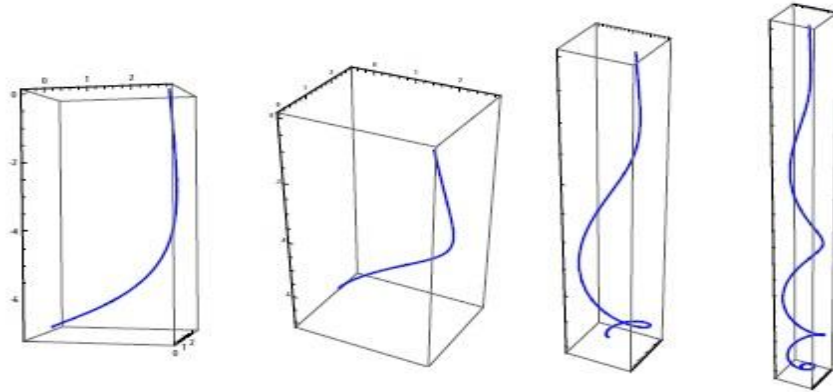
Tanım 3.2.2 (anti-Salkowski eğrisi) Herhangi bir $m \in \mathbb{R}$ için $m \neq \mp \frac{1}{\sqrt{3}}$, 0 ve $n = \frac{m}{\sqrt{1+m^2}}$ 'olmak üzere

$$\beta_m(s) = \left(\begin{aligned} &\frac{n}{2(4n^2 - 1)m} \left(n(1 - 4n^2 + 3 \cos(2ns)) \cos(s) + (2n^2 + 1) \sin(s) \sin(2ns) \right), \\ &\frac{n}{2(4n^2 - 1)m} \left(n(1 - 4n^2 + 3 \cos(2ns)) \sin(s) - (2n^2 + 1) \cos(s) \sin(2ns), \right. \\ &\left. \frac{n^2 - 1}{4n} (2ns + \sin(2ns)) \right) \end{aligned} \right)$$

şeklinde tanımlı eğriye anti-Salkowski eğrisi denir. Bu eğrinin Frenet aparatları

$$\begin{aligned} \kappa^*(s) &= \tan(ns) \quad \text{ve} \quad \tau^*(s) = 1, \quad \|\beta'_m(s)\| = \frac{\cos(ns)}{\sqrt{1+m^2}} \\ T^*(s) &= - \left(\cos(s) \sin(ns) - n \sin(s) \cos(ns), \sin(s) \sin(ns) + n \cos(s) \cos(ns), \frac{n}{m} \cos(ns) \right), \\ N^*(s) &= n \left(\frac{\sin(s)}{m}, -\frac{\cos(s)}{m}, 1 \right), \\ B^*(s) &= \left(-\cos(s) \cos(ns) - n \sin(s) \sin(ns), -\sin(s) \cos(ns) + n \cos(s) \sin(ns), \frac{n}{m} \sin(ns) \right) \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

şeklinde verilir (Monterde, 2008). $m = \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$ değerleri için Anti-Salkowski eğrisine ait grafikler Şekil (3.2) de verilmiştir.



Şekil 3.2: Anti-Salkowski eğrisi

3.3 Öklid Uzayında Smarandache Eğrileri

Tanım 3.3.1 Konum vektörü, herhangi bir α eğrisinin Frenet vektörleri olan ve bu vektörler tarafından çizilen regüler eğriye Smarandache eğrisi denir (Turgut ve Yılmaz, 2008).

Bu tanım şu şekilde de verilebilir:

Tanım 3.3.2 $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ birim hızlı regüler eğrinin Frenet çatısı $\{T, N, B\}$ olsun.

$$\beta(s) = \frac{a(s)T(s) + b(s)N(s) + c(s)B(s)}{\sqrt{a(s)^2 + b(s)^2 + c(s)^2}} \quad (3.3.1)$$

vektörünün çizdiği regüler eğriye Smarandache eğrisi denir (Şenyurt, 2013).

Tanım 3.3.3 $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ birim hızlı regüler eğrinin Frenet çatısı $\{T, N, B\}$ olsun.

TN - Smarandache eğrisi

$$\beta_{TN} = \frac{1}{\sqrt{2}}(T + N)$$

şeklinde tanımlanır (Ali, 2010).

Teorem 3.3.1 TN - Smarandache eğrisinin $\kappa_{\beta_{TN}}$ eğriliği ve $\tau_{\beta_{TN}}$ torsiyonu sırasıyla,

$$\kappa_{\beta_{TN}} = \sqrt{2} \frac{\sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}}{(2\kappa^2 + \tau^2)^2},$$

$$\tau_{\beta_{TN}} = \frac{\sqrt{2}((\kappa^2 + \tau^2 - \kappa')(\kappa q_3 + \tau q_1) + \kappa(\kappa\tau + \tau')(q_2 - q_1) + (\kappa^2 + \kappa')(\kappa q_3 - \tau q_2))}{(\tau(2\kappa^2 + \tau^2) + \kappa\tau' - \kappa'\tau)^2 + (\kappa'\tau - \kappa\tau')^2 + (2\kappa^3 + \kappa\tau^2)^2}$$

şeklinde verilir. Burada $p_1, p_2, p_3, q_1, q_2, q_3$

$$\begin{aligned} p_1 &= -(\kappa^2(2\kappa^2 + \tau^2) + \tau(\tau\kappa' - \kappa\tau')), \\ p_2 &= -(\kappa^2(2\kappa^2 + 3\tau^2) + \tau(\tau^3 - \tau\kappa' + \kappa\tau')), \\ p_3 &= \kappa(\tau(2\kappa^2 + \tau^2) - 2(\tau\kappa' - \kappa\tau')), \\ q_1 &= \kappa^3 + \kappa(\tau^2 - 3\kappa') - \kappa'', \\ q_2 &= -\kappa^3 - \kappa(\tau^2 + 3\kappa') - 3\tau\tau' + \kappa'', \\ q_3 &= -\kappa^2\tau - \tau^3 + 2\tau\kappa' + \kappa\tau' + \tau'' \end{aligned}$$

şeklinde birer katsayılarıdır, (Ali, 2010).

İspat. TN -Smarandache eğrisinin $s_{\beta_{TN}}$ yay parametresine göre türevi alınırsa

$$T_{\beta_{TN}} \frac{ds_{\beta_{TN}}}{ds} = \frac{(-\kappa T + \kappa N + \tau B)}{\sqrt{2}} \quad (3.3.2)$$

olur ve norm alınırsa $\frac{ds_{\beta_{TN}}}{ds}$ ifadesi

$$\frac{ds_{\beta_{TN}}}{ds} = \sqrt{\frac{2\kappa^2 + \tau^2}{2}}$$

şeklinde bulunur. Bu ifade (3.3.2) de yerine yazılırsa β_{TN} eğrisinin teğet vektörü

$$T_{\beta_{TN}}(s) = \frac{-\kappa T + \kappa N + \tau B}{\sqrt{2\kappa^2 + \tau^2}}$$

olur. Buradan tekrar türevi alınırsa katsayılar

$$\begin{aligned} p_1 &= -(\kappa^2(2\kappa^2 + \tau^2) + \tau(\tau\kappa' - \kappa\tau')), \\ p_2 &= -(\kappa^2(2\kappa^2 + 3\tau^2) + \tau(\tau^3 - \tau\kappa' + \kappa\tau')), \\ p_3 &= \kappa(\tau(2\kappa^2 + \tau^2) - 2(\tau\kappa' - \kappa\tau')) \end{aligned}$$

olmak üzere $T'_{\beta_{TN}}$ türevi

$$T'_{\beta_{TN}}(s) = \frac{\sqrt{2}}{(2\kappa^2 + \tau^2)^2} (p_1 T + p_2 N + p_3 B) \quad (3.3.3)$$

şeklinde bulunur. β_{TN} eğrisinin eğriliği $\kappa_{\beta_{TN}}$ ile gösterilirse (3.3.3) bağıntısından $\kappa_{\beta_{TN}}$ eğriliği

$$\kappa_{\beta_{TN}} = \|T'_{\beta_{TN}}\| \implies \kappa_{\beta_{TN}} = \sqrt{2} \frac{\sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}}{(2\kappa^2 + \tau^2)^2}$$

olur. β_{TN} eğrisinin aslinormali $N_{\beta_{TN}}$ ile gösterilirse

$$N_{\beta_{TN}} = \frac{T'_{\beta_{TN}}}{\|T'_{\beta_{TN}}\|} \implies N_{\beta_{TN}} = \frac{p_1 T + p_2 N + p_3 B}{\sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}}$$

şeklinde bulunur. $B_{\beta_{TN}} = T_{\beta_{TN}} \wedge N_{\beta_{TN}}$ olduğundan $B_{\beta_{TN}}$ vektörü

$$B_{\beta_{TN}} = \frac{(\kappa p_3 - \tau p_2)T + (\kappa p_3 + \tau p_1)N + (-\kappa p_2 - \kappa p_1)B}{\sqrt{(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)(2\kappa^2 + \tau^2)}}$$

olur. β_{TN} eğrisinin ikinci ve üçüncü türevleri sırasıyla

$$\beta''_{TN} = \frac{-(\kappa^2 + \kappa')T + (\kappa' - \kappa^2 - \tau^2)N + (\kappa\tau + \tau')B}{\sqrt{2}}$$

ve

$$\beta'''_{TN} = \frac{q_1T + q_2N + q_3B}{\sqrt{2}}$$

dır. Burada q_1, q_2, q_3

$$\begin{aligned} q_1 &= \kappa^3 + \kappa(\tau^2 - 3\kappa') - \kappa'', \\ q_2 &= -\kappa^3 - \kappa(\tau^2 + 3\kappa') - 3\tau\tau' + \kappa'', \\ q_3 &= -\kappa^2\tau - \tau^3 + 2\tau\kappa' + \kappa\tau' + \tau'' \end{aligned}$$

şeklinde birer katsayıdır. β_{TN} eğrisinin torsiyonu $\tau_{\beta_{TN}}$ ile gösterilirse $\tau_{\beta_{TN}}$ torsiyonu

$$\begin{aligned} \tau_{\beta_{TN}} &= \frac{\det(\beta'_{TN}, \beta''_{TN}, \beta'''_{TN})}{\|\beta'_{TN} \wedge \beta''_{TN}\|^2}, \\ \tau_{\beta_{TN}} &= \frac{\sqrt{2}((\kappa^2 + \tau^2 - \kappa')(\kappa q_3 + \tau q_1) + \kappa(\kappa\tau + \tau')(q_2 - q_1) + (\kappa^2 + \kappa')(\kappa q_3 - \tau q_2))}{(\tau(2\kappa^2 + \tau^2) + \kappa\tau' - \kappa'\tau)^2 + (\kappa'\tau - \kappa\tau')^2 + (2\kappa^3 + \kappa\tau^2)^2} \end{aligned}$$

şeklinde bulunur. \square

Tanım 3.3.4 $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ birim hızlı regüler eğrinin Frenet çatısı $\{T, N, B\}$ olsun. NB - Smarandache eğrisi

$$\beta_{NB} = \frac{1}{\sqrt{2}}(N + B)$$

şeklinde tanımlanır (Ali, 2010).

Teorem 3.3.2 NB - Smarandache eğrisinin $\kappa_{\beta_{NB}}$ eğriliği $\tau_{\beta_{NB}}$ torsiyonu sırasıyla,

$$\kappa_{\beta_{NB}} = \sqrt{2} \frac{\sqrt{p_4^2 + p_5^2 + p_6^2}}{(2\tau^2 + \kappa^2)^2},$$

$$\tau_{\beta_{NB}} = \frac{\sqrt{2}(2\tau^3 q_4 + 2\tau^2 \kappa \pi + \tau \kappa^2 q_4 + \kappa^3 q_6 - \kappa' \tau g - \kappa' \tau q_5 + \kappa \tau' q_6 + \kappa \tau' q_5)}{(\tau(2\tau^2 + \kappa^2))^2 + (-\tau \kappa' + \kappa \tau')^2 + (2\tau^2 \kappa + \kappa^3 - \kappa' \tau + \kappa \tau')^2}$$

dır. Burada $p_4, p_5, p_6, q_4, q_5, q_6$

$$\begin{aligned}
p_4 &= \tau(2\tau^2\kappa + \kappa^3 - 2\kappa'\tau + 2\kappa\tau'), \\
p_5 &= -2\tau^4 - 3\tau^2\kappa^2 - \kappa^4 + \kappa'\tau\kappa - \kappa^2\tau', \\
p_6 &= -2\tau^4 - \tau^2\kappa^2 - \kappa'\tau\kappa + \kappa^2\tau', \\
q_4 &= -\tau^3\kappa + \kappa^3 + \kappa'\tau + 2\kappa\tau' - \kappa'', \\
q_5 &= \tau^3 + \tau\kappa^2 - 3\kappa\kappa' + 3\tau^2\tau' - \tau'', \\
q_6 &= \tau^3 + \tau\kappa^2 - 3\tau\tau' - \tau\tau''
\end{aligned}$$

şeklinde birer katsayılarıdır (Şenyurt, 2013).

İspat. NB -Smarandache eğrisinin $s_{\beta_{NB}}$ yay parametresine göre türevi alınırsa

$$T_{\beta_{NB}} \frac{ds_{\beta_{NB}}}{ds} = \frac{(-\kappa T - \tau N + \tau B)}{\sqrt{2}} \quad (3.3.4)$$

olur. Norm alınırsa $\frac{ds_{\beta_{NB}}}{ds}$ ifadesi

$$\frac{ds_{\beta_{NB}}}{ds} = \sqrt{\frac{2\tau^2 + \kappa^2}{2}}$$

şeklinde bulunur. Bu ifade (3.3.4) de yerine yazılırsa β_{NB} eğrisinin teğet vektörü

$$T_{\beta_{NB}}(s) = \frac{-\kappa T - \tau N + \tau B}{\sqrt{2\tau^2 + \kappa^2}}$$

olur. Bu ifadenin tekrar türevi alınırsa katsayılar

$$\begin{aligned}
p_4 &= \tau(2\tau^2\kappa + \kappa^3 - 2\kappa'\tau + 2\kappa\tau'), \\
p_5 &= -2\tau^4 - 3\tau^2\kappa^2 - \kappa^4 + \kappa'\tau\kappa - \kappa^2\tau', \\
p_6 &= -2\tau^4 - \tau^2\kappa^2 - \kappa'\tau\kappa + \kappa^2\tau'
\end{aligned}$$

olmak üzere $T'_{\beta_{NB}}(s)$ türevi

$$T'_{\beta_{NB}}(s) = \frac{\sqrt{2}}{(2\tau^2 + \kappa^2)^2} (p_4 T + p_5 N + p_6 B) \quad (3.3.5)$$

şeklinde bulunur. β_{NB} eğrisinin eğriliği $\kappa_{\beta_{NB}}$ ile gösterilirse (3.3.5) bağıntısından $\kappa_{\beta_{NB}}$ eğriliği

$$\kappa_{\beta_{NB}} = \|T'_{\beta_{NB}}\| \implies \kappa_{\beta_{NB}} = \sqrt{2} \frac{\sqrt{p_4^2 + p_5^2 + p_6^2}}{(2\tau^2 + \kappa^2)^2}$$

olur. β_{NB} eğrisinin aslinormali $N_{\beta_{NB}}$ ile gösterilirse

$$N_{\alpha_2} = \frac{T'_{\beta_{NB}}}{\|T'_{\beta_{NB}}\|} \implies N_{\alpha_2} = \frac{p_4T + p_5N + p_6B}{\sqrt{p_4^2 + p_5^2 + p_6^2}}$$

şeklinde bulunur. $B_{\beta_{NB}} = T_{\beta_{NB}} \wedge N_{\beta_{NB}}$ olduğundan $B_{\beta_{NB}}$ vektörü

$$B_{\beta_{NB}} = \frac{(-\tau p_6 - \tau p_5)T + (\kappa p_6 + \tau p_4)N + (-\kappa p_5 + \tau p_4)B}{\sqrt{(p_4^2 + p_5^2 + p_6^2)(2\tau^2 + \kappa^2)}}$$

olur. β_{NB} eğrisinin ikinci ve üçüncü türevleri sırasıyla

$$\beta''_{NB} = \frac{(\kappa' + \kappa\tau)T + (\kappa^2 - \tau' - \tau^2)N + (-\tau^2 + \tau')B}{\sqrt{2}}$$

ve

$$\beta'''_{NB} = \frac{q_4T + q_5N + q_6B}{\sqrt{2}}$$

dır. Burada katsayılar

$$\begin{aligned} q_4 &= -\tau^3\kappa + \kappa^3 + \kappa'\tau + 2\kappa\tau' - \kappa'', \\ q_5 &= \tau^3 + \tau\kappa^2 - 3\kappa\kappa' + 3\tau^2\tau' - \tau'', \\ q_6 &= \tau^3 + \tau\kappa^2 - 3\tau\tau' - \tau\tau'' \end{aligned}$$

şeklindedir. β_{NB} eğrisinin torsiyonu $\tau_{\beta_{NB}}$ ile gösterilirse $\tau_{\beta_{NB}}$ torsiyonu

$$\tau_{\beta_{NB}} = \frac{\det(\beta'_{NB}, \beta''_{NB}, \beta'''_{NB})}{\|\beta'_{NB} \wedge \beta''_{NB}\|^2},$$

$$\tau_{\beta_{NB}} = \frac{\sqrt{2}(2\tau^3q_4 + 2\tau^2\kappa q_6 + \tau\kappa^2q_4 + \kappa^3q_6 - \kappa'\tau q_6 - \kappa'\tau q_5 + \kappa\tau'q_6 + \kappa\tau'q_5)}{(\tau(2\tau^2 + \kappa^2))^2 + (-\tau\kappa' + \kappa\tau')^2 + (2\tau^2\kappa + \kappa^3 - \kappa'\tau + \kappa\tau')^2}$$

şeklinde elde edilir. \square

Tanım 3.3.5 $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ birim hızlı regüler eğrinin Frenet çatısı $\{T, N, B\}$ olsun.

TB - Smarandache eğrisi

$$\beta_{TB} = \frac{1}{\sqrt{2}}(T + B)$$

şeklinde tanımlanır (Ali, 2010).

Teorem 3.3.3 TB - Smarandache eğrisinin $\kappa_{\beta_{TB}}$ eğriliği $\tau_{\beta_{TB}}$ torsiyonu sırasıyla,

$$\kappa_{\beta_{TB}} = \frac{\sqrt{2(\kappa^2 + \tau^2)}}{\kappa - \tau},$$

$$\tau_{\beta_{TB}} = \frac{\sqrt{2}(\kappa^3 q_9 - 2\kappa^2 \tau q_9 + \kappa^2 \tau q_7 + \kappa \tau^2 q_9 - 2\kappa \tau^2 q_7 + \tau^3 q_7)}{(\tau(\kappa - \tau)^2)^2 + (\kappa(\kappa - \tau)^2)^2}$$

dır. Burada q_7, q_8, q_9

$$\begin{aligned} q_7 &= -3\kappa\kappa' + 2\kappa\tau' + \kappa'\tau, \\ q_8 &= \kappa^3 + \tau\kappa^2 - \kappa\tau^2 + \tau^3 + \kappa'' - \tau'', \\ q_9 &= \kappa\tau' + 2\kappa'\tau - 3\tau\tau' \end{aligned}$$

şeklinde birer katsayılarıdır (Ali, 2010).

İspat. TB -Smarandache eğrisinin $s_{\beta_{TB}}$ yay parametresine göre türevi alınırsa

$$T_{\beta_{TB}} \frac{ds_{\beta_{TB}}}{ds} = \frac{(\kappa - \tau)N}{\sqrt{2}} \quad (3.3.6)$$

olur. Norm alınırsa $\frac{ds_{\beta_{TB}}}{ds}$ ifadesi

$$\frac{ds_{\beta_{TB}}}{ds} = \sqrt{\frac{(\kappa - \tau)^2}{2}}$$

şeklinde bulunur. Bu ifade (3.3.6) de yerine yazılırsa β_{TB} eğrisinin teğet vektörü

$$T_{\beta_{TB}}(s) = N$$

olur. Bu ifadenin tekrar türevi alınırsa

$$T'_{\beta_{TB}}(s) = \frac{\sqrt{2}}{\kappa - \tau}(-\kappa T + \tau B) \quad (3.3.7)$$

şeklinde bulunur. β_{TB} eğrisinin eğriliği $\kappa_{\beta_{TB}}$ ile gösterilirse (3.3.7) bağıntısından $\kappa_{\beta_{TB}}$ eğriliği

$$\kappa_{\beta_{TB}} = \|T'_{\beta_{TB}}\| \implies \kappa_{\beta_{TB}} = \frac{\sqrt{2(\kappa^2 + \tau^2)}}{\kappa - \tau}$$

olur. β_{TB} eğrisinin aslinormali $N_{\beta_{TB}}$ ile gösterilirse

$$N_{\beta_{TB}} = \frac{T'_{\beta_{TB}}}{\|T'_{\beta_{TB}}\|} \implies N_{\beta_{TB}} = \frac{-\kappa T + \tau B}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}$$

şeklinde bulunur. $B_{\beta_{TB}} = T_{\beta_{TB}} \wedge N_{\beta_{TB}}$ olduğundan $B_{\beta_{TB}}$ vektörü

$$B_{\beta_{TB}} = \frac{\tau T + \kappa B}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}$$

olur. β_{TB} eğrisinin ikinci ve üçüncü türevleri sırasıyla

$$\beta_{TB}'' = \frac{(-\kappa^2 + \tau\kappa)T + (\kappa' - \tau')N + (\kappa\tau - \tau^2)B}{\sqrt{2}}$$

ve

$$\beta_{TB}''' = \frac{q_7 T + q_8 N + q_9 B}{\sqrt{2}}$$

dır. Burada katsayılar

$$\begin{aligned} q_7 &= -3\kappa\kappa' + 2\kappa\tau' + \kappa'\tau, \\ q_8 &= \kappa^3 + \tau\kappa^2 - \kappa\tau^2 + \tau^3 + \kappa'' - \tau'', \\ q_9 &= \kappa\tau' + 2\kappa'\tau - 3\tau\tau' \end{aligned}$$

şeklinindedir. β_{TB} eğrisinin torsiyonu $\tau_{\beta_{TB}}$ ile gösterilirse $\tau_{\beta_{TB}}$ torsiyonu

$$\tau_{\beta_{TB}} = \frac{\det(\beta_{TB}', \beta_{TB}'', \beta_{TB}''')}{\|\beta_{TB}' \wedge \beta_{TB}''\|^2},$$

$$\tau_{\beta_{TB}} = \frac{\sqrt{2}(\kappa^3 q_9 - 2\kappa^2 \tau q_9 + \kappa^2 \tau q_7 + \kappa \tau^2 q_9 - 2\kappa \tau^2 q_7 + \tau^3 q_7)}{(\tau(\kappa - \tau)^2)^2 + (\kappa(\kappa - \tau)^2)^2}$$

şeklinde elde edilir. \square

Tanım 3.3.6 $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ birim hızlı regüler eğrinin Frenet çatısı $\{T, N, B\}$ olsun. TNB -Smarandache eğrisi

$$\beta_{TNB} = \frac{1}{\sqrt{3}}(T + N + B)$$

şeklinde tanımlanır (Ali, 2010).

Teorem 3.3.4 TNB -Smarandache eğrisinin $\kappa_{\beta_{TNB}}$ eğriliği ve $\tau_{\beta_{TNB}}$ torsiyonu sırasıyla,

$$\kappa_{\beta_{TNB}} = \frac{\sqrt{3}\sqrt{p_7^2 + p_8^2 + p_9^2}}{2(\kappa^2 + \tau^2 - \kappa\tau)^2},$$

$$\tau_{\beta_{TNB}} = \frac{\sqrt{3}\left(2\kappa^3q_{12} - 2\kappa^2\tau q_{12} + 2\kappa^2\tau q_{10} + 2\kappa\tau^2q_{12} - 2\kappa\tau^2q_{10} + 2\tau^3q_{10} + \kappa\tau'q_{12} - \kappa'\tau q_{12} + \kappa\tau'q_{11} + \kappa\tau'q_{10} - \kappa'\tau q_{11} - \kappa'\tau q_{10}\right)}{(2\kappa\tau(\kappa - \tau) + 2\tau^3 + \kappa\tau' - \kappa'\tau)^2 + (2\kappa^3 - 2\kappa\tau(\kappa - \tau) + \kappa\tau' - \kappa'\tau)^2 + (\kappa\tau' - \kappa'\tau)^2}$$

dır. Burada $p_7, p_8, p_9, q_{10}, q_{11}, q_{12}$

$$\begin{aligned} p_7 &= 2\tau^3\kappa - 4\tau^2\kappa^2 + 4\tau\kappa^3 - 2\kappa^4 - 2\kappa'\tau^2 + \kappa'\tau\kappa + 2\tau\kappa\tau' - \kappa^2\tau', \\ p_8 &= -2\tau^4 + 2\tau^3\kappa - 4\tau^2\kappa^2 + 2\tau\kappa^3 - 2\kappa^4 + \kappa'\tau^2 + \kappa'\tau\kappa - \kappa^2\tau' - \tau\kappa\tau', \\ p_9 &= -2\tau^4 + 4\tau^3\kappa - 4\tau^2\kappa^2 + 2\tau\kappa^3 + \kappa'\tau^2 - 2\kappa'\tau\kappa - \tau\kappa\tau' + 2\kappa^2\tau', \\ q_{10} &= -\kappa'' + \kappa^3 - 3\kappa\kappa' + 2\tau'\kappa + \tau\kappa' + \tau^2\kappa, \\ q_{11} &= -3\kappa\kappa' + \kappa'' - \tau'' - \kappa^3 - \kappa\tau^2 + \tau\kappa^2 + \tau^3 - 3\tau\tau', \\ q_{12} &= -\kappa^2\tau + 2\kappa'\tau - 3\tau\tau' + \kappa\tau' + \tau'' - \tau^3 \end{aligned}$$

şeklinde birer katsayılarıdır (Şenyurt, 2013).

İspat. TNB -Smarandache eğrisinin $s_{\beta_{TNB}}$ yay parametresine göre türevi alınırsa

$$T_{\beta_{TNB}} \frac{ds_{\beta_{TNB}}}{ds} = \frac{-\kappa T + (\kappa - \tau)N + \tau B}{\sqrt{3}} \quad (3.3.8)$$

olur. Norm alınırsa $\frac{ds_{\beta_{TNB}}}{ds}$ ifadesi

$$\frac{ds_{\beta_{TNB}}}{ds} = \sqrt{\frac{2(\kappa^2 + \tau^2 - \kappa\tau)}{3}}$$

şeklinde bulunur. Bu ifade (3.3.8) de yerine yazılırsa β_{TNB} eğrisinin teğet vektörü

$$T_{\beta_{TNB}}(s) = \frac{-\kappa T + (\kappa - \tau)N + \tau B}{\sqrt{2(\kappa^2 + \tau^2 - \kappa\tau)}}$$

olur. Bu ifadenin tekrar türevi alınırsa katsayılar

$$\begin{aligned} p_7 &= 2\tau^3\kappa - 4\tau^2\kappa^2 + 4\tau\kappa^3 - 2\kappa^4 - 2\kappa'\tau^2 + \kappa'\tau\kappa + 2\tau\kappa\tau' - \kappa^2\tau, \\ p_8 &= -2\tau^4 + 2\tau^3\kappa - 4\tau^2\kappa^2 + 2\tau\kappa^3 - 2\kappa^4 + \kappa'\tau^2 + \kappa'\tau\kappa - \kappa^2\tau' - \tau\kappa\tau', \\ p_9 &= -2\tau^4 + 4\tau^3\kappa - 4\tau^2\kappa^2 + 2\tau\kappa^3 + \kappa'\tau^2 - 2\kappa'\tau\kappa - \tau\kappa\tau' + 2\kappa^2\tau' \end{aligned}$$

olmak üzere $T'_{\beta_{TNB}}(s)$ türevi

$$T'_{\beta_{TNB}}(s) = \frac{\sqrt{3}}{2(\kappa^2 + \tau^2 - \kappa\tau)^2} (p_7T + p_8N + p_9B) \quad (3.3.9)$$

şeklinde bulunur. β_{TNB} eğrisinin eğriliği $\kappa_{\beta_{TNB}}$ ile gösterilirse (3.3.9) bağıntısından $\kappa_{\beta_{TNB}}$ eğriliği

$$\kappa_{\beta_{TNB}} = \|T'_{\beta_{TNB}}\| \implies \kappa_{\beta_{TNB}} = \frac{\sqrt{3}\sqrt{p_7^2 + p_8^2 + p_9^2}}{2(\kappa^2 + \tau^2 - \kappa\tau)^2}$$

olur. β_{TNB} eğrisinin aslinormali $N_{\beta_{TNB}}$ ile gösterilirse

$$N_{\beta_{TNB}} = \frac{T'_{\beta_{TNB}}}{\|T'_{\beta_{TNB}}\|} \implies N_{\beta_{TNB}} = \frac{p_7T + p_8N + p_9B}{\sqrt{p_7^2 + p_8^2 + p_9^2}}$$

şeklinde bulunur. $B_{\beta_{TNB}} = T_{\beta_{TNB}} \wedge N_{\beta_{TNB}}$ olduğundan $B_{\beta_{TNB}}$ vektörü

$$B_{\beta_{TNB}} = \frac{((\kappa - \tau)p_9 - \tau p_8)T + (\kappa p_9 + \tau p_7)N + (-\kappa p_8 - (\kappa - \tau)p_7)B}{\sqrt{2(\kappa^2 + \tau^2 - \kappa\tau)(p_7^2 + p_8^2 + p_9^2)}}$$

olur. β_{TNB} eğrisinin ikinci ve üçüncü türevleri sırasıyla

$$\beta''_{TNB} = \frac{(-\kappa' - \kappa^2 + \tau\kappa)T + (-\kappa^2 + \kappa' - \tau' - \tau^2)N + (\kappa\tau - \tau^2 + \tau')B}{\sqrt{3}}$$

ve

$$\beta'''_{TNB} = \frac{q_{10}T + q_{11}N + q_{12}B}{\sqrt{3}}$$

dır. Burada katsayılar

$$\begin{aligned} q_{10} &= -\kappa'' + \kappa^3 - 3\kappa\kappa' + 2\tau'\kappa + \tau\kappa' + \tau^2\kappa, \\ q_{11} &= -3\kappa\kappa' + \kappa'' - \tau'' - \kappa^3 - \kappa\tau^2 + \tau\kappa^2 + \tau^3 - 3\tau\tau', \\ q_{12} &= -\kappa^2\tau + 2\kappa'\tau - 3\tau\tau' + \kappa\tau' + \tau'' - \tau^3 \end{aligned}$$

şeklindedir. β_{TNB} eğrisinin torsiyonu $\tau_{\beta_{TNB}}$ ile gösterilirse $\tau_{\beta_{TNB}}$ torsiyonu

$$\tau_{\beta_{TNB}} = \frac{\det(\beta'_{TNB}, \beta''_{TNB}, \beta'''_{TNB})}{\|\beta'_{TNB} \wedge \beta''_{TNB}\|^2},$$

$$\tau_{\beta_{TNB}} = \frac{\sqrt{3} \left(2\kappa^3 q_{12} - 2\kappa^2 \tau q_{12} + 2\kappa^2 \tau q_{10} + 2\kappa \tau^2 q_{12} - 2\kappa \tau^2 q_{10} + 2\tau^3 q_{10} + \kappa \tau' q_{12} - \kappa' \tau q_{12} + \kappa \tau' q_{11} + \kappa \tau' q_{10} - \kappa' \tau q_{11} - \kappa' \tau q_{10} \right)}{(2\kappa \tau (\kappa - \tau) + 2\tau^3 + \kappa \tau' - \kappa' \tau)^2 + (2\kappa^3 - 2\kappa \tau (\kappa - \tau) + \kappa \tau' - \kappa' \tau)^2 + (\kappa \tau' - \kappa' \tau)^2}$$

şeklinde elde edilir. \square

3.4 Küresel Serret-Frenet Formülleri

Tanım 3.4.1 $\gamma = \gamma(s)$ birim vektörünün birim küre yüzeyinde çizdiği eğrinin teğet vektörü $t(s) = \gamma'(s)$ ve $d(s) = \gamma(s) \wedge t(s)$ olmak üzere $\{\gamma(s), t(s), d(s)\}$ ortonormal sistemine Sabban çatısı denir (Taşköprü ve Tosun, 2014).

Teorem 3.4.1 $\gamma : I \rightarrow S^2$ birim hızlı küresel eğrisinin Sabban çatısı $\{\gamma(s), t(s), d(s)\}$ olsun. Bu eğrinin küresel Frenet formülleri,

$$\gamma'(s) = t(s), \quad t'(s) = -\gamma(s) + K_g(s)d(s), \quad d'(s) = K_g(s)t(s) \quad (3.4.1)$$

şeklinde verilir. Burada K_g ,

$$K_g = \langle t', d \rangle \quad (3.4.2)$$

şeklinde verilen bir geodezik eğriliktir (Koenderink, 1990).

İspat. $t'(s) \in S_p\{\gamma(s), t(s), d(s)\}$ olduğundan

$$t'(s) = a_1\gamma(s) + a_2t(s) + a_3d(s), \quad a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$$

şeklinde yazılır. Burada

$$\langle t'(s), \gamma(s) \rangle = a_1, \quad \langle t'(s), t(s) \rangle = a_2, \quad \langle t'(s), d(s) \rangle = K_g = a_3 \quad (3.4.3)$$

olur. $\langle t(s), \gamma(s) \rangle = 0$ idi. Bu eşitliğin türevi alınırsa

$$\begin{aligned} \langle t(s), \gamma(s) \rangle = 0 &\Rightarrow \langle \langle t'(s), \gamma(s) \rangle + \langle t(s), \gamma'(s) \rangle \rangle = 0 \\ &\Rightarrow \langle t'(s), \gamma(s) \rangle + 1 = 0 \\ &\Rightarrow \langle t'(s), \gamma(s) \rangle = -1 = a_1 \end{aligned}$$

bulunur. $\langle t(s), t(s) \rangle = 1$ idi. Bu eşitliğin türevi alınırsa

$$\begin{aligned} \langle t(s), t(s) \rangle = 1 &\Rightarrow \langle \langle t'(s), t(s) \rangle + \langle t(s), t'(s) \rangle \rangle = 0 \\ &\Rightarrow 2\langle t'(s), t(s) \rangle = 0 \\ &\Rightarrow \langle t'(s), \gamma(s) \rangle = 0 = a_2 \end{aligned}$$

olur. Buradan $t'(s)$ vektörü

$$t'(s) = -\gamma(s) + K_g(s)d(s)$$

şeklinde elde edilir.

Şimdi $d'(s) = -K_g(s)t(s)$ olduğunu gösterelim. $d'(s) \in S_p\{\gamma(s), t(s), d(s)\}$ olduğundan

$$d'(s) = b_1\gamma(s) + b_2t(s) + b_3d(s), \quad b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$$

şeklinde yazılır. Buradan

$$\langle d'(s), \gamma(s) \rangle = b_1, \quad \langle d'(s), t(s) \rangle = b_2, \quad \langle d'(s), d(s) \rangle = K_g = b_3$$

olur. $\langle d(s), \gamma(s) \rangle = 0$ olduğundan bu eşitliğin türevi alınır

$$\begin{aligned} \langle d(s), \gamma(s) \rangle = 0 &\Rightarrow \langle \langle d'(s), \gamma(s) \rangle + \langle d(s), \gamma'(s) \rangle \rangle = 0 \\ &\Rightarrow \langle d'(s), \gamma(s) \rangle = 0 = b_1 \end{aligned}$$

bulunur. $\langle t(s), d(s) \rangle = 0$ eşitliğinin türevi alınır

$$\begin{aligned} \langle t(s), d(s) \rangle = 0 &\Rightarrow \langle \langle t'(s), d(s) \rangle + \langle t(s), d'(s) \rangle \rangle = 0 \\ &\Rightarrow K_g + \langle t(s), d'(s) \rangle = 0 \\ &\Rightarrow \langle d'(s), t(s) \rangle = -K_g = b_2 \end{aligned}$$

olur. $\langle d(s), d(s) \rangle = 0$ ifadesinden türev alınır

$$\begin{aligned} \langle d(s), d(s) \rangle = 0 &\Rightarrow \langle \langle d'(s), d(s) \rangle + \langle d(s), d'(s) \rangle \rangle = 0 \\ &\Rightarrow 2\langle d(s), d'(s) \rangle = 0 \\ &\Rightarrow \langle d'(s), d(s) \rangle = 0 = b_3 \end{aligned}$$

bulunur. Buradan $d'(s)$

$$d'(s) = -K_g(s)t(s)$$

şeklinde elde edilir. \square

4. BULGULAR ve TARTIŞMA

Bu bölüm çalışmanın orjinal kısmını oluşturmaktadır. Burada, Salkowski ve anti-Salkowski eğrisine ait Frenet vektörleri konum vektörü olarak alındığında bu vektörler tarafından çizilen diferensiyellenebilir Smarandache eğrileri tanımlandı ve bu eğrilerin Frenet aparatları hesaplandı.

4.1 Salkowski Eğrisinin Frenet Vektörlerinden Elde Edilen Smarandache Eğrileri

Tanım 4.1.1 Salkowski eğrisinin teğet vektörü T ve aslinormal vektörü N olsun.

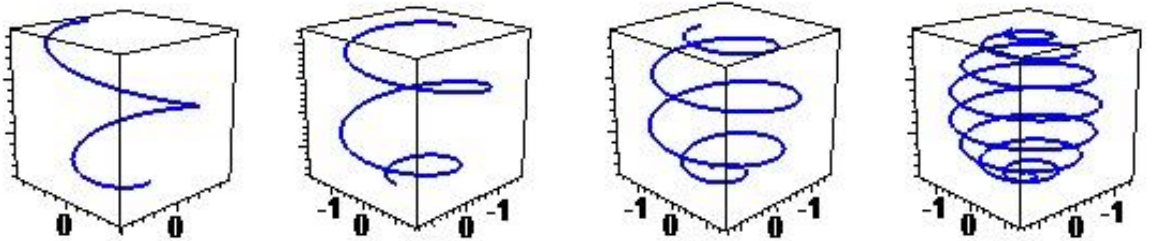
$$\gamma_1(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(T + N)$$

şeklinde tanımlı $\gamma_1(s)$ vektörünün çizdiği regüler eğriye TN -Smarandache eğrisi denir.

Bu eşitlikte T ve N vektörlerinin yerine (3.2.1) den karşılıkları yazılırsa $\gamma_1(s)$ -Smarandache eğrisinin ifadesi

$$\gamma_1(s) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\cos(s) \cos(ns) + n \sin(s) \sin(ns) + \frac{n}{m} \sin(s), \sin(s) \cos(ns) \right. \\ \left. -n \cos(s) \sin(ns) - \frac{n}{m} \cos(s), -\frac{n}{m} \sin(ns) - n \right)$$

şeklinde olur. Burada $m = \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$ değerleri için eğriye ait grafikler Şekil 4.1 de verilmiştir.



Şekil 4.1: TN -Smarandache eğrisi

Teorem 4.1.1 $\gamma_1(s)$ -Smarandache eğrisinin Frenet vektörleri

$$\begin{aligned} T_{\gamma_1}(s) &= \frac{1}{\sqrt{2 + \tau^2}}(-T + N + \tau B), \\ N_{\gamma_1}(s) &= \frac{1}{\sqrt{2 + \tau^2} \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}((a_2\tau + a_3)T + (-a_1\tau - a_3)N + (a_1 + a_2)B), \\ B_{\gamma_1}(s) &= \frac{1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}(a_1T + a_2N + a_3B) \end{aligned}$$

şeklinde verilir. Burada a_1, a_2, a_3

$$a_1 = 2\tau + \tau' + \tau^3, \quad a_2 = \tau', \quad a_3 = 2 + \tau^2 \quad (4.1.1)$$

şeklinde birer katsayıdır.

İspat. $\gamma_1(s)$ eğrisinin yay parametresi s^* olsun. Buna göre s parameteresine göre türev alınır

$$\gamma_1'(s) = \frac{d\gamma_1}{ds^*} \frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}}(T' + N')$$

şeklinde olur. Burada T' ve N' vektörlerinin yerine (3.1.2) den karşılıkları yazılırsa $\gamma_1'(s)$ vektörü

$$\gamma_1'(s) = T_{\gamma_1} \frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-T + N + \tau B) \quad (4.1.2)$$

olur. Buradan norm alınır $\frac{ds^*}{ds}$ ifadesi $\frac{ds^*}{ds} = \sqrt{\frac{2 + \tau^2}{2}}$ dir. Bu ifade (4.1.2) de yerine yazılırsa $\gamma_1(s)$ -Smarandache eğrisinin $T_{\gamma_1}(s)$ teğet vektörü

$$T_{\gamma_1}(s) = \frac{1}{\sqrt{2 + \tau^2}}(-T + N + \tau B)$$

şeklinde bulunur. Burada T, N, B vektörleri ile κ ve τ eğriliklerinin yerine (3.2.1) den karşılıkları yazılırsa $T_{\gamma_1}(s)$ teğet vektörü

$$T_{\gamma_1}(s) = \frac{\left(\frac{n}{m} \sin(s) \cos(ns) + \cos(s), -\frac{n}{m} \cos(s) \cos(ns) + \sin(s), -n \cos(ns)\right)}{\sqrt{\cos^2(ns) + 1}}$$

olur. $\gamma_1'(s)$ vektörünün tekrar türevi alınır $\gamma_1''(s)$ vektörü

$$\gamma_1''(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-T - \tau^2 N + (\tau + \tau')B)$$

şeklinde dir. $\gamma_1'(s)$ ve $\gamma_1''(s)$ vektörlerinin $\gamma_1'(s) \wedge \gamma_1''(s)$ vektörel çarpımı

$$\gamma_1'(s) \wedge \gamma_1''(s) = \frac{1}{2}(a_1 T + a_2 N + a_3 B)$$

dir. Buradan norm alınırsa $\|\gamma_1'(s) \wedge \gamma_1''(s)\|$ ifadesi

$$\|\gamma_1'(s) \wedge \gamma_1''(s)\| = \frac{1}{2}\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

şeklinde olur. $\gamma_1(s)$ -Smarandache eğrisinin $B_{\gamma_1}(s)$ binormal vektörü

$$B_{\gamma_1}(s) = \frac{\gamma_1'(s) \wedge \gamma_1''(s)}{\|\gamma_1'(s) \wedge \gamma_1''(s)\|}$$

bağıntısından

$$B_{\gamma_1}(s) = \frac{1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}(a_1 T + a_2 N + a_3 B)$$

şeklinde bulunur. Bu eşitlikte, T, N, B vektörleri ile κ ve τ eğriliklerinin yerine (3.2.1) den karşılıkları yazılırsa $B_{\gamma_1}(s)$ binormal vektörü

$$\begin{aligned} B_{\gamma_1}(s) = & \frac{1}{\frac{n}{m}\sqrt{\lambda_1}} \left(n \cos(s) \cos(ns) + n^2 \sin(s) \sin(ns) + \frac{n^2}{m} \sin(s) \cos^2(ns), \right. \\ & n \sin(s) \cos(ns) - n^2 \cos(s) \sin(ns) - \frac{n^2}{m} \cos(s) \cos^2(ns), \\ & \left. \frac{n^2}{m^2} \cos^2(ns) + \frac{n^2}{m} \sin(ns) + 1 \right) \end{aligned}$$

şeklinde olur. Burada $\lambda_1 = (\cos^2(ns) + 1)^2 + 2m((\cos^2(ns) + 1) \sin(ns) + m)$ dir. Son olarak $N_{\gamma_1}(s) = B_{\gamma_1}(s) \wedge T_{\gamma_1}(s)$ olduğundan $\gamma_1(s)$ -Smarandache eğrisinin $N_{\gamma_1}(s)$ aslinormal vektör

$$N_{\gamma_1}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\kappa^2 + \tau^2} \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}((a_2\tau + a_3\kappa)T + (-a_1\tau - a_3\kappa)N + (a_1\kappa + a_2\kappa)B)$$

dir. Bu eşitlikte T, N, B vektörleri ile κ ve τ eğriliklerinin yerine (3.2.1) den karşılıkları yazılırsa $N_{\gamma_1}(s)$ aslinormal vektörü

$$\begin{aligned} N_{\gamma_1}(t) = & \frac{1}{\frac{n}{m}\sqrt{\mu_1}} \left((\cos^2(ns) + 1) \left(\frac{n}{m} \cos(s) \cos(ns) - \sin(s) \right) + n \sin(ns) \left(-\frac{n}{m} \sin(s) \right. \right. \\ & \left. \left. + \cos(s) \cos(ns) \right), (\cos^2(ns) + 1) \left(\frac{n}{m} \sin(s) \cos(ns) + \cos(s) \right) \right. \\ & \left. + n \sin(ns) \left(\sin(s) \cos(ns) + \frac{n}{m} \cos(s) \right), n^2 \sin(ns) \right) \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Burada $\mu_1 = (\cos^2(ns)+1)^3+2(\cos^2(ns)+1)((\cos^2(ns)+1) \sin(ns)+m)$ dır. \square

Teorem 4.1.2 $\gamma_1(s)$ -Smarandache eğrisinin κ_{γ_1} eğriliği ve τ_{γ_1} burulması sırasıyla

$$\kappa_{\gamma_1} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}{(\sqrt{2} + \tau^2)^3}, \quad \tau_{\gamma_1} = \frac{\sqrt{2}(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)}{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

şeklinde verilir. Burada b_1, b_2, b_3

$$b_1 = 1 + \tau^2, \quad b_2 = -1 - \tau^2 - 3\tau\tau', \quad b_3 = -\tau - \tau^3 + \tau' + \tau'' \quad (4.1.3)$$

şeklinde birer katsayıdır.

İspat. $\gamma_1(s)$ -Smarandache eğrisinin $\kappa_{\gamma_1}(s)$ eğriliği (3.1.1) bağıntısından

$$\kappa_{\gamma_1}(s) = \frac{\|\gamma_1'(s) \wedge \gamma_1''(s)\|}{\|\gamma_1'(s)\|^3}$$

şeklinde yazılır. Burada gerekli işlemler yapılırsa $\kappa_{\gamma_1}(s)$ eğriliği

$$\kappa_{\gamma_1}(s) = \frac{\sqrt{2}\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}{(\sqrt{2}\kappa^2 + \tau^2)^3}$$

şeklinde bulunur. Burada κ ve τ eğriliklerinin yerine (3.2.1) den karşılıkları yazılırsa $\kappa_{\gamma_1}(s)$ eğriliğinin ifadesi

$$\kappa_{\gamma_1}(s) = \sqrt{\frac{2(\cos^2(ns) + 1)^2 + 4m((\cos^2(ns) + 1) \sin(ns) + m)}{(\cos^2(ns) + 1)^3}},$$

olur. $\gamma_1''(s)$ vektörünün tekrar türevi alınır

$$\gamma_1'''(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(b_1T + b_2N + b_3B)$$

olur. $\gamma_1(s)$ -Smarandache eğrisinin $\tau_{\gamma_1}(s)$ burulması (3.1.1) bağıntısından

$$\tau_{\gamma_1}(s) = \frac{\det(\gamma_1'(s), \gamma_1''(s), \gamma_1'''(s))}{\|\gamma_1'(s) \wedge \gamma_1''(s)\|^2}$$

şeklinde yazılır. Gerekli işlemler yapılırsa $\tau_{\gamma_1}(s)$ burulması

$$\tau_{\gamma_1}(s) = \frac{\sqrt{2}(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)}{(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)}$$

şeklinde bulunur. $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ katsayılarının yerine (4.1.1) ve (4.1.3) den karşılıkları yazılırsa $\tau_{\gamma_1}(s)$ burulmasının ifadesi

$$\tau_{\gamma_1}(s) = \frac{(-3m^2 \sin(ns) - m(\cos^2(ns) + 1))\sqrt{2} \cos(ns)}{(\cos^2(ns) + 1)^2 + 2m((\cos^2(ns) + 1) \sin(ns) + m)}$$

şeklinde elde edilir. \square

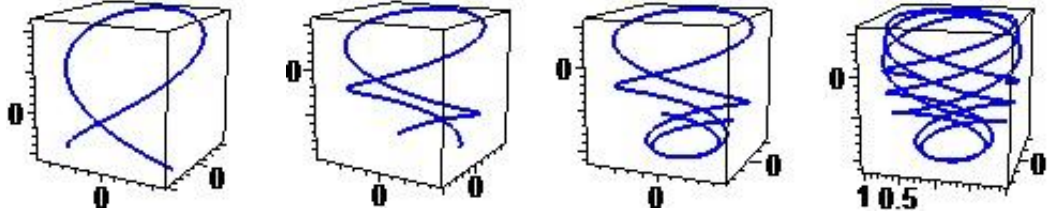
Tanım 4.1.2 Salkowski eğrisinin normal vektörü N ve binormal vektörü B olmak üzere

$$\gamma_2(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(N + B)$$

şeklinde tanımlı $\gamma_2(s)$ vektörünün çizdiği regüler eğriye NB -Smarandache eğrisi denir. Burada N ve B vektörlerinin yerine (3.2.1) den karşılıkları yazılırsa $\gamma_2(s)$ -Smarandache eğrisi

$$\begin{aligned} \gamma_2(s) = & \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\cos(s) \sin(ns) + n \sin(s) \cos(ns) + \frac{n}{m} \sin(s), -\sin(s) \sin(ns) \right. \\ & \left. -n \cos(s) \cos(ns) - \frac{n}{m}, \frac{n}{m} \cos(ns) - n \right) \end{aligned}$$

şeklinde olur. Burada $m = \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$ değerleri için eğriye ait grafikler Şekil 4.2 de verilmiştir.



Şekil 4.2: NB -Smarandache eğrisi

Teorem 4.1.3 $\gamma_2(s)$ -Smarandache eğrisinin Frenet vektörleri

$$T_{\gamma_2}(s) = \frac{1}{\sqrt{1 + 2\tau^2}}(-T - \tau N + \tau B),$$

$$N_{\gamma_2}(s) = \frac{1}{\sqrt{1 + 2\tau^2} \sqrt{a_4^2 + a_5^2 + a_6^2}}((a_5\tau + a_6\tau)T + (-a_4\tau - a_6)N + (-a_4\tau + a_5)B),$$

$$B_{\gamma_2}(s) = \frac{1}{\sqrt{a_4^2 + a_5^2 + a_6^2}}(a_4T + a_5N + a_6B)$$

şeklinde verilir. Burada a_4, a_5, a_6

$$a_4 = \tau, \quad a_5 = 2\tau^2, \quad a_6 = 1 + 2\tau^2 \quad (4.1.4)$$

şeklinde birer katsayıdır.

İspat. $\gamma_2(s)$ eğrisinin yay parametresi s^* olsun. Buna göre s parameteresine göre türev alınır

$$\gamma_2'(s) = \frac{d\gamma_2}{ds^*} \frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}}(N' + B')$$

şeklinde olur. Burada N' ve B' vektörlerinin yerine (3.1.2) den karşılıkları yazılırsa $\gamma_2'(s)$ vektörü

$$\gamma_2'(s) = T_{\gamma_2} \frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-T - \tau N + \tau B) \quad (4.1.5)$$

olur. Norm alınır $\frac{ds^*}{ds}$ ifadesi

$$\frac{ds^*}{ds} = \sqrt{\frac{1 + 2\tau^2}{2}}$$

dır. Bu ifade (4.1.5) de yerine yazılırsa $\gamma_2(s)$ -Smarandache eğrisinin $T_{\gamma_2}(s)$ teğet vektörü

$$T_{\gamma_2}(s) = \frac{1}{\sqrt{1 + 2\tau^2}}(-T - \tau N + \tau B)$$

şeklinde bulunur. Burada T, N, B vektörleri ile κ ve τ eğriliklerinin yerine (3.2.1) den karşılıkları yazılırsa $T_{\gamma_2}(s)$ teğet vektörü

$$T_{\gamma_2}(s) = \frac{1}{\sqrt{\sin^2(ns) + 1}} \left(\frac{n}{m} \sin(s) \sin(ns) + \cos(s), -\frac{n}{m} \cos(s) \sin(ns) + \sin(s), -n \sin(ns) \right)$$

şeklinde olur. $\gamma_2'(s)$ vektörünün tekrar türevi alınır $\gamma_2''(s)$ vektörü

$$\gamma_2''(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\tau T + (-1 - \tau' - \tau^2)N + (-\tau^2 + \tau')B)$$

olur. $\gamma_2'(s)$ ve $\gamma_2''(s)$ vektörlerinin $\gamma_2'(s) \wedge \gamma_2''(s)$ vektörel çarpımı

$$\gamma_2'(s) \wedge \gamma_2''(s) = \frac{1}{2}(a_4 T + a_5 N + a_6 B)$$

olur. Norm alınır $\|\gamma_2'(s) \wedge \gamma_2''(s)\|$ ifadesi

$$\|\gamma_2'(s) \wedge \gamma_2''(s)\| = \frac{1}{2}\sqrt{a_4^2 + a_5^2 + a_6^2}$$

bulunur. $\gamma_2(s)$ -Smarandache eğrisinin $B_{\gamma_2}(s)$ binormal vektörü

$$B_{\gamma_2}(s) = \frac{\gamma_2'(s) \wedge \gamma_2''(s)}{\|\gamma_2'(s) \wedge \gamma_2''(s)\|}$$

bağıntısından

$$B_{\gamma_2}(s) = \frac{1}{\sqrt{a_4^2 + a_5^2 + a_6^2}}(a_4T + a_5N + a_6B)$$

olur. Bu ifade de T, N, B vektörleri ile κ ve τ eğriliklerinin yerine (3.2.1) den karşılıkları yazılırsa $B_{\gamma_2}(s)$ binormal vektör

$$\begin{aligned} B_{\gamma_2}(s) = & \frac{1}{\frac{n}{m}\sqrt{\lambda_2}} \left((\sin^2(ns) + 1) \left(\frac{n}{m} \cos(s) \sin(ns) - \sin(s) \right) + n \cos(ns) \left(\frac{n}{m} \sin(s) \right. \right. \\ & \left. \left. - \cos(s) \sin(ns) \right), (\sin^2(ns) + 1) \left(\frac{n}{m} \sin(s) \sin(ns) + \cos(s) \right) \right. \\ & \left. \left. - n \cos(ns) \left(\sin(s) \sin(ns) + \frac{n}{m} \cos(s) \right), -n^2 \cos(ns) \right) \right) \end{aligned}$$

şeklinde olur. Burada

$$\lambda_2 = (\sin^2(ns) + 1)^2 - 2m((\sin^2(ns) + 1) \cos(ns) - m)$$

dir. $\gamma_2(s)$ -Smarandache eğrisinin $N_{\gamma_2}(s)$ aslinormal vektörü $N_{\gamma_2}(s) = B_{\gamma_2}(s) \wedge T_{\gamma_2}(s)$ olduğundan

$$N_{\gamma_2}(s) = \frac{1}{\sqrt{1 + 2\tau^2}\sqrt{a_4^2 + a_5^2 + a_6^2}}((a_5\tau + a_6\tau)T + (-a_4\tau - a_6)N + (-a_4\tau + a_5)B)$$

bulunur. Burada T, N, B vektörleri ile κ ve τ yerine (3.2.1) den karşılıkları yazılırsa $N_{\gamma_1}(s)$ aslinormal vektörü

$$\begin{aligned} N_{\gamma_2}(s) = & \frac{1}{\frac{n}{m}\sqrt{\mu_2}} \left(n \cos(s) \sin(ns) - n^2 \sin(s) \cos(ns) + \frac{n^2}{m} \sin(s) \sin^2(ns), \right. \\ & n \sin(s) \sin(ns) + n^2 \cos(s) \cos(ns) - \frac{n^2}{m} \cos(s) \sin^2(ns), \\ & \left. \frac{n^2}{m^2} \sin^2(ns) - \frac{n^2}{m} \cos(ns) + 1 \right) \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Burada

$$\mu_2 = (\sin^2(ns) + 1)^3 - 2m(\sin^2(ns) + 1)((\sin^2(ns) + 1) \cos(ns) - m)$$

dir. \square

Teorem 4.1.4 $\gamma_2(s)$ -Smarandache eğrisinin κ_{γ_2} eğriliği ve τ_{γ_2} burulması sırasıyla

$$\kappa_{\gamma_2} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{a_4^2 + a_5^2 + a_6^2}}{(\sqrt{1 + 2\tau^2})^3}, \quad \tau_{\gamma_2} = \frac{\sqrt{2}(a_4b_4 + a_5b_5 + a_6b_6)}{a_4^2 + a_5^2 + a_6^2}$$

şeklinde verilir. Burada b_4, b_5, b_6

$$b_4 = \tau^2 + 1 + 2\tau', \quad b_5 = \tau(\tau^2 + 1 - 3\tau') - \tau'', \quad b_6 = \tau(-\tau^2 - 1 - 3\tau') + \tau'' \quad (4.1.6)$$

şeklinde birer katsayıdır.

İspat. $\gamma_2(s)$ -Smarandache eğrisinin $\kappa_{\gamma_2}(s)$ eğriliği (3.1.1) bağıntısından

$$\kappa_{\gamma_2}(s) = \frac{\|\gamma_2'(s) \wedge \gamma_2''(s)\|}{\|\gamma_2'(s)\|^3}$$

şeklinde yazılır. Gerekli işlemler yapılırsa $\kappa_{\gamma_2}(s)$ eğriliği

$$\kappa_{\gamma_2} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{a_4^2 + a_5^2 + a_6^2}}{(\sqrt{\kappa^2 + 2\tau^2})^3}$$

şeklinde bulunur. Burada κ ve τ eğriliklerinin yerine (3.2.1) den karşılıkları yazılırsa $\kappa_{\gamma_1}(s)$ eğriliğinin ifadesi

$$\kappa_{\gamma_2}(s) = \sqrt{\frac{2(\sin^2(ns) + 1)^3 - 4m((\sin^2(ns) + 1) \cos(ns) - m)}{(\sin^2(ns) + 1)^3}}$$

dir. $\gamma_2''(s)$ vektörünün tekrar türevi alınır

$$\gamma_2'''(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(b_4T + b_5N + b_6B)$$

olur. $\gamma_2(s)$ -Smarandache eğrisinin $\tau_{\gamma_2}(s)$ burulması (3.1.1) bağıntısından

$$\tau_{\gamma_2}(s) = \frac{\det(\gamma_2'(s), \gamma_2''(s), \gamma_2'''(s))}{\|\gamma_2'(s) \wedge \gamma_2''(s)\|^2}$$

şeklinde yazılır. Gerekli işlemler yapılırsa $\tau_{\gamma_2}(s)$ burulması

$$\tau_{\gamma_2}(s) = \frac{\sqrt{2}(a_4b_4 + a_5b_5 + a_6b_6)}{(a_4^2 + a_5^2 + a_6^2)}$$

şeklinde bulunur. Burada $a_4, a_5, a_6, b_4, b_5, b_6$ katsayıları yerine (4.1.4) ve (4.1.6) den karşılıkları yazılırsa $\tau_{\gamma_1}(s)$ burulmasının ifadesi

$$\tau_{\gamma_2}(s) = \frac{(3m^2 \cos(ns) - m(\sin^2(ns) + 1))\sqrt{2} \sin(ns)}{(\sin^2(ns) + 1)^2 - 2m((\sin^2(ns) + 1) \cos(ns) - m)}$$

şeklinde elde edilir. \square

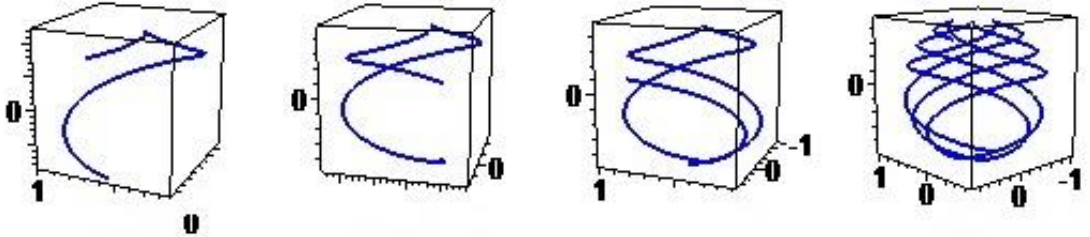
Tanım 4.1.3 Salkowski eğrisinin teğet vektörü T ve binormal vektörü B olmak üzere

$$\gamma_3(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(T + B)$$

olarak tanımlı $\gamma_3(s)$ vektörünün çizdiği regüler eğriye TB -Smarandache eğrisi denir. Burada T ve B vektörlerinin yerine (3.2.1) den karşılıkları yazılırsa $\gamma_3(s)$ -Smarandache eğrisinin ifadesi

$$\gamma_3(s) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{array}{l} -\cos(s) \cos(ns) - \cos(s) \sin(ns) - n \sin(s) \sin(ns) + n \sin(s) \cos(ns), \\ -\sin(s) \cos(ns) - \sin(s) \sin(ns) + n \cos(s) \sin(ns) - n \cos(s) \cos(ns), \\ \frac{n}{m} \cos(ns) - \frac{n}{m} \sin(ns) \end{array} \right)$$

olur. Burada $m = \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$ değerleri için eğriye ait grafikler Şekil 4.3 de verilmiştir.



Şekil 4.3: TB -Smarandache eğrisi

Teorem 4.1.5 $\gamma_3(s)$ -Smarandache eğrisinin Frenet vektörleri

$$T_{\gamma_3}(s) = N, \quad N_{\gamma_3}(s) = \frac{(-a_8T + a_7B)}{\sqrt{a_7^2 + a_8^2}}, \quad B_{\gamma_3}(s) = \frac{(a_7T + a_8B)}{\sqrt{a_7^2 + a_8^2}}$$

şeklinde verilir. Burada a_7, a_8

$$a_7 = \tau - 2\tau^2 + \tau^3, \quad a_8 = 1 - 2\tau + \tau^2 \quad (4.1.7)$$

şeklinde birer katsayıdır.

İspat. $\gamma_3(s)$ eğrisinin yay parametresi s^* olsun. Buna göre s parameteresine göre türev alınırsa

$$\gamma_3'(s) = \frac{d\gamma_3}{ds} \frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}}(T' + B')$$

olur. T' ve B' vektörleri yerine (3.1.2) den karşılıkları yazılırsa $\gamma_3'(s)$ vektörü

$$\gamma_3'(s) = T_{\gamma_3} \frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - \tau)N \quad (4.1.8)$$

bulunur. Norm alınırsa $\frac{ds^*}{ds}$ ifadesi $\frac{ds^*}{ds} = \sqrt{\frac{1 - \tau}{2}}$ dır. Bu ifade (4.1.8) de yerine yazılırsa $\gamma_3(s)$ -Smarandache eğrisinin $T_{\gamma_3}(s)$ teğet vektörü

$$T_{\gamma_3}(s) = N.$$

T, N, B vektörleri ile κ ve τ eğriliklerinin yerine (3.2.1) den karşılıkları yazılırsa $T_{\gamma_3}(s)$ teğet vektörü

$$T_{\gamma_3}(s) = \left(\frac{n}{m} \sin(s), -\frac{n}{m} \cos(s), -n \right)$$

şeklinde olur. $\gamma_3'(s)$ vektörünün tekrar türevi alınırsa $\gamma_3''(s)$ vektörü

$$\gamma_3''(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}((1 + \tau)T + (-\tau')N + (\tau - \tau^2)B)$$

olur. $\gamma_3'(s)$ ve $\gamma_3''(s)$ vektörlerinin $\gamma_3'(s) \wedge \gamma_3''(s)$ vektörel çarpımı

$$\gamma_3'(s) \wedge \gamma_3''(s) = \frac{1}{2}(a_7T + a_8B)$$

şeklindedir. Normu alınırsa

$$\|\gamma_3'(s) \wedge \gamma_3''(s)\| = \frac{1}{2}\sqrt{a_7^2 + a_8^2}$$

dır. $\gamma_3(s)$ -Smarandache eğrisinin $B_{\gamma_3}(s)$ binormal vektörü

$$B_{\gamma_3}(s) = \frac{\gamma_3'(s) \wedge \gamma_3''(s)}{\|\gamma_3'(s) \wedge \gamma_3''(s)\|}$$

bağıntısından

$$B_{\gamma_3}(s) = \frac{1}{\sqrt{a_7^2 + a_8^2}}(a_7T + a_8B)$$

bulunur. T, N, B vektörleri ile κ ve τ eğriliklerinin yerine (3.2.1) den karşılıkları yazılırsa $B_{\gamma_3}(s)$ binormal vektörü

$$B_{\gamma_3}(s) = \left(n \sin(s), -n \cos(s), \frac{n}{m} \right)$$

şeklinde olur. $N_{\gamma_3}(s) = B_{\gamma_3}(s) \wedge T_{\gamma_3}(s)$ bağıntısından $\gamma_3(s)$ -Smarandache eğrisinin $N_{\gamma_3}(s)$ aslinormal vektörü

$$N_{\gamma_3}(s) = \frac{1}{\sqrt{1 + 2\tau^2}\sqrt{a_7^2 + a_8^2}}(-a_8T + a_7B)$$

şeklinde bulunur. T, N, B vektörleri ile κ ve τ eğriliklerinin yerine (3.2.1) den karşılıkları yazılırsa bu vektör

$$N_{\gamma_3}(s) = (\cos(s), -\sin(s), 0)$$

olur. \square

Teorem 4.1.6 $\gamma_3(s)$ -Smarandache eğrisinin κ_{γ_3} eğriliği ve τ_{γ_3} burulması sırasıyla

$$\kappa_{\gamma_3} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{a_7^2 + a_8^2}}{(1 - \tau)^3}, \quad \tau_{\gamma_3} = \frac{\sqrt{2}(a_7b_7 + a_8b_9)}{a_7^2 + a_8^2}$$

şeklinde verilir. Burada b_7, b_8, b_9

$$b_7 = 2\tau', \quad b_8 = -1 + \tau - \tau^2 + \tau^3 - \tau''', \quad b_9 = -3\tau\tau' + \tau' \quad (4.1.9)$$

şeklinde birer katsayıdır.

İspat. $\gamma_3(s)$ -Smarandache eğrisinin $\kappa_{\gamma_3}(s)$ eğriliği (3.1.1) bağıntısından

$$\kappa_{\gamma_3}(s) = \frac{\|\gamma_3'(s) \wedge \gamma_3''(s)\|}{\|\gamma_3'(s)\|^3}$$

şeklinde yazılır. Gerekli işlemler yapılırsa $\kappa_{\gamma_3}(s)$ eğriliği

$$\kappa_{\gamma_3} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{a_7^2 + a_8^2}}{(1 - \tau)^3}$$

dır. κ ve τ eğriliklerinin yerine (3.2.1) den karşılıkları yazılırsa $\kappa_{\gamma_3}(s)$ eğriliğinin ifadesi

$$\kappa_{\gamma_3}(s) = \frac{\sqrt{2}}{\cos(ns) + \sin(ns)}$$

bulunur. $\gamma_3''(s)$ vektörünün tekrar türevi alınırsa $\gamma_3'''(s)$ vektörü

$$\gamma_3'''(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(b_7T + b_8N + b_9B)$$

olur. $\gamma_3(s)$ -Smarandache eğrisinin $\tau_{\gamma_3}(s)$ burulması (3.1.1) bağıntısından

$$\tau_{\gamma_3}(s) = \frac{\det(\gamma_3'(s), \gamma_3''(s), \gamma_3'''(s))}{\|\gamma_3'(s) \wedge \gamma_3''(s)\|^2}$$

şeklinde yazılır. Gerekli işlemler yapılırsa $\tau_{\gamma_3}(s)$ burulması

$$\tau_{\gamma_3} = \frac{\sqrt{2}(a_7b_7 + a_8b_9)}{a_7^2 + a_8^2}$$

şeklinde olur. Burada a_7 , a_8 , b_7 , b_9 katsayıları yerine (4.1.7) ve (4.1.9) den karşılıkları yazılırsa $\tau_{\gamma_3}(s)$ burulmasının ifadesi

$$\tau_{\gamma_3}(s) = \frac{m\sqrt{2}}{\cos(ns) + \sin(ns)}$$

şeklinde elde edilir. \square

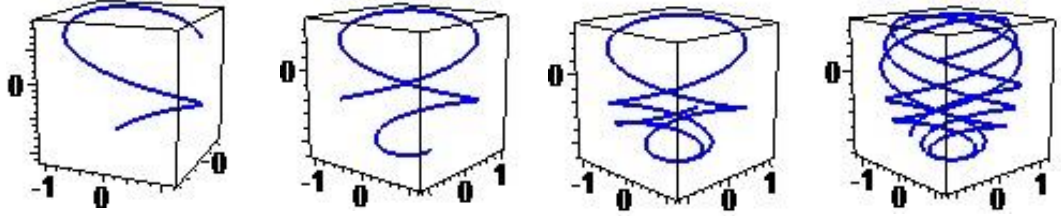
Tanım 4.1.4 Salkowski eğrisinin teğet vektörü T , aslinormal vektörü N ve binormal vektörü B olmak üzere

$$\gamma_4(s) = \frac{1}{\sqrt{3}}(T + N + B)$$

olarak tanımlı $\gamma_4(s)$ vektörünün çizdiği regüler eğriye TNB -Smarandache eğrisi denir. Burada T , N ve B vektörlerinin yerine (3.2.1) den karşılıkları yazılırsa $\gamma_4(s)$ -Smarandache eğrisinin ifadesi

$$\begin{aligned} \gamma_4(s) = & \frac{1}{\sqrt{3}} \left(-\cos(s) \cos(ns) - \cos(s) \sin(ns) - n \sin(s) \sin(ns) + n \sin(s) \cos(ns) \right. \\ & + \frac{n}{m} \sin(s), -\sin(s) \cos(ns) - \sin(s) \sin(ns) + n \cos(s) \sin(ns) - n \cos(s) \cos(ns) \\ & \left. - \frac{n}{m} \cos(s), -\frac{n}{m} \sin(ns) + \frac{n}{m} \cos(ns) - n \right) \end{aligned}$$

olur. Burada $m = \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$ değerleri için eğriye ait grafikler Şekil 4.4 de verilmiştir.



Şekil 4.4: TNB -Smarandache eğrisi

Teorem 4.1.7 $\gamma_4(s)$ -Smarandache eğrisinin Frenet vektörleri

$$\begin{aligned} T_{\gamma_4}(s) &= \frac{-T + (1 - \tau)N + \tau B}{\sqrt{2(1 + \tau^2 - \tau)}}, \\ N_{\gamma_4}(s) &= \frac{(a_{11}\tau - a_{12}(1 - \tau))T + (-a_{10}\tau - a_{12})N + (a_{10}(1 - \tau) + a_{11})B}{\sqrt{a_{10}^2 + a_{11}^2 + a_{12}^2} \sqrt{2(1 + \tau^2 - \tau)}}, \\ B_{\gamma_4}(s) &= \frac{(a_{10}T + a_{11}N + a_{12}B)}{\sqrt{a_{10}^2 + a_{11}^2 + a_{12}^2}} \end{aligned}$$

şeklinde verilir. Burada a_{10}, a_{11}, a_{12}

$$a_{10} = 2\tau - 2\tau^2 + 2\tau^3 + \tau', \quad a_{11} = \tau', \quad a_{12} = -2\tau + 2\tau^2 + 2 + \tau' \quad (4.1.10)$$

şeklinde birer katsayıdır.

İspat. $\gamma_4(s)$ eğrisinin yay parametresi s^* olsun. Buna göre s parameteresine göre türev alınır

$$\gamma_4'(s) = \frac{d\gamma_3}{ds} \frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{\sqrt{3}}(T' + N' + B')$$

şeklinde olur. Burada (3.1.2) den T' , N' ve B' vektörleri yerlerine yazılırsa $\gamma_4'(s)$ vektörü

$$\gamma_4'(s) = T_{\gamma_4} \frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{\sqrt{3}}(-T + (1 - \tau)N + \tau B) \quad (4.1.11)$$

olur. Buradan norm alınır $\frac{ds^*}{ds}$ ifadesi

$$\frac{ds^*}{ds} = \sqrt{\frac{2(1 + \tau^2 - \tau)}{3}}$$

dır. Bu ifade (4.1.11) de yerine yazılırsa $\gamma_4(s)$ -Smarandache eğrisinin $T_{\gamma_4}(s)$ teğet vektörü

$$T_{\gamma_4}(s) = \frac{-T + (1 - \tau)N + \tau B}{\sqrt{2(1 + \tau^2 - \tau)}}$$

dır. Burada T, N, B vektörleri ile κ ve τ eğriliklerinin yerine (3.2.1) den karşılıkları yazılırsa $T_{\gamma_4}(s)$ teğet vektörü

$$T_{\gamma_4}(s) = \frac{1}{\sqrt{(\cos(ns) + \sin(ns))^2 + 1}} \left(\begin{aligned} &\frac{n}{m} \sin(s)(\cos(ns) + \sin(ns)) + \cos(s), \\ &-\frac{n}{m} \cos(s)(\cos(ns) + \sin(ns)) + \sin(s), -n(\cos(ns) + \sin(ns)) \end{aligned} \right)$$

şeklinde olur. $\gamma_4'(s)$ vektörünün tekrar türevi alınır

$$\gamma_4''(s) = \frac{1}{\sqrt{3}}((-1 + \tau)T + (-1 - \tau^2 - \tau')N + (-\tau' - \tau^2 + \tau)B)$$

olur. $\gamma_4'(s)$ ve $\gamma_4''(s)$ vektörlerinin $\gamma_4'(s) \wedge \gamma_4''(s)$ vektörel çarpımı

$$\gamma_4'(s) \wedge \gamma_4''(s) = \frac{1}{3}(a_{10}T + a_{11}N + a_{12}B)$$

şeklindedir. Normu alınırsa

$$\|\gamma_4'(s) \wedge \gamma_4''(s)\| = \frac{1}{3} \sqrt{a_{10}^2 + a_{11}^2 + a_{12}^2}$$

olur. $\gamma_4(s)$ -Smarandache eğrisinin $B_{\gamma_4}(s)$ binormal vektör

$$B_{\gamma_4}(s) = \frac{\gamma_4'(s) \wedge \gamma_4''(s)}{\|\gamma_4'(s) \wedge \gamma_4''(s)\|}$$

bağıntısından

$$B_{\gamma_4}(s) = \frac{1}{\sqrt{a_{10}^2 + a_{11}^2 + a_{12}^2}} (a_{10}T + a_{11}N + a_{12}B)$$

şeklinde bulunur. T, N, B vektörleri ile κ ve τ eğriliklerinin yerine (3.2.1) den karşılıkları yazılırsa $B_{\gamma_4}(s)$ binormal vektörü

$$\begin{aligned} B_{\gamma_4}(s) = & \frac{1}{\sqrt{\lambda_3}} \left(n \cos(s)(\cos(ns) + \sin(ns)) - n^2 \sin(s)(\cos(ns) - \sin(ns)) \right. \\ & + \frac{n^2}{m} \sin(s)(\cos(ns) + \sin(ns))^2, n \sin(s)(\cos(ns) + \sin(ns)) \\ & + n^2 \cos(s)(\cos(ns) - \sin(ns)) - \frac{n^2}{m} \cos(s)(\cos(ns) + \sin(ns))^2, \\ & \left. \frac{n^2}{m^2} (\cos(ns) + \sin(ns))^2 - \frac{n^2}{m} (\cos(ns) - \sin(ns)) + 1 \right), \end{aligned}$$

şeklinde olur. Burada

$$\lambda_3 = ((\cos(ns) + \sin(ns))^2 + 1)^2 - m(2(\cos(ns) - \sin(ns))((\cos(ns) + \sin(ns))^2 + 1) - 3m)$$

şeklindedir. $N_{\gamma_4}(s) = B_{\gamma_4}(s) \wedge T_{\gamma_4}(s)$ bağıntısından $\gamma_4(s)$ -Smarandache eğrisinin aslinormal vektör

$$N_{\gamma_4}(s) = \frac{((a_{11}\tau - a_{12}(1 - \tau))T + (-a_{10}\tau - a_{12})N + (a_{10}(1 - \tau) + a_{11})B)}{\sqrt{2(1 + \tau^2 - \tau)} \sqrt{a_{10}^2 + a_{11}^2 + a_{12}^2}}$$

olur. T, N, B vektörleri ile κ ve τ eğriliklerinin yerine (3.2.1) den karşılıkları yazılırsa $N_{\gamma_4}(s)$ aslinormal vektörü

$$\begin{aligned} N_{\gamma_4}(s) = & \frac{1}{\sqrt{\mu_3}} \left(((\cos(ns) + \sin(ns))^2 + 1) \left(\frac{n}{m} \cos(s)(\cos(ns) + \sin(ns)) - \sin(s) \right) \right. \\ & + n(\cos(ns) - \sin(ns)) \left(\frac{n}{m} \sin(s) - \cos(s)(\cos(ns) + \sin(ns)) \right), \\ & ((\cos(ns) + \sin(ns))^2 + 1) \left(\frac{n}{m} \sin(s)(\cos(ns) + \sin(ns)) + \cos(s) \right) \\ & - n(\cos(ns) - \sin(ns)) \left(\frac{n}{m} \cos(s) + \sin(s)(\cos(ns) + \sin(ns)) \right), \\ & \left. -n^2(\cos(ns) - \sin(ns)) \right), \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Burada

$$\begin{aligned}\mu_3 &= ((\cos(ns) + \sin(ns))^2 + 1)^3 - m((\cos(ns) + \sin(ns))^2 + 1)(2(\cos(ns) \\ &\quad - \sin(ns))((\cos(ns) + \sin(ns))^2 + 1) - 3m)\end{aligned}$$

dır. \square

Teorem 4.1.8 $\gamma_4(s)$ -Smarandache eğrisinin κ_{γ_4} eğriliği ve τ_{γ_4} burulması sırasıyla

$$\kappa_{\gamma_4} = \frac{\sqrt{3}\sqrt{a_{10}^2 + a_{11}^2 + a_{12}^2}}{(\sqrt{2}(1 + \tau^2 - \tau))^3}, \quad \tau_{\gamma_4} = \frac{\sqrt{3}(a_{10}b_{10} + a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12})}{a_{10}^2 + a_{11}^2 + a_{12}^2}$$

şeklinde verilir. Burada b_{10} , b_{11} , b_{12}

$$\begin{aligned}b_{10} &= 2\tau + 1 + \tau^2, \\ b_{11} &= -1 + \tau^3 - \tau'' - 3\tau\tau' + \tau - \tau^2, \\ b_{12} &= \tau'' - 3\tau\tau' + \tau' - \tau^3 - \tau\end{aligned} \tag{4.1.12}$$

birer katsayıdır.

İspat. $\gamma_4(s)$ -Smarandache eğrisinin $\kappa_{\gamma_4}(s)$ eğriliği (3.1.1) bağıntısından

$$\kappa_{\gamma_4}(s) = \frac{\|\gamma_4'(s) \wedge \gamma_4''(s)\|}{\|\gamma_4'(s)\|^3}$$

yazılır ve buradan $\kappa_{\gamma_4}(s)$ eğriliği

$$\kappa_{\gamma_4} = \frac{\sqrt{3}\sqrt{a_{10}^2 + a_{11}^2 + a_{12}^2}}{(\sqrt{2}(1 + \tau^2 - \tau))^3}$$

olur. Bu ifade de κ ve τ eğriliklerinin yerine (3.2.1) den karşılıkları yazılırsa $\kappa_{\gamma_4}(s)$ eğriliği

$$\kappa_{\gamma_4}(s) = \sqrt{\frac{3(\lambda_4^2 - 3m(2(\cos(ns) - \sin(ns))(\lambda_4 - 3m))}{\lambda_4^3}},$$

şeklinde bulunur. Burada $\lambda_4 = (\cos(ns) + \sin(ns))^2 + 1$ dir. $\gamma_4''(s)$ vektörünün tekrar türevi alınırsa

$$\gamma_4'''(s) = \frac{1}{\sqrt{3}}(b_{10}T + b_{11}N + b_{12}B)$$

olur. $\gamma_4(s)$ -Smarandache eğrisinin $\tau_{\gamma_4}(s)$ burulması (3.1.1) bağıntısından

$$\tau_{\gamma_4}(s) = \frac{\det(\gamma_4'(s), \gamma_4''(s), \gamma_4'''(s))}{\|\gamma_4'(s) \wedge \gamma_4''(s)\|^2}$$

yazılır ve $\tau_{\gamma_4}(s)$ burulması

$$\tau_{\gamma_4} = \frac{\sqrt{3}(a_{10}b_{10} + a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12})}{a_{10}^2 + a_{11}^2 + a_{12}^2}$$

şeklinde olur. $a_{10}, a_{11}, a_{12}, b_{10}, b_{11}, b_{12}$ katsayıları yerine (4.1.10) ve (4.1.12) den karşılıkları yazılırsa $\tau_{\gamma_4}(s)$ burulmasının ifadesi

$$\tau_{\gamma_4}(s) = \frac{m\sqrt{3}(\cos(ns) + \sin(ns))(3m(\cos(ns) - \sin(ns)) - (\lambda_4))}{(\lambda_4^2 - m(2(\cos(ns) - \sin(ns)))(\lambda_4 - 3m)}$$

şeklinde elde edilir. Burada $\lambda_4 = (\cos(ns) + \sin(ns))^2 + 1$ dir. \square

4.2 Anti-Salkowski Eğrisinin Frenet Vektörlerinden Elde Edilen Smarandache Eğrileri

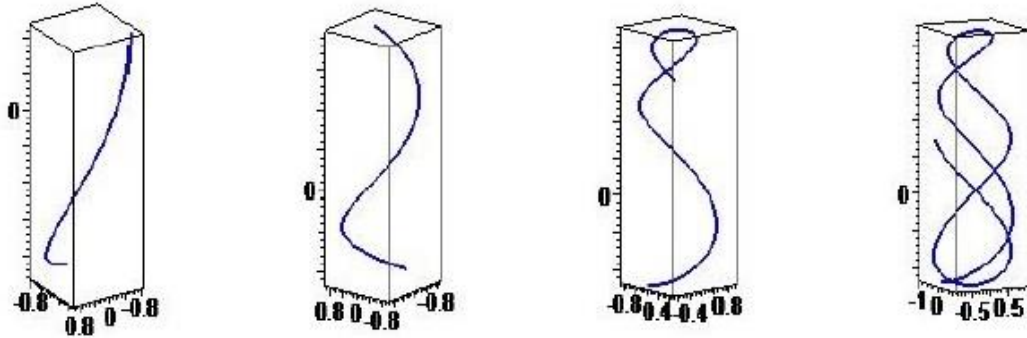
Tanım 4.2.1 Anti-Salkowski eğrisinin teğet vektörü T^* ve aslinormal vektörü N^* olsun.

$$\beta_1(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(T^* + N^*)$$

şeklinde tanımlı $\beta_1(s)$ vektörünün çizdiği regüler eğriye T^*N^* -Smarandache eğrisi denir. Bu eşitlikte T^* ve N^* vektörlerinin yerine (3.2.2) den karşılıkları yazılırsa $\beta_1(s)$ -Smarandache eğrisinin ifadesi

$$\beta_1(s) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\cos(s) \cos(ns) + n \sin(s) \sin(ns) + \frac{n}{m} \sin(s), \sin(s) \cos(ns) - n \cos(s) \sin(ns) - \frac{n}{m} \cos(s), -\frac{n}{m} \sin(ns) - n \right)$$

şeklinde olur. Burada $m = \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$ değerleri için eğriye ait grafikler Şekil 4.5 de verilmiştir.



Şekil 4.5: T^*N^* -Smarandache eğrisi

Teorem 4.2.1 $\beta_1(s)$ -Smarandache eğrisinin Frenet vektörleri

$$T_{\beta_1}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\kappa^{*2} + 1}}(-\kappa^*T^* + \kappa^*N^* + B^*),$$

$$N_{\beta_1}(s) = \frac{((c_2\tau^* + c_3\kappa^*)T^* + (-c_1\tau^* - c_3\kappa^*)N^* + (c_1\kappa^* + c_2\kappa^*)B^*)}{\sqrt{2\kappa^{*2} + \tau^{*2}}\sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}},$$

$$B_{\beta_1}(s) = \frac{1}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}}(c_1T^* + c_2N^* + c_3B^*)$$

şeklinde verilir. Burada c_1, c_2, c_3

$$\begin{aligned} c_1 &= \kappa^{*2} - \kappa^{*'} + \kappa^{*2} + 1, \\ c_2 &= \kappa^{*2} - \kappa^{*3} - \kappa^{*'}, \\ c_3 &= -\kappa^* \kappa^{*'} + \kappa^{*3} + \kappa^* + \kappa^{*4} + \kappa^* \kappa^{*'} \end{aligned} \quad (4.2.1)$$

birer katsayıdır.

İspat. $\beta_1(s)$ eğrisinin yay parametresi s^* olsun. Buna göre s parameteresine göre türev alınırsa

$$\beta_1'(s) = \frac{d\beta_1}{ds^*} \frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}}(T^{*'} + N^{*'})$$

olur. Burada T' ve N' vektörleri yerine (3.1.2) den karşılıkları yazılırsa $\beta_1'(s)$ vektörü

$$\beta_1'(s) = T_{\beta_1} \frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\kappa^* T^* + \kappa^* N^* + B^*) \quad (4.2.2)$$

şeklinde bulunur. Norm alınırsa

$$\frac{ds^*}{ds} = \sqrt{\frac{2\kappa^{*2} + 1}{2}}$$

dır. Bu ifade yerine yazılırsa $\beta_1(s)$ -Smarandache eğrisinin $T_{\beta_1}(s)$ teğet vektörü

$$T_{\beta_1}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\kappa^{*2} + \tau^{*2}}}(-\kappa^* T^* + \kappa^* N^* + B^*)$$

şeklinde bulunur. T^*, N^*, B^* vektörleri ile κ^* ve τ^* eğriliklerinin yerine (3.2.2) den karşılıkları yazılırsa $T_{\beta_1}(s)$ teğet vektör

$$T_{\beta_1}(s) = \frac{1}{\sqrt{\sin^2(ns) + 1}} \left(-\frac{n}{m} \sin(s) \sin(ns) - \cos(s), -\frac{n}{m} \cos(s) \sin(ns) + \sin(s), n \sin(ns) \right)$$

şeklinde olur. $\beta_1'(s)$ vektörünün tekrar türevi alınırsa

$$\beta_1''(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-(\kappa^{*3} + \kappa^{*'})T^* + (\kappa^{*2} - \kappa^{*2} - 1)N^* + \kappa^* B^*)$$

bulunur. $\beta_1'(s)$ ve $\beta_1''(s)$ vektörlerinin $\beta_1'(s) \wedge \beta_1''(s)$ vektörel çarpımı

$$\beta_1'(s) \wedge \beta_1''(s) = \frac{1}{2}(c_1 T^* + c_2 N^* + c_3 B^*)$$

şeklindedir. Norm alınırsa

$$\|\beta_1'(s) \wedge \beta_1''(s)\| = \frac{1}{2} \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}$$

olur. $\beta_1(s)$ -Smarandache eğrisinin $B_{\beta_1}(s)$ binormal vektörü

$$B_{\beta_1}(s) = \frac{\beta_1'(s) \wedge \beta_1''(s)}{\|\beta_1'(s) \wedge \beta_1''(s)\|}$$

bağıntısından

$$B_{\beta_1}(s) = \frac{1}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}} (c_1 T^* + c_2 N^* + c_3 B^*)$$

şeklinde bulunur. T^*, N^*, B^* vektörleri ile κ^* ve τ^* eğriliklerinin yerine (3.2.2) den karşılıkları yazılırsa $B_{\beta_1}(s)$ binormal vektör

$$B_{\beta_1}(s) = \frac{1}{\frac{n}{m} \sqrt{\lambda_1^*}} \left(-n \cos(s) \sin(ns) + n^2 \sin(s) \cos(ns) - \frac{n^2}{m} \sin(s) \sin^2(ns), \right. \\ \left. n \sin(s) \sin(ns) + n^2 \cos(s) \cos(ns) - \frac{n^2}{m} \cos(s) \sin^2(ns), \right. \\ \left. -\frac{n^2}{m^2} \sin^2(ns) + \frac{n^2}{m} \cos(ns) - 1 \right)$$

şeklinde olur. Burada $\lambda_1^* = (\sin^2(ns) + 1)^2 - 2m(\cos(ns)(\sin^2(ns) + 1) - m)$ dir.

$N_{\beta_1}(s) = B_{\beta_1}(s) \wedge T_{\beta_1}(s)$ bağıntısından aslinormal vektör

$$N_{\beta_1}(s) = \frac{((c_2 + c_3 \kappa^*)T^* + (-c_1 - c_3 \kappa^*)N^* + (c_1 \kappa^* + c_2 \kappa^*)B^*)}{\sqrt{2\kappa^{*2} + \tau^{*2}} \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}}$$

şeklinde bulunur. T^*, N^*, B^* vektörleri ile κ^* ve τ^* eğriliklerinin yerine (3.2.2) den karşılıkları yazılırsa $N_{\beta_1}(s)$ aslinormal vektörü

$$N_{\beta_1}(s) = \frac{1}{\frac{n}{m} \sqrt{\mu_1^*}} \left((\sin^2(ns) + 1) \left(\sin(s) - \frac{n}{m} \cos(s) \sin(ns) \right) + n \cos(ns) \left(-\frac{n}{m} \sin(s) \right. \right. \\ \left. \left. + \cos(s) \sin(ns) \right), (\sin^2(ns) + 1) \left(\frac{n}{m} \sin(s) \sin(ns) + \cos(s) \right) \right. \\ \left. -n \cos(ns) \left(\sin(s) \sin(ns) + \frac{n}{m} \cos(s) \right), n^2 \cos(ns) \right)$$

şeklinde elde edilir. Burada

$$\mu_1^* = (\sin^2(ns) + 1)^3 - 2m(\sin^2(ns) + 1)(\cos(ns)(\sin^2(ns) + 1) - m)$$

dir. \square

Teorem 4.2.2 $\beta_1(s)$ -Smarandache eğrisinin $\kappa^*_{\beta_1}$ eğriliği ve $\tau^*_{\beta_1}$ burulması

$$\kappa^*_{\beta_1} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}}{(\sqrt{2\kappa^{*2} + 1})^3}, \quad \tau^*_{\beta_1} = \frac{\sqrt{2}(c_1d_1 + c_2d_2 + c_3d_3)}{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}$$

şeklinde verilir. Burada d_1, d_2, d_3

$$\begin{aligned} d_1 &= \kappa^{*3} + \kappa^*(1 - 3\kappa^{*'}) - \kappa^{*''}, \\ d_2 &= -\kappa^{*3} - \kappa^*(1 + 3\kappa^{*'}) + \kappa^{*''}, \\ d_3 &= -\kappa^{*2} - 1 + 2\kappa^{*'} \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

birer katsayıdır.

İspat. $\beta_1(s)$ -Smarandache eğrisinin $\kappa^*_{\beta_1}(s)$ eğriliği (3.1.1) bağıntısından

$$\kappa^*_{\beta_1}(s) = \frac{\|\beta'_1(s) \wedge \beta''_1(s)\|}{\|\beta'_1(s)\|^3}$$

şeklinde yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa $\kappa^*_{\beta_1}(s)$ eğriliği

$$\kappa^*_{\beta_1}(s) = \frac{\sqrt{2}\sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}}{(\sqrt{2\kappa^{*2} + 1})^3}$$

şeklinde bulunur. κ^* ve τ^* eğrilikleri yerine (3.2.2) den karşılıkları yazılırsa $\kappa^*_{\beta_1}(s)$ eğriliği

$$\kappa_{\beta_1}(s) = \sqrt{\frac{2(\sin^2(ns) + 1)^2 - 4m(\cos(ns)(\sin^2(ns) + 1) - m)}{(\sin^2(ns) + 1)^3}}$$

olur. $\beta''_1(s)$ vektörünün tekrar türevi alınır

$$\beta'''_1(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(d_1T^* + d_2N^* + d_3B^*)$$

dır. $\beta_1(s)$ -Smarandache eğrisinin $\tau^*_{\beta_1}(s)$ burulması (3.1.1) bağıntısından

$$\tau^*_{\beta_1}(s) = \frac{\det(\beta'_1(s), \beta''_1(s), \beta'''_1(s))}{\|\beta'_1(s) \wedge \beta''_1(s)\|^2}$$

şeklinde yazılır. Gerekli işlemler yapılırsa $\tau^*_{\beta_1}(s)$ burulması

$$\tau^*_{\beta_1}(s) = \frac{\sqrt{2}(c_1d_1 + c_2d_2 + c_3d_3)}{(c_1^2 + c_2^2 + c_3^2)}$$

şeklinde olur. $c_1, c_2, c_3, d_1, d_2, d_3$ katsayıları yerine (4.2.1) ve (4.2.3) den karşılıkları yazılırsa $\tau_{\beta_1}^*(s)$ burulması

$$\tau_{\beta_1}(s) = \frac{(3m^2 \cos(ns) - m(\sin^2(ns) + 1))\sqrt{2} \sin(ns)}{(\sin^2(ns) + 1)^2 - 2m(\cos(ns)(\sin^2(ns) + 1) - m)}$$

şeklinde elde edilir. \square

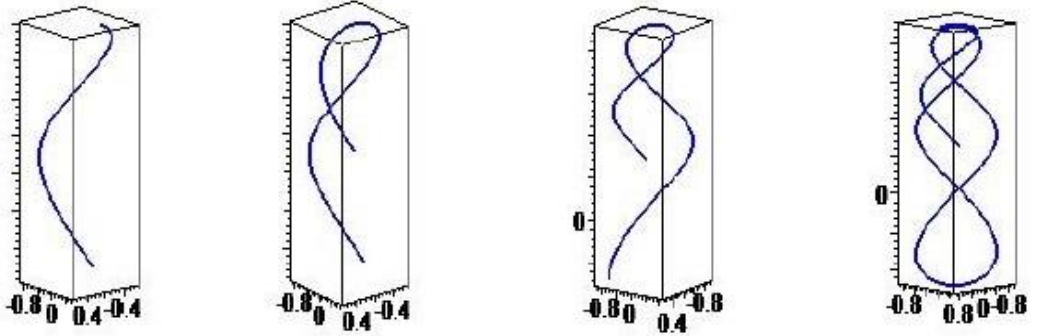
Tanım 4.2.2 Anti-Salkowski eğrisinin normal vektörü N^* ve binormal vektörü B^* olmak üzere

$$\beta_2(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(N^* + B^*)$$

olarak tanımlı $\beta_2(s)$ vektörünün çizdiği regüler eğriye N^*B^* -Smarandache eğrisi denir. Burada N^* ve B^* vektörlerinin yerine (3.2.2) den karşılıkları yazılırsa $\beta_2(s)$ -Smarandache eğrisinin ifadesi

$$\beta_2(s) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\cos(s) \sin(ns) + n \sin(s) \cos(ns) + \frac{n}{m} \sin(s), -\sin(s) \sin(ns) \right. \\ \left. -n \cos(s) \cos(ns) - \frac{n}{m}, \frac{n}{m} \cos(ns) - n \right)$$

olur. Burada $m = \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$ değerleri için eğriye ait grafikler Şekil 4.6 de verilmiştir.



Şekil 4.6: N^*B^* -Smarandache eğrisi

Teorem 4.2.3 $\beta_2(s)$ -Smarandache eğrisinin Frenet vektörleri

$$\begin{aligned} T_{\beta_2}(s) &= \frac{1}{\sqrt{\kappa^{*2} + 2}}(-\kappa^* T^* - N^* + B^*), \\ N_{\beta_2}(s) &= \frac{((c_5 + c_6)T^* + (-c_4 - c_6\kappa^*)N^* + (-c_4 + c_5\kappa^*)B^*)}{\sqrt{\kappa^{*2} + 2}\sqrt{c_4^2 + c_5^2 + c_6^2}}, \\ B_{\beta_2}(s) &= \frac{1}{\sqrt{c_4^2 + c_5^2 + c_6^2}}(c_4 T^* + c_5 N^* + c_6 B^*) \end{aligned}$$

şeklinde verilir. Burada c_4, c_5, c_6

$$c_4 = \kappa^{*2}, \quad c_5 = -2\kappa^{*'} + 2\kappa^*, \quad c_6 = \kappa^{*3} + 2\kappa^* \quad (4.2.4)$$

birer katsayıdır.

İspat. $\beta_2(s)$ eğrisinin yay parametresi s^* olsun. Buna göre s parameteresine göre türev alınırsa

$$\beta_2'(s) = \frac{d\beta_2}{ds^*} \frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}}(N^{*'} + B^{*'})$$

şeklinde olur. N' ve B' vektörleri yerine (3.1.2) den karşılıkları yazılırsa

$$\beta_2'(s) = T_{\beta_2} \frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\kappa^* T^* - N^* + B^*) \quad (4.2.5)$$

olur. Norm alınırsa $\frac{ds^*}{ds} = \sqrt{\frac{\kappa^{*2} + 2}{2}}$ dir. Bu ifade yerine yazılırsa $\beta_2(s)$ -Smarandache eğrisinin $T_{\beta_2}(s)$ teğet vektörü

$$T_{\beta_2}(s) = \frac{1}{\sqrt{\kappa^{*2} + 2\tau^{*2}}}(-\kappa^* T^* - N^* + B^*)$$

şeklinde olur. T, N, B vektörleri ile κ^* ve τ^* eğriliklerinin yerine (3.2.2) den karşılıkları yazılırsa $T_{\beta_2}(s)$ teğet vektör

$$T_{\beta_2}(s) = \frac{1}{\sqrt{\cos^2(ns) + 1}} \left(\frac{n}{m} \sin(s) \cos(ns) + \cos(s), -\frac{n}{m} \cos(s) \cos(ns) + \sin(s), n \cos(ns) \right)$$

şeklinde olur. $\beta_2'(s)$ vektörünün tekrar türevi alınırsa

$$\beta_2''(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}((- \kappa^{*'} + \kappa^*)T^* + (-\kappa^{*2} - 1)N^* + -B^*)$$

bulunur. $\beta_2'(s)$ ve $\beta_2''(s)$ vektörlerinin $\beta_2'(s) \wedge \beta_2''(s)$ vektörel çarpımı

$$\beta_2'(s) \wedge \beta_2''(s) = \frac{1}{2}(c_4T^* + c_5N^* + c_6B^*)$$

dır. Norm alınırsa

$$\|\beta_2'(s) \wedge \beta_2''(s)\| = \frac{1}{2}\sqrt{c_4^2 + c_5^2 + c_6^2} \quad (4.2.6)$$

olur. $\beta_2(s)$ -Smarandache eğrisinin $B_{\beta_2}(s)$ binormal vektörü

$$B_{\beta_2}(s) = \frac{\beta_2'(s) \wedge \beta_2''(s)}{\|\beta_2'(s) \wedge \beta_2''(s)\|}$$

bağıntısından

$$B_{\beta_2}(s) = \frac{1}{\sqrt{c_4^2 + c_5^2 + c_6^2}}(c_4T^* + c_5N^* + c_6B^*)$$

şeklinde bulunur. T^*, N^*, B^* vektörleri ile κ^* ve τ^* eğriliklerinin yerine (3.2.2) den karşılıkları yazılırsa $B_{\beta_2}(s)$ binormal vektör

$$\begin{aligned} B_{\beta_2}(s) = & \frac{1}{\sqrt{\lambda_2^*}} \left(-n \cos(s) \cos(ns) - n^2 \sin(s) \sin(ns) - \frac{n^2}{m} \sin(s) \cos^2(ns) \right. \\ & -n \sin(s) \cos(ns) + n^2 \cos(s) \sin(ns) + \frac{n^2}{m} \cos(s) \cos^2(ns) \\ & \left. \frac{n^2}{m^2} \cos^2(ns) + \frac{n^2}{m} \sin(ns) + 1 \right) \end{aligned}$$

şeklinde olur. Burada $\lambda_2^* = (\cos^2(ns) + 1)^2 + 2m((\cos^2(ns) + 1) \sin(ns) + m)$ dir.

$N_{\beta_2}(s) = B_{\beta_2}(s) \wedge T_{\beta_2}(s)$ bağıntısından $N_{\beta_2}(s)$ aslinormal vektörü

$$N_{\beta_2}(s) = \frac{1}{\sqrt{\kappa^{*2} + 2\sqrt{c_4^2 + c_5^2 + c_6^2}}}((c_5 + c_6)T^* + (-c_4 - c_6\kappa^*)N^* + (-c_4 + c_5\kappa^*)B^*)$$

bulunur. T^*, N^*, B^* vektörleri ile κ^* ve τ^* eğriliklerinin yerine (3.2.2) den karşılıkları yazılırsa $N_{\beta_1}(s)$ aslinormal vektör

$$\begin{aligned} N_{\beta_2}(s) = & \frac{1}{\frac{n}{m}\sqrt{\mu_2^*}} \left((\cos^2(ns) + 1) \left(+ \frac{n}{m} \cos(s) \cos(ns) - \sin(s) \right) + n \sin(ns) \left(- \frac{n}{m} \sin(s), \right. \right. \\ & \left. \left. + \cos(s) \cos(ns) \right), (\cos^2(ns) + 1) \left(\frac{n}{m} \sin(s) \cos(ns) + \cos(s) \right) \right. \\ & \left. + n \sin(ns) \left(\sin(s) \cos(ns) + \frac{n}{m} \cos(s) \right), -n^2 \sin(ns) \right) \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Burada

$$\mu_2^* = (\cos^2(ns) + 1)^2 + 2m(\cos^2(ns) + 1)((\cos^2(ns) + 1) \sin(ns) + m)$$

dır. \square

Teorem 4.2.4 $\beta_2(s)$ -Smarandache eğrisinin $\kappa_{\beta_2}^*$ eğriliği ve $\tau_{\beta_2}^*$ burulması sırasıyla

$$\kappa_{\beta_2}^* = \frac{\sqrt{2}\sqrt{c_4^2 + c_5^2 + c_6^2}}{(\sqrt{\kappa^{*2} + 2})^3}, \quad \tau_{\beta_2}^* = \frac{\sqrt{2}(c_4d_4 + c_5d_5 + c_6d_6)}{c_4^2 + c_5^2 + c_6^2}$$

şeklinde verilir. Burada d_4, d_5, d_6

$$d_4 = \kappa^* + \kappa^{*3} + \kappa^{*'} - \kappa^{*''}, \quad d_5 = 1 + \kappa^{*2} - 3\kappa^* \kappa^{*'}, \quad d_6 = -1 - \kappa^{*2} \quad (4.2.7)$$

birer katsayıdır.

İspat. $\beta_2(s)$ -Smarandache eğrisinin $\kappa_{\beta_2}^*(s)$ eğriliği (3.1.1) bağıntısından

$$\kappa_{\beta_2}^*(s) = \frac{\|\beta_2'(s) \wedge \beta_2''(s)\|}{\|\beta_2'(s)\|^3}$$

şeklinde yazılır ve buradan $\kappa_{\beta_2}^*(s)$ eğriliği

$$\kappa_{\beta_2}^* = \frac{\sqrt{2}\sqrt{c_4^2 + c_5^2 + c_6^2}}{(\sqrt{\kappa^{*2} + 2})^3}$$

şeklinde bulunur. κ^* ve τ^* eğrilikleri yerine (3.2.2) den karşılıkları yazılırsa $\kappa_{\beta_2}^*(s)$ eğriliği

$$\kappa_{\beta_2}^*(s) = \sqrt{\frac{2(\cos^2(ns) + 1)^2 + 4m((\cos^2(ns) + 1) \sin(ns) + m)}{(\cos^2(ns) + 1)^3}}$$

olur. $\beta_2''(s)$ vektörünün tekrar türevi alınır

$$\beta_2'''(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(d_4T^* + d_5N^* + d_6B^*)$$

bulunur. $\beta_2(s)$ -Smarandache Eğrisinin $\tau_{\beta_2}^*(s)$ burulması (3.1.1) bağıntısından

$$\tau_{\beta_2}^*(s) = \frac{\det(\beta_2'(s), \beta_2''(s), \beta_2'''(s))}{\|\beta_2'(s) \wedge \beta_2''(s)\|^2}$$

yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa $\tau^*_{\beta_2}(s)$ burulması

$$\tau^*_{\beta_2}(s) = \frac{\sqrt{2}(c_4d_4 + c_5d_5 + c_6d_6)}{(c_4^2 + c_5^2 + c_6^2)}$$

şeklinde olur. $c_4, c_5, c_6, d_4, d_5, d_6$ katsayıları yerine (4.2.4) ve (4.2.7) den karşılıkları yazılırsa $\tau^*_{\beta_2}(s)$ burulması

$$\tau_{\beta_2}(s) = \frac{m\sqrt{2}(3m \sin(ns) + (\cos^2(ns) + 1)) \cos(ns)}{(\cos^2(ns) + 1)^2 + 2m((\cos^2(ns) + 1) \sin(ns) + m)}$$

şeklinde elde edilir. \square

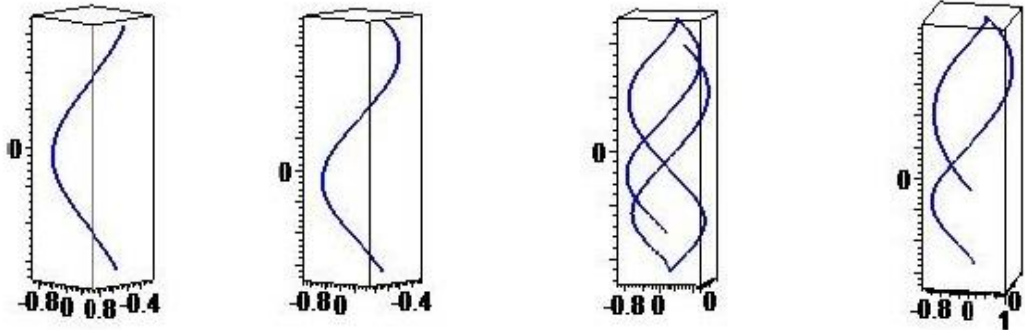
Tanım 4.2.3 β Anti-Salkowski eğrisinin teğet vektörü T^* ve binormal vektörü B^* olmak üzere

$$\beta_3(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(T^* + B^*)$$

olarak tanımlı $\beta_3(s)$ vektörünün çizdiği regüler eğriye T^*B^* -Smarandache eğrisi denir. Burada T^* ve B^* vektörlerinin yerine (3.2.2) den karşılıkları yazılırsa $\beta_3(s)$ -Smarandache eğrisinin ifadesi

$$\beta_3(s) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{array}{l} -\cos(s) \cos(ns) - \cos(s) \sin(ns) - n \sin(s) \sin(ns) + n \sin(s) \cos(ns), \\ -\sin(s) \cos(ns) - \sin(s) \sin(ns) + n \cos(s) \sin(ns) - n \cos(s) \cos(ns), \\ \frac{n}{m} \cos(ns) - \frac{n}{m} \sin(ns) \end{array} \right)$$

olur. Burada $m = \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$ değerleri için eğriye ait grafikler Şekil 4.7 de verilmiştir.



Şekil 4.7: T^*B^* -Smarandache eğrisi

Teorem 4.2.5 $\beta_3(s)$ -Smarandache eğrisinin Frenet vektörleri

$$T_{\beta_3}(s) = N^*, \quad N_{\beta_3}(s) = \frac{(-c_8 T^* + c_7 B^*)}{\sqrt{c_7^2 + c_8^2}}, \quad B_{\beta_3}(s) = \frac{(c_7 T^* + c_8 B^*)}{\sqrt{c_7^2 + c_8^2}}$$

şeklinde verilir. Burada c_7, c_8

$$c_7 = \kappa^{*2} - 2\kappa^* + 1, \quad c_8 = \kappa^{*3} - 2\kappa^{*2} + \kappa^* \quad (4.2.8)$$

birer katsayıdır.

İspat. $\beta_3(s)$ eğrisinin yay parametresi s^* olsun. Buna göre s parameteresine göre türev alınırsa

$$\beta_3'(s) = \frac{d\beta_3}{ds} \frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}}(T^{*'} + B^{*'})$$

şeklinde olur. $T^{*'}$ ve $B^{*'}$ vektörleri yerine (3.1.2) den karşılıkları yazılırsa

$$\beta_3'(s) = T_{\beta_3} \frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}}((\kappa^* - 1)N^*) \quad (4.2.9)$$

bulunur. Norm alınırsa $\frac{ds^*}{ds} = \sqrt{\frac{\kappa^* - 1}{2}}$ olur. Bu ifade yerine yazılırsa $\beta_3(s)$ -Smarandache eğrisinin $T_{\beta_3}(s)$ teğet vektörü

$$T_{\beta_3}(s) = N^*.$$

T^*, N^*, B^* vektörleri ile κ^* ve τ^* eğriliklerinin yerine (3.2.2) den karşılıkları yazılırsa $T_{\beta_3}(s)$ teğet vektör

$$T_{\beta_3}(s) = \left(\frac{n}{m} \sin(s), -\frac{n}{m} \cos(s), +n \right)$$

şeklinde olur. $\beta_3'(s)$ vektörünün tekrar türevi alınırsa

$$\beta_3''(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}((\kappa^{*2} + \kappa^*)T^* + \kappa^{*'}N^* + (\kappa^* - 1)B^*)$$

bulunur. $\beta_3'(s)$ ve $\beta_3''(s)$ vektörlerinin $\beta_3'(s) \wedge \beta_3''(s)$ vektörel çarpımı

$$\beta_3'(s) \wedge \beta_3''(s) = \frac{1}{2}(c_7 T^* + c_8 B^*)$$

şeklindedir. Normu alınırsa

$$\|\beta_3'(s) \wedge \beta_3''(s)\| = \frac{1}{2}\sqrt{c_7^2 + c_8^2}$$

olur. $\beta_3(s)$ -Smarandache eğrisinin $B_{\beta_3}(s)$ binormal vektörü

$$B_{\beta_3}(s) = \frac{\beta_3'(s) \wedge \beta_3''(s)}{\|\beta_3'(s) \wedge \beta_3''(s)\|}$$

bağıntısından

$$B_{\beta_3}(s) = \frac{1}{\sqrt{c_7^2 + c_8^2}}(c_7 T^* + c_8 B^*)$$

bulunur. T^*, N^*, B^* vektörleri ile κ^* ve τ^* eğriliklerinin yerine (3.2.2) den karşılıkları yazılırsa $B_{\beta_3}(s)$ binormal vektör

$$B_{\beta_3}(s) = \left(-n \sin(s), n \cos(s), \frac{n}{m} \right)$$

olur. $N_{\beta_3}(s) = B_{\beta_3}(s) \wedge T_{\beta_3}(s)$ bağıntısında $N_{\beta_3}(s)$ aslinormal vektörü

$$N_{\beta_3}(s) = \frac{1}{\sqrt{\kappa^{*2} + 2\sqrt{c_7^2 + c_8^2}}}(-c_8 T^* + c_7 B^*)$$

şeklinde bulunur. T^*, N^*, B^* vektörleri ile κ^* ve τ^* eğriliklerinin yerine (3.2.2) den karşılıkları yazılırsa $N_{\beta_3}(s)$ aslinormal vektör

$$N_{\beta_3}(s) = (\cos(s), \sin(s), 0)$$

şeklinde elde edilir. \square

Teorem 4.2.6 $\beta_3(s)$ -Smarandache eğrisinin $\kappa^*_{\beta_3}$ eğriliği ve $\tau^*_{\beta_3}$ burulması sırasıyla

$$\kappa^*_{\beta_3} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{c_7^2 + c_8^2}}{(\kappa^* - 1)^3}, \quad \tau^*_{\beta_3} = \frac{\sqrt{2}(c_7 d_7 + c_8 d_9)}{c_7^2 + c_8^2}$$

şeklinde verilir. Burada d_7, d_8, d_9

$$d_7 = -3\kappa^* \kappa^{*'} + \kappa^{*'}, \quad d_8 = -\kappa^{*3} + \kappa^{*2} - \kappa^* + 1 + \kappa^{*'''}, \quad d_9 = +2\kappa^{*'} \quad (4.2.10)$$

birer katsayıdır.

İspat. $\beta_3(s)$ -Smarandache eğrisinin $\kappa^*_{\beta_3}(s)$ eğriliği (3.1.1) bağıntısından

$$\kappa^*_{\beta_3}(s) = \frac{\|\beta'_3(s) \wedge \beta''_3(s)\|}{\|\beta'_3(s)\|^3}$$

şeklinde yazılır. Gerekli işlemler yapılırsa $\kappa^*_{\beta_3}(s)$ eğriliği

$$\kappa_{\beta_3} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{c_7^2 + c_8^2}}{(\kappa^* - 1)^3}$$

şeklinde bulunur. κ^* ve τ^* eğrilikleri yerine (3.2.2) den karşılıkları yazılırsa $\kappa^*_{\beta_3}(s)$ eğriliği

$$\kappa_{\beta_3}(s) = \frac{\sqrt{3}}{(\cos(ns) + \sin(ns))}$$

olur. $\beta_3''(s)$ vektörünün tekrar türevi alınır

$$\beta_3'''(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(d_7T^* + d_8N^* + d_9B^*)$$

dır. $\beta_3(s)$ -Smarandache eğrisinin $\tau^*_{\beta_3}(s)$ burulması (3.1.1) bağıntısından

$$\tau^*_{\beta_3}(s) = \frac{\det(\beta'_3(s), \beta''_3(s), \beta'''_3(s))}{\|\beta'_3(s) \wedge \beta''_3(s)\|^2}$$

şeklinde yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa $\tau^*_{\beta_3}(s)$ burulması

$$\tau^*_{\beta_3} = \frac{\sqrt{2}(c_7d_7 + c_8d_9)}{c_7^2 + c_8^2}$$

şeklinde olur. c_7, c_8, d_7, d_9 katsayıları yerine (4.2.8) ve (4.2.10) den karşılıkları yazılırsa $\tau^*_{\beta_3}(s)$ burulması

$$\tau_{\beta_3}(s) = \frac{m\sqrt{2}}{(\cos(ns) + \sin(ns))}$$

şeklinde elde edilir. \square

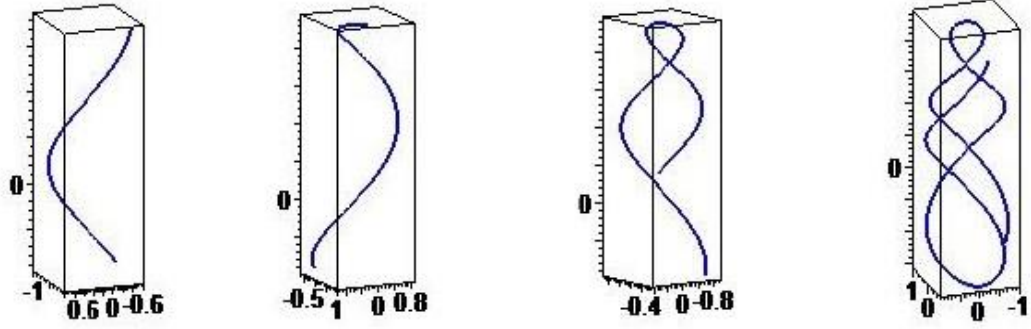
Tanım 4.2.4 Anti-Salkowski eğrisinin teğet vektörü T^* , aslinormal vektörü N^* ve binormal vektörü B^* olmak üzere

$$\beta_4(s) = \frac{1}{\sqrt{3}}(T^* + N^* + B^*)$$

olarak tanımlı $\beta_4(s)$ vektörünün çizdiği regüler eğriye $T^*N^*B^*$ -Smarandache eğrisi denir. Burada T^* , N^* ve B^* vektörlerinin yerine (3.2.2) den karşılıkları yazılırsa $\beta_4(s)$ -Smarandache eğrisinin ifadesi

$$\begin{aligned} \beta_4(s) = & \frac{1}{\sqrt{3}} \left(-\cos(s) \cos(ns) - \cos(s) \sin(ns) - n \sin(s) \sin(ns) + n \sin(s) \cos(ns) \right. \\ & + \frac{n}{m} \sin(s), -\sin(s) \cos(ns) - \sin(s) \sin(ns) + n \cos(s) \sin(ns) - n \cos(s) \cos(ns) \\ & \left. - \frac{n}{m} \cos(s), -\frac{n}{m} \sin(ns) + \frac{n}{m} \cos(ns) - n \right) \end{aligned}$$

olur. Burada $m = \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$ değerleri için eğriye ait grafikler Şekil 4.8 de verilmiştir.



Şekil 4.8: $T^*N^*B^*$ -Smarandache eğrisi

Teorem 4.2.7 $\beta_4(s)$ -Smarandache eğrisinin Frenet vektörleri

$$T_{\beta_4}(s) = \frac{-\kappa^* T^* + (\kappa^* - 1) N^* + B^*}{\sqrt{2(\kappa^{*2} + 1 - \kappa^*)}},$$

$$N_{\beta_4}(s) = \frac{(c_{11} - c_{12}(\kappa^* - 1))T^* + (-c_{10} - c_{12}\kappa^*)N^* + (c_{10}(\kappa^* - 1) + c_{11}\kappa^*)B^*}{\sqrt{c_{10}^2 + c_{11}^2 + c_{12}^2} \sqrt{2(\kappa^{*2} + 1 - \kappa^*)}},$$

$$B_{\beta_4}(s) = \frac{(c_{10}T^* + c_{11}N^* + c_{12}B^*)}{\sqrt{c_{10}^2 + c_{11}^2 + c_{12}^2}}$$

şeklinde verilir. Burada c_{10} , c_{11} , c_{12}

$$c_{10} = 2\kappa^{*2} - 2\kappa^* + 2 - \kappa^{*'}, c_{11} = -\kappa^{*'}, c_{12} = -2\kappa^{*2} + 2\kappa^* + 2\kappa^{*3} - \kappa^{*'} \quad (4.2.11)$$

birer katsayıdır.

İspat. $\beta_4(s)$ eğrisinin yay parametresi s^* olsun. Buna göre s parameteresine göre türev alınırsa

$$\beta'_4(s) = \frac{d\beta_3}{ds^*} \frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{\sqrt{3}}(T^{*'} + N^{*'} + B^{*'})$$

olur. $T^{*'}, N^{*}'$ ve B^{*}' vektörleri yerine (3.1.2) den karşılıkları yazılırsa

$$\beta'_4(s) = T_{\beta_4} \frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{\sqrt{3}}(-\kappa^* T^* + (\kappa^* - 1)N^* + B^*) \quad (4.2.12)$$

şeklinde bulunur. Norm alınırsa

$$\frac{ds^*}{ds} = \sqrt{\frac{2(\kappa^{*2} + 1 - \kappa^*)}{3}}$$

dır. Bu ifade yerine yazılırsa $\beta_4(s)$ -Smarandache eğrisinin $T_{\beta_4}(s)$ teğet vektörü

$$T_{\beta_4}(s) = \frac{-\kappa^* T^* + (\kappa^* - 1)N^* + B^*}{\sqrt{2(\kappa^{*2} + 1 - \kappa^*)}}$$

şeklinde olur. T^*, N^*, B^* vektörleri ile κ^* ve τ^* eğriliklerinin yerine (3.2.2) den karşılıkları yazılırsa $T_{\beta_4}(s)$ teğet vektör

$$T_{\beta_4}(s) = \frac{1}{((\cos(ns) + \sin(ns))^2 + 1)} \left(\frac{n}{m} \sin(s)(\cos(ns) + \sin(ns)) + \cos(s), \right. \\ \left. -\frac{n}{m} \cos(s)(\cos(ns) + \sin(ns)) + \sin(s), n(\cos(ns) + \sin(ns)) \right)$$

şeklinde olur. $\beta'_4(s)$ vektörünün tekrar türevi alınırsa

$$\beta''_4(s) = \frac{1}{\sqrt{3}}((- \kappa^{*'} - \kappa^{*2} + \kappa^*)T^* + (-\kappa^{*2} + \kappa^{*'} - 1)N^* + (-1 + \kappa^*)B^*)$$

olur. $\beta'_4(s)$ ve $\beta''_4(s)$ vektörlerinin $\beta'_4(s) \wedge \beta''_4(s)$ vektörel çarpımı

$$\beta'_4(s) \wedge \beta''_4(s) = \frac{1}{3}(c_{10}T^* + c_{11}N^* + c_{12}B^*)$$

dır. Normu alınır ve gerekli işlemler yapılırsa $B_{\beta_4}(s)$ binormal vektör

$$B_{\beta_4}(s) = \frac{1}{\sqrt{c_{10}^2 + c_{11}^2 + c_{12}^2}}(c_{10}T^* + c_{11}N^* + c_{12}B^*)$$

şeklinde bulunur. T^*, N^*, B^* vektörleri ile κ^* ve τ^* eğriliklerinin yerine (3.2.2) den karşılıkları yazılırsa $B_{\beta_4}(s)$ binormal vektörü

$$B_{\beta_4}(s) = \frac{1}{\frac{n}{m}\sqrt{\lambda_3^*}} \left(-n \cos(s)(\cos(ns) + \sin(ns)) + n^2 \sin(s)(\cos(ns) - \sin(ns)) \right. \\ \left. - \frac{n^2}{m} \sin(s)(\cos(ns) + \sin(ns))^2, -n \sin(s)(\cos(ns) + \sin(ns)) \right. \\ \left. - n^2 \cos(s)(\cos(ns) - \sin(ns)) + \frac{n^2}{m} \cos(s)(\cos(ns) + \sin(ns))^2, \right. \\ \left. \frac{n^2}{m^2}(\cos(ns) + \sin(ns))^2 - \frac{n^2}{m}(\cos(ns) - \sin(ns)) + 1 \right)$$

şeklinde olur. Burada

$$\lambda_3^* = ((\cos(ns) + \sin(ns))^2 + 1)^2 - m(2(\cos(ns) - \sin(ns)) - 3m)$$

dir. $N_{\beta_4}(s) = B_{\beta_4}(s) \wedge T_{\beta_4}(s)$ bağıntısından $\beta_4(s)$ -Smarandache eğrisinin $N_{\beta_4}(s)$ aslinormal vektörü

$$N_{\beta_4}(s) = \frac{((c_{11} - c_{12}(\kappa^* - 1))T^* + (-c_{10} - c_{12}\kappa^*)N^* + (c_{10}(\kappa^* - 1) + c_{11}\kappa^*)B^*)}{\sqrt{2(\kappa^{*2} + 1 - \kappa^*)}\sqrt{c_{10}^2 + c_{11}^2 + c_{12}^2}}$$

şeklinde bulunur. T^*, N^*, B^* vektörleri ile κ^* ve τ^* eğriliklerinin yerine (3.2.2) den karşılıkları yazılırsa $N_{\beta_4}(s)$ aslinormal vektör

$$N_{\beta_4}(s) = \frac{1}{\frac{n}{m}\sqrt{\mu_3^*}} \left(((\cos(ns) + \sin(ns))^2 + 1) \left(\frac{n}{m} \cos(s)(\cos(ns) + \sin(ns)) - \sin(s) \right) \right. \\ \left. + n(\cos(ns) - \sin(ns)) \left(\frac{n}{m} \sin(s) - \cos(s)(\cos(ns) + \sin(ns)) \right), \right. \\ \left. ((\cos(ns) + \sin(ns))^2 + 1) \left(\cos(s) + \frac{n}{m} \sin(s)(\cos(ns) + \sin(ns)) \right) \right. \\ \left. - n(\cos(ns) - \sin(ns)) \left(\sin(s)(\cos(ns) + \sin(ns)) + \frac{n}{m} \cos(s) \right), \right. \\ \left. n^2(\cos(ns) - \sin(ns)) \right)$$

şeklinde elde edilir. Burada

$$\mu_3^* = 2((\cos(ns) + \sin(ns))^2 + 1)^2 - 2m((\cos(ns) + \sin(ns))^2 + 1)(2(\cos(ns) - \sin(ns)) - 3m)$$

dir. \square

Teorem 4.2.8 $\beta_4(s)$ -Smarandache eğrisinin $\kappa^*_{\beta_4}$ eğriliği ve $\tau^*_{\beta_4}$ burulması sırasıyla

$$\kappa^*_{\beta_4} = \frac{\sqrt{3}\sqrt{c_{10}^2 + c_{11}^2 + c_{12}^2}}{(\sqrt{2}(\kappa^{*2} + 1 - \kappa^*))^3}, \quad \tau^*_{\beta_4} = \frac{\sqrt{3}(c_{10}d_{10} + c_{11}d_{11} + c_{12}d_{12})}{c_{10}^2 + c_{11}^2 + c_{12}^2}$$

şeklinde verilir. Burada d_{10} , d_{11} , d_{12}

$$\begin{aligned} d_{10} &= -\kappa^{*''} - 3\kappa^*\kappa^{*'} + 2\kappa^* + \kappa^{*'} + \kappa^{*3} + \kappa^*, \\ d_{11} &= -\kappa^{*3} + 1 + \kappa^{*''} - 3\kappa^*\kappa^{*'} + \kappa^{*2} - \kappa^*, \\ d_{12} &= 2\kappa^{*'} - 1 - \kappa^{*2} \end{aligned} \quad (4.2.13)$$

birer katsayıdır.

İspat. $\beta_4(s)$ -Smarandache eğrisinin $\kappa^*_{\beta_4}(s)$ eğriliği (3.1.1) bağıntısından

$$\kappa^*_{\beta_4}(s) = \frac{\|\beta_4'(s) \wedge \beta_4''(s)\|}{\|\beta_4'(s)\|^3}$$

şeklinde yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa $\kappa^*_{\beta_4}(s)$ eğriliği

$$\kappa^*_{\beta_4} = \frac{\sqrt{3}\sqrt{c_{10}^2 + c_{11}^2 + c_{12}^2}}{(\sqrt{2}(\kappa^{*2} + 1 - \kappa^*))^3}$$

bulunur. κ^* ve τ^* eğrilikleri yerine (3.2.2) den karşılıkları yazılırsa $\kappa^*_{\beta_4}(s)$ eğriliği

$$\kappa_{\beta_4}(s) = \frac{3((\cos(ns) + \sin(ns))^2 + 1)^2 - 3m(2(\cos(ns) - \sin(ns)) - 3m)}{((\cos(ns) + \sin(ns))^2 + 1)^3},$$

şeklinde olur. $\beta_4''(s)$ vektörünün tekrar türevi alınırsa

$$\beta_4'''(s) = \frac{1}{\sqrt{3}}(d_{10}T^* + d_{11}N^* + d_{12}B^*)$$

olur. $\beta_4(s)$ -Smarandache eğrisinin $\tau^*_{\beta_4}(s)$ burulması (3.1.1) bağıntısından

$$\tau^*_{\beta_4}(s) = \frac{\det(\beta'_4(s), \beta''_4(s), \beta'''_4(s))}{\|\beta'_4(s) \wedge \beta''_4(s)\|^2},$$

$$\tau^*_{\beta_4} = \frac{\sqrt{3}(c_{10}d_{10} + c_{11}d_{11} + c_{12}d_{12})}{c_{10}^2 + c_{11}^2 + c_{12}^2}$$

şeklinde bulunur. c_{10} , c_{11} , c_{12} , d_{10} , d_{11} , d_{12} katsayıları yerine (4.2.11) ve (4.2.13) den karşılıkları yazılırsa $\tau^*_{\beta_1}(s)$ burulması

$$\tau_{\beta_4}(s) = \frac{m\sqrt{3}(\cos(ns) + \sin(ns))(-3m(\cos(ns) - \sin(ns)) + ((\cos(ns) + \sin(ns))^2 + 1))}{((\cos(ns) + \sin(ns))^2 + 1)^2 - m(2(\cos(ns) - \sin(ns)) - 3m)}$$

şeklinde elde edilir. \square

4.3 Salkowski Eğrisinin Frenet Vektörlerinden Elde Edilen Sabban Çatısına Göre Smarandache Eğrileri

Bu bölümde, Salkowski eğrisine ait T, N, B Frenet vektörlerinin birim küre yüzeyi üzerinde çizdiği küresel eğrilerin Sabban çatıları oluşturuldu. Bu çatılardan Smarandache eğrileri tanımlandı. Daha sonra elde edilen her bir eğrinin geodezik eğrilikleri hesaplandı. Şimdi sırayla (T) teğetler göstergesi, (N) aslinormaller göstergesi ve (B) binormaller göstergesine ait Sabban çatıları, Sabban formülleri ve geodezik eğriliklerini verelim. (T) teğetler göstergesi için;

$$T = T, \quad T_T = N, \quad T \wedge T_T = B,$$

$$T' = T_T, \quad T'_T = -T + \tau(T \wedge T_T), \quad (T \wedge T_T)' = -\tau T_T, \quad (4.3.1)$$

$$K_g^T = \langle T'_T, T \wedge T_T \rangle = \tau = \tan(ns).$$

$$T(s) = -\left(\cos(s) \cos(ns) + n \sin(s) \sin(ns), \sin(s) \cos(ns) - n \cos(s) \sin(ns), \frac{n}{m} \sin(ns) \right),$$

$$T_T(s) = n \left(\frac{\sin(s)}{m}, -\frac{\cos(s)}{m}, -1 \right), \quad (4.3.2)$$

$$(T \wedge T_T)(s) = -\left(\cos(s) \sin(ns) - n \sin(s) \cos(ns), \sin(s) \sin(ns) + n \cos(s) \cos(ns), \frac{n}{m} \cos(ns) \right).$$

(N) aslinormaller göstergesi için;

$$N = N, \quad T_N = \frac{-\kappa T + \tau B}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}, \quad N \wedge T_N = \frac{\tau T + \kappa B}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}},$$

$$N' = T_N, \quad T'_N = -K_g^N N + N \wedge T_N, \quad (T \wedge T_T)' = K_g^N T_N, \quad (4.3.3)$$

$$K_g^N = \langle T'_N, (N \wedge T_N) \rangle = \frac{\tau'}{\sqrt{1 + \tau^2}} = \frac{\tan(ns)'}{\sqrt{1 + \tan^2(ns)}}.$$

$$\begin{aligned}
N(s) &= \left(\frac{n \sin(s)}{m}, -\frac{n \cos(s)}{m}, -n \right), \\
T_N(s) &= \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2(ns)}} \left(\tan(ns)(-\cos(s) \sin(ns) + n \sin(s) \cos(ns)) \right. \\
&\quad + \cos(s) \cos(ns) + n \sin(s) \sin(ns), \sin(s) \cos(ns) \\
&\quad - \tan(ns)(\sin(s) \sin(ns) - n \cos(s) \cos(ns)) \\
&\quad \left. - n \cos(s) \sin(ns), \frac{2n}{m} \sin(ns) \right), \tag{4.3.4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(N \wedge T_N)(s) &= \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2(ns)}} \left(\tan(ns)(-\cos(s) \cos(ns) - n \sin(s) \sin(ns)) \right. \\
&\quad - \cos(s) \sin(ns) + n \sin(s) \cos(ns), -\sin(s) \sin(ns) \\
&\quad + \tan(ns)(-\sin(s) \cos(ns) + n \cos(s) \sin(ns)) \\
&\quad \left. - n \cos(s) \cos(ns), \frac{n}{m} \tan(ns) \sin(ns) - \frac{n}{m} \cos(ns) \right).
\end{aligned}$$

(B) binormaller göstergesi için;

$$B = B, \quad T_B = -N, \quad B \wedge T_B = T,$$

$$B' = T_B, \quad B'_T = -B + \frac{1}{\tau}(B \wedge T_B), \quad (B \wedge T_B)' = \frac{1}{\tau}T_B, \tag{4.3.5}$$

$$K_g^B = \langle T'_N, (N \wedge T_N) \rangle = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{\tan(ns)}.$$

$$\begin{aligned}
B(s) &= -\left(\cos(s) \sin(ns) - n \sin(s) \cos(ns), \sin(s) \sin(ns) + n \cos(s) \cos(ns), \right. \\
&\quad \left. \frac{n}{m} \cos(ns) \right),
\end{aligned}$$

$$T_B(s) = -n \left(\frac{\sin(s)}{m}, -\frac{\cos(s)}{m}, -1 \right), \tag{4.3.6}$$

$$\begin{aligned}
(B \wedge T_B)(s) &= -\left(\cos(s) \cos(ns) + n \sin(s) \sin(ns), \sin(s) \cos(ns) - n \cos(s) \sin(ns), \right. \\
&\quad \left. \frac{n}{m} \sin(ns) \right).
\end{aligned}$$

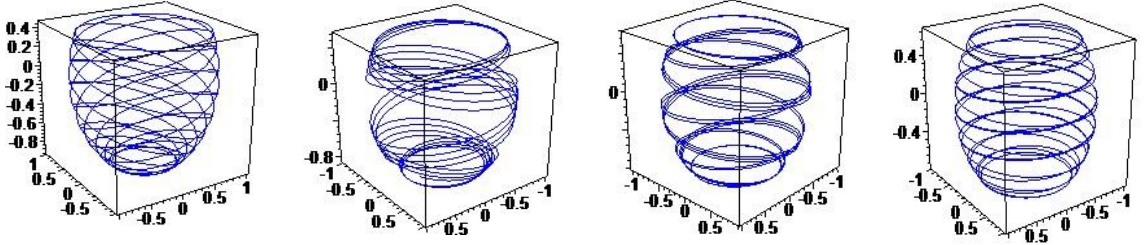
Tanım 4.3.1 Salkowski eğrisinin teğetler göstergesine ait Sabban çatısı $\{T, T_T, T \wedge T_T\}$ olsun.

$$\alpha_1(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(T + T_T) \quad (4.3.7)$$

şeklinde tanımlı $\alpha_1(s)$ vektörünün çizdiği regüler eğriye TT_T -Smarandache eğrisi denir. Burada T ve $T_T = N$ vektörlerinin (4.3.2) den yerlerine yazılırsa $\alpha_1(s)$ -Smarandache eğrisi

$$\alpha_1(s) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\cos(s) \cos(ns) - n \sin(s) \sin(ns) + \frac{n}{m} \sin(s), \right. \\ \left. -\sin(s) \cos(ns) + n \cos(s) \sin(ns) - \frac{n}{m} \cos(s), -\frac{n}{m} \sin(ns) - n \right)$$

olur. Burada $m = \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$ değerleri için eğriye ait grafikler Şekil 4.9 de verilmiştir.



Şekil 4.9: TT_T -Smarandache eğrisi

Teorem 4.3.1 $\alpha_1(s)$ -Smarandache eğrisinin $K_g^{\alpha_1}$ geodezik eğriliği

$$K_g^{\alpha_1} = \frac{1}{(2 + \tan^2(ns))^{\frac{5}{2}}} (i_1 \tan(ns) - i_2 \tan(ns) + 2i_3)$$

denklemleriyle verilir. Burada i_1, i_2, i_3

$$i_1 = -2 - \tau^2 + \tau\tau', \quad i_2 = -2 - \tau\tau' - 3\tau^2 - \tau^4, \quad i_3 = 2\tau + 2\tau' + \tau^3$$

birer katsayıdır.

İspat. (4.3.7) eğrisinin s^* parametresine göre türevi alınırsa

$$\frac{d\alpha_1}{ds^*} \cdot \frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}}(T' + T_T')$$

şeklinde olur. T' ve T_T' yerine (4.3.1) den karşılıkları yazılırsa

$$(T_T)_{\alpha_1} \cdot \frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-T + T_T + \tau(T \wedge T_T)) \quad (4.3.8)$$

olur. Norm alınırsa $\frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2 + \tau^2}$ olur. Bu ifade yerine yazılırsa $\alpha_1(s)$ -Smarandache eğrisinin $(T_T)_{\alpha_1}$ teğet vektörü

$$(T_T)_{\alpha_1} = \frac{1}{\sqrt{2 + \tau^2}}(-T + T_T + \tau(T \wedge T_T)) \quad (4.3.9)$$

şeklinde olur. $(T_T)_{\alpha_1}$ denkleminde tekrar türev alınırsa

$$(T_T)_{\alpha_1}' \cdot \frac{ds^*}{ds} = \frac{\sqrt{2}}{(2 + \tau^2)^2}(i_1 T + i_2 T_T + i_3(T \wedge T_T))$$

dır. (4.3.7) ve (4.3.9) ifadesinden $(T \wedge T_T)_{\alpha_1}$ vektörü

$$(T \wedge T_T)_{\alpha_1} = \alpha_1(s) \wedge (T_T)_{\alpha_1},$$

$$(T \wedge T_T)_{\alpha_1} = \frac{1}{\sqrt{4 + 2\tau^2}}\tau T - \tau T_T + 2(T \wedge T_T)$$

şeklinde olur. (4.3.1) denkleminde $\alpha_1(s)$ -Smarandache eğrisinin $K_g^{\alpha_1}$ geodezik eğriliği

$$K_g^{\alpha_1} = \frac{1}{(2 + \tau^2)^{\frac{5}{2}}}(i_1 \tau - i_2 \tau + 2i_3),$$

$$K_g^{\alpha_1} = \frac{1}{(2 + \tan^2(ns))^{\frac{5}{2}}}(i_1 \tan(ns) - i_2 \tan(ns) + 2i_3)$$

şeklinde elde edilir. \square

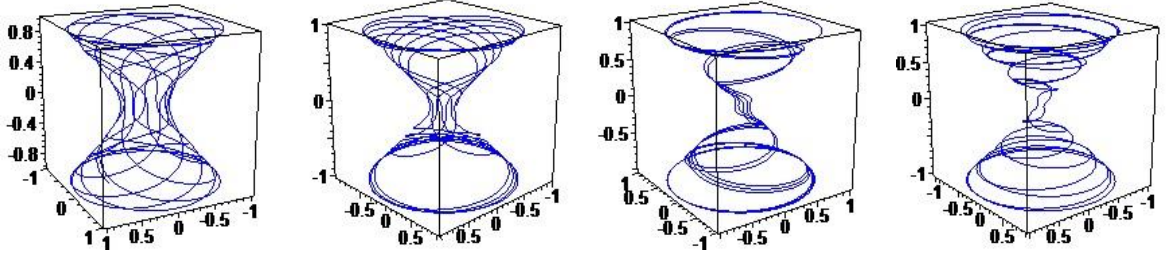
Tanım 4.3.2 Salkowski eğrisinin teğetler göstergesine ait Sabban çatısı $\{T, T_T, T \wedge T_T\}$ olsun.

$$\alpha_2(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(T + (T \wedge T_T)) \quad (4.3.10)$$

şeklinde tanımlı $\alpha_2(s)$ vektörünün çizdiği regüler eğriye $T(T \wedge T_T)$ -Smarandache eğrisi denir. Burada T ve $T \wedge T_T = B$ vektörleri yerine (4.3.2) den karşılıkları yazılırsa $\alpha_2(s)$ -Smarandache eğrisi

$$\alpha_2(s) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\cos(s)(\cos(ns) + \sin(ns)) + n \sin(s)(\cos(ns) - \sin(ns)), \right. \\ \left. -\sin(s)(\cos(ns) + \sin(ns)) - n \cos(s)(\cos(ns) - \sin(ns)), \frac{n}{m}(\cos(ns) + \sin(ns)) \right)$$

olur. Burada $m = \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$ değerleri için eğriye ait grafikler Şekil 4.10 de verilmiştir.



Şekil 4.10: $T(T \wedge T_T)$ -Smarandache eğrisi

Teorem 4.3.2 $\alpha_2(s)$ -Smarandache eğrisinin $K_g^{\alpha_2}$ geodezik eğriliği

$$K_g^{\alpha_2}(s) = 1 + \tan(ns)$$

denklemleriyle verilir.

İspat. (4.3.10) eğrisinin s^* parametresine göre türevi alınır

$$\frac{d\alpha_2}{ds^*} \cdot \frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}}(T' + (T \wedge T_T)')$$

olur. T' ve $(T \wedge T_T)'$ yerine (4.3.1) den karşılıkları yazılırsa

$$(T_T)_{\alpha_2} \cdot \frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}}(T_T - \tau T_T) \quad (4.3.11)$$

bulunur. Norm alınırsa $\frac{ds^*}{ds} = \frac{1-\tau}{\sqrt{2}}$ dır. Bu ifade yerine yazılırsa $\alpha_2(s)$ -Smarandache eğrisinin $(T_T)_{\alpha_2}$ teğet vektörü

$$(T_T)_{\alpha_2} = T_T \quad (4.3.12)$$

şeklinde olur. Tekrar türev alınırsa

$$(T_T)'_{\alpha_2} \cdot \frac{ds^*}{ds} = -T + \tau(T \wedge T_T)$$

olur. (4.3.11) ve (4.3.12) ifadesinden $(T \wedge T_T)_{\alpha_2}$ vektörü

$$(T \wedge T_T)_{\alpha_2} = \alpha_2(s) \wedge (T_T)_{\alpha_2},$$

$$(T \wedge T_T)_{\alpha_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-T + (T \wedge T_T))$$

şeklinde olur. (4.3.1) ifadesinden $\alpha_2(s)$ -Smarandache eğrisinin $K_g^{\alpha_2}$ geodezik eğriliği

$$K_g^{\alpha_2} = 1 + \tau, \quad K_g^{\alpha_2} = 1 + \tan(ns)$$

şeklinde elde edilir. \square

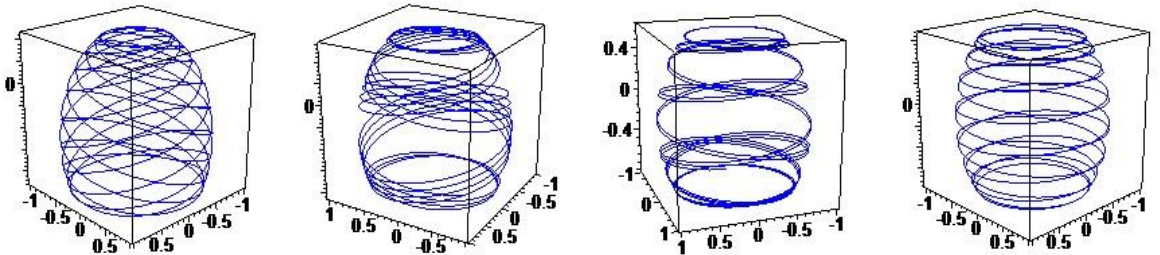
Tanım 4.3.3 Salkowski eğrisinin teğetler göstergesine ait Sabban çatısı $\{T, T_T, T \wedge T_T\}$ olsun.

$$\alpha_3(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(T_T + (T \wedge T_T)) \quad (4.3.13)$$

şeklinde tanımlı $\alpha_3(s)$ vektörünün çizdiği regüler eğriye $T_T(T \wedge T_T)$ -Smarandache eğrisi denir. Burada $T_T = N$ ve $T \wedge T_T = B$ vektörlerinin yerine (4.3.2) karşılıkları yazılırsa $\alpha_3(s)$ -Smarandache eğrisi

$$\begin{aligned} \alpha_3(s) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\cos(s) \sin(ns) + n \sin(s) \cos(ns) + \frac{n}{m} \sin(s), \right. \\ \left. -\sin(s) \sin(ns) - n \cos(s) \cos(ns) - \frac{n}{m} \cos(s), \frac{n}{m} \cos(ns) - n \right) \end{aligned}$$

olur. Burada $m = \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$ değerleri için eğriye ait grafikler Şekil 4.11 de verilmiştir.



Şekil 4.11: $T_T(T \wedge T_T)$ -Smarandache eğrisi

Teorem 4.3.3 $\alpha_3(s)$ -Smarandache eğrisinin $K_g^{\alpha_3}$ geodezik eğriliği

$$K_g^{\alpha_3}(s) = \frac{1}{(1 + 2 \tan^2(ns))^{\frac{5}{2}}} (i_4 2 \tan(ns) - i_5 + i_6)$$

denklemleriyle verilir. Burada i_4, i_5, i_6

$$i_4 = 2\tau\tau' + \tau + 2\tau^3, \quad i_5 = -1 - \tau' - 3\tau^2 - 2\tau^4, \quad i_6 = -\tau^2 + \tau' - 2\tau^4$$

birer katsayıdır.

İspat. (4.3.13) eğrisinin s^* parametresine göre türevi alınırsa

$$\frac{d\alpha_3}{ds^*} \cdot \frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}}(T'_T + (T \wedge T_T)')$$

olur. T'_T ve $(T \wedge T_T)'$ yerine (4.3.1) den karşılıkları yazılırsa

$$(T_T)_{\alpha_3} \cdot \frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-T - \tau T_T + \tau(T \wedge T_T)) \quad (4.3.14)$$

şeklinde bulunur. Norm alınırsa

$$\frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1 + 2\tau^2}$$

dır. Bu ifade yerine yazılırsa $\alpha_3(s)$ -Smarandache eğrisinin $(T_T)_{\alpha_3}$ teğet vektörü

$$(T_T)_{\alpha_3} = \frac{1}{\sqrt{1 + 2\tau^2}}(-T - \tau T_T + \tau(T \wedge T_T)) \quad (4.3.15)$$

şeklinde olur. Tekrar türev alınırsa

$$(T_T)'_{\alpha_3} \cdot \frac{ds^*}{ds} = \frac{\sqrt{2}}{(1 + 2\tau^2)^2}(i_4 T + i_5 T_T + i_6(T(s) \wedge T_T))$$

bulunur. (4.3.13) ve (4.3.15) ifadesinden $(T \wedge T_T)_{\alpha_3}$ vektörü

$$(T(s) \wedge T_T)_{\alpha_3} = \alpha_3(s) \wedge (T_T)_{\alpha_3},$$

$$(T \wedge T_T)_{\alpha_3} = \frac{1}{\sqrt{2 + 4\tau^2}}(2\tau T - T_T + (T \wedge T_T))$$

şeklinde olur. (4.3.1) denkleminde $\alpha_3(s)$ -Smarandache eğrisinin $K_g^{\alpha_3}$ geodezik eğriliği

$$K_g^{\alpha_3} = \frac{1}{(1 + 2(K_g^T)^2)^{\frac{5}{2}}}(i_4 2\tau - i_5 + i_6),$$

$$K_g^{\alpha_3}(s) = \frac{1}{(1 + 2 \tan^2(ns))^{\frac{5}{2}}}(i_4 2 \tan(ns) - i_5 + i_6)$$

şeklinde elde edilir. \square

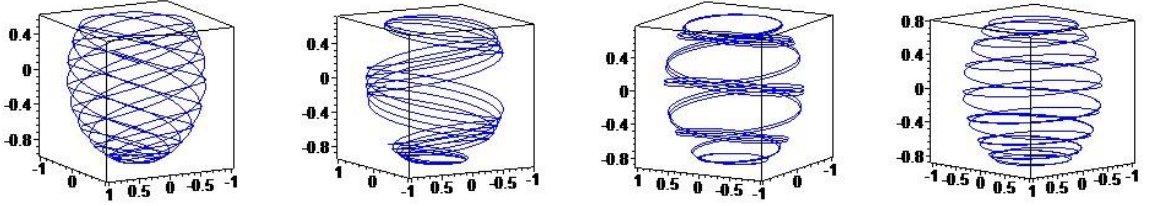
Tanım 4.3.4 Salkowski eğrisinin teğetler göstergesine ait Sabban çatısı $\{T, T_T, T \wedge T_T\}$ olsun.

$$\alpha_4(s) = \frac{1}{\sqrt{3}}(T + T_T + (T \wedge T_T)) \quad (4.3.16)$$

şeklinde tanımlı $\alpha_4(s)$ vektörünün çizdiği regüler eğriye $TT_T(T \wedge T_T)$ -Smarandache eğrisi denir. Burada $T, T_T = N$ ve $T(s) \wedge T_T = B$ vektörleri yerine (4.3.2) den karşılıkları yazılırsa $\alpha_4(s)$ -Smarandache eğrisi

$$\begin{aligned} \alpha_4(s) = & \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\cos(s)(\cos(ns) + \sin(ns)) + n \sin(s)(\cos(ns) - \sin(ns)) + \frac{n}{m} \sin(s), \right. \\ & -\sin(s)(\cos(ns) + \sin(ns)) - n \cos(s)(\cos(ns) - \sin(ns)) - \frac{n}{m} \cos(s), \\ & \left. \frac{n}{m}(\cos(ns) - \sin(ns)) - n \right) \end{aligned}$$

olur. Burada $m = \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$ değerleri için eğriye ait grafikler Şekil 4.12 de verilmiştir.



Şekil 4.12: $TT_T(T \wedge T_T)$ -Smarandache eğrisi

Teorem 4.3.4 $\alpha_4(s)$ -Smarandache eğrisinin $K_g^{\alpha_4}$ geodezik eğriliği

$$K_g^{\alpha_4} = \frac{1}{(4\sqrt{2}(1 - 2 \tan(ns))^2)^{\frac{5}{2}}} (i_7(2 \tan(ns) - 1) + i_8(-1 - \tan(ns)) + i_9(2 - \tan(ns)))$$

denklemleriyle verilir. Burada i_7, i_8, i_9

$$\begin{aligned} i_7 &= -\tau' + 2\tau\tau' - 2 + 4\tau - 4\tau^2 + 2\tau^3, \\ i_8 &= -\tau' - \tau\tau' - 2 - 4\tau^2 + 2\tau + 2\tau^3 - 2\tau^4, \\ i_9 &= \tau\tau' + 2\tau - 4\tau^2 + 2\tau' + 4\tau^3 - 2\tau^4, \end{aligned}$$

şeklinde birer katsayıdır.

İspat. (4.3.16) eğrisinin s^* parametresine göre türevi alınırsa

$$\frac{d\alpha_4}{ds^*} \cdot \frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{\sqrt{3}}(T' + T'_T + (T \wedge T_T)')$$

olur. $T', T'_T, (T \wedge T_T)'$ yerine (4.3.1) den karşılıkları yazılırsa

$$(T_T)_{\alpha_4} \cdot \frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{\sqrt{3}}(-T + (1 - \tau)T_T + \tau(T \wedge T_T)) \quad (4.3.17)$$

şeklinde bulunur. Norm alınırsa

$$\frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{2(1 - \tau + \tau^2)}$$

dır. Bu ifade yerine yazılırsa $\alpha_4(s)$ -Smarandache eğrisinin $(T_T)_{\alpha_4}$ teğet vektörü

$$(T_T)_{\alpha_4} = \frac{1}{\sqrt{2(1 - \tau + \tau^2)}}(-T + (1 - \tau)T_T + \tau(T \wedge T_T)) \quad (4.3.18)$$

şeklinde olur. Bu ifadeden tekrar türevi alınırsa

$$(T_T)'_{\alpha_3} \cdot \frac{ds^*}{ds} = \frac{\sqrt{3}}{4(1 - \tau + \tau^2)^2}(i_7T + i_8T_T + i_9(T \wedge T_T))$$

dır. (4.3.16) ve (4.3.18) ifadesinden $(T \wedge T_T)_{\alpha_4}$ vektörü

$$(T \wedge T_T)_{\alpha_4} = \alpha_4(s) \wedge (T_T)_{\alpha_4},$$

$$(T \wedge T_T)_{\alpha_4}(s) = \frac{1}{\sqrt{6(1 - \tau + \tau^2)}}((-1 + 2\tau)T(s) + (-1 - \tau)T_T + (2 - \tau)(T \wedge T_T))$$

şeklinde bulunur.(4.3.1) denkleminde $\alpha_4(s)$ -Smarandache eğrisinin $K_g^{\alpha_4}$ geodezik eğriliği

$$K_g^{\alpha_4} = \frac{1}{(4\sqrt{2}(1 - 2\tau)^2)^{\frac{5}{2}}}(i_7(2\tau - 1) + i_8(-1 - \tau) + i_9(2 - \tau)),$$

$$K_g^{\alpha_4} = \frac{1}{(4\sqrt{2}(1 - 2\tan(ns))^2)^{\frac{5}{2}}}(i_7(2\tan(ns) - 1) + i_8(-1 - \tan(ns)) + i_9(2 - \tan(ns)))$$

şeklinde elde edilir. \square

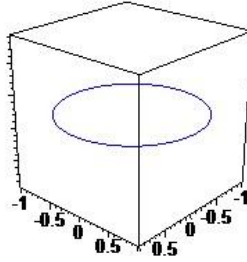
Tanım 4.3.5 Salkowski eğrisinin aslinormaller göstergesine ait Sabban çatısı $\{N, T_N, N \wedge T_N\}$ olsun.

$$\delta_1(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(N + T_N) \quad (4.3.19)$$

şeklinde tanımlı $\delta_1(s)$ vektörünün çizdiği regüler eğriye NT_N -Smarandache eğrisi denir. Burada N, T_N vektörlerinin yerine (4.3.4) den karşılıkları yazılırsa $\delta_1(s)$ -Smarandache eğrisi

$$\begin{aligned} \delta_1(s) = & \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\tan(ns)}{\sqrt{1 + \tan^2(ns)}} (-\cos(s) \sin(ns) + n \sin(s) \cos(ns)) + \cos(s) \cos(ns) \right. \\ & + n \sin(s) \sin(ns) + \frac{n \sin(s)}{m}, - \frac{\tan(ns)}{\sqrt{1 + \tan^2(ns)}} (\sin(s) \sin(ns) \\ & - n \cos(s) \cos(ns)) + \sin(s) \cos(ns) - n \cos(s) \sin(ns) - \frac{n \cos(s)}{m}, \\ & \left. \frac{2n}{m\sqrt{1 + \tan^2(ns)}} \sin(ns) - n \right), \end{aligned}$$

olur. Burada eğriye ait grafik Şekil 4.13 de verilmiştir.



Şekil 4.13: NT_N -Smarandache eğrisi

Teorem 4.3.5 $\delta_1(s)$ -Smarandache eğrisinin $K_g^{\delta_1}$ geodezik eğriliği

$$K_g^{\delta_1} = \frac{1}{(2 + (\frac{\tan(ns)'}{\sqrt{1+\tan^2(ns)}})^2)^{\frac{5}{2}}} \left(\frac{\tan(ns)'}{\sqrt{1+\tan^2(ns)}} i_{10} - \frac{\tan(ns)'}{\sqrt{1+\tan^2(ns)}} i_{11} + 2i_{12} \right)$$

denklemleriyle verilir. Burada i_{10}, i_{11}, i_{12}

$$i_{10} = -2 - \left(\frac{\tau'}{\sqrt{1+\tau^2}} \right)^2 + \frac{\tau'}{\sqrt{1+\tau^2}} \left(\frac{\tau'}{\sqrt{1+\tau^2}} \right)',$$

$$i_{11} = -2 - \frac{\tau'}{\sqrt{1+\tau^2}} \left(\frac{\tau'}{\sqrt{1+\tau^2}} \right)' - 3 \left(\frac{\tau'}{\sqrt{1+\tau^2}} \right)^2 - \left(\frac{\tau'}{\sqrt{1+\tau^2}} \right)^4,$$

$$i_{12} = 2 \frac{\tau'}{\sqrt{1+\tau^2}} + 2 \left(\frac{\tau'}{\sqrt{1+\tau^2}} \right)' + \left(\frac{\tau'}{\sqrt{1+\tau^2}} \right)^3,$$

birer katsayıdır.

İspat. (4.3.20) eğrisinin s^* parametresine göre türevi alınırsa

$$\frac{d\delta_1}{ds^*} \cdot \frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}} (N' + T_N')$$

olur. N' ve T_N' yerine (4.3.3) den karşılıkları yazılırsa

$$(T_N)_{\delta_1} \cdot \frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-N + T_N + \frac{\tau'}{\sqrt{1+\tau^2}} (N \wedge T_N) \right) \quad (4.3.20)$$

şeklinde olur. Norm alınırsa

$$\frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2 + \left(\frac{\tau'}{\sqrt{1+\tau^2}} \right)^2}$$

dır. Bu ifade yerine yazılırsa $\alpha_1(s)$ -Smarandache eğrisinin $(T_N)_{\delta_1}$ teğet vektörü

$$(T_N)_{\delta_1} = \frac{1}{\sqrt{2 + \left(\frac{\tau'}{\sqrt{1+\tau^2}} \right)^2}} \left(-N + T_N + \frac{\tau'}{\sqrt{1+\tau^2}} (N \wedge T_N) \right) \quad (4.3.21)$$

şeklinde bulunur. Tekrar türev alınırsa

$$(T_N)_{\delta_1}' \cdot \frac{ds^*}{ds} = \frac{\sqrt{2}}{(2 + \left(\frac{\tau'}{\sqrt{1+\tau^2}} \right)^2)^2} (i_{10}N + i_{11}T_N + i_{12}(N \wedge T_N))$$

olur. (4.3.20) ve (4.3.21) ifadesinden $(N \wedge T_N)_{\delta_1}$ vektörü

$$(N \wedge T_N)_{\delta_1} = \delta_1 \wedge (T_N)_{\delta_1},$$

$$(N \wedge T_N)_{\delta_1} = \frac{1}{\sqrt{4 + 2\left(\frac{\tau'}{\sqrt{1+\tau^2}}\right)^2}} \left(\frac{\tau'}{\sqrt{1+\tau^2}} N - \frac{\tau'}{\sqrt{1+\tau^2}} T_N + 2(N \wedge T_N) \right)$$

şeklinde bulunur. (4.3.3) denkleminde $\delta_1(s)$ -Smarandache eğrisinin $K_g^{\delta_1}$ geodezik eğriliği

$$K_g^{\delta_1} = \frac{1}{\left(2 + \left(\frac{\tau'}{\sqrt{1+\tau^2}}\right)^2\right)^{\frac{5}{2}}} \left(\frac{\tau'}{\sqrt{1+\tau^2}} i_{10} - \frac{\tau'}{\sqrt{1+\tau^2}} i_{11} + 2i_{12} \right),$$

$$K_g^{\delta_1} = \frac{1}{\left(2 + \left(\frac{\tan(ns)'}{\sqrt{1+\tan^2(ns)}}\right)^2\right)^{\frac{5}{2}}} \left(\frac{\tan(ns)'}{\sqrt{1+\tan^2(ns)}} i_{10} - \frac{\tan(ns)'}{\sqrt{1+\tan^2(ns)}} i_{11} + 2i_{12} \right)$$

şeklinde elde edilir. \square

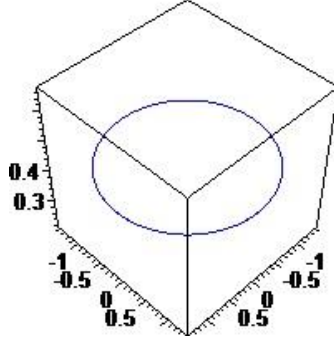
Tanım 4.3.6 Salkowski eğrisinin aslinormaller göstergesine ait Sabban çatısı $\{N, T_N, N \wedge T_N\}$ olsun.

$$\delta_2(s) = \frac{1}{\sqrt{2}} (N + (N \wedge T_N)) \quad (4.3.22)$$

şeklinde tanımlı $\delta_2(s)$ vektörünün çizdiği regüler eğriye $N(N \wedge T_N)$ -Smarandache eğrisi denir. Burada N , $(N \wedge T_N)$ vektörleri yerine (4.3.4) den karşılıkları yazılırsa $\delta_2(s)$ -Smarandache eğrisi

$$\begin{aligned} \delta_2(s) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\tan(ns)}{\sqrt{1+\tan^2(ns)}} (-\cos(s)\cos(ns) - n\sin(s)\sin(ns)) - \cos(s)\sin(ns) \right. \\ &\quad \left. + n\sin(s)\cos(ns) + \frac{n\sin(s)}{m}, -\sin(s)\sin(ns) - n\cos(s)\cos(ns) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\tan(ns)}{\sqrt{1+\tan^2(ns)}} (-\sin(s)\cos(ns) + n\cos(s)\sin(ns)) - \frac{n\cos(s)}{m}, \right. \\ &\quad \left. \frac{n\tan(ns)}{m\sqrt{1+\tan^2(ns)}} - \frac{n}{m}\cos(ns) - n \right). \end{aligned}$$

olur. Burada eğriye ait grafik Şekil 4.14 de verilmiştir.



Şekil 4.14: $N(N \wedge T_N)$ -Smarandache eğrisi

Teorem 4.3.6 $\delta_2(s)$ -Smarandache eğrisinin $K_g^{\delta_2}$ geodezik eğriliği

$$K_g^{\delta_2} = 1 + \frac{\tan(ns)'}{\sqrt{1 + \tan^2(ns)}}$$

denklemleriyle verilir.

İspat. (4.3.22) eğrisinin s^* parametresine göre türevi alınırsa

$$\frac{d\delta_2}{ds^*} \cdot \frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}}(N' + (N \wedge T_N)')$$

olur. Burada (4.3.3) denkleminde N' ve $(N \wedge T_N)'$ yerine karşılıkları yazılırsa

$$(T_N)_{\delta_2} \cdot \frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(T_N - \frac{\tau'}{\sqrt{1 + \tau^2}}T_N\right) \quad (4.3.23)$$

şeklinde olur. Norm alınırsa

$$\frac{ds^*}{ds} = \frac{1 - \frac{\tau'}{\sqrt{1 + \tau^2}}}{\sqrt{2}}$$

dır. Bu ifade yerine yazılırsa $\alpha_2(s)$ -Smarandache eğrisinin $(T_N)_{\delta_2}$ teğet vektörü

$$(T_N)_{\delta_2} = T_N \quad (4.3.24)$$

bulunur. Tekrar türev alınırsa

$$(T_N)_{\delta_2}' \cdot \frac{ds^*}{ds} = -N + \frac{\tau'}{\sqrt{1 + \tau^2}}(N \wedge T_N)$$

olur. (4.3.22) ve (4.3.24) ifadesinden $(N \wedge T_N)_{\delta_2}$ vektörü

$$(N \wedge T_N)_{\delta_2} = \delta_2 \wedge (T_N)_{\delta_2},$$

$$(N \wedge T_N)_{\delta_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-N + (N \wedge T_N))$$

bulunur. (4.3.3) denkleminde $\delta_2(s)$ -Smarandache eğrisinin $K_g^{\delta_2}$ geodezik eğriliği

$$K_g^{\delta_2} = 1 + \frac{\tau'}{\sqrt{1 + \tau^2}},$$

$$K_g^{\delta_2} = 1 + \frac{\tan(ns)'}{\sqrt{1 + \tan^2(ns)}}$$

şeklinde elde edilir. \square

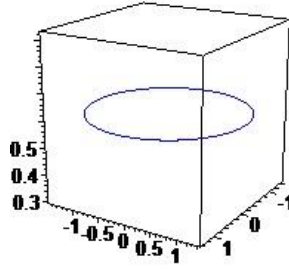
Tanım 4.3.7 Salkowski eğrisinin aslinormaller göstergesine ait Sabban çatısı $\{N, T_N, N \wedge T_N\}$ olsun.

$$\delta_3(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(T_N + (N \wedge T_N)) \quad (4.3.25)$$

şeklinde tanımlı $\delta_3(s)$ vektörünün çizdiği regüler eğriye $T_N(N \wedge T_N)$ -Smarandache eğrisi denir. Burada T_N , $(N \wedge T_N)$ vektörleri yerine (4.3.4) den karşılıkları yazılırsa $\delta_3(s)$ -Smarandache eğrisi

$$\begin{aligned} \delta_3(s) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\tan(ns)}{\sqrt{1 + \tan^2(ns)}} (-\cos(s) \cos(ns) - n \sin(s) \sin(ns)) + n \sin(s) \sin(ns) \right. \\ &+ \frac{\tan(ns)}{\sqrt{1 + \tan^2(ns)}} (-\cos(s) \sin(ns) + n \sin(s) \cos(ns)) + \cos(s) \cos(ns) \\ &- \cos(s) \sin(ns) + n \sin(s) \cos(ns), -\sin(s) \sin(ns) - \sin(s) \sin(ns) \\ &- n \cos(s) \cos(ns) + \frac{\tan(ns)}{\sqrt{1 + \tan^2(ns)}} (-\sin(s) \cos(ns) + n \cos(s) \sin(ns)) \\ &- n \cos(s) \cos(ns) + \frac{\tan(ns)}{\sqrt{1 + \tan^2(ns)}} (-\sin(s) \cos(ns) + n \cos(s) \sin(ns)), \\ &\left. \frac{n \tan(ns)}{m \sqrt{1 + \tan^2(ns)}} (\cos(ns) + \sin(ns)) - \frac{n}{m} \cos(ns) \right). \end{aligned}$$

olur. Burada eğriye ait grafik Şekil 4.15 de verilmiştir.



Şekil 4.15: $T_N(N \wedge T_N)$ -Smarandache eğrisi

Teorem 4.3.7 $\delta_3(s)$ -Smarandache eğrisinin $K_g^{\delta_3}$ geodezik eğriliği

$$K_g^{\delta_3} = \frac{1}{\left(1 + 2\left(\frac{\tan(ns)'}{\sqrt{1 + \tan^2(ns)}}\right)^2\right)^{\frac{5}{2}}} \left(2 \frac{\tan(ns)'}{\sqrt{1 + \tan^2(ns)}} i_{13} - i_{14} + i_{15}\right)$$

denklemleriyle verilir. Burada i_{13} , i_{14} , i_{15}

$$i_{13} = 2 \frac{\tau'}{\sqrt{1 + \tau^2}} \left(\frac{\tau'}{\sqrt{1 + \tau^2}}\right)' + \frac{\tau'}{\sqrt{1 + \tau^2}} + 2 \left(\frac{\tau'}{\sqrt{1 + \tau^2}}\right)^3,$$

$$i_{14} = -1 - \left(\frac{\tau'}{\sqrt{1 + \tau^2}}\right)' - 3 \left(\frac{\tau'}{\sqrt{1 + \tau^2}}\right)^2 - 2 \left(\frac{\tau'}{\sqrt{1 + \tau^2}}\right)^4,$$

$$i_{15} = -\left(\frac{\tau'}{\sqrt{1 + \tau^2}}\right)^2 + 2 \left(\frac{\tau'}{\sqrt{1 + \tau^2}}\right)' - 2 \left(\frac{\tau'}{\sqrt{1 + \tau^2}}\right)^4.$$

İspat. (4.3.25) eğrisinin s^* parametresine göre türevi alınırsa

$$\frac{d\delta_3}{ds^*} \cdot \frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}} (T_N' + (N \wedge T_N)')$$

olur. T_N' ve $(N \wedge T_N)'$ yerine (4.3.3) den karşılıkları yazılırsa

$$(T_N)_{\delta_3} \cdot \frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-N - \frac{\tau'}{\sqrt{1 + \tau^2}} T_N + \frac{\tau'}{\sqrt{1 + \tau^2}} (N \wedge T_N)\right) \quad (4.3.26)$$

şeklinde olur. Norm alınırsa

$$\frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + 2 \left(\frac{\tau'}{\sqrt{1 + \tau^2}}\right)^2}$$

üdür. Bu ifade yerine yazılırsa $\alpha_3(s)$ -Smarandache eğrisinin $(T_N)_{\delta_3}$ teğet vektörü

$$(T_N)_{\delta_3} = \frac{1}{\sqrt{1 + 2\left(\frac{\tau'}{\sqrt{1+\tau^2}}\right)^2}} \left(-N - \frac{\tau'}{\sqrt{1+\tau^2}} T_N + \frac{\tau'}{\sqrt{1+\tau^2}} (N \wedge T_N) \right) \quad (4.3.27)$$

bulunur. Tekrar türev alınırsa

$$(T_N)'_{\delta_3} \cdot \frac{ds^*}{ds} = \frac{\sqrt{2}}{\left(1 + 2\left(\frac{\tau'}{\sqrt{1+\tau^2}}\right)^2\right)^2} (i_{13}N + i_{14}T_N + i_{15}(N \wedge T_N))$$

olur. (4.3.25) ve (4.3.27) ifadesinden $(N \wedge T_N)_{\delta_3}$ vektörü

$$(N \wedge T_N)_{\delta_3} = \delta_3 \wedge (T_N)_{\delta_3},$$

$$(N \wedge T_N)_{\delta_3} = \frac{1}{\sqrt{2 + 4\left(\frac{\tau'}{\sqrt{1+\tau^2}}\right)^2}} \left(2\frac{\tau'}{\sqrt{1+\tau^2}} N - T_N + (N \wedge T_N) \right)$$

bulunur. (4.3.3) denkleminde $\delta_3(s)$ -Smarandache eğrisinin $K_g^{\delta_3}$ geodezik eğriliği

$$K_g^{\delta_3} = \frac{1}{\left(1 + 2\left(\frac{\tau'}{\sqrt{1+\tau^2}}\right)^2\right)^{\frac{5}{2}}} \left(2\frac{\tau'}{\sqrt{1+\tau^2}} i_{13} - i_{14} + i_{15} \right),$$

$$K_g^{\delta_3} = \frac{1}{\left(1 + 2\left(\frac{\tan(ns)'}{\sqrt{1+\tan^2(ns)}}\right)^2\right)^{\frac{5}{2}}} \left(2\frac{\tan(ns)'}{\sqrt{1+\tan^2(ns)}} i_{13} - i_{14} + i_{15} \right)$$

şeklinde elde edilir. \square

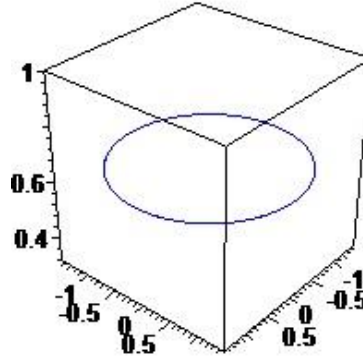
Tanım 4.3.8 Salkowski eğrisinin aslinormaller göstergesine ait Sabban çatısı $\{N, T_N, N \wedge T_N\}$ olsun.

$$\delta_4(s) = \frac{1}{\sqrt{3}} (N + T_N + (N \wedge T_N)) \quad (4.3.28)$$

şeklinde tanımlı $\delta_4(s)$ vektörünün çizdiği regüler eğriye $NT_N(N \wedge T_N)$ -Smarandache eğrisi denir. Burada $N, T_N, (N \wedge T_N)$ vektörleri yerine (4.3.4) den karşılıkları yazılırsa $\delta_4(s)$ -Smarandache eğrisi

$$\begin{aligned}
\delta_4(s) &= \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{\tan(ns)}{\sqrt{1+\tan^2(ns)}} (-\cos(s)\cos(ns) - n\sin(s)\sin(ns)) + n\sin(s)\sin(ns) \right. \\
&+ \frac{\tan(ns)}{\sqrt{1+\tan^2(ns)}} (-\cos(s)\sin(ns) + n\sin(s)\cos(ns)) + \cos(s)\cos(ns) \\
&- \cos(s)\sin(ns) + n\sin(s)\cos(ns) + \frac{n\sin(s)}{m}, -\sin(s)\sin(ns) - \sin(s)\sin(ns) \\
&-n\cos(s)\cos(ns) + \frac{\tan(ns)}{\sqrt{1+\tan^2(ns)}} (-\sin(s)\cos(ns) + n\cos(s)\sin(ns)) \\
&-n\cos(s)\cos(ns) + \frac{\tan(ns)}{\sqrt{1+\tan^2(ns)}} (-\sin(s)\cos(ns) + n\cos(s)\sin(ns)) \\
&\left. -\frac{n\cos(s)}{m}, \frac{n\tan(ns)}{m\sqrt{1+\tan^2(ns)}} (\cos(ns) + \sin(ns)) - \frac{n}{m} \cos(ns) - n \right).
\end{aligned}$$

olur. Burada eğriye ait grafik Şekil 4.16 de verilmiştir.



Şekil 4.16: $NT_N(N \wedge T_N)$ -Smarandache eğrisi

Teorem 4.3.8 $\delta_4(s)$ -Smarandache eğrisinin $K_g^{\delta_4}$ geodezik eğriliği

$$K_g^{\delta_4} = \frac{\left(i_{16} \left(2 \frac{\tan(ns)'}{\sqrt{1 + \tan^2(ns)}} - 1 \right) + i_{17} \left(-1 - \frac{\tan(ns)'}{\sqrt{1 + \tan^2(ns)}} \right) + i_{18} \left(2 - \frac{\tan(ns)'}{\sqrt{1 + \tan^2(ns)}} \right) \right)}{\left(4\sqrt{2} \left(1 - \frac{\tan(ns)'}{\sqrt{1 + \tan^2(ns)}} + \frac{\tan(ns)'}{\sqrt{1 + \tan^2(ns)}} \right)^2 \right)^{\frac{5}{2}}}$$

denklemlerle verilir. Burada

$$i_{16} = -\left(\frac{\tau'}{\sqrt{1 + \tau^2}} \right)' + 2 \frac{\tau'}{\sqrt{1 + \tau^2}} \left(\frac{\tau'}{\sqrt{1 + \tau^2}} \right)' - 2 + 4 \frac{\tau'}{\sqrt{1 + \tau^2}} - 4 \left(\frac{\tau'}{\sqrt{1 + \tau^2}} \right)^2 + 2 \left(\frac{\tau'}{\sqrt{1 + \tau^2}} \right)^3,$$

$$i_{17} = -\left(\frac{\tau'}{\sqrt{1 + \tau^2}} \right)' - \frac{\tau'}{\sqrt{1 + \tau^2}} \left(\frac{\tau'}{\sqrt{1 + \tau^2}} \right)' - 2 - 4 \left(\frac{\tau'}{\sqrt{1 + \tau^2}} \right)^2 + 2 \frac{\tau'}{\sqrt{1 + \tau^2}} + 2 \left(\frac{\tau'}{\sqrt{1 + \tau^2}} \right)^3 - 2 \left(\frac{\tau'}{\sqrt{1 + \tau^2}} \right)^4,$$

$$i_{18} = \frac{\tau'}{\sqrt{1 + \tau^2}} \left(\frac{\tau'}{\sqrt{1 + \tau^2}} \right)' + 2 \frac{\tau'}{\sqrt{1 + \tau^2}} - 4 \left(\frac{\tau'}{\sqrt{1 + \tau^2}} \right)^2 + 2 \left(\frac{\tau'}{\sqrt{1 + \tau^2}} \right)' + 4 \left(\frac{\tau'}{\sqrt{1 + \tau^2}} \right)^3 - 2 \left(\frac{\tau'}{\sqrt{1 + \tau^2}} \right)^4$$

birer katsayıdır.

İspat. (4.3.28) eğrisinin s^* parametresine göre türevi alınırsa

$$\frac{d\delta_4}{ds^*} \cdot \frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{\sqrt{3}} (N' + T'_N + (N \wedge T_N)')$$

olur. N' , T'_N ve $(N \wedge T_N)'$ yerine (4.3.3) den karşılıkları yazılırsa

$$(T_N)_{\delta_4} \cdot \frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(-N + \left(1 - \frac{\tau'}{\sqrt{1 + \tau^2}} \right) T_N + \frac{\tau'}{\sqrt{1 + \tau^2}} (N \wedge T_N) \right) \quad (4.3.29)$$

olur. Norm alınırsa

$$\frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{2\left(1 - \frac{\tau'}{\sqrt{1+\tau^2}} + \left(\frac{\tau'}{\sqrt{1+\tau^2}}\right)^2\right)}$$

şeklinde olur. Bu ifade yerine yazılırsa $\alpha_4(s)$ -Smarandache eğrisinin $(T_N)_{\delta_4}$ teğet vektörü

$$(T_N)_{\delta_4} = \frac{1}{\sqrt{2\left(1 - K_g^N + \left(\frac{\tau'}{\sqrt{1+\tau^2}}\right)^2\right)}} \left(-N + \left(1 - \frac{\tau'}{\sqrt{1+\tau^2}}\right)T_N + \frac{\tau'}{\sqrt{1+\tau^2}}(N \wedge T_N)\right) \quad (4.3.30)$$

bulunur. Tekrar türev alınırsa

$$(T_N)'_{\delta_3} \cdot \frac{ds^*}{ds} = \frac{\sqrt{3}}{4\left(1 - \frac{\tau'}{\sqrt{1+\tau^2}} + \left(\frac{\tau'}{\sqrt{1+\tau^2}}\right)^2\right)^2} (i_{16}N + i_{17}T_N + i_{18}(N \wedge T_N))$$

olur. (4.3.28) ve (4.3.30) ifadesinden $(N \wedge T_N)_{\delta_4}$ vektörü

$$(N \wedge T_N)_{\delta_4} = \delta_4 \wedge (T_N)_{\delta_4},$$

$$(N \wedge T_N)_{\delta_4} = \frac{\left(\left(-1 + 2\frac{\tau'}{\sqrt{1+\tau^2}}\right)N + \left(-1 - \frac{\tau'}{\sqrt{1+\tau^2}}\right)T_N + \left(2 - \frac{\tau'}{\sqrt{1+\tau^2}}\right)(N \wedge T_N)\right)}{\sqrt{6\left(1 - \frac{\tau'}{\sqrt{1+\tau^2}} + \left(\frac{\tau'}{\sqrt{1+\tau^2}}\right)^2\right)}}$$

bulunur. (4.3.3) denkleminde $\delta_4(s)$ -Smarandache eğrisinin $K_g^{\delta_4}$ geodezik eğriliği

$$K_g^{\delta_4} = \frac{\left(i_{16}\left(2\frac{\tau'}{\sqrt{1+\tau^2}} - 1\right) + i_{17}\left(-1 - \frac{\tau'}{\sqrt{1+\tau^2}}\right) + i_{18}\left(2 - \frac{\tau'}{\sqrt{1+\tau^2}}\right)\right)}{\left(4\sqrt{2}\left(1 - \frac{\tau'}{\sqrt{1+\tau^2}} + \frac{\tau'}{\sqrt{1+\tau^2}}\right)^2\right)^{\frac{5}{2}}},$$

$$K_g^{\delta_4} = \frac{\left(i_{16}\left(2\frac{\tan(ns)'}{\sqrt{1+\tan^2(ns)}} - 1\right) + i_{17}\left(-1 - \frac{\tan(ns)'}{\sqrt{1+\tan^2(ns)}}\right) + i_{18}\left(2 - \frac{\tan(ns)'}{\sqrt{1+\tan^2(ns)}}\right)\right)}{\left(4\sqrt{2}\left(1 - \frac{\tan(ns)'}{\sqrt{1+\tan^2(ns)}} + \frac{\tan(ns)'}{\sqrt{1+\tan^2(ns)}}\right)^2\right)^{\frac{5}{2}}}$$

şeklinde elde edilir. \square

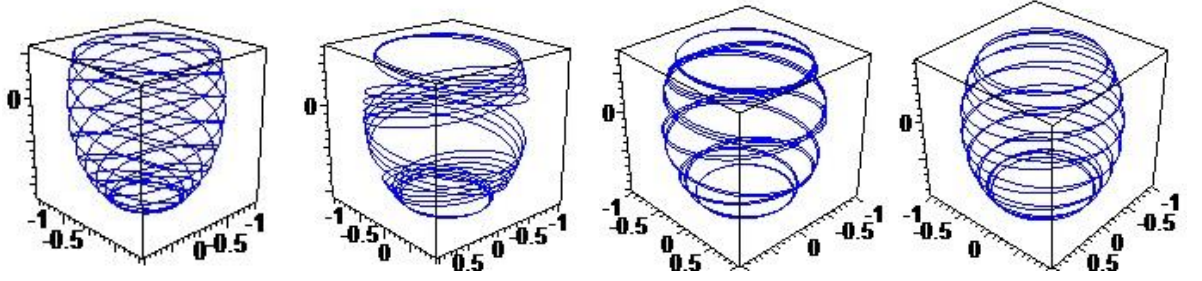
Tanım 4.3.9 Salkowski eğrisinin binormaller göstergesine ait Sabban çatısı $\{B, T_B, B \wedge T_B\}$ olsun.

$$\zeta_1(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(B + T_B) \quad (4.3.31)$$

şeklinde tanımlı $\zeta_1(s)$ vektörünün çizdiği regüler eğriye BT_B -Smarandache eğrisi denir. Burada B, T_B vektörleri yerine (4.3.6) den karşılıkları yazılırsa $\zeta_1(s)$ -Smarandache eğrisi

$$\begin{aligned} \zeta_1(s) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\cos(s) \sin(ns) + n \sin(s) \cos(ns) + \frac{n}{m} \sin(s), \right. \\ \left. -\sin(s) \sin(ns) - n \cos(s) \cos(ns) - \frac{n}{m} \cos(s), \frac{n}{m} \cos(ns) - n \right) \end{aligned}$$

olur. Burada $m = \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$ değerleri için eğriye ait grafikler Şekil 4.17 de verilmiştir.



Şekil 4.17: BT_B -Smarandache eğrisi

Teorem 4.3.9 $\zeta_1(s)$ -Smarandache eğrisinin $K_g^{\zeta_1}$ geodezik eğriliği

$$K_g^{\zeta_1} = \frac{1}{\left(2 + \left(\frac{1}{\tan(ns)}\right)^2\right)^{\frac{5}{2}}} \left(i_{19} \frac{1}{\tan(ns)} - i_{20} \frac{1}{\tan(ns)} + 2i_{21} \right)$$

denklemleriyle verilir. Burada i_{19}, i_{20}, i_{21}

$$i_{19} = -2 - \left(\frac{1}{\tau}\right)^2 + \frac{1}{\tau} \left(\frac{1}{\tau}\right)',$$

$$i_{20} = -2 - \frac{1}{\tau} \left(\frac{1}{\tau}\right)' - 3\left(\frac{1}{\tau}\right)^2 - \left(\frac{1}{\tau}\right)^4,$$

$$i_{21} = 2\frac{1}{\tau} + 2\left(\frac{1}{\tau}\right)' + \left(\frac{1}{\tau}\right)^3,$$

birer katsayıdır.

İspat. (4.3.31) eğrisinin s^* parametresine göre türevi alınırsa

$$\frac{d\zeta_1}{ds^*} \cdot \frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}}(B' + T'_B)$$

şeklinde olur. B' ve T'_B vektörleri yerine (4.3.5) den karşılıkları yazılırsa

$$(T_B)_{\zeta_1} \cdot \frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-B + T_B + \frac{1}{\tau}(B \wedge T_B)) \quad (4.3.32)$$

olur. Norm alınırsa

$$\frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2 + (\frac{1}{\tau})^2}$$

dır. Bu ifade yerine yazılırsa $\zeta_1(s)$ -Smarandache eğrisinin $(T_B)_{\zeta_1}$ teğet vektörü

$$(T_B)_{\zeta_1} = \frac{1}{\sqrt{2 + (\frac{1}{\tau})^2}}(-B + T_N + \frac{1}{\tau}(B \wedge T_B)) \quad (4.3.33)$$

bulunur. Tekrar türev alınırsa

$$(T_B)_{\zeta_1}' \cdot \frac{ds^*}{ds} = \frac{\sqrt{2}}{(2 + (\frac{1}{\tau})^2)^2}(i_{19}B + i_{20}T_B + i_{21}(B \wedge T_B))$$

olur. (4.3.31) ve (4.3.33) ifadesinden $(B \wedge T_B)_{\zeta_1}$ vektörü

$$(B \wedge T_B)_{\zeta_1} = \zeta_1 \wedge (T_B)_{\zeta_1},$$

$$(B \wedge T_B)_{\zeta_1} = \frac{1}{\sqrt{4 + 2(\frac{1}{\tau})^2}}(\frac{1}{\tau}N - \frac{1}{\tau}T_B + 2(B \wedge T_B))$$

bulunur. (4.3.5) den $\zeta_1(s)$ -Smarandache eğrisinin $K_g^{\zeta_1}$ geodezik eğriliği

$$K_g^{\zeta_1} = \frac{1}{(2 + (\frac{1}{\tau})^2)^{\frac{5}{2}}} \left(\frac{1}{\tau}i_{19} - \frac{1}{\tau}i_{20} + 2i_{21} \right),$$

$$K_g^{\zeta_1} = \frac{1}{(2 + (\frac{1}{\tan(ns)})^2)^{\frac{5}{2}}} \left(i_{19} \frac{1}{\tan(ns)} - i_{20} \frac{1}{\tan(ns)} + 2i_{21} \right)$$

şeklinde elde edilir. \square

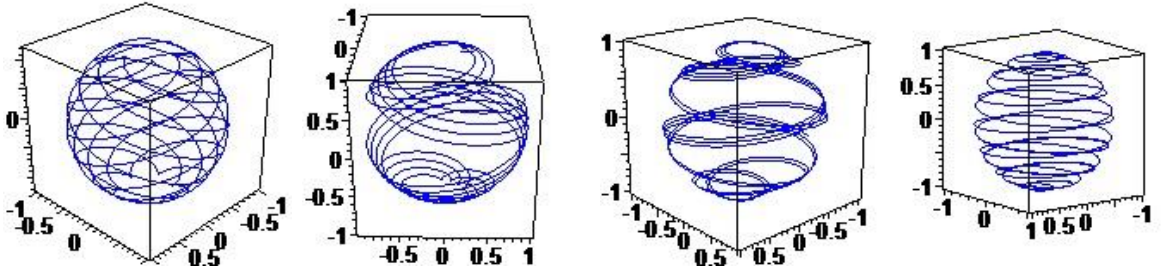
Tanım 4.3.10 Salkowski eğrisinin binormaller göstergesine ait Sabban çatısı $\{B, T_B, B \wedge T_B\}$ olsun.

$$\zeta_2(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(B + (B \wedge T_B)) \quad (4.3.34)$$

şeklinde tanımlı $\zeta_2(s)$ vektörünün çizdiği regüler eğriye $B(B \wedge T_B)$ -Smarandache eğrisi denir. Burada $B, (B \wedge T_B)$ vektörleri yerine (4.3.6) den karşılıkları yazılırsa $\zeta_2(s)$ -Smarandache eğrisi

$$\begin{aligned} \zeta_2(s) = \frac{1}{\sqrt{2}} & \left(\cos(s)(\cos(ns) - \sin(ns)) + n \sin(s)(\cos(ns) + \sin(ns)), \right. \\ & \left. \sin(s)(\cos(ns) - \sin(ns)) - n \cos(s)(\cos(ns) + \sin(ns)), \right. \\ & \left. \frac{n}{m}(\cos(ns) + \sin(ns)) \right) \end{aligned}$$

olur. Burada $m = \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$ değerleri için eğriye ait grafikler Şekil 4.18 de verilmiştir.



Şekil 4.18: $B(B \wedge T_B)$ -Smarandache eğrisi

Teorem 4.3.10 $\zeta_2(s)$ -Smarandache eğrisinin $K_g^{\zeta_2}$ geodezik eğriliği

$$K_g^{\zeta_2} = 1 + \frac{1}{\tan(ns)}$$

denklemleriyle verilir.

İspat. (4.3.34) eğrisinin s^* parametresine göre türevi alınırsa

$$\frac{d\zeta_2}{ds^*} \cdot \frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}}(B' + (B \wedge T_B)')$$

şeklinde olur. B' ve $(B \wedge T_B)'$ vektörleri yerine (4.3.5) den karşılıkları yazılırsa

$$(T_B)_{\zeta_2} \cdot \frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(T_B - \frac{1}{\tau} T_B \right) \quad (4.3.35)$$

olur. Norm alınırsa

$$\frac{ds^*}{ds} = \frac{1 - \frac{1}{\tau}}{\sqrt{2}}$$

şeklinde olur. Bu ifade yerine yazılırsa $\zeta_2(s)$ -Smarandache eğrisinin $(T_B)_{\zeta_2}$ teğet vektörü

$$(T_B)_{\zeta_2} = T_B \quad (4.3.36)$$

bulunur. Tekrar türev alınırsa

$$(T_B)'_{\zeta_2} \cdot \frac{ds^*}{ds} = -B + \frac{1}{\tau} (B \wedge T_B)$$

olur. (4.3.34) ve (4.3.36) ifadesinden $(B \wedge T_B)_{\zeta_3}$ vektörü

$$(B \wedge T_B)_{\zeta_2} = \zeta_2 \wedge (T_B)_{\zeta_2},$$

$$(B \wedge T_B)_{\zeta_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} (-B + (B \wedge T_B))$$

bulunur. (4.3.5) den $\zeta_2(s)$ -Smarandache eğrisinin $K_g^{\zeta_2}$ geodezik eğriliği

$$K_g^{\zeta_2} = 1 + \frac{1}{\tau}, \quad K_g^{\zeta_2} = 1 + \frac{1}{\tan(ns)}$$

şeklinde elde edilir. \square

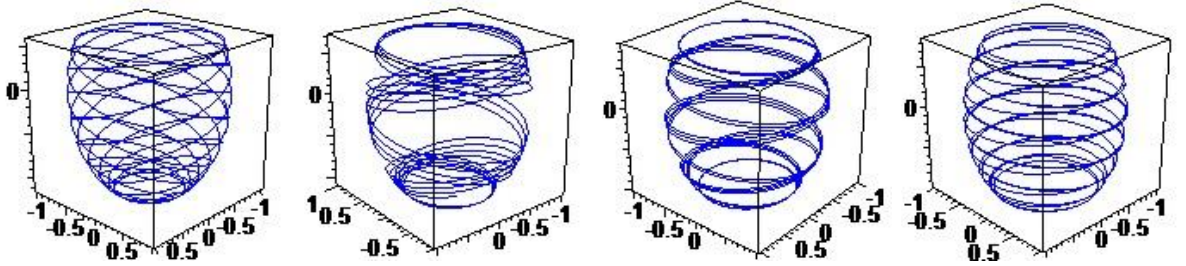
Tanım 4.3.11 Salkowski eğrisinin binormaller göstergesine ait Sabban çatısı $\{B, T_B, B \wedge T_B\}$ olsun.

$$\zeta_3(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(T_B + (B \wedge T_B)) \quad (4.3.37)$$

şeklinde tanımlı $\zeta_3(s)$ vektörünün çizdiği regüler eğriye $T_B(B \wedge T_B)$ -Smarandache eğrisi denir. Burada $T_B, (B \wedge T_B)$ vektörleri yerine (4.3.6) den karşılıkları yazılırsa $\zeta_3(s)$ -Smarandache eğrisi

$$\begin{aligned} \zeta_3(s) = & \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\cos(s) \cos(ns) + n \sin(s) \sin(ns) + \frac{n}{m} \sin(s), \right. \\ & \left. \sin(s) \cos(ns) - n \cos(s) \sin(ns) - \frac{n}{m} \cos(s), \right. \\ & \left. \frac{n}{m} \sin(ns) - n \right) \end{aligned}$$

olur. Burada $m = \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$ değerleri için eğriye ait grafikler Şekil 4.19 de verilmiştir.



Şekil 4.19: $T_B(B \wedge T_B)$ -Smarandache eğrisi

Teorem 4.3.11 $\zeta_3(s)$ -Smarandache eğrisinin $K_g^{\zeta_3}$ geodezik eğriliği

$$K_g^{\zeta_3} = \frac{1}{\left(1 + 2\left(\frac{1}{\tan(ns)}\right)^2\right)^{\frac{5}{2}}} \left(2\frac{1}{\tan(ns)} i_{22} - i_{23} + i_{24} \right)$$

denklemleriyle verilir. Burada i_{22}, i_{23}, i_{24}

$$i_{22} = 2\frac{1}{\tau}\left(\frac{1}{\tau}\right)' + \frac{1}{\tau} + 2\left(\frac{1}{\tau}\right)^3,$$

$$i_{23} = -1 - \left(\frac{1}{\tau}\right)' - 3\left(\frac{1}{\tau}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{\tau}\right)^4,$$

$$i_{24} = -\left(\frac{1}{\tau}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{\tau}\right)' - 2\left(\frac{1}{\tau}\right)^4,$$

birer katsayıdır.

İspat. (4.3.37) eğrisinin s^* parametresine göre türevi alınırsa

$$\frac{d\zeta_3}{ds^*} \cdot \frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}}(T'_B + (B \wedge T_B)')$$

şeklinde olur. T'_B ve $(B \wedge T_B)'$ vektörleri yerine (4.3.5) den karşılıkları yazılırsa

$$(T_B)_{\zeta_3} \cdot \frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-B - \frac{1}{\tau}T_B + \frac{1}{\tau}(B \wedge T_B)) \quad (4.3.38)$$

olur. Norm alınırsa

$$\frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1 + 2(\frac{1}{\tau})^2}$$

şeklinde olur. Bu ifade yerine yazılırsa $\zeta_3(s)$ -Smarandache eğrisinin $(T_B)_{\zeta_3}$ teğet vektörü

$$(T_B)_{\zeta_3} = \frac{1}{\sqrt{1 + 2(\frac{1}{\tau})^2}}(-B - \frac{1}{\tau}T_B + \frac{1}{\tau}(B \wedge T_B)) \quad (4.3.39)$$

bulunur. Tekrar türev alınırsa

$$(T_B)'_{\zeta_3} \cdot \frac{ds^*}{ds} = \frac{\sqrt{2}}{(1 + 2(\frac{1}{\tau})^2)^2}(i_{22}B + i_{23}T_B + i_{24}(B \wedge T_B))$$

olur. (4.3.37) ve (4.3.39) ifadesinden $(B \wedge T_B)_{\zeta_3}$ vektörü

$$(B \wedge T_B)_{\zeta_3} = \zeta_3 \wedge (T_B)_{\zeta_3},$$

$$(B \wedge T_B)_{\zeta_3} = \frac{1}{\sqrt{2 + 4(\frac{1}{\tau})^2}}(2\frac{1}{\tau}B - T_B + (B \wedge T_B))$$

bulunur. (4.3.5) den $\zeta_3(s)$ -Smarandache eğrisinin $K_g^{\zeta_3}$ geodezik eğriliği

$$K_g^{\zeta_3} = \frac{1}{(1 + 2(\frac{1}{\tau})^2)^{\frac{5}{2}}} \left(2\frac{1}{\tau}i_{22} - i_{23} + i_{24} \right),$$

$$K_g^{\zeta_3} = \frac{1}{(1 + 2(\frac{1}{\tan(ns)})^2)^{\frac{5}{2}}} \left(2\frac{1}{\tan(ns)}i_{22} - i_{23} + i_{24} \right)$$

şeklinde elde edilir. \square

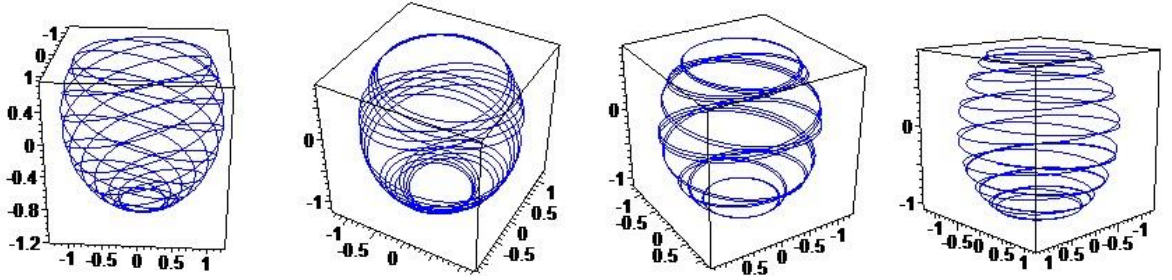
Tanım 4.3.12 Salkowski eğrisinin binormaller göstergesine ait Sabban çatısı $\{B, T_B, B \wedge T_B\}$ olsun.

$$\zeta_4(s) = \frac{1}{\sqrt{3}}(B + T_B + (B \wedge T_B)) \quad (4.3.40)$$

şeklinde tanımlı $\zeta_4(s)$ vektörünün çizdiği regüler eğriye $BT_B(B \wedge T_B)$ -Smarandache eğrisi denir. Burada $B, T_B, (B \wedge T_B)$ vektörleri yerine (4.3.6) den karşılıkları yazılırsa $\zeta_4(s)$ -Smarandache eğrisi

$$\begin{aligned} \zeta_4(s) = & \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\cos(s)(\cos(ns) - \sin(ns)) + n \sin(s)(\cos(ns) + \sin(ns)) + \frac{n}{m} \sin(s), \right. \\ & \sin(s)(\cos(ns) - \sin(ns)) - n \cos(s)(\cos(ns) + \sin(ns)) - \frac{n}{m} \cos(s), \\ & \left. \frac{n}{m}(\cos(ns) + \sin(ns)) - n \right) \end{aligned}$$

olur. Burada $m = \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$ değerleri için eğriye ait grafikler Şekil 4.20 de verilmiştir.



Şekil 4.20: $BT_B(B \wedge T_B)$ -Smarandache eğrisi

Teorem 4.3.12 $\zeta_4(s)$ -Smarandache eğrisinin $K_g^{\zeta_4}$ geodezik eğriliği

$$K_g^{\zeta_4} = \frac{\left(i_{25} \left(2 \frac{1}{\tan(ns)} - 1 \right) + i_{26} \left(-1 - \frac{1}{\tan(ns)} \right) + i_{27} \left(2 - \frac{1}{\tan(ns)} \right) \right)}{\left(4\sqrt{2} \left(1 - \frac{1}{\tan(ns)} + \left(\frac{1}{\tan(ns)} \right)^2 \right)^2 \right)^{\frac{5}{2}}}$$

denklemlerle verilir. Burada i_{25}, i_{26}, i_{27}

$$i_{25} = -\left(\frac{1}{\tau}\right)' + 2\frac{1}{\tau}\left(\frac{1}{\tau}\right)' - 2 + 4\frac{1}{\tau} - 4\left(\frac{1}{\tau}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{\tau}\right)^3,$$

$$i_{26} = -\left(\frac{1}{\tau}\right)' - \frac{1}{\tau}\left(\frac{1}{\tau}\right)' - 2 - 4\left(\frac{1}{\tau}\right)^2 + 2\frac{1}{\tau} + 2\left(\frac{1}{\tau}\right)^3 - 2\left(\frac{1}{\tau}\right)^4,$$

$$i_{27} = \frac{1}{\tau}\left(\frac{1}{\tau}\right)' + 2\frac{1}{\tau} - 4\left(\frac{1}{\tau}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{\tau}\right)' + 4\left(\frac{1}{\tau}\right)^3 - 2\left(\frac{1}{\tau}\right)^4,$$

birer katsayıdır.

İspat. (4.3.40) eğrisinin s^* parametresine göre türevi alınırsa

$$\frac{d\zeta_4}{ds^*} \cdot \frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{\sqrt{3}}(B' + T'_B + (B \wedge T_B)')$$

şeklinde olur. B' , T'_B ve $(B \wedge T_B)'$ vektörleri yerine (4.3.5) den karşılıkları yazılırsa

$$(T_B)_{\zeta_4} \cdot \frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{\sqrt{3}}(-B + (1 - \frac{1}{\tau})T_B + K\frac{1}{\tau}(B \wedge T_B)) \quad (4.3.41)$$

olur. Norm alınırsa

$$\frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{2(1 - \frac{1}{\tau} + (\frac{1}{\tau})^2)}$$

şeklinde olur. Bu ifade yerine yazılırsa $\zeta_4(s)$ -Smarandache eğrisinin $(T_B)_{\zeta_4}$ teğet vektörü

$$(T_B)_{\zeta_4} = \frac{1}{\sqrt{2(1 - \frac{1}{\tau} + (\frac{1}{\tau})^2)}}(-B + (1 - \frac{1}{\tau})T_B + \frac{1}{\tau}(B \wedge T_B)) \quad (4.3.42)$$

bulunur. Tekrar türev alınırsa

$$(T_B)'_{\zeta_3} \cdot \frac{ds^*}{ds} = \frac{\sqrt{3}}{4(1 - \frac{1}{\tau} + (\frac{1}{\tau})^2)^2}(i_{25}B + i_{26}T_B + i_{27}(B \wedge T_B))$$

olur. (4.3.40) ve (4.3.42) ifadesinden $(B \wedge T_B)_{\zeta_4}$ vektörü

$$(B \wedge T_B)_{\zeta_4} = \zeta_4 \wedge (T_B)_{\zeta_4},$$

$$(B \wedge T_B)_{\zeta_4} = \frac{1}{\sqrt{6(1 - \frac{1}{\tau} + (\frac{1}{\tau})^2)}}((-1 + 2\frac{1}{\tau})B + (-1 - \frac{1}{\tau})T_B + (2 - \frac{1}{\tau})(B \wedge T_B))$$

bulunur. (4.3.5) den $\zeta_4(s)$ -Smarandache eğrisinin $K_g^{\zeta_4}$ geodezik eğriliği

$$K_g^{\zeta_4} = \frac{\left(i_{25}(2\frac{1}{\tau} - 1) + i_{26}(-1 - \frac{1}{\tau}) + i_{27}(2 - \frac{1}{\tau})\right)}{(4\sqrt{2}(1 - \frac{1}{\tau} + (\frac{1}{\tau})^2)^2)^{\frac{5}{2}}},$$

$$K_g^{\zeta_4} = \frac{\left(i_{25}(2\frac{1}{\tan(ns)} - 1) + i_{26}(-1 - \frac{1}{\tan(ns)}) + i_{27}(2 - \frac{1}{\tan(ns)})\right)}{(4\sqrt{2}(1 - \frac{1}{\tan(ns)} + (\frac{1}{\tan(ns)})^2)^2)^{\frac{5}{2}}}$$

şeklinde elde edilir. \square

4.4 Anti-Salkowski Eğrisinin Frenet Vektörlerinden Elde Edilen Sabban Çatısına Göre Smarandache Eğrileri

Bu bölümde, anti-Salkowski eğrisine ait T^*, N^*, B^* Frenet vektörlerinin birim küre yüzeyi üzerinde çizdiği küresel eğrilerin Sabban çatıları oluşturuldu. Bu çatılardan Smarandache eğrileri tanımlandı. Daha sonra elde edilen her bir eğrinin geodezik eğrilikleri hesaplandı. Şimdi sırayla (T^*) teğetler göstergesi, (N^*) aslinormaller göstergesi ve (B^*) binormaller göstergesine ait Sabban çatıları, Sabban formülleri ve geodezik eğriliklerini verelim. (T^*) teğetler göstergesi için;

$$T^* = T^* , \quad T_{T^*} = N^* , \quad T^* \wedge T_{T^*} = B,$$

$$T^{*'} = T_{T^*}, \quad T_{T^*}' = -T^* + \frac{1}{\kappa^*}(T^* \wedge T_{T^*}), \quad (T^* \wedge T_{T^*})' = \frac{1}{\kappa^*}T_{T^*}, \quad (4.4.1)$$

$$K_g^{T^*} = \langle T_{T^*}', T^* \wedge T_{T^*} \rangle = \frac{1}{\kappa^*} = \frac{1}{\tan(ns)}.$$

$$T^*(s) = - \left(\cos(s) \sin(ns) - n \sin(s) \cos(ns), \sin(s) \sin(ns) + n \cos(s) \cos(ns), \frac{n}{m} \cos(ns) \right),$$

$$T_{T^*}(s) = n \left(\frac{\sin(s)}{m}, -\frac{\cos(s)}{m}, 1 \right), \quad (4.4.2)$$

$$(T^* \wedge T_{T^*})(s) = - \left(\cos(s) \cos(ns) + n \sin(s) \sin(ns), \sin(s) \cos(ns) - n \cos(s) \sin(ns), \frac{n}{m} \sin(ns) \right).$$

(N^*) aslinormaller göstergesi için;

$$N^* = N^* , \quad T_{N^*} = \frac{-\kappa^* T^* + B^*}{\sqrt{\kappa^{*2} + 1}} , \quad N^* \wedge T_{N^*} = \frac{T^* + \kappa^* B^*}{\sqrt{\kappa^{*2} + 1}},$$

$$N^{*'} = T_{N^*}, \quad T_{N^*}' = -N^* + K_g^{N^*}(N^* \wedge T_{N^*}), \quad (N^* \wedge T_{N^*})' = K_g^{N^*} T_{N^*}, \quad (4.4.3)$$

$$K_g^{N^*} = \langle T_{N^*}', (N^* \wedge T_{N^*}) \rangle = \frac{-\kappa^{*'}}{\sqrt{\kappa^{*2} + 1}} = \frac{-\tan(ns)'}{\sqrt{\tan(ns)^2 + 1}}.$$

$$N^*(s) = \left(\frac{n \sin(s)}{m}, -\frac{n \cos(s)}{m}, n \right),$$

$$\begin{aligned} T_{N^*}(s) = & \frac{1}{\sqrt{\tan^2(ns) + 1}} \left(-\cos(s) \cos(ns) - n \sin(s) \sin(ns) \right. \\ & - \tan(ns) (-\cos(s) \sin(ns) + n \sin(s) \cos(ns)), \\ & - \tan(ns) (-\sin(s) \sin(ns) - n \cos(s) \cos(ns)) \\ & \left. - \sin(s) \cos(ns) + n \cos(s) \sin(ns), \frac{2n}{m} \sin(ns) \right), \end{aligned} \quad (4.4.4)$$

$$\begin{aligned} (N^* \wedge T_{N^*})(s) = & \frac{1}{\sqrt{\tan^2(ns) + 1}} \left(\tan(ns) (-\cos(s) \cos(ns) - n \sin(s) \sin(ns)) \right. \\ & - \cos(s) \sin(ns) + n \sin(s) \cos(ns), -\sin(s) \sin(ns) \\ & + \tan(ns) (-\sin(s) \cos(ns) + n \cos(s) \sin(ns)) - n \cos(s) \cos(ns), \\ & \left. \frac{n}{m} \tan(ns) \sin(ns) - \frac{n}{m} \cos(ns) \right) \end{aligned}$$

(B^*) binormaller göstergesi için;

$$B^* = B^*, \quad T_{B^*} = -N^*, \quad B^* \wedge T_{B^*} = T^*,$$

$$B^{*'} = T_{B^*}, \quad T_{B^*}' = -B^* + \kappa^*(B^* \wedge T_{B^*}), \quad (B^* \wedge T_{B^*})' = \kappa^* T_{B^*}, \quad (4.4.5)$$

$$K_g^{B^*} = \langle T_{B^*}', (B^* \wedge T_{B^*}) \rangle = \kappa^* = \tan(ns).$$

$$B^*(s) = -\left(\cos(s) \cos(ns) + n \sin(s) \sin(ns), \sin(s) \cos(ns) - n \cos(s) \sin(ns), \frac{n}{m} \sin(ns) \right),$$

$$T_{B^*}(s) = -\left(\frac{n \sin(s)}{m}, -\frac{n \cos(s)}{m}, n \right), \quad (4.4.6)$$

$$(B^* \wedge T_{B^*})(s) = -\left(\cos(s) \sin(ns) - n \sin(s) \cos(ns), \sin(s) \sin(ns) + n \cos(s) \cos(ns), -\frac{n}{m} \cos(ns) \right).$$

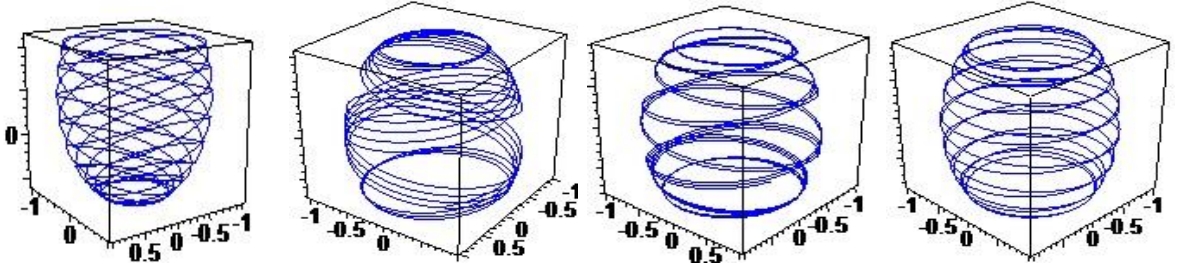
Tanım 4.4.1 Anti-Salkowski eğrisinin teğetler göstergesine ait Sabban çatısı $\{T^*, T_{T^*}, T^* \wedge T_{T^*}\}$ olsun.

$$\theta_1(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(T^* + T_{T^*}) \quad (4.4.7)$$

şeklinde tanımlı $\theta_1(s)$ vektörünün çizdiği regüler eğriye $T^*T_{T^*}$ -Smarandache eğrisi denir. Burada T^*, T_{T^*} vektörleri (4.4.2) den yerlerine yazılırsa $\theta_1(s)$ -Smarandache eğrisi

$$\begin{aligned} \theta_1(s) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\cos(s) \sin(ns) + n \sin(s) \cos(ns) + \frac{n}{m} \sin(s), -\sin(s) \sin(ns) \right. \\ \left. -n \cos(s) \cos(ns) - \frac{n}{m} \cos(s), -\frac{n}{m} \cos(ns) + n \right) \end{aligned}$$

olur. Burada $m = \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$ değerleri için eğriye ait grafikler Şekil 4.21 de verilmiştir.



Şekil 4.21: $T^*T_{T^*}$ -Smarandache eğrisi

Teorem 4.4.1 $\theta_1(s)$ -Smarandache eğrisinin $K_g^{\theta_1}$ geodezik eğriliği

$$K_g^{\theta_1} = \frac{1}{\left(2 + \left(\frac{1}{\tan(ns)}\right)^2\right)^{\frac{5}{2}}} \left(\frac{1}{\tan(ns)} j_1 - \frac{1}{\tan(ns)} j_2 + 2j_3 \right)$$

denklemleriyle verilir. Burada j_1, j_2, j_3

$$j_1 = -2 - \left(\frac{1}{\kappa^*}\right)^2 + \frac{1}{\kappa^*} \left(\frac{1}{\kappa^*}\right)',$$

$$j_2 = -2 - \frac{1}{\kappa^*} \left(\frac{1}{\kappa^*}\right)' - 3\left(\frac{1}{\kappa^*}\right)^2 - \left(\frac{1}{\kappa^*}\right)^4,$$

$$j_3 = 2\frac{1}{\kappa^*} + 2\left(\frac{1}{\kappa^*}\right)' + \left(\frac{1}{\kappa^*}\right)^3$$

birer katsayıdır.

İspat. (4.4.7) eğrisinin s^* parametresine göre türevi alınırsa

$$\frac{d\theta_1}{ds^*} \cdot \frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}}(T^{*'} + T'_{T^*})$$

şeklinde olur. Burada (4.4.1) denkleminde $T^{*'}, T'_{T^*}$ yerine karşılıkları yazılırsa

$$(T_{T^*})_{\theta_1} \cdot \frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-T^* + T_{T^*} + \frac{1}{\kappa^*}(T^* \wedge T_{T^*})) \quad (4.4.8)$$

olur. Norm alınırsa $\frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2 + (\frac{1}{\kappa^*})^2}$ şeklinde olur. Bu ifade yerine yazılırsa $\theta_1(s)$ -Smarandache eğrisinin $(T_T)_{\theta_1}$ teğet vektörü

$$(T_{T^*})_{\theta_1} = \frac{1}{\sqrt{2 + (\frac{1}{\kappa^*})^2}}(-T^* + T_{T^*} + \frac{1}{\kappa^*}(T^* \wedge T_{T^*})) \quad (4.4.9)$$

bulunur. Tekrar türev alınırsa

$$(T_{T^*})'_{\theta_1} \cdot \frac{ds^*}{ds} = \frac{\sqrt{2}}{(2 + (\frac{1}{\kappa^*})^2)^2}(j_1 T^* + j_2 T_{T^*} + j_3(T^* \wedge T_{T^*}))$$

olur. (4.4.7) ve (4.4.9) ifadesinden $(T^* \wedge T_{T^*})_{\theta_1}$ vektörü

$$(T^* \wedge T_{T^*})_{\theta_1} = \theta_1 \wedge (T_{T^*})_{\theta_1},$$

$$(T^* \wedge T_{T^*})_{\theta_1} = \frac{1}{\sqrt{4 + 2(\frac{1}{\kappa^*})^2}}(\frac{1}{\kappa^*}T^* - \frac{1}{\kappa^*}T_{T^*} + 2(T^* \wedge T_{T^*}))$$

bulunur. (4.4.1) denkleminde $\theta_1(s)$ -Smarandache eğrisinin $K_g^{\theta_1}$ geodezik eğriliği

$$K_g^{\theta_1} = \frac{1}{(2 + (\frac{1}{\kappa^*})^2)^{\frac{5}{2}}}(j_1 \frac{1}{\kappa^*} - j_2 \frac{1}{\kappa^*} + 2j_3),$$

$$K_g^{\theta_1} = \frac{1}{(2 + (\frac{1}{\tan(ns)})^2)^{\frac{5}{2}}}\left(\frac{1}{\tan(ns)}j_1 - \frac{1}{\tan(ns)}j_2 + 2j_3\right)$$

şeklinde elde edilir. \square

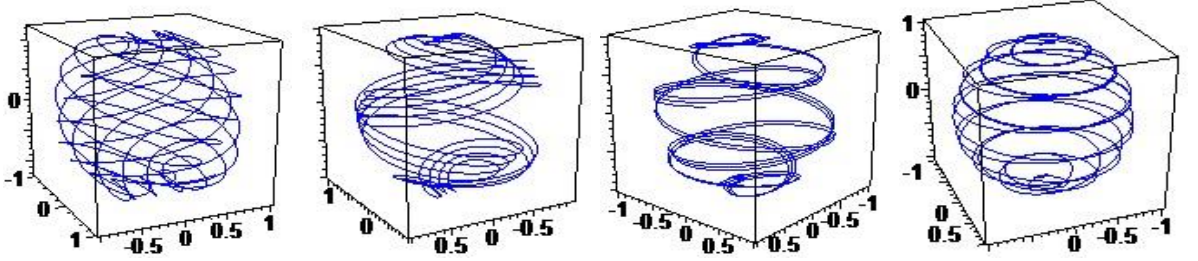
Tanım 4.4.2 Anti-Salkowski eğrisinin teğetler göstergesine ait Sabban çatısı $\{T^*, T_{T^*}, T \wedge T_{T^*}\}$ olsun.

$$\theta_2(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(T^* + (T^* \wedge T_{T^*})) \quad (4.4.10)$$

şeklinde tanımlı $\theta_2(s)$ vektörünün çizdiği regüler eğriye $T^*(T^* \wedge T_{T^*})$ -Smarandache eğrisi denir. Burada T^* , $(T^* \wedge T_{T^*})$ vektörleri (4.4.2) den yerlerine yazılırsa $\theta_2(s)$ -Smarandache eğrisi

$$\theta_2(s) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\cos(s)(\cos(ns) - \sin(ns)) + n \sin(s)(\cos(ns) + \sin(ns)), \sin(s)(\cos(ns) - \sin(ns)) - n \cos(s)(\cos(ns) + \sin(ns)), -\frac{n}{m}(\cos(ns) + \sin(ns)) \right)$$

olur. Burada $m = \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$ değerleri için eğriye ait grafikler Şekil 4.22 de verilmiştir.



Şekil 4.22: $T^*(T^* \wedge T_{T^*})$ -Smarandache eğrisi

Teorem 4.4.2 $\theta_2(s)$ -Smarandache eğrisinin $K_g^{\theta_2}$ geodezik eğriliği

$$K_g^{\theta_2} = 1 + \frac{1}{\tan(ns)}$$

denklemleriyle verilir.

İspat. (4.4.10) eğrisinin s^* parametresine göre türevi alınırsa

$$\frac{d\theta_2}{ds^*} \cdot \frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}}(T^{*'} + (T^* \wedge T_{T^*})')$$

şeklinde olur. Burada (4.4.1) denkleminde $T^{*'}$, $(T^* \wedge T_{T^*})'$ yerine karşılıkları yazılırsa

$$(T_{T^*})_{\theta_2} \cdot \frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}}(T_{T^*} - \frac{1}{\kappa^*}T_{T^*}) \quad (4.4.11)$$

olur. Norm alınırsa $\frac{ds^*}{ds} = \frac{1 - \frac{1}{\kappa^*}}{\sqrt{2}}$ şeklinde olur. Bu ifade yerine yazılırsa $\theta_2(s)$ -Smarandache eğrisinin $(T_T)_{\theta_2}$ teğet vektörü

$$(T_{T^*})_{\theta_2} = T_{T^*} \quad (4.4.12)$$

bulunur. Tekrar türev alınırsa

$$(T_{T^*})'_{\theta_2} \cdot \frac{ds^*}{ds} = -T^* + \frac{1}{\kappa^*}(T^* \wedge T_{T^*})$$

olur. (4.4.10) ve (4.4.12) ifadesinden $(T^* \wedge T_{T^*})_{\theta_2}$ vektörü

$$(T^* \wedge T_{T^*})_{\theta_2} = \theta_2 \wedge (T_{T^*})_{\theta_2},$$

$$(T^* \wedge T_{T^*})_{\theta_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-T^* + (T^* \wedge T_{T^*}))$$

bulunur. (4.4.1) denkleminde $\theta_2(s)$ -Smarandache eğrisinin $K_g^{\theta_2}$ geodezik eğriliği

$$K_g^{\theta_2} = 1 + \frac{1}{\kappa^*}, \quad K_g^{\theta_2} = 1 + \frac{1}{\tan(ns)}$$

şeklinde elde edilir. \square

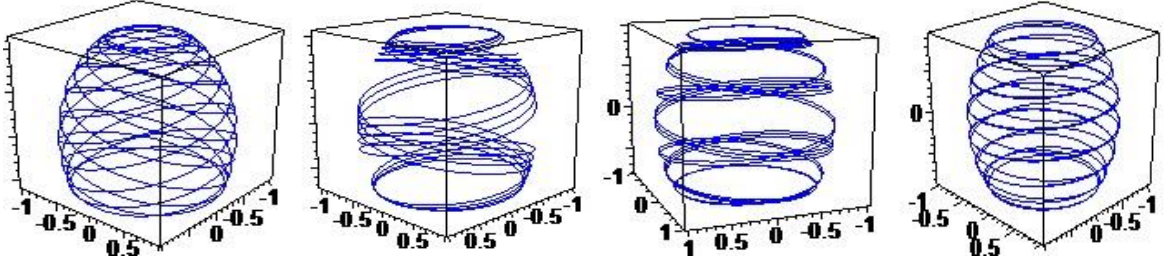
Tanım 4.4.3 Anti-Salkowski eğrisinin teğetler göstergesine ait Sabban çatısı $\{T^*, T_{T^*}, T^* \wedge T_{T^*}\}$ olsun.

$$\theta_3(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(T_{T^*} + (T^* \wedge T_{T^*})) \quad (4.4.13)$$

şeklinde tanımlı $\theta_3(s)$ vektörünün çizdiği regüler eğriye $T_{T^*}(T^* \wedge T_{T^*})$ -Smarandache eğrisi denir. Burada $T_{T^*}, (T^* \wedge T_{T^*})$ vektörleri (4.4.2) den yerlerine yazılırsa $\theta_3(s)$ -Smarandache eğrisi

$$\begin{aligned} \theta_3(s) = \frac{1}{\sqrt{2}} & \left(\cos(s) \cos(ns) + n \sin(s) \sin(ns) + \frac{n}{m} \sin(s), \sin(s) \cos(ns) \right. \\ & \left. -n \cos(s) \sin(ns) - \frac{n}{m} \cos(s), -\frac{n}{m} \sin(ns) + n \right) \end{aligned}$$

olur. Burada $m = \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$ değerleri için eğriye ait grafikler Şekil 4.23 de verilmiştir.



Şekil 4.23: $T_{T^*}(T^* \wedge T_{T^*})$ -Smarandache eğrisi

Teorem 4.4.3 $\theta_3(s)$ -Smarandache eğrisinin $K_g^{\theta_3}$ geodezik eğriliği

$$K_g^{\theta_3} = \frac{1}{(1 + 2(\frac{1}{\tan(ns)})^2)^{\frac{5}{2}}} \left(j_4 2 \frac{1}{\tan(ns)} - j_5 + j_6 \right)$$

denklemleriyle verilir. Burada j_4, j_5, j_6

$$j_4 = 2 \frac{1}{\kappa^*} \left(\frac{1}{\kappa^*} \right)' + \frac{1}{\kappa^*} + 2 \left(\frac{1}{\kappa^*} \right)^3,$$

$$j_5 = -1 - \left(\frac{1}{\kappa^*} \right)' - 3 \left(\frac{1}{\kappa^*} \right)^2 - 2 \left(\frac{1}{\kappa^*} \right)^4,$$

$$j_6 = -\left(\frac{1}{\kappa^*} \right)^2 + \left(\frac{1}{\kappa^*} \right)' - 2 \left(\frac{1}{\kappa^*} \right)^4$$

birer katsayıdır.

İspat. (4.4.13) eğrisinin s^* parametresine göre türevi alınırsa

$$\frac{d\theta_3}{ds^*} \cdot \frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}}(T'_{T^*} + (T^* \wedge T_{T^*})')$$

şeklinde olur. Burada (4.4.1) denkleminde T'_{T^*} , $(T^* \wedge T_{T^*})'$ vektörleri yerlerine yazılırsa

$$(T_{T^*})_{\theta_3} \cdot \frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-T^* - \frac{1}{\kappa^*}T_{T^*} + \frac{1}{\kappa^*}(T^* \wedge T_{T^*})) \quad (4.4.14)$$

olur. Norm alınırsa

$$\frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1 + 2(\frac{1}{\kappa^*})^2}$$

şeklinde olur. Bu ifade yerine yazılırsa $\theta_3(s)$ -Smarandache eğrisinin $(T_T)_{\theta_3}$ teğet vektörü

$$(T_{T^*})_{\theta_3} = \frac{1}{\sqrt{1 + 2(\frac{1}{\kappa^*})^2}}(-T^* - \frac{1}{\kappa^*}T_{T^*} + \frac{1}{\kappa^*}(T^* \wedge T_{T^*})) \quad (4.4.15)$$

bulunur. Tekrar türev alınırsa

$$(T_{T^*})'_{\theta_3} \cdot \frac{ds^*}{ds} = \frac{\sqrt{2}}{(1 + 2(\frac{1}{\kappa^*})^2)^2}(j_4T^* + j_5T_{T^*} + j_6(T^* \wedge T_{T^*})) \quad (4.4.16)$$

olur. (4.4.13) ve (4.4.15) ifadesinden $(T^* \wedge T_{T^*})_{\theta_3}$ vektörü

$$(T^* \wedge T_{T^*})_{\theta_3} = \theta_3 \wedge (T_{T^*})_{\theta_3},$$

$$(T^* \wedge T_{T^*})_{\theta_3} = \frac{1}{\sqrt{2 + 4(\frac{1}{\kappa^*})^2}}(2\frac{1}{\kappa^*}T^* - T_{T^*} + (T^* \wedge T_{T^*}))$$

bulunur. (4.4.1) denkleminde $\theta_3(s)$ -Smarandache eğrisinin $K_g^{\theta_3}$ geodezik eğriliği

$$K_g^{\theta_3} = \frac{1}{(1 + 2(\frac{1}{\kappa^*})^2)^{\frac{5}{2}}}(j_42\frac{1}{\kappa^*} - j_5 + j_6),$$

$$K_g^{\theta_3} = \frac{1}{(1 + 2(\frac{1}{\tan(ns)})^2)^{\frac{5}{2}}}\left(j_42\frac{1}{\tan(ns)} - j_5 + j_6\right)$$

şeklinde elde edilir. \square

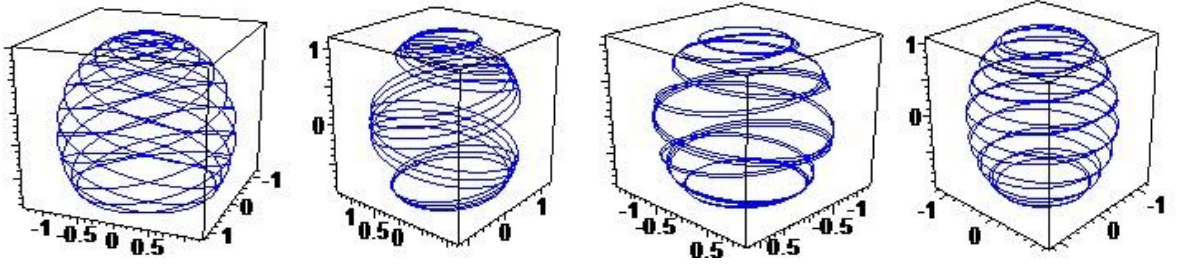
Tanım 4.4.4 Anti-Salkowski eğrisinin teğetler göstergesine ait Sabban çatısı $\{T^*, T_{T^*}, T^* \wedge T_{T^*}\}$ olsun.

$$\theta_4(s) = \frac{1}{\sqrt{3}}(T^* + T_{T^*} + (T^* \wedge T_{T^*})) \quad (4.4.17)$$

şeklinde tanımlı $\theta_4(s)$ vektörünün çizdiği regüler eğriye $T^*T_{T^*}(T^* \wedge T_{T^*})$ -Smarandache eğrisi denir. Burada T^* , T_{T^*} , $(T^* \wedge T_{T^*})$ vektörleri (4.4.2) den yerlerine yazılırsa $\theta_4(s)$ -Smarandache eğrisi

$$\begin{aligned} \theta_4(s) = & \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\cos(s)(\cos(ns) - \sin(ns)) + n \sin(s)(\cos(ns) + \sin(ns)) + \frac{n}{m} \sin(s), \right. \\ & \sin(s)(\cos(ns) - \sin(ns)) - n \cos(s)(\cos(ns) + \sin(ns)) - \frac{n}{m} \cos(s), \\ & \left. - \frac{n}{m}(\cos(ns) + \sin(ns)) + n \right) \end{aligned}$$

olur. Burada $m = \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$ değerleri için eğriye ait grafikler Şekil 4.24 de verilmiştir.



Şekil 4.24: $T^*T_{T^*}(T^* \wedge T_{T^*})$ -Smarandache eğrisi

Teorem 4.4.4 $\theta_4(s)$ -Smarandache eğrisinin $K_g^{\theta_4}$ geodezik eğriliği

$$K_g^{\theta_4} = \frac{\left(j_7 \left(2 \frac{1}{\tan(ns)} - 1 \right) + j_8 \left(-1 - \frac{1}{\tan(ns)} \right) + j_9 \left(2 - \frac{1}{\tan(ns)} \right) \right)}{\left(4\sqrt{2} \left(1 - \frac{1}{\tan(ns)} + \left(\frac{1}{\tan(ns)} \right)^2 \right)^{\frac{5}{2}} \right)}$$

denklemlerle verilir. Burada j_7, j_8, j_9

$$j_7 = -\left(\frac{1}{\kappa^*}\right)' + 2\frac{1}{\kappa^*}\left(\frac{1}{\kappa^*}\right)' - 2 + 4\frac{1}{\kappa^*} - 4\left(\frac{1}{\kappa^*}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{\kappa^*}\right)^3,$$

$$j_8 = -\left(\frac{1}{\kappa^*}\right)' - \frac{1}{\kappa^*}\left(\frac{1}{\kappa^*}\right)' - 2 - 4\left(\frac{1}{\kappa^*}\right)^2 + 2\frac{1}{\kappa^*} + 2\left(\frac{1}{\kappa^*}\right)^3 - 2\left(\frac{1}{\kappa^*}\right)^4,$$

$$j_9 = \frac{1}{\kappa^*}\left(\frac{1}{\kappa^*}\right)' + 2\frac{1}{\kappa^*} - 4\left(\frac{1}{\kappa^*}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{\kappa^*}\right)' + 4\left(\frac{1}{\kappa^*}\right)^3 - 2\left(\frac{1}{\kappa^*}\right)^4$$

birer katsayıdır.

İspat. (4.4.17) eğrisinin s^* parametresine göre türevi alınırsa

$$\frac{d\theta_4}{ds^*} \cdot \frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{\sqrt{3}}(T^{*'} + T'_{T^*} + (T^* \wedge T_{T^*})')$$

şeklinde olur. Burada (4.4.1) denkleminde $T^{*'}, T'_{T^*}, (T^* \wedge T_{T^*})'$ yerine karşılıkları yazılırsa

$$(T_{T^*})_{\theta_4} \cdot \frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{\sqrt{3}}(-T^* + (1 - \frac{1}{\kappa^*})T_{T^*} + \frac{1}{\kappa^*}(T^* \wedge T_{T^*})) \quad (4.4.18)$$

olur. Norm alınırsa

$$\frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{2(1 - \frac{1}{\kappa^*} + (\frac{1}{\kappa^*})^2)}$$

şeklinde olur. Bu ifade yerine yazılırsa $\theta_4(s)$ -Smarandache eğrisinin $(T_T)_{\theta_4}$ teğet vektörü

$$(T_{T^*})_{\theta_4} = \frac{1}{\sqrt{2(1 - \frac{1}{\kappa^*} + (\frac{1}{\kappa^*})^2)}}(-T^* + (1 - \frac{1}{\kappa^*})T_{T^*} + \frac{1}{\kappa^*}(T^* \wedge T_{T^*})) \quad (4.4.19)$$

bulunur. Tekrar türev alınırsa

$$(T_{T^*})'_{\theta_3} \cdot \frac{ds^*}{ds} = \frac{\sqrt{3}}{4(1 - \frac{1}{\kappa^*} + (\frac{1}{\kappa^*})^2)^2}(j_7 T^* + j_8 T_{T^*} + j_9(T^* \wedge T_{T^*}))$$

olur. (4.4.17) ve (4.4.19) ifadesinden $(T^* \wedge T_{T^*})_{\theta_4}$ vektörü

$$(T^* \wedge T_{T^*})_{\theta_4} = \theta_4 \wedge (T_{T^*})_{\theta_4},$$

$$(T^* \wedge T_{T^*})_{\theta_4} = \frac{1}{\sqrt{6(1 - \frac{1}{\kappa^*} + (\frac{1}{\kappa^*})^2)}}((-1 + 2\frac{1}{\kappa^*})T^* + (-1 - \frac{1}{\kappa^*})T_{T^*} + (2 - \frac{1}{\kappa^*})(T^* \wedge T_{T^*}))$$

bulunur. (4.4.1) denkleminde $\theta_4(s)$ -Smarandache eğrisinin $K_g^{\theta_4}$ geodezik eğriliği

$$K_g^{\theta_4} = \frac{\left(j_7(2\frac{1}{\kappa^*} - 1) + j_8(-1 - \frac{1}{\kappa^*}) + j_9(2 - K_g^{T^*}) \right)}{(4\sqrt{2}(1 - \frac{1}{\kappa^*} + (\frac{1}{\kappa^*})^2)^2)^{\frac{5}{2}}},$$

$$K_g^{\theta_4} = \frac{\left(j_7(2\frac{1}{\tan(ns)} - 1) + j_8(-1 - \frac{1}{\tan(ns)}) + j_9(2 - \frac{1}{\tan(ns)}) \right)}{(4\sqrt{2}(1 - \frac{1}{\tan(ns)} + (\frac{1}{\tan(ns)})^2)^2)^{\frac{5}{2}}}$$

şeklinde elde edilir. \square

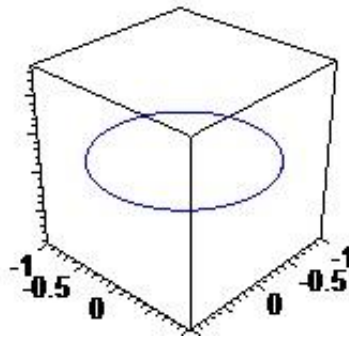
Tanım 4.4.5 Anti-Salkowski eğrisinin aslinormaller göstergesine ait Sabban çatısı $\{N^*, T_{N^*}, N^* \wedge T_{N^*}\}$ olsun.

$$\phi_1(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(N^* + T_{N^*}) \quad (4.4.20)$$

şeklinde tanımlı $\phi_1(s)$ vektörünün çizdiği regüler eğriye $N^*T_{N^*}$ -Smarandache eğrisi denir. Burada N^* , T_{N^*} vektörleri (4.4.4) den yerlerine yazılırsa $\phi_1(s)$ -Smarandache eğrisi

$$\begin{aligned} \phi_1(s) = & \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\frac{\tan(ns)}{\sqrt{\tan^2(ns) + 1}}(-\cos(s)\sin(ns) + n\sin(s)\cos(ns)) + \frac{n\sin(s)}{m} \right. \\ & - \cos(s)\cos(ns) - n\sin(s)\sin(ns), -\sin(s)\cos(ns) + n\cos(s)\sin(ns) \\ & - \frac{\tan(ns)}{\sqrt{\tan^2(ns) + 1}}(-\sin(s)\sin(ns) - n\cos(s)\cos(ns)) - \frac{n\cos(s)}{m}, \\ & \left. \frac{n\tan(ns)}{m\sqrt{\tan^2(ns) + 1}}\cos(ns) + n \right), \end{aligned}$$

olur. Burada eğriye ait grafik Şekil 4.25 de verilmiştir.



Şekil 4.25: $N^*T_{N^*}$ -Smarandache eğrisi

Teorem 4.4.5 $\phi_1(s)$ -Smarandache eğrisinin $K_g^{\phi_1}$ geodezik eğriliği

$$K_g^{\phi_1} = \frac{\left(\frac{-\tan(ns)'}{\sqrt{\tan(ns)^2 + 1}} j_{10} - \frac{-\tan(ns)'}{\sqrt{\tan(ns)^2 + 1}} j_{11} + 2j_{12} \right)}{\left(2 + \left(\frac{-\tan(ns)'}{\sqrt{\tan(ns)^2 + 1}} \right)^2 \right)^{\frac{5}{2}}}$$

denklemlerle verilir. Burada j_{10}, j_{11}, j_{12}

$$\begin{aligned} j_{10} &= -2 - \left(\frac{-\kappa^{*'}}{\sqrt{\kappa^{*2} + 1}} \right)^2 + \frac{-\kappa^{*'}}{\sqrt{\kappa^{*2} + 1}} \left(\frac{-\kappa^{*'}}{\sqrt{\kappa^{*2} + 1}} \right)', \\ j_{11} &= -2 - \frac{-\kappa^{*'}}{\sqrt{\kappa^{*2} + 1}} \left(\frac{-\kappa^{*'}}{\sqrt{\kappa^{*2} + 1}} \right)' - 3 \left(\frac{-\kappa^{*'}}{\sqrt{\kappa^{*2} + 1}} \right)^2 - \left(\frac{-\kappa^{*'}}{\sqrt{\kappa^{*2} + 1}} \right)^4, \\ j_{12} &= 2 \frac{-\kappa^{*'}}{\sqrt{\kappa^{*2} + 1}} + 2 \left(\frac{-\kappa^{*'}}{\sqrt{\kappa^{*2} + 1}} \right)' + \left(\frac{-\kappa^{*'}}{\sqrt{\kappa^{*2} + 1}} \right)^3 \end{aligned}$$

birer katsayıdır.

İspat. (4.4.20) eğrisinin s^* parametresine göre türevi alınırsa

$$\frac{d\phi_1}{ds^*} \cdot \frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}} (N^{*'} + T'_{N^*})$$

şeklinde olur. $N^{*'}$ ve T'_{N^*} yerine (4.4.3) den karşılıkları yazılırsa

$$(T_{N^*})_{\phi_1} \cdot \frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-N^* + T_{N^*} + \frac{-\kappa^{*'}}{\sqrt{\kappa^{*2} + 1}} (N^* \wedge T_{N^*}) \right) \quad (4.4.21)$$

olur. Norm alınırsa

$$\frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2 + \left(\frac{-\kappa^{*'}}{\sqrt{\kappa^{*2} + 1}} \right)^2}$$

şeklinde olur. Bu ifade yerine yazılırsa $\phi_1(s)$ -Smarandache eğrisinin $(T_{N^*})_{\phi_1}$ teğet vektörü

$$(T_{N^*})_{\phi_1} = \frac{1}{\sqrt{2 + \left(\frac{-\kappa^{*'}}{\sqrt{\kappa^{*2}+1}}\right)^2}} \left(-N^* + T_{N^*} + \frac{-\kappa^{*'}}{\sqrt{\kappa^{*2}+1}}(N^* \wedge T_{N^*})\right) \quad (4.4.22)$$

bulunur. Tekrar türev alınırsa

$$(T_{N^*})'_{\phi_1} \cdot \frac{ds^*}{ds} = \frac{\sqrt{2}}{\left(2 + \left(\frac{-\kappa^{*'}}{\sqrt{\kappa^{*2}+1}}\right)^2\right)^2} (j_{10}N^* + j_{11}T_{N^*} + j_{12}(N^* \wedge T_{N^*}))$$

olur. (4.4.20) ve (4.4.22) ifadesinden $(N^* \wedge T_{N^*})_{\phi_1}$ vektörü

$$(N^* \wedge T_{N^*})_{\phi_1} = \phi_1 \wedge (T_{N^*})_{\phi_1},$$

$$(N^* \wedge T_{N^*})_{\phi_1} = \frac{1}{\sqrt{4 + 2\left(\frac{-\kappa^{*'}}{\sqrt{\kappa^{*2}+1}}\right)^2}} \left(\frac{-\kappa^{*'}}{\sqrt{\kappa^{*2}+1}}N^* - \frac{-\kappa^{*'}}{\sqrt{\kappa^{*2}+1}}T_{N^*} + 2(N^* \wedge T_{N^*})\right)$$

bulunur. (4.4.3) denkleminde $\phi_1(s)$ -Smarandache eğrisinin $K_g^{\phi_1}$ geodezik eğriliği

$$K_g^{\phi_1} = \frac{\left(\frac{-\kappa^{*'}}{\sqrt{\kappa^{*2}+1}}j_{10} - \frac{-\kappa^{*'}}{\sqrt{\kappa^{*2}+1}}j_{11} + 2j_{12}\right)}{\left(2 + \left(\frac{-\kappa^{*'}}{\sqrt{\kappa^{*2}+1}}\right)^2\right)^{\frac{5}{2}}},$$

$$K_g^{\phi_1} = \frac{\left(\frac{-\tan(ns)'}{\sqrt{\tan(ns)^2+1}}j_{10} - \frac{-\tan(ns)'}{\sqrt{\tan(ns)^2+1}}j_{11} + 2j_{12}\right)}{\left(2 + \left(\frac{-\tan(ns)'}{\sqrt{\tan(ns)^2+1}}\right)^2\right)^{\frac{5}{2}}}$$

şeklinde elde edilir. \square

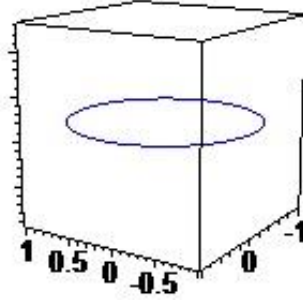
Tanım 4.4.6 Anti-Salkowski eğrisinin aslinormaller göstergesine ait Sabban çatısı $\{N^*, T_{N^*}, N^* \wedge T_{N^*}\}$ olsun.

$$\phi_2(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(N^* + (N^* \wedge T_{N^*})) \quad (4.4.23)$$

şeklinde tanımlı $\phi_2(s)$ vektörünün çizdiği regüler eğriye $N^*(N^* \wedge T_{N^*})$ -Smarandache eğrisi denir. Burada N^* , $(N^* \wedge T_{N^*})$ vektörleri (4.4.4) den yerlerine yazılırsa $\phi_2(s)$ -Smarandache eğrisi

$$\begin{aligned} \phi_2(s) = & \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\tan(ns)}{\sqrt{\tan^2(ns) + 1}} (-\cos(s) \cos(ns) - n \sin(s) \sin(ns)) \right. \\ & - \cos(s) \sin(ns) + n \sin(s) \cos(ns) + \frac{n \sin(s)}{m}, -\sin(s) \sin(ns) \\ & + \frac{\tan(ns)}{\sqrt{\tan^2(ns) + 1}} (-\sin(s) \cos(ns) + n \cos(s) \sin(ns)) - n \cos(s) \cos(ns) \\ & \left. - \frac{n \cos(s)}{m}, \frac{n \tan(ns)}{m \sqrt{\tan^2(ns) + 1}} \sin(ns) - \frac{n}{m} \cos(ns) + n \right) \end{aligned}$$

olur. Burada eğriye ait grafik Şekil 4.26 de verilmiştir.



Şekil 4.26: $N^*(N^* \wedge T_{N^*})$ -Smarandache eğrisi

Teorem 4.4.6 $\phi_2(s)$ -Smarandache eğrisinin $K_g^{\phi_2}$ geodezik eğriliği

$$K_g^{\phi_2} = 1 + \frac{-\tan(ns)'}{\sqrt{\tan^2(ns) + 1}}$$

denklemleriyle verilir.

İspat. (4.4.23) eğrisinin s^* parametresine göre türevi alınırsa

$$\frac{d\phi_2}{ds^*} \cdot \frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}}(N^{*'} + (N^* \wedge T_{N^*})')$$

şeklinde olur. $N^{*'}$ ve $(N^* \wedge T_{N^*})'$ yerine (4.4.3) den karşılıkları yazılırsa

$$(T_{N^*})_{\phi_2} \cdot \frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}}(T_{N^*} - \frac{-\kappa^{*'}}{\sqrt{\kappa^{*2} + 1}}T_{N^*}) \quad (4.4.24)$$

olur. Norm alınırsa

$$\frac{ds^*}{ds} = \frac{1 - \frac{-\kappa^{*'}}{\sqrt{\kappa^{*2} + 1}}}{\sqrt{2}}$$

şeklinde olur. Bu ifade yerine yazılırsa $\phi_2(s)$ -Smarandache eğrisinin $(T_{N^*})_{\phi_2}$ teğet vektörü

$$(T_{N^*})_{\phi_2} = T_{N^*} \quad (4.4.25)$$

bulunur. Tekrar norm alınırsa

$$(T_{N^*})'_{\phi_2} \cdot \frac{ds^*}{ds} = -N^* + \frac{-\kappa^{*'}}{\sqrt{\kappa^{*2} + 1}}(N^* \wedge T_{N^*})$$

olur. (4.4.23) ve (4.4.25) ifadesinden $(N^* \wedge T_{N^*})_{\phi_2}$ vektörü

$$(N^* \wedge T_{N^*})_{\phi_2} = \phi_2 \wedge (T_{N^*})_{\phi_2},$$

$$(N^* \wedge T_{N^*})_{\phi_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-N^* + (N^* \wedge T_{N^*}))$$

bulunur. (4.4.3) denkleminde $\phi_2(s)$ -Smarandache eğrisinin $K_g^{\phi_2}$ geodezik eğriliği

$$K_g^{\phi_2} = 1 + \frac{-\kappa^{*'}}{\sqrt{\kappa^{*2} + 1}}, \quad K_g^{\phi_2} = 1 + \frac{-\tan(ns)'}{\sqrt{\tan(ns)^2 + 1}}$$

şeklinde elde edilir. \square

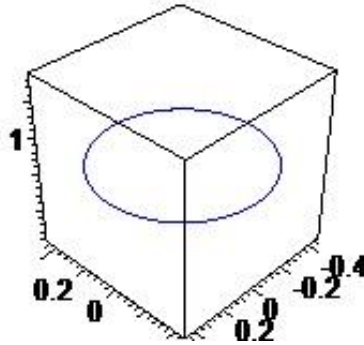
Tanım 4.4.7 Anti-Salkowski eğrisinin aslinormaller göstergesine ait Sabban çatısı $\{N^*, T_{N^*}, N^* \wedge T_{N^*}\}$ olsun.

$$\phi_3(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(T_{N^*} + (N^* \wedge T_{N^*})) \quad (4.4.26)$$

şeklinde tanımlı $\phi_3(s)$ vektörünün çizdiği regüler eğriye $T_{N^*}(N^* \wedge T_{N^*})$ -Smarandache eğrisi denir. Burada $T_{N^*}, (N^* \wedge T_{N^*})$ vektörleri (4.4.4) den yerlerine yazılırsa $\phi_3(s)$ -Smarandache eğrisi

$$\begin{aligned} \phi_3(s) = & \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\cos(s) \cos(ns) - n \sin(s) \sin(ns) - \cos(s) \sin(ns) \right. \\ & + \frac{\tan(ns)}{\sqrt{\tan^2(ns) + 1}} (-\cos(s) \cos(ns) - n \sin(s) \sin(ns)) \\ & - \frac{\tan(ns)}{\sqrt{\tan^2(ns) + 1}} (-\cos(s) \sin(ns) + n \sin(s) \cos(ns)) + n \sin(s) \cos(ns), \\ & \frac{\tan(ns)}{\sqrt{\tan^2(ns) + 1}} (-\sin(s) \cos(ns) + n \cos(s) \sin(ns)) - \sin(s) \sin(ns) \\ & - n \cos(s) \cos(ns) - \sin(s) \cos(ns) + n \cos(s) \sin(ns) \\ & - \frac{\tan(ns)}{\sqrt{\tan^2(ns) + 1}} (-\sin(s) \sin(ns) - n \cos(s) \cos(ns)), \\ & \left. \frac{n \tan(ns)}{m \sqrt{\tan^2(ns) + 1}} (\cos(ns) + \sin(ns)) - \frac{n}{m} \cos(ns) \right) \end{aligned}$$

olur. Burada eğriye ait grafik Şekil 4.27 de verilmiştir.



Şekil 4.27: $T_{N^*}(N^* \wedge T_{N^*})$ -Smarandache eğrisi

Teorem 4.4.7 $\phi_3(s)$ -Smarandache eğrisinin $K_g^{\phi_3}$ geodezik eğriliği

$$K_g^{\phi_3} = \frac{1}{\left(1 + 2\left(\frac{-\tan(ns)'}{\sqrt{\tan(ns)^2 + 1}}\right)^2\right)^{\frac{5}{2}}} \left(2 \frac{-\tan(ns)'}{\sqrt{\tan(ns)^2 + 1}} j_{13} - j_{14} + j_{15} \right)$$

denklemleriyle verilir. Burada j_{13}, j_{14}, j_{15}

$$\begin{aligned} j_{13} &= 2 \frac{-\kappa^{*'}}{\sqrt{\kappa^{*2} + 1}} \left(\frac{-\kappa^{*'}}{\sqrt{\kappa^{*2} + 1}} \right)' + \frac{-\kappa^{*'}}{\sqrt{\kappa^{*2} + 1}} + 2 \left(\frac{-\kappa^{*'}}{\sqrt{\kappa^{*2} + 1}} \right)^3, \\ j_{14} &= -1 - \left(\frac{-\kappa^{*'}}{\sqrt{\kappa^{*2} + 1}} \right)' - 3 \left(\frac{-\kappa^{*'}}{\sqrt{\kappa^{*2} + 1}} \right)^2 - 2 \left(\frac{-\kappa^{*'}}{\sqrt{\kappa^{*2} + 1}} \right)^4, \\ j_{15} &= - \left(\frac{-\kappa^{*'}}{\sqrt{\kappa^{*2} + 1}} \right)^2 + 2 \left(\frac{-\kappa^{*'}}{\sqrt{\kappa^{*2} + 1}} \right)' - 2 \left(\frac{-\kappa^{*'}}{\sqrt{\kappa^{*2} + 1}} \right)^4 \end{aligned}$$

birer katsayıdır.

İspat. (4.4.26) eğrisinin s^* parametresine göre türevi alınır

$$\frac{d\phi_3}{ds^*} \cdot \frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}} (T'_{N^*} + (N^* \wedge T_{N^*})')$$

şeklinde olur. T'_{N^*} ve $(N^* \wedge T_{N^*})'$ yerine (4.4.3) den karşılıkları yazılırsa

$$(T_{N^*})_{\phi_3} \cdot \frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-N^* - \frac{-\kappa^{*'}}{\sqrt{\kappa^{*2} + 1}} T_{N^*} + \frac{-\kappa^{*'}}{\sqrt{\kappa^{*2} + 1}} (N^* \wedge T_{N^*}) \right) \quad (4.4.27)$$

olur. Norm alınır

$$\frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + 2 \left(\frac{-\kappa^{*'}}{\sqrt{\kappa^{*2} + 1}} \right)^2}$$

şeklinde olur. Bu ifade yerine yazılırsa $\phi_3(s)$ -Smarandache eğrisinin $(T_{N^*})_{\phi_3}$ teğet vektörü

$$(T_{N^*})_{\phi_3} = \frac{1}{\sqrt{1 + 2\left(\frac{-\kappa^{*'}}{\sqrt{\kappa^{*2}+1}}\right)^2}} \left(-N^* - \frac{-\kappa^{*'}}{\sqrt{\kappa^{*2}+1}} T_{N^*} + \frac{-\kappa^{*'}}{\sqrt{\kappa^{*2}+1}} (N^* \wedge T_{N^*}) \right) \quad (4.4.28)$$

bulunur. Tekrar norm alınırsa

$$(T_{N^*})'_{\phi_3} \cdot \frac{ds^*}{ds} = \frac{\sqrt{2}}{\left(1 + 2\left(\frac{-\kappa^{*'}}{\sqrt{\kappa^{*2}+1}}\right)^2\right)^2} (j_{13}N^* + j_{14}T_{N^*} + j_{15}(N^* \wedge T_{N^*}))$$

olur. (4.4.26) ve (4.4.28) ifadesinden $(N^* \wedge T_{N^*})_{\phi_3}$ vektörü

$$(N^* \wedge T_{N^*})_{\phi_3} = \phi_3 \wedge (T_{N^*})_{\phi_3},$$

$$(N^* \wedge T_{N^*})_{\phi_3} = \frac{1}{\sqrt{2 + 4\left(\frac{-\kappa^{*'}}{\sqrt{\kappa^{*2}+1}}\right)^2}} \left(2\frac{-\kappa^{*'}}{\sqrt{\kappa^{*2}+1}} N^* - T_{N^*} + (N^* \wedge T_{N^*}) \right)$$

bulunur. (4.4.3) denkleminde $\phi_3(s)$ -Smarandache eğrisinin $K_g^{\phi_3}$ geodezik eğriliği

$$K_g^{\phi_3} = \frac{1}{\left(1 + 2\left(\frac{-\kappa^{*'}}{\sqrt{\kappa^{*2}+1}}\right)^2\right)^{\frac{5}{2}}} \left(2\frac{-\kappa^{*'}}{\sqrt{\kappa^{*2}+1}} j_{13} - j_{14} + j_{15} \right),$$

$$K_g^{\phi_3} = \frac{1}{\left(1 + 2\left(\frac{-\tan(ns)'}{\sqrt{\tan(ns)^2+1}}\right)^2\right)^{\frac{5}{2}}} \left(2\frac{-\tan(ns)'}{\sqrt{\tan(ns)^2+1}} j_{13} - j_{14} + j_{15} \right)$$

şeklinde elde edilir. \square

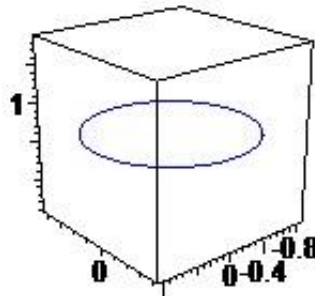
Tanım 4.4.8 Anti-Salkowski eğrisinin aslinormaller göstergesine ait Sabban çatısı $\{N^*, T_{N^*}, N^* \wedge T_{N^*}\}$ olsun.

$$\phi_4(s) = \frac{1}{\sqrt{3}}(N^* + T_{N^*} + (N^* \wedge T_{N^*})) \quad (4.4.29)$$

şeklinde tanımlı $\phi_4(s)$ vektörünün çizdiği regüler eğriye $N^*T_{N^*}(N^* \wedge T_{N^*})$ -Smarandache eğrisi denir. Burada N^* , T_{N^*} , $(N^* \wedge T_{N^*})$ vektörleri (4.4.4) den yerlerine yazılırsa $\phi_4(s)$ -Smarandache eğrisi

$$\begin{aligned} \phi_4(s) = & \frac{1}{\sqrt{3}} \left(-\cos(s) \cos(ns) - n \sin(s) \sin(ns) - \cos(s) \sin(ns) \right. \\ & + \frac{\tan(ns)}{\sqrt{\tan^2(ns) + 1}} (-\cos(s) \cos(ns) - n \sin(s) \sin(ns)) + \frac{n \sin(s)}{m} \\ & - \frac{\tan(ns)}{\sqrt{\tan^2(ns) + 1}} (-\cos(s) \sin(ns) + n \sin(s) \cos(ns)) + n \sin(s) \cos(ns), \\ & \frac{\tan(ns)}{\sqrt{\tan^2(ns) + 1}} (-\sin(s) \cos(ns) + n \cos(s) \sin(ns)) - \sin(s) \sin(ns) \\ & - n \cos(s) \cos(ns) - \sin(s) \cos(ns) + n \cos(s) \sin(ns) \\ & - \frac{\tan(ns)}{\sqrt{\tan^2(ns) + 1}} (-\sin(s) \sin(ns) - n \cos(s) \cos(ns)) - \frac{n \cos(s)}{m}, \\ & \left. \frac{n \tan(ns)}{m \sqrt{\tan^2(ns) + 1}} (\cos(ns) + \sin(ns)) - \frac{n}{m} \cos(ns) + n \right) \end{aligned}$$

olur. Burada eğriye ait grafik Şekil 4.28 de verilmiştir.



Şekil 4.28: $N^*T_{N^*}(N^* \wedge T_{N^*})$ -Smarandache eğrisi

Teorem 4.4.8 $\phi_4(s)$ -Smarandache eğrisinin $K_g^{\phi_4}$ geodezik eğriliği

$$K_g^{\phi_4} = \frac{\left(j_{16} \left(2 \frac{-\tan(ns)'}{\sqrt{\tan(ns)^2+1}} - 1 \right) + j_{17} \left(-1 - \frac{-\tan(ns)'}{\sqrt{\tan(ns)^2+1}} \right) + j_{18} \left(2 - \frac{-\tan(ns)'}{\sqrt{\tan(ns)^2+1}} \right) \right)}{\left(4\sqrt{2} \left(1 - \frac{-\tan(ns)'}{\sqrt{\tan(ns)^2+1}} + \frac{-\tan(ns)'}{\sqrt{\tan(ns)^2+1}} \right)^2 \right)^{\frac{5}{2}}}$$

denklemlerle verilir. Burada j_{16} , j_{17} , j_{18}

$$j_{16} = -\left(\frac{-\kappa^{*'}}{\sqrt{\kappa^{*2}+1}} \right)' + 2 \frac{-\kappa^{*'}}{\sqrt{\kappa^{*2}+1}} \left(\frac{-\kappa^{*'}}{\sqrt{\kappa^{*2}+1}} \right)' - 2 + 4 \frac{-\kappa^{*'}}{\sqrt{\kappa^{*2}+1}} - 4 \left(\frac{-\kappa^{*'}}{\sqrt{\kappa^{*2}+1}} \right)^2 + 2 \left(\frac{-\kappa^{*'}}{\sqrt{\kappa^{*2}+1}} \right)^3,$$

$$j_{17} = -\left(\frac{-\kappa^{*'}}{\sqrt{\kappa^{*2}+1}} \right)' - \frac{-\kappa^{*'}}{\sqrt{\kappa^{*2}+1}} \left(\frac{-\kappa^{*'}}{\sqrt{\kappa^{*2}+1}} \right)' - 2 - 4 \left(\frac{-\kappa^{*'}}{\sqrt{\kappa^{*2}+1}} \right)^2 + 2 \frac{-\kappa^{*'}}{\sqrt{\kappa^{*2}+1}} + 2 \left(\frac{-\kappa^{*'}}{\sqrt{\kappa^{*2}+1}} \right)^3 - 2 \left(\frac{-\kappa^{*'}}{\sqrt{\kappa^{*2}+1}} \right)^4,$$

$$j_{18} = \frac{-\kappa^{*'}}{\sqrt{\kappa^{*2}+1}} \left(\frac{-\kappa^{*'}}{\sqrt{\kappa^{*2}+1}} \right)' + 2 \frac{-\kappa^{*'}}{\sqrt{\kappa^{*2}+1}} - 4 \left(\frac{-\kappa^{*'}}{\sqrt{\kappa^{*2}+1}} \right)^2 + 2 \left(\frac{-\kappa^{*'}}{\sqrt{\kappa^{*2}+1}} \right)' + 4 \left(\frac{-\kappa^{*'}}{\sqrt{\kappa^{*2}+1}} \right)^3 - 2 \left(\frac{-\kappa^{*'}}{\sqrt{\kappa^{*2}+1}} \right)^4$$

birer katsayıdır.

İspat. (4.4.29) eğrisinin s^* parametresine göre türevi alınır

$$\frac{d\phi_4}{ds^*} \cdot \frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{\sqrt{3}} (N^{*'} + T'_{N^*} + (N^* \wedge T_{N^*})')$$

şeklinde olur. $N^{*'}$, T'_{N^*} ve $(N^* \wedge T_{N^*})'$ yerine (4.4.3) den karşılıkları yazılırsa

$$(T_{N^*})_{\phi_4} \cdot \frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(-N^* + \left(1 - \frac{-\kappa^{*'}}{\sqrt{\kappa^{*2}+1}} \right) T_{N^*} + \frac{-\kappa^{*'}}{\sqrt{\kappa^{*2}+1}} (N^* \wedge T_{N^*}) \right) \quad (4.4.30)$$

olur. Norm alınır

$$\frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{2 \left(1 - \frac{-\kappa^{*'}}{\sqrt{\kappa^{*2}+1}} + \left(\frac{-\kappa^{*'}}{\sqrt{\kappa^{*2}+1}} \right)^2 \right)}$$

şeklinde olur. Bu ifade yerine yazılırsa $\phi_4(s)$ -Smarandache eğrisinin $(T_{N^*})_{\phi_4}$ teğet vektörü

$$(T_{N^*})_{\phi_4} = \frac{1}{\sqrt{2\left(1 - \frac{-\kappa^{*'}}{\sqrt{\kappa^{*2}+1}} + \left(\frac{-\kappa^{*'}}{\sqrt{\kappa^{*2}+1}}\right)^2\right)}} \left(-N^* + \left(1 - \frac{-\kappa^{*'}}{\sqrt{\kappa^{*2}+1}}\right)T_{N^*} + \frac{-\kappa^{*'}}{\sqrt{\kappa^{*2}+1}}(N^* \wedge T_{N^*})\right) \quad (4.4.31)$$

bulunur. Tekrar türev alınırsa

$$(T_{N^*})'_{\phi_3} \cdot \frac{ds^*}{ds} = \frac{\sqrt{3}}{4\left(1 - \frac{-\kappa^{*'}}{\sqrt{\kappa^{*2}+1}} + \left(\frac{-\kappa^{*'}}{\sqrt{\kappa^{*2}+1}}\right)^2\right)^2} (j_{16}N^* + j_{17}T_{N^*} + j_{18}(N^* \wedge T_{N^*}))$$

olur. (4.4.29) ve (4.4.31) ifadesinden $(N^* \wedge T_{N^*})_{\phi_4}$ vektörü

$$(N^* \wedge T_{N^*})_{\phi_4} = \phi_4 \wedge (T_{N^*})_{\phi_4},$$

$$(N^* \wedge T_{N^*})_{\phi_4} = \frac{\left((-1 + 2\frac{-\kappa^{*'}}{\sqrt{\kappa^{*2}+1}}\right)N^* + \left(-1 - \frac{-\kappa^{*'}}{\sqrt{\kappa^{*2}+1}}\right)T_{N^*} + \left(2 - \frac{-\kappa^{*'}}{\sqrt{\kappa^{*2}+1}}\right)(N^* \wedge T_{N^*})}{\sqrt{6\left(1 - \frac{-\kappa^{*'}}{\sqrt{\kappa^{*2}+1}} + \left(\frac{-\kappa^{*'}}{\sqrt{\kappa^{*2}+1}}\right)^2\right)}}$$

bulunur. (4.4.3) denkleminde $\phi_4(s)$ -Smarandache eğrisinin $K_g^{\phi_4}$ geodezik eğriliği

$$K_g^{\phi_4} = \frac{\left(j_{16}\left(2\frac{-\kappa^{*'}}{\sqrt{\kappa^{*2}+1}} - 1\right) + j_{17}\left(-1 - \frac{-\kappa^{*'}}{\sqrt{\kappa^{*2}+1}}\right) + j_{18}\left(2 - \frac{-\kappa^{*'}}{\sqrt{\kappa^{*2}+1}}\right)\right)}{\left(4\sqrt{2}\left(1 - \frac{-\kappa^{*'}}{\sqrt{\kappa^{*2}+1}} + \frac{-\kappa^{*'}}{\sqrt{\kappa^{*2}+1}}\right)^2\right)^{\frac{5}{2}}},$$

$$K_g^{\phi_4} = \frac{\left(j_{16}\left(2\frac{-\tan(ns)'}{\sqrt{\tan(ns)^2+1}} - 1\right) + j_{17}\left(-1 - \frac{-\tan(ns)'}{\sqrt{\tan(ns)^2+1}}\right) + j_{18}\left(2 - \frac{-\tan(ns)'}{\sqrt{\tan(ns)^2+1}}\right)\right)}{\left(4\sqrt{2}\left(1 - \frac{-\tan(ns)'}{\sqrt{\tan(ns)^2+1}} + \frac{-\tan(ns)'}{\sqrt{\tan(ns)^2+1}}\right)^2\right)^{\frac{5}{2}}}$$

şeklinde elde edilir. \square

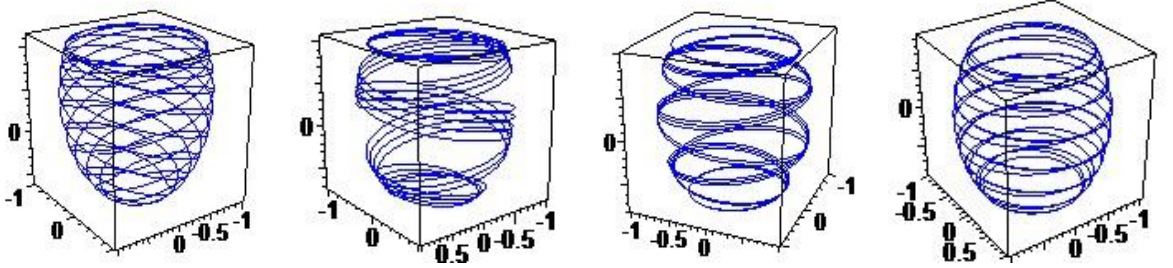
Tanım 4.4.9 Anti-Salkowski eğrisinin binormaller göstergesine ait Sabban çatısı $\{B^*, T_{B^*}, B^* \wedge T_{B^*}\}$ olsun.

$$\omega_1(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(B^* + T_{B^*}) \quad (4.4.32)$$

şeklinde tanımlı $\omega_1(s)$ vektörünün çizdiği regüler eğriye $B^*T_{B^*}$ -Smarandache eğrisi denir. Burada B^*, T_{B^*} vektörleri (4.4.6) den yerlerine yazılırsa $\omega_1(s)$ -Smarandache eğrisi

$$\begin{aligned} \omega_1(s) = \frac{1}{\sqrt{2}} & \left(-\cos(s) \cos(ns) - n \sin(s) \sin(ns) + \frac{n}{m} \sin(s), \right. \\ & \left. -\sin(s) \cos(ns) - n \cos(s) \sin(ns) - \frac{n}{m} \cos(s), \frac{n}{m} \sin(ns) + n \right) \end{aligned}$$

olur. Burada $m = \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$ değerleri için eğriye ait grafikler Şekil 4.29 de verilmiştir.



Şekil 4.29: $B^*T_{B^*}$ -Smarandache eğrisi

Teorem 4.4.9 $\omega_1(s)$ -Smarandache eğrisinin $K_g^{\omega_1}$ geodezik eğriliği

$$K_g^{\omega_1} = \frac{1}{(2 + (\tan(ns))^2)^{\frac{5}{2}}} (j_{19} \tan(ns) - j_{20} \tan(ns) + 2j_{21})$$

denklemleriyle verilir. Burada j_{19}, j_{20}, j_{21}

$$\begin{aligned} j_{19} &= -2 - (\kappa^*)^2 + \kappa^*(\kappa^*)', \\ j_{20} &= -2 - \kappa^*(\kappa^*)' - 3(\kappa^*)^2 - (\kappa^*)^4, \\ j_{21} &= 2\kappa^* + 2(\kappa^*)' + (\kappa^*)^3 \end{aligned}$$

birer katsayıdır.

İspat. (4.4.32) eğrisinin s^* parametresine göre türevi alınırsa

$$\frac{d\omega_1}{ds^*} \cdot \frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}}(B^{*'} + T'_{B^*})$$

şeklinde olur. $B^{*'}$ ve T'_{B^*} yerine (4.4.5) den karşılıkları yazılırsa

$$(T_{B^*})_{\omega_1} \cdot \frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-B^* + T_{B^*} + \kappa^*(B^* \wedge T_{B^*})) \quad (4.4.33)$$

olur. Norm alınırsa

$$\frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2 + (K_g^{B^*})^2}$$

şeklinde olur. Bu ifade yerine yazılırsa $\omega_1(s)$ -Smarandache eğrisinin $(T_{B^*})_{\omega_1}$ teğet vektörü

$$(T_{B^*})_{\omega_1} = \frac{1}{\sqrt{2 + (\kappa^*)^2}}(-B^* + T_{N^*} + \kappa^*(B^* \wedge T_{B^*})) \quad (4.4.34)$$

bulunur. Tekrar türev alınırsa

$$(T_{B^*})'_{\omega_1} \cdot \frac{ds^*}{ds} = \frac{\sqrt{2}}{(2 + (\kappa^*)^2)^2}(j_{19}B^* + j_{20}T_{B^*} + j_{21}(B^* \wedge T_{B^*}))$$

olur. (4.4.32) ve (4.4.34) ifadesinden $(B^* \wedge T_{B^*})_{\omega_1}$ vektörü

$$(B^* \wedge T_{B^*})_{\omega_1} = \omega_1 \wedge (T_{B^*})_{\omega_1},$$

$$(B^* \wedge T_{B^*})_{\omega_1} = \frac{1}{\sqrt{4 + 2(\kappa^*)^2}}(\kappa^*N - \kappa^*T_{B^*} + 2(B^* \wedge T_{B^*}))$$

bulunur. (4.4.5) denkleminde $\omega_1(s)$ -Smarandache eğrisinin $K_g^{\omega_1}$ geodezik eğriliği

$$K_g^{\omega_1} = \frac{1}{(2 + (\kappa^*)^2)^{\frac{5}{2}}}(j_{19}\kappa^* - j_{20}\kappa^* + 2j_{21}),$$

$$K_g^{\omega_1} = \frac{1}{(2 + (\tan(ns))^2)^{\frac{5}{2}}}(j_{19} \tan(ns) - j_{20} \tan(ns) + 2j_{21})$$

şeklinde elde edilir. \square

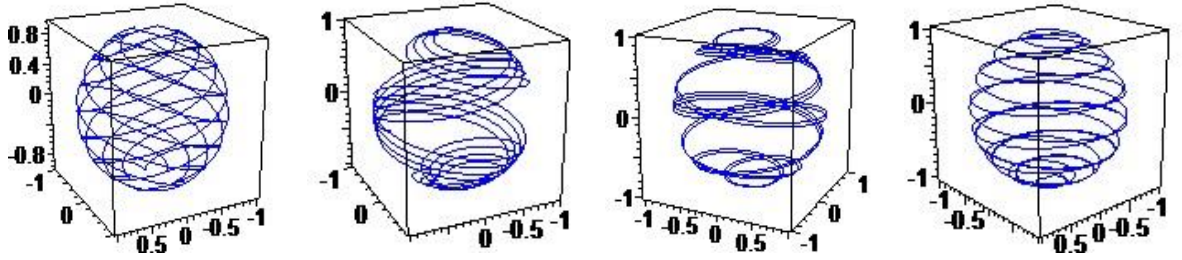
Tanım 4.4.10 Anti-Salkowski eğrisinin binormaller göstergesine ait Sabban çatısı $\{B^*, T_{B^*}, B^* \wedge T_{B^*}\}$ olsun.

$$\omega_2(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(B^* + (B^* \wedge T_{B^*})) \quad (4.4.35)$$

şeklinde tanımlı $\omega_2(s)$ vektörünün çizdiği regüler eğriye $B^*(B^* \wedge T_{B^*})$ -Smarandache eğrisi denir. Burada B^* , $(B^* \wedge T_{B^*})$ vektörleri (4.4.6) den yerlerine yazılırsa $\omega_2(s)$ -Smarandache eğrisi

$$\omega_2(s) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\cos(s)(\cos(ns) - \sin(ns)) - n \sin(s)(\cos(ns) + \sin(ns)), \right. \\ \left. -\sin(s)(\cos(ns) - \sin(ns)) + n \cos(s)(\cos(ns) + \sin(ns)), \frac{n}{m}(\cos(ns) + \sin(ns)) \right)$$

olur. Burada $m = \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$ değerleri için eğriye ait grafikler Şekil 4.30 de verilmiştir.



Şekil 4.30: $B^*(B^* \wedge T_{B^*})$ -Smarandache eğrisi

Teorem 4.4.10 $\omega_2(s)$ -Smarandache eğrisinin $K_g^{\omega_2}$ geodezik eğriliği

$$K_g^{\omega_2} = 1 + \tan(ns)$$

denklemleriyle verilir.

İspat. (4.4.35) eğrisinin s^* parametresine göre türevi alınırsa

$$\frac{d\omega_2}{ds^*} \cdot \frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}}(B^{*'} + (B^* \wedge T_{B^*})')$$

şeklinde olur. $B^{*'}$ ve $(B^* \wedge T_{B^*})'$ yerine (4.4.5) den karşılıkları yazılırsa

$$(T_{B^*})_{\omega_2} \cdot \frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}}(T_{B^*} - \kappa^* T_{B^*}) \quad (4.4.36)$$

olur. Norm alınırsa $\frac{ds^*}{ds} = \frac{1 - \kappa^*}{\sqrt{2}}$ şeklinde olur. Bu ifade yerine yazılırsa $\omega_2(s)$ -Smarandache eğrisinin $(T_{B^*})_{\omega_2}$ teğet vektörü

$$(T_{B^*})_{\omega_2} = T_{B^*} \quad (4.4.37)$$

bulunur. Tekrar türev alınırsa

$$(T_{B^*})'_{\omega_2} \cdot \frac{ds^*}{ds} = -B^* + \kappa^*(B^* \wedge T_{B^*})$$

olur. (4.4.35) ve (4.4.37) ifadesinden $(B^* \wedge T_{B^*})_{\omega_2}$ vektörü

$$\begin{aligned} (B^* \wedge T_{B^*})_{\omega_2} &= \omega_2 \wedge (T_{B^*})_{\omega_2}, \\ (B^* \wedge T_{B^*})_{\omega_2} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(-B^* + (B^* \wedge T_{B^*})) \end{aligned}$$

bulunur. (4.4.5) denkleminde $\omega_2(s)$ -Smarandache eğrisinin $K_g^{\omega_2}$ geodezik eğriliği

$$K_g^{\omega_2} = 1 + \kappa^*, \quad K_g^{\omega_2} = 1 + \tan(ns)$$

şeklinde elde edilir. \square

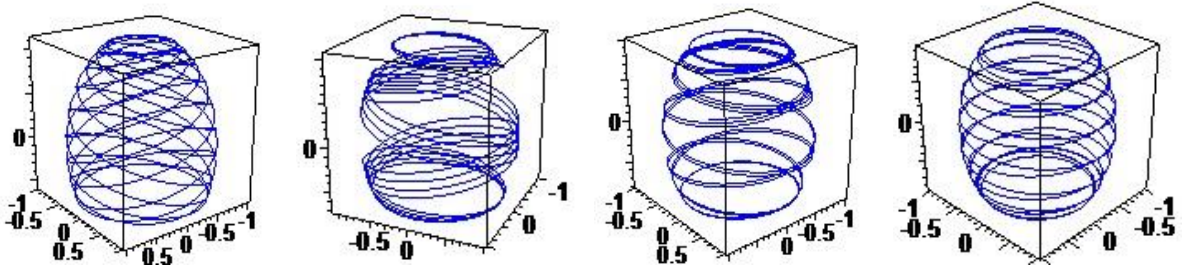
Tanım 4.4.11 Anti-Salkowski eğrisinin binormaller göstergesine ait Sabban çatısı $\{B^*, T_{B^*}, B^* \wedge T_{B^*}\}$ olsun.

$$\omega_3(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(T_{B^*} + (B^* \wedge T_{B^*})) \quad (4.4.38)$$

şeklinde tanımlı $\omega_3(s)$ vektörünün çizdiği regüler eğriye $T_{B^*}(B^* \wedge T_{B^*})$ -Smarandache eğrisi denir. Burada $T_{B^*}, (B^* \wedge T_{B^*})$ vektörleri (4.4.6) den yerlerine yazılırsa $\omega_3(s)$ -Smarandache eğrisi

$$\omega_3(s) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\cos(s) \sin(ns) - n \sin(s) \cos(ns) + \frac{n}{m} \sin(s), \right. \\ \left. \sin(s) \sin(ns) + n \cos(s) \cos(ns) - \frac{n}{m} \cos(s), \frac{n}{m} \cos(ns) + n \right)$$

olur. Burada $m = \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$ değerleri için eğriye ait grafikler Şekil 4.31 de verilmiştir.



Şekil 4.31: $T_{B^*}(B^* \wedge T_{B^*})$ -Smarandache eğrisi

Teorem 4.4.11 $\omega_3(s)$ -Smarandache eğrisinin $K_g^{\omega_3}$ geodezik eğriliği

$$K_g^{\omega_3} = \frac{1}{(1 + 2(\tan(ns))^2)^{\frac{5}{2}}} (2 \tan(ns)j_{22} - j_{23} + j_{24})$$

denklemleriyle verilir. Burada j_{22}, j_{23}, j_{24}

$$j_{22} = 2\kappa^*(\kappa^*)' + \kappa^* + 2(\kappa^*)^3, \\ j_{23} = -1 - (\kappa^*)' - 3(\kappa^*)^2 - 2(\kappa^*)^4, \\ j_{24} = -(\kappa^*)^2 + 2(\kappa^*)' - 2(\kappa^*)^4$$

birer katsayıdır.

İspat. (4.4.38) eğrisinin s^* parametresine göre türevi alınırsa

$$\frac{d\omega_3}{ds^*} \cdot \frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}}(T'_{B^*} + (B^* \wedge T_{B^*})')$$

şeklinde olur. T'_{B^*} ve $(B^* \wedge T_{B^*})'$ yerine (4.4.5) den karşılıkları yazılırsa

$$(T_{B^*})_{\omega_3} \cdot \frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-B^* - \kappa^* T_{B^*} + \kappa^*(B^* \wedge T_{B^*})) \quad (4.4.39)$$

olur. Norm alınırsa

$$\frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1 + 2(\kappa^*)^2}$$

şeklinde olur. Bu ifade yerine yazılırsa $\omega_3(s)$ -Smarandache eğrisinin $(T_{B^*})_{\omega_3}$ teğet vektörü

$$(T_{B^*})_{\omega_3} = \frac{1}{\sqrt{1 + 2(\kappa^*)^2}}(-B^* - \kappa^* T_{B^*} + \kappa^*(B^* \wedge T_{B^*})) \quad (4.4.40)$$

bulunur. Tekrar türev alınırsa

$$(T_{B^*})'_{\omega_3} \cdot \frac{ds^*}{ds} = \frac{\sqrt{2}}{(1 + 2(\kappa^*)^2)^2}(j_{22}B^* + j_{23}T_{B^*} + j_{24}(B^* \wedge T_{B^*}))$$

olur. (4.4.38) ve (4.4.40) ifadesinden $(B^* \wedge T_{B^*})_{\omega_3}$ vektörü

$$(B^* \wedge T_{B^*})_{\omega_3} = \omega_3 \wedge (T_{B^*})_{\omega_3},$$

$$(B^* \wedge T_{B^*})_{\omega_3} = \frac{1}{\sqrt{2 + 4(\kappa^*)^2}}(2\kappa^* B^* - T_{B^*} + (B^* \wedge T_{B^*}))$$

bulunur. (4.4.5) denkleminde $\omega_3(s)$ -Smarandache eğrisinin $K_g^{\omega_3}$ geodezik eğriliği

$$K_g^{\omega_3} = \frac{1}{(1 + 2(\kappa^*)^2)^{\frac{5}{2}}}(2\kappa^* j_{22} - j_{23} + j_{24}),$$

$$K_g^{\omega_3} = \frac{1}{(1 + 2(\tan(ns))^2)^{\frac{5}{2}}}(2 \tan(ns)j_{22} - j_{23} + j_{24})$$

şeklinde elde edilir. \square

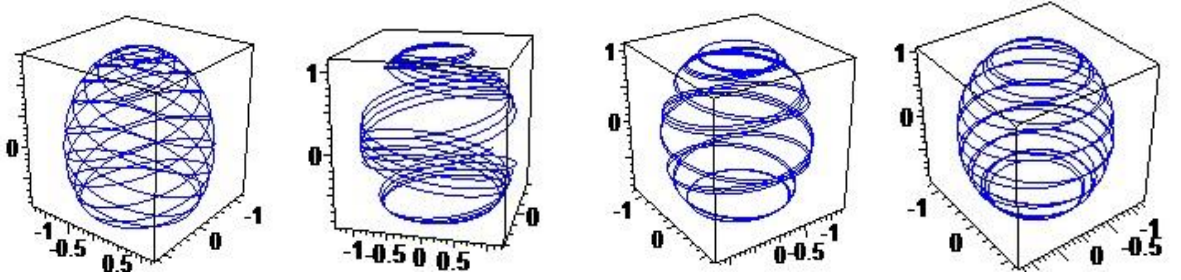
Tanım 4.4.12 Anti-Salkowski eğrisinin binormaller göstergesine ait Sabban çatısı $\{B^*, T_{B^*}, B^* \wedge T_{B^*}\}$ olsun.

$$\omega_4(s) = \frac{1}{\sqrt{3}}(B^* + T_{B^*} + (B^* \wedge T_{B^*})) \quad (4.4.41)$$

şeklinde tanımlı $\omega_4(s)$ vektörünün çizdiği regüler eğriye $B^*T_{B^*}(B^* \wedge T_{B^*})$ -Smarandache eğrisi denir. Burada B^* , T_{B^*} , $(B^* \wedge T_{B^*})$ vektörleri (4.4.6) den yerlerine yazılırsa $\omega_4(s)$ -Smarandache eğrisi

$$\begin{aligned} \omega_4(s) = & \frac{1}{\sqrt{3}} \left(-\cos(s)(\cos(ns) - \sin(ns)) - n \sin(s)(\cos(ns) + \sin(ns)) + \frac{n}{m} \sin(s), \right. \\ & -\sin(s)(\cos(ns) - \sin(ns)) + n \cos(s)(\cos(ns) + \sin(ns)) - \frac{n}{m} \cos(s), \\ & \left. \frac{n}{m}(\cos(ns) + \sin(ns)) + n \right) \end{aligned}$$

olur. Burada $m = \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$ değerleri için eğriye ait grafikler Şekil 4.32 de verilmiştir.



Şekil 4.32: $B^*T_{B^*}(B^* \wedge T_{B^*})$ -Smarandache eğrisi

Teorem 4.4.12 $\omega_4(s)$ -Smarandache eğrisinin $K_g^{\omega_4}$ geodezik eğriliği

$$K_g^{\omega_4} = \frac{(j_{25}(2 \tan(ns) - 1) + j_{26}(-1 - \tan(ns)) + j_{27}(2 - \tan(ns)))}{(4\sqrt{2}(1 - \tan(ns) + \tan^2(ns))^2)^{\frac{5}{2}}}$$

denklemleriyle verilir. Burada j_{25} , j_{26} , j_{27}

$$\begin{aligned} j_{25} &= -(\kappa^*)' + 2\kappa^*(\kappa^*)' - 2 + 4\kappa^* - 4(\kappa^*)^2 + 2(\kappa^*)^3, \\ j_{26} &= -(\kappa^*)' - \kappa^*(\kappa^*)' - 2 - 4(\kappa^*)^2 + 2\kappa^* + 2(\kappa^*)^3 - 2(\kappa^*)^4, \\ j_{27} &= \kappa^*(\kappa^*)' + 2\kappa^* - 4(\kappa^*)^2 + 2(\kappa^*)' + 4(\kappa^*)^3 - 2(\kappa^*)^4 \end{aligned}$$

birer katsayıdır.

İspat. (4.4.41) eğrisinin s^* parametresine göre türevi alınırsa

$$\frac{d\omega_4}{ds^*} \cdot \frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{\sqrt{3}}(B^{*'} + T'_{B^*} + (B^* \wedge T_{B^*})')$$

şeklinde olur. $B^{*'}$, T'_{B^*} ve $(B^* \wedge T_{B^*})'$ yerine (4.4.5) den karşılıkları yazılırsa

$$(T_{B^*})_{\omega_4} \cdot \frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{\sqrt{3}}(-B^* + (1 - \kappa^*)T_{B^*} + \kappa^*(B^* \wedge T_{B^*})) \quad (4.4.42)$$

olur. Norm alınırsa

$$\frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{2(1 - \kappa^* + (\kappa^*)^2)}$$

şeklinde olur. Bu ifade yerine yazılırsa $\omega_4(s)$ -Smarandache eğrisinin $(T_{B^*})_{\omega_4}$ teğet vektörü

$$(T_{B^*})_{\omega_4} = \frac{1}{\sqrt{2(1 - \kappa^* + (\kappa^*)^2)}}(-B^* + (1 - \kappa^*)T_{B^*} + \kappa^*(B^* \wedge T_{B^*})) \quad (4.4.43)$$

bulunur. Tekrar türev alınırsa

$$(T_{B^*})'_{\omega_3} \cdot \frac{ds^*}{ds} = \frac{\sqrt{3}}{4(1 - \kappa^* + (\kappa^*)^2)^2}(j_{25}B^* + j_{26}T_{B^*} + j_{27}(B^* \wedge T_{B^*}))$$

olur. (4.4.41) ve (4.4.43) ifadesinden $(B^* \wedge T_{B^*})_{\omega_4}$ vektörü

$$(B^* \wedge T_{B^*})_{\omega_4} = \omega_4 \wedge (T_{B^*})_{\omega_4},$$

$$(B^* \wedge T_{B^*})_{\omega_4} = \frac{1}{\sqrt{6(1 - \kappa^* + (\kappa^*)^2)}}((-1 + 2K_g^{*B})B^* + (-1 - \kappa^*)T_{B^*} + (2 - \kappa^*)(B^* \wedge T_{B^*}))$$

bulunur. (4.4.5) denkleminde $\omega_4(s)$ -Smarandache eğrisinin $K_g^{\omega_4}$ geodezik eğriliği

$$K_g^{\omega_4} = \frac{(j_{25}(2\kappa^* - 1) + j_{26}(-1 - \kappa^*) + j_{27}(2 - \kappa^*))}{(4\sqrt{2}(1 - \kappa^* + \kappa^{*2})^2)^{\frac{5}{2}}},$$

$$K_g^{\omega_4} = \frac{(j_{25}(2 \tan(ns) - 1) + j_{26}(-1 - \tan(ns)) + j_{27}(2 - \tan(ns)))}{(4\sqrt{2}(1 - \tan(ns) + \tan^2(ns))^2)^{\frac{5}{2}}}$$

şeklinde elde edilir. \square

5. SONUÇ ve ÖNERİLER

Bu tezde elde edilen sonuçlar bulgular bölümünde şekillerle açıklanmıştır. Burada ilk olarak, Salkowski ve anti-Salkowski eğrisinin Frenet vektörleri konum vektörü olarak alındı ve bu vektör tarafından çizilen diferensiyellenebilir Smarandache eğrileri tanımlandı. Elde edilen yeni eğrilerin her birisi için Frenet aparatları hesaplandı. İkinci olarak, Salkowski ve anti-Salkowski eğrilerinin Frenet vektörleri birim kürenin merkezine konulduğunda her bir eğrinin küresel gösterge eğrilerine ait Sabban çatıları oluşturuldu.

Son olarak bu çatılardan elde edilen Smarandache eğrileri tanımlanarak her bir eğrinin geodezik eğrilikleri hesaplandı. Tanımlanan eğrilerin şekilleri çizilerek yeni şekiller elde edildi.

Benzer çalışma Salkowski ve anti-Salkowski eğrisinin alternatif çatısı alınarak yeniden yapılabilir. Ayrıca eğri üzerinde başka çatılar da tanımlanabilir ve bu durumda yeni açılımlar elde edilebilir.

6. KAYNAKLAR

1. Salkowski, E. (1909). Zur Transformation von Raumkurven, *Mathematische Annalen*, 66 (4), 517-557.
2. Monterde, J. (2009). Salkowski curves revisited: A family of curves with constant curvature and non-constant torsion. *Computer Aided Geometric Design*, 26(3), 271-278.
3. Ali, A. T. (2009). Spacelike Salkowski and anti-Salkowski Curves With a Spacelike Principal Normal in Minkowski 3-Space. *Int. J. Open Problems Compt. Math*, 2(3).
4. Gur, S., Senyurt, S. (2010). Frenet Vectors and Geodesic Curvatures of Spheric Indicators of Salkowski Curve in E3. *Hadronic Journal*, 33(5), 485.
5. Turgut M. and Yılmaz S. (2008) Smarandache Curves in Minkowski Space-time, *International Journal of Mathematical Combinatorics*, Vol.3, 51-55.
6. Ali A. T. (2010). Special Smarandache Curves in the Euclidean Space, *International Journal of Mathematical Combinatorics*, Vol.2, 30-36.
7. Senyurt, S. and Çalışkan, A. (2015). "N*C*-Smarandache Curves of Mannheim Curve Couple According to Frenet Frame." *International Journal of Mathematical Combinatorics* 1, 2015,1.
8. S.Şenyurt, S. Sivas, (2013). Smarandache eğrilerine ait bir uygulama, *Ordu Üniversitesi Bilim ve Teknoloji Dergisi*, 3(1), 46-60.
9. Sivas, S. (2014). İnvolut-Evolüt Eğrilerine ait Frenet Çatısına Göre Smarandache Eğrileri. Yüksek Lisans Tezi, Ordu Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Ordu.
10. Çalışkan, A. (2014). Mannheim Eğri Çiftine ait Frenet Çatısına Göre Smarandache Eğrileri. Yüksek Lisans Tezi, Ordu Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Ordu.
11. Çelik, Ü., (2016). Bertrand Eğri Çiftine ait Frenet Çatısına Göre Smarandache Eğrileri, Yüksek Lisans Tezi, Ordu Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Ordu.
12. Taşköprü K. and Tosun M. (2014). Smarandache curves according to Sabban frame on S2, *Boletim da Sociedade Paranaense de Matemtica*, 32, 51-59.
13. Koenderink J. (1990). Solid Shape, MIT Press, Cambridge, MA.

14. Senyurt, S., Caliskan, A. (2015). Smarandache curves in terms of Sabban frame of spherical indicatrix curves. *Gen*, 31(2), 1-15.
15. Altun, Y. (2016). Bazı Özel Eğrilerin Sabban Çatısına Göre Smarandache Eğrileri. Yüksek Lisans Tezi, Ordu Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Ordu.
16. Hacısalihoğlu, H.H., (1983). Diferensiyel Geometri, İnönü Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Yayınları, Malatya, Mat. no.7, 270s.
17. Sabuncuoğlu, A., (2014). Diferensiyel Geometri, Nobel Yayınları, 440s.
18. Gürses, N., Bektaş, Ö., Yüce, S., (2016). Special Smarandache curves in R^3 . *Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Ser. A1 Math Stat.*, Vol.65(2), 143-160.

DİZİN

- $B(B \wedge T_B)$ -Smarandache eğrisi, 77
 BT_B -Smarandache eğrisi, 75
 $BT_B(B \wedge T_B)$ -Smarandache eğrisi, 81
 $B^*(B^* \wedge T_{B^*})$ -Smarandache eğrisi, 106
 $B^*T_{B^*}$ -Smarandache eğrisi, 104
 $B^*T_{B^*}(B^* \wedge T_{B^*})$ -Smarandache eğrisi, 110
 $N(N \wedge T_N)$ -Smarandache eğrisi, 67
 NB -Smarandache eğrisi, 26
 NB – Smarandache eğrisi, 12
 NT_N -Smarandache eğrisi, 65
 $NT_N(N \wedge T_N)$ -Smarandache eğrisi, 71
 $N^*(N^* \wedge T_{N^*})$ -Smarandache eğrisi, 96
 N^*B^* -Smarandache eğrisi, 43
 $N^*T_{N^*}$ -Smarandache eğrisi, 93
 $N^*T_{N^*}(N^* \wedge T_{N^*})$ -Smarandache eğrisi, 101
 $T(T \wedge T_T)$ -Smarandache eğrisi, 60
 TB -Smarandache eğrisi, 30
 TB – Smarandache eğrisi, 14
 TN -Smarandache, 22
 TN – Smarandache eğrisi, 10
 TNB -Smarandache eğrisi, 34
 TNB – Smarandache eğrisi, 16
 TT_T -Smarandache eğrisi, 58
 $TT_T(T \wedge T_T)$ -Smarandache eğrisi, 63
 $T^*(T^* \wedge T_{T^*})$ -Smarandache eğrisi, 87
 T^*B^* -Smarandache eğrisi, 47
 T^*N^* -Smarandache eğrisi, 39
 $T^*N^*B^*$ -Smarandache eğrisi, 51
 $T^*T_{T^*}$ -Smarandache eğrisi, 85
 $T^*T_{T^*}(T^* \wedge T_{T^*})$ -Smarandache eğrisi, 91
 $T_B(B \wedge T_B)$ -Smarandache eğrisi, 79
 $T_N(N \wedge T_N)$ -Smarandache eğrisi, 69
 $T_T(T \wedge T_T)$ -Smarandache eğrisi, 61
 $T_{B^*}(B^* \wedge T_{B^*})$ -Smarandache eğrisi, 108
 $T_{N^*}(N^* \wedge T_{N^*})$ -Smarandache eğrisi, 98
 $T_{T^*}(T^* \wedge T_{T^*})$ -Smarandache eğrisi, 89
 n -boyutlu standart Öklid uzayı, 6
- afin çatısı, 5
afin uzay, 5
anti-Salkowski eğrisi, 9
- başlangıç noktası, 5
birim noktalar, 5
burulma, 6
burulma fonksiyonu, 6
eğri, 6
eğrilik, 6
eğrilik fonksiyonu, 6
Frenet formülleri, 7
Frenet vektörleri, 6
parametre, 6
parametre aralığı, 6
Salkowski eğrisi, 8
Smarandache eğrisi, 10
standart iç çarpım, 6
uzaklık, 6

ÖZGEÇMİŞ

Adı-Soyadı : Burak ÖZTÜRK
Doğum Yeri : KOCAELİ
Doğum Tarihi : 06.06.1994
Medeni Hali : Bekar
Bildiği Yabancı Dil : İngilizce
İletişim Bilgileri : Ordu Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü
burak_206@windowslive.com, brkztrk4152@gmail.com
Lise : Başöğretmen Lisesi 2012
Lisans : Ordu Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü-2016

Yayın :

1. S. Şenyurt and B. Öztürk, "Smarandache Curves of Salkowski Curve According to Frenet Frame." Turkish Journal of Mathematics and Computer Science, 2148-1830, 2018(10), pp. 190-201.
2. S. Şenyurt and B.Öztürk, "Smarandache Curves of Anti-Salkowski Curve According to Frenet Frame." Proceedings of The International Conference on Mathematical Studies and Applications (ICMSA) 2018, pp. 132-143.

Konferans ve Sempozyumlar :

1. S. Şenyurt and B.Öztürk, "Smarandache Curves of Salkowski Curve According to Frenet Frame." International Conference Mathematics and Mathematics Education (ICMME), 2018, Ordu.
2. S. Şenyurt and B. Öztürk, "Smarandache Curves of Anti-Salkowski Curve According to Frenet Frame." International Conference on Mathematical Studies and Applications (ICMSA), 2018, Karaman.