T.C.
ORDU ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI ÖZEL EĞRİLERİN SABBAN ÇATISINA GÖRE SMARANDACHE EĞRİLERİ

YASİN ALTUN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ORDU 2016

TEZ ONAY

Ordu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü öğrencisi Yasin ALTUN tarafından hazırlanan ve Yrd. Doç. Dr. Süleyman ŞENYURT danışmanlığında yürütülen "Bazı Özel Eğrilerin Sabban Çatısına Göre Smarandache Eğrileri" adlı bu tez, jürimiz tarafından 29/ 12 / 2016 tarihinde oy birliği ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Yrd. Doç. Dr. Süleyman ŞENYURT

Başkan : Prof. Dr. İsmail AYDEMİR
Matematik,Anabilim Dalı
Ondokuz Mayıs Üniversitesi
İmza :

Üye : Prof. Dr. Emin KASAP
Matematik,Anabilim Dalı
Ondokuz Mayıs Üniversitesi
İmza :

Üye : Yrd. Doç. Dr. Süleyman ŞENYURT
Matematik,Anabilim Dalı
Ordu Üniversitesi
İmza :

ONAY:

Bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulu'nun 29/12/2016 tarih ve 2016/576 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

13/01/2017

Enstitü Müdürü
Prof. Dr. Kürşat KORKMAZ

TEZ BİLDİRİMİ

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

Yasin ALTUN

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

BAZI ÖZEL EĞRİLERİN SABBAN ÇATISINA GÖRE SMARANDACHE EĞRİLERİ

Yasin ALTUN

Ordu Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı, 2016
Yüksek Lisans Tezi, 219s.

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Süleyman ŞENYURT

Bu çalışma altı bölüm halinde düzenlenmiştir. Giriş Bölümünde çalışmanın amacı ve konunun ele alınma nedeni tartışıldı. Önceki Çalışmalar Bölümünde Smarandache eğrileri ile ilgili çalışmalara yer verildi. Materyal ve Yöntem Bölümünde Öklid uzayı, involüt-evolüt eğrileri, Bertrand eğri çifti, Mannheim eğri çifti, küresel Frenet formülleri ve Smarandache eğrileri ile ilgili temel kavramlar anlatıldı.

Bulgular Bölümü çalışmamızın orjinal kısmını oluşturmaktadır. Burada, bazı özel eğrilerin; involüt-evolüt eğrileri, Bertrand eğri çifti, Mannheim eğri çifti, Frenet vektörleri ile birim Darboux vektörlerinin birim küre yüzeyi üzerinde çizdikleri küresel eğrilere ait Sabban çatıları, küresel Frenet formülleri ve geodezik eğrilikleri hesaplandı. Daha sonra bu eğrilere ait Sabban çatıları konum vektörü olarak alındığında bu vektörlerin çizdiği Smarandache eğrilerinin tanımı verilerek geodezik eğrilikleri bulundu. Son olarak herbir eğri için bulunan sonuçlar, evolüt eğrisi, Bertrand eğrisi ve Mannheim eğrisine bağlı ifadeleri verildi. Konuyla ilgili örnekler bulunup Mapple programıyla çizimleri yapıldı.

Anahtar Kelimeler: Bertrand eğri çifti, Geodezik eğrilik, İnvolüt-evolüt eğrileri, Mannheim eğri çifti, Öklid uzayı, Sabban çatısı, Smarandache eğrisi.

ABSTRACT

SMARANDACHE CURVES OF SOME SPECIAL CURVE IN TERMS OF SABBAN FRAME

Yasin ALTUN

University of Ordu
Institute for Graduate Studies in Science and Technology
Department of Mathematics, 2016
MSc. Thesis, 219p.

Supervisor: Yrd. Doç. Dr. Süleyman ŞENYURT

This study was organized into six sections. In the introduction chapter, the purpose of study and the reasons why this subject is interested were discussed. The next chapter is covered with literature review of Smarandache curve. The basic concepts of Euclidian space, involute-evolute curves, Bertrand partner curve, Mannheim partner curve, spherical Frenet formulae and Smarandache curves were given in the material and method chapter.

The findings chapter are the original part of our study. In this chapter, we initially calculated Sabban frames, spherical Frenet formulae and geodesic curvature which drawn on the surface of the sphere by the Frenet frame and unit Darboux vector of some special curves, involute curve, Bertrand partner curve, Mannheim partner curve. Subsequently, when the Sabban frames were belongs to these curves as the position vector, the geodesic curvatures were calculated by giving the definition of Smarandache curves drawn by these vectors. Finally, the results for each curve was given depend on evolute curves, Bertrand curves and Mannheim curves. Several examples related to the subject were found and their drawings were done with Mapple program.

Keywords: Bertrand curve pair, Euclidian space, Geodesic curvature, Involute-evolute curves, Mannheim curve pair, Sabban frame, Smarandache curve

TEŞEKKÜR

Tüm çalışmalarım boyunca her zaman bilgi ve deneyimleriyle yolumu açan değerli hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Süleyman ŞENYURT' a en samimi duygularım ile teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca, çalışmam boyunca desteklerini esirgemeyen Matematik Bölümü tüm hocalarıma, Arş. Gör. Abdussamet ÇALIŞKAN' a ve yüksek lisans arkadaşım Ceyda CEVAHİR' e en içten şükranlarımı sunuyorum.

Aynı zamanda, manevi desteklerini esirgemeyen ailemin herbir ferdine teşekkür etmeyi bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

ŞEKİLLER LİSTESİ

SİMGELER ve KISALTMALAR

$\lVert\ \rVert$	:	Norm
$\langle\ \rangle$	:	İç çarpım
$\wedge$	:	Vektörel çarpım
β_1	:	$T^*T_{T^*}$ -Smarandache eğrisi
β_2	:	$T^*(T^* \wedge T_{T^*})$ -Smarandache eğrisi
β_3	:	$T_{T^*}(T^* \wedge T_{T^*})$ -Smarandache eğrisi
β_4	:	$T^*T_{T^*}(T^* \wedge T_{T^*})$ -Smarandache eğrisi
β_{ς_1}	:	$N^*T_{N^*}$ -Smarandache eğrisi
β_{ς_2}	:	$N^*(N^* \wedge T_{N^*})$ -Smarandache eğrisi
β_{ς_3}	:	$T_{N^*}(N^* \wedge T_{N^*})$ -Smarandache eğrisi
β_{ς_4}	:	$N^*T_{N^*}(N^* \wedge T_{N^*})$ -Smarandache eğrisi
β_{ξ_1}	:	$B^*T_{B^*}$ -Smarandache eğrisi
β_{ξ_2}	:	$B^*(B^* \wedge T_{B^*})$ -Smarandache eğrisi
β_{ξ_3}	:	$T_{B^*}(B^* \wedge T_{B^*})$ -Smarandache eğrisi
β_{ξ_4}	:	$B^*T_{B^*}(B^* \wedge T_{B^*})$ -Smarandache eğrisi
β_{μ_1}	:	$C^*T_{C^*}$ -Smarandache eğrisi
β_{μ_2}	:	$C^*(C^* \wedge T_{C^*})$ -Smarandache eğrisi
β_{μ_3}	:	$T_{C^*}(C^* \wedge T_{C^*})$ -Smarandache eğrisi
β_{μ_4}	:	$C^*T_{C^*}(C^* \wedge T_{C^*})$ -Smarandache eğrisi
γ_1	:	$T_1T_{T_1}$ -Smarandache eğrisi
γ_2	:	$T_1(T_1 \wedge T_{T_1})$ -Smarandache eğrisi
γ_3	:	$T_{T_1}(T_1 \wedge T_{T_1})$ -Smarandache eğrisi
γ_4	:	$T_1T_{T_1}(T_1 \wedge T_{T_1})$ -Smarandache eğrisi
γ_{ς_1}	:	$N_1T_{N_1}$ -Smarandache eğrisi
γ_{ς_2}	:	$N_1(N_1 \wedge T_{N_1})$ -Smarandache eğrisi
γ_{ς_3}	:	$T_{N_1}(N_1 \wedge T_{N_1})$ -Smarandache eğrisi
γ_{ς_4}	:	$N_1T_{N_1}(N_1 \wedge T_{N_1})$ -Smarandache eğrisi
γ_{ξ_1}	:	$B_1T_{B_1}$ -Smarandache eğrisi

γ_{ξ_2}	:	$B_1(B_1 \wedge T_{B_1})$ -Smarandache eğrisi
γ_{ξ_3}	:	$T_{B_1}(B_1 \wedge T_{B_1})$ -Smarandache eğrisi
γ_{ξ_4}	:	$B_1T_{B_1}(B_1 \wedge T_{B_1})$ -Smarandache eğrisi
γ_{μ_1}	:	$C_1T_{C_1}$ -Smarandache eğrisi
γ_{μ_2}	:	$C_1(C_1 \wedge T_{C_1})$ -Smarandache eğrisi
γ_{μ_3}	:	$T_{C_1}(C_1 \wedge T_{C_1})$ -Smarandache eğrisi
γ_{μ_4}	:	$C_1T_{C_1}(C_1 \wedge T_{C_1})$ -Smarandache eğrisi
$\tilde{\beta}_1$	:	$T_2T_{T_2}$ -Smarandache eğrisi
$\tilde{\beta}_2$	:	$T_2(T_2 \wedge T_{T_2})$ -Smarandache eğrisi
$\tilde{\beta}_3$	:	$T_{T_2}(T_2 \wedge T_{T_2})$ -Smarandache eğrisi
$\tilde{\beta}_4$	:	$T_2T_{T_2}(T_2 \wedge T_{T_2})$ -Smarandache eğrisi
$\tilde{\beta}_{\varsigma_1}$	:	$N_2T_{N_2}$ -Smarandache eğrisi
$\tilde{\beta}_{\varsigma_2}$	:	$N_2(N_2 \wedge T_{N_2})$ -Smarandache eğrisi
$\tilde{\beta}_{\varsigma_3}$	:	$T_{N_2}(N_2 \wedge T_{N_2})$ -Smarandache eğrisi
$\tilde{\beta}_{\varsigma_4}$	:	$N_2T_{N_2}(N_2 \wedge T_{N_2})$ -Smarandache eğrisi
$\tilde{\beta}_{\xi_1}$	:	$B_2T_{B_2}$ -Smarandache eğrisi
$\tilde{\beta}_{\xi_2}$	:	$B_2(B_2 \wedge T_{B_2})$ -Smarandache eğrisi
$\tilde{\beta}_{\xi_3}$	:	$T_{B_2}(B_2 \wedge T_{B_2})$ -Smarandache eğrisi
$\tilde{\beta}_{\xi_4}$	:	$B_2T_{B_2}(B_2 \wedge T_{B_2})$ -Smarandache eğrisi
$\tilde{\beta}_{\mu_1}$	:	$C_2T_{C_2}$ -Smarandache eğrisi
$\tilde{\beta}_{\mu_2}$	:	$C_2(C_2 \wedge T_{C_2})$ -Smarandache eğrisi
$\tilde{\beta}_{\mu_3}$	:	$T_{C_2}(C_2 \wedge T_{C_2})$ -Smarandache eğrisi
$\tilde{\beta}_{\mu_4}$	:	$C_2T_{C_2}(C_2 \wedge T_{C_2})$ -Smarandache eğrisi
κ	:	Eğrinin eğriliği
τ	:	Eğrinin burulması
κ_g	:	Yüzey üzerindeki eğrinin geodezik eğriliği
T, N, B	:	Frenet 3-ayaklısı
C	:	Birim Darboux vektör
$(T),(N),(B)$	:	Bir eğrinin küresel göstergeleri
(C)	:	Birim Darboux vektörünün küre üzerinde çizdiği eğri

1. GİRİŞ

Eğrilerin diferensiyel geometrisi üzerine bugüne kadar birçok çalışma yapılmıştır. Bunlardan en iyi bilinenleri involüt-evolüt eğrileri, Bertrand eğrileri ve Mannheim eğrileridir. Bu eğrilerle ilgili temel teoremler birçok diferensiyel geometri kitaplarında mevcuttur. Günümüzde bu eğriler üzerinde yeni birçok çalışmalar yapılmaya devam edilmektedir. İnvolüt eğrileri üzerine yapılan çalışmalardan bazıları, (Bilici, 1999), (Çalışkan ve Bilici, 2002), (Şenyurt ve Sivas, 2014), Bertrand eğrileri üzerine yapılanlardan birkaçı, (Görgülü ve Özdamar, 1986), (Ekmekçi ve İlarslan, 2001), (Şenyurt ve Özgüner, 2013), (Şenyurt ve Çelik, 2016) ve Mannheim eğrileriyle ilgili olarak da, (Liu ve Wang, 2008), (Orbay ve Kasap, 2009), (Özdamar, 2012), (Şenyurt, 2012), (Şenyurt ve Çalışkan, 2014).

2008 yılında M. Turgut ve S. Yılmaz tarafından yapılan çalışmada Smarandache eğrileri tanımlanmış ve bu eğriler üzerinde yeni birçok çalışma yapılmıştır. Bu çalışmalardan bazıları, (Turgut ve Yılmaz, 2008), (Ali, 2010), (Bektaş ve Yüce, 2013), (Bayrak ve ark., 2013), (Şenyurt ve Sivas, 2013), (Taşköprü ve Tosun, 2014), (Çalışkan ve Şenyurt, 2015a), (Çalışkan ve Şenyurt, 2015b), (Şenyurt ve Çelik, 2016).

Bu tezde ilk olarak, involüt-evolüt eğrileri, Bertrand eğri çifti ve Mannheim eğri çiftinin Frenet vektörleri ile birim Darboux vektörlerinin birim küre yüzeyi üzerinde çizdikleri küresel eğrilere ait Sabban çatıları, küresel Frenet formülleri ve geodezik eğrilikleri bulundu. İkinci olarak bu eğrilere ait Sabban çatıları konum vektörü olarak alındığında bu vektör tarafından çizilen Smarandache eğrilerinin tanımı verilerek geodezik eğrilikleri hesaplandı. Son olarak herbir Smarandache eğrisi için bulunan sonuçlar involüt-evolüt eğrileri, Bertrand eğri çifti ve Mannheim eğri çiftine bağlı ifadeleri verildi. Konuyla ilgili örnekler bulunup Mapple programıyla eğrilerin çizimleri yapıldı.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

(Turgut ve Yılmaz, 2008), *"Smarandache Curves in Minkowski space-time"* isimli çalışmada Smarandache eğrilerinin tanımını vererek E_1^4' de TB_2-Smarandache eğrisine ait Frenet elemanlarını hesaplamıştır.

(Ali, 2010), *"Special Smarandache Curves in the Euclidean Space"* isimli çalışmada Smarandache eğrilerinin tanımı verilerek bu eğrilere ait Frenet-Serret invaryantlarını incelemiştir.

(Bektaş ve Yüce, 2013), *"Special Smarandache Curves According to Darboux Frame in Euclidean 3-Space"* isimli çalışmada Darboux çatısına ait Smarandache eğrileri incelenmiş ve bu eğrilere ait bazı karakterizasyonlar vermişlerdir.

(Şenyurt ve Sivas, 2013), *"Smarandache Eğrilerine Ait Bir Uygulama"* isimli çalışmada bir eğrinin birim Darboux vektörü C olmak üzere $NC-$ Smarandache eğrisinin tanımı verilerek ve bu eğriye ait bazı sonuçlar elde etmişlerdir.

(Şenyurt ve Sivas, 2014), *"İnvolüt- evolüt eğrilerine ait Frenet çatısına göre Smarandache eğrileri"* isimli yüksek lisans tezinde involüt eğrisinin Frenet vektörleri ve birim Darboux vektörünün oluşturduğu Smarandache eğrilerini tanımlayıp bu eğrilere ait bazı karakterizas-yonlar bulmuşlardır.

(Şenyurt ve Çalışkan, 2014), *"Mannheim Eğri Çiftine ait Frenet Çatısına göre Smarandache Eğrileri"* isimli yüksek lisans tezinde Mannheim partner eğrisinin Frenet vektörleri ve birim Darboux vektörünün oluşturduğu Smarandache eğrilerini tanımlayıp bu eğrilere ait bazı karakterizasyonlar bulmuşlardır.

(Çetin ve ark., 2014), *"Smarandache Curves According to Bishop Frame in Euclidean 3-Space"* isimli çalışmada Bishop çatısına ait Smarandache eğrileri incelenmiş ve bu eğrilere ait bazı karakterizasyonlar vermişlerdir.

(Taşköprü ve Tosun, 2014), *"Smarandache Curves According to Sabban Frame on* S^2*"* isimli çalışmada Sabban çatısına göre Smarandache eğrilerini incelemişlerdir.

(Çalışkan ve Şenyurt 2015a), *"Smarandache Curves In terms of Sabban Frame of Spherical Indicatrix Curves"* isimli çalışmada küresel gösterge eğrilerine ait Sabban çatısına göre Smarandache eğrilerinin tanımı verilerek ve bu eğrilerle ilgili sonuçlar vermişlerdir.

(Çalışkan ve Şenyurt 2016), *" Smarandache curves in terms of Sabban frame of fixed pole curve"* isimli çalışmada birim Darboux vektörünün birim küre üzerinde çizdiği eğrinin Sabban çatısına göre Smarandache eğrilerinin tanımı verilerek ve bu eğrilere ait geodezik eğrilik-leri hesaplamışlardır.

(Şenyurt ve Çelik, 2016), *"Bertrand Eğri Çiftine ait Frenet Çatısına göre Smarandache Eğrileri"* isimli yüksek lisans tezinde Bertrand partner eğrisinin Frenet vektörleri ve birim Darboux vektörünün oluşturduğu Smarandache eğrilerini tanımlayıp bu eğrilere ait bazı karakterizasyonlar bulmuşlardır.

(Bayrak ve ark., 2016), *"Special Smarandache Curves in* $\mathbb{R}^3_1$*"* isimli çalışmada Frenet vektör-leri tarafından oluşturulan Smarandache eğrileri incelenmiş ve bu eğrilere ait bazı karakterizasyonlar vermişlerdir.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

Bu bölümde Öklid uzayı, involüt-evolüt eğrileri, Bertrand eğri çifti, Mannheim eğri çifti, Smarandache eğrileri ile ilgili temel kavramlara yer verildi.

3.1 Öklid Uzayı

Tanım 3.1.1 A boş olmayan bir cümle, V de K cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. $f : A \times A \to V$ fonksiyonu aşağıdaki aksiyomları sağlarsa A ya V ile birleştirilmiş bir afin uzay denir:

i. $A_1 : \forall P, Q, R \in A$ için $f(P,Q) + f(Q,R) = f(P,R)$

ii. $A_2 : \forall P \in A,\ \forall \alpha \in$ V için $f(P,Q) = \alpha$

olacak şekilde bir tek $Q \in A$ noktası mevcuttur.

Tanım 3.1.2 V, A ile birleşen bir afin uzay olsun.

$$\langle , \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$$

fonksiyonu aşağıdaki aksiyomları sağlarsa bu fonksiyona bir iç çarpım fonksiyonu denir: $\forall\, x, y, z \in V$, $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$ için

i. Bilineerlik Aksiyomu;

$$\langle ax + by, z \rangle = a\langle x, z \rangle + b\langle y, z \rangle,$$

$$\langle x, ay + bz \rangle = a\langle x, y \rangle + b\langle x, z \rangle,$$

ii. Simetri Aksiyomu;

$$\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle,$$

iii. Pozitif tanımlılık (kararlılık) Aksiyomu;

$$\begin{aligned} &\langle x, x \rangle \geq 0, \\ &\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = \vec{0}. \end{aligned}$$

Tanım 3.1.3 Reel standart afin uzayı $\mathbb{R}^n$ olmak üzere, $\forall X, Y \in \mathbb{R}^n$ için

$$\langle , \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \langle X, Y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

şeklinde tanımlı fonksiyon bir iç çarpım fonksiyonudur. Bu iç çarpıma $\mathbb{R}^n$ de standart iç çarpım veya Öklid iç çarpım denir. Standart iç çarpımın tanımlı olduğu $\mathbb{R}^n$ vektör uzayı ile birleşen afin uzayına n-boyutlu standart Öklid uzayı denir ve $\mathbb{E}^n$ ile gösterilir.

Tanım 3.1.4 $X, Y \in \mathbb{E}^3$ için

$$\begin{aligned} d \ &: \ \mathbb{E}^3 \times \mathbb{E}^3 \to \mathbb{R} \\ X \ , \ Y &\to d(X,Y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} (y_i - x_i)^2} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı d fonksiyona uzaklık fonksiyonu, $d(X,Y) \in \mathbb{R}$ sayısına da X ile Y noktaları arasındaki uzaklık denir.

Tanım 3.1.5 $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}^n$, $\alpha(s) = (\alpha_1(s), \alpha_2(s), \ldots, \alpha_n(s))$ diferensiyellenebilir fonksiyona $\mathbb{E}^n$ de bir eğri ,

$$\alpha'(s) = \frac{d\alpha}{ds}\Big|_s = \left(\frac{d\alpha_1(s)}{ds}, \frac{d\alpha_2(s)}{ds}, \ldots, \frac{d\alpha_n(s)}{ds}\right)\Big|_s$$

vektörüne α eğrisinin hız vektörü, $\|\alpha'(s)\| = 1$ ise eğriye birim hızlı eğri adı verilir (Hacısalihoğlu, 1983).

Tanım 3.1.6 $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}^n$ bir eğri olsun. $a, b \in I$ için

$$s = \int_a^b \|\alpha'(s)\| ds$$

reel sayısına $\alpha(a)$ ile $\alpha(b)$ noktaları arasındaki yay uzunluğu denir.

Tanım 3.1.7 $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}^3$ diferensiyellenebilir bir eğri olsun. $\{\alpha', \alpha'', \alpha'''\}$ lineer bağımsız cümlesinden Gram-Schmidt ortogonalleştirme yöntemi ile elde edilen $\{T(s), N(s), B(s)\}$ ortonormal sistemine α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki Serret-Frenet 3-ayaklısı denir.

Teorem 3.1.1 $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}^3$ eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet çatısı $\{T(s), N(s), B(s)\}$ olsun.

a) $s \in I$ yay parametresi ise

$$\begin{cases} T(s) = \alpha'(s) \\ N(s) = \dfrac{1}{\|\alpha''(s)\|}\alpha''(s) \\ B(s) = T(s) \wedge N(s) \end{cases} \tag{3.1.1}$$

b) $s \in I$ keyfi parametre ise

$$\begin{cases} T(s) = \dfrac{1}{\|\alpha'(s)\|}\alpha'(s) \\ N(s) = B(s) \wedge T(s) \\ B(s) = \dfrac{1}{\|\alpha'(s) \wedge \alpha''(s)\|}(\alpha'(s) \wedge \alpha''(s)), \end{cases} \tag{3.1.2}$$

dır (Hacısalihoğlu, 1983).

Teorem 3.1.2 $\alpha : I \to \mathbb{E}^3$ eğrisinin Frenet çatısı $\{T(s), N(s), B(s)\}$, eğriliği ve torsiyonu sırasıyla $\kappa(s)$ ve $\tau(s)$ olsun. Bu durumda Frenet vektörleri ile bunların türev vektörleri arasında

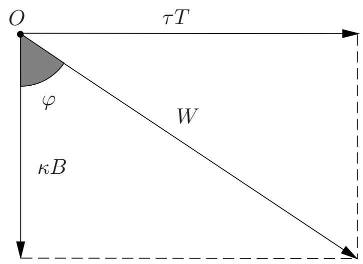
$$\begin{cases} T'(s) = \kappa(s)N(s) \\ N'(s) = -\kappa(s)T(s) + \tau(s)B(s) \\ B'(s) = -\tau(s)N(s) \end{cases} \tag{3.1.3}$$

bağıntısı vardır (Hacısalihoğlu, 1983).

Bir α eğrisi üzerinde $\alpha(s)$ noktası eğriyi çizerken bu noktadaki $\{T, N, B\}$ Frenet 3-ayaklısı her s anında, (bir eksen etrafında) ani helis hareketi yaptığı kabul edilir. Bu eksene eğrinin Darboux (ani dönme) ekseni , bu eksen yönündeki Darboux vektörü,

$$W = N \wedge N' = \tau T + \kappa B, \tag{3.1.4}$$

şeklinde bulunur (Hacısalihoğlu, 1983).



Şekil 3.1: Darboux vektörü

W ile B vektörleri arasındaki açı φ ile gösterilirse Şekil 3.1 den,

$$\sin\varphi = \frac{\tau}{\|W\|}, \quad \cos\varphi = \frac{\kappa}{\|W\|} \tag{3.1.5}$$

yazılır. Birim Darboux vektörü C ile gösterilirse

$$C = \sin\varphi T + \cos\varphi B, \tag{3.1.6}$$

şeklinde bulunur (Fenchel, 1951).

Tanım 3.1.8 (Weingarten dönüşümü)

$S^2 \subset \mathbb{E}^3$ hiperyüzeyinin birim normal vektör alanı **N** olsun. $\forall X \in \chi(S^2)$ için

$$S(X) = D_X \mathbf{N} \tag{3.1.7}$$

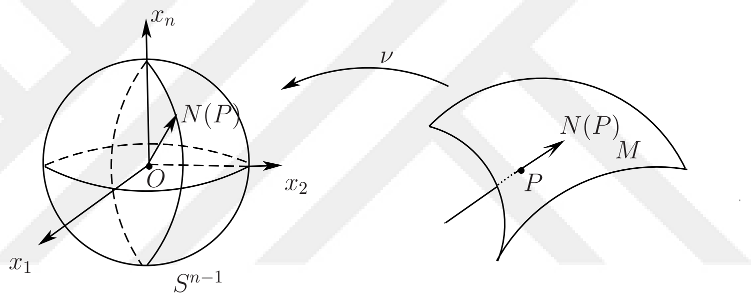
şeklinde tanımlı dönüşüme S^2 üzerinde **şekil operatörü (Weingarten dönüşümü)** denir. Bu dönüşüm $\chi(S^2)$ üzerinde bir lineer dönüşümdür, (Hacısalihoğlu, 1983).

Tanım 3.1.9 (Gauss Dönüşümü)

$S^2 \subset \mathbb{E}^3$ hiperyüzeyinin birim normal vektör alanı **N** olsun.

$$\begin{aligned} \nu : S^2 &\rightarrow S^2 \subset \mathbb{E}^3 \\ P &\rightarrow \nu(P) = \overrightarrow{\mathbf{N}}(P) = (P, \overrightarrow{\mathbf{N}}_P) = \sum_{i=1}^{3} a_i(P) \frac{\partial}{\partial x_i}|_P \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı ν dönüşümüne **Gauss dönüşümü** denir.



Şekil 3.2: Gauss dönüşümü

Tanım 3.1.10 (Gauss anlamında kovaryant türev ve Gauss denklemi)

$\mathbb{E}^3$ te Riemann konneksiyonu D ile gösterilmek üzere $\forall X, Y \in \chi(S^2)$ için

$$\overline{D}_X Y = D_X Y + \langle S(X), Y \rangle \mathbf{N} \tag{3.1.8}$$

şeklinde tanımlı $\overline{D}$ operatörüne S^2 üzerinde Gauss anlamında kovaryant türev opearatorü ve denklemine de **Gauss denklemi** denir, (Hacısalihoğlu, 1983).

Tanım 3.1.11 $\alpha : I \rightarrow S^2 \subset \mathbb{E}^3$ eğrisinin birim teğet vektörü T olsun.

$$D_T T = 0 \text{ ve } \overline{D}_T T = 0 \tag{3.1.9}$$

ise α eğrisine sırasıyla $\mathbb{E}^3$ te ve S^2 yüzeyi üzerinde **geodezik eğri**,

$$\kappa_g = \|D_T T\| \text{ ve } \gamma_g = \|\overline{D}_T T\| \tag{3.1.10}$$

ifadelerine de α eğrisinin $\mathbb{E}^3$ e ve S^2 yüzeyine **göre geodezik eğrilikleri** denir.

α eğrisine ait (T), (N), (B) ve (C) küresel eğrilerin, $\mathbb{E}^3$' e göre geodezik eğrilikleri sırasıyla

$$\begin{aligned} k_T &= \sec\varphi, \;\; k_N = \sqrt{1+\left(\frac{\varphi'}{\|W\|}\right)^2}, \\ k_B &= \csc\varphi, \;\; k_C = \sqrt{1+\left(\frac{\|W\|}{\varphi'}\right)^2}, \end{aligned} \tag{3.1.11}$$

ve S^2 ye göre geodezik eğrilikleri sırasıyla

$$\begin{aligned} \gamma_T &= \tan\varphi, \;\; \gamma_N = \frac{\varphi'}{\|W\|}, \\ \gamma_B &= \cot\varphi, \;\; \gamma_C = \frac{\|W\|}{\varphi'} \end{aligned} \tag{3.1.12}$$

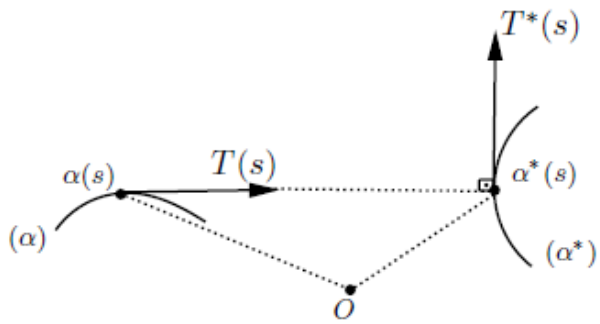
şeklinde verilir, (Hacısalihoğlu, 1983).

3.2 Öklid Uzayında İnvolüt-Evolüt Eğrileri

Tanım 3.2.1 $\alpha : I \to \mathbb{E}^3$ ve $\alpha^* : I \to \mathbb{E}^3$ diferensiyellenebilir iki eğri olsun. α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki teğet vektörü $\alpha^*(s)$ noktasından geçiyor ve bu noktadaki α^* eğrisinin teğet vektörüne dik oluyorsa α^* eğrisine α eğrisinin bir involütü, α eğrisine de α^* eğrisinin bir evolütü denir.

Bu tanıma göre α eğrisinin teğet vektörü T ve α^* involüt eğrisinin teğet vektörü T^* ile gösterilirse

$$\langle T(s), T^*(s)\rangle = 0.$$



Şekil 3.3: involüt- evolüt eğrileri

Şekilden bu eğriler arasında

$$\alpha^*(s) = \alpha(s) + \lambda T(s) \tag{3.2.1}$$

bağıntısı yazılabilir. Burada $\lambda = c - s$ ve c bir reel sabittir (Hacısalihoğlu, 1983), (Sabuncuoğlu, 2006).

Teorem 3.2.1 α^* eğrisi α eğrisinin bir involütü olsun. α ve α^* eğrilerinin Frenet çatıları ve eğrilikleri arasında

$$\begin{aligned} T^*(s) &= N(s) \\ N^*(s) &= \frac{-\kappa(s)}{\sqrt{\kappa(s)^2+\tau(s)^2}}T(s) + \frac{\tau(s)}{\sqrt{\kappa(s)^2+\tau(s)^2}}B(s) \\ B^*(s) &= \frac{\tau(s)}{\sqrt{\kappa(s)^2+\tau(s)^2}}T(s) + \frac{\kappa(s)}{\sqrt{\kappa(s)^2+\tau(s)^2}}B(s), \end{aligned} \tag{3.2.2}$$

$$\kappa^*(s) = \frac{\sqrt{\kappa^2(s)+\tau^2(s)}}{|c-s|\kappa(s)}, \quad \tau^*(s) = \frac{\left(\frac{\tau(s)}{\kappa(s)}\right)'\kappa(s)}{|c-s|(\kappa^2(s)+\tau^2(s))} \tag{3.2.3}$$

bağıntıları vardır (Sabuncuoğlu, 2006).

B binormal vektörü ile W Darboux vektörü arasındaki açı φ ile gösterilirse yukarıdaki teoremde verilen bağıntılar

$$\begin{aligned} T^* &= N \\ N^* &= -\cos\varphi T + \sin\varphi B \\ B^* &= \sin\varphi T + \cos\varphi B, \end{aligned} \tag{3.2.4}$$

$$\kappa^* = \frac{1}{|c-s|}\sec\varphi, \quad \tau^* = \frac{\left(\frac{\tau(s)}{\kappa(s)}\right)'\kappa(s)}{|c-s|\|W\|^2} \tag{3.2.5}$$

şeklinde elde edilir (Bilici, 1999). B^* binormal vektörü ile W^* Darboux vektörü arasındaki açı φ^* ile gösterilirse involüt eğrisinin eğrilikleri (3.1.5)'e benzer olarak

$$\kappa^* = \|W^*\|\cos\varphi^*, \quad \tau^* = \|W^*\|\sin\varphi^*$$

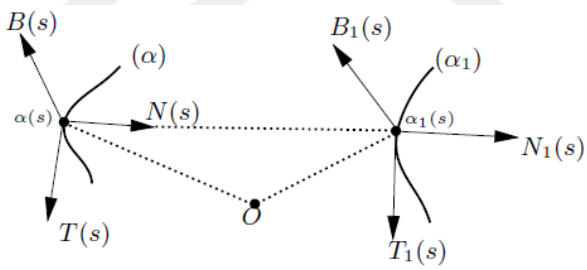
şeklinde olur. Burada (3.2.3) ve (3.2.5) bağıntıları dikkate alınırsa

$$\begin{cases} \sin\varphi^* = \dfrac{\varphi'}{\sqrt{\varphi'^2+\kappa^2+\tau^2}} = \dfrac{\varphi'}{\sqrt{\varphi'^2+\|W\|^2}} \\ \\ \cos\varphi^* = \dfrac{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}{\sqrt{\varphi'^2+\kappa^2+\tau^2}} = \dfrac{\|W\|}{\sqrt{\varphi'^2+\|W\|^2}} \\ \\ (\varphi^*)' = \Big(\dfrac{\varphi'}{\sqrt{\varphi'^2+\|W\|^2}}\Big)' \dfrac{\sqrt{\varphi'^2+\|W\|^2}}{\|W\|} \end{cases} \tag{3.2.6}$$

bulunur.

3.3 Öklid Uzayında Bertrand Eğri Çifti

Tanım 3.3.1 $\alpha : I \to \mathbb{E}^3$ ve $\alpha_1 : I \to \mathbb{E}^3$ diferensiyellenebilir iki eğri ve bu eğrilerin Frenet çatıları sırasıyla $\{T(s), N(s), B(s)\}$ ve $\{T_1(s), N_1(s), B_1(s)\}$ olsun. α eğrisinin N aslinormal vektörü ile α_1 eğrisinin N_1 aslinormal vektörü lineer bağımlı ise α eğrisine Bertrand eğrisi , α_1 eğrisine α eğrisinin Bertrand partner eğrisi adı verilir ve (α, α_1) ikilisine de Bertrand eğri çifti denir (Hacısalihoğlu, 1983), (Sabuncuoğlu, 2006).



Şekil 3.4: Bertrand eğri çifti

Şekil 4.2 den bu eğriler arasında,

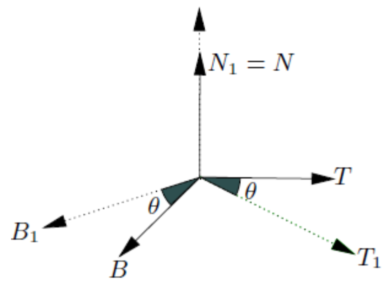
$$\alpha_1(s) = \alpha(s) + \lambda(s)N(s), \ \lambda = sabit. \tag{3.3.1}$$

bağıntısı vardır.

Teorem 3.3.1 (α, α_1) Bertrand eğri çiftinin teğet vektörleri arasındaki açı θ olmak üzere Frenet vektörleri arasında

$$\begin{cases} T_1 = \cos\theta T + \sin\theta B \\ N_1 = N \\ B_1 = -\sin\theta T + \cos\theta B \end{cases} \tag{3.3.2}$$

bağıntısı vardır. Burada θ açısı sabittir (Sabuncuoğlu, 2006).



Şekil 3.5: Teğet vektörleri arasındaki açı

Teorem 3.3.2 (α, α_1) Bertrand eğri çifti olsun. α eğrisinin eğrilikleri κ ve τ ise bu eğrilikler arasında

$$\lambda\kappa + \mu\tau = 1,\ \mu = \lambda\cot\theta \tag{3.3.3}$$

bağıntısı vardır (Hacısalihoğlu, 1983).

İspat.

$$\alpha_1(s) = \alpha(s) + \lambda N(s)$$

ifadesinin s' ye göre türevi alınırsa

$$\frac{d\alpha_1}{ds_1}\frac{ds_1}{ds} = T_1\frac{ds_1}{ds} = (1-\lambda\kappa)T(s) + \lambda\tau B(s)$$

olur. Bu ifade sırasıyla T ve B ile iç çarpılırsa

$$\cos\theta\frac{ds_1}{ds} = 1-\lambda\kappa,\quad \sin\theta\frac{ds_1}{ds} = \lambda\tau$$

ifadeleri bulunur. Bulunan bu ifadeler taraf tarafa oranlanırsa

$$\lambda\kappa + \mu\tau = 1,\quad \mu = \lambda\cot\theta = \text{sabit}$$

elde edilir.

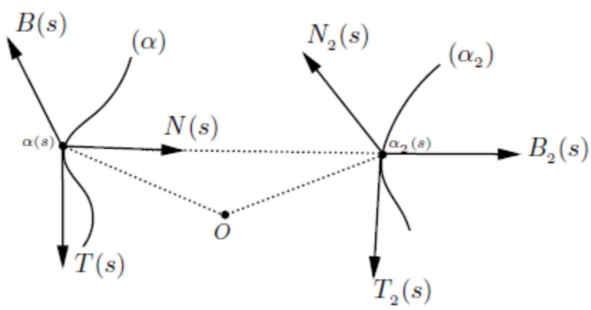
Teorem 3.3.3 (α, α_1) Bertrand eğri çifti olsun. α eğrisinin eğrilikleri κ ve τ, α_1 eğrisinin eğrilikleri κ_1 ve τ_1 ile gösterilirse bu eğrilikler arasında

$$\kappa_1 = \frac{\lambda\kappa - \sin^2\theta}{\lambda(1-\lambda\kappa)},\quad \tau_1 = \frac{\sin^2\theta}{\lambda^2\tau} \tag{3.3.4}$$

bağıntısı vardır (Sabuncuoğlu, 2006).

3.4 Öklid Uzayında Mannheim Eğri Çifti

Tanım 3.4.1 $\alpha : I \to \mathbb{E}^3$ ve $\alpha_2 : I \to \mathbb{E}^3$ diferensiyellenebilir iki eğri ve bu eğrilerin Frenet 3-ayaklıları sırasıyla $\{T(s), N(s), B(s)\}$ ve $\{T_2(s), N_2(s), B_2(s)\}$ olsun. α eğrisinin N aslinormal vektörü ile α_2 eğrisinin B_2 binormal vektörü lineer bağımlı ise α eğrisine Mannheim eğrisi, α_2 eğrisine de Mannheim partner eğrisi denir (Liu ve Wang, 2008).



Şekil 3.6: Mannheim eğri çifti

Bu tanıma göre Mannheim eğrisinin denklemi;

$$\alpha_2(s_2) = \alpha(s) - \lambda N(s), \; \lambda = sabit \tag{3.4.1}$$

veya

$$\alpha(s) = \alpha_2(s_2) + \lambda B_2(s) \tag{3.4.2}$$

şeklinde yazılır (Liu ve Wang, 2008).

Teorem 3.4.1 (α, α_2) Mannheim eğri çifti olsun Bu eğrilerin Frenet vektörleri arasında

$$\begin{cases} T = \cos\theta T_2 + \sin\theta N_2 \\ N = B_2 \\ B = -\sin\theta T_2 + \cos\theta N_2 \end{cases} \tag{3.4.3}$$

veya

$$\begin{cases} T_2 = \cos\theta T - \sin\theta B \\ N_2 = \sin\theta T + \cos\theta B \\ B_2 = N \end{cases} \tag{3.4.4}$$

bağıntıları vardır. Burada $\angle(T, T_2) = \theta$ olup

$$\cos\theta = \frac{ds_2}{ds}, \;\; \sin\theta = \lambda \tau_2 \frac{ds_2}{ds} \tag{3.4.5}$$

şeklindedir (Orbay ve Kasap, 2009).

Teorem 3.4.2 (α, α_2) Mannheim eğri çifti olsun. α eğrisinin eğriliği κ ve burulması τ olmak üzere bu eğrilikler arasında

$$\mu\tau - \lambda\kappa = 1, \mu = \lambda\cot\theta \tag{3.4.6}$$

bağıntısı vardır (Orbay ve Kasap, 2009).

İspat.

$$T_2 = (1+\lambda\kappa)\frac{ds}{ds_2}T - \lambda\tau\frac{ds}{ds_2}B$$

dir. Bu ifadeyle (3.4.4) ifadesini dikkate alınırsa,

$$\cos\theta = (1+\lambda\kappa)\frac{ds}{ds_2}, \ \sin\theta = \lambda\tau\frac{ds}{ds_2}$$

bulunur. Bu iki ifade oranlanırsa

$$\frac{\cos\theta}{1+\lambda\kappa} = \frac{\sin\theta}{\lambda\tau}$$

veya

$$\lambda\tau\cot\theta - \lambda\kappa = 1$$

olur. Burada $\mu = \lambda\cot\theta$ alınırsa

$$\mu\tau - \lambda\kappa = 1$$

eşitliği bulunur.

Teorem 3.4.3 (α, α_2) Mannheim eğri çifti, α eğrisinin eğrilikleri κ ve τ, α_2 eğrisinin eğrilik-leri κ_2 ve τ_2 olsun. Bu eğrilikler arasında

$$\kappa = \tau_2\sin\theta\frac{ds_2}{ds}, \ \ \tau = -\tau_2\cos\theta\frac{ds_2}{ds}, \tag{3.4.7}$$

$$\kappa_2 = \frac{d\theta}{ds_2} = \theta'\frac{\kappa}{\lambda\tau\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}, \ \ \tau_2 = (\kappa\sin\theta - \tau\cos\theta)\frac{ds_2}{ds}, \tag{3.4.8}$$

$$\tau_2 = \frac{\kappa}{\lambda\tau} \tag{3.4.9}$$

bağıntıları vardır (Orbay ve Kasap, 2009).

Teorem 3.4.4 (α, α_2) Mannheim eğri çiftinin $\alpha(s)$ ve $\alpha_2(s)$ noktalarındaki Frenet çatıları sırasıyla $\{T(s), N(s), B(s)\}$ ve $\{T_2(s), N_2(s), B_2(s)\}$ olsun. $B(s)$ binormal vektörü ile $W(s)$ Darboux vektörü arasındaki açı φ olmak üzere bu çatılar arasında,

$$\begin{cases} T_2 = \sin\varphi T + \cos\varphi B \\ N_2 = -\cos\varphi T + \sin\varphi B \\ B_2 = N \end{cases} \tag{3.4.10}$$

bağıntısı vardır (Şenyurt ve Çalışkan, 2014).

B_2 binormal vektörü ile W_2 Darboux vektörü arasındaki açı φ_2 ile gösterilirse Mannheim partner eğrisinin eğrilikleri (3.1.5)'e benzer olarak

$$\kappa_2 = \|W_2\| \cos \varphi_2, \quad \tau_2 = \|W_2\| \sin \varphi_2$$

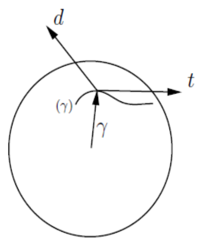
şeklinde olur. Burada (3.4.8) dikkate alınırsa

$$\begin{cases} \sin \varphi_2 = \dfrac{\|W\|}{\sqrt{\theta'^2 + \|W\|^2}} \\ \cos \varphi_2 = \dfrac{\theta'}{\sqrt{\theta'^2 + \|W\|^2}} \\ \varphi_2{}' = \left(\dfrac{\|W\|}{\sqrt{\theta'^2 + \|W\|^2}} \right)' \dfrac{\sqrt{\theta'^2 + \|W\|^2}}{\theta'} \end{cases} \tag{3.4.11}$$

elde edilir.

3.5 Küresel Serret-Frenet Formülleri

Tanım 3.5.1 $\gamma = \gamma(s)$ birim vektörünün birim küre yüzeyinde üzerinde çizdiği eğrinin teğet vektörü $t(s) = \gamma'(s)$ ve $d(s) = \gamma(s) \wedge t(s)$ olmak üzere $\{\gamma(s), t(s), d(s)\}$ ortonormal sistemine Sabban çatısı denir (Taşköprü, 2013).



Şekil 3.7: Sabban çatısı

Teorem 3.5.1 $\gamma : I \to S^2$ birim hızlı küresel eğrisinin Sabban çatısı $\{\gamma(s), t(s), d(s)\}$ olsun. Bu eğrinin küresel Frenet formülleri,

$$\begin{cases} \gamma'(s) = t(s) \\ t'(s) = -\gamma(s) + \kappa_g(s) d(s) \\ d'(s) = -\kappa_g(s) t(s) \end{cases} \tag{3.5.1}$$

şeklinde verilir. Burada κ_g,

$$\kappa_g = \langle t', d \rangle \tag{3.5.2}$$

şeklinde verilen bir geodezik eğriliktir (Taşköprü ve Tosun, 2014).

İspat. $t'(s) \in Sp\{\gamma(s), t(s), d(s)\}$ olduğundan

$$t'(s) = a_1\gamma(s) + a_2 t(s) + a_3 d(s)\ , a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$$

şeklinde yazılır. Burada

$$\begin{aligned} \langle t'(s), \gamma(s)\rangle &= a_1 \\ \langle t'(s), t(s)\rangle &= a_2 \\ \langle t'(s), d(s)\rangle &= \kappa_g = a_3 \end{aligned}$$

olur. $\langle t(s), \gamma(s)\rangle = 0$ idi. Bu eşitliğin türevi alınırsa

$$\begin{aligned} \langle t(s), \gamma(s)\rangle = 0 \quad &\Rightarrow \quad \langle t'(s), \gamma(s)\rangle + \langle t(s), \gamma'(s)\rangle = 0 \\ &\Rightarrow \quad \langle t'(s), \gamma(s)\rangle + 1 = 0 \\ &\Rightarrow \quad \langle t'(s), \gamma(s)\rangle = -1 = a_1 \end{aligned}$$

bulunur. $\langle t(s), t(s)\rangle = 1$ idi. Bu eşitliğin türevi alınırsa

$$\begin{aligned} \langle t(s), t(s)\rangle = 1 \quad &\Rightarrow \quad \langle t'(s), t(s)\rangle + \langle t(s), t'(s)\rangle = 0 \\ &\Rightarrow \quad 2\langle t'(s), t(s)\rangle = 0 \\ &\Rightarrow \quad \langle t'(s), \gamma(s)\rangle = 0 = a_2 \end{aligned}$$

dir. Buna göre

$$t'(s) = -\gamma(s) + \kappa_g(s) d(s)$$

şeklinde elde edilir. Şimdi $d'(s) = -\kappa_g(s)t(s)$ olduğunu gösterelim. $d'(s) \in Sp\{\gamma(s), t(s), d(s)\}$ olduğundan

$$d'(s) = b_1\gamma(s) + b_2 t(s) + b_3 d(s)\ , b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$$

şeklinde yazılır. Burada

$$\begin{aligned} \langle d'(s), \gamma(s)\rangle &= b_1 \\ \langle d'(s), t(s)\rangle &= b_2 \\ \langle d'(s), t(s)\rangle &= \kappa_g = b_3 \end{aligned}$$

olur. $\langle d(s), \gamma(s)\rangle = 0$ idi. Bu eşitliğin türevi alınırsa

$$\begin{aligned} \langle d(s), \gamma(s)\rangle = 0 \quad &\Rightarrow \quad \langle d'(s), \gamma(s)\rangle + \langle d(s), \gamma'(s)\rangle = 0 \\ &\Rightarrow \quad \langle d'(s), \gamma(s)\rangle = 0 = b_1 \end{aligned}$$

bulunur. $\langle t(s), d(s)\rangle = 0$ idi. Bu eşitliğin türevi alınırsa

$$\begin{aligned}
\langle t(s), d(s)\rangle = 0 \quad &\Rightarrow \quad \langle t'(s), d(s)\rangle + \langle t(s), d'(s)\rangle = 0 \\
&\Rightarrow \quad \kappa_g + \langle t(s), d'(s)\rangle = 0 \\
&\Rightarrow \quad \langle d'(s), t(s)\rangle = -\kappa_g = b_2
\end{aligned}$$

dir. $\langle d(s), d(s)\rangle = 0$ idi. Bu eşitliğin türevi alınırsa

$$\begin{aligned}
\langle d(s), d(s)\rangle = 0 \quad &\Rightarrow \quad \langle d'(s), d(s)\rangle + \langle d(s), d'(s)\rangle = 0 \\
&\Rightarrow \quad 2\langle d(s), d'(s)\rangle = 0 \\
&\Rightarrow \quad \langle d'(s), d(s)\rangle = 0 = b_3
\end{aligned}$$

elde edilir. Buna göre

$$d'(s) = -\kappa_g(s)t(s)$$

olur. Bu da ispatı tamamlar.

3.6 Öklid Uzayında Smarandache Eğrileri

Tanım 3.6.1 Konum vektörü, herhangi bir α eğrisinin Frenet vektörleri alınarak elde edilen regüler eğriye Smarandache eğrisi denir (Turgut ve Yılmaz, 2008).

Bu tanım şu şekilde de verilebilir:

Tanım 3.6.2 $\alpha : I \to \mathbb{E}^3$ birim hızlı regüler eğrinin Frenet çatısı $\{T, N, B\}$ olsun.

$$\beta(s) = \frac{a(s)T(s) + b(s)N(s) + c(s)B(s)}{\sqrt{a(s)^2 + b(s)^2 + c(s)^2}} \tag{3.6.1}$$

olan vektörün çizdiği regüler eğriye Smarandache eğrisi denir (Şenyurt ve Sivas, 2013).

(3.6.1) bağıntısına göre Smarandache eğrileri

$$\begin{aligned}
\beta(s) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(T(s) + N(s)) \text{ TN-Smarandache eğrisi,} \\
\beta(s) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(N(s) + B(s)) \text{ NB-Smarandache eğrisi,} \\
\beta(s) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(T(s) + B(s)) \text{ TB-Smarandache eğrisi,} \\
\beta(s) &= \frac{1}{\sqrt{3}}(T(s) + N(s) + B(s)) \text{ TNB-Smarandache eğrisi,} \\
\beta(s) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(N(s) + C(s)) \text{ NC-Smarandache eğrisi}
\end{aligned}$$

biçiminde yazılır.

T, N, B Frenet vektörleri ile C birim Darboux vektörünün birim küre yüzeyi üzerinde çizdikleri küresel eğrilerin Sabban çatıları, küresel Frenet formülleri ve geodezik eğrilikleri sırasıyla

(T) teğetler göstergesi için;

$$\begin{cases} T = T, \quad T_T = N, \quad T \wedge T_T = B, \\ T' = T_T, \quad {T_T}' = -T + \frac{\tau}{\kappa} T \wedge T_T, \quad T \wedge {T_T}' = -\frac{\tau}{\kappa} T_T, \\ \kappa_g = \frac{\tau}{\kappa}, \end{cases} \tag{3.6.2}$$

(N) aslinormaller göstergesi için;

$$\begin{cases} N = N, \quad T_N = -\cos\varphi T + \sin\varphi B, \quad N \wedge T_N = \sin\varphi T + \cos\varphi B, \\ N' = T_N, \quad {T_N}' = -N + \frac{\varphi'}{\|W\|} N \wedge T_N, \quad N \wedge {T_N}' = -\frac{\varphi'}{\|W\|} T_N, \\ \kappa_g = \frac{\varphi'}{\|W\|}, \end{cases} \tag{3.6.3}$$

(B) binormaller göstergesi için;

$$\begin{cases} B = B, \quad T_B = -N, \quad B \wedge T_B = T, \\ B' = T_B, \quad {T_B}' = -B + \frac{\kappa}{\tau} B \wedge T_B, \quad B \wedge {T_B}' = -\frac{\kappa}{\tau} T_B, \\ \kappa_g = \frac{\kappa}{\tau}, \end{cases} \tag{3.6.4}$$

(C) eğrisi için;

$$\begin{cases} C = \sin\varphi T + \cos\varphi B, \quad T_C = \cos\varphi T - \sin\varphi B, \quad C \wedge T_C = N, \\ C' = T_C, \quad {T_C}' = -C + \frac{\|W\|}{\varphi'} C \wedge T_C, \quad C \wedge {T_C}' = -\frac{\|W\|}{\varphi'} T_C, \\ \kappa_g = \frac{\|W\|}{\varphi'}, \end{cases} \tag{3.6.5}$$

şeklinde verilir (Çalışkan ve Şenyurt, 2015a), (Çalışkan ve Şenyurt, 2016).

Tanım 3.6.3 $\alpha : I \to S^2$ birim hızlı regüler eğrinin teğetler göstergesine ait Sabban çatısı $\{T, T_T, T\wedge T_T\}$ olsun. Buradan elde edilen Smarandache eğrileri

$$\begin{aligned}
\beta(s) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\big(T(s)+T_T(s)\big),\ TT_T\text{- Smarandache eğrisi,}\\
\beta(s) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\big(T(s)+(T\wedge T_T)(s)\big),\ T(T\wedge T_T)\text{- Smarandache eğrisi,}\\
\beta(s) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\big(T_T(s)+(T\wedge T_T)(s)\big),\ T_T(T\wedge T_T)\text{- Smarandache eğrisi,}\\
\beta(s) &= \frac{1}{\sqrt{3}}\big(T(s)+T_T(s)+(T\wedge T_T)(s)\big),\ TT_TT\wedge T_T\text{- Smarandache eğrisi}
\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır (Çalışkan ve Şenyurt, 2015a).

Teorem 3.6.1 $\alpha : I \to S^2$ eğrisinin teğetler göstergesinin Sabban çatısı $\{T, T_T, T\wedge T_T\}$ olsun. Buradan elde edilen Smarandache eğrilerinin geodezik eğrilikleri,

$$\kappa_g^{\beta_{TT_T}} = \frac{1}{(2+(\frac{\tau}{\kappa})^2)^{\frac{5}{2}}}(\frac{\tau}{\kappa}\lambda_1+\frac{\tau}{\kappa}\lambda_2+2\lambda_3),$$

$$\kappa_g^{\beta_{T(T\wedge T_T)}} = \frac{\kappa+\tau}{\kappa-\tau},$$

$$\kappa_g^{\beta_{T_TT\wedge T_T}} = \frac{1}{(1+2(\frac{\tau}{\kappa})^2)^{\frac{5}{2}}}(2\frac{\tau}{\kappa}\mu_1-\frac{\tau}{\kappa}\mu_2+\mu_3),$$

$$\kappa_g^{\beta_{TT_T(T\wedge T_T)}} = \frac{1}{(1+2(\frac{\tau}{\kappa})^2)^{\frac{5}{2}}}((2\frac{\tau}{\kappa}-1)\varepsilon_1-(1+\frac{\tau}{\kappa})\varepsilon_2+(2-\frac{\tau}{\kappa})\varepsilon_3),$$

dır. Burada

$$\begin{cases}
\lambda_1 = \frac{\tau}{\kappa}\big(\frac{\tau}{\kappa}\big)'-\big(\frac{\tau}{\kappa}\big)^2-2\\
\lambda_2 = -\frac{\tau}{\kappa}\big(\frac{\tau}{\kappa}\big)'-\big(\frac{\tau}{\kappa}\big)^4-3\big(\frac{\tau}{\kappa}\big)^2-2\\
\lambda_3 = (\frac{\tau}{\kappa})'+\big(\frac{\tau}{\kappa}\big)^3+2\big(\frac{\tau}{\kappa}\big),\\
\mu_1 = 2\frac{\tau}{\kappa}\big(\frac{\tau}{\kappa}\big)'+\big(\frac{\tau}{\kappa}\big)^3+2\big(\frac{\tau}{\kappa}\big)\\
\mu_2 = -\big(\frac{\tau}{\kappa}\big)'-2\big(\frac{\tau}{\kappa}\big)^4-3\big(\frac{\tau}{\kappa}\big)^2-1\\
\mu_3 = (\frac{\tau}{\kappa})'-2\big(\frac{\tau}{\kappa}\big)^4-\big(\frac{\tau}{\kappa}\big)^2,
\end{cases}$$

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'\left(2\frac{\tau}{\kappa}-1\right)+2\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)^3-\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)^2+4\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)-2 \\ \\ \varepsilon_2 = -\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'\left(\frac{\tau}{\kappa}+1\right)-2\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)^4+2\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)^3-4\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)^2+2\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)-2 \\ \\ \varepsilon_3 = \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'\left(2-\frac{\tau}{\kappa}\right)-2\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)^4+4\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)^3-4\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)^2+2\left(\frac{\tau}{\kappa}\right), \end{cases}$$

şeklinde birer katsayıdır (Çalışkan ve Şenyurt, 2015a).

Tanım 3.6.4 $\alpha : I \to S^2$ birim hızlı regüler eğrinin aslinormaller göstergesine ait Sabban çatısı $\{N, T_N, N \wedge T_N\}$ olsun. Buradan elde edilen Smarandache eğrileri

$$\begin{aligned} \beta(s) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\big(N(s)+T_N(s)\big), \ NT_N\text{- Smarandache eğrisi,} \\ \beta(s) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\big(N(s)+(N\wedge T_N)(s)\big), \ N(N\wedge T_N)\text{- Smarandache eğrisi,} \\ \beta(s) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\big(T_N(s)+(N\wedge T_N)(s)\big), \ T_N(N\wedge T_N)\text{- Smarandache eğrisi,} \\ \beta(s) &= \frac{1}{\sqrt{3}}\big(N(s)+T_N(s)+(N\wedge T_N)(s)\big), \ NT_N(N\wedge T_N)\text{- Smarandache eğrisi} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır (Çalışkan ve Şenyurt, 2015a).

Teorem 3.6.2 $\alpha : I \to S^2$ eğrisinin aslinormaller göstergesinin Sabban çatısı $\{N, T_N, N \wedge T_N\}$ olsun. Buradan elde edilen Smarandache eğrilerinin geodezik eğrilikleri,

$$\kappa_g^{\beta_{NT_N}} = \frac{1}{\left(2+\left(\frac{\varphi'}{\|W\|}\right)^2\right)^{\frac{5}{2}}}\left(\frac{\varphi'}{\|W\|}\lambda_1+\frac{\varphi'}{\|W\|}\lambda_2+2\lambda_3\right),$$

$$\kappa_g^{\beta_{N(T\wedge T_N)}} = \frac{\|W\|+\varphi'}{\|W\|-\varphi'},$$

$$\kappa_g^{\beta_{T_N N\wedge T_N}} = \frac{1}{\left(1+2\left(\frac{\varphi'}{\|W\|}\right)^2\right)^{\frac{5}{2}}}\left(2\frac{\varphi'}{\|W\|}\mu_1-\frac{\varphi'}{\|W\|}\mu_2+\mu_3\right),$$

$$\kappa_g^{\beta_{NT_N(N\wedge T_N)}} = \frac{1}{\left(1+2\left(\frac{\varphi'}{\|W\|}\right)^2\right)^{\frac{5}{2}}}\left(\left(2\frac{\varphi'}{\|W\|}-1\right)\xi_1-\left(1+\frac{\varphi'}{\|W\|}\right)\xi_2+\left(2-\frac{\varphi'}{\|W\|}\right)\xi_3\right)$$

şeklindedir. Burada

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{\varphi'}{\|W\|}\left(\frac{\varphi'}{\|W\|}\right)'-\left(\frac{\varphi'}{\|W\|}\right)^2-2 \\ \\ \lambda_2 = -\frac{\varphi'}{\|W\|}\left(\frac{\varphi'}{\|W\|}\right)'-\left(\frac{\varphi'}{\|W\|}\right)^4-3\left(\frac{\varphi'}{\|W\|}\right)^2-2 \\ \\ \lambda_3 = \left(\frac{\varphi'}{\|W\|}\right)'+\left(\frac{\varphi'}{\|W\|}\right)^3+2\left(\frac{\varphi'}{\|W\|}\right), \end{cases}$$

$$\begin{cases}\mu_1 = 2\frac{\varphi'}{\|W\|}\big(\frac{\varphi'}{\|W\|}\big)' + \big(\frac{\varphi'}{\|W\|}\big)^3 + 2\big(\frac{\varphi'}{\|W\|}\big)\\[2ex] \mu_2 = -\big(\frac{\varphi'}{\|W\|}\big)' - 2\big(\frac{\varphi'}{\|W\|}\big)^4 - 3\big(\frac{\varphi'}{\|W\|}\big)^2 - 1\\[2ex] \mu_3 = \big(\frac{\varphi'}{\|W\|}\big)' - 2\big(\frac{\varphi'}{\|W\|}\big)^4 - \big(\frac{\varphi'}{\|W\|}\big)^2,\\[2ex] \xi_1 = \big(\frac{\varphi'}{\|W\|}\big)'\big(2\frac{\varphi'}{\|W\|} - 1\big) + 2\big(\frac{\varphi'}{\|W\|}\big)^3 - \big(\frac{\varphi'}{\|W\|}\big)^2 + 4\frac{\varphi'}{\|W\|} - 2\\[2ex] \xi_2 = -\big(\frac{\varphi'}{\|W\|}\big)'\big(\frac{\varphi'}{\|W\|} + 1\big) - 2\big(\frac{\varphi'}{\|W\|}\big)^4 + 2\big(\frac{\varphi'}{\|W\|}\big)^3 - 4\big(\frac{\varphi'}{\|W\|}\big)^2 + 2\big(\frac{\varphi'}{\|W\|}\big) - 2\\[2ex] \xi_3 = \big(\frac{\varphi'}{\|W\|}\big)'\big(2 - \frac{\varphi'}{\|W\|}\big) - 2\big(\frac{\varphi'}{\|W\|}\big)^4 + 4\big(\frac{\varphi'}{\|W\|}\big)^3 - 4\big(\frac{\varphi'}{\|W\|}\big)^2 + 2\big(\frac{\varphi'}{\|W\|}\big)\end{cases}$$

şeklinde birer katsayıdır (Çalışkan ve Şenyurt, 2015a).

Tanım 3.6.5 $\alpha : I \to S^2$ birim hızlı regüler eğrinin binormaller göstergesine ait Sabban çatısı $\{B, T_B, B \wedge T_B\}$ olsun. Buradan elde edilen Smarandache eğrileri

$$\begin{aligned}\beta(s) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\big(B(s) + T_B(s)\big), \text{ } BT_B\text{- Smarandache eğrisi}\\ \beta(s) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\big(B(s) + (B \wedge T_B)(s)\big), \text{ } B(B \wedge T_B)\text{- Smarandache eğrisi}\\ \beta(s) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\big(T_B(s) + (B \wedge T_B)(s)\big), \text{ } T_B(B \wedge T_B)\text{- Smarandache eğrisi}\\ \beta(s) &= \frac{1}{\sqrt{3}}\big(B(s) + T_B(s) + (B \wedge T_B)(s)\big), \text{ } BT_B(B \wedge T_B)\text{- Smarandache eğrisi}\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır (Çalışkan ve Şenyurt, 2015a).

Teorem 3.6.3 $\alpha : I \to S^2$ eğrisinin binormaller göstergesinin Sabban çatısı $\{B, T_B, B \wedge T_B\}$ olsun. Buradan elde edilen Smarandache eğrilerinin geodezik eğrilikleri,

$$\begin{aligned}\kappa_g^{\beta_{BT_B}} &= \frac{1}{(2 + (\frac{\kappa}{\tau})^2)^{\frac{5}{2}}}\Big(\frac{\kappa}{\tau}\lambda_1 + \frac{\kappa}{\tau}\lambda_2 + 2\lambda_3\Big),\\ \kappa_g^{\beta_{B(B\wedge T_B)}} &= \frac{\tau + \kappa}{\tau - \kappa},\\ \kappa_g^{\beta_{T_B B\wedge T_B}} &= \frac{1}{(1 + 2(\frac{\kappa}{\tau})^2)^{\frac{5}{2}}}\Big(2\frac{\kappa}{\tau}\mu_1 - \frac{\kappa}{\tau}\mu_2 + \mu_3\Big),\\ \kappa_g^{\beta_{BT_B(B\wedge T_B)}} &= \frac{1}{(1 + 2(\frac{\kappa}{\tau})^2)^{\frac{5}{2}}}\Big(2\big(\frac{\kappa}{\tau} - 1\big)\xi_1 - \big(1 + \frac{\kappa}{\tau}\big)\xi_2 + \big(2 - \frac{\kappa}{\tau}\big)\xi_3\Big)\end{aligned}$$

şeklindedir. Burada

$$\begin{cases}\lambda_1 = \frac{\kappa}{\tau}\left(\frac{\kappa}{\tau}\right)' - \left(\frac{\kappa}{\tau}\right)^2 - 2\\ \lambda_2 = -\frac{\kappa}{\tau}\left(\frac{\kappa}{\tau}\right)' - \left(\frac{\kappa}{\tau}\right)^4 - 3\left(\frac{\kappa}{\tau}\right)^2 - 2\\ \lambda_3 = (\frac{\kappa}{\tau})' + \left(\frac{\kappa}{\tau}\right)^3 + 2\left(\frac{\kappa}{\tau}\right),\\ \mu_1 = 2\frac{\kappa}{\tau}\left(\frac{\kappa}{\tau}\right)' + \left(\frac{\kappa}{\tau}\right)^3 + 2\left(\frac{\kappa}{\tau}\right)\\ \mu_2 = -\left(\frac{\kappa}{\tau}\right)' - 2\left(\frac{\kappa}{\tau}\right)^4 - 3\left(\frac{\kappa}{\tau}\right)^2 - 1\\ \mu_3 = (\frac{\kappa}{\tau})' - 2\left(\frac{\kappa}{\tau}\right)^4 - \left(\frac{\kappa}{\tau}\right)^2,\\ \xi_1 = \left(\frac{\kappa}{\tau}\right)'\left(2\frac{\kappa}{\tau} - 1\right) + 2\left(\frac{\kappa}{\tau}\right)^3 - \left(\frac{\kappa}{\tau}\right)^2 + 4\frac{\kappa}{\tau} - 2\\ \xi_2 = -\left(\frac{\kappa}{\tau}\right)'\left(\frac{\kappa}{\tau} + 1\right) - 2\left(\frac{\kappa}{\tau}\right)^4 + 2\left(\frac{\kappa}{\tau}\right)^3 - 4\left(\frac{\kappa}{\tau}\right)^2 + 2\left(\frac{\kappa}{\tau}\right) - 2\\ \xi_3 = \left(\frac{\kappa}{\tau}\right)'\left(2 - \frac{\kappa}{\tau}\right) - 2\left(\frac{\kappa}{\tau}\right)^4 + 4\left(\frac{\kappa}{\tau}\right)^3 - 4\left(\frac{\kappa}{\tau}\right)^2 + 2\left(\frac{\kappa}{\tau}\right),\end{cases}$$

şeklinde birer katsayıdır (Çalışkan ve Şenyurt, 2015a).

Tanım 3.6.6 $\alpha : I \to S^2$ eğrisinin birim Darboux vektörünün birim küre üzerinde çizdiği eğriye ait Sabban çatısı $\{C, T_C, C \wedge T_C\}$ olsun. Buradan elde edilen Smarandache eğrileri

$$\begin{aligned}\beta(s) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\big(C(s) + T_C(s)\big), \; CT_C\text{- Smarandache eğrisi},\\ \beta(s) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\big(C(s) + (C \wedge T_C)(s)\big), \; C(C \wedge T_C)\text{- Smarandache eğrisi},\\ \beta(s) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\big(T_C(s) + (C \wedge T_C)(s)\big), \; T_C(C \wedge T_C)\text{- Smarandache eğrisi},\\ \beta(s) &= \frac{1}{\sqrt{3}}\big(C(s) + T_C(s) + (C \wedge T_C)(s)\big), \; CT_C(C \wedge T_C)\text{- Smarandache eğrisi}\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır, (Çalışkan ve Şenyurt, 2016).

Teorem 3.6.4 $\alpha : I \to S^2$ eğrisinin birim Darboux vektörünün birim küre üzerinde çizdiği eğriye ait Sabban çatısı $\{C, T_C, C \wedge T_C\}$ olsun. Buradan elde edilen Smarandache eğrilerinin geodezik eğrilikleri;

$$\kappa_g^{\beta_{CT_C}} = \frac{1}{(2+(\frac{\|W\|}{\varphi'})^2)^{\frac{5}{2}}}\Big(\frac{\|W\|}{\varphi'}\lambda_1 + \frac{\|W\|}{\varphi'}\lambda_2 + 2\lambda_3\Big),$$

$$\kappa_g^{\beta_{C(C\wedge T_C)}} = \frac{\varphi' + \|W\|}{\varphi' - \|W\|},$$

$$\kappa_g^{\beta_{T_C(C\wedge T_C)}} = \frac{1}{(1+2(\frac{\|W\|}{\varphi'})^2)^{\frac{5}{2}}}\Big(2\frac{\|W\|}{\varphi'}\xi_1 - \frac{\|W\|}{\varphi'}\xi_2 + \xi_3\Big),$$

$$\kappa_g^{\beta_{CT_C(C\wedge T_C)}} = \frac{1}{(1+2(\frac{\|W\|}{\varphi'})^2)^{\frac{5}{2}}}\Big(2(\frac{\|W\|}{\varphi'} - 1)\mu_1 - (1+\frac{\|W\|}{\varphi'})\mu_2 + (2-\frac{\|W\|}{\varphi'})\mu_3\Big)$$

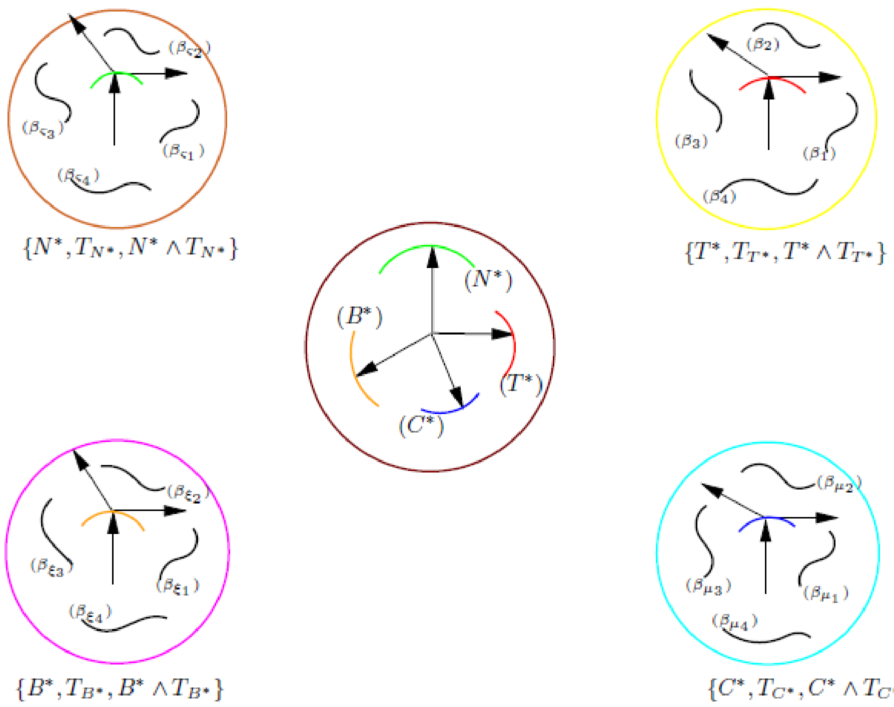
şeklindedir. Burada

$$\begin{cases}
\lambda_1 = \frac{\|W\|}{\varphi'}\big(\frac{\|W\|}{\varphi'}\big)' - \big(\frac{\|W\|}{\varphi'}\big)^2 - 2 \\
\lambda_2 = -\frac{\|W\|}{\varphi'}\big(\frac{\|W\|}{\varphi'}\big)' - \big(\frac{\|W\|}{\varphi'}\big)^4 - 3\big(\frac{\|W\|}{\varphi'}\big)^2 - 2 \\
\lambda_3 = \big(\frac{\|W\|}{\varphi'}\big)' + \big(\frac{\|W\|}{\varphi'}\big)^3 + 2\big(\frac{\|W\|}{\varphi'}\big), \\
\xi_1 = 2\frac{\|W\|}{\varphi'}\big(\frac{\|W\|}{\varphi'}\big)' + \big(\frac{\|W\|}{\varphi'}\big)^3 + 2\big(\frac{\|W\|}{\varphi'}\big) \\
\xi_2 = -\big(\frac{\|W\|}{\varphi'}\big)' - 2\big(\frac{\|W\|}{\varphi'}\big)^4 - 3\big(\frac{\|W\|}{\varphi'}\big)^2 - 1 \\
\xi_3 = \big(\frac{\|W\|}{\varphi'}\big)' - 2\big(\frac{\|W\|}{\varphi'}\big)^4 - \big(\frac{\|W\|}{\varphi'}\big)^2, \\
\mu_1 = \big(\frac{\|W\|}{\varphi'}\big)'\big(2\frac{\|W\|}{\varphi'} - 1\big) + 2\big(\frac{\|W\|}{\varphi'}\big)^3 - \big(\frac{\|W\|}{\varphi'}\big)^2 + 4\frac{\|W\|}{\varphi'} - 2 \\
\mu_2 = -\big(\frac{\|W\|}{\varphi'}\big)'\big(\frac{\|W\|}{\varphi'} + 1\big) - 2\big(\frac{\|W\|}{\varphi'}\big)^4 + 2\big(\frac{\|W\|}{\varphi'}\big)^3 - 4\big(\frac{\|W\|}{\varphi'}\big)^2 + 2\big(\frac{\|W\|}{\varphi'}\big) - 2 \\
\mu_3 = \big(\frac{\|W\|}{\varphi'}\big)'\big(2 - \frac{\|W\|}{\varphi'}\big) - 2\big(\frac{\|W\|}{\varphi'}\big)^4 + 4\big(\frac{\|W\|}{\varphi'}\big)^3 - 4\big(\frac{\|W\|}{\varphi'}\big)^2 + 2\big(\frac{\|W\|}{\varphi'}\big),
\end{cases}$$

şeklinde birer katsayıdır (Çalışkan ve Şenyurt, 2016).

4. BULGULAR ve TARTIŞMA

Bu bölüm çalışmamızın orjinal kısmını oluşturmaktadır. Burada bazı özel eğrilerin, **involüt-evolüt eğrileri, Bertrand eğri çifti, Mannheim eğri çifti**, Frenet vektörleri ile birim Darboux vektörlerinin birim küre yüzeyi üzerinde çizdikleri küresel eğrilere ait Sabban çatıları, küresel Frenet formülleri ve geodezik eğrilikleri hesaplandı. Daha sonra bu eğrilere ait Sabban çatıları konum vektörü olarak alındığında bu vektörün çizdiği Smarandache eğrilerinin tanımı verilerek geodezik eğrilikleri bulundu. Son olarak herbir eğri için bulunan sonuçlar evolüt eğrisi, Bertrand eğrisi ve Mannheim eğrisine bağlı ifadeleri verildi. Konuyla ilgili örnek bulunup Mapple programıyla çizimleri yapıldı. Çalışmamızdan elde edilen İnvolüt eğrisinin birim Darboux vektörünün birim küre yüzeyi üzerinde çizdiği eğrinin Sabban çatısına göre Smarandache eğrilerine ait olan sonuçlar **Mathematical Sciences and Applications E-notes**, *4(2):131-138, 2016*, Bertrand eğri çiftinin birim Darboux vektörünün birim küre yüzeyi üzerinde çizdiği eğrinin Sabban çatısına göre Smarandache eğrileri ait olan sonuçlarda **AİP Conference Proceedings,** *1726, 020045, 2016,* isimli dergilerde yayınlandı. Aşağıdaki şekiller küresel eğrilere ait Sabban çatıları ve Smarandache eğrileri ile sembolik olarak gösterilirse,



Şekil 4.1: Küresel gösterge eğrilerine ait Sabban çatıları ve Smarandache eğrileri

4.1 İnvolüt-Evolüt Eğrilerine Ait Sabban Çatısına Göre Smarandache Eğrileri

Bu bölümde, α eğrisine ait α^* involüt eğrisinin Frenet vektörleri ile birim Darboux vektörünün birim küre yüzeyi üzerinde çizdiği eğrilerin Sabban çatıları ve bu çatılar konum vektörü olarak alındığında oluşan Smarandache eğrileri araştırıldı. Bulunan sonuçların evolüt eğrisine bağlı ifadeleri verildi. İnvolüt eğrisinin T^*, N^* ve B^* Frenet vektörleri ile C^* birim Darboux vektörünün birim küre yüzeyi üzerinde çizdikleri küresel eğrilerin Sabban çatıları, küresel Frenet formülleri ve geodezik eğrilikleri (Tanım 3.5.1) ve (Teorem 3.5.1)'e göre benzer olarak sırasıyla

(T^*) teğetler göstergesi için;

$$\begin{cases} T^* = T^*, \;\; T_{T^*} = N^*, \;\; T^* \wedge T_{T^*} = B^*, \\[2ex] {T^*}' = T_{T^*}, \;\; {T_{T^*}}' = -T^* + \frac{\tau^*}{\kappa^*} T^* \wedge T_{T^*}, \;\; T^* \wedge {T_{T^*}}' = -\frac{\tau^*}{\kappa^*} T_{T^*}, \\[2ex] \kappa_g = \langle {T_{T^*}}', T^* \wedge T_{T^*} \rangle = \frac{\tau^*}{\kappa^*}, \end{cases} \tag{4.1.1}$$

(N^*) aslinormaller göstergesi için;

$$\begin{cases} N^* = N^*, \; T_{N^*} = -\cos\varphi^* T^* + \sin\varphi^* B^*, \; N^* \wedge T_{N^*} = \sin\varphi^* T^* + \cos\varphi^* B^*, \\[2ex] {N^*}' = T_{N^*}, \;\; {T_{N^*}}' = -N^* + \dfrac{{\varphi^*}'}{\|W^*\|} N^* \wedge T_{N^*}, \;\; N^* \wedge {T_{N^*}}' = -\dfrac{{\varphi^*}'}{\|W^*\|} T_N^*, \\[2ex] \kappa_g = \langle T'_{N^*}, N^* \wedge T_{N^*} \rangle = \frac{{\varphi^*}'}{\|W^*\|}, \end{cases} \tag{4.1.2}$$

(B^*) binormaller göstergesi için;

$$\begin{cases} B^* = B^*, \;\; T_{B^*} = -N^*, \;\; B^* \wedge T_{B^*} = T^*, \\[2ex] {B^*}' = T_{B^*}, \;\; {T_{B^*}}' = -B^* + \frac{\kappa^*}{\tau^*} B^* \wedge T_{B^*}, \;\; B^* \wedge {T_{B^*}}' = -\frac{\kappa^*}{\tau^*} T_{B^*}, \\[2ex] \kappa_g = \langle {T_{B^*}}', B^* \wedge T_{B^*} \rangle = \frac{\kappa^*}{\tau^*}, \end{cases} \tag{4.1.3}$$

(C^*) eğrisi için;

$$\begin{cases} C^* = \sin\varphi^* T^* + \cos\varphi^* B^*,\ T_{C^*} = \cos\varphi^* T^* - \sin\varphi^* B^*,\ C^* \wedge T_{C^*} = N^*, \\ C^{*\prime} = T_{C^*},\ T_{C^*}{}' = -C^* + \dfrac{\|W^*\|}{\varphi^{*\prime}} C^* \wedge T_{C^*},\ C^* \wedge T_{C^*}{}' = -\dfrac{\|W^*\|}{\varphi^{*\prime}} T_C^*, \\ \kappa_g = \langle T_{C^*}{}', C^* \wedge T_{C^*} \rangle = \frac{\|W^*\|}{\varphi^{*\prime}}, \end{cases} \tag{4.1.4}$$

şeklinde bulunur.

Tanım 4.1.1 $\alpha^* : I \to S^2$ involüt eğrisinin teğetler göstergesine ait Sabban çatısı $\{T^*, T_{T^*}, T^* \wedge T_{T^*}\}$ olsun.

$$\beta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(T^* + T_{T^*}) \tag{4.1.5}$$

şeklinde tanımlı vektörün çizdiği regüler eğriye $T^*T_{T^*}$-Smarandache eğrisi denir.

Teorem 4.1.1 $T^*T_{T^*}$-Smarandache eğrisinin geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\beta_1} = \frac{1}{\left(2 + \left(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\right)^2\right)^{\frac{5}{2}}} \left(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\lambda_1 + \frac{\tau^*}{\kappa^*}\lambda_2 + 2\lambda_3\right) \tag{4.1.6}$$

denklemiyle verilir. Burada

$$\begin{cases} \lambda_1 = -2 - \left(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\right)^2 + \left(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\right)' \left(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\right) \\ \lambda_2 = -2 - 3\left(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\right)^2 - \left(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\right)^4 - \left(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\right)' \left(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\right) \\ \lambda_3 = 2\left(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\right) + \left(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\right)^3 + \left(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\right)' \end{cases} \tag{4.1.7}$$

şeklinde birer katsayıdır.

İspat.

$$\beta_1(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(T^* + T_{T^*})$$

eğrisinin s_{β_1} yay parametresine göre türevi alınırsa

$$T_{\beta_1} \frac{ds_{\beta_1}}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-T^* + T_{T^*} + \frac{\tau^*}{\kappa^*} T^* \wedge T_{T^*}\right)$$

olur. Bu eşitliğin normu alınırsa $\dfrac{ds_{\beta_1}}{ds}$ ifadesi

$$\frac{ds_{\beta_1}}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2 + \left(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\right)^2}$$

şeklinde bulunur. Bulunan bu ifade yukarıda yerine yazılırsa $T_{\beta_1}(s)$ teğet vektörü

$$T_{\beta_1}(s) = \frac{1}{\sqrt{2+(\frac{\tau^*}{\kappa^*})^2}}(-T^* + T_{T^*} + \frac{\tau^*}{\kappa^*}T^* \wedge T_{T^*}) \tag{4.1.8}$$

biçiminde olur. (4.1.5) ve (4.1.8) ifadelerinden elde edilen $\beta_1 \wedge T_{\beta_1}$ vektörü

$$\beta_1 \wedge T_{\beta_1}(s) = \frac{1}{\sqrt{4+2(\frac{\tau^*}{\kappa^*})^2}}(\frac{\tau^*}{\kappa^*}T^* - \frac{\tau^*}{\kappa^*}T^*_{T^*} + 2T^* \wedge T_{T^*}) \tag{4.1.9}$$

şeklinde yazılır. (4.1.1) ifadesi (4.1.5), (4.1.8) ve (4.1.9) ifadelerinde yerine yazılırsa β_1-Smarandache eğrisine ait Sabban çatısının involüt eğrisine bağlı ifadesi

$$\begin{aligned}
\beta_1(s) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(T^* + N^*), \\
T_{\beta_1}(s) &= \frac{1}{\sqrt{2+(\frac{\tau^*}{\kappa^*})^2}}(-T^* + N^* + \frac{\tau^*}{\kappa^*}B^*), \qquad (4.1.10)\\
\beta_1 \wedge T_{\beta_1}(s) &= \frac{1}{\sqrt{4+2(\frac{\tau^*}{\kappa^*})^2}}(\frac{\tau^*}{\kappa^*}T^* - \frac{\tau^*}{\kappa^*}N^* + 2B^*)
\end{aligned}$$

denklemlerine dönüşür. (4.1.8) ifadesinin türevi alınırsa katsayılar

$$\begin{cases}
\lambda_1 = -2 - \left(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\right)^2 + \left(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\right)'\left(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\right) \\
\lambda_2 = -2 - 3\left(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\right)^2 - \left(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\right)^4 - \left(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\right)'\left(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\right) \\
\lambda_3 = 2\left(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\right) + \left(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\right)^3 + \left(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\right)'
\end{cases}$$

olmak üzere ${T_{\beta_1}}'(s)$ türev vektörü

$$T'_{\beta_1}(s) = \frac{\sqrt{2}}{\left(2+\left(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\right)^2\right)^2}(\lambda_1 T^* + \lambda_2 T_{T^*} + \lambda_3 T^* \wedge T_{T^*}) \tag{4.1.11}$$

olur. Burada (4.1.1) yerine yazılırsa $T'_{\beta_1}(s)$ türev vektörünün involüt eğrisine bağlı ifadesi

$$T'_{\beta_1}(s) = \frac{\sqrt{2}}{\left(2+\left(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\right)^2\right)^2}(\lambda_1 T^* + \lambda_2 N^* + \lambda_3 B^*)$$

şeklinde olur. Geodezik eğrilik tanımından $\kappa_g^{\beta_1}$ geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\beta_1} = \frac{1}{\left(2+\left(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\right)^2\right)^{\frac{5}{2}}}(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\lambda_1 + \frac{\tau^*}{\kappa^*}\lambda_2 + 2\lambda_3)$$

şeklinde bulunur.

Teorem 4.1.2 α eğrisinin involüt eğrisi α^* olsun. α^* eğrisinin teğetler göstergesine ait $T^*T_{T^*}$- Smarandache eğrisinin geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\beta_1} = \frac{1}{\left(2+\left(\frac{\varphi'}{\|W\|}\right)^2\right)^{\frac{5}{2}}}\left(\frac{\varphi'}{\|W\|}\overline{\lambda}_1 + \frac{\varphi'}{\|W\|}\overline{\lambda}_2 + 2\overline{\lambda}_3\right) \tag{4.1.12}$$

denklemiyle verilir. Burada

$$\begin{cases} \overline{\lambda}_1 = -2-\left(\frac{\varphi'}{\|W\|}\right)^2 + \left(\frac{\varphi'}{\|W\|}\right)'\left(\frac{\varphi'}{\|W\|}\right) \\ \overline{\lambda}_2 = -2-3\left(\frac{\varphi'}{\|W\|}\right)^2 - \left(\frac{\varphi'}{\|W\|}\right)^4 - \left(\frac{\varphi'}{\|W\|}\right)'\left(\frac{\varphi'}{\|W\|}\right) \\ \overline{\lambda}_3 = 2\left(\frac{\varphi'}{\|W\|}\right) + \left(\frac{\varphi'}{\|W\|}\right)^3 + \left(\frac{\varphi'}{\|W\|}\right)' \end{cases} \tag{4.1.13}$$

şeklinde birer katsayıdır.

İspat.

$$\beta_1(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(T^* + T_{T^*})$$

eşitliğinde sırasıyla (4.1.1), (3.2.4) ve (3.2.5) den karşılıkları yazılırsa β_1 vektörünün evolüt eğrisine bağlı ifadesi

$$\beta_1(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\cos\varphi\, T + N + \sin\varphi\, B) \tag{4.1.14}$$

biçiminde olur. Bu ifadenin türevi alınırsa $T_{\beta_1}(s)$ teğet vektörü

$$T_{\beta_1}(s) = \frac{\varphi'\sin\varphi - \|W\|\cos\varphi}{\sqrt{2\|W\|^2+\varphi'^2}}T - \frac{\|W\|}{\sqrt{2\|W\|^2+\varphi'^2}}N + \frac{\varphi'\cos\varphi + \|W\|\sin\varphi}{\sqrt{2\|W\|^2+\varphi'^2}}B \tag{4.1.15}$$

şeklinde bulunur. Tekrar türev alınırsa katsayılar

$$\begin{cases} \overline{\lambda}_1 = -2-\left(\frac{\varphi'}{\|W\|}\right)^2 + \left(\frac{\varphi'}{\|W\|}\right)'\left(\frac{\varphi'}{\|W\|}\right) \\ \overline{\lambda}_2 = -2-3\left(\frac{\varphi'}{\|W\|}\right)^2 - \left(\frac{\varphi'}{\|W\|}\right)^4 - \left(\frac{\varphi'}{\|W\|}\right)'\left(\frac{\varphi'}{\|W\|}\right) \\ \overline{\lambda}_3 = 2\left(\frac{\varphi'}{\|W\|}\right) + \left(\frac{\varphi'}{\|W\|}\right)^3 + \left(\frac{\varphi'}{\|W\|}\right)' \end{cases}$$

olmak üzere $T'_{\beta_1}(s)$ türev vektörü

$$\begin{aligned} T'_{\beta_1}(s) \;&=\; \frac{\|W\|^4(\overline{\lambda}_3\sin\varphi - \overline{\lambda}_2\cos\varphi)\sqrt{2}}{(2\|W\|^2+\varphi'^2)^2}T + \frac{\|W\|^4\overline{\lambda}_1\sqrt{2}}{(2\|W\|^2+\varphi'^2)^2}N \\ &\quad + \frac{\|W\|^4(\overline{\lambda}_3\cos\varphi + \overline{\lambda}_2\sin\varphi)\sqrt{2}}{(2\|W\|^2+\varphi'^2)^2}B \end{aligned}$$

şeklinde olur. (4.1.14) ve (4.1.15) ifadelerinden elde edilen $\beta_1 \wedge T_{\beta_1}$ vektörü

$$\beta_1 \wedge T_{\beta_1}(s) = \frac{2\|W\|\sin\varphi + \varphi'\cos\varphi}{\sqrt{4\|W\|^2 + 2\varphi'^2}} T - \frac{\varphi'}{\sqrt{4\|W\|^2 + 2\varphi'^2}} N + \frac{2\|W\|\cos\varphi - \varphi'\sin\varphi}{\sqrt{4\|W\|^2 + 2\varphi'^2}} B$$

biçiminde yazılır. Geodezik eğrilik tanımından $\kappa_g^{\beta_1}$ geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\beta_1} = \frac{1}{\left(2 + \left(\frac{\varphi'}{\|W\|}\right)^2\right)^{\frac{5}{2}}} \left(\frac{\varphi'}{\|W\|}\overline{\lambda}_1 + \frac{\varphi'}{\|W\|}\overline{\lambda}_2 + 2\overline{\lambda}_3\right)$$

şeklinde elde edilir.

Tanım 4.1.2 $\alpha^* : I \to S^2$ involüt eğrisinin teğetler göstergesine ait Sabban çatısı $\{T^*, T_{T^*}, T^* \wedge T_{T^*}\}$ olsun.

$$\beta_2(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(T^* + T^* \wedge T_{T^*}) \tag{4.1.16}$$

şeklinde tanımlı vektörün çizdiği regüler eğriye $T^*(T^* \wedge T_{T^*})$-Smarandache eğrisi denir.

Teorem 4.1.3 $T^*T^* \wedge T_{T^*}$-Smarandache eğrisinin geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\beta_2} = \frac{(\kappa^* + \tau^*)}{(\kappa^* - \tau^*)} \tag{4.1.17}$$

denklemiyle verilir.

İspat.

$$\beta_2(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(T^* + T^* \wedge T_{T^*})$$

eğrisinin s_{β_2} yay parametresine göre türevi alınırsa

$$T_{\beta_2}\frac{ds_{\beta_2}}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 - \frac{\tau^*}{\kappa^*}\right)T_{T^*}$$

olur. Bu eşitliğin normu alınırsa $\frac{ds_{\beta_2}}{ds}$ ifadesi

$$\frac{ds_{\beta_2}}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 - \frac{\tau^*}{\kappa^*}\right)$$

bulunur. Bu ifade yukarıda yerine yazılırsa $T_{\beta_2}(s)$ teğet vektörü

$$T_{\beta_2}(s) = T_{T^*} \tag{4.1.18}$$

biçiminde olur. (4.1.16) ve (4.1.18) ifadelerinden elde edilen $\beta_2 \wedge T_{\beta_2}$ vektörü

$$\beta_2 \wedge T_{\beta_2}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-T^* + T^* \wedge T_{T^*}) \tag{4.1.19}$$

şeklinde yazılır. (4.1.16), (4.1.18) ve (4.1.19) vektörlerinde (4.1.1) den karşılığı yazılırsa β_2-Smarandache eğrisine ait Sabban çatısının involüt eğrisine bağlı ifadesi

$$\begin{aligned} \beta_2(s) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(T^* + B^*), \\ T_{\beta_2}(s) &= N^*, \qquad (4.1.20) \\ \beta_2 \wedge T_{\beta_2}(s) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(-T^* + B^*) \end{aligned}$$

şekline dönüşür. (4.1.18) ifadesinin türevi alınırsa $T'_{\beta_2}(s)$ türev vektörü

$$T'_{\beta_2}(s) = \frac{\sqrt{2}}{(1-\frac{\tau^*}{\kappa^*})}\big(-T^* + \frac{\tau^*}{\kappa^*}T^* \wedge T_{T^*}\big) \qquad (4.1.21)$$

biçiminde olur. Bu vektöre (4.1.1) den karşılıkları yazılırsa $T'_{\beta_2}(s)$ türev vektörü

$$T'_{\beta_2}(s) = \frac{\sqrt{2}}{(1-\frac{\tau^*}{\kappa^*})}\big(-T^* + \frac{\tau^*}{\kappa^*}B^*\big)$$

şeklinde bulunur. Geodezik eğrilik tanımından $\kappa_g^{\beta_2}$ geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\beta_2} = \frac{(\kappa^* + \tau^*)}{(\kappa^* - \tau^*)}$$

şeklinde elde edilir.

Teorem 4.1.4 α eğrisinin involüt eğrisi α^* olsun. α^* eğrisinin teğetler göstergesine ait $T^*(T^* \wedge T_{T^*})$- Smarandache eğrisinin geodezik eğriliğinin evolüt eğrisinin Frenet vektörlerine, eğriliğine ve burulmasına bağlı ifadesi

$$\kappa_g^{\beta_2} = \frac{\|W\| + \varphi'}{\|W\| - \varphi'} \qquad (4.1.22)$$

denklemiyle verilir.

İspat.

$$\beta_2(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(T^* + T^* \wedge T_{T^*})$$

eşitliğinde sırasıyla (4.1.1), (3.2.4) ve (3.2.5) den karşılığı yazılırsa β_2 vektörünün evolüt eğrisine bağlı ifadesi

$$\beta_2(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin\varphi\, T + N + \cos\varphi\, B) \qquad (4.1.23)$$

biçiminde olur. Bu ifadenin türevi alınırsa $T_{\beta_2}(s)$ teğet vektörü

$$T_{\beta_2}(s) = -\cos\varphi\, T + \sin\varphi\, B \tag{4.1.24}$$

şeklinde bulunur. Tekrar türev alınırsa $T'_{\beta_2}(s)$ türev vektörü

$$T'_{\beta_2}(s) = \frac{\varphi'\sqrt{2}\sin\varphi}{\|W\|-\varphi'}T - \frac{\|W\|\sqrt{2}}{\|W\|-\varphi'}N + \frac{\varphi'\sqrt{2}\cos\varphi}{\|W\|-\varphi'}B$$

eşitliğiyle bulunur. (4.1.23) ve (4.1.24) ifadelerinden elde edilen $\beta_2 \wedge T_{\beta_2}$ vektörü

$$\beta_2 \wedge T_{\beta_2}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin\varphi\, T - N + \cos\varphi\, B)$$

biçiminde yazılır. Geodezik eğrilik tanımından $\kappa_g^{\beta_2}$ geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\beta_2} = \frac{\|W\|+\varphi'}{\|W\|-\varphi'}$$

şeklinde elde edilir.

Tanım 4.1.3 $\alpha^* : I \to S^2$ involüt eğrisinin teğetler göstergesine ait Sabban çatısı $\{T^*, T_{T^*}, T^* \wedge T_{T^*}\}$ olsun.

$$\beta_3(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(T_{T^*} + T^* \wedge T_{T^*}) \tag{4.1.25}$$

şeklinde tanımlı vektörün çizdiği regüler eğriye $T_{T^*}(T^* \wedge T_{T^*})$-Smarandache eğrisi denir.

Teorem 4.1.5 $T_{T^*}(T^* \wedge T_{T^*})$-Smarandache eğrisinin geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\beta_3} = \frac{1}{\left(1+2\left(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\right)^2\right)^{\frac{5}{2}}}\left(2\frac{\tau^*}{\kappa^*}\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_3\right)$$

denklemiyle verilir. Burada

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \frac{\tau^*}{\kappa^*} + 2\left(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\right)^3 + 2\left(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\right)'\left(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\right) \\ \varepsilon_2 = -1 - 3\left(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\right)^2 - 2\left(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\right)^4 - \left(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\right)' \\ \varepsilon_3 = -\left(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\right)^2 - 2\left(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\right)^4 + \left(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\right)' \end{cases}$$

şeklinde birer katsayıdır.

İspat.

$$\beta_3(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(T_{T^*} + T^* \wedge T_{T^*})$$

eğrisinin s_{β_3} yay parametresine göre türevi alınırsa

$$T_{\beta_3}\frac{ds_{\beta_3}}{ds}=\frac{1}{\sqrt{2}}(-T^*-\frac{\tau^*}{\kappa^*}T_{T^*}+\frac{\tau^*}{\kappa^*}T^*\wedge T_{T^*})$$

olur. Bu eşitliğin normu alınırsa $\frac{ds_{\beta_3}}{ds}$ ifadesi

$$\frac{ds_{\beta_3}}{ds}=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1+2\Big(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\Big)^2}$$

şeklinde bulunur. Bu ifade yukarıda yerine yazılırsa $T_{\beta_3}(s)$ teğet vektörü

$$T_{\beta_3}(s)=\frac{1}{\sqrt{1+2(\frac{\tau^*}{\kappa^*})^2}}(-T^*-\frac{\tau^*}{\kappa^*}T_{T^*}+\frac{\tau^*}{\kappa^*}T^*\wedge T_{T^*}) \qquad (4.1.26)$$

biçiminde olur. (4.1.25) ve (4.1.26) ifadelerinden elde edilen $\beta_3\wedge T_{\beta_3}$ ifadesi,

$$\beta_3\wedge T_{\beta_3}(s)=\frac{1}{\sqrt{2+4(\frac{\tau^*}{\kappa^*})^2}}(2\frac{\tau^*}{\kappa^*}T^*-T_{T^*}+T^*\wedge T_{T^*}) \qquad (4.1.27)$$

eşitliğiyle bulunur. (4.1.25), (4.1.26) ve (4.1.27) vektörlerinde (4.1.1) den karşılıkları yazılırsa β_3-Smarandache eğrisine ait Sabban çatısının involüt eğrisine bağlı ifadesi

$$\begin{aligned}
\beta_3(s) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(N^*+B^*),\\
T_{\beta_3}(s) &= \frac{1}{\sqrt{1+2(\frac{\tau^*}{\kappa^*})^2}}(-T^*-\frac{\tau^*}{\kappa^*}N^*+\frac{\tau^*}{\kappa^*}B^*), \qquad (4.1.28)\\
\beta_3\wedge T_{\beta_3}(s) &= \frac{1}{\sqrt{2+4(\frac{\tau^*}{\kappa^*})^2}}(2\frac{\tau^*}{\kappa^*}T^*-N^*+B^*)
\end{aligned}$$

denklemlerine dönüşür. (4.1.26) ifadesinin türevi alınırsa katsayılar

$$\begin{cases}
\varepsilon_1=\frac{\tau^*}{\kappa^*}+2\big(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\big)^3+2\big(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\big)'\big(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\big)\\
\varepsilon_2=-1-3\big(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\big)^2-2\big(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\big)^4-\big(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\big)'\\
\varepsilon_3=-\big(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\big)^2-2\big(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\big)^4+\big(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\big)'
\end{cases} \qquad (4.1.29)$$

olmak üzere $T'_{\beta_3}(s)$ türev vektörü

$$T'_{\beta_3}(s)=\frac{\sqrt{2}}{\Big(1+2\big(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\big)^2\Big)^2}(\varepsilon_1T^*+\varepsilon_2T_{T^*}+\varepsilon_3T^*\wedge T_{T^*}) \qquad (4.1.30)$$

olur ve bu ifadeye (4.1.1) den karşılıkları yazılırsa $T'_{\beta_3}(s)$ vektörünün involüt eğrisine bağlı ifadesi

$$T'_{\beta_3}(s) = \frac{\sqrt{2}}{\left(1+2\left(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\right)^2\right)^2}\left(\varepsilon_1 T^* + \varepsilon_2 N^* + \varepsilon_3 B^*\right)$$

şeklinde elde edilir. Geodezik eğrilik tanımından $\kappa_g^{\beta_3}$ geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\beta_3} = \frac{1}{\left(1+2\left(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\right)^2\right)^{\frac{5}{2}}}\left(2\frac{\tau^*}{\kappa^*}\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_3\right)$$

şeklindedir.

Teorem 4.1.6 α eğrisinin involüt eğrisi α^* olsun. α^* eğrisinin teğetler göstergesine ait $T_{T^*}(T^* \wedge T_{T^*})$- Smarandache eğrisinin geodezik eğriliğinin evolüt eğrisinin Frenet vektörlerine, eğriliğine ve burulmasına bağlı ifadesi

$$\kappa_g^{\beta_3} = \frac{1}{\left(1+2\left(\frac{\varphi'}{\|W\|}\right)^2\right)^{\frac{5}{2}}}\left(2\frac{\varphi'}{\|W\|}\overline{\varepsilon}_1 - \overline{\varepsilon}_2 + \overline{\varepsilon}_3\right) \tag{4.1.31}$$

denklemiyle verilir. Burada

$$\begin{cases} \overline{\varepsilon}_1 = \left(\frac{\varphi'}{\|W\|}\right) + \left(\frac{\varphi'}{\|W\|}\right)^3 + 2\left(\frac{\varphi'}{\|W\|}\right)'\left(\frac{\varphi'}{\|W\|}\right) \\ \overline{\varepsilon}_2 = -1 - 3\left(\frac{\varphi'}{\|W\|}\right)^2 - 2\left(\frac{\varphi'}{\|W\|}\right)^4 - \left(\frac{\varphi'}{\|W\|}\right)' \\ \overline{\varepsilon}_3 = -\left(\frac{\varphi'}{\|W\|}\right)^2 - 2\left(\frac{\varphi'}{\|W\|}\right)^4 + \left(\frac{\varphi'}{\|W\|}\right)' \end{cases} \tag{4.1.32}$$

şeklinde birer katsayıdır.

İspat.

$$\beta_3(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(T_{T^*} + T^* \wedge T_{T^*}\right)$$

eşitliğinde sırasıyla (4.1.1), (3.2.4) ve (3.2.5) den karşılıkları yazılırsa β_3 vektörünün evolüt eğrisine bağlı ifadesi

$$\beta_3(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left((\sin\varphi - \cos\varphi)\,T + (\sin\varphi + \cos\varphi)\,B\right) \tag{4.1.33}$$

biçiminde olur. Bu ifadenin türevi alınırsa $T_{\beta_3}(s)$ teğet vektörü

$$T_{\beta_3}(s) = \frac{\varphi'(\sin\varphi + \cos\varphi)}{\sqrt{\|W\|^2 + 2\varphi'^2}}\,T - \frac{\|W\|}{\sqrt{\|W\|^2 + 2\varphi'^2}}\,N + \frac{\varphi'(\cos\varphi + \sin\varphi)}{\sqrt{\|W\|^2 + 2\varphi'^2}}\,B \tag{4.1.34}$$

şeklinde bulunur. Tekrar türev alınırsa katsayılar

$$\begin{cases} \overline{\varepsilon}_1 = \left(\frac{\varphi'}{\|W\|}\right) + \left(\frac{\varphi'}{\|W\|}\right)^3 + 2\left(\frac{\varphi'}{\|W\|}\right)'\left(\frac{\varphi'}{\|W\|}\right) \\ \overline{\varepsilon}_2 = -1 - 3\left(\frac{\varphi'}{\|W\|}\right)^2 - 2\left(\frac{\varphi'}{\|W\|}\right)^4 - \left(\frac{\varphi'}{\|W\|}\right)' \\ \overline{\varepsilon}_3 = -\left(\frac{\varphi'}{\|W\|}\right)^2 - 2\left(\frac{\varphi'}{\|W\|}\right)^4 + \left(\frac{\varphi'}{\|W\|}\right)' \end{cases}$$

olmak üzere $T'_{\beta_3}(s)$ türev vektörü

$$\begin{aligned} T'_{\beta_3}(s) &= \frac{\|W\|^4(\overline{\varepsilon}_3 \sin\varphi - \overline{\varepsilon}_2 \cos\varphi)\sqrt{2}}{(\|W\|^2 + 2\varphi'^2)^2} T + \frac{\|W\|^4 \overline{\varepsilon}_1 \sqrt{2}}{(\|W\|^2 + 2\varphi'^2)^2} N \\ &+ \frac{\|W\|^4(\overline{\varepsilon}_3 \cos\varphi + \overline{\varepsilon}_2 \sin\varphi)\sqrt{2}}{(\|W\|^2 + 2\varphi'^2)^2} B \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. (4.1.33) ve (4.1.34) ifadelerinden elde edilen $\beta_3 \wedge T_{\beta_3}$ vektörü

$$\beta_3 \wedge T_{\beta_3}(s) = \frac{\|W\|(\sin\varphi + \cos\varphi)}{\sqrt{2\|W\|^2 + 4\varphi'^2}} T + \frac{2\varphi'}{\sqrt{2\|W\|^2 + 4\varphi'^2}} N + \frac{\|W\|(\cos\varphi - \sin\varphi)}{\sqrt{2\|W\|^2 + 4\varphi'^2}} B$$

şeklinde yazılır. Geodezik eğrilik tanımından $\kappa_g^{\beta_3}$ geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\beta_3} = \frac{1}{\left(1 + 2\left(\frac{\varphi'}{\|W\|}\right)^2\right)^{\frac{5}{2}}} \left(2\frac{\varphi'}{\|W\|}\overline{\varepsilon}_1 - \overline{\varepsilon}_2 + \overline{\varepsilon}_3\right)$$

biçiminde elde edilir.

Tanım 4.1.4 $\alpha^* : I \to S^2$ involüt eğrisinin teğetler göstergesine ait Sabban çatısı $\{T^*, T_{T^*}, T^* \wedge T_{T^*}\}$ olsun.

$$\beta_4(s) = \frac{1}{\sqrt{3}}(T^* + T_{T^*} + T^* \wedge T_{T^*}) \tag{4.1.35}$$

şeklinde tanımlı vektörün çizdiği regüler eğriye $T^*T_{T^*}(T^* \wedge T_{T^*})$-Smarandache eğrisi denir.

Teorem 4.1.7 $T^*T_{T^*}(T^* \wedge T_{T^*})$-Smarandache eğrisinin geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\beta_4} = \frac{1}{4\sqrt{2}\left(1 + \frac{\tau^*}{\kappa^*} + \left(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\right)^2\right)^{\frac{5}{2}}} \left(\left(2\frac{\tau^*}{\kappa^*} - 1\right)\phi_1 - \left(1 + \frac{\tau^*}{\kappa^*}\right)\phi_2 + \left(2 - \frac{\tau^*}{\kappa^*}\right)\phi_3\right) \tag{4.1.36}$$

denklemiyle verilir. Burada

$$\begin{cases} \phi_1 = -2 + 4\left(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\right) - \left(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\right)^2 + 2\left(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\right)^3 + \left(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\right)'\left(2\frac{\tau^*}{\kappa^*} - 1\right) \\ \phi_2 = -2 + 2\left(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\right) - 4\left(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\right)^2 + 2\left(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\right)^3 - 2\left(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\right)^4 - \left(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\right)'\left(1 + \frac{\tau^*}{\kappa^*}\right) \\ \phi_3 = 2\left(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\right) - 4\left(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\right)^2 + 4\left(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\right)^3 - 2\left(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\right)^4 + \left(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\right)'\left(2 - \frac{\tau^*}{\kappa^*}\right) \end{cases} \tag{4.1.37}$$

şeklinde birer katsayıdır.

İspat.

$$\beta_4(s) = \frac{1}{\sqrt{3}}(T^* + T_{T^*} + T^* \wedge T_{T^*})$$

eğrisinin s_{β_4} yay parametresine göre türevi alınırsa

$$T_{\beta_4}\frac{ds_{\beta_4}}{ds} = \frac{1}{\sqrt{3}}\Big(-T^* + \big(1-\frac{\tau^*}{\kappa^*}\big)T_{T^*} + \frac{\tau^*}{\kappa^*}T^* \wedge T_{T^*}\Big)$$

olur. Bu eşitliğin normu alınırsa $\frac{ds_{\beta_4}}{ds}$ ifadesi

$$\frac{ds_{\beta_4}}{ds} = \sqrt{\frac{2}{3}\Big(1-\frac{\tau^*}{\kappa^*} + \big(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\big)^2\Big)}$$

bulunur. Bu ifade yukarıda yerine yazılırsa $T_{\beta_4}(s)$ teğet vektörü

$$T_{\beta_4}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\Big(1-\frac{\tau^*}{\kappa^*} + \big(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\big)^2\Big)}}\Big(-T^* + \big(1-\frac{\tau^*}{\kappa^*}\big)T_{T^*} + \frac{\tau^*}{\kappa^*}T^* \wedge T_{T^*}\Big) \tag{4.1.38}$$

biçiminde olur. (4.1.35) ve (4.1.38) ifadelerinden elde edilen $\beta_4 \wedge T_{\beta_4}$ vektörü,

$$\beta_4 \wedge T_{\beta_4}(s) = \frac{1}{\sqrt{6}\sqrt{1-\frac{\tau^*}{\kappa^*} + \big(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\big)^2}}\Big(\big(2\frac{\tau^*}{\kappa^*}-1\big)T^* - \big(1+\frac{\tau^*}{\kappa^*}\big)T_{T^*} + \big(2-\frac{\tau^*}{\kappa^*}\big)T^* \wedge T_{T^*}\Big) \tag{4.1.39}$$

şeklinde yazılır. (4.1.35), (4.1.38) ve (4.1.39) vektörlerinde (4.1.1) den karşılıkları yazılırsa β_4-Smarandache eğrisine ait Sabban çatısının involüt eğrisine bağlı ifadesi,

$$\beta_4(s) = \frac{1}{\sqrt{3}}(T^* + N^* + B^*),$$

$$T_{\beta_4}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\Big(1-\frac{\tau^*}{\kappa^*} + \big(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\big)^2\Big)}}\Big(-T^* + \big(1-\frac{\tau^*}{\kappa^*}\big)N^* + \frac{\tau^*}{\kappa^*}B^*\Big), \tag{4.1.40}$$

$$\beta_4 \wedge T_{\beta_4}(s) = \frac{1}{\sqrt{6}\sqrt{1-\frac{\tau^*}{\kappa^*} + \big(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\big)^2}}\Big(\big(2\frac{\tau^*}{\kappa^*}-1\big)T^* - \big(1+\frac{\tau^*}{\kappa^*}\big)N^* + \big(2-\frac{\tau^*}{\kappa^*}\big)B^*\Big)$$

eşitliklerine dönüşür. (4.1.38) ifadesinin türevi alınırsa katsayılar,

$$\begin{cases} \phi_1 = -2 + 4\big(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\big) - \big(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\big)^2 + 2\big(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\big)^3 + \big(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\big)'\big(2\frac{\tau^*}{\kappa^*}-1\big) \\ \phi_2 = -2 + 2\big(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\big) - 4\big(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\big)^2 + 2\big(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\big)^3 - 2\big(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\big)^4 - \big(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\big)'\big(1+\frac{\tau^*}{\kappa^*}\big) \\ \phi_3 = 2\big(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\big) - 4\big(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\big)^2 + 4\big(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\big)^3 - 2\big(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\big)^4 + \big(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\big)'\big(2-\frac{\tau^*}{\kappa^*}\big) \end{cases} \tag{4.1.41}$$

olmak üzere $T'_{\beta_4}(s)$ türev vektörü

$$T'_{\beta_4}(s) = \frac{\sqrt{3}}{4\Big(1-\frac{\tau^*}{\kappa^*} + \big(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\big)^2\Big)^2}(\phi_1 T^* + \phi_2 T_{T^*} + \phi_3 T^* \wedge T_{T^*}) \tag{4.1.42}$$

şeklinde elde edilir. Bu vektöre (4.1.1) den karşılıkları yazılırsa $T'_{\beta_4}(s)$ türev vektörünün involüt eğrisine bağlı ifadesi

$$T'_{\beta_4}(s) = \frac{\sqrt{3}}{4\Big(1-\frac{\tau^*}{\kappa^*}+\big(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\big)^2\Big)^2}(\phi_1 T^* + \phi_2 N^* + \phi_3 B^*)$$

biçiminde olur. Geodezik eğrilik tanımından $\kappa_g^{\beta_4}$ geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\beta_4} = \frac{1}{4\sqrt{2}\Big(1+\frac{\tau^*}{\kappa^*}+\big(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\big)^2\Big)^{\frac{5}{2}}}\Big((2\frac{\tau^*}{\kappa^*}-1)\phi_1-\big(1+\frac{\tau^*}{\kappa^*}\big)\phi_2+\big(2-\frac{\tau^*}{\kappa^*}\big)\phi_3\Big)$$

şeklinde bulunur.

Teorem 4.1.8 α eğrisinin involüt eğrisi α^* olsun. α^* eğrisinin teğetler göstergesine ait $T^*T_{T^*}(T^*\wedge T_{T^*})$- Smarandache eğrisinin geodezik eğriliğinin evolüt eğrisinin Frenet vektörlerine, eğriliğine ve burulmasına bağlı ifadesi

$$\kappa_g^{\beta_4} = \frac{1}{4\sqrt{2}\Big(1+\frac{\varphi'}{\|W\|}+\big(\frac{\varphi'}{\|W\|}\big)^2\Big)^{\frac{5}{2}}}\Big((2\frac{\varphi'}{\|W\|}-1)\overline{\phi}_1-(1+\frac{\varphi'}{\|W\|})\overline{\phi}_2+(2-\frac{\varphi'}{\|W\|})\overline{\phi}_3\Big) \tag{4.1.43}$$

denklemiyle verilir. Burada

$$\begin{cases} \overline{\phi}_1 = -2+4\big(\frac{\varphi'}{\|W\|}\big)+4\big(\frac{\varphi'}{\|W\|}\big)-\big(\frac{\varphi'}{\|W\|}\big)^2+2\big(\frac{\varphi'}{\|W\|}\big)^3+\big(\frac{\varphi'}{\|W\|}\big)'\big(2\frac{\varphi'}{\|W\|-1}\big) \\ \overline{\phi}_2 = -2+2\big(\frac{\varphi'}{\|W\|}\big)-4\big(\frac{\varphi'}{\|W\|}\big)^2+\big(\frac{\varphi'}{\|W\|}\big)^3-2\big(\frac{\varphi'}{\|W\|}\big)^4-\big(\frac{\varphi'}{\|W\|}\big)'\big(1+\frac{\varphi'}{\|W\|}\big) \\ \overline{\phi}_3 = 2\big(\frac{\varphi'}{\|W\|}\big)-4\big(\frac{\varphi'}{\|W\|}\big)^2+4\big(\frac{\varphi'}{\|W\|}\big)^3-2\big(\frac{\varphi'}{\|W\|}\big)^4+\big(\frac{\varphi'}{\|W\|}\big)'\big(2-\frac{\varphi'}{\|W\|}\big) \end{cases} \tag{4.1.44}$$

şeklinde birer katsayıdır.

İspat.

$$\beta_4 = \frac{1}{\sqrt{3}}(T^*+T_{T^*}+T^*\wedge T_{T^*})$$

eşitliğinde sırasıyla (4.1.1), (3.2.4) ve (3.2.5) den karşılıkları yazılırsa β_4 vektörünün evolüt eğrisine bağlı ifadesi

$$\beta_4(s) = \frac{1}{\sqrt{3}}\Big((\sin\varphi-\cos\varphi)\,T+N+(\sin\varphi+\cos\varphi)\,B\Big) \tag{4.1.45}$$

biçiminde olur. Bu ifadenin türevi alınırsa $T_{\beta_4}(s)$ teğet vektörü

$$\begin{aligned} T_{\beta_4}(s) \quad = \quad & \frac{\varphi'\sin\varphi-\big(\|W\|-\varphi'\big)\cos\varphi}{\sqrt{2(\|W\|^2-\|W\|\varphi'+\varphi'^2)}}T-\frac{\|W\|}{\sqrt{2(\|W\|^2-\|W\|\varphi'+\varphi'^2)}}N \\ & +\frac{\varphi'\cos\varphi+(\|W\|-\varphi')\sin\varphi}{\sqrt{2(\|W\|^2-\|W\|\varphi'+\varphi'^2)}}B \end{aligned} \tag{4.1.46}$$

şeklinde bulunur. Tekrar türev alınırsa katsayılar

$$\begin{cases} \overline{\phi}_1 = -2+4\big(\frac{\varphi'}{\|W\|}\big)+4\big(\frac{\varphi'}{\|W\|}\big)-\big(\frac{\varphi'}{\|W\|}\big)^2+2\big(\frac{\varphi'}{\|W\|}\big)^3+\big(\frac{\varphi'}{\|W\|}\big)'\big(2\frac{\varphi'}{\|W\|-1}\big) \\ \overline{\phi}_2 = -2+2\big(\frac{\varphi'}{\|W\|}\big)-4\big(\frac{\varphi'}{\|W\|}\big)^2+\big(\frac{\varphi'}{\|W\|}\big)^3-2\big(\frac{\varphi'}{\|W\|}\big)^4-\big(\frac{\varphi'}{\|W\|}\big)'\big(1+\frac{\varphi'}{\|W\|}\big) \\ \overline{\phi}_3 = 2\big(\frac{\varphi'}{\|W\|}\big)-4\big(\frac{\varphi'}{\|W\|}\big)^2+4\big(\frac{\varphi'}{\|W\|}\big)^3-2\big(\frac{\varphi'}{\|W\|}\big)^4+\big(\frac{\varphi'}{\|W\|}\big)'\big(2-\frac{\varphi'}{\|W\|}\big) \end{cases}$$

olmak üzere $T'_{\beta_4}(s)$ türev vektörü

$$\begin{aligned} T'_{\beta_4}(s) &= \frac{\|W\|^4(\overline{\phi}_3\sin\varphi-\overline{\phi}_2\cos\varphi)\sqrt{3}}{4(\|W\|^2-\|W\|\varphi'+\varphi'^2)^2}T+\frac{\|W\|^4\overline{\phi}_1\sqrt{3}}{(4(\|W\|^2-\|W\|\varphi'+\varphi'^2)^2}N \\ &\quad +\frac{\|W\|^4(\overline{\phi}_3\cos\varphi+\overline{\phi}_2\sin\varphi)\sqrt{3}}{4(\|W\|^2-\|W\|\varphi'+\varphi'^2)^2}B \end{aligned}$$

biçiminde olur. (4.1.45) ve (4.1.46) ifadelerinden elde edilen $\beta_4\wedge T_{\beta_4}$ vektörü

$$\begin{aligned} \beta_4\wedge T_{\beta_4}(s) &= \frac{(\|W\|+\varphi')\cos\varphi+(2\|W\|-\varphi')\cos\varphi}{\sqrt{6\|W\|^2-6\|W\|\varphi'+6\varphi'^2}}T+\frac{2\varphi'-\|W\|}{\sqrt{6\|W\|^2-6\|W\|\varphi'+6\varphi'^2}}N \\ &\quad +\frac{(2\|W\|-\varphi')\cos\varphi-(\|W\|+\varphi')\sin\varphi}{\sqrt{6\|W\|^2-6\|W\|\varphi'+6\varphi'^2}}B \end{aligned}$$

eşitliğiyle bulunur. Geodezik eğrilik tanımından $\kappa_g^{\beta_4}$ geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\beta_4} = \frac{1}{4\sqrt{2}\big(1+\frac{\varphi'}{\|W\|}+\big(\frac{\varphi'}{\|W\|}\big)^2\big)^{\frac{5}{2}}}\Big((2\frac{\varphi'}{\|W\|}-1)\overline{\phi}_1-(1+\frac{\varphi'}{\|W\|})\overline{\phi}_2+(2-\frac{\varphi'}{\|W\|})\overline{\phi}_3\Big)$$

şeklindedir.

Tanım 4.1.5 $\alpha^*: I\to S^2$ involüt eğrisinin aslinormaller göstergesine ait Sabban çatısı $\{N^*, T_{N^*}, N^*\wedge T_{N^*}\}$ olsun.

$$\beta_{\varsigma_1}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(N^*+T_{N^*}) \tag{4.1.47}$$

şeklinde tanımlı vektörün çizdiği regüler eğriye $N^*T_{N^*}$-Smarandache eğrisi denir.

Teorem 4.1.9 $N^*T_{N^*}$-Smarandache eğrisinin $\kappa_g^{\beta_{\varsigma_1}}$ geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\beta_{\varsigma_1}} = \frac{1}{\big(2+\big(\frac{\varphi^{*\prime}}{\|W^*\|}\big)^2\big)^{\frac{5}{2}}}\Big(\frac{\varphi^{*\prime}}{\|W^*\|}\chi_1-\frac{\varphi^{*\prime}}{\|W^*\|}\chi_2+2\chi_3\Big) \tag{4.1.48}$$

denklemiyle verilir. Burada

$$\begin{cases} \chi_1 = -2 - \left(\frac{\varphi^{*\prime}}{\|W^*\|}\right)^2 + \left(\frac{\varphi^{*\prime}}{\|W^*\|}\right)'\left(\frac{\varphi^{*\prime}}{\|W^*\|}\right) \\ \chi_2 = -2 - 3\left(\frac{\varphi^{*\prime}}{\|W^*\|}\right)^2 - \left(\frac{\varphi^{*\prime}}{\|W^*\|}\right)^4 - \left(\frac{\varphi^{*\prime}}{\|W^*\|}\right)'\left(\frac{\varphi^{*\prime}}{\|W^*\|}\right) \\ \chi_3 = 2\left(\frac{\varphi^{*\prime}}{\|W^*\|}\right) + \left(\frac{\varphi^{*\prime}}{\|W^*\|}\right)^3 + \left(\frac{\varphi^{*\prime}}{\|W^*\|}\right)' \end{cases} \tag{4.1.49}$$

şeklinde birer katsayıdır.

İspat.

$$\beta_{\varsigma_1}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(N^* + T_{N^*})$$

eğrisinin yay parametresine $s_{\beta_{\varsigma_1}}$ göre türevi alınırsa

$$T_{\beta_{\varsigma_1}} \frac{ds_{\beta_{\varsigma_1}}}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-N^* + T_{N^*} + \frac{\varphi^{*\prime}}{\|W^*\|} N^* \wedge T_{N^*})$$

olu. Bu eşitliğin normu alınırsa $\frac{ds_{\beta_{\varsigma_1}}}{ds}$ ifadesi

$$\frac{ds_{\beta_{\varsigma_1}}}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2 + \left(\frac{\varphi^{*\prime}}{\|W^*\|}\right)^2}$$

şeklinde bulunur. Bulunan bu ifade yukarıda yerine yazılırsa $T_{\beta_{\varsigma_1}}(s)$ teğet vektörü

$$T_{\beta_{\varsigma_1}}(s) = \frac{1}{\sqrt{2 + \left(\frac{\varphi^{*\prime}}{\|W^*\|}\right)^2}}(-N^* + T_{N^*} + \frac{\varphi^{*\prime}}{\|W^*\|} N^* \wedge T_{N^*}) \tag{4.1.50}$$

eşitliğiyle elde edilir. Bu ifadenin türevi alınırsa katsayılar,

$$\begin{cases} \chi_1 = -2 - \left(\frac{\varphi^{*\prime}}{\|W^*\|}\right)^2 + \left(\frac{\varphi^{*\prime}}{\|W^*\|}\right)'\left(\frac{\varphi^{*\prime}}{\|W^*\|}\right) \\ \chi_2 = -2 - 3\left(\frac{\varphi^{*\prime}}{\|W^*\|}\right)^2 - \left(\frac{\varphi^{*\prime}}{\|W^*\|}\right)^4 - \left(\frac{\varphi^{*\prime}}{\|W^*\|}\right)'\left(\frac{\varphi^{*\prime}}{\|W^*\|}\right) \\ \chi_3 = 2\left(\frac{\varphi^{*\prime}}{\|W^*\|}\right) + \left(\frac{\varphi^{*\prime}}{\|W^*\|}\right)^3 + \left(\frac{\varphi^{*\prime}}{\|W^*\|}\right)' \end{cases}$$

olmak üzere $T'_{\beta_{\varsigma_1}}(s)$ türev vektörü

$$T'_{\beta_{\varsigma_1}} = \frac{\sqrt{2}}{\left(2 + \left(\frac{\varphi^{*\prime}}{\|W^*\|}\right)^2\right)^2}(\chi_1 N^* + \chi_2 T_{N^*} + \chi_3 N^* \wedge T_{N^*}) \tag{4.1.51}$$

şeklinde olur. (4.1.47) ve (4.1.50) ifadelerinden elde edilen $\beta_{\varsigma_1} \wedge T_{\beta_{\varsigma_1}}$ vektörü,

$$\beta_{\varsigma_1} \wedge T_{\beta_{\varsigma_1}}(s) = \frac{1}{\sqrt{4 + 2\left(\frac{\varphi^{*\prime}}{\|W^*\|}\right)^2}}\left(\frac{\varphi^{*\prime}}{\|W^*\|} N^* - \frac{\varphi^{*\prime}}{\|W^*\|} T^*_{N^*} + 2N^* \wedge T_{N^*}\right) \tag{4.1.52}$$

şeklinde yazılır. (4.1.47), (4.1.50), (4.1.51) ve (4.1.52) vektörlerinde (4.1.2) den karşılıkları yazılırsa β_{ς_1}-Smarandache eğrisine ait Sabban çatısının ve $T'_{\beta_{\varsigma_1}}$ türev vektörünün involüt eğrisine bağlı ifadesi

$$\begin{aligned}
\beta_{\varsigma_1}(s) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(-\cos\varphi^* T^* + N^* + \sin\varphi^* B^*), \\
T_{\beta_{\varsigma_1}}(s) &= \frac{\varphi^{*\prime}\sin\varphi^* - \|W^*\|\cos\varphi^*}{\sqrt{2\|W^*\|^2 + (\varphi^{*\prime})^2}}T^* + \frac{\|W^*\|}{\sqrt{2\|W^*\|^2 + (\varphi^{*\prime})^2}}N^* \\
&\quad + \frac{\varphi^{*\prime}\cos\varphi^* + \|W^*\|\sin\varphi^*}{\sqrt{2\|W^*\|^2 + (\varphi^{*\prime})^2}}B^*, \\
\beta_{\varsigma_1}\wedge T_{\beta_{\varsigma_1}}(s) &= \frac{\varphi^{*\prime}\cos\varphi^* + 2\|W^*\|\sin\varphi^*}{\sqrt{4\|W^*\|^2 + 2(\varphi^{*\prime})^2}}T^* - \frac{\varphi^{*\prime}}{\sqrt{4\|W^*\|^2 + 2(\varphi^{*\prime})^2}}N^* \\
&\quad + \frac{2\|W^*\|\cos\varphi^* - \varphi^{*\prime}\sin\varphi^*}{\sqrt{4\|W^*\|^2 + 2(\varphi^{*\prime})^2}}B^*, \\
T'_{\beta_{\varsigma_1}}(s) &= \frac{\|W^*\|^4\sqrt{2}(\chi_3\sin\varphi^* - \chi_2\cos\varphi^*)}{\left(2\|W^*\|^2 + (\varphi^{*\prime})^2\right)^2}T^* + \frac{\chi_1\|W^*\|^4\sqrt{2}}{\left(2\|W^*\|^2 + (\varphi^{*\prime})^2\right)^2}N^* \\
&\quad + \frac{\|W^*\|^4\sqrt{2}(\chi_2\sin\varphi^* + \cos\varphi^*\chi_3)}{\left(2\|W^*\|^2 + (\varphi^{*\prime})^2\right)^2}B^*
\end{aligned}$$

denklemlerine dönüşür. Geodezik eğrilik tanımından $\kappa_g^{\beta_{\varsigma_1}}$ geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\beta_{\varsigma_1}} = \frac{1}{\left(2 + \left(\frac{\varphi^{*\prime}}{\|W^*\|}\right)^2\right)^{\frac{5}{2}}}\left(\frac{\varphi^{*\prime}}{\|W^*\|}\chi_1 - \frac{\varphi^{*\prime}}{\|W^*\|}\chi_2 + 2\chi_3\right)$$

biçiminde olur.

Teorem 4.1.10 α eğrisinin involüt eğrisi α^* olsun. α^* eğrisinin aslinormaller göstergesine ait $N^*T_{N^*}$- Smarandache eğrisinin geodezik eğriliğinin evolüt eğrisinin Frenet vektörlerine, eğriliğine ve burulmasına bağlı ifadesi

$$\kappa_g^{\beta_{\varsigma_1}} = \frac{1}{(2+\eta^2)^{\frac{5}{2}}}(\eta\overline{\chi}_1 - \eta\overline{\chi}_2 + 2\overline{\chi}_3) \tag{4.1.53}$$

denklemiyle verilir. Burada

$$\eta = \frac{\varphi^{*\prime}}{\|W^*\|} = \left(\frac{\varphi'}{\sqrt{\varphi'^2 + \|W\|^2}}\right)'\cos\varphi(c-s)$$

olmak üzere

$$\begin{cases} \overline{\chi}_1 = -2-\eta^2+\eta'\eta \\ \overline{\chi}_2 = -2-3\eta^2-\eta^4-\eta'\eta \\ \overline{\chi}_3 = 2\eta+\eta^3+\eta' \end{cases} \tag{4.1.54}$$

şeklinde birer katsayıdır.

İspat.

$$\beta_{\varsigma_1}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(N^* + T_{N^*})$$

eşitliğine sırasıyla (4.1.2), (3.2.4) ve (3.2.5) den karşılıkları yazılırsa β_{ς_1} vektörünün evolüt eğrisine göre ifadesi

$$\begin{aligned} \beta_{\varsigma_1}(s) \quad = \quad & \frac{\varphi'\sin\varphi - \sqrt{\varphi'^2+\|W\|^2}\cos\varphi}{\sqrt{2\varphi'^2+2\|W\|^2}}T - \frac{\|W\|}{\sqrt{2\varphi'^2+2\|W\|^2}}N \\ & + \frac{\varphi'\cos\varphi + \sqrt{\varphi'^2+\|W\|^2}\sin\varphi}{\sqrt{2\varphi'^2+2\|W\|^2}}B \end{aligned} \tag{4.1.55}$$

biçiminde olur. Bu ifadenin türevi alınırsa $T_{\beta_{\varsigma_1}}(s)$ teğet vektörü

$$\begin{aligned} T_{\beta_{\varsigma_1}}(s) \quad = \quad & \frac{(\eta\|W\|+\varphi')\sin\varphi - \sqrt{\|W\|^2+\varphi'^2}\cos\varphi}{\sqrt{\|W\|^2+\varphi'^2}\sqrt{2+\eta^2}}T + \frac{\eta\varphi' - \|W\|}{\sqrt{\|W\|^2+\varphi'^2}\sqrt{2+\eta^2}}N \\ & + \frac{(\eta\|W\|+\varphi')\cos\varphi + \sqrt{\|W\|^2+\varphi'^2}\sin\varphi}{\sqrt{\|W\|^2+\varphi'^2}\sqrt{2+\eta^2}}B \end{aligned} \tag{4.1.56}$$

şeklinde bulunur. Burada

$$\eta = \frac{\varphi^{*\prime}}{\|W^*\|} = \Big(\frac{\varphi'}{\sqrt{\varphi'^2+\|W\|^2}}\Big)'\cos\varphi(c-s) \tag{4.1.57}$$

şeklinde katsayıdır. Bu ifadenin türevi alınırsa katsayılar

$$\begin{cases} \overline{\chi}_1 = -2-\eta^2+\eta'\eta \\ \overline{\chi}_2 = -2-3\eta^2-\eta^4-\eta'\eta \\ \overline{\chi}_3 = 2\eta+\eta^3+\eta' \end{cases}$$

olmak üzere $T'_{\beta_{\varsigma_1}}(s)$ türev vektörü

$$\begin{aligned} T'_{\beta_{\varsigma_1}}(s) &= \frac{(\overline{\chi}_3\|W\|+\overline{\chi}_2\varphi')\sqrt{2}\sin\varphi-\overline{\chi}_1\sqrt{2\|W\|^2+2\varphi'^2}\cos\varphi)}{\left(2+\eta^2\right)^2\sqrt{\|W\|^2+\varphi'^2}}T \\ &+\frac{(\overline{\chi}_3\varphi'+\overline{\chi}_2\|W\|)\sqrt{2}}{\left(2+\eta^2\right)^2\sqrt{\|W\|^2+\varphi'^2}}N \\ &+\frac{(\overline{\chi}_3\|W\|+\overline{\chi}_2\varphi')\sqrt{2}\cos\varphi+\overline{\chi}_1\sqrt{2\|W\|^2+2\varphi'^2}\sin\varphi}{\left(2+\eta^2\right)^2\sqrt{\|W\|^2+\varphi'^2}}B \end{aligned}$$

şeklindedir. (4.1.55) ve (4.1.56) ifadelerinden elde edilen $\beta_{\varsigma_1}\wedge T_{\beta_{\varsigma_1}}$ vektörü

$$\begin{aligned} \beta_{\varsigma_1}\wedge T_{\beta_{\varsigma_1}}(s) &= \frac{(2\|W\|-\eta\varphi')\sin\varphi-\eta\sqrt{\|W\|^2+\varphi'^2}\cos\varphi}{\sqrt{4+2\eta^2}\sqrt{\|W\|^2+\varphi'^2}}T \\ &-\frac{2\varphi'+\eta\|W\|}{\sqrt{4+2\eta^2}\sqrt{\|W\|^2+\varphi'^2}}N \\ &+\frac{(2\|W\|-\eta\varphi')\cos\varphi+\eta\sqrt{\|W\|^2+\varphi'^2}\sin\varphi}{\sqrt{4+2\eta^2}\sqrt{\|W\|^2+\varphi'^2}}B \end{aligned}$$

şeklinde yazılır. Geodezik eğrilik tanımından $\kappa_g^{\beta_{\varsigma_1}}$ geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\beta_{\varsigma_1}} = \frac{1}{\left(2+\eta^2\right)^{\frac{5}{2}}}\left(\eta\overline{\chi}_1-\eta\overline{\chi}_2+2\overline{\chi}_3\right)$$

biçiminde olur.

Tanım 4.1.6 $\alpha^*: I\to S^2$ involüt eğrisinin aslinormaller göstergesine ait Sabban çatısı $\{N^*, T_{N^*}, N^*\wedge T_{N^*}\}$ olsun.

$$\beta_{\varsigma_2}(s)=\frac{1}{\sqrt{2}}(N^*+N^*\wedge T_{N^*}) \qquad (4.1.58)$$

şeklinde tanımlı vektörün çizdiği regüler eğriye $N^*(N^*\wedge T_{N^*})$-Smarandache eğrisi denir.

Teorem 4.1.11 $N^*(N^*\wedge T_{N^*})$-Smarandache eğrisinin geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\beta_{\varsigma_2}}=\frac{\|W^*\|+\varphi^{*\prime}}{\|W^*\|-\varphi^{*\prime}} \qquad (4.1.59)$$

şeklinde verilir.

İspat.

$$\beta_{\varsigma_2}(s)=\frac{1}{\sqrt{2}}(N^*+N^*\wedge T_{N^*})$$

eğrisinin $s_{\beta_{\varsigma_2}}$ yay parametresine göre türevi alınırsa

$$T_{\beta_{\varsigma_2}}\frac{ds_{\beta_{\varsigma_2}}}{ds}=\frac{1}{\sqrt{2}}\big(1-\frac{\varphi^{*\prime}}{\|W^*\|}\big)T_{N^*}$$

olur. Bu eşitliğin normu alınırsa $\frac{ds_{\beta_{\varsigma_2}}}{ds}$ ifadesi

$$\frac{ds_{\beta_{\varsigma_2}}}{ds}=\frac{1}{\sqrt{2}}\big(1-\frac{\varphi^{*\prime}}{\|W^*\|}\big)$$

şeklinde bulunur. Bu ifade yukarıda yerine yazılırsa $T_{\beta_{\varsigma_2}}(s)$ teğet vektörü

$$T_{\beta_{\varsigma_2}}(s)=T_{N^*} \tag{4.1.60}$$

biçiminde olur. Bu ifadenin tekrar türevi alınırsa $T'_{\beta_{\varsigma_2}}(s)$ türev vektörü

$$T'_{\beta_{\varsigma_2}}(s)=\frac{\sqrt{2}}{\big(1-\frac{\varphi^{*\prime}}{\|W^*\|}\big)}\big(-N^*+\frac{\varphi^{*\prime}}{\|W^*\|}N^*\wedge T_{N^*}\big) \tag{4.1.61}$$

bulunur. (4.1.58) ve (4.1.60) ifadelerinden elde edilen $\beta_{\varsigma_2}\wedge T_{\beta_{\varsigma_2}}$ vektörü

$$\beta_{\varsigma_2}\wedge T_{\beta_{\varsigma_2}}(s)=\frac{1}{\sqrt{2}}(-N^*+N^*\wedge T_{N^*}) \tag{4.1.62}$$

şeklinde bulunur. (4.1.58), (4.1.60), (4.1.61) ve (4.1.62) vektörlerinde (4.1.2) den karşılıkları yazılırsa β_{ς_2}-Smarandache eğrisine ait Sabban çatısının ve $T'_{\beta_{\varsigma_2}}$ türev vektörünün involüt eğrisine bağlı ifadesi

$$\begin{aligned}
\beta_{\varsigma_2}(s) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin\varphi^*T^*+N^*+\cos\varphi^*B^*),\\
T_{\beta_{\varsigma_2}}(s) &= -\cos\varphi^*T^*+\sin\varphi^*B^*,\\
\beta_{\varsigma_2}\wedge T_{\beta_{\varsigma_2}}(s) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin\varphi^*T^*-N^*+\cos\varphi^*B^*),\\
T'_{\beta_{\varsigma_2}}(s) &= \frac{\varphi^{*\prime}\sin\varphi^*\sqrt{2}}{\|W^*\|-\varphi^{*\prime}}T^*-\frac{\|W^*\|\sqrt{2}}{\|W^*\|-\varphi^{*\prime}}N^*+\frac{\varphi^{*\prime}\cos\varphi^*\sqrt{2}}{\|W^*\|-\varphi^{*\prime}}B^*
\end{aligned}$$

denklemlerine dönüşür. Geodezik eğrilik tanımından $\kappa_g^{\beta_{\varsigma_2}}$ geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\beta_{\varsigma_2}}=\frac{\|W^*\|+\varphi^{*\prime}}{\|W^*\|-\varphi^{*\prime}}$$

şeklindedir.

Teorem 4.1.12 α eğrisinin involüt eğrisi α^* olsun. α^* eğrisinin aslinormaller göstergesine ait $N^*(N^* \wedge T_{N^*})$- Smarandache eğrisinin geodezik eğriliğinin evolüt eğrisinin Frenet vektörlerine, eğriliğine ve burulmasına bağlı ifadesi

$$\kappa_g^{\beta_{\varsigma_2}} = \frac{1+\eta}{1-\eta} \tag{4.1.63}$$

denklemiyle verilir. Burada

$$\eta = \Big(\frac{\varphi'}{\sqrt{\varphi'^2 + \|W\|^2}}\Big)' \cos\varphi(c-s)$$

şeklinde katsayıdır.

İspat.

$$\beta_{\varsigma_2}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(N^* + N^* \wedge T_{N^*})$$

eşitliğinde sırasıyla (4.1.2), (3.2.4) ve (3.2.5) den karşılıkları yazılırsa β_{ς_2} vektörünün evolüt eğrisine bağlı ifadesi

$$\begin{aligned}\beta_{\varsigma_2}(s) \quad = \quad & \frac{\|W\|\sin\varphi - \sqrt{\varphi'^2 + \|W\|^2}\cos\varphi}{\sqrt{2\varphi'^2 + 2\|W\|^2}} T + \frac{\varphi'}{\sqrt{2\varphi'^2 + 2\|W\|^2}} N \\ & + \frac{\|W\|\cos\varphi + \sqrt{\varphi'^2 + \|W\|^2}\sin\varphi}{\sqrt{2\varphi'^2 + 2\|W\|^2}} B\end{aligned} \tag{4.1.64}$$

şeklinde bulunur. Bu ifadenin türevi alınırsa $T_{\beta_{\varsigma_2}}(s)$ teğet vektörü

$$T_{\beta_{\varsigma_2}}(s) = \frac{\varphi'\sin\varphi - \|W\|\cos\varphi}{\sqrt{\|W\|^2 + \varphi'^2}} T + \frac{\varphi'\cos\varphi + \|W\|\sin\varphi}{\sqrt{\|W\|^2 + \varphi'^2}} B \tag{4.1.65}$$

biçiminde olur. (4.1.64) ve (4.1.65) ifadelerinden elde edilen $\beta_{\varsigma_2} \wedge T_{\beta_{\varsigma_2}}$ vektörü

$$\begin{aligned}\beta_{\varsigma_2} \wedge T_{\beta_{\varsigma_2}}(s) \quad = \quad & \frac{\|W\|\sin\varphi + \sqrt{\|W\|^2 + \varphi'^2}\cos\varphi}{\sqrt{2\|W\|^2 + 2\varphi'^2}} T + \frac{\varphi'}{\sqrt{2\|W\|^2 + 2\varphi'^2}} N \\ & + \frac{\|W\|\cos\varphi - \sqrt{\|W\|^2 + \varphi'^2}\sin\varphi}{\sqrt{2\|W\|^2 + 2\varphi'^2}} B\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. (4.1.65) ifadesinin türevi alınırsa $T'_{\beta_{\varsigma_2}}$ türev vektörü

$$\eta = \Big(\frac{\varphi'}{\sqrt{\varphi'^2 + \|W\|^2}}\Big)' \cos\varphi(c-s)$$

olmak üzere

$$T'_{\beta_{\varsigma_2}}(s) = \frac{\eta\sqrt{2}\|W\|\sin\varphi+\sqrt{2\|W\|^2+2\varphi'^2}\cos\varphi}{(1-\eta)\sqrt{\|W\|^2+\varphi'^2}}T+\frac{\eta\sqrt{2}\varphi'}{(1-\eta)\sqrt{\|W\|^2+\varphi'^2}}N$$
$$+\frac{\eta\sqrt{2}\|W\|\cos\varphi-\sqrt{2\|W\|^2+2\varphi'^2}\sin\varphi}{(1-\eta)\sqrt{\|W\|^2+\varphi'^2}}B$$

şeklinde elde edilir. Geodezik eğrilik tanımından $\kappa_g^{\beta_{\varsigma_2}}$ geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\beta_{\varsigma_2}} = \frac{1+\eta}{1-\eta}$$

biçiminde olur.

Tanım 4.1.7 $\alpha^*: I \to S^2$ involüt eğrisinin aslinormaller göstergesine ait Sabban çatısı $\{N^*, T_{N^*}, N^*\wedge T_{N^*}\}$ olsun.

$$\beta_{\varsigma_3}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(T_{N^*}+N^*\wedge T_{N^*}) \tag{4.1.66}$$

şeklinde tanımlı vektörün çizdiği regüler eğriye $T_{N^*}(N^*\wedge T_{N^*})$-Smarandache eğrisi denir.

Teorem 4.1.13 $T_{N^*}(N^*\wedge T_{N^*})$-Smarandache eğrisinin geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\beta_{\varsigma_3}} = \frac{1}{\left(1+2\left(\frac{\varphi^{*\prime}}{\|W^*\|}\right)^2\right)^{\frac{5}{2}}}\left(2\frac{\varphi^{*\prime}}{\|W^*\|}\delta_1-\delta_2+\delta_3\right) \tag{4.1.67}$$

denklemiyle verilir. Burada

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \frac{\varphi^{*\prime}}{\|W^*\|}+2\left(\frac{\varphi^{*\prime}}{\|W^*\|}\right)^3+2\left(\frac{\varphi^{*\prime}}{\|W^*\|}\right)'\left(\frac{\varphi^{*\prime}}{\|W^*\|}\right) \\ \varepsilon_2 = -1-3\left(\frac{\varphi^{*\prime}}{\|W^*\|}\right)^2-2\left(\frac{\varphi^{*\prime}}{\|W^*\|}\right)^4-\left(\frac{\varphi^{*\prime}}{\|W^*\|}\right)' \\ \varepsilon_3 = -\left(\frac{\varphi^{*\prime}}{\|W^*\|}\right)^2-2\left(\frac{\varphi^{*\prime}}{\|W^*\|}\right)^4+\left(\frac{\varphi^{*\prime}}{\|W^*\|}\right)' \end{cases} \tag{4.1.68}$$

şeklinde birer katsayıdır.

İspat.

$$\beta_{\varsigma_3}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(T_{N^*}+N^*\wedge T_{N^*})$$

eğrisinin $s_{\beta_{\varsigma_3}}$ yay parametresine göre türevi alınırsa

$$T_{\beta_{\varsigma_3}}\frac{ds_{\beta_{\varsigma_3}}}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-N^*-\frac{\varphi^{*\prime}}{\|W^*\|}T_{N^*}+\frac{\varphi^{*\prime}}{\|W^*\|}N^*\wedge T_{N^*}\right)$$

olur. Bu eşitliğin normu alınırsa $\frac{ds_{\beta_{\varsigma_3}}}{ds}$ ifadesi

$$\frac{ds_{\beta_{\varsigma_3}}}{ds}=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1+2\Big(\frac{\varphi^{*\prime}}{\|W^*\|}\Big)^2}$$

bulunur ve bu ifade yukarıda yerine yazılırsa $T_{\beta_{\varsigma_3}}(s)$ teğet vektörü

$$T_{\beta_{\varsigma_3}}(s)=\frac{1}{\sqrt{1+2\Big(\frac{\varphi^{*\prime}}{\|W^*\|}\Big)^2}}\Big(-N^*-\frac{\varphi^{*\prime}}{\|W^*\|}T_{N^*}+\frac{\varphi^{*\prime}}{\|W^*\|}N^*\wedge T_{N^*}\Big) \tag{4.1.69}$$

biçiminde olur. Bu ifadenin türevi alınırsa katsayılar

$$\begin{cases}\varepsilon_1=\frac{\varphi^{*\prime}}{\|W^*\|}+2\big(\frac{\varphi^{*\prime}}{\|W^*\|}\big)^3+2\big(\frac{\varphi^{*\prime}}{\|W^*\|}\big)'\big(\frac{\varphi^{*\prime}}{\|W^*\|}\big)\\ \varepsilon_2=-1-3\big(\frac{\varphi^{*\prime}}{\|W^*\|}\big)^2-2\big(\frac{\varphi^{*\prime}}{\|W^*\|}\big)^4-\big(\frac{\varphi^{*\prime}}{\|W^*\|}\big)'\\ \varepsilon_3=-\big(\frac{\varphi^{*\prime}}{\|W^*\|}\big)^2-2\big(\frac{\varphi^{*\prime}}{\|W^*\|}\big)^4+\big(\frac{\varphi^{*\prime}}{\|W^*\|}\big)'\end{cases}$$

olmak üzere $T'_{\beta_{\varsigma_3}}$ türev vektörü

$$T'_{\beta_{\varsigma_3}}(s)=\frac{\sqrt{2}}{\Big(1+2\big(\frac{\varphi^{*\prime}}{\|W^*\|}\big)^2\Big)^2}\big(\varepsilon_1N^*+\varepsilon_2T_{N^*}+\varepsilon_3N^*\wedge T_{N^*}\big) \tag{4.1.70}$$

şeklinde elde edilir. (4.1.66) ve (4.1.69) ifadelerinden elde edilen $\beta_{\varsigma_3}\wedge T_{\beta_{\varsigma_3}}$ vektörü

$$\beta_{\varsigma_3}\wedge T_{\beta_{\varsigma_3}}(s)=\frac{1}{\sqrt{2+4\Big(\frac{\varphi^{*\prime}}{\|W^*\|}\Big)^2}}\Big(2\frac{\varphi^{*\prime}}{\|W^*\|}N^*-T_{N^*}+N^*\wedge T_{N^*}\Big) \tag{4.1.71}$$

şeklinde yazılır. (4.1.66), (4.1.69), (4.1.70) ve (4.1.71) vektörlerinde (4.1.2) den karşılıkları yazılırsa β_{ς_3}-Smarandache eğrisine ait Sabban çatısının ve $T'_{\beta_{\varsigma_3}}$ türev vektörünün involüt eğrisine bağlı ifadesi

$$\begin{aligned}\beta_{\varsigma_3}(s) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big((\sin\varphi^*-\cos\varphi^*)T^*+(\sin\varphi^*+\cos\varphi^*)B^*\Big),\\ T_{\beta_{\varsigma_3}}(s) &= \frac{\varphi^{*\prime}(\sin\varphi^*+\cos\varphi^*)}{\sqrt{\|W^*\|^2+2(\varphi^{*\prime})^2}}T^*-\frac{\|W^*\|}{\sqrt{\|W^*\|^2+2(\varphi^{*\prime})^2}}N^*\\ &\quad+\frac{\varphi^{*\prime}(\cos\varphi^*-\sin\varphi^*)}{\sqrt{\|W^*\|^2+2(\varphi^{*\prime})^2}}B^*,\\ \beta_{\varsigma_3}\wedge T_{\beta_{\varsigma_3}}(s) &= \frac{\cos\varphi^*+\sin\varphi^*}{\sqrt{2\|W^*\|^2+4(\varphi^{*\prime})^2}}T^*+\frac{2\varphi^{*\prime}}{\sqrt{2\|W^*\|^2+4(\varphi^{*\prime})^2}}N^*\\ &\quad+\frac{\cos\varphi^*-\sin\varphi^*}{\sqrt{2\|W^*\|^2+4(\varphi^{*\prime})^2}}B^*,\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
T'_{\beta_{\varsigma_3}}(s) &= \frac{\|W^*\|^4\sqrt{2}(\varepsilon_3\sin\varphi^* - \varepsilon_2\cos\varphi^*)}{\left(\|W^*\|^2+2(\varphi^{*\prime})^2\right)^2}T^* + \frac{\varepsilon_1\|W^*\|^4\sqrt{2}}{\left(\|W^*\|^2+2(\varphi^{*\prime})^2\right)^2}N^* \\
&\quad + \frac{\|W^*\|^4\sqrt{2}(\varepsilon_2\sin\varphi^* + \varepsilon_3\cos\varphi^*)}{\left(\|W^*\|^2+2(\varphi^{*\prime})^2\right)^2}B^*
\end{aligned}
$$

denklemlerine dönüşür. Geodezik eğrilik tanımından $\kappa_g^{\beta_{\varsigma_3}}$ geodezik eğriliği

$$
\kappa_g^{\beta_{\varsigma_3}} = \frac{1}{\left(1+2\left(\frac{\varphi^{*\prime}}{\|W^*\|}\right)^2\right)^{\frac{5}{2}}}\left(2\frac{\varphi^{*\prime}}{\|W^*\|}\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_3\right)
$$

şeklinde bulunur.

Teorem 4.1.14 α eğrisinin involüt eğrisi α^* olsun. α^* eğrisinin aslinormaller göstergesine ait $T_{N^*}(N^* \wedge T_{N^*})$- Smarandache eğrisinin geodezik eğriliğinin evolüt eğrisine bağlı ifadesi

$$
\kappa_g^{\beta_{\varsigma_3}} = \frac{1}{\left(2+\eta^2\right)^{\frac{5}{2}}}\left(2\eta\overline{\varepsilon}_1 - \overline{\varepsilon}_2 + \overline{\varepsilon}_3\right) \tag{4.1.72}
$$

denklemiyle verilir. Burada

$$
\eta = \left(\frac{\varphi'}{\sqrt{\varphi'^2+\|W\|^2}}\right)'\cos\varphi(c-s)
$$

olmak üzere

$$
\begin{cases}
\overline{\varepsilon}_1 = \eta + 2\eta^3 + 2\eta'\eta \\
\overline{\varepsilon}_2 = -1 - 3\eta^2 - 2\eta^4 - \eta' \\
\overline{\varepsilon}_3 = -\eta^2 - 2\eta^4 + \eta'
\end{cases} \tag{4.1.73}
$$

şeklinde birer katsayıdır.

İspat.

$$
\beta_{\varsigma_3}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(T_{N^*} + N^* \wedge T_{N^*})
$$

eşitliğinde sırasıyla (4.1.2), (3.2.4) ve (3.2.5) den karşılıkları yazılırsa β_{ς_3} vektörünün evolüt eğrisine bağlı ifadesi

$$
\beta_{\varsigma_3}(s) = \frac{(\varphi'+\|W\|)\sin\varphi}{\sqrt{2\varphi'^2+2\|W\|^2}}T + \frac{\varphi'-\|W\|}{\sqrt{2\varphi'^2+2\|W\|^2}}N + \frac{(\varphi'-\|W\|)\cos\varphi}{\sqrt{2\varphi'^2+2\|W\|^2}}B, \tag{4.1.74}
$$

biçiminde olur. Bu ifadenin türevi alınırsa

$$
\eta = \left(\frac{\varphi'}{\sqrt{\varphi'^2+\|W\|^2}}\right)'\cos\varphi(c-s)
$$

olmak üzere $T_{\beta_{\varsigma_3}}(s)$ teğet vektörü

$$T_{\beta_{\varsigma_3}}(s) = \frac{\eta(\|W\|-\varphi')\sin\varphi+\sqrt{\|W\|^2+\varphi'^2}\cos\varphi}{\sqrt{1+2\eta^2}\sqrt{\|W\|^2+\varphi'^2}}T+\frac{\eta(\varphi'-\|W\|)}{\sqrt{1+2\eta^2}\sqrt{\|W\|^2+\varphi'^2}}N \tag{4.1.75}$$

$$+\frac{\eta(\|W\|-\varphi')\cos\varphi-\sqrt{\|W\|^2+\varphi'^2}\sin\varphi}{\sqrt{1+2\eta^2}\sqrt{\|W\|^2+\varphi'^2}}B,$$

şeklinde bulunur. Bu ifadenin tekrar türevi alınırsa katsayılar

$$\begin{cases} \overline{\varepsilon}_1=\eta+2\eta^3+2\eta'\eta \\ \overline{\varepsilon}_2=-1-3\eta^2-2\eta^4-\eta' \\ \overline{\varepsilon}_3=-\eta^2-2\eta^4+\eta' \end{cases}$$

olmak üzere $T'_{\beta_{\varsigma_3}}(s)$ türev vektörü

$$T'_{\beta_{\varsigma_3}}(s) = \frac{(\overline{\varepsilon}_3\|W\|+\overline{\varepsilon}_2\varphi')\sqrt{2}\sin\varphi-\overline{\varepsilon}_1\sqrt{2\|W\|^2+2\varphi'^2}\cos\varphi}{\left(1+2\eta^2\right)^2\sqrt{\varphi'^2+\|W\|^2}}T$$

$$+\frac{(\overline{\varepsilon}_3\varphi'-\overline{\varepsilon}_2\|W\|)\sqrt{2}}{\left(1+2\eta^2\right)^2\sqrt{\varphi'^2+\|W\|^2}}N$$

$$+\frac{(\overline{\varepsilon}_3\|W\|+\overline{\varepsilon}_2\varphi')\sqrt{2}\cos\varphi+\overline{\varepsilon}_1\sqrt{2\|W\|^2+2\varphi'^2}\sin\varphi}{\left(1+2\eta^2\right)^2\sqrt{\varphi'^2+\|W\|^2}}B$$

şeklinde elde edilir. (4.1.74) ve (4.1.75) ifadelerinden elde edilen $\beta_{\varsigma_3}\wedge T_{\beta_{\varsigma_3}}$ vektörü

$$\beta_{\varsigma_3}\wedge T_{\beta_{\varsigma_3}}(s) = \frac{(\|W\|-\varphi')\sin\varphi-2\eta\sqrt{\|W\|^2+\varphi'^2}\cos\varphi}{\sqrt{2+4\eta^2}\sqrt{\|W\|^2+\varphi'^2}}T$$

$$+\frac{\varphi'+\|W\|}{\sqrt{2+4\eta^2}\sqrt{\|W\|^2+\varphi'^2}}N$$

$$+\frac{(\|W\|-\varphi')\cos\varphi+2\eta\sqrt{\|W\|^2+\varphi'^2}\sin\varphi}{\sqrt{2+4\eta^2}\sqrt{\|W\|^2+\varphi'^2}}B,$$

şeklinde bulunur. Geodezik eğrilik tanımından $\kappa_g^{\beta_{\varsigma_3}}$ geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\beta_{\varsigma_3}} = \frac{1}{\left(2+\eta^2\right)^{\frac{5}{2}}}\left(2\eta\overline{\varepsilon}_1-\overline{\varepsilon}_2+\overline{\varepsilon}_3\right)$$

şeklindedir.

Tanım 4.1.8 $\alpha^* : I \to S^2$ involüt eğrisinin aslinormaller göstergesine ait Sabban çatısı $\{N^*, T_{N^*}, N^* \wedge T_{N^*}\}$ olsun.

$$\beta_{\varsigma_4}(s) = \frac{1}{\sqrt{3}}(N^* + T_{N^*} + N^* \wedge T_{N^*}) \tag{4.1.76}$$

şeklinde tanımlı vektörün çizdiği regüler eğriye $N^*T_{N^*}(N^* \wedge T_{N^*})$-Smarandache eğrisi denir.

Teorem 4.1.15 $N^*T_{N^*}(N^* \wedge T_{N^*})$-Smarandache eğrisinin geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\beta_{\varsigma_4}} = \frac{\big(2\frac{\varphi^{*\prime}}{\|W^*\|} - 1\big)\rho_1 + \big(-1 - \frac{\varphi^{*\prime}}{\|W^*\|}\big)\rho_2 + \big(2 - \frac{\varphi^{*\prime}}{\|W^*\|}\big)\rho_3}{4\sqrt{2}\Big(1 - \frac{\varphi^{*\prime}}{\|W^*\|} + (\frac{\varphi^{*\prime}}{\|W^*\|})^2\Big)^{\frac{5}{2}}} \tag{4.1.77}$$

denklemiyle verilir. Burada

$$\begin{cases} \rho_1 = -2 + 4\big(\frac{\varphi^{*\prime}}{\|W^*\|}\big) - \big(\frac{\varphi^{*\prime}}{\|W^*\|}\big)^2 + 2\big(\frac{\varphi^{*\prime}}{\|W^*\|}\big)^3 + \big(\frac{\varphi^{*\prime}}{\|W^*\|}\big)'\big(2\frac{\varphi^{*\prime}}{\|W^*\|} - 1\big) \\ \rho_2 = -2 + 2\big(\frac{\varphi^{*\prime}}{\|W^*\|}\big) - 4\big(\frac{\varphi^{*\prime}}{\|W^*\|}\big)^2 + 2\big(\frac{\varphi^{*\prime}}{\|W^*\|}\big)^3 - 2\big(\frac{\varphi^{*\prime}}{\|W^*\|}\big)^4 - \big(\frac{\varphi^{*\prime}}{\|W^*\|}\big)'\big(1 + \frac{\varphi^{*\prime}}{\|W^*\|}\big) \\ \rho_3 = 2\big(\frac{\varphi^{*\prime}}{\|W^*\|}\big) - 4\big(\frac{\varphi^{*\prime}}{\|W^*\|}\big)^2 + 4\big(\frac{\varphi^{*\prime}}{\|W^*\|}\big)^3 - 2\big(\frac{\varphi^{*\prime}}{\|W^*\|}\big)^4 + \big(\frac{\varphi^{*\prime}}{\|W^*\|}\big)'\big(2 - \frac{\varphi^{*\prime}}{\|W^*\|}\big) \end{cases} \tag{4.1.78}$$

şeklinde birer katsayıdır.

İspat.

$$\beta_{\varsigma_4}(s) = \frac{1}{\sqrt{3}}(N^* + T_{N^*} + N^* \wedge T_{N^*})$$

eğrisinin $s_{\beta_{\varsigma_4}}$ yay parametresine türevi alınırsa

$$T_{\beta_{\varsigma_4}} \frac{ds_{\beta_{\varsigma_4}}}{ds} = \frac{1}{\sqrt{3}}\Big(-N^* + \big(1 - \frac{\varphi^{*\prime}}{\|W^*\|}\big)T_{N^*} + \frac{\varphi^{*\prime}}{\|W^*\|}N^* \wedge T_{N^*}\Big)$$

olur. Bu eşitliğin normu alınırsa $\frac{ds_{\beta_{\varsigma_4}}}{ds}$ ifadesi

$$\frac{ds_{\beta_{\varsigma_4}}}{ds} = \sqrt{\frac{2}{3}\Big(1 - \frac{\varphi^{*\prime}}{\|W^*\|} + (\frac{\varphi^{*\prime}}{\|W^*\|})^2\Big)}$$

elde edilir. Bu ifade yukarıda yerine yazılırsa $T_{\beta_{\varsigma_4}}(s)$ teğet vektörü

$$T_{\beta_{\varsigma_4}}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\Big(1 - \frac{\varphi^{*\prime}}{\|W^*\|} + (\frac{\varphi^{*\prime}}{\|W^*\|})^2\Big)}}\Big(-N^* + \big(1 - \frac{\varphi^{*\prime}}{\|W^*\|}\big)T_{N^*} + \frac{\varphi^{*\prime}}{\|W^*\|}N^* \wedge T_{N^*}\Big) \tag{4.1.79}$$

biçiminde olur. Bu ifadenin tekrar türevi alınırsa katsayılar,

$$\begin{cases} \rho_1 = -2+4\big(\frac{\varphi^{*\prime}}{\|W^*\|}\big) - \big(\frac{\varphi^{*\prime}}{\|W^*\|}\big)^2 + 2\big(\frac{\varphi^{*\prime}}{\|W^*\|}\big)^3 + \big(\frac{\varphi^{*\prime}}{\|W^*\|}\big)'\big(2\frac{\varphi^{*\prime}}{\|W^*\|} - 1\big) \\ \rho_2 = -2+2\big(\frac{\varphi^{*\prime}}{\|W^*\|}\big) - 4\big(\frac{\varphi^{*\prime}}{\|W^*\|}\big)^2 + 2\big(\frac{\varphi^{*\prime}}{\|W^*\|}\big)^3 - 2\big(\frac{\varphi^{*\prime}}{\|W^*\|}\big)^4 - \big(\frac{\varphi^{*\prime}}{\|W^*\|}\big)'\big(1 + \frac{\varphi^{*\prime}}{\|W^*\|}\big) \\ \rho_3 = 2\big(\frac{\varphi^{*\prime}}{\|W^*\|}\big) - 4\big(\frac{\varphi^{*\prime}}{\|W^*\|}\big)^2 + 4\big(\frac{\varphi^{*\prime}}{\|W^*\|}\big)^3 - 2\big(\frac{\varphi^{*\prime}}{\|W^*\|}\big)^4 + \big(\frac{\varphi^{*\prime}}{\|W^*\|}\big)'\big(2 - \frac{\varphi^{*\prime}}{\|W^*\|}\big) \end{cases}$$

olmak üzere $T'_{\beta_{\varsigma_4}}(s)$ türev vektörü

$$T'_{\beta_{\varsigma_4}}(s) = \frac{\sqrt{3}}{4\Big(1 - \frac{\varphi^{*\prime}}{\|W^*\|} + \big(\frac{\varphi^{*\prime}}{\|W^*\|}\big)^2\Big)^2}\big(\rho_1 N^* + \rho_2 T_{N^*} + \rho_3 N^* \wedge T_{N^*}\big) \tag{4.1.80}$$

şeklinde elde edilir. (4.1.76) ve (4.1.79) ifadelerinden elde edilen $\beta_{\varsigma_4} \wedge T_{\beta_{\varsigma_4}}$ ifadesi,

$$\beta_{\varsigma_4} \wedge T_{\beta_{\varsigma_4}}(s) = \frac{(2\frac{\varphi^{*\prime}}{\|W^*\|} - 1)N^* - (1 + \frac{\varphi^{*\prime}}{\|W^*\|})T_{N^*} + (2 - \frac{\varphi^{*\prime}}{\|W^*\|})N^* \wedge T_{N^*}}{\sqrt{6}\sqrt{1 - \frac{\varphi^{*\prime}}{\|W^*\|} + (\frac{\varphi^{*\prime}}{\|W^*\|})^2}} \tag{4.1.81}$$

şeklinde yazılır. (4.1.76), (4.1.79), (4.1.80) ve (4.1.81) vektörlerinde (4.1.2) den karşılıkları yazılırsa β_{ς_4}-Smarandache eğrisine ait Sabban çatısının ve $T'_{\beta_{\varsigma_4}}$ vektörünün involüt eğrisinin Frenet vektörlerine, eğriliğine ve burulmasına bağlı ifadesi,

$$\beta_{\varsigma_4}(s) = \frac{1}{\sqrt{3}}\Big((\sin\varphi^* - \cos\varphi^*)T^* + N^* + (\sin\varphi^* + \cos\varphi^*)B^*\Big),$$

$$\begin{aligned} T_{\beta_{\varsigma_4}}(s) = {} & \frac{\varphi^{*\prime}\sin\varphi^* - (\|W^*\| - \varphi^{*\prime})\cos\varphi^*}{\sqrt{2(\|W^*\|^2 - \|W^*\|\varphi^{*\prime} + 2(\varphi^{*\prime})^2)}}T^* - \frac{\|W^*\|}{\sqrt{2(\|W^*\|^2 - \|W^*\|\varphi^{*\prime} + 2(\varphi^{*\prime})^2)}}N^* \\ & + \frac{\varphi^{*\prime}\cos\varphi^* + (\|W^*\| - \varphi^*)'\sin\varphi^*}{\sqrt{2(\|W^*\|^2 - \|W^*\|\varphi^{*\prime} + 2(\varphi^{*\prime})^2)}}B^*, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta_{\varsigma_4} \wedge T_{\beta_{\varsigma_4}}(s) = {} & \frac{(2\|W^*\| - \varphi^{*\prime})\sin\varphi^* + (\|W^*\| + \varphi^{*\prime})\cos\varphi^*}{\sqrt{6\|W^*\|^2 - 6\|W^*\|\varphi^{*\prime} + 6(\varphi^{*\prime})^2}}T^* + \frac{2\varphi^{*\prime} - \|W^*\|}{\sqrt{6\|W^*\|^2 - 6\|W^*\|\varphi^{*\prime} + 6(\varphi^{*\prime})^2}}N^* \\ & + \frac{(2\|W^*\| - \varphi^{*\prime})\cos\varphi^* - (\|W^*\| + \varphi^{*\prime})\sin\varphi^*}{\sqrt{6\|W^*\|^2 - 6\|W^*\|\varphi^{*\prime} + 6(\varphi^{*\prime})^2}}B^*, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T'_{\beta_{\varsigma_4}}(s) = {} & \frac{\|W^*\|^4\sqrt{3}(\rho_3\sin\varphi^* - \rho_2\cos\varphi^*)}{4\big(\|W^*\|^2 - \|W^*\|\varphi^{*\prime} + (\varphi^{*\prime})^2\big)^2}T^* + \frac{\rho_1\|W^*\|^4\sqrt{3}}{4\big(\|W^*\|^2 - \|W^*\|\varphi^{*\prime} + (\varphi^{*\prime})^2\big)^2}N^* \\ & + \frac{\|W^*\|^4\sqrt{3}(\rho_2\sin\varphi^* + \rho_3\cos\varphi^*)}{4\big(\|W^*\|^2 - \|W^*\|\varphi^{*\prime} + (\varphi^{*\prime})^2\big)^2}B^* \end{aligned}$$

denklemlerine dönüşür. Geodezik eğrilik tanımından $\kappa_g^{\beta_{\varsigma_4}}$ geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\beta_{\varsigma_4}} = \frac{\big(2\frac{\varphi^{*\prime}}{\|W^*\|} - 1\big)\rho_1 + \big(-1 - \frac{\varphi^{*\prime}}{\|W^*\|}\big)\rho_2 + \big(2 - \frac{\varphi^{*\prime}}{\|W^*\|}\big)\rho_3}{4\sqrt{2}\Big(1 - \frac{\varphi^{*\prime}}{\|W^*\|} + (\frac{\varphi^{*\prime}}{\|W^*\|})^2\Big)^{\frac{5}{2}}}$$

şeklinde bulunur.

Teorem 4.1.16 α eğrisinin involüt eğrisi α^* olsun. α^* eğrisinin aslinormaller göstergesine ait $N^*T_{N^*}(N^*\wedge T_{N^*})$- Smarandache eğrisinin geodezik eğriliğinin evolüt eğrisinin Frenet vektörlerine, eğriliğine ve burulmasına bağlı ifadesi

$$\kappa_g^{\beta_{\varsigma_4}} = \frac{(2\eta-1)\overline{\rho}_1+(-1-\eta)\overline{\rho}_2+(2-\eta)\overline{\rho}_3}{4\sqrt{2}(1-\eta+\eta^2)^{\frac{5}{2}}} \tag{4.1.82}$$

denklemiyle verilir. Burada

$$\eta = \Big(\frac{\varphi'}{\sqrt{\varphi'^2+\|W\|^2}}\Big)'\cos\varphi(c-s)$$

olmak üzere

$$\begin{cases} \overline{\rho}_1 = -2+4\eta-4\eta^2+2\eta^3+2\eta'(2\eta-1) \\ \overline{\rho}_2 = -2+2\eta-4\eta^2+2\eta^3-2\eta^4-\eta'(1+\eta) \\ \overline{\rho}_3 = 2\eta-4\eta^2+4\eta^3-2\eta^4+\eta'(2-\eta) \end{cases} \tag{4.1.83}$$

şeklinde birer katsayıdır.

İspat.

$$\beta_{\varsigma_4}(s) = \frac{1}{\sqrt{3}}(N^*+T_{N^*}+N^*\wedge T_{N^*})$$

eşitliğinde sırasıyla (4.1.2), (3.2.4) ve (3.2.5) den karşılıkları yazılırsa β_{ς_3} vektörü

$$\begin{aligned} \beta_{\varsigma_4}(s) &= \frac{(\varphi'+\|W\|)\sin\varphi-\sqrt{\varphi'^2+\|W\|^2}\cos\varphi}{\sqrt{3\varphi'^2+3\|W\|^2}}T+\frac{\varphi'-\|W\|}{\sqrt{3\varphi'^2+3\|W\|^2}}N \\ &\quad +\frac{(\varphi'+\|W\|)\cos\varphi+\sqrt{\varphi'^2+\|W\|^2}\sin\varphi}{\sqrt{3\varphi'^2+3\|W\|^2}}B \end{aligned} \tag{4.1.84}$$

biçiminde olur. Bu ifadenin türevi alınırsa

$$\eta = \Big(\frac{\varphi'}{\sqrt{\varphi'^2+\|W\|^2}}\Big)'\cos\varphi(c-s)$$

olmak üzere $T_{\beta_{\varsigma_4}}(s)$ teğet vektörü

$$\begin{aligned} T_{\beta_{\varsigma_4}}(s) &= \frac{\eta\|W\|(1-\eta)\varphi'\sin\varphi+\sqrt{\|W\|^2+\varphi'^2}\cos\varphi}{\sqrt{2(1-\eta+\eta^2)}\sqrt{\|W\|^2+\varphi'^2}}T \\ &\quad +\frac{\eta\varphi'-(1-\eta)\|W\|}{\sqrt{2(1-\eta+\eta^2)}\sqrt{\|W\|^2+\varphi'^2}}N \\ &\quad +\frac{\eta\|W\|+(1-\eta)\varphi'\cos\varphi-\sqrt{\|W\|^2+\varphi'^2}\sin\varphi}{\sqrt{2(1-\eta+\eta^2)}\sqrt{\|W\|^2+\varphi'^2}}B \end{aligned} \tag{4.1.85}$$

şeklinde bulunur. Tekrar türev alınırsa katsayılar

$$\begin{cases} \overline{\rho}_1 = -2+4\eta-4\eta^2+2\eta^3+2\eta'(2\eta-1) \\ \overline{\rho}_2 = -2+2\eta-4\eta^2+2\eta^3-2\eta^4-\eta'(1+\eta) \\ \overline{\rho}_3 = 2\eta-4\eta^2+4\eta^3-2\eta^4+\eta'(2-\eta) \end{cases}$$

olmak üzere $T'_{\beta_{\varsigma_4}}(s)$ türev vektörü

$$\begin{aligned} T'_{\beta_{\varsigma_4}}(s) \quad = \quad & \frac{(\overline{\rho}_3\|W\|+\overline{\rho}_2\varphi')\sqrt{3}\sin\varphi-\overline{\rho}_1\sqrt{3\|W\|^2+3\varphi'^2}\cos\varphi)}{4\left(1-\eta+\eta^2\right)^2\sqrt{\varphi'^2+\|W\|^2}}T \\ & +\frac{(\overline{\rho}_3\varphi'-\overline{\rho}_2\|W\|)\sqrt{3}}{4\left(1-\eta+\eta^2\right)^2\sqrt{\varphi'^2+\|W\|^2}}N \\ & +\frac{(\overline{\rho}_3\|W\|+\overline{\rho}_2\varphi')\sqrt{3}\cos\varphi+\overline{\rho}_1\sqrt{3\|W\|^2+3\varphi'^2}\sin\varphi}{4\left(1-\eta+\eta^2\right)^2\sqrt{\varphi'^2+\|W\|^2}}B \end{aligned}$$

şeklinde bulunur. (4.1.84) ve (4.1.85) ifadelerinden elde edilen $\beta_{\varsigma_4}\wedge T_{\beta_{\varsigma_4}}$ vektörü

$$\begin{aligned} \beta_{\varsigma_4}\wedge T_{\beta_{\varsigma_4}}(s) \quad = \quad & \frac{((2-\eta)\|W\|-(1+\eta)\varphi')\sin\varphi-(2\eta-1)\sqrt{\|W\|^2+\varphi'^2}\cos\varphi}{\sqrt{6-6\eta+6\eta^2}\sqrt{\|W\|^2+\varphi'^2}}T \\ & +\frac{(2-\eta)\varphi'+(1+\eta)\|W\|}{\sqrt{6-6\eta+6\eta^2}\sqrt{\|W\|^2+\varphi'^2}}N \\ & +\frac{((2-\eta)\|W\|-(1+\eta)\varphi')\cos\varphi+(2\eta-1)\sqrt{\|W\|^2+\varphi'^2}\sin\varphi}{\sqrt{6-6\eta+6\eta^2}\sqrt{\|W\|^2+\varphi'^2}}B \end{aligned}$$

şeklinde yazılır. Geodezik eğrilik tanımından $\kappa_g^{\beta_{\varsigma_4}}$ geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\beta_{\varsigma_4}} = \frac{(2\eta-1)\overline{\rho}_1+(-1-\eta)\overline{\rho}_2+(2-\eta)\overline{\rho}_3}{4\sqrt{2}(1-\eta+\eta^2)^{\frac{5}{2}}}$$

biçiminde olur.

Tanım 4.1.9 $\alpha^*: I\to S^2$ involüt eğrisinin binormaller göstergesine ait Sabban çatısı $\{B^*, T_{B^*}, B^*\wedge T_{B^*}\}$ olsun.

$$\beta_{\xi_1}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(B^*+T_{B^*}) \qquad (4.1.86)$$

şeklinde tanımlı vektörün çizdiği regüler eğriye $B^*T_{B^*}$-Smarandache eğrisi denir.

Teorem 4.1.17 $B^*T_{B^*}$-Smarandache eğrisinin geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\beta_{\xi_1}} = \frac{1}{\left(2+\left(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\right)^2\right)^{\frac{5}{2}}}\left(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\omega_1 - \frac{\kappa^*}{\tau^*}\omega_2 + 2\omega_3\right) \tag{4.1.87}$$

denklemleriyle verilir. Burada

$$\begin{cases} \omega_1 = -2-\left(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\right)^2+\left(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\right)'\left(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\right) \\ \omega_2 = -2-3\left(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\right)^2-\left(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\right)^4-\left(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\right)'\left(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\right) \\ \omega_3 = 2\left(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\right)+\left(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\right)^3+\left(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\right)' \end{cases} \tag{4.1.88}$$

şeklinde birer katsayıdır.

İspat.

$$\beta_{\xi_1}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(B^* + T_{B^*})$$

eğrisinin $s_{\beta_{\xi_1}}$ yay parametresine göre türevi alınırsa

$$T_{\beta_{\xi_1}}\frac{ds_{\beta_{\xi_1}}}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-B^* + T_{B^*} + \frac{\kappa^*}{\tau^*}B^* \wedge T_{B^*})$$

olur. Bu eşitliğin normu alınırsa $\frac{ds_{\beta_{\xi_1}}}{ds}$ ifadesi

$$\frac{ds_{\beta_{\xi_1}}}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2+\left(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\right)^2}$$

elde edilir. Bu ifade yukarıda yerine yazılırsa $T_{\beta_{\xi_1}}(s)$ teğet vektörü

$$T_{\beta_{\xi_1}}(s) = \frac{1}{\sqrt{2+\left(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\right)^2}}(-B^* + T_{B^*} + \frac{\kappa^*}{\tau^*}B^* \wedge T_{B^*}) \tag{4.1.89}$$

biçiminde olur. Bu ifadenin tekrar türevi alınırsa katsayılar,

$$\begin{cases} \omega_1 = -2-\left(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\right)^2+\left(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\right)'\left(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\right) \\ \omega_2 = -2-3\left(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\right)^2-\left(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\right)^4-\left(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\right)'\left(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\right) \\ \omega_3 = 2\left(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\right)+\left(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\right)^3+\left(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\right)' \end{cases}$$

olmak üzere $T'_{\beta_{\xi_1}}(s)$ türev vektörü

$$T'_{\beta_{\xi_1}}(s) = \frac{\sqrt{2}}{\left(2+\left(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\right)^2\right)^2}(\omega_1 B^* + \omega_2 T_{B^*} + \omega_3 B^* \wedge T_{B^*}) \tag{4.1.90}$$

dır. (4.1.86) ve (4.1.89) ifadelerinden elde edilen $\beta_{\xi_1} \wedge T_{\beta_{\xi_1}}$ ifadesi,

$$\beta_{\xi_1} \wedge T_{\beta_{\xi_1}} = \frac{1}{\sqrt{4+2\left(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\right)^2}}(\frac{\kappa^*}{\tau^*}B^* - \frac{\kappa^*}{\tau^*}T^*_{B^*} + 2B^* \wedge T_{B^*}) \tag{4.1.91}$$

şeklinde bulunur. (4.1.86), (4.1.89), (4.1.90) ve (4.1.91) vektörlerinde (4.1.3) den karşılıkları yazılırsa β_{ξ_1} -Smarandache eğrisine ait Sabban çatısının ve $T'_{\beta_{\xi_1}}$ türev vektörünün involüt eğrisine bağlı ifadesi,

$$\begin{aligned}
\beta_{\xi_1}(s) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(-N^*+B^*\Big) \\
T_{\beta_{\xi_1}}(s) &= \frac{1}{\sqrt{2+\Big(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\Big)^2}}\Big(\frac{\kappa^*}{\tau^*}T^*-N^*-B^*\Big) \\
\beta_{\xi_1}\wedge T_{\beta_{\xi_1}}(s) &= \frac{1}{\sqrt{4+2\big(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\big)^2}}\Big(2T^*+\frac{\kappa^*}{\tau^*}N^*+\frac{\kappa^*}{\tau^*}B^*\Big)
\end{aligned}$$

$$T'_{\beta_{\xi_1}}(s)=\frac{\sqrt{2}}{\Big(2+\big(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\big)^2\Big)^2}\Big(\omega_3T^*-\omega_2N^*+\omega_1B^*\Big)$$

denklemlerine dönüşür. Geodezik eğrilik tanımından $\kappa_g^{\beta_{\xi_1}}$ geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\beta_{\xi_1}}=\frac{1}{\Big(2+\big(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\big)^2\Big)^{\frac{5}{2}}}\big(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\omega_1-\frac{\kappa^*}{\tau^*}\omega_2+2\omega_3\big)$$

biçiminde olur.

Teorem 4.1.18 α eğrisinin involüt eğrisi α^* olsun. α^* eğrisinin binormaller göstergesine ait $B^*T_{B^*}$- Smarandache eğrisinin geodezik eğriliğinin evolüt eğrisinin Frenet vektörlerine, eğriliğine ve burulmasına bağlı ifadesi

$$\kappa_g^{\beta_{\xi_1}}=\frac{1}{\Big(2+\big(\frac{\|W\|}{\varphi'}\big)^2\Big)^{\frac{5}{2}}}\Big(\frac{\|W\|}{\varphi'}\overline{\omega}_1-\frac{\|W\|}{\varphi'}\overline{\omega}_2+2\overline{\omega}_3\Big) \tag{4.1.92}$$

denklemiyle verilir. Burada

$$\begin{cases}
\overline{\omega}_1=-2-\big(\frac{\|W\|}{\varphi'}\big)^2+\big(\frac{\|W\|}{\varphi'}\big)'\big(\frac{\|W\|}{\varphi'}\big)\\
\overline{\omega}_2=-2-3\big(\frac{\|W\|}{\varphi'}\big)^2-\big(\frac{\|W\|}{\varphi'}\big)^4-\big(\frac{\|W\|}{\varphi'}\big)'\big(\frac{\|W\|}{\varphi'}\big)\\
\overline{\omega}_3=2\big(\frac{\|W\|}{\varphi'}\big)+\big(\frac{\|W\|}{\varphi'}\big)^3+2\big(\frac{\|W\|}{\varphi'}\big)'
\end{cases} \tag{4.1.93}$$

şeklinde birer katsayıdır.

İspat.

$$\beta_{\xi_1}(s)=\frac{1}{\sqrt{2}}(B^*+T_{B^*})$$

eşitliğinde sırasıyla (4.1.3), (3.2.4) ve (3.2.5) den karşılıkları yazılırsa β_{ξ_1} vektörünün evolüt eğrisine bağlı ifadesi

$$\beta_{\xi_1}(s)=\frac{1}{\sqrt{2}}\big((\cos\varphi+\sin\varphi)\,T+(\cos\varphi-\sin\varphi)\,B \tag{4.1.94}$$

biçiminde olur. Bu ifadenin türevi alınırsa $T_{\beta_{\xi_1}}(s)$ teğet vektörü

$$T_{\beta_{\xi_1}}(s) = \frac{\cos\varphi - \sin\varphi}{\sqrt{\|W\|^2 + 2\varphi'^2}} T + \frac{\|W\|}{\sqrt{\|W\|^2 + 2\varphi'^2}} N - \frac{\sin\varphi + \cos\varphi}{\sqrt{\|W\|^2 + 2\varphi'^2}} B \qquad (4.1.95)$$

şeklinde bulunur. Tekrar türev alınırsa katsayılar

$$\begin{cases} \overline{\omega}_1 = -2 - \left(\frac{\|W\|}{\varphi'}\right)^2 + \left(\frac{\|W\|}{\varphi'}\right)'\left(\frac{\|W\|}{\varphi'}\right) \\ \overline{\omega}_2 = -2 - 3\left(\frac{\|W\|}{\varphi'}\right)^2 - \left(\frac{\|W\|}{\varphi'}\right)^4 - \left(\frac{\|W\|}{\varphi'}\right)'\left(\frac{\|W\|}{\varphi'}\right) \\ \overline{\omega}_3 = 2\left(\frac{\|W\|}{\varphi'}\right) + \left(\frac{\|W\|}{\varphi'}\right)^3 + 2\left(\frac{\|W\|}{\varphi'}\right)' \end{cases}$$

olmak üzere $T'_{\beta_{\xi_1}}(s)$ türev vektörü

$$\begin{aligned} T'_{\beta_{\xi_1}}(s) &= \frac{\varphi'^4(\overline{\omega}_1 \sin\varphi + \overline{\omega}_2 \cos\varphi)\sqrt{2}}{(\|W\|^2 + 2\varphi'^2)^2} T + \frac{\varphi'^4 \overline{\omega}_3 \sqrt{2}}{(\|W\|^2 + 2\varphi'^2)^2} N \\ &\quad + \frac{\varphi'^4(\overline{\omega}_1 \cos\varphi - \overline{\omega}_2 \sin\varphi)\sqrt{2}}{(\|W\|^2 + 2\varphi'^2)^2} B \end{aligned}$$

biçiminde olur. (4.1.94) ve (4.1.95) ifadelerinden elde edilen $\beta_{\xi_1} \wedge T_{\beta_{\xi_1}}$ vektörü

$$\beta_{\xi_1} \wedge T_{\beta_{\xi_1}} = \frac{\|W\|(\sin\varphi - \cos\varphi)}{\sqrt{2\|W\|^2 + 4\varphi'^2}} T + \frac{2\varphi'}{\sqrt{2\|W\|^2 + 4\varphi'^2}} N + \frac{\|W\|(\cos\varphi + \sin\varphi)}{\sqrt{2\|W\|^2 + 4\varphi'^2}} B$$

şeklinde yazılır. Geodezik eğrilik tanımından $\kappa_g^{\beta_{\xi_1}}$ geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\beta_{\xi_1}} = \frac{1}{\left(2 + \left(\frac{\|W\|}{\varphi'}\right)^2\right)^{\frac{5}{2}}} \left(\frac{\|W\|}{\varphi'} \overline{\omega}_1 - \frac{\|W\|}{\varphi'} \overline{\omega}_2 + 2\overline{\omega}_3 \right)$$

şeklinde bulunur.

Tanım 4.1.10 $\alpha^* : I \to S^2$ involüt eğrisinin binormaller göstergesine ait Sabban çatısı $\{B^*, T_{B^*}, B^* \wedge T_{B^*}\}$ olsun.

$$\beta_{\xi_2}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(B^* + B^* \wedge T_{B^*}) \qquad (4.1.96)$$

şeklinde tanımlı vektörün çizdiği regüler eğriye $B^*(B^* \wedge T_{B^*})$-Smarandache eğrisi denir.

Teorem 4.1.19 $B^*(B^* \wedge T_{B^*})$-Smarandache eğrisinin geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\beta_{\xi_2}} = \frac{(\tau^* + \kappa^*)}{(\tau^* - \kappa^*)} \qquad (4.1.97)$$

denklemiyle verilir.

İspat.

$$\beta_{\xi_2}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(B^* + B^* \wedge T_{B^*})$$

eğrisinin $s_{\beta_{\xi_2}}$ yay parametresine göre türevi alınırsa

$$T_{\beta_{\xi_2}} \frac{ds_{\beta_{\xi_2}}}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(1 - \frac{\kappa^*}{\tau^*}\big)T_{B^*}$$

olur. Bu eşitliğin normu alınırsa $\frac{ds_{\beta_{\xi_2}}}{ds}$ ifadesi

$$\frac{ds_{\beta_{\xi_2}}}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(1 - \frac{\kappa^*}{\tau^*}\big)$$

bulunur. Bu ifade yukarıda yerine yazılırsa $T_{\beta_{\xi_2}}(s)$ teğet vektörü

$$T_{\beta_{\xi_2}}(s) = T_{B^*} \tag{4.1.98}$$

biçiminde olur. Bu ifadenin tekrar türevi alınırsa $T'_{\beta_{\xi_2}}(s)$ türev vektörü

$$T'_{\beta_{\xi_2}}(s) = \frac{\sqrt{2}}{\big(1 - \frac{\kappa^*}{\tau^*}\big)}\big(-B^* + \frac{\kappa^*}{\tau^*}B^* \wedge T_{B^*}\big) \tag{4.1.99}$$

şeklinde bulunur. (4.1.96) ve (4.1.98) ifadelerinden elde edilen $\beta_{\xi_2} \wedge T_{\beta_{\xi_2}}$ vektörü,

$$\beta_{\xi_2} \wedge T_{\beta_{\xi_2}}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-B^* + B^* \wedge T_{B^*}) \tag{4.1.100}$$

şeklindedir. (4.1.96), (4.1.98), (4.1.99) ve (4.1.100) vektörlerinde (4.1.3) deki karşılıkları yazılırsa β_{ξ_2}-Smarandache eğrisine ait Sabban çatısının ve $T'_{\beta_{\xi_2}}$ türev vektörünün involüt eğrisine bağlı ifadesi,

$$\begin{aligned}
\beta_{\xi_2}(s) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(T^* + B^*), \\
T_{\beta_{\xi_2}}(s) &= -N^*, \\
\beta_{\xi_2} \wedge T_{\beta_{\xi_2}}(s) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(T^* - B^*), \\
T'_{\beta_{\xi_2}}(s) &= \frac{\sqrt{2}}{(1 - \frac{\kappa^*}{\tau^*})}\big(\frac{\kappa^*}{\tau^*}T^* - B^*\big)
\end{aligned}$$

eşitliklerine dönüşür. Geodezik eğrilik tanımından $\kappa_g^{\beta_{\xi_2}}$ geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\beta_{\xi_2}} = \langle T'_{\beta_{\xi_2}}, \beta_{\xi_2} \wedge T_{\beta_{\xi_2}} \rangle = \frac{(\tau^* + \kappa^*)}{(\tau^* - \kappa^*)}$$

şeklinde bulunur.

Teorem 4.1.20 α eğrisinin involüt eğrisi α^* olsun. α^* eğrisinin binormaller göstergesine ait $B^*(B^* \wedge T_{B^*})$- Smarandache eğrisinin geodezik eğriliğinin evolüt eğrisinin Frenet vektörlerine, eğriliğine ve burulmasına bağlı ifadesi

$$\kappa_g^{\beta_{\xi_2}} = \frac{\|W\| + \varphi'}{\varphi' - \|W\|} \tag{4.1.101}$$

denklemiyle verilir.

İspat.

$$\beta_{\xi_2}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(B^* + B^* \wedge T_{B^*})$$

eşitliğinde sırasıyla (4.1.3), (3.2.4) ve (3.2.5) den karşılıkları yazılırsa β_{ξ_2} vektörünün evolüt eğrisine bağlı ifadesi

$$\beta_{\xi_2}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin\varphi\, T + N + \cos\varphi\, B) \tag{4.1.102}$$

şekline dönüşür. Bu ifadenin türevi alınırsa $T_{\beta_{\xi_2}}(s)$ teğet vektörü

$$T_{\beta_{\xi_2}}(s) = \cos\varphi\, T - \sin\varphi\, B \tag{4.1.103}$$

eşitliğiyle bulunur. Tekrar türev alınırsa $T'_{\beta_{\xi_2}}(s)$ türev vektörü

$$T'_{\beta_{\xi_2}}(s) = \frac{\varphi'\sqrt{2}\sin\varphi}{\|W\| - \varphi'} T + \frac{\|W\|\sqrt{2}}{\|W\| - \varphi'} N + \frac{\varphi'\sqrt{2}\cos\varphi}{\|W\| - \varphi'} B$$

biçiminde olur. (4.1.102) ve (4.1.103) ifadelerinden elde edilen $\beta_{\xi_2} \wedge T_{\beta_{\xi_2}}$ vektörü

$$\beta_{\xi_2} \wedge T_{\beta_{\xi_2}}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\sin\varphi\, T + N - \cos\varphi\, B)$$

şeklinde yazılır. Geodezik eğrilik tanımından $\kappa_g^{\beta_{\xi_2}}$ geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\beta_{\xi_2}} = \frac{\|W\| + \varphi'}{\varphi' - \|W\|}$$

şeklinde bulunur.

Tanım 4.1.11 $\alpha^* : I \to S^2$ involüt eğrisinin binormaller göstergesine ait Sabban çatısı $\{B^*, T_{B^*}, B^* \wedge T_{B^*}\}$ olsun.

$$\beta_{\xi_3}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(T_{B^*} + B^* \wedge T_{B^*}) \tag{4.1.104}$$

şeklinde tanımlı vektörün çizdiği regüler eğriye $T_{B^*}(B^* \wedge T_{B^*})$-Smarandache eğrisi denir.

Teorem 4.1.21 $T_{B^*}(B^* \wedge T_{B^*})$-Smarandache eğrisinin geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\beta_{\xi_3}} = \frac{1}{\left(1+2\left(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\right)^2\right)^{\frac{5}{2}}}\left(2\frac{\kappa^*}{\tau^*}\psi_1 - \psi_2 + \psi_3\right) \tag{4.1.105}$$

denklemiyle verilir. Burada

$$\begin{cases} \psi_1 = \frac{\kappa^*}{\tau^*} + 2\left(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\right)^3 + 2\left(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\right)'\left(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\right) \\ \psi_2 = -1 - 3\left(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\right)^2 - 2\left(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\right)^4 - \left(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\right)' \\ \psi_3 = -\left(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\right)^2 - 2\left(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\right)^4 + \left(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\right)' \end{cases} \tag{4.1.106}$$

şeklinde birer katsayıdır.

İspat.

$$\beta_{\xi_3}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(T_{B^*} + B^* \wedge T_{B^*})$$

eğrisinin $s_{\beta_{\xi_3}}$ yay parametresine göre türevi alınırsa

$$T_{\beta_{\xi_3}} \frac{ds_{\beta_{\xi_3}}}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-B^* - \frac{\kappa^*}{\tau^*}T_{B^*} + \frac{\kappa^*}{\tau^*}B^* \wedge T_{B^*})$$

olur. Bu eşitliğin normu alınırsa $\frac{ds_{\beta_{\xi_3}}}{ds}$ ifadesi

$$\frac{ds_{\beta_{\xi_3}}}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1+2\left(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\right)^2}$$

bulunur. Bu ifade yukarıda yerine yazılırsa $T_{\beta_{\xi_3}}(s)$ teğet vektörü

$$T_{\beta_{\xi_3}}(s) = \frac{1}{\sqrt{1+2\left(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\right)^2}}(-B^* - \frac{\kappa^*}{\tau^*}T_{B^*} + \frac{\kappa^*}{\tau^*}B^* \wedge T_{B^*}) \tag{4.1.107}$$

biçiminde olur. Bu ifadenin tekrar türevi alınırsa katsayılar

$$\begin{cases} \psi_1 = \frac{\kappa^*}{\tau^*} + 2\left(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\right)^3 + 2\left(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\right)'\left(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\right) \\ \psi_2 = -1 - 3\left(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\right)^2 - 2\left(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\right)^4 - \left(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\right)' \\ \psi_3 = -\left(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\right)^2 - 2\left(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\right)^4 + \left(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\right)' \end{cases} \tag{4.1.108}$$

olmak üzere $T'_{\beta_{\xi_3}}$ türev vektörü

$$T'_{\beta_{\xi_3}}(s) = \frac{\sqrt{2}}{\left(1+2\left(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\right)^2\right)^2}(\psi_1 B^* + \psi_2 T_{B^*} + \psi_3 B^* \wedge T_{B^*}) \tag{4.1.109}$$

şeklinde bulunur. (4.1.104) ve (4.1.107) ifadelerinden elde edilen $\beta_{\xi_3} \wedge T_{\beta_{\xi_3}}$ vektörü,

$$\beta_{\xi_3} \wedge T_{\beta_{\xi_3}}(s) = \frac{1}{\sqrt{2+4(\frac{\kappa^*}{\tau^*})^2}}(2\frac{\kappa^*}{\tau^*}B^* - T_{B^*} + B^* \wedge T_{B^*}) \tag{4.1.110}$$

şeklinde yazılır. (4.1.104), (4.1.107), (4.1.109) ve (4.1.110) vektörlerinde (4.1.3) den karşılıkları yazılırsa β_{ξ_3}-Smarandache eğrisine ait Sabban çatısının ve $T'_{\beta_{\xi_3}}$ türev vektörünün involüt eğrisine bağlı ifadesi,

$$\begin{aligned}
\beta_{\xi_3}(s) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(T^* - N^*\Big),\\
T_{\beta_{\xi_3}}(s) &= \frac{1}{\sqrt{1+2(\frac{\kappa^*}{\tau^*})^2}}\Big(\frac{\kappa^*}{\tau^*}T^* + \frac{\kappa^*}{\tau^*}N^* - B^*\Big),\\
\beta_{\xi_3} \wedge T_{\beta_{\xi_3}}(s) &= \frac{1}{\sqrt{2+4(\frac{\kappa^*}{\tau^*})^2}}\Big(T^* + N^* + 2\frac{\kappa^*}{\tau^*}B^*\Big),\\
T'_{\beta_{\xi_3}}(s) &= \frac{\sqrt{2}}{\big(1+2(\frac{\kappa^*}{\tau^*})^2\big)^2}\Big(\psi_3 T^* - \psi_2 N^* + \psi_1 B^*\Big)
\end{aligned}$$

eşitliklerine dönüşür. Geodezik eğrilik tanımından $\kappa_g^{\beta_{\xi_3}}$ geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\beta_{\xi_3}} = \frac{1}{\big(1+2(\frac{\kappa^*}{\tau^*})^2\big)^{\frac{5}{2}}}\big(2\frac{\kappa^*}{\tau^*}\psi_1 - \psi_2 + \psi_3\big)$$

biçiminde olur.

Teorem 4.1.22 α eğrisinin involüt eğrisi α^* olsun. α^* eğrisinin binormaller göstergesine ait $T_{B^*}(B^* \wedge T_{B^*})$- Smarandache eğrisinin geodezik eğriliğinin evolüt eğrisine bağlı ifadesi

$$\kappa_g^{\beta_{\xi_3}} = \frac{1}{\big(1+2(\frac{\|W\|}{\varphi'})^2\big)^{\frac{5}{2}}}\Big(2\frac{\|W\|}{\varphi'}\overline{\psi}_1 - \overline{\psi}_2 + \overline{\psi}_3\Big) \tag{4.1.111}$$

denklemiyle verilir. Burada

$$\begin{cases}
\overline{\psi}_1 = (\frac{\|W\|}{\varphi'}) + (\frac{\|W\|}{\varphi'})^3 + 2(\frac{\|W\|}{\varphi'})'(\frac{\|W\|}{\varphi'})\\
\overline{\psi}_2 = -1 - 3(\frac{\|W\|}{\varphi'})^2 - 2(\frac{\|W\|}{\varphi'})^4 - (\frac{\|W\|}{\varphi'})'\\
\overline{\psi}_3 = -(\frac{\|W\|}{\varphi'})^2 - 2(\frac{\|W\|}{\varphi'})^4 + (\frac{\|W\|}{\varphi'})'
\end{cases} \tag{4.1.112}$$

şeklinde birer katsayıdır.

İspat.

$$\beta_{\xi_3}(s)=\frac{1}{\sqrt{2}}(T_{B^*}+B^*\wedge T_{B^*})$$

eşitliğinde sırasıyla (4.1.3), (3.2.4) ve (3.2.5) den karşılıkları yazılırsa β_{ξ_3} vektörünün evolüt eğrisine bağlı ifadesi

$$\beta_{\xi_3}(s)=\frac{1}{\sqrt{2}}\big(\cos\varphi\, T+N-\sin\varphi\, B\big) \tag{4.1.113}$$

şeklinde yazılır. Bu ifadenin türevi alınırsa $T_{\beta_{\xi_3}}(s)$ teğet vektörü

$$T_{\beta_{\xi_3}}(s)=\frac{-\varphi'\sin\varphi-\|W\|\cos\varphi}{\sqrt{2\|W\|^2+\varphi'^2}}T+\frac{\|W\|}{\sqrt{2\|W\|^2+\varphi'^2}}N+\frac{\|W\|\sin\varphi-\varphi'\cos\varphi}{\sqrt{2\|W\|^2+\varphi'^2}}B \tag{4.1.114}$$

şeklinde bulunur. Bu ifadenin türevi alınırsa katsayılar

$$\begin{cases}\overline{\psi}_1=\left(\frac{\|W\|}{\varphi'}\right)+\left(\frac{\|W\|}{\varphi'}\right)^3+2\left(\frac{\|W\|}{\varphi'}\right)'\left(\frac{\|W\|}{\varphi'}\right)\\ \overline{\psi}_2=-1-3\left(\frac{\|W\|}{\varphi'}\right)^2-2\left(\frac{\|W\|}{\varphi'}\right)^4-\left(\frac{\|W\|}{\varphi'}\right)'\\ \overline{\psi}_3=-\left(\frac{\|W\|}{\varphi'}\right)^2-2\left(\frac{\|W\|}{\varphi'}\right)^4+\left(\frac{\|W\|}{\varphi'}\right)'\end{cases}$$

olmak üzere $T'_{\beta_{\xi_3}}(s)$ türev vektörü

$$\begin{aligned}T'_{\beta_{\xi_3}}(s) &= \frac{\varphi'^4(\overline{\psi}_1\sin\varphi+\overline{\psi}_2\cos\varphi)\sqrt{2}}{(2\|W\|^2+\varphi'^2)^2}T+\frac{\varphi'^4\overline{\psi}_3\sqrt{2}}{(2\|W\|^2+\varphi'^2)^2}N\\ &\quad+\frac{\varphi'^4(\overline{\psi}_1\cos\varphi-\overline{\psi}_2\sin\varphi)\sqrt{2}}{(2\|W\|^2+\varphi'^2)^2}B\end{aligned}$$

biçiminde olur. (4.1.113) ve (4.1.114) ifadelerinden elde edilen $\beta_{\xi_3}\wedge T_{\beta_{\xi_3}}$ vektörü

$$\beta_{\xi_3}\wedge T_{\beta_{\xi_3}}(s)=\frac{2\|W\|\sin\varphi-\varphi'\cos\varphi}{\sqrt{4\|W\|^2+2\varphi'^2}}T+\frac{\varphi'}{\sqrt{4\|W\|^2+2\varphi'^2}}N+\frac{2\|W\|\cos\varphi+\varphi'\sin\varphi}{\sqrt{4\|W\|^2+2\varphi'^2}}B$$

şeklinde yazılır. Geodezik eğrilik tanımından $\kappa_g^{\beta_{\xi_3}}$ geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\beta_{\xi_3}}=\frac{1}{\left(1+2\left(\frac{\|W\|}{\varphi'}\right)^2\right)^{\frac{5}{2}}}\left(2\frac{\|W\|}{\varphi'}\overline{\psi}_1-\overline{\psi}_2+\overline{\psi}_3\right)$$

biçiminde elde edilir.

Tanım 4.1.12 $\alpha^*: I\to S^2$ involüt eğrisinin binormaller göstergesine ait Sabban çatısı $\{B^*, T_{B^*}, B^*\wedge T_{B^*}\}$ olsun.

$$\beta_{\xi_4}(s)=\frac{1}{\sqrt{3}}(B^*+T_{B^*}+B^*\wedge T_{B^*}) \tag{4.1.115}$$

şeklinde tanımlı vektörün çizdiği regüler eğriye $B^*T_{B^*}(B^*\wedge T_{B^*})$-Smarandache eğrisi denir.

Teorem 4.1.23 $B^*T_{B^*}(B^*\wedge T_{B^*})$-Smarandache eğrisinin geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\beta_{\xi_4}} = \frac{1}{4\sqrt{2}\Big(1+\frac{\kappa^*}{\tau^*}+\big(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\big)^2\Big)^{\frac{5}{2}}}\Big(\big(2\frac{\kappa^*}{\tau^*}-1\big)\zeta_1-\big(1+\frac{\kappa^*}{\tau^*}\big)\zeta_2+\big(2-\frac{\kappa^*}{\tau^*}\big)\zeta_3\Big) \quad (4.1.116)$$

denklemiyle verilir. Burada

$$\begin{cases}\zeta_1=-2+4\big(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\big)-\big(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\big)^2+2\big(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\big)^3+\big(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\big)'\big(2\frac{\kappa^*}{\tau^*}-1\big)\\ \zeta_2=-2+2\big(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\big)-4\big(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\big)^2+2\big(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\big)^3-2\big(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\big)^4-\big(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\big)'\big(1+\frac{\kappa^*}{\tau^*}\big)\\ \zeta_3=2\big(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\big)-4\big(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\big)^2+4\big(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\big)^3-2\big(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\big)^4+\big(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\big)'\big(2-\frac{\kappa^*}{\tau^*}\big)\end{cases} \quad (4.1.117)$$

şeklinde birer katsayıdır.

İspat.

$$\beta_{\xi_4}(s)=\frac{1}{\sqrt{3}}(B^*+T_{B^*}+B^*\wedge T_{B^*})$$

eğrisinin $s_{\beta_{\xi_4}}$ yay parametresine göre türevi alınırsa

$$T_{\beta_{\xi_4}}\frac{ds_{\beta_{\xi_4}}}{ds}=\frac{1}{\sqrt{3}}\Big(-B^*+\big(1-\frac{\kappa^*}{\tau^*}\big)T_{B^*}+\frac{\kappa^*}{\tau^*}B^*\wedge T_{B^*}\Big)$$

olur ve bu ifadenin normu alınırsa $\frac{ds_{\beta_{\xi_4}}}{ds}$ ifadesi

$$\frac{ds_{\beta_{\xi_4}}}{ds}=\sqrt{\frac{2}{3}\Big(1-\frac{\kappa^*}{\tau^*}+\big(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\big)^2\Big)}$$

bulunur. Bu ifade yukarıda yerine yazılırsa $T_{\beta_{\xi_4}}(s)$ teğet vektörü

$$T_{\beta_{\xi_4}}(s)=\frac{1}{\sqrt{2\Big(1-\frac{\kappa^*}{\tau^*}+\big(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\big)^2\Big)}}\Big(-B^*+\big(1-\frac{\kappa^*}{\tau^*}\big)T_{B^*}+\frac{\kappa^*}{\tau^*}B^*\wedge T_{B^*}\Big) \quad (4.1.118)$$

eşitliğiyle elde edilir. Tekrar türev alınırsa katsayılar

$$\begin{cases}\zeta_1=-2+4\big(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\big)-\big(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\big)^2+2\big(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\big)^3+\big(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\big)'\big(2\frac{\kappa^*}{\tau^*}-1\big)\\ \zeta_2=-2+2\big(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\big)-4\big(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\big)^2+2\big(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\big)^3-2\big(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\big)^4-\big(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\big)'\big(1+\frac{\kappa^*}{\tau^*}\big)\\ \zeta_3=2\big(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\big)-4\big(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\big)^2+4\big(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\big)^3-2\big(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\big)^4+\big(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\big)'\big(2-\frac{\kappa^*}{\tau^*}\big)\end{cases}$$

olmak üzere $T'_{\beta_{\xi_4}}(s)$ türev vektörü

$$T'_{\beta_{\xi_4}}(s)=\frac{\sqrt{3}}{4\Big(1-\frac{\kappa^*}{\tau^*}+\big(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\big)^2\Big)^2}\big(\zeta_1B^*+\zeta_2T_{B^*}+\zeta_3B^*\wedge T_{B^*}\big) \quad (4.1.119)$$

şeklinde bulunur. (4.1.115) ve (4.1.118) ifadelerinden elde edilen $\beta_{\xi_4}\wedge T_{\beta_{\xi_4}}$ vektörü

$$\beta_{\xi_4}\wedge T_{\beta_{\xi_4}}(s)=\frac{(2\frac{\kappa^*}{\tau^*}-1)B^*-(1+\frac{\kappa^*}{\tau^*})T_{B^*}+(2-\frac{\kappa^*}{\tau^*})B^*\wedge T_{B^*}}{\sqrt{6}\sqrt{1-\frac{\kappa^*}{\tau^*}+\big(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\big)^2}} \quad (4.1.120)$$

biçiminde yazılır. (4.1.115), (4.1.118), (4.1.119) ve (4.1.120) vektörlerinde (4.1.3) den karşılıkları yazılırsa β_{ξ_4}-Smarandache eğrisine ait Sabban çatısının ve $T'_{\beta_{\xi_4}}$ vektörünün involüt eğrisine bağlı ifadesi,

$$\begin{aligned}
\beta_{\xi_4} &= \frac{1}{\sqrt{3}}(T^* - N^* + B^*),\\
T_{\beta_{\xi_4}} &= \frac{1}{\sqrt{2\Big(1-\dfrac{\kappa^*}{\tau^*}+(\dfrac{\kappa^*}{\tau^*})^2\Big)}}\Big(\frac{\kappa^*}{\tau^*}T^* - \big(1-\frac{\kappa^*}{\tau^*})N^* - B^*\Big),\\
\beta_{\xi_4}\wedge T_{\beta_{\xi_4}} &= \frac{1}{\sqrt{6}\sqrt{1-\dfrac{\kappa^*}{\tau^*}+(\dfrac{\kappa^*}{\tau^*})^2}}\Big((2-\frac{\kappa^*}{\tau^*})T^* + (1+\frac{\kappa^*}{\tau^*})N^* + (2\frac{\kappa^*}{\tau^*}-1)B^*\Big),\\
T'_{\beta_{\xi_4}} &= \frac{\sqrt{3}}{4\Big(1-\frac{\kappa^*}{\tau^*}+\big(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\big)^2\Big)^2}(\zeta_3 T^* - \zeta_2 N^* + \zeta_1 B^*)
\end{aligned}$$

denklemlerine dönüşür. Geodezik eğrilik tanımından $\kappa_g^{\beta_{\xi_4}}$ geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\beta_{\xi_4}} = \frac{1}{4\sqrt{2}\Big(1+\dfrac{\kappa^*}{\tau^*}+(\dfrac{\kappa^*}{\tau^*})^2\Big)^{\frac{5}{2}}}\Big((2\frac{\kappa^*}{\tau^*}-1)\zeta_1 - (1+\frac{\kappa^*}{\tau^*})\zeta_2 + (2-\frac{\kappa^*}{\tau^*})\zeta_3\Big)$$

şeklinde olur.

Teorem 4.1.24 α eğrisinin involüt eğrisi α^* olsun. α^* eğrisinin binormaller göstergesine ait $B^*T_{B^*}(B^*\wedge T_{B^*})$- Smarandache eğrisinin geodezik eğriliğinin evolüt eğrisine bağlı ifadesi

$$\kappa_g^{\beta_{\xi_4}} = \frac{1}{4\sqrt{2}\Big(1+\dfrac{\|W\|}{\varphi'}+(\dfrac{\|W\|}{\varphi'})^2\Big)^{\frac{5}{2}}}\Bigg(\Big(2\frac{\|W\|}{\varphi'}-1\Big)\overline{\zeta}_1 - \Big(1+\frac{\|W\|}{\varphi'}\Big)\overline{\zeta}_2 + \Big(2-\frac{\|W\|}{\varphi'}\Big)\overline{\zeta}_3\Bigg) \tag{4.1.121}$$

denklemiyle verilir. Burada

$$\begin{cases}
\overline{\zeta}_1 = -2+4\big(\frac{\|W\|}{\varphi'}\big)+4\big(\frac{\|W\|}{\varphi'}\big)-\big(\frac{\|W\|}{\varphi'}\big)^2+2\big(\frac{\|W\|}{\varphi'}\big)^3+\big(\frac{\|W\|}{\varphi'}\big)'\big(2\frac{\|W\|}{\varphi'}-1\big)\\
\overline{\zeta}_2 = -2+2\big(\frac{\|W\|}{\varphi'}\big)-4\big(\frac{\|W\|}{\varphi'}\big)^2+\big(\frac{\|W\|}{\varphi'}\big)^3-2\big(\frac{\|W\|}{\varphi'}\big)^4-\big(\frac{\|W\|}{\varphi'}\big)'\big(1+\frac{\|W\|}{\varphi'}\big)\\
\overline{\zeta}_3 = 2\big(\frac{\|W\|}{\varphi'}\big)-4\big(\frac{\|W\|}{\varphi'}\big)^2+4\big(\frac{\|W\|}{\varphi'}\big)^3-2\big(\frac{\|W\|}{\varphi'}\big)^4+\big(\frac{\|W\|}{\varphi'}\big)'\big(2-\frac{\|W\|}{\varphi'}\big)
\end{cases} \tag{4.1.122}$$

şeklinde birer katsayıdır.

İspat.

$$\beta_{\xi_4}(s) = \frac{1}{\sqrt{3}}(B^* + T_{B^*} + B^* \wedge T_{B^*})$$

eşitliğinde sırasıyla (4.1.3), (3.2.4) ve (3.2.5) den karşılıkları yazılırsa β_{ξ_4} vektörünün evolüt eğrisine bağlı ifadesi

$$\beta_{\xi_4}(s) = \frac{1}{\sqrt{3}}\big((\sin\varphi + \cos\varphi)\,T + N + (\cos\varphi - \sin\varphi)\,B\big) \tag{4.1.123}$$

biçiminde olur ve bu ifadenin türevi alınırsa $T_{\beta_{\xi_4}}(s)$ teğet vektörü

$$\begin{aligned} T_{\beta_{\xi_4}}(s) &= \frac{\big(\varphi' - \|W\|\big)\cos\varphi - \varphi'\sin\varphi}{\sqrt{2(\|W\|^2 - \|W\|\varphi' + \varphi'^2)}}T - \frac{\|W\|}{\sqrt{2(\|W\|^2 - \|W\|\varphi' + \varphi'^2)}}N \\ &\quad - \frac{\varphi'\cos\varphi + (\varphi' - \|W\|)\sin\varphi}{\sqrt{2(\|W\|^2 - \|W\|\varphi' + \varphi'^2)}}B \end{aligned} \tag{4.1.124}$$

şeklinde bulunur. Tekrar türev alınırsa katsayılar

$$\begin{cases} \overline{\zeta}_1 = -2 + 4\big(\frac{\|W\|}{\varphi'}\big) + 4\big(\frac{\|W\|}{\varphi'}\big) - \big(\frac{\|W\|}{\varphi'}\big)^2 + 2\big(\frac{\|W\|}{\varphi'}\big)^3 + \big(\frac{\|W\|}{\varphi'}\big)'\big(2\frac{\|W\|}{\varphi'} - 1\big) \\ \overline{\zeta}_2 = -2 + 2\big(\frac{\|W\|}{\varphi'}\big) - 4\big(\frac{\|W\|}{\varphi'}\big)^2 + \big(\frac{\|W\|}{\varphi'}\big)^3 - 2\big(\frac{\|W\|}{\varphi'}\big)^4 - \big(\frac{\|W\|}{\varphi'}\big)'\big(1 + \frac{\|W\|}{\varphi'}\big) \\ \overline{\zeta}_3 = 2\big(\frac{\|W\|}{\varphi'}\big) - 4\big(\frac{\|W\|}{\varphi'}\big)^2 + 4\big(\frac{\|W\|}{\varphi'}\big)^3 - 2\big(\frac{\|W\|}{\varphi'}\big)^4 + \big(\frac{\|W\|}{\varphi'}\big)'\big(2 - \frac{\|W\|}{\varphi'}\big) \end{cases}$$

olmak üzere $T'_{\beta_{\xi_4}}(s)$ türev vektörü

$$\begin{aligned} T'_{\beta_{\xi_4}}(s) &= \frac{\varphi'^4(\overline{\zeta}_1\sin\varphi + \overline{\zeta}_2\cos\varphi)\sqrt{3}}{4(\|W\|^2 - \|W\|\varphi' + \varphi'^2)^2}T + \frac{\varphi'^4\overline{\zeta}_3\sqrt{3}}{4(\|W\|^2 - \|W\|\varphi' + \varphi'^2)^2}N \\ &\quad + \frac{\varphi'^4(\overline{\zeta}_1\cos\varphi - \overline{\zeta}_2\sin\varphi)\sqrt{3}}{4(\|W\|^2 - \|W\|\varphi' + \varphi'^2)^2}B \end{aligned}$$

biçiminde olur. (4.1.123) ve(4.1.124) ifadelerinden elde edilen $\beta_{\xi_4} \wedge T_{\beta_{\xi_4}}$ vektörü

$$\begin{aligned} \beta_{\xi_4} \wedge T_{\beta_{\xi_4}}(s) &= \frac{(2\|W\| - \varphi')\sin\varphi - (\|W\| + \varphi')\cos\varphi}{\sqrt{6\|W\|^2 - 6\|W\|\varphi' + 6\varphi'^2}}T \\ &\quad + \frac{2\varphi' - \|W\|}{\sqrt{6\|W\|^2 - 6\|W\|\varphi' + 6\varphi'^2}}N \\ &\quad + \frac{(2\|W\| - \varphi')\cos\varphi + (\|W\| + \varphi')\sin\varphi}{\sqrt{6\|W\|^2 - 6\|W\|\varphi' + 6\varphi'^2}}B \end{aligned}$$

şeklinde yazılır. Geodezik eğrilik tanımından $\kappa_g^{\beta_{\xi_4}}$ geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\beta_{\xi_4}} = \frac{1}{4\sqrt{2}\big(1 + \frac{\|W\|}{\varphi'} + \big(\frac{\|W\|}{\varphi'}\big)^2\big)^{\frac{5}{2}}}\left(\left(2\frac{\|W\|}{\varphi'} - 1\right)\overline{\zeta}_1 - \left(1 + \frac{\|W\|}{\varphi'}\right)\overline{\zeta}_2 + \left(2 - \frac{\|W\|}{\varphi'}\right)\overline{\zeta}_3\right)$$

şeklinde bulunur.

Tanım 4.1.13 $\alpha^* : I \to S^2$ involüt eğrisinin birim Darboux vektörünün çizdiği küresel eğriye ait Sabban çatısı $\{C^*, T_{C^*}, C^* \wedge T_{C^*}\}$ olsun.

$$\beta_{\mu_1}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(C^* + T_{C^*}) \tag{4.1.125}$$

şeklinde tanımlı vektörün çizdiği regüler eğriye $C^*T_{C^*}$-Smarandache eğrisi denir, (Şenyurt ve ark., 2016b).

Teorem 4.1.25 $C^*T_{C^*}$-Smarandache eğrisinin geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\beta_{\mu_1}} = \frac{1}{\left(2+\left(\frac{\|W^*\|}{\varphi^{*\prime}}\right)^2\right)^{\frac{5}{2}}}\left(\frac{\|W^*\|}{\varphi^{*\prime}}\Gamma_1 - \frac{\|W^*\|}{\varphi^{*\prime}}\Gamma_2 + 2\Gamma_3\right) \tag{4.1.126}$$

denklemiyle verilir. Burada

$$\begin{cases} \Gamma_1 = -2 - \left(\frac{\|W^*\|}{\varphi^{*\prime}}\right)^2 + \left(\frac{\|W^*\|}{\varphi^{*\prime}}\right)'\left(\frac{\|W^*\|}{\varphi^{*\prime}}\right) \\ \Gamma_2 = -2 - 3\left(\frac{\|W^*\|}{\varphi^{*\prime}}\right)^2 - \left(\frac{\|W^*\|}{\varphi^{*\prime}}\right)^4 - \left(\frac{\|W^*\|}{\varphi^{*\prime}}\right)'\left(\frac{\|W^*\|}{\varphi^{*\prime}}\right) \\ \Gamma_3 = 2\left(\frac{\|W^*\|}{\varphi^{*\prime}}\right) + \left(\frac{\|W^*\|}{\varphi^{*\prime}}\right)^3 + \left(\frac{\|W^*\|}{\varphi^{*\prime}}\right)' \end{cases} \tag{4.1.127}$$

şeklinde birer katsayıdır, (Şenyurt ve ark., 2016b).

İspat.

$$\beta_{\mu_1}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(C^* + T_{C^*})$$

eğrisinin $s_{\beta_{\mu_1}}$ yay parametresine göre türevi alınırsa

$$T_{\beta_{\mu_1}}\frac{ds_{\beta_{\mu_1}}}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-C^* + T_{C^*} + \frac{\|W^*\|}{\varphi^{*\prime}}C^* \wedge T_{C^*}\right)$$

olur. Bu eşitliğin normu alınırsa $\frac{ds_{\beta_{\mu_1}}}{ds}$ ifadesi

$$\frac{ds_{\beta_{\mu_1}}}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2+\left(\frac{\|W^*\|}{\varphi^{*\prime}}\right)^2}$$

bulunur. Bu ifade yukarıda yerine yazılırsa $T_{\beta_{\mu_1}}(s)$ teğet vektörü

$$T_{\beta_{\mu_1}}(s) = \frac{1}{\sqrt{2+\left(\frac{\|W^*\|}{\varphi^{*\prime}}\right)^2}}\left(-C^* + T_{C^*} + \frac{\|W^*\|}{\varphi^{*\prime}}C^* \wedge T_{C^*}\right) \tag{4.1.128}$$

şeklinde elde edilir. Bu ifadenin tekrar türevi alınırsa katsayılar,

$$\begin{cases} \Gamma_1 = -2 - \left(\frac{\|W^*\|}{\varphi^{*\prime}}\right)^2 + \left(\frac{\|W^*\|}{\varphi^{*\prime}}\right)'\left(\frac{\|W^*\|}{\varphi^{*\prime}}\right) \\ \Gamma_2 = -2 - 3\left(\frac{\|W^*\|}{\varphi^{*\prime}}\right)^2 - \left(\frac{\|W^*\|}{\varphi^{*\prime}}\right)^4 - \left(\frac{\|W^*\|}{\varphi^{*\prime}}\right)'\left(\frac{\|W^*\|}{\varphi^{*\prime}}\right) \\ \Gamma_3 = 2\left(\frac{\|W^*\|}{\varphi^{*\prime}}\right) + \left(\frac{\|W^*\|}{\varphi^{*\prime}}\right)^3 + \left(\frac{\|W^*\|}{\varphi^{*\prime}}\right)' \end{cases}$$

olmak üzere $T'_{\beta_{\mu_1}}(s)$ türev vektörü

$$T'_{\beta_{\mu_1}}(s) = \frac{\sqrt{2}}{\left(2+\left(\frac{\|W^*\|}{\varphi^{*\prime}}\right)^2\right)^2}(\Gamma_1 C^* + \Gamma_2 T_{C^*} + \Gamma_3 C^* \wedge T_{C^*}) \tag{4.1.129}$$

biçiminde olur. (4.1.125) ve (4.1.128) ifadelerinden elde edilen $\beta_{\mu_1} \wedge T_{\beta_{\mu_1}}$ vektörü

$$\beta_{\mu_1} \wedge T_{\beta_{\mu_1}} = \frac{1}{\sqrt{4+2\left(\frac{\|W^*\|}{\varphi^{*\prime}}\right)^2}}\left(\frac{\|W^*\|}{\varphi^{*\prime}}C^* - \frac{\|W^*\|}{\varphi^{*\prime}}T^*_{C^*} + 2C^* \wedge T_{C^*}\right) \tag{4.1.130}$$

şeklinde yazılır. (4.1.125), (4.1.128), (4.1.129) ve (4.1.130) vektörlerinde (4.1.4) den karşılıkları yazılırsa β_{μ_1}-Smarandache eğrisine ait Sabban çatısının ve $T'_{\beta_{\mu_1}}$ vektörünün involüt eğrisine bağlı ifadesi,

$$\begin{aligned}
\beta_{\mu_1}(s) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big((\sin\varphi^* + \cos\varphi^*)T^* + (\cos\varphi^* - \sin\varphi^*)B^*\Big), \\
T_{\beta_{\mu_1}}(s) &= \frac{\varphi^{*\prime}(\cos\varphi^* - \sin\varphi^*)}{\sqrt{2(\varphi^{*\prime})^2 + \|W^*\|^2}}T^* + \frac{\|W^*\|}{\sqrt{2(\varphi^{*\prime})^2 + \|W^*\|^2}}N^* - \frac{\varphi^{*\prime}(\cos\varphi^* + \sin\varphi^*)}{\sqrt{2(\varphi^{*\prime})^2 + \|W^*\|^2}}B^*, \\
\beta_{\mu_1} \wedge T_{\beta_{\mu_1}}(s) &= \frac{\|W^*\|(\cos\varphi^* + \sin\varphi^*)}{\sqrt{2\|W^*\|^2 + 4\left(\varphi^{*\prime}\right)^2}}T^* - \frac{\varphi^{*\prime}}{\sqrt{2\|W^*\|^2 + 4\left(\varphi^{*\prime}\right)^2}}N^* \\
&\quad + \frac{\|W^*\|(\cos\varphi^* + \sin\varphi^*)}{\sqrt{2\|W^*\|^2 + 4\left(\varphi^{*\prime}\right)^2}}B^*, \\
T'_{\beta_{\mu_1}}(s) &= \frac{\left(\varphi^{*\prime}\right)^4\sqrt{2}(\Gamma_1\sin\varphi^* + \Gamma_2\cos\varphi^*)}{\left(\|W^*\|^2 + \left(\varphi^{*\prime}\right)^2\right)^2}T^* + \frac{\Gamma_3\left(\varphi^{*\prime}\right)^4\sqrt{2}}{\left(\|W^*\|^2 + \left(\varphi^{*\prime}\right)^2\right)^2}N^* \\
&\quad + \frac{\left(\varphi^{*\prime}\right)^4\sqrt{2}(\Gamma_1\cos\varphi^* - \Gamma_2\sin\varphi^*)}{\left(\|W^*\|^2 + \left(\varphi^{*\prime}\right)^2\right)^2}B^*
\end{aligned}$$

denklemlerine dönüşür. Geodezik eğrilik tanımından $\kappa_g^{\beta_{\mu_1}}$ geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\beta_{\mu_1}} = \frac{1}{\left(2+\left(\frac{\|W^*\|}{\varphi^{*\prime}}\right)^2\right)^{\frac{5}{2}}}\Big(\frac{\|W^*\|}{\varphi^{*\prime}}\Gamma_1 - \frac{\|W^*\|}{\varphi^{*\prime}}\Gamma_2 + 2\Gamma_3\Big)$$

biçiminde olur.

Teorem 4.1.26 α eğrisinin involüt eğrisi α^* olsun. α^* eğrisinin birim Darboux vektörünün çizdiği küresel eğriye ait $C^*T_{C^*}$- Smarandache eğrisinin geodezik eğriliğinin evolüt eğrisine bağlı ifadesi

$$\kappa_g^{\beta_{\mu_1}} = \frac{1}{\left(2+\frac{1}{\eta^2}\right)^{\frac{5}{2}}}\left(\frac{1}{\eta}\overline{\Gamma}_1 - \frac{1}{\eta}\overline{\Gamma}_2 + 2\overline{\Gamma}_3\right) \tag{4.1.131}$$

denklemiyle verilir. Burada

$$\begin{cases} \overline{\Gamma}_1 = -2 - \frac{1}{\eta^2} + \frac{1}{\eta'}\frac{1}{\eta} \\ \overline{\Gamma}_2 = -2 - 3\frac{1}{\eta^2} - \frac{1}{\eta^4} - \frac{1}{\eta'}\frac{1}{\eta} \\ \overline{\Gamma}_3 = 2\frac{1}{\eta} + \frac{1}{\eta^3} + \frac{1}{\eta'} \end{cases} \tag{4.1.132}$$

şeklinde birer katsayıdır, (Şenyurt ve ark., 2016b).

İspat.

$$\beta_{\mu_1}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(C^* + T_{C^*})$$

eşitliğinde sırasıyla (4.1.4), (3.2.4) ve (3.2.5) den karşılıkları yazılırsa β_{μ_1} vektörünün evolüt eğrisine bağlı ifadesi

$$\beta_{\mu_1}(s) = \frac{(\|W\| - \varphi')\sin\varphi}{\sqrt{2\varphi'^2 + 2\|W\|^2}}T - \frac{\varphi' + \|W\|}{\sqrt{2\varphi'^2 + 2\|W\|^2}}N + \frac{(\|W\| - \varphi')\cos\varphi}{\sqrt{2\varphi'^2 + 2\|W\|^2}}B \tag{4.1.133}$$

biçiminde olur. Bu ifadenin türevi alınırsa $T_{\beta_{\mu_1}}(s)$ teğet vektörü

$$\eta = \Big(\frac{\varphi'}{\sqrt{\varphi'^2 + \|W\|^2}}\Big)'\cos\varphi(c - s)$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} T_{\beta_{\mu_1}}(s) \quad = \quad & \frac{(-\|W\| - \varphi')\eta\sin\varphi - \sqrt{\|W\|^2 + \varphi'^2}\cos\varphi}{\sqrt{\|W\|^2 + \varphi'^2}\sqrt{1 + 2\eta^2}}T + \frac{\eta(\varphi' - \|W\|)}{\sqrt{\|W\|^2 + \varphi'^2}\sqrt{1 + 2\eta^2}}N \\ & + \frac{\sqrt{\|W\|^2 + \varphi'^2}\sin\varphi - \eta(\|W\| + \varphi')\cos\varphi}{\sqrt{\|W\|^2 + \varphi'^2}\sqrt{1 + 2\eta^2}}B \end{aligned} \tag{4.1.134}$$

şeklinde bulunur. Bu ifadenin tekrar türevi alınırsa katsayılar

$$\begin{cases} \overline{\Gamma}_1 = -2 - \frac{1}{\eta^2} + \frac{1}{\eta'}\frac{1}{\eta} \\ \overline{\Gamma}_2 = -2 - 3\frac{1}{\eta^2} - \frac{1}{\eta^4} - \frac{1}{\eta'}\frac{1}{\eta} \\ \overline{\Gamma}_3 = 2\frac{1}{\eta} + \frac{1}{\eta^3} + \frac{1}{\eta'} \end{cases}$$

olmak üzere $T'_{\beta_{\mu_1}}(s)$ türev vektörü

$$\begin{aligned} T'_{\beta_{\mu_1}}(s) \quad = \quad & \frac{(\overline{\Gamma}_1\|W\| - \overline{\Gamma}_2\varphi')\eta^4\sqrt{2}\sin\varphi - \overline{\Gamma}_3\eta^4\sqrt{2\|W\|^2 + 2\varphi'^2}\cos\varphi}{(1 + 2\eta^2)^2\sqrt{\|W\|^2 + \varphi'^2}}T \\ & + \frac{\eta^4\sqrt{2}(\overline{\Gamma}_1\varphi' - \overline{\Gamma}_2\|W\|)}{(1 + 2\eta^2)^2\sqrt{\|W\|^2 + \varphi'^2}}N \\ & + \frac{(\overline{\Gamma}_1\|W\| - \overline{\Gamma}_2\varphi')\eta^4\sqrt{2}\cos\varphi + \overline{\Gamma}_3\eta^4\sqrt{2\|W\|^2 + 2\varphi'^2}\sin\varphi}{(1 + 2\eta^2)^2\sqrt{\|W\|^2 + \varphi'^2}}B \end{aligned}$$

biçiminde olur. (4.1.133) ve (4.1.134) ifadelerinden elde edilen $\beta_{\mu_1} \wedge T_{\beta_{\mu_1}}$ vektörü

$$\begin{aligned}\beta_{\mu_1} \wedge T_{\beta_{\mu_1}}(s) &= \frac{(\|W\| + \varphi')\sin\varphi - 2\eta\sqrt{\|W\|^2 + \varphi'^2}\cos\varphi}{\sqrt{2+4\eta^2}\sqrt{\|W\|^2 + \varphi'^2}}T \\ &- \frac{\varphi' - \|W\|}{\sqrt{2+4\eta^2}\sqrt{\|W\|^2 + \varphi'^2}}N \\ &+ \frac{(\|W\| + \varphi')\cos\varphi + 2\eta\sqrt{\|W\|^2 + \varphi'^2}\sin\varphi}{\sqrt{2+4\eta^2}\sqrt{\|W\|^2 + \varphi'^2}}B\end{aligned}$$

şeklinde yazılır. Geodezik eğrilik tanımından $\kappa_g^{\beta_{\mu_1}}$ geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\beta_{\mu_1}} = \frac{1}{\left(2 + \frac{1}{\eta^2}\right)^{\frac{5}{2}}}\left(\frac{1}{\eta}\overline{\Gamma}_1 - \frac{1}{\eta}\overline{\Gamma}_2 + 2\overline{\Gamma}_3\right)$$

şeklindedir.

Tanım 4.1.14 $\alpha^* : I \to S^2$ involüt eğrisinin birim Darboux vektörünün çizdiği küresel eğriye ait Sabban çatısı $\{C^*, T_{C^*}, C^* \wedge T_{C^*}\}$ olsun.

$$\beta_{\mu_2}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(C^* + C^* \wedge T_{C^*}) \tag{4.1.135}$$

şeklinde tanımlı vektörün çizdiği regüler eğriye $C^*(C^* \wedge T_{C^*})$-Smarandache eğrisi denir, (Şenyurt ve ark., 2016b).

Teorem 4.1.27 $C^*(C^* \wedge T_{C^*})$-Smarandache eğrisinin geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\beta_{\mu_2}} = \frac{\|W^*\| + \varphi^{*\prime}}{\varphi^{*\prime} - \|W^*\|} \tag{4.1.136}$$

denklemiyle verilir, (Şenyurt ve ark., 2016b).

İspat.

$$\beta_{\mu_2}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(C^* + C^* \wedge T_{C^*})$$

eğrisinin $s_{\beta_{\mu_2}}$ yay parametresine göre türevi alınırsa

$$T_{\beta_{\mu_2}}\frac{ds_{\beta_{\mu_2}}}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 - \frac{\|W^*\|}{\varphi^{*\prime}}\right)T_{C^*}$$

olur. Bu eşitliğin normu alınırsa $\frac{ds_{\beta_{\mu_2}}}{ds}$ ifadesi

$$\frac{ds_{\beta_{\mu_2}}}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 - \frac{\|W^*\|}{\varphi^{*\prime}}\right)$$

bulunur. Bu ifade yukarıda yerine yazılırsa $T_{\beta_{\mu_2}}(s)$ teğet vektörü

$$T_{\beta_{\mu_2}}(s) = T_{C^*} \tag{4.1.137}$$

şeklinde elde edilir. Bu ifadenin tekrar türevi alınırsa $T'_{\beta_{\mu_2}}(s)$ türev vektörü

$$T'_{\beta_{\mu_2}}(s) = \frac{\sqrt{2}}{(1-\frac{\|W^*\|}{\varphi^{*\prime}})}\big(-C^* + \frac{\|W^*\|}{\varphi^{*\prime}}C^* \wedge T_{C^*}\big) \tag{4.1.138}$$

biçiminde olur. (4.1.135) ve (4.1.137) ifadelerinden elde edilen $\beta_{\mu_2} \wedge T_{\beta_{\mu_2}}$ vektörü

$$\beta_{\mu_2} \wedge T_{\beta_{\mu_2}}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-C^* + C^* \wedge T_{C^*}) \tag{4.1.139}$$

şeklinde yazılır. (4.1.135), (4.1.137), (4.1.138) ve (4.1.139) vektörlerinde (4.1.4) den karşılıkları yazılırsa β_{μ_2}-Smarandache eğrisine ait Sabban çatısının ve $T'_{\beta_{\mu_2}}$ vektörünün involüt eğrisine bağlı ifadesi,

$$\begin{aligned}
\beta_{\mu_2}(s) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\sin\varphi^* T^* + N^* + \cos\varphi^* B^*\big), \\
T_{\beta_{\mu_2}}(s) &= \cos\varphi^* T^* - \sin\varphi^* B^*, \\
\beta_{\mu_2} \wedge T_{\beta_{\mu_2}}(s) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\big(-\sin\varphi^* T^* + N^* - \cos\varphi^* B^*\big), \\
T'_{\beta_{\mu_2}}(s) &= \frac{-\varphi^{*\prime}\sin\varphi^*\sqrt{2}}{\varphi^{*\prime} - \|W^*\|}T^* + \frac{\|W^*\|\sqrt{2}}{\varphi^{*\prime} - \|W^*\|}N^* - \frac{\varphi^{*\prime}\sqrt{2}\cos\varphi^*}{\varphi^{*\prime} - \|W^*\|}B^*
\end{aligned}$$

eşitliklerine dönüşür. Geodezik eğrilik tanımından $\kappa_g^{\beta_{\mu_2}}$ geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\beta_{\mu_2}} = \frac{\|W^*\| + \varphi^{*\prime}}{\varphi^{*\prime} - \|W^*\|}$$

biçiminde olur.

Teorem 4.1.28 α eğrisinin involüt eğrisi α^* olsun. α^* eğrisinin birim Darboux vektörünün çizdiği küresel eğriye ait $C^*(C^* \wedge T_{C^*})$- Smarandache eğrisinin geodezik eğriliğinin evolüt eğrisine bağlı ifadesi

$$\kappa_g^{\beta_{\mu_2}} = \frac{1+\eta}{\eta - 1} \tag{4.1.140}$$

denklemiyle verilir, (Şenyurt ve ark., 2016b).

İspat.

$$\beta_{\mu_2}(s)=\frac{1}{\sqrt{2}}(C^*+C^*\wedge T_{C^*})$$

eşitliğinde sırasıyla (4.1.4), (3.2.4) ve (3.2.5) den karşılıkları yazılırsa β_{μ_2} vektörünün evolüt eğrisine bağlı ifadesi

$$\begin{aligned}\beta_{\mu_2}(s) &= \frac{\|W\|\sin\varphi-\sqrt{\varphi'^2+\|W\|^2}\cos\varphi}{\sqrt{2\varphi'^2+2\|W\|^2}}T+\frac{\varphi'}{\sqrt{2\varphi'^2+2\|W\|^2}}N \\ &+\frac{\|W\|\cos\varphi+\sqrt{\varphi'^2+\|W\|^2}\sin\varphi}{\sqrt{2\varphi'^2+2\|W\|^2}}B\end{aligned} \tag{4.1.141}$$

biçiminde olur. Bu ifadenin türevi alınırsa $T_{\beta_{\mu_2}}(s)$ teğet vektörü

$$T_{\beta_{\mu_2}}(s)=\frac{-\varphi'\sin\varphi}{\sqrt{\|W\|^2+\varphi'^2}}T+\frac{\|W\|}{\sqrt{\|W\|^2+\varphi'^2}}N-\frac{\varphi'\cos\varphi}{\sqrt{\|W\|^2+\varphi'^2}}B \tag{4.1.142}$$

şeklinde bulunur. Bu ifadenin tekrar türevi alınırsa

$$\eta=\Big(\frac{\varphi'}{\sqrt{\varphi'^2+\|W\|^2}}\Big)'\cos\varphi(c-s)$$

olmak üzere $T'_{\beta_{\mu_2}}(s)$ türev vektörü

$$\begin{aligned}T'_{\beta_{\mu_2}}(s) &= \frac{-\eta\sqrt{2}\|W\|\sin\varphi-\sqrt{2\|W\|^2+2\varphi'^2}\cos\varphi}{(\eta-1)\sqrt{\|W\|^2+\varphi'^2}}T+\frac{\eta\sqrt{2}\varphi'}{(\eta-1)\sqrt{\|W\|^2+\varphi'^2}}N \\ &+\frac{\sqrt{2\|W\|^2+2\varphi'^2}\sin\varphi-\eta\sqrt{2}\|W\|\cos\varphi}{(\eta-1)\sqrt{\|W\|^2+\varphi'^2}}B\end{aligned}$$

eşitliğiyle bulunur. (4.1.141) ve (4.1.142) ifadelerinden elde edilen $\beta_{\mu_2}\wedge T_{\beta_{\mu_2}}$ vektörü

$$\begin{aligned}\beta_{\mu_2}\wedge T_{\beta_{\mu_2}}(s) &= \frac{-\|W\|\sin\varphi-\sqrt{\|W\|^2+\varphi'^2}\cos\varphi}{\sqrt{2\|W\|^2+2\varphi'^2}}T-\frac{\varphi'}{\sqrt{2\|W\|^2+2\varphi'^2}}N \\ &+\frac{\sqrt{\|W\|^2+\varphi'^2}\sin\varphi-\|W\|\cos\varphi}{\sqrt{2\|W\|^2+2\varphi'^2}}B\end{aligned}$$

şeklinde yazılır. Geodezik eğrilik tanımından $\kappa_g^{\beta_{\mu_2}}$ geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\beta_{\mu_2}}=\frac{1+\eta}{\eta-1}$$

biçiminde olur.

Tanım 4.1.15 $\alpha^* : I \to S^2$ involüt eğrisinin birim Darboux vektörünün çizdiği küresel eğriye ait Sabban çatısı $\{C^*, T_{C^*}, C^* \wedge T_{C^*}\}$ olsun.

$$\beta_{\mu_3}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(T_{C^*} + C^* \wedge T_{C^*}) \tag{4.1.143}$$

şeklinde tanımlı vektörün çizdiği regüler eğriye $T_{C^*}(C^* \wedge T_{C^*})$-Smarandache eğrisi denir, (Şenyurt ve ark., 2016b).

Teorem 4.1.29 $T_{C^*}(C^* \wedge T_{C^*})$-Smarandache eğrisinin geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\beta_{\mu_3}} = \frac{1}{\Big(1+2\big(\frac{\|W^*\|}{\varphi^{*\prime}}\big)^2\Big)^{\frac{5}{2}}}\Big(2\frac{\|W^*\|}{\varphi^{*\prime}}\sigma_1 - \sigma_2 + \sigma_3\Big) \tag{4.1.144}$$

denklemiyle verilir. Burada

$$\begin{cases} \sigma_1 = \frac{\|W^*\|}{\varphi^{*\prime}} + 2\big(\frac{\|W^*\|}{\varphi^{*\prime}}\big)^3 + 2\big(\frac{\|W^*\|}{\varphi^{*\prime}}\big)'\big(\frac{\|W^*\|}{\varphi^{*\prime}}\big) \\ \\ \sigma_2 = -1 - 3\big(\frac{\|W^*\|}{\varphi^{*\prime}}\big)^2 - 2\big(\frac{\|W^*\|}{\varphi^{*\prime}}\big)^4 - \big(\frac{\|W^*\|}{\varphi^{*\prime}}\big)' \\ \\ \sigma_3 = -\big(\frac{\|W^*\|}{\varphi^{*\prime}}\big)^2 - 2\big(\frac{\|W^*\|}{\varphi^{*\prime}}\big)^4 + \big(\frac{\|W^*\|}{\varphi^{*\prime}}\big)' \end{cases} \tag{4.1.145}$$

şeklinde birer katsayıdır, (Şenyurt ve ark., 2016b).

İspat.

$$\beta_{\mu_3}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(T_{C^*} + C^* \wedge T_{C^*})$$

eğrisinin $s_{\beta_{\mu_3}}$ yay parametresine göre türevi alınırsa

$$T_{\beta_{\mu_3}}\frac{ds_{\beta_{\mu_3}}}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(-C^* - \frac{\|W^*\|}{\varphi^{*\prime}}T_{C^*} + \frac{\|W^*\|}{\varphi^{*\prime}}C^* \wedge T_{C^*}\Big)$$

olur. Bu eşitliğin normu alınırsa $\frac{ds_{\beta_{\mu_3}}}{ds}$ ifadesi

$$\frac{ds_{\beta_{\mu_3}}}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1+2\Big(\frac{\|W^*\|}{\varphi^{*\prime}}\Big)^2}$$

bulunur. Bu ifade yukarıda yerine yazılırsa $T_{\beta_{\mu_3}}(s)$ teğet vektörü

$$T_{\beta_{\mu_3}}(s) = \frac{1}{\sqrt{1+2\big(\frac{\|W^*\|}{\varphi^{*\prime}}\big)^2}}\Big(-C^* - \frac{\|W^*\|}{\varphi^{*\prime}}T_{C^*} + \frac{\|W^*\|}{\varphi^{*\prime}}C^* \wedge T_{C^*}\Big) \tag{4.1.146}$$

biçiminde olur. Bu ifadenin tekrar türevi alınırsa katsayılar,

$$\begin{cases} \sigma_1 = \frac{\|W^*\|}{\varphi^{*\prime}} + 2\big(\frac{\|W^*\|}{\varphi^{*\prime}}\big)^3 + 2\big(\frac{\|W^*\|}{\varphi^{*\prime}}\big)'\big(\frac{\|W^*\|}{\varphi^{*\prime}}\big) \\ \sigma_2 = -1 - 3\big(\frac{\|W^*\|}{\varphi^{*\prime}}\big)^2 - 2\big(\frac{\|W^*\|}{\varphi^{*\prime}}\big)^4 - \big(\frac{\|W^*\|}{\varphi^{*\prime}}\big)' \\ \sigma_3 = -\big(\frac{\|W^*\|}{\varphi^{*\prime}}\big)^2 - 2\big(\frac{\|W^*\|}{\varphi^{*\prime}}\big)^4 + \big(\frac{\|W^*\|}{\varphi^{*\prime}}\big)' \end{cases}$$

olmak üzere $T'_{\beta_{\mu_3}}(s)$ türev vektörü

$$T'_{\beta_{\mu_3}}(s) = \frac{\sqrt{2}}{\Big(1+2\big(\frac{\|W^*\|}{\varphi^{*\prime}}\big)^2\Big)^2}\big(\sigma_1 C^* + \sigma_2 T_{C^*} + \sigma_3 C^* \wedge T_{C^*}\big) \tag{4.1.147}$$

biçiminde bulunur. (4.1.143) ve (4.1.146) ifadelerinden elde edilen $\beta_{\mu_3} \wedge T_{\beta_{\mu_3}}$ vektörü

$$\beta_{\mu_3} \wedge T_{\beta_{\mu_3}}(s) = \frac{1}{\sqrt{2+4\Big(\frac{\|W^*\|}{\varphi^{*\prime}}\Big)^2}}\big(2\frac{\|W^*\|}{\varphi^{*\prime}}C^* - T_{C^*} + C^* \wedge T_{C^*}\big) \tag{4.1.148}$$

şeklinde yazılır. (4.1.143), (4.1.146), (4.1.147) ve (4.1.148) vektörlerinde (4.1.4) den karşılıkları yazılırsa β_{μ_3}-Smarandache eğrisine ait Sabban çatısının ve $T'_{\beta_{\mu_3}}$ vektörünün involüt eğrisine bağlı ifadesi,

$$\begin{aligned}
\beta_{\mu_3}(s) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\cos\varphi^* T^* + N^* - \sin\varphi^* B^*\big), \\
T_{\beta_{\mu_3}}(s) &= \frac{-\varphi^{*\prime}\sin\varphi^*\|W^*\|\cos\varphi^*}{\sqrt{2\|W^*\|^2+(\varphi^{*\prime})^2}}T^* + \frac{\|W^*\|}{\sqrt{2\|W^*\|^2+(\varphi^{*\prime})^2}}N^* \\
&\quad + \frac{\|W^*\|\sin\varphi^* - \varphi^{*\prime}\cos\varphi^*}{\sqrt{2\|W^*\|^2+(\varphi^{*\prime})^2}}B^*, \\
\beta_{\mu_3} \wedge T_{\beta_{\mu_3}}(s) &= \frac{2\|W^*\|\sin\varphi^* - \varphi^{*\prime}\cos\varphi^*}{\sqrt{4\|W^*\|^2+2(\varphi^{*\prime})^2}}T^* + \frac{\varphi^{*\prime}}{\sqrt{4\|W^*\|^2+2(\varphi^{*\prime})^2}}N^* \\
&\quad + \frac{\|W^*\|\cos\varphi^* + \varphi^{*\prime}\sin\varphi^*}{\sqrt{2\|W^*\|^2+4(\varphi^{*\prime})^2}}B^* \\
T'_{\beta_{\mu_3}}(s) &= \frac{(\varphi^{*\prime})^4\sqrt{2}(\sigma_2\sin\varphi^* - \sigma_1\cos\varphi^*)}{\big(2\|W^*\|^2+(\varphi^{*\prime})^2\big)^2}T^* + \frac{\sigma_3(\varphi^{*\prime})^4\sqrt{2}}{\big(2\|W^*\|^2+(\varphi^{*\prime})^2\big)^2}N^* \\
&\quad + \frac{(\varphi^{*\prime})^4\sqrt{2}(\sigma_1\sin\varphi^* + \sigma_2\cos\varphi^*)}{\big(2\|W^*\|^2+(\varphi^{*\prime})^2\big)^2}B^*
\end{aligned}$$

eşitliklerine dönüşür. Geodezik eğrilik tanımından $\kappa_g^{\beta_{\mu_3}}$ geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\beta_{\mu_3}} = \langle T'_{\beta_{\mu_3}}, \beta_{\mu_3} \wedge T_{\beta_{\mu_3}}\rangle = \frac{1}{\big(1+2\big(\frac{\|W^*\|}{\varphi^{*\prime}}\big)^2\big)^{\frac{5}{2}}}\Big(2\frac{\|W^*\|}{\varphi^{*\prime}}\sigma_1 - \sigma_2 + \sigma_3\Big)$$

biçiminde elde edilir.

Teorem 4.1.30 α eğrisinin involüt eğrisi α^* olsun. α^* eğrisinin birim Darboux vektörünün çizdiği küresel eğriye ait $T_{C^*}(C^* \wedge T_{C^*})$- Smarandache eğrisinin geodezik eğriliğinin evolüt eğrisinin Frenet vektörlerine, eğriliğine ve burulmasına bağlı ifadesi

$$\kappa_g^{\beta_{\mu_3}} = \frac{1}{\left(2+\frac{1}{\eta^2}\right)^{\frac{5}{2}}}\left(2\frac{1}{\eta}\overline{\sigma}_1 - \overline{\sigma}_2 + \overline{\sigma}_3\right) \tag{4.1.149}$$

denklemiyle verilir. Burada

$$\begin{cases} \overline{\sigma}_1 = \frac{1}{\eta} + 2\frac{1}{\eta^3} + 2\frac{1}{\eta'}\frac{1}{\eta} \\ \overline{\sigma}_2 = -1 - 3\frac{1}{\eta^2} - 2\frac{1}{\eta^4} - \frac{1}{\eta'} \\ \overline{\sigma}_3 = -\frac{1}{\eta^2} - 2\frac{1}{\eta^4} + \frac{1}{\eta'} \end{cases} \tag{4.1.150}$$

şeklinde birer katsayıdır, (Şenyurt ve ark., 2016b).

İspat.

$$\beta_{\mu_3}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(T_{C^*} + C^* \wedge T_{C^*})$$

eşitliğinde sırasıyla (4.1.4), (3.2.4) ve (3.2.5) den karşılıkları yazılırsa β_{μ_3} vektörü

$$\begin{aligned} \beta_{\mu_3}(s) &= \frac{-\varphi'\sin\varphi - \sqrt{\varphi'^2 + \|W\|^2}\cos\varphi}{\sqrt{2\varphi'^2 + 2\|W\|^2}}T + \frac{\|W\|}{\sqrt{2\varphi'^2 + 2\|W\|^2}}N \\ &\quad + \frac{\sqrt{\varphi'^2 + \|W\|^2}\sin\varphi - \varphi'\cos\varphi}{\sqrt{2\varphi'^2 + 2\|W\|^2}}B \end{aligned} \tag{4.1.151}$$

şeklinde bulunur. Bu ifadenin türevi alınırsa $T_{\beta_{\mu_3}}(s)$ teğet vektörü

$$\eta = \left(\frac{\varphi'}{\sqrt{\varphi'^2 + \|W\|^2}}\right)'\cos\varphi(c-s)$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} T_{\beta_{\mu_3}}(s) &= \frac{(\varphi' - \eta\|W\|)\sin\varphi - \sqrt{\|W\|^2 + \varphi'^2}\cos\varphi}{\sqrt{2+\eta^2}\sqrt{\|W\|^2 + \varphi'^2}}T - \frac{\eta\varphi' + \|W\|}{\sqrt{2+\eta^2}\sqrt{\|W\|^2 + \varphi'^2}}N \\ &\quad + \frac{(\varphi' - \eta\|W\|)\cos\varphi + \sqrt{\|W\|^2 + \varphi'^2}\sin\varphi}{\sqrt{2+\eta^2}\sqrt{\|W\|^2 + \varphi'^2}}B \end{aligned}$$

biçiminde olur. Bu ifadenin tekrar türevi alınırsa katsayılar

$$\begin{cases} \overline{\sigma}_1 = \frac{1}{\eta} + 2\frac{1}{\eta^3} + 2\frac{1}{\eta'}\frac{1}{\eta} \\ \overline{\sigma}_2 = -1 - 3\frac{1}{\eta^2} - 2\frac{1}{\eta^4} - \frac{1}{\eta'} \\ \overline{\sigma}_3 = -\frac{1}{\eta^2} - 2\frac{1}{\eta^4} + \frac{1}{\eta'} \end{cases}$$

olmak üzere $T'_{\beta_{\mu_3}}(s)$ türev vektörü

$$\begin{aligned} T'_{\beta_{\mu_3}}(s) &= \frac{(\overline{\sigma}_2\|W\|+\overline{\sigma}_1\varphi')\eta^4\sqrt{2}\sin\varphi-\overline{\sigma}_3\eta^4\sqrt{2\|W\|^2+2\varphi'^2}\cos\varphi}{(2+\eta^2)^2\sqrt{\varphi'^2+\|W\|^2}}T \\ &+\frac{(\overline{\sigma}_2\varphi'-\overline{\sigma}_1\|W\|)\eta^4\sqrt{2}}{(2+\eta^2)^2\sqrt{\varphi'^2+\|W\|^2}}N \\ &+\frac{(\overline{\sigma}_2\|W\|+\overline{\sigma}_1\varphi')\eta^4\sqrt{2}\cos\varphi+\overline{\sigma}_3\eta^4\sqrt{2\|W\|^2+2\varphi'^2}\sin\varphi}{(2+\eta^2)^2\sqrt{\varphi'^2+\|W\|^2}}B \end{aligned}$$

şeklinde bulunur. (4.1.151) ve (4.1.152) ifadelerinden elde edilen $\beta_{\mu_3}\wedge T_{\beta_{\mu_3}}$ vektörü

$$\begin{aligned} \beta_{\mu_3}\wedge T_{\beta_{\mu_3}}(s) &= \frac{(2\|W\|+\eta\varphi')\sin\varphi-\eta\sqrt{\|W\|^2+\varphi'^2}\cos\varphi}{\sqrt{4+2\eta^2}\sqrt{\|W\|^2+\varphi'^2}}T \\ &+\frac{2\varphi'-\eta\|W\|}{\sqrt{4+2\eta^2}\sqrt{\|W\|^2+\varphi'^2}}N \\ &+\frac{(2\|W\|+\eta\varphi')\cos\varphi+\eta\sqrt{\|W\|^2+\varphi'^2}\sin\varphi}{\sqrt{4+2\eta^2}\sqrt{\|W\|^2+\varphi'^2}}B \end{aligned}$$

şeklinde yazılır. Geodezik eğrilik tanımından $\kappa_g^{\beta_{\mu_3}}$ geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\beta_{\mu_3}} = \frac{1}{(2+\frac{1}{\eta^2})^{\frac{5}{2}}}\left(2\frac{1}{\eta}\overline{\sigma}_1-\overline{\sigma}_2+\overline{\sigma}_3\right)$$

biçiminde olur.

Tanım 4.1.16 $\alpha^* : I \to S^2$ involüt eğrisinin birim Darboux vektörünün çizdiği küresel eğriye ait Sabban çatısı $\{C^*, T_{C^*}, C^*\wedge T_{C^*}\}$ olsun.

$$\beta_{\mu_4}(s) = \frac{1}{\sqrt{3}}(C^* + T_{C^*} + C^*\wedge T_{C^*}) \tag{4.1.152}$$

şeklinde tanımlı vektörün çizdiği regüler eğriye $C^*T_{C^*}(C^*\wedge T_{C^*})$-Smarandache eğrisi denir, (Şenyurt ve ark., 2016b).

Teorem 4.1.31 $C^*T_{C^*}(C^*\wedge T_{C^*})$-Smarandache eğrisinin geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\beta_{\mu_4}}=\frac{\big(2\frac{\|W^*\|}{\varphi^{*\prime}}-1\big)\pi_1+\big(-1-\frac{\|W^*\|}{\varphi^{*\prime}}\big)\pi_2+\big(2-\frac{\|W^*\|}{\varphi^{*\prime}}\big)\pi_3}{4\sqrt{2}\Big(1-\dfrac{\|W^*\|}{\varphi^{*\prime}}+(\dfrac{\|W^*\|}{\varphi^{*\prime}})^2\Big)^{\frac{5}{2}}} \tag{4.1.153}$$

denklemiyle verilir. Burada

$$\begin{cases}\pi_1=-2+4\big(\frac{\|W^*\|}{\varphi^{*\prime}}\big)-\big(\frac{\|W^*\|}{\varphi^{*\prime}}\big)^2+2\big(\frac{\|W^*\|}{\varphi^{*\prime}}\big)^3+\big(\frac{\|W^*\|}{\varphi^{*\prime}}\big)'\big(2\frac{\|W^*\|}{\varphi^{*\prime}}-1\big)\\ \pi_2=-2+2\big(\frac{\|W^*\|}{\varphi^{*\prime}}\big)-4\big(\frac{\|W^*\|}{\varphi^{*\prime}}\big)^2+2\big(\frac{\|W^*\|}{\varphi^{*\prime}}\big)^3-2\big(\frac{\|W^*\|}{\varphi^{*\prime}}\big)^4-\big(\frac{\|W^*\|}{\varphi^{*\prime}}\big)'\big(1+\frac{\|W^*\|}{\varphi^{*\prime}}\big)\\ \pi_3=2\big(\frac{\|W^*\|}{\varphi^{*\prime}}\big)-4\big(\frac{\|W^*\|}{\varphi^{*\prime}}\big)^2+4\big(\frac{\|W^*\|}{\varphi^{*\prime}}\big)^3-2\big(\frac{\|W^*\|}{\varphi^{*\prime}}\big)^4+\big(\frac{\|W^*\|}{\varphi^{*\prime}}\big)'\big(2-\frac{\|W^*\|}{\varphi^{*\prime}}\big)\end{cases} \tag{4.1.154}$$

şeklinde birer katsayıdır, (Şenyurt ve ark., 2016b).

İspat.

$$\beta_{\mu_4}(s)=\frac{1}{\sqrt{3}}(C^*+T_{C^*}+C^*\wedge T_{C^*})$$

eğrisinin $s_{\beta_{\mu_4}}$ yay parametresine göre türevi alınırsa

$$T_{\beta_{\mu_4}}\frac{ds_{\beta_{\mu_4}}}{ds}=\frac{1}{\sqrt{3}}\Big(-C^*+\big(1-\frac{\|W^*\|}{\varphi^{*\prime}}\big)T_{C^*}+\frac{\|W^*\|}{\varphi^{*\prime}}C^*\wedge T_{C^*}\Big)$$

olur. Bu eşitliğin normu alınırsa $\frac{ds_{\beta_{\mu_4}}}{ds}$ ifadesi

$$\frac{ds_{\beta_{\mu_4}}}{ds}=\sqrt{\frac{2}{3}\Big(1-\frac{\|W^*\|}{\varphi^{*\prime}}+\Big(\frac{\|W^*\|}{\varphi^{*\prime}}\Big)^2\Big)}$$

bulunur. Bu ifade yukarıda yerine yazılırsa $T_{\beta_{\mu_4}}(s)$ teğet vektörü

$$T_{\beta_{\mu_4}}(s)=\frac{1}{\sqrt{2\Big(1-\dfrac{\|W^*\|}{\varphi^{*\prime}}+(\dfrac{\|W^*\|}{\varphi^{*\prime}})^2\Big)}}\Big(-C^*+\Big(1-\frac{\|W^*\|}{\varphi^{*\prime}}\Big)T_{C^*}+\frac{\|W^*\|}{\varphi^{*\prime}}C^*\wedge T_{C^*}\Big) \tag{4.1.155}$$

biçiminde olur. Bu ifadenin tekrar türevi alınırsa katsayılar

$$\begin{cases}\pi_1=-2+4\big(\frac{\|W^*\|}{\varphi^{*\prime}}\big)-\big(\frac{\|W^*\|}{\varphi^{*\prime}}\big)^2+2\big(\frac{\|W^*\|}{\varphi^{*\prime}}\big)^3+\big(\frac{\|W^*\|}{\varphi^{*\prime}}\big)'\big(2\frac{\|W^*\|}{\varphi^{*\prime}}-1\big)\\ \pi_2=-2+2\big(\frac{\|W^*\|}{\varphi^{*\prime}}\big)-4\big(\frac{\|W^*\|}{\varphi^{*\prime}}\big)^2+2\big(\frac{\|W^*\|}{\varphi^{*\prime}}\big)^3-2\big(\frac{\|W^*\|}{\varphi^{*\prime}}\big)^4-\big(\frac{\|W^*\|}{\varphi^{*\prime}}\big)'\big(1+\frac{\|W^*\|}{\varphi^{*\prime}}\big)\\ \pi_3=2\big(\frac{\|W^*\|}{\varphi^{*\prime}}\big)-4\big(\frac{\|W^*\|}{\varphi^{*\prime}}\big)^2+4\big(\frac{\|W^*\|}{\varphi^{*\prime}}\big)^3-2\big(\frac{\|W^*\|}{\varphi^{*\prime}}\big)^4+\big(\frac{\|W^*\|}{\varphi^{*\prime}}\big)'\big(2-\frac{\|W^*\|}{\varphi^{*\prime}}\big)\end{cases}$$

olmak üzere $T'_{\beta_{\mu_4}}(s)$ türev vektörü

$$T'_{\beta_{\mu_4}}(s) = \frac{\sqrt{3}}{4\Big(1-\frac{\|W^*\|}{\varphi^{*\prime}}+\big(\frac{\|W^*\|}{\varphi^{*\prime}}\big)^2\Big)^2}(\pi_1 C^* + \pi_2 T_{C^*} + \pi_3 C^* \wedge T_{C^*}) \tag{4.1.156}$$

şeklinde bulunur. (4.1.152) ve (4.1.155) ifadelerinden elde edilen $\beta_{\mu_4} \wedge T_{\beta_{\mu_4}}$ vektörü

$$\beta_{\mu_4} \wedge T_{\beta_{\mu_4}}(s) = \frac{(2\frac{\|W^*\|}{\varphi^{*\prime}}-1)C^* - (1+\frac{\|W^*\|}{\varphi^{*\prime}})T_{C^*} + (2-\frac{\|W^*\|}{\varphi^{*\prime}})C^* \wedge T_{C^*}}{\sqrt{6}\sqrt{1-\frac{\|W^*\|}{\varphi^{*\prime}}+(\frac{\|W^*\|}{\varphi^{*\prime}})^2}} \tag{4.1.157}$$

biçiminde olur. (4.1.152), (4.1.155), (4.1.156) ve (4.1.157) vektörlerinde (4.1.4) den karşılık-ları yazılırsa β_{μ_4}-Smarandache eğrisine ait Sabban çatısının ve $T'_{\beta_{\mu_4}}$ vektörünün involüt eğrisine bağlı ifadesi,

$$\beta_{\mu_4}(s) = \frac{1}{\sqrt{3}}\big((\sin\varphi^* + \cos\varphi^*)T^* + N^* + (\cos\varphi^* - \sin\varphi^*)B^*\big),$$

$$\begin{aligned} T_{\beta_{\mu_4}}(s) = {} & \frac{(\varphi^{*\prime} - \|W^*\|)\cos\varphi^* - \varphi^{*\prime}\sin\varphi^*}{\sqrt{2(\|W^*\|^2 - \|W^*\|\varphi^{*\prime} + (\varphi^{*\prime})^2)}}T^* + \frac{\|W^*\|}{\sqrt{2(\|W^*\|^2 - \|W^*\|\varphi^{*\prime} + (\varphi^{*\prime})^2)}}N^* \\ & - \frac{\varphi^{*\prime}\cos\varphi^* - (\|W^*\| - \varphi^*)'\sin\varphi^*}{\sqrt{2(\|W^*\|^2 - \|W^*\|\varphi^{*\prime} + (\varphi^{*\prime})^2)}}B^*, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta_{\mu_4} \wedge T_{\beta_{\mu_4}}(s) = {} & \frac{(2\|W^*\| - \varphi^{*\prime})\sin\varphi^* - (\|W^*\| + \varphi^{*\prime})\cos\varphi^*}{\sqrt{6\|W^*\|^2 - 6\|W^*\|\varphi^{*\prime} + 6(\varphi^{*\prime})^2}}T^* \\ & + \frac{2\varphi^{*\prime} - \|W^*\|}{\sqrt{6\|W^*\|^2 - 6\|W^*\|\varphi^{*\prime} + 6(\varphi^{*\prime})^2}}N^* \\ & + \frac{(2\|W^*\| - \varphi^{*\prime})\cos\varphi^* + (\|W^*\| + \varphi^{*\prime})\sin\varphi^*}{\sqrt{6\|W^*\|^2 - 6\|W^*\|\varphi^{*\prime} + 6(\varphi^{*\prime})^2}}B^*, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T'_{\beta_{\mu_4}}(s) = {} & \frac{(\varphi^{*\prime})^4\sqrt{3}(\pi_1\sin\varphi^* + \pi_2\cos\varphi^*)}{4\big(\|W^*\|^2 - \|W^*\|\varphi^{*\prime} + (\varphi^{*\prime})^2\big)^2}T^* + \frac{\pi_3(\varphi^{*\prime})^4\sqrt{3}}{4\big(\|W^*\|^2 - \|W^*\|\varphi^{*\prime} + (\varphi^{*\prime})^2\big)^2}N^* \\ & + \frac{(\varphi^{*\prime})^4\sqrt{3}(\pi_1\cos\varphi^* - \pi_2\sin\varphi^*)}{4\big(\|W^*\|^2 - \|W^*\|\varphi^{*\prime} + (\varphi^{*\prime})^2\big)^2}B^* \end{aligned}$$

eşitliklerine dönüşür. Geodezik eğrilik tanımından $\kappa_g^{\beta_{\mu_4}}$ geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\beta_{\mu_4}} = \frac{(2\frac{\|W^*\|}{\varphi^{*\prime}}-1)\pi_1 + (-1-\frac{\|W^*\|}{\varphi^{*\prime}})\pi_2 + (2-\frac{\|W^*\|}{\varphi^{*\prime}})\pi_3}{4\sqrt{2}\Big(1-\frac{\|W^*\|}{\varphi^{*\prime}}+(\frac{\|W^*\|}{\varphi^{*\prime}})^2\Big)^{\frac{5}{2}}}$$

biçiminde olur.

Teorem 4.1.32 α eğrisinin involüt eğrisi α^* olsun. α^* eğrisinin birim Darboux vektörünün çizdiği küresel eğriye ait $C^*T_{C^*}(C^*\wedge T_{C^*})$- Smarandache eğrisinin geodezik eğriliğinin evolüt eğrisine bağlı ifadesi

$$\kappa_g^{\beta_{\mu_4}} = \frac{(2\frac{1}{\eta}-1)\overline{\pi}_1+(-1-\frac{1}{\eta})\overline{\pi}_2+(2-\frac{1}{\eta})\overline{\pi}_3}{4\sqrt{2}(1-\eta+\eta^2)^{\frac{5}{2}}} \tag{4.1.158}$$

denklemiyle verilir. Burada

$$\eta = \Big(\frac{\varphi'}{\sqrt{\varphi'^2+\|W\|^2}}\Big)'\cos\varphi(c-s)$$

olmak üzere

$$\begin{cases} \overline{\pi}_1 = -2+4\frac{1}{\eta}-4\frac{1}{\eta^2}+2\frac{1}{\eta^3}+2\frac{1}{\eta'}\big(2\frac{1}{\eta}-1\big) \\ \overline{\pi}_2 = -2+2\frac{1}{\eta}-4\frac{1}{\eta^2}+2\frac{1}{\eta^3}-2\frac{1}{\eta^4}-\frac{1}{\eta'}\big(1+\frac{1}{\eta}\big) \\ \overline{\pi}_3 = 2\frac{1}{\eta}-4\frac{1}{\eta^2}+4\frac{1}{\eta^3}-2\frac{1}{\eta^4}+\frac{1}{\eta'}\big(2-\frac{1}{\eta}\big) \end{cases} \tag{4.1.159}$$

şeklinde birer katsayıdır, (Şenyurt ve ark., 2016b).

İspat.

$$\beta_{\mu_4}(s) = \frac{1}{\sqrt{3}}(C^*+T_{C^*}+C^*\wedge T_{C^*})$$

eşitliğinde sırasıyla (4.1.4), (3.2.4) ve (3.2.5) den karşılıkları yazılırsa β_{μ_4} vektörünün evolüt eğrisine bağlı ifadesi

$$\begin{aligned}\beta_{\mu_4}(s) \quad = \quad & \frac{(\|W\|-\varphi')\sin\varphi-\sqrt{\varphi'^2+\|W\|^2}\cos\varphi}{\sqrt{3\varphi'^2+3\|W\|^2}}T+\frac{\varphi'+\|W\|}{\sqrt{3\varphi'^2+3\|W\|^2}}N \\ & +\frac{(\|W\|-\varphi')\cos\varphi+\sqrt{\varphi'^2+\|W\|^2}\sin\varphi}{\sqrt{3\varphi'^2+3\|W\|^2}}B\end{aligned} \tag{4.1.160}$$

şeklinde elde edilir. Bu ifadenin türevi alınırsa $T_{\beta_{\mu_4}}(s)$ teğet vektörü

$$\eta = \Big(\frac{\varphi'}{\sqrt{\varphi'^2+\|W\|^2}}\Big)'\cos\varphi(c-s)$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}T_{\beta_{\mu_4}}(s) \quad = \quad & \frac{\big((1-\eta)\varphi'-\eta\|W\|\big)\sin\varphi-\sqrt{\|W\|^2+\varphi'^2}\cos\varphi}{\sqrt{2(1-\eta+\eta^2)}\sqrt{\|W\|^2+\varphi'^2}}T \\ & +\frac{(\eta-1)\|W\|-\eta\varphi'}{\sqrt{2(1-\eta+\eta^2)}\sqrt{\|W\|^2+\varphi'^2}}N \\ & +\frac{\big((\eta-1)\varphi'-\eta\|W\|\big)\cos\varphi+\sqrt{\|W\|^2+\varphi'^2}\sin\varphi}{\sqrt{2(1-\eta+\eta^2)}\sqrt{\|W\|^2+\varphi'^2}}B\end{aligned} \tag{4.1.161}$$

şeklinde bulunur. Bu ifadenin tekrar türevi alınırsa katsayılar

$$\begin{cases} \overline{\pi}_1 = -2+4\frac{1}{\eta}-4\frac{1}{\eta^2}+2\frac{1}{\eta^3}+2\frac{1}{\eta'}\left(2\frac{1}{\eta}-1\right) \\ \overline{\pi}_2 = -2+2\frac{1}{\eta}-4\frac{1}{\eta^2}+2\frac{1}{\eta^3}-2\frac{1}{\eta^4}-\frac{1}{\eta'}\left(1+\frac{1}{\eta}\right) \\ \overline{\pi}_3 = 2\frac{1}{\eta}-4\frac{1}{\eta^2}+4\frac{1}{\eta^3}-2\frac{1}{\eta^4}+\frac{1}{\eta'}\left(2-\frac{1}{\eta}\right) \end{cases}$$

olmak üzere $T'_{\beta_{\mu_4}}(s)$ türev vektörü

$$\begin{aligned} T'_{\beta_{\mu_4}}(s) \quad = \quad & \frac{(\overline{\pi}_1\|W\|-\overline{\pi}_2\varphi')\eta^4\sqrt{3}\sin\varphi-\overline{\pi}_3\eta^4\sqrt{3\|W\|^2+3\varphi'^2}\cos\varphi}{4(1-\eta+\eta^2)^2\sqrt{\varphi'^2+\|W\|^2}}T \\ & +\frac{(\overline{\pi}_1\varphi'+\overline{\pi}_2\|W\|)\eta^4\sqrt{3}}{4(1-\eta+\eta^2)^2\sqrt{\varphi'^2+\|W\|^2}}N \\ & +\frac{(\overline{\pi}_1\|W\|-\overline{\pi}_2\varphi')\eta^4\sqrt{3}\cos\varphi+\overline{\pi}_3\sqrt{3\|W\|^2+3\varphi'^2}\sin\varphi}{4(1-\eta+\eta^2)^2\sqrt{\varphi'^2+\|W\|^2}}B \end{aligned}$$

biçiminde olur. (4.1.160) ve (4.1.161) ifadelerinden elde edilen $\beta_{\mu_4}\wedge T_{\beta_{\mu_4}}$ vektörü

$$\begin{aligned} \beta_{\mu_4}\wedge T_{\beta_{\mu_4}}(s) \quad = \quad & \frac{\left((2-\eta)\|W\|+(1+\eta)\varphi'\right)\sin\varphi-(2\eta-1)\sqrt{\|W\|^2+\varphi'^2}\cos\varphi}{\sqrt{6-6\eta+6\eta^2}\sqrt{\|W\|^2+\varphi'^2}}T \\ & +\frac{(2-\eta)\varphi'-(1+\eta)\|W\|}{\sqrt{6-6\eta+6\eta^2}\sqrt{\|W\|^2+\varphi'^2}}N \\ & +\frac{((2-\eta)\|W\|+(1+\eta)\varphi')\cos\varphi+(2\eta-1)\sqrt{\|W\|^2+\varphi'^2}\sin\varphi}{\sqrt{6-6\eta+6\eta^2}\sqrt{\|W\|^2+\varphi'^2}}B \end{aligned}$$

şeklinde yazılır. Geodezik eğrilik tanımından $\kappa_g^{\beta_{\mu_4}}$ geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\beta_{\mu_4}} = \frac{(2\frac{1}{\eta}-1)\overline{\pi}_1+(-1-\frac{1}{\eta})\overline{\pi}_2+(2-\frac{1}{\eta})\overline{\pi}_3}{4\sqrt{2}(1-\eta+\eta^2)^{\frac{5}{2}}}$$

biçiminde elde edilir.

Örnek 4.1.1

$$\beta(s)=\{\frac{2}{5}\sin(2s)-\frac{1}{40}\sin(8s),-\frac{2}{5}\cos(2s)+\frac{1}{40}\cos(8s),\frac{4}{15}\sin(3s)\}$$

eğrisine ait

$$\begin{aligned}\beta^*(s) &= \Big\{\frac{2}{5}\sin(2s)-\frac{1}{40}\sin(8s)+\frac{4}{5}(1-s)\cos(5s),-\frac{2}{5},\cos(2s)+\frac{1}{40}\cos(8s)\\ &\quad +\frac{4}{5}(1-s)\sin(5s),\frac{4}{15}\sin(3s)-\frac{3}{5}+\frac{3}{5}s\Big\}\end{aligned}$$

involüt eğrisinin Frenet vektörleri, birim Darboux vektörü, eğriliği ve burulması

$$T^* = \left\{\frac{4}{5}\cos(5s),\frac{4}{5}\sin(5s),-\frac{3}{5}\right\}$$

$$\begin{aligned}N^* &= \Big\{\left(\frac{1}{5}\cos(8s)-\frac{4}{5}\cos(2s)\right)\sin(3s)-\left(\frac{4}{5}\sin(2s)+\frac{1}{5}\sin(8s)\right)\cos(3s),\\ &\quad \left(-\frac{4}{5}\sin(2s)+\frac{1}{5}\sin(8s)\right)\sin(3s)+\cos(3s)\left(\frac{4}{5}\cos(2s)+\frac{1}{5}\cos(8s)\right),0\Big\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}B^* &= \Big\{\cos(3s)\left(\frac{4}{5}\cos(2s)-\frac{1}{5}\cos(8s)\right)-\sin(3s)\left(\frac{4}{5}\sin(2s)+\frac{1}{5}\sin(8s)\right),\\ &\quad \cos(3s)\left(\frac{4}{5}\sin(2s)-\frac{1}{5}\sin(8s)\right)+\sin(3s)\left(\frac{4}{5}\cos(2s)+\frac{1}{5}\cos(8s)\right),\frac{4}{5}\Big\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}C^* &= \Bigg\{\frac{\cos(5s)\left(15\cos^2(3s)-3\right)}{5\sqrt{\frac{10\cos(3s)^4+1-2\cos^2(3s)}{(-1+t)^2\sin^6(3s)}}(-1+t)\sin^3(3s)},\\ &\quad \frac{\sin(5s)\left(15\cos^2(3s)-3\right)}{5\sqrt{\frac{10\cos(3s)^4+1-2\cos^2(3s)}{(-1+t)^2\sin^6(3s)}}(-1+t)\sin^3(3s)},\\ &\quad \frac{5\cos^2(3s)-4}{5\sqrt{\frac{10\cos(3s)^4+1-2\cos^2(3s)}{(-1+t)^2\sin^6(3s)}}(-1+t)\sin^3(3s)}\Bigg\}\end{aligned}$$

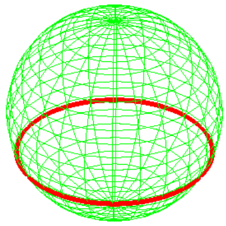
$$\kappa^* = \frac{1}{(1-s)\sin(3s)}$$

$$\tau^* = \frac{3}{4(-1+s)\sin(3s)}$$

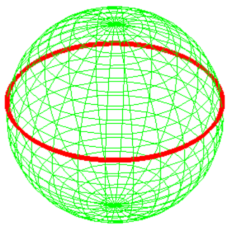
şeklinde bulunur. İnvolüt eğrisinin Frenet vektörlerine ait Sabban çatısına göre Smarandache eğrileri,

$$
\begin{aligned}
\beta_1 &= \frac{1}{2}\left(T^* + N^*\right)\\
\beta_2 &= \frac{1}{2}\left(T^* + B^*\right)\\
\beta_3 &= \frac{1}{2}\left(N^* + B^*\right)\\
\beta_4 &= \frac{1}{3}\left(T^* + N^* + B^*\right)\\
\beta_{\varsigma_1} &= \frac{1}{2}\left(-\cos\varphi^* T^* + N^* + \sin\varphi^* B^*\right)\\
\beta_{\varsigma_2} &= \frac{1}{2}\left(\sin\varphi^* T^* + N^* + \cos\varphi^* B^*\right)\\
\beta_{\varsigma_3} &= \frac{1}{2}\left((\sin\varphi^* - \cos\varphi^*)T^* + (\sin\varphi^* + \cos\varphi^*)B^*\right)\\
\beta_{\varsigma_4} &= \frac{1}{3}\left((\sin\varphi^* - \cos\varphi^*)T^* + N^* + (\sin\varphi^* + \cos\varphi^*)B^*\right)\\
\beta_{\xi_1} &= \frac{1}{2}\left(-N^* + B^*\right)\\
\beta_{\xi_2} &= \frac{1}{2}\left(T^* + B^*\right)\\
\beta_{\xi_3} &= \frac{1}{2}\left(T^* - N^*\right)\\
\beta_{\xi_4} &= \frac{1}{3}\left(T^* - N^* + B^*\right)\\
\beta_{\mu_1} &= \frac{1}{2}\left((\sin\varphi^* + \cos\varphi^*)T^* + (\cos\varphi^* - \sin\varphi^*)B^*\right)\\
\beta_{\mu_2} &= \frac{1}{2}\left(\sin\varphi^* T^* + N^* + \cos\varphi^* B^*\right)\\
\beta_{\mu_3} &= \frac{1}{2}\left(\cos\varphi^* T^* + N^* - \sin\varphi^* B^*\right)\\
\beta_{\mu_4} &= \frac{1}{3}\left((\sin\varphi^* + \cos\varphi^*)T^* + N^* + (\cos\varphi^* - \sin\varphi^*)B^*\right).
\end{aligned}
$$

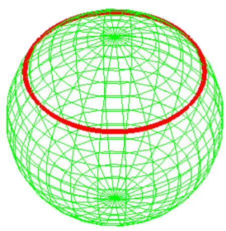
şeklindedir. Burada herbir Smarandache eşitliğe T^*, N^*, B^*, $\sin\varphi^*$ ve $\cos\varphi^*$ ifadelerindeki karşılıkları yazılıp mapple programıyla çizilirse bu eğriler aşağıdaki gibi olur;



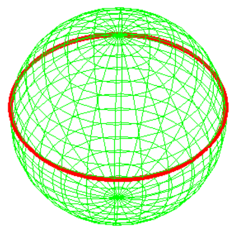
Şekil 4.2: involüt eğrisine ait β_1-Smarandache eğrisi



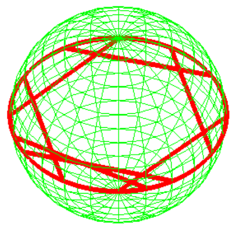
Şekil 4.3: involüt eğrisine ait β_2-Smarandache eğrisi



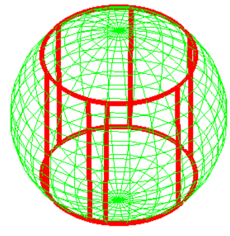
Şekil 4.4: involüt eğrisine ait β_3-Smarandache eğrisi



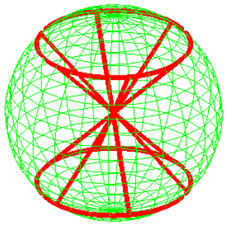
Şekil 4.5: involüt eğrisine ait β_4-Smarandache eğrisi



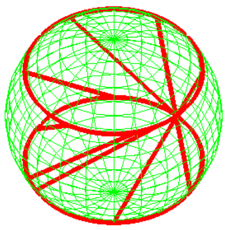
Şekil 4.6: involüt eğrisine ait β_{ς_1}-Smarandache eğrisi



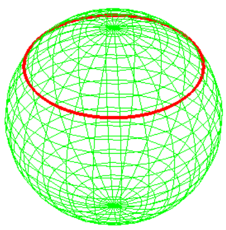
Şekil 4.7: involüt eğrisine ait β_{ς_2}-Smarandache eğrisi



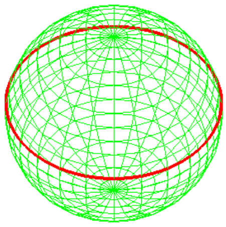
Şekil 4.8: involüt eğrisine ait β_{ς_3}-Smarandache eğrisi



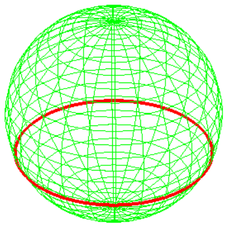
Şekil 4.9: involüt eğrisine ait β_{ς_4}-Smarandache eğrisi



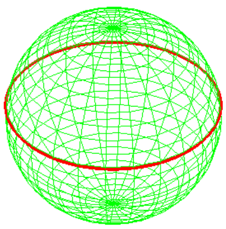
Şekil 4.10: involüt eğrisine ait β_{ξ_1}-Smarandache eğrisi



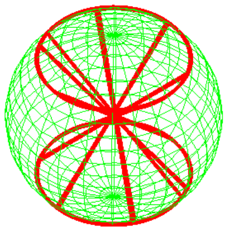
Şekil 4.11: involüt eğrisine ait β_{ξ_2}-Smarandache eğrisi



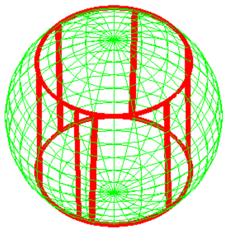
Şekil 4.12: involüt eğrisine ait β_{ξ_3}-Smarandache eğrisi



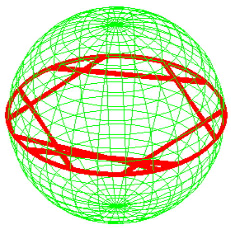
Şekil 4.13: involüt eğrisine ait β_{ξ_4}-Smarandache eğrisi



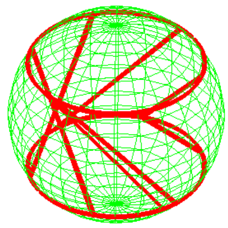
Şekil 4.14: involüt eğrisine ait β_{μ_1}-Smarandache eğrisi



Şekil 4.15: involüt eğrisine ait β_{μ_2}-Smarandache eğrisi



Şekil 4.16: involüt eğrisine ait β_{μ_3}-Smarandache eğrisi



Şekil 4.17: involüt eğrisine ait β_{μ_4}-Smarandache eğrisi

4.2 Bertrand Eğri Çiftine Ait Sabban Çatısına Göre Smarandache Eğrileri

Bu bölümde, α eğrisine ait α_1 Bertrand partner eğrisinin Frenet vektörleri ile birim Darboux vektörünün birim küre yüzeyi üzerinde çizdiği eğrilerin Sabban çatısı ve bu çatı konum vektörü alındığında oluşan Smarandache eğrileri araştırılmıştır. Bulunan sonuçların Bertrand eğrisine bağlı ifadeleri verilmiştir. Bertrand eğrisinin T_1, N_1, B_1 Frenet vektörleri ile C_1 birim Darboux vektörünün birim küre yüzeyi üzerinde çizdikleri küresel eğrilerin Sabban çatıları, küresel Frenet formülleri ve geodezik eğrilikleri (Tanım 3.5.1) ve (Teorem 3.5.1)'e benzer olarak sırasıyla

(T_1) teğetler göstergesi için;

$$\begin{cases} T_1 = T_1, \quad T_{T_1} = N_1, \quad T_1 \wedge T_{T_1} = B_1, \\ T_1{}' = T_{T_1}, \quad T_{T_1}{}' = -T_1 + \frac{\tau_1}{\kappa_1} T_1 \wedge T_{T_1}, \quad T_1 \wedge T_{T_1}{}' = -\frac{\tau_1}{\kappa_1} T_{T_1}, \\ \kappa_g = \langle T_{T_1}{}', T_1 \wedge T_{T_1} \rangle = \frac{\tau_1}{\kappa_1}, \end{cases} \tag{4.2.1}$$

(N_1) aslinormaller göstergesi için;

$$\begin{cases} N_1 = N_1, \quad T_{N_1} = -\cos\varphi_1 T_1 + \sin\varphi_1 B_1, \quad N_1 \wedge T_{N_1} = \sin\varphi_1 T_1 + \cos\varphi_1 B_1, \\ N_1{}' = T_{N_1}, \quad T_{N_1}{}' = -N_1 + \frac{\varphi_1{}'}{\|W_1\|} N_1 \wedge T_{N_1}, \quad N_1 \wedge T_{N_1}{}' = -\frac{\varphi_1{}'}{\|W_1\|} T_{N_1}, \\ \kappa_g = \langle T'_{N_1}, N_1 \wedge T_{N_1} \rangle = \frac{\varphi_1{}'}{\|W_1\|}, \end{cases} \tag{4.2.2}$$

(B_1) binormaller göstergesi için;

$$\begin{cases} B_1 = B_1, \;\; T_{B_1} = -N_1, \;\; B_1 \wedge T_{B_1} = T_1, \\ B_1{}' = T_{B_1}, \;\; T_{B_1}{}' = -B_1 + \frac{\kappa_1}{\tau_1} B_1 \wedge T_{B_1}, \;\; B_1 \wedge T_{B_1}{}' = -\frac{\kappa_1}{\tau_1} T_{B_1}, \\ \kappa_g = \langle T_{B_1}{}', B_1 \wedge T_{B_1} \rangle = \frac{\kappa_1}{\tau_1}, \end{cases} \tag{4.2.3}$$

(C_1) eğrisi için;

$$\begin{cases} C_1 = \sin\varphi_1 T_1 + \cos\varphi_1 B_1, \; T_{C_1} = \cos\varphi_1 T_1 - \sin\varphi_1 B_1, \; C_1 \wedge T_{C_1} = N_1, \\ C_1{}' = T_{C_1}, \; T_{C_1}{}' = -C_1 + \dfrac{\|W_1\|}{\varphi_1{}'} C_1 \wedge T_{C_1}, \; C_1 \wedge T_{C_1}{}' = -\dfrac{\|W_1\|}{\varphi_1{}'} T_{C_1}, \\ \kappa_g = \langle T_{C_1}{}', C_1 \wedge T_{C_1} \rangle = \frac{\|W_1\|}{\varphi_1{}'}, \end{cases} \tag{4.2.4}$$

şeklinde bulunur.

Tanım 4.2.1 $\alpha_1 : I \to S^2$ Bertrand partner eğrisinin teğetler göstergesine ait Sabban çatısı $\{T_1, T_{T_1}, T_1 \wedge T_{T_1}\}$ olsun.

$$\gamma_1(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(T_1 + T_{T_1}) \tag{4.2.5}$$

şeklinde tanımlı vektörün çizdiği regüler eğriye $T_1 T_{T_1}$-Smarandache eğrisi denir.

Teorem 4.2.1 $T_1 T_{T_1}$-Smarandache eğrisinin geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\gamma_1} = \frac{1}{\left(2 + \left(\frac{\tau_1}{\kappa_1}\right)^2\right)^{\frac{5}{2}}} \left(\frac{\tau_1}{\kappa_1}\rho_1 + \frac{\tau_1}{\kappa_1}\rho_2 + 2\rho_3\right) \tag{4.2.6}$$

denklemiyle verilir. Burada

$$\begin{cases} \rho_1 = -2 - \left(\frac{\tau_1}{\kappa_1}\right)^2 + \left(\frac{\tau_1}{\kappa_1}\right)'\left(\frac{\tau_1}{\kappa_1}\right) \\ \rho_2 = -2 - 3\left(\frac{\tau_1}{\kappa_1}\right)^2 - \left(\frac{\tau_1}{\kappa_1}\right)^4 - \left(\frac{\tau_1}{\kappa_1}\right)'\left(\frac{\tau_1}{\kappa_1}\right) \\ \rho_3 = 2\left(\frac{\tau_1}{\kappa_1}\right) + \left(\frac{\tau_1}{\kappa_1}\right)^3 + \left(\frac{\tau_1}{\kappa_1}\right)' \end{cases} \tag{4.2.7}$$

şeklinde birer katsayıdır.

İspat.

$$\gamma_1(s)=\frac{1}{\sqrt{2}}(T_1+T_{T_1})$$

eğrisinin s_{γ_1} yay parametresine göre türevi alınırsa

$$T_{\gamma_1}\frac{ds_{\gamma_1}}{ds}=\frac{1}{\sqrt{2}}(-T_1+T_{T_1}+\frac{\tau_1}{\kappa_1}T_1\wedge T_{T_1})$$

olur. Bu eşitliğin normu alınırsa $\frac{ds_{\gamma_1}}{ds}$ ifadesi

$$\frac{ds_{\gamma_1}}{ds}=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2+\left(\frac{\tau_1}{\kappa_1}\right)^2}$$

bulunur. Bulunan bu ifade yukarıda yerine yazılırsa $T_{\gamma_1}(s)$ teğet vektörü

$$T_{\gamma_1}(s)=\frac{1}{\sqrt{2+(\frac{\tau_1}{\kappa_1})^2}}(-T_1+T_{T_1}+\frac{\tau_1}{\kappa_1}T_1\wedge T_{T_1}) \tag{4.2.8}$$

biçiminde olur. (4.2.5) ve (4.2.8) ifadelerinden elde edilen $\gamma_1\wedge T_{\gamma_1}$ vektörü

$$\gamma_1\wedge T_{\gamma_1}(s)=\frac{1}{\sqrt{4+2(\frac{\tau_1}{\kappa_1})^2}}(\frac{\tau_1}{\kappa_1}T_1-\frac{\tau_1}{\kappa_1}T_{T_1}+2T_1\wedge T_{T_1}) \tag{4.2.9}$$

şeklinde yazılır. (4.2.5), (4.2.8) ve (4.2.9) eşitliklerinde (4.2.1) den karşılıkları yazılırsa γ_1-Smarandache eğrisine ait Sabban çatısının Bertrand partner eğrisine bağlı ifadesi,

$$\begin{aligned}\gamma_1(s) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(T_1+N_1),\\ T_{\gamma_1}(s) &= \frac{1}{\sqrt{2+(\frac{\tau_1}{\kappa_1})^2}}(-T_1+N_1+\frac{\tau_1}{\kappa_1}B_1),\\ \gamma_1\wedge T_{\gamma_1}(s) &= \frac{1}{\sqrt{4+2(\frac{\tau_1}{\kappa_1})^2}}(\frac{\tau_1}{\kappa_1}T_1-\frac{\tau_1}{\kappa_1}N_1+2B_1)\end{aligned} \tag{4.2.10}$$

denklemlerine dönüşür. (4.2.8) ifadesinin türevi alınırsa katsayılar

$$\begin{cases}\rho_1=-2-\left(\frac{\tau_1}{\kappa_1}\right)^2+\left(\frac{\tau_1}{\kappa_1}\right)'\left(\frac{\tau_1}{\kappa_1}\right)\\ \rho_2=-2-3\left(\frac{\tau_1}{\kappa_1}\right)^2-\left(\frac{\tau_1}{\kappa_1}\right)^4-\left(\frac{\tau_1}{\kappa_1}\right)'\left(\frac{\tau_1}{\kappa_1}\right)\\ \rho_3=2\left(\frac{\tau_1}{\kappa_1}\right)+\left(\frac{\tau_1}{\kappa_1}\right)^3+\left(\frac{\tau_1}{\kappa_1}\right)'\end{cases} \tag{4.2.11}$$

olmak üzere $T_{\gamma_1}{}'(s)$ türev vektörü

$$T'_{\gamma_1}(s)=\frac{\sqrt{2}}{\left(2+(\frac{\tau_1}{\kappa_1})^2\right)^2}(\rho_1T_1+\rho_2T_{T_1}+\rho_3T_1\wedge T_{T_1}) \tag{4.2.12}$$

şeklinde bulunur. Burada (4.2.1) ifadesi yazılırsa $T'_{\gamma_1}(s)$ vektörünün Bertrand partner eğrisine bağlı ifadesi

$$T_{\gamma_1}{}'(s) = \frac{\sqrt{2}}{\left(2+\left(\frac{\tau_1}{\kappa_1}\right)^2\right)^2}(\rho_1 T_1 + \rho_2 N_1 + \rho_3 B_1)$$

şeklinde olur. Geodezik eğrilik tanımından $\kappa_g^{\gamma_1}$ geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\gamma_1} = \frac{1}{\left(2+\left(\frac{\tau_1}{\kappa_1}\right)^2\right)^{\frac{5}{2}}}\left(\frac{\tau_1}{\kappa_1}\rho_1 + \frac{\tau_1}{\kappa_1}\rho_2 + 2\rho_3\right)$$

biçiminde elde edilir.

Teorem 4.2.2 α eğrisinin Bertrand partner eğrisi α_1 olsun. α_1 eğrisinin teğetler göstergesine ait $T_1 T_{T_1}$ - Smarandache eğrisinin geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\gamma_1} = \frac{1}{\left(2+\left(\frac{\varphi'}{\|W\|}\right)^2\right)^{\frac{5}{2}}}\left(\frac{\varphi'}{\|W\|}\overline{\rho}_1 + \frac{\varphi'}{\|W\|}\overline{\rho}_2 + 2\overline{\rho}_3\right) \tag{4.2.13}$$

denklemiyle verilir. Burada

$$\begin{cases} \overline{\rho}_1 = -2-\tan^2(\varphi-\theta)+\tan'(\varphi-\theta)\tan(\varphi-\theta) \\ \overline{\rho}_2 = -2-3\tan^2(\varphi-\theta)-\tan^4(\varphi-\theta)-\tan'(\varphi-\theta)\tan(\varphi-\theta) \\ \overline{\rho}_3 = 2\tan(\varphi-\theta)+\tan^3(\varphi-\theta)+2\tan'(\varphi-\theta) \end{cases} \tag{4.2.14}$$

şeklinde birer katsayıdır.

İspat.

$$\gamma_1(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(T_1 + T_{T_1})$$

eşitliğine sırasıyla (4.2.1), (3.3.2) ve (3.3.4) den karşılıkları yazılırsa γ_1 vektörünün Bertrand eğrisine bağlı ifadesi

$$\gamma_1(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\theta\, T + N - \sin\theta\, B) \tag{4.2.15}$$

biçiminde olur. Bu ifadenin türevi alınırsa $T_{\gamma_1}(s)$ teğet vektörü

$$T_{\gamma_1}(s) = \frac{\tan(\varphi-\theta)\sin\theta-\cos\theta}{\sqrt{2+\tan^2(\varphi-\theta)}}T + \frac{1}{\sqrt{2+\tan^2(\varphi-\theta)}}N + \frac{\tan(\varphi-\theta)\cos\theta+\sin\theta}{\sqrt{2+\tan^2(\varphi-\theta)}}B \tag{4.2.16}$$

şeklinde bulunur. Bu ifadenin türevi alınırsa katsayılar

$$\begin{cases} \overline{\rho}_1 = -2-\tan^2(\varphi-\theta)+\tan'(\varphi-\theta)\tan(\varphi-\theta) \\ \overline{\rho}_2 = -2-3\tan^2(\varphi-\theta)-\tan^4(\varphi-\theta)-\tan'(\varphi-\theta)\tan(\varphi-\theta) \\ \overline{\rho}_3 = 2\tan(\varphi-\theta)+\tan^3(\varphi-\theta)+2\tan'(\varphi-\theta) \end{cases}$$

olmak üzere $T'_{\gamma_1}(s)$ türev vektörü

$$T'_{\gamma_1}(s) = \frac{(\overline{\rho}_3\sin\theta + \overline{\rho}_1\cos\theta)\sqrt{2}}{(2+\tan^2(\varphi-\theta))^2}T + \frac{\overline{\rho}_2\sqrt{2}}{(2+\tan^2(\varphi-\theta))^2}N + \frac{(\overline{\rho}_3\cos\theta - \overline{\rho}_1\sin\theta)\sqrt{2}}{(2+\tan^2(\varphi-\theta))^2}B$$

biçiminde olur. (4.2.15) ve (4.2.16) ifadelerinden elde edilen $\gamma_1 \wedge T_{\gamma_1}$ vektörü

$$\begin{aligned} \gamma_1 \wedge T_{\gamma_1}(s) &= \frac{2\sin\theta + \tan(\varphi-\theta)\cos\theta}{\sqrt{4+2\tan^2(\varphi-\theta)}}T - \frac{\tan(\varphi-\theta)}{\sqrt{4+2\tan^2(\varphi-\theta)}}N \\ &\quad + \frac{2\cos\theta - \tan(\varphi-\theta)\sin\theta}{\sqrt{4+2\tan^2(\varphi-\theta)}}B \end{aligned}$$

şeklinde yazılır. Geodezik eğrilik tanımından $\kappa_g^{\gamma_1}$ geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\gamma_1} = \frac{1}{\left(2+\left(\frac{\varphi'}{\|W\|}\right)^2\right)^{\frac{5}{2}}}\left(\frac{\varphi'}{\|W\|}\overline{\rho}_1 + \frac{\varphi'}{\|W\|}\overline{\rho}_2 + 2\overline{\rho}_3\right)$$

biçiminde elde edilir.

Tanım 4.2.2 $\alpha_1 : I \to S^2$ Bertrand partner eğrisinin teğetler göstergesine ait Sabban çatısı $\{T_1, T_{T_1}, T_1 \wedge T_{T_1}\}$ olsun.

$$\gamma_2(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(T_1 + T_1 \wedge T_{T_1}) \tag{4.2.17}$$

şeklinde tanımlı vektörün çizdiği regüler eğriye $T_1(T_1 \wedge T_{T_1})$-Smarandache eğrisi denir.

Teorem 4.2.3 $T_1T_1 \wedge T_{T_1}$-Smarandache eğrisinin geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\gamma_2} = \frac{(\kappa_1 + \tau_1)}{(\kappa_1 - \tau_1)} \tag{4.2.18}$$

denklemiyle verilir.

İspat.

$$\gamma_2(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(T_1 + T_1 \wedge T_{T_1})$$

eğrisinin s_{γ_2} yay parametresine göre türevi alınırsa

$$T_{\gamma_2}\frac{ds_{\gamma_2}}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 - \frac{\tau_1}{\kappa_1}\right)T_{T_1}$$

olur ve bu eşitliğin normu alınırsa $\frac{ds_{\gamma_2}}{ds}$ ifadesi

$$\frac{ds_{\gamma_2}}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 - \frac{\tau_1}{\kappa_1}\right)$$

bulunur. Bu ifade yukarıda yerine yazılırsa $T_{\gamma_2}(s)$ teğet vektörü

$$T_{\gamma_2}(s) = T_{T_1} \tag{4.2.19}$$

biçiminde olur. (4.2.17) ve (4.2.19) ifadelerinden elde edilen $\gamma_2 \wedge T_{\gamma_2}$ vektörü

$$\gamma_2 \wedge T_{\gamma_2}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-T_1 + T_1 \wedge T_{T_1}) \tag{4.2.20}$$

şeklinde yazılır. (4.2.17), (4.2.19), (4.2.22) ve (4.2.20) vektörlerinde (4.2.1) den karşılıkları yazılırsa γ_2-Smarandache eğrisine ait Sabban çatısının Bertrand partner eğrisine bağlı ifadesi,

$$\begin{aligned} \gamma_2(s) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(T_1 + B_1), \\ T_{\gamma_2}(s) &= N_1, \\ \gamma_2 \wedge T_{\gamma_2}(s) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(-T_1 + B_1) \end{aligned} \tag{4.2.21}$$

denklemlerine dönüşür. (4.2.19) ifadesinin türevi alınırsa $T'_{\gamma_2}(s)$ türev vektörü

$$T'_{\gamma_2}(s) = \frac{\sqrt{2}}{(1 - \frac{\tau_1}{\kappa_1})}\big(-T_1 + \frac{\tau_1}{\kappa_1} T_1 \wedge T_{T_1}\big) \tag{4.2.22}$$

biçiminde olur ve bu ifadeye (4.2.1) yazılırsa $T'_{\gamma_2}(s)$ türev vektörünün Bertrand partner eğrisine bağlı ifadesi

$$T'_{\gamma_2}(s) = \frac{\sqrt{2}}{(1 - \frac{\tau_1}{\kappa_1})}\big(-T_1 + \frac{\tau_1}{\kappa_1} B_1\big)$$

şeklindedir. Geodezik eğrilik tanımından $\kappa_g^{\gamma_2}$ geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\gamma_2} = \frac{(\kappa_1 + \tau_1)}{(\kappa_1 - \tau_1)}$$

biçiminde elde edilir.

Teorem 4.2.4 α eğrisinin Bertrand partner eğrisi α_1 olsun. α_1 eğrisinin teğetler göstergesine ait $T_1(T_1 \wedge T_{T_1})$- Smarandache eğrisinin geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\gamma_2} = \frac{\|W\| + \varphi'}{\|W\| - \varphi'} \tag{4.2.23}$$

denklemiyle verilir.

İspat.

$$\gamma_2(s)=\frac{1}{\sqrt{2}}(T_1+T_1\wedge T_{T_1})$$

eşitliğinde sırasıyla (4.2.1), (3.3.2) ve (3.3.4) den karşılıkları yazılırsa γ_2 vektörünün Bertrand eğrisine bağlı ifadesi

$$\gamma_2(s)=\frac{1}{\sqrt{2}}\Big((\cos\theta+\sin\theta)T+(\cos\theta-\sin\theta)B\Big) \tag{4.2.24}$$

biçiminde olur. Bu ifadenin türevi alınırsa $T_{\gamma_2}(s)$ teğet vektörü

$$T_{\gamma_2}(s)=N \tag{4.2.25}$$

şeklinde bulunur. Bu ifadenin tekrar türevi alınırsa $T'_{\gamma_2}(s)$ türev vektörü

$$T'_{\gamma_2}=\frac{\tan(\varphi-\theta)\sqrt{2}\sin\theta-\sqrt{2}\cos\theta}{1-\tan(\varphi-\theta)}T+\frac{\tan(\varphi-\theta)\sqrt{2}\cos\theta+\sqrt{2}\sin\theta}{1-\tan(\varphi-\theta)}B$$

şeklinde elde edilir. (4.2.24) ve (4.2.25) ifadelerinden elde edilen $\gamma_2\wedge T_{\gamma_2}$ vektörü

$$\gamma_2\wedge T_{\gamma_2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\big((\sin\theta-\cos\theta)T+(\cos\theta+\sin\theta)B\big)$$

biçiminde bulunur. Geodezik eğrilik tanımından $\kappa_g^{\gamma_2}$ geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\gamma_2}=\frac{\|W\|+\varphi'}{\|W\|-\varphi'}$$

biçiminde olur.

Tanım 4.2.3 $\alpha_1 : I\to S^2$ Bertrand partner eğrisinin teğetler göstergesine ait Sabban çatısı $\{T_1, T_{T_1}, T_1\wedge T_{T_1}\}$ olsun.

$$\gamma_3(s)=\frac{1}{\sqrt{2}}(T_{T_1}+T_1\wedge T_{T_1}) \tag{4.2.26}$$

şeklinde tanımlı vektörün çizdiği regüler eğriye $T_{T_1}(T_1\wedge T_{T_1})$-Smarandache eğrisi denir.

Teorem 4.2.5 $T_{T_1}(T_1\wedge T_{T_1})$-Smarandache eğrisinin geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\gamma_3}=\frac{1}{\big(1+2\big(\frac{\tau_1}{\kappa_1}\big)^2\big)^{\frac{5}{2}}}\big(2\frac{\tau_1}{\kappa_1}\Phi_1-\Phi_2+\Phi_3\big) \tag{4.2.27}$$

denklemiyle verilir. Burada

$$\begin{cases}\Phi_1=\frac{\tau_1}{\kappa_1}+2\big(\frac{\tau_1}{\kappa_1}\big)^3+2\big(\frac{\tau_1}{\kappa_1}\big)'\big(\frac{\tau_1}{\kappa_1}\big)\\[2ex] \Phi_2=-1-3\big(\frac{\tau_1}{\kappa_1}\big)^2-2\big(\frac{\tau_1}{\kappa_1}\big)^4-\big(\frac{\tau_1}{\kappa_1}\big)'\\[2ex] \Phi_3=-\big(\frac{\tau_1}{\kappa_1}\big)^2-2\big(\frac{\tau_1}{\kappa_1}\big)^4+\big(\frac{\tau_1}{\kappa_1}\big)'\end{cases} \tag{4.2.28}$$

şeklinde birer katsayıdır.

İspat.

$$\gamma_3(s)=\frac{1}{\sqrt{2}}(T_{T_1}+T_1\wedge T_{T_1})$$

eğrisinin s_{γ_3} yay parametresine göre türevi alınırsa

$$T_{\gamma_3}\frac{ds_{\gamma_3}}{ds}=\frac{1}{\sqrt{2}}(-T_1-\frac{\tau_1}{\kappa_1}T_{T_1}+\frac{\tau_1}{\kappa_1}T_1\wedge T_{T_1})$$

olur. Bu eşitliğin normu alınırsa $\frac{ds_{\gamma_3}}{ds}$ ifadesi

$$\frac{ds_{\gamma_3}}{ds}=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1+2\Big(\frac{\tau_1}{\kappa_1}\Big)^2}$$

bulunur. Bu ifade yukarıda yerine yazılırsa $T_{\gamma_3}(s)$ teğet vektörü

$$T_{\gamma_3}(s)=\frac{1}{\sqrt{1+2(\frac{\tau_1}{\kappa_1})^2}}(-T_1-\frac{\tau_1}{\kappa_1}T_{T_1}+\frac{\tau_1}{\kappa_1}T_1\wedge T_{T_1}) \tag{4.2.29}$$

biçiminde olur. (4.2.26) ve (4.2.29) ifadelerinden elde edilen $\gamma_3\wedge T_{\gamma_3}$ vektörü

$$\gamma_3\wedge T_{\gamma_3}(s)=\frac{1}{\sqrt{2+4(\frac{\tau_1}{\kappa_1})^2}}(2\frac{\tau_1}{\kappa_1}T_1-T_{T_1}+T_1\wedge T_{T_1}) \tag{4.2.30}$$

eşitliğiyle yazılır. (4.2.26), (4.2.29) ve (4.2.30) vektörlerinde (4.2.1) den karşılıkları yazılırsa γ_3-Smarandache eğrisine ait Sabban çatısının Bertrand partner eğrisine bağlı ifadesi

$$\begin{aligned}
\gamma_3(s) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(N_1+B_1),\\
T_{\gamma_3}(s) &= \frac{1}{\sqrt{1+2(\frac{\tau_1}{\kappa_1})^2}}(-T_1-\frac{\tau_1}{\kappa_1}N_1+\frac{\tau_1}{\kappa_1}B_1),\\
\gamma_3\wedge T_{\gamma_3}(s) &= \frac{1}{\sqrt{2+4(\frac{\tau_1}{\kappa_1})^2}}(2\frac{\tau_1}{\kappa_1}T_1-N_1+B_1)
\end{aligned} \tag{4.2.31}$$

denklemlerine dönüşür. (4.2.29) ifadesinin türevi alınırsa katsayılar

$$\begin{cases}
\Phi_1=\frac{\tau_1}{\kappa_1}+2\big(\frac{\tau_1}{\kappa_1}\big)^3+2\big(\frac{\tau_1}{\kappa_1}\big)'\big(\frac{\tau_1}{\kappa_1}\big)\\
\Phi_2=-1-3\big(\frac{\tau_1}{\kappa_1}\big)^2-2\big(\frac{\tau_1}{\kappa_1}\big)^4-\big(\frac{\tau_1}{\kappa_1}\big)'\\
\Phi_3=-\big(\frac{\tau_1}{\kappa_1}\big)^2-2\big(\frac{\tau_1}{\kappa_1}\big)^4+\big(\frac{\tau_1}{\kappa_1}\big)'
\end{cases} \tag{4.2.32}$$

olmak üzere $T'_{\gamma_3}(s)$ türev vektörü

$$T'_{\gamma_3}=\frac{\sqrt{2}}{\Big(1+2\big(\frac{\tau_1}{\kappa_1}\big)^2\Big)^2}(\Phi_1T_1+\Phi_2T_{T_1}+\Phi_3T_1\wedge T_{T_1}) \tag{4.2.33}$$

şeklinde bulunur ve bu ifadeye (4.2.1) den karşılıkları yazılırsa $T'_{\gamma_3}(s)$ vektörünün Bertrand partner eğrisine bağlı ifadesi

$$T'_{\gamma_3} = \frac{\sqrt{2}}{\left(1+2\left(\frac{\tau_1}{\kappa_1}\right)^2\right)^2}\left(\Phi_1 T_1 + \Phi_2 N_1 + \Phi_3 B_1\right)$$

elde edilir. Geodezik eğrilik tanımından $\kappa_g^{\gamma_3}$ geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\gamma_3} = \frac{1}{\left(1+2\left(\frac{\tau_1}{\kappa_1}\right)^2\right)^{\frac{5}{2}}}\left(2\frac{\tau_1}{\kappa_1}\Phi_1 - \Phi_2 + \Phi_3\right)$$

biçiminde olur.

Teorem 4.2.6 α eğrisinin Bertrand partner eğrisi α_1 olsun. α_1 eğrisinin teğetler göstergesine ait $T_{T_1}(T_1 \wedge T_{T_1})$- Smarandache eğrisinin geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\gamma_3} = \frac{1}{\left(1+2\tan^2(\varphi-\theta)\right)^{\frac{5}{2}}}\left(2\tan(\varphi-\theta)\overline{\Phi}_1 - \overline{\Phi}_2 + \overline{\Phi}_3\right) \tag{4.2.34}$$

denklemiyle verilir. Burada

$$\begin{cases} \overline{\Phi}_1 = \tan(\varphi-\theta) + 2\tan^3(\varphi-\theta) + 2\tan'(\varphi-\theta)\tan(\varphi-\theta) \\ \overline{\Phi}_2 = -1 - 3\tan^2(\varphi-\theta) - 2\tan^4(\varphi-\theta) - \tan'(\varphi-\theta) \\ \overline{\Phi}_3 = \tan^2(\varphi-\theta) - 2\tan^4(\varphi-\theta) + \tan'(\varphi-\theta) \end{cases} \tag{4.2.35}$$

şeklinde birer katsayıdır.

İspat.

$$\gamma_3(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(T_{T_1} + T_1 \wedge T_{T_1})$$

eşitliğinde sırasıyla (4.2.1), (3.3.2) ve (3.3.4) den karşılıkları yazılırsa γ_3 vektörünün Bertrand eğrisine bağlı ifadesi

$$\gamma_3(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sin\theta T + N + \cos\theta B\right) \tag{4.2.36}$$

biçiminde olur. Bu ifadenin türevi alınırsa $T_{\gamma_3}(s)$ teğet vektörü

$$T_{\gamma_3}(s) = \frac{\tan(\varphi-\theta)\sin\theta - \cos\theta}{1+2\tan^2(\varphi-\theta)}T - \frac{\tan(\varphi-\theta)}{1+2\tan^2(\varphi-\theta)^2}N + \frac{\tan(\varphi-\theta)\cos\theta - \sin\theta}{\sqrt{1+2\tan^2(\varphi-\theta)}}B \tag{4.2.37}$$

şeklinde bulunur. Bu ifadenin de türevi alınırsa katsayılar

$$\begin{cases} \overline{\Phi}_1 = \tan(\varphi-\theta) + 2\tan^3(\varphi-\theta) + 2\tan'(\varphi-\theta)\tan(\varphi-\theta) \\ \overline{\Phi}_2 = -1 - 3\tan^2(\varphi-\theta) - 2\tan^4(\varphi-\theta) - \tan'(\varphi-\theta) \\ \overline{\Phi}_3 = \tan^2(\varphi-\theta) - 2\tan^4(\varphi-\theta) + \tan'(\varphi-\theta) \end{cases}$$

olmak üzere $T'_{\gamma_3}(s)$ türev vektörü

$$T'_{\gamma_3}(s) = \frac{(\overline{\Phi}_3\sin\theta+\overline{\Phi}_1\cos\theta)\sqrt{2}}{(1+2\tan^2(\varphi-\theta))^2}T+\frac{\overline{\Phi}_2\sqrt{2}}{(1+2\tan^2(\varphi-\theta))^2}N$$
$$+\frac{(\overline{\Phi}_3\cos\theta-\overline{\Phi}_1\sin\theta)\sqrt{2}}{(1+2\tan^2(\varphi-\theta))^2}B$$

biçiminde bulunur. (4.2.36) ve (4.2.37) ifadelerinden elde edilen $\gamma_3\wedge T_{\gamma_3}$ vektörü

$$\gamma_3\wedge T_{\gamma_3}(s) = \frac{\sin\theta+2\tan(\varphi-\theta)\cos\theta}{\sqrt{2+4\tan^2(\varphi-\theta)}}T-\frac{1}{\sqrt{2+4\tan^2(\varphi-\theta)}}N$$
$$+\frac{\cos\theta-\tan(\varphi-\theta)\sin\theta}{\sqrt{2+4\tan^2(\varphi-\theta)}}B$$

şeklinde yazılır. Geodezik eğrilik tanımından $\kappa_g^{\gamma_3}$ geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\gamma_3}=\frac{1}{\left(1+2\tan^2(\varphi-\theta)\right)^{\frac{5}{2}}}\left(2\tan(\varphi-\theta)\overline{\Phi}_1-\overline{\Phi}_2+\overline{\Phi}_3\right)$$

biçiminde olur.

Tanım 4.2.4 $\alpha_1: I\to S^2$ Bertrand partner eğrisinin teğetler göstergesine ait Sabban çatısı $\{T_1, T_{T_1}, T_1\wedge T_{T_1}\}$ olsun.

$$\gamma_4(s)=\frac{1}{\sqrt{3}}(T_1+T_{T_1}+T_1\wedge T_{T_1}) \tag{4.2.38}$$

şeklinde tanımlı vektörün çizdiği regüler eğriye $T_1T_{T_1}(T_1\wedge T_{T_1})$-Smarandache eğrisi denir.

Teorem 4.2.7 $T_1T_{T_1}(T_1\wedge T_{T_1})$-Smarandache eğrisinin geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\gamma_4}=\frac{1}{4\sqrt{2}\left(1+\frac{\tau_1}{\kappa_1}+\left(\frac{\tau_1}{\kappa_1}\right)^2\right)^{\frac{5}{2}}}\left((2\frac{\tau_1}{\kappa_1}-1)\Lambda_1-\left(1+\frac{\tau_1}{\kappa_1}\right)\Lambda_2+\left(2-\frac{\tau_1}{\kappa_1}\right)\Lambda_3\right) \tag{4.2.39}$$

denklemiyle verilir. Burada

$$\begin{cases}\Lambda_1=-2+4\left(\frac{\tau_1}{\kappa_1}\right)-\left(\frac{\tau_1}{\kappa_1}\right)^2+2\left(\frac{\tau_1}{\kappa_1}\right)^3+\left(\frac{\tau_1}{\kappa_1}\right)'\left(2\frac{\tau_1}{\kappa_1}-1\right)\\[2ex] \Lambda_2=-2+2\left(\frac{\tau_1}{\kappa_1}\right)-4\left(\frac{\tau_1}{\kappa_1}\right)^2+2\left(\frac{\tau_1}{\kappa_1}\right)^3-2\left(\frac{\tau_1}{\kappa_1}\right)^4-\left(\frac{\tau_1}{\kappa_1}\right)'\left(1+\frac{\tau_1}{\kappa_1}\right)\\[2ex] \Lambda_3=2\left(\frac{\tau_1}{\kappa_1}\right)-4\left(\frac{\tau_1}{\kappa_1}\right)^2+4\left(\frac{\tau_1}{\kappa_1}\right)^3-2\left(\frac{\tau_1}{\kappa_1}\right)^4+\left(\frac{\tau_1}{\kappa_1}\right)'\left(2-\frac{\tau_1}{\kappa_1}\right)\end{cases} \tag{4.2.40}$$

şeklinde birer katsayıdır.

İspat.

$$\gamma_4(s)=\frac{1}{\sqrt{3}}(T_1+T_{T_1}+T_1\wedge T_{T_1})$$

eğrisinin s_{γ_4} yay parametresine göre türevi alınırsa

$$T_{\gamma_4}\frac{ds_{\gamma_4}}{ds}=\frac{1}{\sqrt{3}}\Big(-T_1+\big(1-\frac{\tau_1}{\kappa_1}\big)T_{T_1}+\frac{\tau_1}{\kappa_1}T_1\wedge T_{T_1}\Big)$$

olur. Bu eşitliğin normu alınırsa $\frac{ds_{\gamma_4}}{ds}$ ifadesi

$$\frac{ds_{\gamma_4}}{ds}=\sqrt{\frac{2}{3}\Big(1-\frac{\tau_1}{\kappa_1}+\big(\frac{\tau_1}{\kappa_1}\big)^2\Big)}$$

bulunur. Bu ifade yukarıda yerine yazılırsa $T_{\gamma_4}(s)$ teğet vektörü

$$T_{\gamma_4}(s)=\frac{1}{\sqrt{2\Big(1-\frac{\tau_1}{\kappa_1}+\big(\frac{\tau_1}{\kappa_1}\big)^2\Big)}}\Big(-T_1+\big(1-\frac{\tau_1}{\kappa_1}\big)T_{T_1}+\frac{\tau_1}{\kappa_1}T_1\wedge T_{T_1}\Big) \tag{4.2.41}$$

biçiminde olur. (4.2.38) ve (4.2.41) ifadelerinden elde edilen $\gamma_4\wedge T_{\gamma_4}$ vektörü

$$\gamma_4\wedge T_{\gamma_4}(s)=\frac{1}{\sqrt{6}\sqrt{1-\frac{\tau_1}{\kappa_1}+\big(\frac{\tau_1}{\kappa_1}\big)^2}}\Big((2\frac{\tau_1}{\kappa_1}-1)T_1-(1+\frac{\tau_1}{\kappa_1})T_{T_1}+(2-\frac{\tau_1}{\kappa_1})T_1\wedge T_{T_1}\Big) \tag{4.2.42}$$

şeklinde bulunur. (4.2.38), (4.2.41) ve (4.2.42) vektörlerinde (4.2.1) den karşılıkları yazılırsa γ_4-Smarandache eğrisine ait Sabban çatısının Bertrand partner eğrisine bağlı ifadesi

$$\begin{aligned}
\gamma_4(s) &= \frac{1}{\sqrt{3}}(T_1+N_1+B_1),\\
T_{\gamma_4}(s) &= \frac{1}{\sqrt{2\Big(1-\frac{\tau_1}{\kappa_1}+\big(\frac{\tau_1}{\kappa_1}\big)^2\Big)}}\Big(-T_1+\big(1-\frac{\tau_1}{\kappa_1}\big)N_1+\frac{\tau_1}{\kappa_1}B_1\Big), \qquad (4.2.43)\\
\gamma_4\wedge T_{\gamma_4}(s) &= \frac{1}{\sqrt{6}\sqrt{1-\frac{\tau_1}{\kappa_1}+\big(\frac{\tau_1}{\kappa_1}\big)^2}}\Big((2\frac{\tau_1}{\kappa_1}-1)T_1-(1+\frac{\tau_1}{\kappa_1})N_1+(2-\frac{\tau_1}{\kappa_1})B_1\Big)
\end{aligned}$$

denklemlerine dönüşür. (4.2.41) ifadesinin türevi alınırsa katsayılar,

$$\begin{cases}
\Lambda_1=-2+4\big(\frac{\tau_1}{\kappa_1}\big)-\big(\frac{\tau_1}{\kappa_1}\big)^2+2\big(\frac{\tau_1}{\kappa_1}\big)^3+\big(\frac{\tau_1}{\kappa_1}\big)'\big(2\frac{\tau_1}{\kappa_1}-1\big)\\[2ex]
\Lambda_2=-2+2\big(\frac{\tau_1}{\kappa_1}\big)-4\big(\frac{\tau_1}{\kappa_1}\big)^2+2\big(\frac{\tau_1}{\kappa_1}\big)^3-2\big(\frac{\tau_1}{\kappa_1}\big)^4-\big(\frac{\tau_1}{\kappa_1}\big)'\big(1+\frac{\tau_1}{\kappa_1}\big)\\[2ex]
\Lambda_3=2\big(\frac{\tau_1}{\kappa_1}\big)-4\big(\frac{\tau_1}{\kappa_1}\big)^2+4\big(\frac{\tau_1}{\kappa_1}\big)^3-2\big(\frac{\tau_1}{\kappa_1}\big)^4+\big(\frac{\tau_1}{\kappa_1}\big)'\big(2-\frac{\tau_1}{\kappa_1}\big)
\end{cases}$$

olmak üzere $T'_{\gamma_4}(s)$ türev vektörü

$$T'_{\gamma_4}=\frac{\sqrt{3}}{4\Big(1-\frac{\tau_1}{\kappa_1}+\big(\frac{\tau_1}{\kappa_1}\big)^2\Big)^2}\Big(\Lambda_1T_1+\Lambda_2T_{T_1}+\Lambda_3T_1\wedge T_{T_1}\Big) \tag{4.2.44}$$

şeklinde elde edilir. Bu ifadeye (4.2.1) den karşılıkları yazılırsa $T'_{\gamma_4}(s)$ türev vektörünün Bertrand partner eğrisi cinsinden

$$T'_{\gamma_4} = \frac{\sqrt{3}}{4\left(1-\frac{\tau_1}{\kappa_1}+\left(\frac{\tau_1}{\kappa_1}\right)^2\right)^2}(\Lambda_1 T_1 + \Lambda_2 N_1 + \Lambda_3 B_1)$$

ifadesine dönüşür. Geodezik eğrilik tanımından $\kappa_g^{\gamma_4}$ geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\gamma_4} = \frac{1}{4\sqrt{2}\left(1+\frac{\tau_1}{\kappa_1}+\left(\frac{\tau_1}{\kappa_1}\right)^2\right)^{\frac{5}{2}}}\left((2\frac{\tau_1}{\kappa_1}-1)\Lambda_1 - \left(1+\frac{\tau_1}{\kappa_1}\right)\Lambda_2 + \left(2-\frac{\tau_1}{\kappa_1}\right)\Lambda_3\right)$$

biçiminde olur.

Teorem 4.2.8 α eğrisinin Bertrand partner eğrisi α_1 olsun. α_1 eğrisinin teğetler göstergesine ait $T_1T_{T_1}(T_1 \wedge T_{T_1})$- Smarandache eğrisinin geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\gamma_4} = \frac{(2\tan(\varphi-\theta)-1)\overline{\Lambda}_1 - (1+\tan(\varphi-\theta))\overline{\Lambda}_2 + (2-\tan(\varphi-\theta))\overline{\Lambda}_3}{4\sqrt{2}\left(1-\tan(\varphi-\theta)+\tan^2(\varphi-\theta)\right)^{\frac{5}{2}}} \tag{4.2.45}$$

denklemiyle verilir. Burada

$$\begin{cases} \overline{\Lambda}_1 = -2+4\tan(\varphi-\theta)-4\tan^2(\varphi-\theta)+2\tan^3(\varphi-\theta) \\ \qquad +\tan'(\varphi-\theta)(1-2\tan(\varphi-\theta)) \\ \overline{\Lambda}_2 = -2+2\tan(\varphi-\theta)-4\tan^2(\varphi-\theta)+2\tan^3(\varphi-\theta)-2\tan^4(\varphi-\theta) \\ \qquad -\tan'(\varphi-\theta)(1+\tan(\varphi-\theta)) \\ \overline{\Lambda}_3 = 2\tan(\varphi-\theta)-4\tan^2(\varphi-\theta)+4\tan^3(\varphi-\theta)-2\tan^4(\varphi-\theta) \\ \qquad +\tan'(\varphi-\theta)(2-\tan(\varphi-\theta)) \end{cases} \tag{4.2.46}$$

şeklinde birer katsayıdır.

İspat.

$$\gamma_4(s) = \frac{1}{\sqrt{3}}(T_1 + T_{T_1} + T_1 \wedge T_{T_1})$$

eşitliğinde sırasıyla (4.2.1), (3.3.2) ve (3.3.4) den karşılıkları yazılırsa γ_4 vektörünün Bertrand eğrisine bağlı ifadesi

$$\gamma_4(s) = \frac{1}{\sqrt{3}}\left((\sin\theta+\cos\theta)T + N + (\cos\theta-\sin\theta)B\right) \tag{4.2.47}$$

biçiminde olur. Bu ifadenin türevi alınırsa $T_{\gamma_4}(s)$ teğet vektörü

$$\begin{aligned} T_{\gamma_4} &= \frac{\tan(\varphi-\theta)\sin\theta-\cos\theta}{\sqrt{2(1-\tan(\varphi-\theta)+\tan^2(\varphi-\theta))}}T + \frac{1}{\sqrt{2(1-\tan(\varphi-\theta)+\tan^2(\varphi-\theta))}}N \\ &\quad + \frac{\tan(\varphi-\theta)\cos\theta+\sin\theta}{\sqrt{2(1-\tan(\varphi-\theta)+\tan^2(\varphi-\theta))}}B \end{aligned} \tag{4.2.48}$$

şeklinde bulunur. Bu ifadenin de türevi alınırsa katsayılar

$$\begin{cases} \overline{\Lambda}_1 = -2+4\tan(\varphi-\theta)-4\tan^2(\varphi-\theta)+2\tan^3(\varphi-\theta) \\ \quad +\tan'(\varphi-\theta)(1-2\tan(\varphi-\theta)) \\ \overline{\Lambda}_2 = -2+2\tan(\varphi-\theta)-4\tan^2(\varphi-\theta)+2\tan^3(\varphi-\theta)-2\tan^4(\varphi-\theta) \\ \quad -\tan'(\varphi-\theta)(1+\tan(\varphi-\theta)) \\ \overline{\Lambda}_3 = 2\tan(\varphi-\theta)-4\tan^2(\varphi-\theta)+4\tan^3(\varphi-\theta)-2\tan^4(\varphi-\theta) \\ \quad +\tan'(\varphi-\theta)(2-\tan(\varphi-\theta)) \end{cases}$$

olmak üzere $T'_{\gamma_4}(s)$ türev vektörü

$$\begin{aligned} T'_{\gamma_4} &= \frac{(\overline{\Lambda}_3\sin\theta+\overline{\Lambda}_1\cos\theta)\sqrt{3}}{4(1-\tan(\varphi-\theta)+\tan^2(\varphi-\theta))^2}T+\frac{\overline{\Lambda}_2\sqrt{3}}{(4(1-\tan(\varphi-\theta)+\tan^2(\varphi-\theta))^2}N \\ &\quad +\frac{(\overline{\Lambda}_3\cos\theta-\overline{\Lambda}_1\sin\theta)\sqrt{3}}{4(1-\tan(\varphi-\theta)+\tan^2(\varphi-\theta))^2}B \end{aligned}$$

biçiminde olur. (4.2.47) ve (4.2.48) ifadelerinden elde edilen $\gamma_4\wedge T_{\gamma_4}$ vektörü

$$\begin{aligned} \gamma_4\wedge T_{\gamma_4} &= \frac{(2\tan(\varphi-\theta)-1)\cos\theta+(2-\tan(\varphi-\theta))\sin\theta}{\sqrt{6-6\tan(\varphi-\theta)+6\tan^2(\varphi-\theta)}}T \\ &\quad -\frac{1+\tan(\varphi-\theta)}{\sqrt{6-6\tan(\varphi-\theta)+6\tan^2(\varphi-\theta)}}N \\ &\quad +\frac{(2-\tan(\varphi-\theta))\cos\theta-(2\tan(\varphi-\theta)-1)\sin\theta}{\sqrt{6-6\tan(\varphi-\theta)+6\tan^2(\varphi-\theta)}}B, \end{aligned}$$

şeklinde yazılır. Geodezik eğrilik tanımından $\kappa_g^{\gamma_4}$ geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\gamma_4} = \frac{(2\tan(\varphi-\theta)-1)\overline{\Lambda}_1-(1+\tan(\varphi-\theta))\overline{\Lambda}_2+(2-\tan(\varphi-\theta))\overline{\Lambda}_3}{4\sqrt{2}\Big(1-\tan(\varphi-\theta)+\tan^2(\varphi-\theta)\Big)^{\frac{5}{2}}}$$

şeklinde elde edilir.

Tanım 4.2.5 $\alpha_1 : I\to S^2$ Bertrand partner eğrisinin aslinormaller göstergesine ait Sabban çatısı $\{N_1, T_{N_1}, N_1\wedge T_{N_1}\}$ olsun.

$$\gamma_{\varsigma_1}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(N_1+T_{N_1}) \tag{4.2.49}$$

şeklinde tanımlı vektörün çizdiği regüler eğriye $N_1T_{N_1}$-Smarandache eğrisi denir.

Teorem 4.2.9 $N_1 T_{N_1}$-Smarandache eğrisinin geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\gamma_{\varsigma_1}} = \frac{1}{\left(2+\left(\frac{\varphi_1{}'}{\|W_1\|}\right)^2\right)^{\frac{5}{2}}}\left(\frac{\varphi_1{}'}{\|W_1\|}\varpi_1 - \frac{\varphi_1{}'}{\|W_1\|}\varpi_2 + 2\varpi_3\right) \tag{4.2.50}$$

denklemiyle verilir. Burada

$$\begin{cases} \varpi_1 = -2 - \left(\frac{\varphi_1{}'}{\|W_1\|}\right)^2 + \left(\frac{\varphi_1{}'}{\|W_1\|}\right)'\left(\frac{\varphi_1{}'}{\|W_1\|}\right) \\ \varpi_2 = -2 - 3\left(\frac{\varphi_1{}'}{\|W_1\|}\right)^2 - \left(\frac{\varphi_1{}'}{\|W_1\|}\right)^4 - \left(\frac{\varphi_1{}'}{\|W_1\|}\right)'\left(\frac{\varphi_1{}'}{\|W_1\|}\right) \\ \varpi_3 = 2\left(\frac{\varphi_1{}'}{\|W_1\|}\right) + \left(\frac{\varphi_1{}'}{\|W_1\|}\right)^3 + \left(\frac{\varphi_1{}'}{\|W_1\|}\right)' \end{cases} \tag{4.2.51}$$

şeklinde birer katsayıdır.

İspat.

$$\gamma_{\varsigma_1}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(N_1 + T_{N_1})$$

eğrisinin $s_{\gamma_{\varsigma_1}}$ yay parametresine göre türevi alınırsa

$$T_{\gamma_{\varsigma_1}} \frac{ds_{\gamma_{\varsigma_1}}}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-N_1 + T_{N_1} + \frac{\varphi_1{}'}{\|W_1\|} N_1 \wedge T_{N_1}\right)$$

olur. Bu eşitliğin normu alınırsa $\frac{ds_{\gamma_{\varsigma_1}}}{ds}$ ifadesi

$$\frac{ds_{\gamma_{\varsigma_1}}}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2+\left(\frac{\varphi_1{}'}{\|W_1\|}\right)^2}$$

bulunur. Bu ifade yukarıda yerine yazılırsa $T_{\gamma_{\varsigma_1}}(s)$ teğet vektörü

$$T_{\gamma_{\varsigma_1}}(s) = \frac{1}{\sqrt{2+\left(\frac{\varphi_1{}'}{\|W_1\|}\right)^2}}\left(-N_1 + T_{N_1} + \frac{\varphi_1{}'}{\|W_1\|} N_1 \wedge T_{N_1}\right) \tag{4.2.52}$$

eşitliğiyle elde edilir. Tekrar türev alınırsa katsayılar

$$\begin{cases} \varpi_1 = -2 - \left(\frac{\varphi_1{}'}{\|W_1\|}\right)^2 + \left(\frac{\varphi_1{}'}{\|W_1\|}\right)'\left(\frac{\varphi_1{}'}{\|W_1\|}\right) \\ \varpi_2 = -2 - 3\left(\frac{\varphi_1{}'}{\|W_1\|}\right)^2 - \left(\frac{\varphi_1{}'}{\|W_1\|}\right)^4 - \left(\frac{\varphi_1{}'}{\|W_1\|}\right)'\left(\frac{\varphi_1{}'}{\|W_1\|}\right) \\ \varpi_3 = 2\left(\frac{\varphi_1{}'}{\|W_1\|}\right) + \left(\frac{\varphi_1{}'}{\|W_1\|}\right)^3 + \left(\frac{\varphi_1{}'}{\|W_1\|}\right)' \end{cases}$$

olmak üzere $T'_{\gamma_{\varsigma_1}}(s)$ türev vektörü

$$T'_{\gamma_{\varsigma_1}} = \frac{\sqrt{2}}{\left(2+\left(\frac{\varphi_1{}'}{\|W_1\|}\right)^2\right)^2}\left(\varpi_1 N_1 + \varpi_2 T_{N_1} + \varpi_3 N_1 \wedge T_{N_1}\right) \tag{4.2.53}$$

biçiminde olur. (4.2.49) ve (4.2.52) ifadelerinden elde edilen $\gamma_{\varsigma_1} \wedge T_{\gamma_{\varsigma_1}}$ vektörü

$$\gamma_{\varsigma_1} \wedge T_{\gamma_{\varsigma_1}}(s) = \frac{1}{\sqrt{4+2(\frac{\varphi_1{}'}{\|W_1\|})^2}}(\frac{\varphi_1{}'}{\|W_1\|}N_1 - \frac{\varphi_1{}'}{\|W_1\|}T_{N_1} + 2N_1 \wedge T_{N_1}) \tag{4.2.54}$$

şeklinde yazılır. (4.2.49), (4.2.52), (4.2.53) ve (4.2.54) vektörlerinde (4.2.2) den karşılıkları yazılırsa γ_{ς_1}-Smarandache eğrisine ait Sabban çatısının ve $T'_{\gamma_{\varsigma_1}}$ türev vektörünün Bertrand partner eğrisine bağlı ifadesi,

$$\begin{aligned}
\gamma_{\varsigma_1}(s) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(-\cos\varphi_1 T_1 + N_1 + \sin\varphi_1 B_1), \\
T_{\gamma_{\varsigma_1}}(s) &= \frac{\varphi_1{}'\sin\varphi_1 - \|W_1\|\cos\varphi_1}{\sqrt{2\|W_1\|^2+\varphi_1{}'^2}}T_1 + \frac{\|W_1\|}{\sqrt{2\|W_1\|^2+\varphi_1{}'^2}}N_1 \\
&\quad + \frac{\varphi_1{}'\cos\varphi_1 + \|W_1\|\sin\varphi_1}{\sqrt{2\|W_1\|^2+\varphi_1{}'^2}}B_1, \\
\gamma_{\varsigma_1} \wedge T_{\gamma_{\varsigma_1}}(s) &= \frac{\varphi_1{}'\cos\varphi_1 + 2\|W_1\|\sin\varphi_1}{\sqrt{4\|W_1\|^2+2\varphi_1{}'^2}}T_1 - \frac{\varphi_1{}'}{\sqrt{4\|W_1\|^2+2\varphi_1{}'^2}}N_1 \\
&\quad + \frac{2\|W_1\|\cos\varphi_1 - \varphi_1{}'\sin\varphi_1}{\sqrt{4\|W_1\|^2+2\varphi_1{}'^2}}B_1, \\
T'_{\gamma_{\varsigma_1}}(s) &= \frac{\|W_1\|^4\sqrt{2}(\varpi_3\sin\varphi_1 - \varpi_2\cos\varphi_1)}{\left(2\|W_1\|^2+\varphi_1{}'^2\right)^2}T_1 + \frac{\varpi_1\|W_1\|^4\sqrt{2}}{\left(2\|W_1\|^2+\varphi_1{}'^2\right)^2}N_1 \\
&\quad + \frac{\|W_1\|^4\sqrt{2}(\varpi_2\sin\varphi_1 + \cos\varphi_1\varpi_3)}{\left(2\|W_1\|^2+\varphi_1{}'^2\right)^2}B_1
\end{aligned}$$

denklemlerine dönüşür. Geodezik eğrilik tanımından $\kappa_g^{\gamma_{\varsigma_1}}$ geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\gamma_{\varsigma_1}} = \frac{1}{\left(2+\left(\frac{\varphi_1{}'}{\|W_1\|}\right)^2\right)^{\frac{5}{2}}}\left(\frac{\varphi_1{}'}{\|W_1\|}\varpi_1 - \frac{\varphi_1{}'}{\|W_1\|}\varpi_2 + 2\varpi_3\right)$$

biçiminde olur.

Teorem 4.2.10 α eğrisinin Bertrand partner eğrisi α_1 olsun. α_1 eğrisinin aslinormaller göstergesine ait $N_1T_{N_1}$- Smarandache eğrisinin geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\gamma_{\varsigma_1}} = \frac{1}{\left(2+(\frac{\varphi'}{\|W\|})^2\right)^{\frac{5}{2}}}\left((\frac{\varphi'}{\|W\|})\overline{\varpi}_1 - (\frac{\varphi'}{\|W\|})\overline{\varpi}_2 + 2\overline{\varpi}_3\right) \tag{4.2.55}$$

denklemiyle verilir.

$$\begin{cases}\overline{\varpi}_1=-2-(\frac{\varphi'}{\|W\|})^2+(\frac{\varphi'}{\|W\|})'(\frac{\varphi'}{\|W\|})\\ \overline{\varpi}_2=-2-(\frac{\varphi'}{\|W\|})^2-(\frac{\varphi'}{\|W\|})^4-(\frac{\varphi'}{\|W\|})'(\frac{\varphi'}{\|W\|})\\ \overline{\varpi}_3=2(\frac{\varphi'}{\|W\|})+(\frac{\varphi'}{\|W\|})^3+(\frac{\varphi'}{\|W\|})'\end{cases}\tag{4.2.56}$$

şeklinde birer katsayıdır.

İspat.

$$\gamma_{\varsigma_1}(s)=\frac{1}{\sqrt{2}}(N_1+T_{N_1})$$

eşitliğinde sırasıyla (4.2.2), (3.3.2) ve (3.3.4) den karşılıkları yazılırsa γ_{ς_1} vektörünün Bertrand eğrisine bağlı ifadesi

$$\gamma_{\varsigma_1}(s)=\frac{1}{\sqrt{2}}\big(-\cos\varphi\, T+N+\sin\varphi\, B\big)\tag{4.2.57}$$

biçiminde olur. Bu ifadenin türevi alınırsa $T_{\gamma_{\varsigma_1}}$ teğet vektörü

$$T_{\gamma_{\varsigma_1}}(s)=\frac{\varphi'\sin\varphi-\|W\|\cos\varphi}{\sqrt{2\|W\|^2+\varphi'^2}}T-\frac{\|W\|}{\sqrt{2\|W\|^2+\varphi'^2}}N+\frac{\varphi'\cos\varphi+\|W\|\sin\varphi}{\sqrt{2\|W\|^2+\varphi'^2}}B\tag{4.2.58}$$

şeklinde bulunur. (4.2.57) ve (4.2.58) ifadelerinden elde edilen $\gamma_{\varsigma_1}\wedge T_{\gamma_{\varsigma_1}}$ vektörü

$$\gamma_{\varsigma_1}\wedge T_{\gamma_{\varsigma_1}}(s)=\frac{\varphi'\cos\varphi+2\|W\|\sin\varphi}{\sqrt{4\|W\|^2+2\varphi'^2}}T-\frac{\varphi'}{\sqrt{4\|W\|^2+2\varphi'^2}}N+\frac{2\|W\|\cos\varphi-\varphi'\sin\varphi}{\sqrt{4\|W\|^2+2\varphi'^2}}B$$

biçiminde yazılır. (4.2.58) ifadesinin türevi alınırsa katsayılar

$$\begin{cases}\overline{\varpi}_1=-2-(\frac{\varphi'}{\|W\|})^2+(\frac{\varphi'}{\|W\|})'(\frac{\varphi'}{\|W\|})\\ \overline{\varpi}_2=-2-(\frac{\varphi'}{\|W\|})^2-(\frac{\varphi'}{\|W\|})^4-(\frac{\varphi'}{\|W\|})'(\frac{\varphi'}{\|W\|})\\ \overline{\varpi}_3=2(\frac{\varphi'}{\|W\|})+(\frac{\varphi'}{\|W\|})^3+(\frac{\varphi'}{\|W\|})'\end{cases}$$

olmak üzere $T'_{\gamma_{\varsigma_1}}(s)$ türev vektörü

$$\begin{aligned}T'_{\gamma_{\varsigma_1}}(s) &= \frac{\|W\|^4\sqrt{2}(\overline{\varpi}_3\sin\varphi-\overline{\varpi}_2\cos\varphi)}{\big(2\|W\|^2+\varphi'^2\big)^2}T+\frac{\overline{\varpi}_1\|W\|^4\sqrt{2}}{\big(2\|W\|^2+\varphi'^2\big)^2}N\\ &\quad+\frac{\|W\|^4\sqrt{2}(\overline{\varpi}_2\sin\varphi+\overline{\varpi}_3\cos\varphi)}{\big(2\|W\|^2+\varphi'^2\big)^2}B\end{aligned}$$

şeklindedir. Geodezik eğrilik tanımından $\kappa_g^{\gamma_{\varsigma_1}}$ geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\gamma_{\varsigma_1}}=\frac{1}{\big(2+(\frac{\varphi'}{\|W\|})^2\big)^{\frac{5}{2}}}\Big((\frac{\varphi'}{\|W\|})\overline{\varpi}_1-(\frac{\varphi'}{\|W\|})\overline{\varpi}_2+2\overline{\varpi}_3\Big)$$

biçiminde elde edilir.

Tanım 4.2.6 $\alpha_1 : I \to S^2$ Bertrand partner eğrisinin aslinormaller göstergesine ait Sabban çatısı $\{N_1, T_{N_1}, N_1 \wedge T_{N_1}\}$ olsun.

$$\gamma_{\varsigma_2}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(N_1 + N_1 \wedge T_{N_1}) \tag{4.2.59}$$

şeklinde tanımlı vektörün çizdiği regüler eğriye $N_1(N_1 \wedge T_{N_1})$-Smarandache eğrisi denir.

Teorem 4.2.11 $N_1(N_1 \wedge T_{N_1})$-Smarandache eğrisinin geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\gamma_{\varsigma_2}} = \frac{\|W_1\| + \varphi_1{}'}{\|W_1\| - \varphi_1{}'} \tag{4.2.60}$$

denklemiyle verilir.

İspat.

$$\gamma_{\varsigma_2}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(N_1 + N_1 \wedge T_{N_1})$$

eğrisinin $s_{\gamma_{\varsigma_2}}$ yay parametresine göre türevi alınırsa

$$T_{\gamma_{\varsigma_2}} \frac{ds_{\gamma_{\varsigma_2}}}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 - \frac{\varphi_1{}'}{\|W_1\|}\right) T_{N_1}$$

olur. Bu eşitliğin normu alınırsa $\frac{ds_{\gamma_{\varsigma_2}}}{ds}$ ifadesi

$$\frac{ds_{\gamma_{\varsigma_2}}}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 - \frac{\varphi_1{}'}{\|W_1\|}\right)$$

bulunur. Bu ifade yukarıda yerine yazılırsa $T_{\gamma_{\varsigma_2}}(s)$ teğet vektörü

$$T_{\gamma_{\varsigma_2}}(s) = T_{N_1} \tag{4.2.61}$$

biçiminde olur. Bu ifadenin tekrar türevi alınırsa $T'_{\gamma_{\varsigma_2}}(s)$ türev vektörü

$$T'_{\gamma_{\varsigma_2}} = \frac{\sqrt{2}}{\left(1 - \frac{\varphi_1{}'}{\|W_1\|}\right)}\left(- N_1 + \frac{\varphi_1{}'}{\|W_1\|} N_1 \wedge T_{N_1}\right) \tag{4.2.62}$$

şeklindedir. (4.2.59) ve (4.2.61) ifadelerinden elde edilen $\gamma_{\varsigma_2} \wedge T_{\gamma_{\varsigma_2}}$ vektörü

$$\gamma_{\varsigma_2} \wedge T_{\gamma_{\varsigma_2}}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-N_1 + N_1 \wedge T_{N_1}) \tag{4.2.63}$$

şeklinde yazılır. (4.2.59), (4.2.61), (4.2.62) ve (4.2.63) vektörlerinde (4.2.2) den karşılıkları yazılırsa γ_{ς_2}-Smarandache eğrisine ait Sabban çatısının ve $T'_{\gamma_{\varsigma_2}}$ türev vektörünün Bertrand partner eğrisine bağlı ifadesi,

$$\begin{aligned} \gamma_{\varsigma_2}(s) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin\varphi_1 T_1 + N_1 + \cos\varphi_1 B_1), \\ T_{\gamma_{\varsigma_2}}(s) &= -\cos\varphi_1 T_1 + \sin\varphi_1 B_1, \\ \gamma_{\varsigma_2} \wedge T_{\gamma_{\varsigma_2}}(s) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin\varphi_1 T_1 - N_1 + \cos\varphi_1 B_1), \\ T'_{\gamma_{\varsigma_2}}(s) &= \frac{\varphi_1{}' \sin\varphi_1 \sqrt{2}}{\|W_1\| - \varphi_1{}'} T_1 - \frac{\|W_1\|\sqrt{2}}{\|W_1\| - \varphi_1{}'} N_1 + \frac{\varphi_1{}' \cos\varphi_1 \sqrt{2}}{\|W_1\| - \varphi_1{}'} B_1 \end{aligned}$$

denklemlerine dönüşür. Geodezik eğrilik tanımından $\kappa_g^{\gamma_{\varsigma_2}}$ geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\gamma_{\varsigma_2}} = \frac{\|W_1\| + \varphi_1{}'}{\|W_1\| - \varphi_1{}'}$$

biçiminde olur.

Teorem 4.2.12 α eğrisinin Bertrand partner eğrisi α_1 olsun. α_1 eğrisinin aslinormaller göstergesine ait $N_1(N_1 \wedge T_{N_1})$- Smarandache eğrisinin geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\gamma_{\varsigma_2}} = \frac{\|W\| + \varphi'}{\|W\| - \varphi'} \qquad (4.2.64)$$

denklemiyle verilir.

İspat.

$$\gamma_{\varsigma_2}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(N_1 + N_1 \wedge T_{N_1})$$

eşitliğinde sırasıyla (4.2.2), (3.3.2) ve (3.3.4) den karşılıkları yazılırsa γ_{ς_2} vektörünün Bertrand eğrisine bağlı ifadesi

$$\gamma_{\varsigma_2}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\sin\varphi T + N + \cos\varphi B\big) \qquad (4.2.65)$$

şeklinde bulunur. Bu ifadenin türevi alınırsa $T_{\gamma_{\varsigma_2}}$ teğet vektörü

$$T_{\gamma_{\varsigma_2}}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\sin\varphi T + N + \cos\varphi B\big) \qquad (4.2.66)$$

biçiminde olur. (4.2.65) ve (4.2.66) ifadelerinden elde edilen $\gamma_{\varsigma_2} \wedge T_{\gamma_{\varsigma_2}}$ vektörü

$$\gamma_{\varsigma_2} \wedge T_{\gamma_{\varsigma_2}}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin\varphi T - N + \cos\varphi B)$$

eşitliğiyle yazılır. (4.2.66) ifadesinin türevi alınırsa $T'_{\gamma_{\varsigma_2}}$ türev vektörü

$$T'_{\gamma_{\varsigma_2}}(s)=\frac{\varphi'\sin\varphi\sqrt{2}}{\|W\|-\varphi'}T-\frac{\|W\|\sqrt{2}}{\|W\|-\varphi'}N+\frac{\varphi'\cos\varphi\sqrt{2}}{\|W\|-\varphi'}B$$

şeklinde elde edilir. Geodezik eğrilik tanımından $\kappa_g^{\gamma_{\varsigma_2}}$ geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\gamma_{\varsigma_2}}=\frac{\|W\|+\varphi'}{\|W\|-\varphi'}$$

biçiminde olur.

Tanım 4.2.7 $\alpha_1 : I \to S^2$ Bertrand partner eğrisinin aslinormaller göstergesine ait Sabban çatısı $\{N_1, T_{N_1}, N_1 \wedge T_{N_1}\}$ olsun.

$$\gamma_{\varsigma_3}(s)=\frac{1}{\sqrt{2}}(T_{N_1}+N_1\wedge T_{N_1}) \tag{4.2.67}$$

şeklinde tanımlı vektörün çizdiği regüler eğriye $T_{N_1}(N_1 \wedge T_{N_1})$-Smarandache eğrisi denir.

Teorem 4.2.13 $T_{N_1}(N_1 \wedge T_{N_1})$-Smarandache eğrisinin geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\gamma_{\varsigma_3}}=\frac{1}{\left(2+\left(\frac{\varphi_1'}{\|W_1\|}\right)^2\right)^{\frac{5}{2}}}\left(2\frac{\varphi_1'}{\|W_1\|}\Delta_1-\Delta_2+\Delta_3\right) \tag{4.2.68}$$

denklemiyle verilir. Burada

$$\begin{cases}\Delta_1=\frac{\varphi_1'}{\|W_1\|}+2\left(\frac{\varphi_1'}{\|W_1\|}\right)^3+2\left(\frac{\varphi_1'}{\|W_1\|}\right)'\left(\frac{\varphi_1'}{\|W_1\|}\right)\\ \Delta_2=-1-3\left(\frac{\varphi_1'}{\|W_1\|}\right)^2-2\left(\frac{\varphi_1'}{\|W_1\|}\right)^4-\left(\frac{\varphi_1'}{\|W_1\|}\right)'\\ \Delta_3=-\left(\frac{\varphi_1'}{\|W_1\|}\right)^2-2\left(\frac{\varphi_1'}{\|W_1\|}\right)^4+\left(\frac{\varphi_1'}{\|W_1\|}\right)'\end{cases} \tag{4.2.69}$$

şeklinde birer katsayıdır.

İspat.

$$\gamma_{\varsigma_3}(s)=\frac{1}{\sqrt{2}}(T_{N_1}+N_1\wedge T_{N_1})$$

eğrisinin $s_{\gamma_{\varsigma_3}}$ yay parametresine göre türevi alınırsa

$$T_{\gamma_{\varsigma_3}}\frac{ds_{\gamma_{\varsigma_3}}}{ds}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-N_1-\frac{\varphi_1'}{\|W_1\|}T_{N_1}+\frac{\varphi_1'}{\|W_1\|}N_1\wedge T_{N_1}\right)$$

olur. Bu eşitliğin normu alınırsa $\frac{ds_{\gamma_{\varsigma_3}}}{ds}$ ifadesi

$$\frac{ds_{\gamma_{\varsigma_3}}}{ds}=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1+2\left(\frac{\varphi_1'}{\|W_1\|}\right)^2}$$

bulunur ve Bu ifade yukarıda yerine yazılırsa $T_{\gamma_{\varsigma_3}}(s)$ teğet vektörü

$$T_{\gamma_{\varsigma_3}}(s)=\frac{1}{\sqrt{1+2\left(\frac{\varphi_1'}{\|W_1\|}\right)^2}}\left(-N_1-\frac{\varphi_1'}{\|W_1\|}T_{N_1}+\frac{\varphi_1'}{\|W_1\|}N_1\wedge T_{N_1}\right) \tag{4.2.70}$$

biçiminde olur. Bu ifadenin türevi alınırsa katsayılar,

$$\begin{cases}\Delta_1=\frac{\varphi_1'}{\|W_1\|}+2\left(\frac{\varphi_1'}{\|W_1\|}\right)^3+2\left(\frac{\varphi_1'}{\|W_1\|}\right)'\left(\frac{\varphi_1'}{\|W_1\|}\right)\\ \Delta_2=-1-3\left(\frac{\varphi_1'}{\|W_1\|}\right)^2-2\left(\frac{\varphi_1'}{\|W_1\|}\right)^4-\left(\frac{\varphi_1'}{\|W_1\|}\right)'\\ \Delta_3=-\left(\frac{\varphi_1'}{\|W_1\|}\right)^2-2\left(\frac{\varphi_1'}{\|W_1\|}\right)^4+\left(\frac{\varphi_1'}{\|W_1\|}\right)'\end{cases}$$

olmak üzere $T'_{\gamma_{\varsigma_3}}(s)$ türev vektörü

$$T'_{\gamma_{\varsigma_3}}(s)=\frac{\sqrt{2}}{\left(1+2\left(\frac{\varphi_1'}{\|W_1\|}\right)^2\right)^2}\left(\Delta_1N_1+\Delta_2T_{N_1}+\Delta_3N_1\wedge T_{N_1}\right) \tag{4.2.71}$$

biçiminde olur. (4.2.67) ve (4.2.70) ifadelerinden elde edilen $\gamma_{\varsigma_3}\wedge T_{\gamma_{\varsigma_3}}$ vektörü

$$\gamma_{\varsigma_3}\wedge T_{\gamma_{\varsigma_3}}(s)=\frac{1}{\sqrt{2+4\left(\frac{\varphi_1'}{\|W_1\|}\right)^2}}\left(2\frac{\varphi_1'}{\|W_1\|}N_1-T_{N_1}+N_1\wedge T_{N_1}\right) \tag{4.2.72}$$

şeklinde yazılır. (4.2.67), (4.2.70), (4.2.71) ve (4.2.72) vektörlerinde (4.2.2) den karşılıkları yazılırsa γ_{ς_3}-Smarandache eğrisine ait Sabban çatısının ve $T'_{\gamma_{\varsigma_3}}$ türev vektörünün Bertrand partner eğrisine bağlı ifadesi,

$$\begin{aligned}
\gamma_{\varsigma_3}(s) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big((\sin\varphi_1-\cos\varphi_1)T_1+(\sin\varphi_1+\cos\varphi_1)B_1\Big),\\
T_{\gamma_{\varsigma_3}}(s) &= \frac{\varphi_1'(\sin\varphi_1+\cos\varphi_1)}{\sqrt{\|W_1\|^2+2\varphi_1'^2}}T_1-\frac{\|W_1\|}{\sqrt{\|W_1\|^2+2\varphi_1'^2}}N_1+\frac{\varphi_1'(\cos\varphi_1-\sin\varphi_1)}{\sqrt{\|W_1\|^2+2\varphi_1'^2}}B_1,\\
\gamma_{\varsigma_3}\wedge T_{\gamma_{\varsigma_3}}(s) &= \frac{\cos\varphi_1+\sin\varphi_1}{\sqrt{2\|W_1\|^2+4\varphi_1'^2}}T_1+\frac{2\varphi_1'}{\sqrt{2\|W_1\|^2+4\varphi_1'^2}}N_1+\frac{\cos\varphi_1-\sin\varphi_1}{\sqrt{2\|W_1\|^2+4\varphi_1'^2}}B_1,\\
T'_{\gamma_{\varsigma_3}}(s) &= \frac{\|W_1\|^4\sqrt{2}(\Delta_3\sin\varphi_1-\Delta_2\cos\varphi_1)}{\left(\|W_1\|^2+2\varphi_1'^2\right)^2}T_1+\frac{\Delta_1\|W_1\|^4\sqrt{2}}{\left(\|W_1\|^2+2\varphi_1'^2\right)^2}N_1\\
&\quad+\frac{\|W_1\|^4\sqrt{2}(\Delta_2\sin\varphi_1+\Delta_3\cos\varphi_1)}{\left(\|W_1\|^2+2\varphi_1'^2\right)^2}B_1
\end{aligned}$$

denklemlerine dönüşür. Geodezik eğrilik tanımından $\kappa_g^{\gamma_{\varsigma_3}}$ geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\gamma_{\varsigma_3}}=\frac{1}{\left(1+2\left(\frac{\varphi_1'}{\|W_1\|}\right)^2\right)^{\frac{5}{2}}}\left(2\frac{\varphi_1'}{\|W_1\|}\Delta_1-\Delta_2+\Delta_3\right)$$

biçiminde olur.

Teorem 4.2.14 α eğrisinin Bertrand partner eğrisi α_1 olsun. α_1 eğrisinin aslinormaller göstergesine ait $T_{N_1}(N_1 \wedge T_{N_1})$- Smarandache eğrisinin geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\gamma_{\varsigma_3}} = \frac{1}{(2+(\frac{\varphi'}{\|W\|})^2)^{\frac{5}{2}}}\big(2\frac{\varphi'}{\|W\|}\overline{\Delta}_1 - \overline{\Delta}_2 + \overline{\Delta}_3\big) \tag{4.2.73}$$

denklemiyle verilir. Burada

$$\begin{cases} \overline{\Delta}_1 = (\frac{\varphi'}{\|W\|}) + 2(\frac{\varphi'}{\|W\|})^3 + 2(\frac{\varphi'}{\|W\|})'(\frac{\varphi'}{\|W\|}) \\ \overline{\Delta}_2 = -1 - 3(\frac{\varphi'}{\|W\|})^2 - 2(\frac{\varphi'}{\|W\|})^4 - (\frac{\varphi'}{\|W\|})' \\ \overline{\Delta}_3 = -(\frac{\varphi'}{\|W\|})^2 - 2(\frac{\varphi'}{\|W\|})^4 + (\frac{\varphi'}{\|W\|})' \end{cases} \tag{4.2.74}$$

şeklinde birer katsayıdır.

İspat.

$$\gamma_{\varsigma_3}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(T_{N_1} + N_1 \wedge T_{N_1})$$

eşitliğinde sırasıyla (4.2.2), (3.3.2) ve (3.3.4) den karşılıkları yazılırsa γ_{ς_3} vektörünün Bertrand eğrisine bağlı ifadesi

$$\gamma_{\varsigma_3}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}\big((\sin\varphi - \cos\varphi)T + (\sin\varphi + \cos\varphi)B\big) \tag{4.2.75}$$

biçiminde olur. Bu ifadenin türevi alınırsa $T_{\gamma_{\varsigma_3}}(s)$ teğet vektörü

$$T_{\gamma_{\varsigma_3}}(s) = \frac{\varphi'(\sin\varphi + \cos\varphi)}{\sqrt{\|W\|^2 + 2\varphi'^2}}T - \frac{\|W\|}{\sqrt{\|W\|^2 + 2\varphi'^2}}N + \frac{\varphi'(\cos\varphi - \sin\varphi)}{\sqrt{\|W\|^2 + 2\varphi'^2}}B \tag{4.2.76}$$

şeklinde bulunur. Bu ifadenin tekrar türevi alınırsa katsayılar

$$\begin{cases} \overline{\Delta}_1 = (\frac{\varphi'}{\|W\|}) + 2(\frac{\varphi'}{\|W\|})^3 + 2(\frac{\varphi'}{\|W\|})'(\frac{\varphi'}{\|W\|}) \\ \overline{\Delta}_2 = -1 - 3(\frac{\varphi'}{\|W\|})^2 - 2(\frac{\varphi'}{\|W\|})^4 - (\frac{\varphi'}{\|W\|})' \\ \overline{\Delta}_3 = -(\frac{\varphi'}{\|W\|})^2 - 2(\frac{\varphi'}{\|W\|})^4 + (\frac{\varphi'}{\|W\|})' \end{cases}$$

olmak üzere $T'_{\gamma_{\varsigma_3}}(s)$ türev vektörü

$$\begin{aligned} T'_{\gamma_{\varsigma_3}}(s) &= \frac{\|W\|^4\sqrt{2}(\overline{\Delta}_3\sin\varphi - \overline{\Delta}_2\cos\varphi)}{\big(\|W\|^2 + 2\varphi'^2\big)^2}T + \frac{\overline{\Delta}_1\|W\|^4\sqrt{2}}{\big(\|W\|^2 + 2\varphi'^2\big)^2}N \\ &+ \frac{\|W\|^4\sqrt{2}(\overline{\Delta}_2\sin\varphi + \overline{\Delta}_3\cos\varphi)}{\big(\|W\|^2 + 2\varphi'^2\big)^2}B \end{aligned}$$

şeklinde bulunur. (4.2.75) ve (4.2.76) ifadelerinden elde edilen $\gamma_{\varsigma_3} \wedge T_{\gamma_{\varsigma_3}}$ vektörü

$$\gamma_{\varsigma_3} \wedge T_{\gamma_{\varsigma_3}}(s) = \frac{\cos\varphi + \sin\varphi}{\sqrt{2\|W\|^2 + 4\varphi'^2}}T + \frac{2\varphi'}{\sqrt{2\|W\|^2 + 4\varphi'^2}}N + \frac{\cos\varphi - \sin\varphi}{\sqrt{2\|W\|^2 + 4\varphi'^2}}B$$

şeklinde yazılır. Geodezik eğrilik tanımından $\kappa_g^{\gamma_{\varsigma_3}}$ geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\gamma_{\varsigma_3}} = \frac{1}{\left(2+(\frac{\varphi'}{\|W\|})^2\right)^{\frac{5}{2}}}\left(2\frac{\varphi'}{\|W\|}\overline{\Delta}_1 - \overline{\Delta}_2 + \overline{\Delta}_3\right).$$

biçiminde olur.

Tanım 4.2.8 $\alpha_1 : I \to S^2$ Bertrand partner eğrisinin aslinormaller göstergesine ait Sabban çatısı $\{N_1, T_{N_1}, N_1 \wedge T_{N_1}\}$ olsun.

$$\gamma_{\varsigma_4}(s) = \frac{1}{\sqrt{3}}(N_1 + T_{N_1} + N_1 \wedge T_{N_1}) \tag{4.2.77}$$

şeklinde tanımlı vektörün çizdiği regüler eğriye $N_1 T_{N_1}(N_1 \wedge T_{N_1})$-Smarandache eğrisi denir.

Teorem 4.2.15 $N_1 T_{N_1}(N_1 \wedge T_{N_1})$-Smarandache eğrisinin geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\gamma_{\varsigma_4}} = \frac{\left(2\frac{\varphi_1{}'}{\|W_1\|}-1\right)\upsilon_1 + \left(-1-\frac{\varphi_1{}'}{\|W_1\|}\right)\upsilon_2 + \left(2-\frac{\varphi_1{}'}{\|W_1\|}\right)\upsilon_3}{4\sqrt{2}\left(1-\frac{\varphi_1{}'}{\|W_1\|}+(\frac{\varphi_1{}'}{\|W_1\|})^2\right)^{\frac{5}{2}}} \tag{4.2.78}$$

denklemiyle verilir. Burada

$$\begin{cases} \upsilon_1 = -2+4\left(\frac{\varphi_1{}'}{\|W_1\|}\right)-\left(\frac{\varphi_1{}'}{\|W_1\|}\right)^2+2\left(\frac{\varphi_1{}'}{\|W_1\|}\right)^3+\left(\frac{\varphi_1{}'}{\|W_1\|}\right)'\left(2\frac{\varphi_1{}'}{\|W_1\|}-1\right) \\ \upsilon_2 = -2+2\left(\frac{\varphi_1{}'}{\|W_1\|}\right)-4\left(\frac{\varphi_1{}'}{\|W_1\|}\right)^2+2\left(\frac{\varphi_1{}'}{\|W_1\|}\right)^3-2\left(\frac{\varphi_1{}'}{\|W_1\|}\right)^4-\left(\frac{\varphi_1{}'}{\|W_1\|}\right)'\left(1+\frac{\varphi_1{}'}{\|W_1\|}\right) \\ \upsilon_3 = 2\left(\frac{\varphi_1{}'}{\|W_1\|}\right)-4\left(\frac{\varphi_1{}'}{\|W_1\|}\right)^2+4\left(\frac{\varphi_1{}'}{\|W_1\|}\right)^3-2\left(\frac{\varphi_1{}'}{\|W_1\|}\right)^4+\left(\frac{\varphi_1{}'}{\|W_1\|}\right)'\left(2-\frac{\varphi_1{}'}{\|W_1\|}\right) \end{cases} \tag{4.2.79}$$

şeklinde birer katsayıdır.

İspat.

$$\gamma_{\varsigma_4}(s) = \frac{1}{\sqrt{3}}(N_1 + T_{N_1} + N_1 \wedge T_{N_1})$$

eğrisinin $s_{\gamma_{\varsigma_4}}$ yay parametresine türevi alınırsa

$$T_{\gamma_{\varsigma_4}}\frac{ds_{\gamma_{\varsigma_4}}}{ds} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(-N_1 + \left(1-\frac{\varphi_1{}'}{\|W_1\|}\right)T_{N_1} + \frac{\varphi_1{}'}{\|W_1\|}N_1 \wedge T_{N_1}\right)$$

olur. Bu eşitliğin normu alınırsa $\frac{ds_{\gamma_{\varsigma_4}}}{ds}$ ifadesi

$$\frac{ds_{\gamma_{\varsigma_4}}}{ds} = \sqrt{\frac{2}{3}\left(1-\frac{\varphi_1{}'}{\|W_1\|}+(\frac{\varphi_1{}'}{\|W_1\|})^2\right)}$$

elde edilir. Bu ifade yukarıda yerine yazılırsa $T_{\gamma_{\varsigma_4}}(s)$ teğet vektörü

$$T_{\gamma_{\varsigma_4}}(s)=\frac{1}{\sqrt{2\Big(1-\frac{\varphi_1{}'}{\|W_1\|}+(\frac{\varphi_1{}'}{\|W_1\|})^2\Big)}}\Big(-N_1+(1-\frac{\varphi_1{}'}{\|W_1\|})T_{N_1}+\frac{\varphi_1{}'}{\|W_1\|}N_1\wedge T_{N_1}\Big) \tag{4.2.80}$$

biçiminde olur. Bu ifadenin tekrar türevi alınırsa katsayılar

$$\begin{cases} \upsilon_1=-2+4(\frac{\varphi_1{}'}{\|W_1\|})-(\frac{\varphi_1{}'}{\|W_1\|})^2+2(\frac{\varphi_1{}'}{\|W_1\|})^3+(\frac{\varphi_1{}'}{\|W_1\|})'(2\frac{\varphi_1{}'}{\|W_1\|}-1) \\ \upsilon_2=-2+2(\frac{\varphi_1{}'}{\|W_1\|})-4(\frac{\varphi_1{}'}{\|W_1\|})^2+2(\frac{\varphi_1{}'}{\|W_1\|})^3-2(\frac{\varphi_1{}'}{\|W_1\|})^4-(\frac{\varphi_1{}'}{\|W_1\|})'(1+\frac{\varphi_1{}'}{\|W_1\|}) \\ \upsilon_3=2(\frac{\varphi_1{}'}{\|W_1\|})-4(\frac{\varphi_1{}'}{\|W_1\|})^2+4(\frac{\varphi_1{}'}{\|W_1\|})^3-2(\frac{\varphi_1{}'}{\|W_1\|})^4+(\frac{\varphi_1{}'}{\|W_1\|})'(2-\frac{\varphi_1{}'}{\|W_1\|}) \end{cases}$$

olmak üzere $T'_{\gamma_{\varsigma_4}}(s)$ türev vektörü

$$T'_{\gamma_{\varsigma_4}}(s)=\frac{\sqrt{3}}{4\Big(1-\frac{\varphi_1{}'}{\|W_1\|}+(\frac{\varphi_1{}'}{\|W_1\|})^2\Big)^2}(\upsilon_1N_1+\upsilon_2T_{N_1}+\upsilon_3N_1\wedge T_{N_1}) \tag{4.2.81}$$

şeklinde elde edilir. (4.2.77) ve (4.2.80) ifadelerinden elde edilen $\gamma_{\varsigma_4}\wedge T_{\gamma_{\varsigma_4}}$ vektörü

$$\gamma_{\varsigma_4}\wedge T_{\gamma_{\varsigma_4}}(s)=\frac{(2\frac{\varphi_1{}'}{\|W_1\|}-1)N_1-(1+\frac{\varphi_1{}'}{\|W_1\|})T_{N_1}+(2-\frac{\varphi_1{}'}{\|W_1\|})N_1\wedge T_{N_1}}{\sqrt{6}\sqrt{1-\frac{\varphi_1{}'}{\|W_1\|}+(\frac{\varphi_1{}'}{\|W_1\|})^2}} \tag{4.2.82}$$

şeklinde yazılır. (4.2.77), (4.2.80), (4.2.81) ve (4.2.82) vektörlerinde (4.2.2) den karşılıkları yazılırsa γ_{ς_4}-Smarandache eğrisine ait Sabban çatısının ve $T'_{\gamma_{\varsigma_4}}$ türev vektörünün Bertrand partner eğrisine bağlı ifadesi

$$\begin{aligned} \gamma_{\varsigma_4}(s) &= \frac{1}{\sqrt{3}}\Big((\sin\varphi_1-\cos\varphi_1)T_1+N_1+(\sin\varphi_1+\cos\varphi_1)B_1\Big), \\ T_{\gamma_{\varsigma_4}}(s) &= \frac{\varphi_1{}'\sin\varphi_1-(\|W_1\|-\varphi_1{}')\cos\varphi_1}{\sqrt{2(\|W_1\|^2-\|W_1\|\varphi_1{}'+2\varphi_1{}'^2)}}T_1-\frac{\|W_1\|}{\sqrt{2(\|W_1\|^2-\|W_1\|\varphi_1{}'+2\varphi_1{}'^2)}}N_1 \\ &\quad+\frac{\varphi_1{}'\cos\varphi_1+(\|W_1\|-\varphi_1)'\sin\varphi_1}{\sqrt{2(\|W_1\|^2-\|W_1\|\varphi_1{}'+2\varphi_1{}'^2)}}B_1, \\ \gamma_{\varsigma_4}\wedge T_{\gamma_{\varsigma_4}}(s) &= \frac{(2\|W_1\|-\varphi_1{}')\sin\varphi_1+(\|W_1\|+\varphi_1{}')\cos\varphi_1}{\sqrt{6\|W_1\|^2-6\|W_1\|\varphi_1{}'+6\varphi_1{}'^2}}T_1 \\ &\quad+\frac{2\varphi_1{}'-\|W_1\|}{\sqrt{6\|W_1\|^2-6\|W_1\|\varphi_1{}'+6\varphi_1{}'^2}}N_1 \\ &\quad+\frac{(2\|W_1\|-\varphi_1{}')\cos\varphi_1-(\|W_1\|+\varphi_1{}')\sin\varphi_1}{\sqrt{6\|W_1\|^2-6\|W_1\|\varphi_1{}'+6\varphi_1{}'^2}}B_1, \end{aligned}$$

$$T'_{\gamma_{\varsigma_4}}(s) = \frac{\|W_1\|^4\sqrt{3}(\upsilon_3\sin\varphi_1 - \upsilon_2\cos\varphi_1)}{4\big(\|W_1\|^2 - \|W_1\|\varphi_1' + \varphi_1'^2\big)^2}T_1 + \frac{\upsilon_1\|W_1\|^4\sqrt{3}}{4\big(\|W_1\|^2 - \|W_1\|\varphi_1' + \varphi_1'^2\big)^2}N_1$$
$$+\frac{\|W_1\|^4\sqrt{3}(\upsilon_2\sin\varphi_1 + \upsilon_3\cos\varphi_1)}{4\big(\|W_1\|^2 - \|W_1\|\varphi_1' + \varphi_1'^2\big)^2}B_1$$

eşitliklerine dönüşür. Geodezik eğrilik tanımından $\kappa_g^{\gamma_{\varsigma_4}}$ geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\gamma_{\varsigma_4}} = \frac{\big(2\frac{\varphi_1'}{\|W_1\|} - 1\big)\upsilon_1 + \big(-1 - \frac{\varphi_1'}{\|W_1\|}\big)\upsilon_2 + \big(2 - \frac{\varphi_1'}{\|W_1\|}\big)\upsilon_3}{4\sqrt{2}\Big(1 - \frac{\varphi_1'}{\|W_1\|} + (\frac{\varphi_1'}{\|W_1\|})^2\Big)^{\frac{5}{2}}}$$

şeklinde bulunur.

Teorem 4.2.16 α eğrisinin Bertrand partner eğrisi α_1 olsun. α_1 eğrisinin aslinormaller göstergesine ait $N_1T_{N_1}(N_1 \wedge T_{N_1})$- Smarandache eğrisinin geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\gamma_{\varsigma_4}} = \frac{(2\frac{\varphi'}{\|W\|} - 1)\overline{\upsilon}_1 + (-1 - \frac{\varphi'}{\|W\|})\overline{\upsilon}_2 + (2 - \frac{\varphi'}{\|W\|})\overline{\upsilon}_3}{4\sqrt{2}\Big(1 - (\frac{\varphi'}{\|W\|}) + (\frac{\varphi'}{\|W\|})^2\Big)^{\frac{5}{2}}} \qquad (4.2.83)$$

denklemiyle verilir. Burada

$$\begin{cases} \overline{\upsilon}_1 = -2 + 4(\frac{\varphi'}{\|W\|}) - 4(\frac{\varphi'}{\|W\|})^2 + 2(\frac{\varphi'}{\|W\|})^3 + 2(\frac{\varphi'}{\|W\|})'(2(\frac{\varphi'}{\|W\|}) - 1) \\ \overline{\upsilon}_2 = -2 + 2(\frac{\varphi'}{\|W\|}) - 4(\frac{\varphi'}{\|W\|})^2 + 2(\frac{\varphi'}{\|W\|})^3 - 2(\frac{\varphi'}{\|W\|})^4 - (\frac{\varphi'}{\|W\|})'(1 + (\frac{\varphi'}{\|W\|})) \\ \overline{\upsilon}_3 = 2(\frac{\varphi'}{\|W\|}) - 4(\frac{\varphi'}{\|W\|})^2 + 4(\frac{\varphi'}{\|W\|})^3 - 2(\frac{\varphi'}{\|W\|})^4 + (\frac{\varphi'}{\|W\|})'(2 - (\frac{\varphi'}{\|W\|})) \end{cases} \qquad (4.2.84)$$

şeklinde birer katsayıdır.

İspat.

$$\gamma_{\varsigma_4}(s) = \frac{1}{\sqrt{3}}(N_1 + T_{N_1} + N_1 \wedge T_{N_1})$$

eşitliğinde sırasıyla (4.2.2), (3.3.2) ve (3.3.4) den karşılıkları yazılırsa γ_{ς_4} vektörünün Bertrand eğrisine bağlı ifadesi

$$\gamma_{\varsigma_4}(s) = \frac{1}{\sqrt{3}}\big((\sin\varphi - \cos\varphi)T + N + (\sin\varphi + \cos\varphi)B\big) \qquad (4.2.85)$$

biçiminde olur. Bu ifadenin türevi alınırsa $T_{\gamma_{\varsigma_4}}(s)$ teğet vektörü

$$T_{\gamma_{\varsigma_4}}(s) = \frac{\varphi'\sin\varphi - (\|W\| - \varphi')\cos\varphi}{\sqrt{2(\|W\|^2 - \|W\|\varphi' + 2\varphi'^2)}}T - \frac{\|W\|}{\sqrt{2(\|W\|^2 - \|W\|\varphi' + 2\varphi'^2)}}N$$
$$+\frac{\varphi'\cos\varphi + (\|W\| - \varphi')\sin\varphi}{\sqrt{2(\|W\|^2 - \|W\|\varphi' + 2\varphi'^2)}}B \qquad (4.2.86)$$

biçiminde olur. Bu ifadenin de türevi alınırsa katsayılar

$$\begin{cases} \overline{\upsilon}_1 = -2+4(\frac{\varphi'}{\|W\|})-4(\frac{\varphi'}{\|W\|})^2+2(\frac{\varphi'}{\|W\|})^3+2(\frac{\varphi'}{\|W\|})'(2(\frac{\varphi'}{\|W\|})-1) \\ \overline{\upsilon}_2 = -2+2(\frac{\varphi'}{\|W\|})-4(\frac{\varphi'}{\|W\|})^2+2(\frac{\varphi'}{\|W\|})^3-2(\frac{\varphi'}{\|W\|})^4-(\frac{\varphi'}{\|W\|})'(1+(\frac{\varphi'}{\|W\|})) \\ \overline{\upsilon}_3 = 2(\frac{\varphi'}{\|W\|})-4(\frac{\varphi'}{\|W\|})^2+4(\frac{\varphi'}{\|W\|})^3-2(\frac{\varphi'}{\|W\|})^4+(\frac{\varphi'}{\|W\|})'(2-(\frac{\varphi'}{\|W\|})) \end{cases}$$

olmak üzere $T'_{\gamma_{\varsigma_4}}(s)$ türev vektörü

$$\begin{aligned} T'_{\gamma_{\varsigma_4}}(s) &= \frac{\|W\|^4\sqrt{3}(\overline{\upsilon}_3\sin\varphi-\overline{\upsilon}_2\cos\varphi)}{4\big(\|W\|^2-\|W\|\varphi'+\varphi'^2\big)^2}T+\frac{\overline{\upsilon}_1\|W\|^4\sqrt{3}}{4\big(\|W\|^2-\|W\|\varphi'+\varphi'^2\big)^2}N \\ &\quad +\frac{\|W\|^4\sqrt{3}(\overline{\upsilon}_2\sin\varphi+\overline{\upsilon}_3\cos\varphi)}{4\big(\|W\|^2-\|W\|\varphi'+\varphi'^2\big)^2}B \end{aligned}$$

biçiminde olur. (4.2.85) ve (4.2.86) ifadelerinden elde edilen $\gamma_{\varsigma_4}\wedge T_{\gamma_{\varsigma_4}}$ vektörü

$$\begin{aligned} \gamma_{\varsigma_4}\wedge T_{\gamma_{\varsigma_4}}(s) &= \frac{(2\|W\|-\varphi')\sin\varphi+(\|W\|+\varphi')\cos\varphi}{\sqrt{6\|W\|^2-6\|W\|\varphi'+6\varphi'^2}}T+\frac{2\varphi'-\|W\|}{\sqrt{6\|W\|^2-6\|W\|\varphi'+6\varphi'^2}}N \\ &\quad +\frac{(2\|W\|-\varphi')\cos\varphi-(\|W\|+\varphi')\sin\varphi}{\sqrt{6\|W\|^2-6\|W\|\varphi'+6\varphi'^2}}B \end{aligned}$$

şeklinde yazılır. Geodezik eğrilik tanımından $\kappa_g^{\gamma_{\varsigma_4}}$ geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\gamma_{\varsigma_4}} = \frac{(2\frac{\varphi'}{\|W\|}-1)\overline{\upsilon}_1+(-1-\frac{\varphi'}{\|W\|})\overline{\upsilon}_2+(2-\frac{\varphi'}{\|W\|})\overline{\upsilon}_3}{4\sqrt{2}\Big(1-(\frac{\varphi'}{\|W\|})+(\frac{\varphi'}{\|W\|})^2\Big)^{\frac{5}{2}}}$$

biçiminde elde edilir.

Tanım 4.2.9 $\alpha_1 : I \to S^2$ Bertrand partner eğrisinin binormaller göstergesine ait Sabban çatısı $\{B_1, T_{B_1}, B_1\wedge T_{B_1}\}$ olsun.

$$\gamma_{\xi_1}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(B_1+T_{B_1}) \tag{4.2.87}$$

şeklinde tanımlı vektörün çizdiği regüler eğriye $B_1T_{B_1}$-Smarandache eğrisi denir.

Teorem 4.2.17 $B_1T_{B_1}$-Smarandache eğrisinin geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\gamma_{\xi_1}} = \frac{1}{\big(2+(\frac{\kappa_1}{\tau_1})^2\big)^{\frac{5}{2}}}\big(\frac{\kappa_1}{\tau_1}\Theta_1-\frac{\kappa_1}{\tau_1}\Theta_2+2\Theta_3\big) \tag{4.2.88}$$

denklemiyle verilir. Burada

$$\begin{cases} \Theta_1 = -2-\big(\frac{\kappa_1}{\tau_1}\big)^2+\big(\frac{\kappa_1}{\tau_1}\big)'\big(\frac{\kappa_1}{\tau_1}\big) \\ \Theta_2 = -2-3\big(\frac{\kappa_1}{\tau_1}\big)^2-\big(\frac{\kappa_1}{\tau_1}\big)^4-\big(\frac{\kappa_1}{\tau_1}\big)'\big(\frac{\kappa_1}{\tau_1}\big) \\ \Theta_3 = 2\big(\frac{\kappa_1}{\tau_1}\big)+\big(\frac{\kappa_1}{\tau_1}\big)^3+\big(\frac{\kappa_1}{\tau_1}\big)' \end{cases} \tag{4.2.89}$$

şeklinde birer katsayıdır.

İspat.

$$\gamma_{\xi_1}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(B_1 + T_{B_1})$$

eğrisinin $s_{\gamma_{\xi_1}}$ yay parametresine göre türevi alınırsa

$$T_{\gamma_{\xi_1}} \frac{ds_{\gamma_{\xi_1}}}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-B_1 + T_{B_1} + \frac{\kappa_1}{\tau_1} B_1 \wedge T_{B_1})$$

olur. Bu eşitliğin normu alınırsa $\frac{ds_{\gamma_{\xi_1}}}{ds}$ ifadesi

$$\frac{ds_{\gamma_{\xi_1}}}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2 + \left(\frac{\kappa_1}{\tau_1}\right)^2}$$

elde edilir. Bu ifade yukarıda yerine yazılırsa $T_{\gamma_{\xi_1}}(s)$ teğet vektörü

$$T_{\gamma_{\xi_1}}(s) = \frac{1}{\sqrt{2 + \left(\frac{\kappa_1}{\tau_1}\right)^2}}(-B_1 + T_{B_1} + \frac{\kappa_1}{\tau_1} B_1 \wedge T_{B_1}) \tag{4.2.90}$$

biçiminde olur. Bu ifadenin tekrar türevi alınırsa katsayılar

$$\begin{cases} \Theta_1 = -2 - \left(\frac{\kappa_1}{\tau_1}\right)^2 + \left(\frac{\kappa_1}{\tau_1}\right)' \left(\frac{\kappa_1}{\tau_1}\right) \\ \Theta_2 = -2 - 3\left(\frac{\kappa_1}{\tau_1}\right)^2 - \left(\frac{\kappa_1}{\tau_1}\right)^4 - \left(\frac{\kappa_1}{\tau_1}\right)' \left(\frac{\kappa_1}{\tau_1}\right) \\ \Theta_3 = 2\left(\frac{\kappa_1}{\tau_1}\right) + \left(\frac{\kappa_1}{\tau_1}\right)^3 + \left(\frac{\kappa_1}{\tau_1}\right)' \end{cases}$$

olmak üzere $T'_{\gamma_{\xi_1}}(s)$ türev vektörü

$$T'_{\gamma_{\xi_1}}(s) = \frac{\sqrt{2}}{\left(2 + \left(\frac{\kappa_1}{\tau_1}\right)^2\right)^2}(\Theta_1 B_1 + \Theta_2 T_{B_1} + \Theta_3 B_1 \wedge T_{B_1}) \tag{4.2.91}$$

şeklinde bulunur. (4.2.87) ve (4.2.90) ifadelerinden elde edilen $\gamma_{\xi_1} \wedge T_{\gamma_{\xi_1}}$ vektörü

$$\gamma_{\xi_1} \wedge T_{\gamma_{\xi_1}} = \frac{1}{\sqrt{4 + 2\left(\frac{\kappa_1}{\tau_1}\right)^2}}(\frac{\kappa_1}{\tau_1} B_1 - \frac{\kappa_1}{\tau_1} T_{B_1} + 2B_1 \wedge T_{B_1}) \tag{4.2.92}$$

şeklinde yazılır. (4.2.87), (4.2.90), (4.2.91) ve (4.2.92) vektörlerinde (4.2.3) den karşılıkları yazılırsa γ_{ξ_1}-Smarandache eğrisine ait Sabban çatısının ve $T'_{\gamma_{\xi_1}}$ vektörünün Bertrand partner eğrisine bağlı ifadesi,

$$\begin{aligned} \gamma_{\xi_1}(s) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(-N_1 + B_1\Big) \\ T_{\gamma_{\xi_1}}(s) &= \frac{1}{\sqrt{2 + \left(\frac{\kappa_1}{\tau_1}\right)^2}}\Big(\frac{\kappa_1}{\tau_1} T_1 - N_1 - B_1\Big) \\ \gamma_{\xi_1} \wedge T_{\gamma_{\xi_1}}(s) &= \frac{1}{\sqrt{4 + 2\left(\frac{\kappa_1}{\tau_1}\right)^2}}\Big(2T_1 + \frac{\kappa_1}{\tau_1} N_1 + \frac{\kappa_1}{\tau_1} B_1\Big) \\ T'_{\gamma_{\xi_1}}(s) &= \frac{\sqrt{2}}{\left(2 + \left(\frac{\kappa_1}{\tau_1}\right)^2\right)^2}\Big(\Theta_3 T_1 - \Theta_2 N_1 + \Theta_1 B_1\Big) \end{aligned}$$

şekline dönüşür. Geodezik eğrilik tanımından $\kappa_g^{\gamma_{\xi_1}}$ geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\gamma_{\xi_1}} = \frac{1}{\left(2+\left(\frac{\kappa_1}{\tau_1}\right)^2\right)^{\frac{5}{2}}}\left(\frac{\kappa_1}{\tau_1}\Theta_1 - \frac{\kappa_1}{\tau_1}\Theta_2 + 2\Theta_3\right)$$

biçiminde olur.

Teorem 4.2.18 α eğrisinin Bertrand partner eğrisi α_1 olsun. α_1 eğrisinin binormaller göstergesine ait $B_1T_{B_1}$- Smarandache eğrisinin geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\gamma_{\xi_1}} = \frac{1}{\left(2+\cot^2(\varphi-\theta)\right)^{\frac{5}{2}}}\left(\cot(\varphi-\theta)\overline{\Theta}_1 - \cot(\varphi-\theta)\overline{\Theta}_2 + 2\overline{\Theta}_3\right) \tag{4.2.93}$$

denklemiyle verilir. Burada

$$\begin{cases} \overline{\Theta}_1 = -2-\cot^2(\varphi-\theta)+\cot'(\varphi-\theta)\cot(\varphi-\theta) \\ \overline{\Theta}_2 = -2-3\cot^2(\varphi-\theta)-\cot^4(\varphi-\theta)-\cot'(\varphi-\theta)\cot(\varphi-\theta) \\ \overline{\Theta}_3 = 2\cot(\varphi-\theta)+\cot^3(\varphi-\theta)+2\cot'(\varphi-\theta) \end{cases} \tag{4.2.94}$$

şeklinde birer katsayıdır.

İspat.

$$\gamma_{\xi_1}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(B_1 + T_{B_1})$$

eşitliğinde sırasıyla (4.2.3), (3.3.2) ve (3.3.4) den karşılıkları yazılırsa γ_{ξ_1} vektörünün Bertrand eğrisine bağlı ifadesi

$$\gamma_{\xi_1}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sin\theta T + N + \cos\theta B\right) \tag{4.2.95}$$

biçiminde olur. Bu ifadenin türevi alınırsa $T_{\gamma_{\xi_1}}(s)$ teğet vektörü

$$T_{\gamma_{\xi_1}}(s) = \frac{\cot(\varphi-\theta)\cos\theta-\sin\theta}{\sqrt{2+\cot^2(\varphi-\theta)}}T - \frac{1}{\sqrt{2+\cot^2(\varphi-\theta)}}N - \frac{\cot(\varphi-\theta)\sin\theta-\cos\theta}{\sqrt{2+\cot^2(\varphi-\theta)}}B \tag{4.2.96}$$

şeklinde bulunur. Bu ifadenin de türevi alınırsa katsayılar

$$\begin{cases} \overline{\Theta}_1 = -2-\cot^2(\varphi-\theta)+\cot'(\varphi-\theta)\cot(\varphi-\theta) \\ \overline{\Theta}_2 = -2-3\cot^2(\varphi-\theta)-\cot^4(\varphi-\theta)-\cot'(\varphi-\theta)\cot(\varphi-\theta) \\ \overline{\Theta}_3 = 2\cot(\varphi-\theta)+\cot^3(\varphi-\theta)+2\cot'(\varphi-\theta) \end{cases}$$

olmak üzere $T'_{\gamma_{\xi_1}}(s)$ türev vektörü

$$T'_{\gamma_{\xi_1}}(s) = \frac{(\overline{\Theta}_1\sin\theta+\overline{\Theta}_3\cos\theta)\sqrt{2}}{(2+\cot^2(\varphi-\theta))^2}T - \frac{\overline{\Theta}_2\sqrt{2}}{(2+\cot^2(\varphi-\theta))^2}N + \frac{(\overline{\Theta}_1\cos\theta-\overline{\Theta}_3\sin\theta)\sqrt{2}}{(2+\cot^2(\varphi-\theta))^2}B$$

şeklinde elde edilir. (4.2.95) ve (4.2.96) ifadelerinden elde edilen $\gamma_{\xi_1} \wedge T_{\gamma_{\xi_1}}$ vektörü

$$\begin{aligned} \gamma_{\xi_1} \wedge T_{\gamma_{\xi_1}}(s) &= \frac{\cot(\varphi-\theta)\sin\theta + 2\cos\theta}{\sqrt{4+2\cot^2(\varphi-\theta)}}T + \frac{\cot(\varphi-\theta)}{\sqrt{4+2\cot^2(\varphi-\theta)}}N \\ &\quad + \frac{\cot(\varphi-\theta)\cos\theta - 2\sin\theta}{\sqrt{4+2\cot^2(\varphi-\theta)}}B \end{aligned}$$

şeklinde yazılır. Geodezik eğrilik tanımından $\kappa_g^{\gamma_{\xi_1}}$ geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\gamma_{\xi_1}} = \frac{1}{\left(2+\cot^2(\varphi-\theta)\right)^{\frac{5}{2}}}\Big(\cot(\varphi-\theta)\overline{\Theta}_1 - \cot(\varphi-\theta)\overline{\Theta}_2 + 2\overline{\Theta}_3\Big)$$

biçiminde olur.

Tanım 4.2.10 $\alpha_1 : I \to S^2$ Bertrand partner eğrisinin binormaller göstergesine ait Sabban çatısı $\{B_1, T_{B_1}, B_1 \wedge T_{B_1}\}$ olsun.

$$\gamma_{\xi_2}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(B_1 + B_1 \wedge T_{B_1}) \tag{4.2.97}$$

şeklinde tanımlı vektörün çizdiği regüler eğriye $B_1(B_1 \wedge T_{B_1})$-Smarandache eğrisi denir.

Teorem 4.2.19 $B_1(B_1 \wedge T_{B_1})$-Smarandache eğrisinin geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\gamma_{\xi_2}} = \frac{(\tau_1 + \kappa_1)}{(\tau_1 - \kappa_1)} \tag{4.2.98}$$

denklemiyle verilir.

İspat.

$$\gamma_{\xi_2}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(B_1 + B_1 \wedge T_{B_1})$$

eğrisinin $s_{\gamma_{\xi_2}}$ yay parametresine göre türevi alınırsa

$$T_{\gamma_{\xi_2}}\frac{ds_{\gamma_{\xi_2}}}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(1 - \frac{\kappa_1}{\tau_1}\big)T_{B_1}$$

biçiminde olur. Bu eşitliğin normu alınırsa $\frac{ds_{\gamma_{\xi_2}}}{ds}$ ifadesi

$$\frac{ds_{\gamma_{\xi_2}}}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(1 - \frac{\kappa_1}{\tau_1}\big)$$

şeklinde bulunur. Bu ifade yukarıda yerine yazılırsa $T_{\gamma_{\xi_2}}(s)$ teğet vektörü

$$T_{\gamma_{\xi_2}}(s) = T_{B_1} \tag{4.2.99}$$

biçiminde olur. Bu ifadenin tekrar türevi alınırsa $T'_{\gamma_{\xi_2}}(s)$ türev vektörü

$$T'_{\gamma_{\xi_2}}(s) = \frac{\sqrt{2}}{(1-\frac{\kappa_1}{\tau_1})}\big(-B_1 + \frac{\kappa_1}{\tau_1}B_1 \wedge T_{B_1}\big) \tag{4.2.100}$$

eşitliğiyle bulunur. (4.2.97) ve (4.2.99) ifadelerinden elde edilen $\gamma_{\xi_2} \wedge T_{\gamma_{\xi_2}}$ vektörü

$$\gamma_{\xi_2} \wedge T_{\gamma_{\xi_2}}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-B_1 + B_1 \wedge T_{B_1}) \tag{4.2.101}$$

şeklinde yazılır. (4.2.97), (4.2.99), (4.2.100) ve (4.2.101) vektörlerinde (4.2.3) den karşılıkları yazılırsa γ_{ξ_2}-Smarandache eğrisine ait Sabban çatısının ve $T'_{\gamma_{\xi_2}}$ türev vektörünün Bertrand partner eğrisine bağlı ifadesi,

$$\begin{aligned}
\gamma_{\xi_2}(s) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(T_1 + B_1), \\
T_{\gamma_{\xi_2}}(s) &= -N_1, \\
\gamma_{\xi_2} \wedge T_{\gamma_{\xi_2}}(s) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(T_1 - B_1), \\
T'_{\gamma_{\xi_2}}(s) &= \frac{\sqrt{2}}{(1-\frac{\kappa_1}{\tau_1})}\big(\frac{\kappa_1}{\tau_1}T_1 - B_1\big)
\end{aligned}$$

eşitliklerine dönüşür. Geodezik eğrilik tanımından $\kappa_g^{\gamma_{\xi_2}}$ geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\gamma_{\xi_2}} = \frac{(\tau_1 + \kappa_1)}{(\tau_1 - \kappa_1)}$$

biçiminde olur.

Teorem 4.2.20 α eğrisinin Bertrand partner eğrisi α_1 olsun. α_1 eğrisinin binormaller göstergesine ait $B_1(B_1 \wedge T_{B_1})$- Smarandache eğrisinin geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\gamma_{\xi_2}} = \frac{1+\cot(\varphi-\theta)}{1-\cot(\varphi-\theta)} \tag{4.2.102}$$

denklemiyle verilir.

İspat.

$$\gamma_{\xi_2}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(B_1 + B_1 \wedge T_{B_1})$$

eşitliğinde sırasıyla (4.2.3), (3.3.2) ve (3.3.4) den karşılıkları yazılırsa γ_{ξ_2} vektörünün Bertrand eğrisine bağlı ifadesi

$$\gamma_{\xi_2}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}\big((\sin\theta + \cos\theta)T + (\cos\theta - \sin\theta)B\big) \tag{4.2.103}$$

biçiminde olur. Bu ifadenin türevi alınırsa $T_{\gamma_{\xi_2}}(s)$ teğet vektörü

$$T_{\gamma_{\xi_2}}(s) = -N \tag{4.2.104}$$

şeklinde bulunur. Bu ifadenin türevi alınırsa $T'_{\gamma_{\xi_2}}(s)$ türev vektörü

$$T'_{\gamma_{\xi_2}}(s) = \frac{\big(\cot(\varphi-\theta)\cos\theta - \sin\theta\big)\sqrt{2}}{1-\cot(\varphi-\theta)}T - \frac{\big(\cot(\varphi-\theta)\sin\theta + \cos\theta\big)\sqrt{2}}{1-\cot(\varphi-\theta)}B$$

şeklindedir. (4.2.103) ve (4.2.104) ifadelerinden elde edilen $\gamma_{\xi_2} \wedge T_{\gamma_{\xi_2}}$ vektörü

$$\gamma_{\xi_2} \wedge T_{\gamma_{\xi_2}}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}\big((\cos\theta - \sin\theta)T - (\cos\theta + \sin\theta)B\big)$$

eşitliğiyle yazılır. Geodezik eğrilik tanımından $\kappa_g^{\gamma_{\xi_2}}$ geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\gamma_{\xi_2}} = \frac{1+\cot(\varphi-\theta)}{1-\cot(\varphi-\theta)}$$

biçiminde elde edilir.

Tanım 4.2.11 $\alpha_1 : I \to S^2$ Bertrand partner eğrisinin binormaller göstergesine ait Sabban çatısı $\{B_1, T_{B_1}, B_1 \wedge T_{B_1}\}$ olsun.

$$\gamma_{\xi_3}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(T_{B_1} + B_1 \wedge T_{B_1}) \tag{4.2.105}$$

şeklinde tanımlı vektörün çizdiği regüler eğriye $T_{B_1}(B_1 \wedge T_{B_1})$-Smarandache eğrisi denir.

Teorem 4.2.21 $T_{B_1}(B_1 \wedge T_{B_1})$-Smarandache eğrisinin geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\gamma_{\xi_3}} = \frac{1}{\big(1+2\big(\frac{\kappa_1}{\tau_1}\big)^2\big)^{\frac{5}{2}}}\big(2\frac{\kappa_1}{\tau_1}\Psi_1 - \Psi_2 + \Psi_3\big) \tag{4.2.106}$$

denklemiyle verilir. Burada

$$\begin{cases} \Psi_1 = \frac{\kappa_1}{\tau_1} + 2\big(\frac{\kappa_1}{\tau_1}\big)^3 + 2\big(\frac{\kappa_1}{\tau_1}\big)'\big(\frac{\kappa_1}{\tau_1}\big) \\ \Psi_2 = -1 - 3\big(\frac{\kappa_1}{\tau_1}\big)^2 - 2\big(\frac{\kappa_1}{\tau_1}\big)^4 - \big(\frac{\kappa_1}{\tau_1}\big)' \\ \Psi_3 = -\big(\frac{\kappa_1}{\tau_1}\big)^2 - 2\big(\frac{\kappa_1}{\tau_1}\big)^4 + \big(\frac{\kappa_1}{\tau_1}\big)' \end{cases} \tag{4.2.107}$$

şeklinde birer katsayıdır.

İspat.

$$\gamma_{\xi_3}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(T_{B_1} + B_1 \wedge T_{B_1})$$

eğrisinin $s_{\gamma_{\xi_3}}$ yay parametresine göre türevi alınırsa

$$T_{\gamma_{\xi_3}}\frac{ds_{\gamma_{\xi_3}}}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-B_1 - \frac{\kappa_1}{\tau_1}T_{B_1} + \frac{\kappa_1}{\tau_1}B_1 \wedge T_{B_1})$$

olur. Bu eşitliğin normu alınırsa $\frac{ds_{\gamma_{\xi_3}}}{ds}$ ifadesi

$$\frac{ds_{\gamma_{\xi_3}}}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1+2\Big(\frac{\kappa_1}{\tau_1}\Big)^2}$$

bulunur. Bulunan bu ifade yukarıda yerine yazılırsa $T_{\gamma_{\xi_3}}(s)$ teğet vektörü

$$T_{\gamma_{\xi_3}}(s) = \frac{1}{\sqrt{1+2\big(\frac{\kappa_1}{\tau_1}\big)^2}}\big(-B_1 - \frac{\kappa_1}{\tau_1}T_{B_1} + \frac{\kappa_1}{\tau_1}B_1 \wedge T_{B_1}\big) \tag{4.2.108}$$

biçiminde olur. Bu ifadenin tekrar türevi alınırsa katsayılar

$$\begin{cases} \Psi_1 = \frac{\kappa_1}{\tau_1} + 2\big(\frac{\kappa_1}{\tau_1}\big)^3 + 2\big(\frac{\kappa_1}{\tau_1}\big)'\big(\frac{\kappa_1}{\tau_1}\big) \\ \Psi_2 = -1 - 3\big(\frac{\kappa_1}{\tau_1}\big)^2 - 2\big(\frac{\kappa_1}{\tau_1}\big)^4 - \big(\frac{\kappa_1}{\tau_1}\big)' \\ \Psi_3 = -\big(\frac{\kappa_1}{\tau_1}\big)^2 - 2\big(\frac{\kappa_1}{\tau_1}\big)^4 + \big(\frac{\kappa_1}{\tau_1}\big)' \end{cases} \tag{4.2.109}$$

olmak üzere $T'_{\gamma_{\xi_3}}(s)$ türev vektörü

$$T'_{\gamma_{\xi_3}}(s) = \frac{\sqrt{2}}{\Big(1+2\big(\frac{\kappa_1}{\tau_1}\big)^2\Big)^2}(\Psi_1 B_1 + \Psi_2 T_{B_1} + \Psi_3 B_1 \wedge T_{B_1}) \tag{4.2.110}$$

şeklinde bulunur. (4.2.105) ve (4.2.108) ifadelerinden elde edilen $\gamma_{\xi_3} \wedge T_{\gamma_{\xi_3}}$ vektörü

$$\gamma_{\xi_3} \wedge T_{\gamma_{\xi_3}}(s) = \frac{1}{\sqrt{2+4\big(\frac{\kappa_1}{\tau_1}\big)^2}}\big(2\frac{\kappa_1}{\tau_1}B_1 - T_{B_1} + B_1 \wedge T_{B_1}\big) \tag{4.2.111}$$

şeklinde yazılır. (4.2.105), (4.2.108), (4.2.110) ve (4.2.111) vektörlerinde (4.2.3) den karşılıkları yazılırsa γ_{ξ_3}-Smarandache eğrisine ait Sabban çatısının ve $T'_{\gamma_{\xi_3}}$ türev vektörünün Bertrand partner eğrisine bağlı ifadesi

$$\begin{aligned} \gamma_{\xi_3}(s) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(T_1 - N_1\Big), \\ T_{\gamma_{\xi_3}}(s) &= \frac{1}{\sqrt{1+2\big(\frac{\kappa_1}{\tau_1}\big)^2}}\Big(\frac{\kappa_1}{\tau_1}T_1 + \frac{\kappa_1}{\tau_1}N_1 - B_1\Big), \\ \gamma_{\xi_3} \wedge T_{\gamma_{\xi_3}}(s) &= \frac{1}{\sqrt{2+4\big(\frac{\kappa_1}{\tau_1}\big)^2}}\Big(T_1 + N_1 + 2\frac{\kappa_1}{\tau_1}B_1\Big), \\ T'_{\gamma_{\xi_3}}(s) &= \frac{\sqrt{2}}{\Big(1+2\big(\frac{\kappa_1}{\tau_1}\big)^2\Big)^2}\Big(\Psi_3 T_1 - \Psi_2 N_1 + \Psi_1 B_1\Big) \end{aligned}$$

eşitliklerine dönüşür. Geodezik eğrilik tanımından $\kappa_g^{\gamma_{\xi_3}}$ geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\gamma_{\xi_3}} = \frac{1}{\Big(1+2\big(\frac{\kappa_1}{\tau_1}\big)^2\Big)^{\frac{5}{2}}}\big(2\frac{\kappa_1}{\tau_1}\Psi_1 - \Psi_2 + \Psi_3\big)$$

biçiminde olur.

Teorem 4.2.22 α eğrisinin Bertrand partner eğrisi α_1 olsun. α_1 eğrisinin binormaller göstergesine ait $T_{B_1}(B_1 \wedge T_{B_1})$- Smarandache eğrisinin geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\gamma_{\xi_3}} = \frac{1}{\left(1+2\cot^2(\varphi-\theta)\right)^{\frac{5}{2}}}\left(2\cot(\varphi-\theta)\overline{\Psi}_1 - \overline{\Psi}_2 + \overline{\Psi}_3\right) \tag{4.2.112}$$

denklemiyle verilir. Burada

$$\begin{cases} \overline{\Psi}_1 = \cot(\varphi-\theta) + 2\cot^3(\varphi-\theta) + 2\cot'(\varphi-\theta)\cot(\varphi-\theta) \\ \overline{\Psi}_2 = -1 - 3\cot^2(\varphi-\theta) - 2\cot^4(\varphi-\theta) - \cot'(\varphi-\theta) \\ \overline{\Psi}_3 = -\cot^2(\varphi-\theta) - 2\cot^4(\varphi-\theta) + \cot'(\varphi-\theta) \end{cases} \tag{4.2.113}$$

şeklinde birer katsayıdır.

İspat.

$$\gamma_{\xi_3}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(T_{B_1} + B_1 \wedge T_{B_1})$$

eşitliğinde sırasıyla (4.2.3), (3.3.2) ve (3.3.4) den karşılıkları yazılırsa γ_{ξ_3} vektörünün Bertrand eğrisine bağlı ifadesi

$$\gamma_{\xi_3}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\theta T - N - \sin\theta B\right) \tag{4.2.114}$$

biçiminde olur. Bu ifadenin türevi alınırsa $T_{\gamma_{\xi_3}}(s)$ teğet vektörü

$$\begin{aligned} T_{\gamma_{\xi_3}}(s) \;=\; & \frac{\cot(\varphi-\theta)\cos\theta - \sin\theta}{\sqrt{1+2\cot^2(\varphi-\theta)}}T + \frac{\cot(\varphi-\theta)}{\sqrt{1+2\cot^2(\varphi-\theta)}}N \\ & - \frac{\cot(\varphi-\theta)\sin\theta + \cos\theta}{\sqrt{1+2\cot^2(\varphi-\theta)}}B \end{aligned} \tag{4.2.115}$$

şeklinde bulunur. Bu ifadenin türevi alınırsa katsayılar

$$\begin{cases} \overline{\Psi}_1 = \cot(\varphi-\theta) + 2\cot^3(\varphi-\theta) + 2\cot'(\varphi-\theta)\cot(\varphi-\theta) \\ \overline{\Psi}_2 = -1 - 3\cot^2(\varphi-\theta) - 2\cot^4(\varphi-\theta) - \cot'(\varphi-\theta) \\ \overline{\Psi}_3 = -\cot^2(\varphi-\theta) - 2\cot^4(\varphi-\theta) + \cot'(\varphi-\theta) \end{cases}$$

olmak üzere $T'_{\gamma_{\xi_3}}(s)$ türev vektörü

$$T'_{\gamma_{\xi_3}}(s) = \frac{(\overline{\Psi}_1\sin\theta + \overline{\Psi}_3\cos\theta)\sqrt{2}}{(1+2\cot^2(\varphi-\theta))^2}T + \frac{\overline{\Psi}_2\sqrt{2}}{(1+2\cot^2(\varphi-\theta))^2}N + \frac{(\overline{\Psi}_1\cos\theta - \overline{\Psi}_3\sin\theta)\sqrt{2}}{(1+2\cot^2(\varphi-\theta))^2}B$$

biçiminde olur. (4.2.114) ve (4.2.115) ifadelerinden elde edilen $\gamma_{\xi_3} \wedge T_{\gamma_{\xi_3}}$ vektörü

$$\begin{aligned} \gamma_{\xi_3} \wedge T_{\gamma_{\xi_3}}(s) \;=\; & \frac{2\cot(\varphi-\theta)\sin\theta + \cos\theta}{\sqrt{2+4\cot^2(\varphi-\theta)}}T + \frac{1}{\sqrt{2+4\cot^2(\varphi-\theta)}}N \\ & + \frac{2\cot(\varphi-\theta)\cos\theta - \sin\theta}{\sqrt{2+4\cot^2(\varphi-\theta)}}B \end{aligned}$$

şeklinde yazılır. Geodezik eğrilik tanımından $\kappa_g^{\gamma_{\xi_3}}$ geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\gamma_{\xi_3}} = \frac{1}{\left(1+2\cot^2(\varphi-\theta)\right)^{\frac{5}{2}}}\left(2\cot(\varphi-\theta)\overline{\Psi}_1-\overline{\Psi}_2+\overline{\Psi}_3\right)$$

şeklinde elde edilir.

Tanım 4.2.12 $\alpha_1 : I \to S^2$ Bertrand partner eğrisinin binormaller göstergesine ait Sabban çatısı $\{B_1, T_{B_1}, B_1 \wedge T_{B_1}\}$ olsun.

$$\gamma_{\xi_4}(s) = \frac{1}{\sqrt{3}}(B_1 + T_{B_1} + B_1 \wedge T_{B_1}) \tag{4.2.116}$$

şeklinde tanımlı vektörün çizdiği regüler eğriye $B_1 T_{B_1}(B_1 \wedge T_{B_1})$-Smarandache eğrisi denir.

Teorem 4.2.23 $B_1 T_{B_1}(B_1 \wedge T_{B_1})$-Smarandache eğrisinin geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\gamma_{\xi_4}} = \frac{1}{4\sqrt{2}\left(1+\frac{\kappa_1}{\tau_1}+\left(\frac{\kappa_1}{\tau_1}\right)^2\right)^{\frac{5}{2}}}\left(\left(2\frac{\kappa_1}{\tau_1}-1\right)\vartheta_1-\left(1+\frac{\kappa_1}{\tau_1}\right)\vartheta_2+\left(2-\frac{\kappa_1}{\tau_1}\right)\vartheta_3\right) \tag{4.2.117}$$

denklemiyle verilir. Burada

$$\begin{cases} \vartheta_1 = -2+4\left(\frac{\kappa_1}{\tau_1}\right)-\left(\frac{\kappa_1}{\tau_1}\right)^2+2\left(\frac{\kappa_1}{\tau_1}\right)^3+\left(\frac{\kappa_1}{\tau_1}\right)'\left(2\frac{\kappa_1}{\tau_1}-1\right) \\ \vartheta_2 = -2+2\left(\frac{\kappa_1}{\tau_1}\right)-4\left(\frac{\kappa_1}{\tau_1}\right)^2+2\left(\frac{\kappa_1}{\tau_1}\right)^3-2\left(\frac{\kappa_1}{\tau_1}\right)^4-\left(\frac{\kappa_1}{\tau_1}\right)'\left(1+\frac{\kappa_1}{\tau_1}\right) \\ \vartheta_3 = 2\left(\frac{\kappa_1}{\tau_1}\right)-4\left(\frac{\kappa_1}{\tau_1}\right)^2+4\left(\frac{\kappa_1}{\tau_1}\right)^3-2\left(\frac{\kappa_1}{\tau_1}\right)^4+\left(\frac{\kappa_1}{\tau_1}\right)'\left(2-\frac{\kappa_1}{\tau_1}\right) \end{cases} \tag{4.2.118}$$

şeklinde birer katsayıdır.

İspat.

$$\gamma_{\xi_4}(s) = \frac{1}{\sqrt{3}}(B_1 + T_{B_1} + B_1 \wedge T_{B_1})$$

eğrisinin $s_{\gamma_{\xi_4}}$ yay parametresine göre türevi alınırsa

$$T_{\gamma_{\xi_4}}\frac{ds_{\gamma_{\xi_4}}}{ds} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(-B_1+\left(1-\frac{\kappa_1}{\tau_1}\right)T_{B_1}+\frac{\kappa_1}{\tau_1}B_1\wedge T_{B_1}\right)$$

olur ve bu eşitliğin normu alınırsa $\frac{ds_{\gamma_{\xi_4}}}{ds}$ ifadesi

$$\frac{ds_{\gamma_{\xi_4}}}{ds} = \sqrt{\frac{2}{3}\left(1-\frac{\kappa_1}{\tau_1}+\left(\frac{\kappa_1}{\tau_1}\right)^2\right)}$$

bulunur. Bulunan bu ifade yukarıda yerine yazılırsa $T_{\gamma_{\xi_4}}(s)$ teğet vektörü

$$T_{\gamma_{\xi_4}}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\left(1-\frac{\kappa_1}{\tau_1}+\left(\frac{\kappa_1}{\tau_1}\right)^2\right)}}\left(-B_1+\left(1-\frac{\kappa_1}{\tau_1}\right)T_{B_1}+\frac{\kappa_1}{\tau_1}B_1\wedge T_{B_1}\right) \tag{4.2.119}$$

şeklinde elde edilir. Bu ifadenin de türevi alınırsa katsayılar

$$\begin{cases} \vartheta_1 = -2+4\big(\frac{\kappa_1}{\tau_1}\big)-\big(\frac{\kappa_1}{\tau_1}\big)^2+2\big(\frac{\kappa_1}{\tau_1}\big)^3+\big(\frac{\kappa_1}{\tau_1}\big)'\big(2\frac{\kappa_1}{\tau_1}-1\big) \\ \vartheta_2 = -2+2\big(\frac{\kappa_1}{\tau_1}\big)-4\big(\frac{\kappa_1}{\tau_1}\big)^2+2\big(\frac{\kappa_1}{\tau_1}\big)^3-2\big(\frac{\kappa_1}{\tau_1}\big)^4-\big(\frac{\kappa_1}{\tau_1}\big)'\big(1+\frac{\kappa_1}{\tau_1}\big) \\ \vartheta_3 = 2\big(\frac{\kappa_1}{\tau_1}\big)-4\big(\frac{\kappa_1}{\tau_1}\big)^2+4\big(\frac{\kappa_1}{\tau_1}\big)^3-2\big(\frac{\kappa_1}{\tau_1}\big)^4+\big(\frac{\kappa_1}{\tau_1}\big)'\big(2-\frac{\kappa_1}{\tau_1}\big) \end{cases} \tag{4.2.120}$$

olmak üzere $T'_{\gamma_{\xi_4}}(s)$ türev vektörü

$$T'_{\gamma_{\xi_4}}(s) = \frac{\sqrt{3}}{4\Big(1-\frac{\kappa_1}{\tau_1}+\big(\frac{\kappa_1}{\tau_1}\big)^2\Big)^2}\left(\vartheta_1 B_1+\vartheta_2 T_{B_1}+\vartheta_3 B_1\wedge T_{B_1}\right) \tag{4.2.121}$$

biçiminde bulunur. (4.2.116) ve (4.2.119) ifadelerinden elde edilen $\gamma_{\xi_4}\wedge T_{\gamma_{\xi_4}}$ vektörü

$$\gamma_{\xi_4}\wedge T_{\gamma_{\xi_4}}(s) = \frac{\big(2\frac{\kappa_1}{\tau_1}-1\big)B_1-\big(1+\frac{\kappa_1}{\tau_1}\big)T_{B_1}+\big(2-\frac{\kappa_1}{\tau_1}\big)B_1\wedge T_{B_1}}{\sqrt{6}\sqrt{1-\frac{\kappa_1}{\tau_1}+\big(\frac{\kappa_1}{\tau_1}\big)^2}} \tag{4.2.122}$$

şeklinde yazılır. (4.2.116), (4.2.119), (4.2.121) ve (4.2.122) vektörlerinde (4.2.3) den karşılıkları yazılırsa γ_{ξ_4}-Smarandache eğrisine ait Sabban çatısının ve $T'_{\gamma_{\xi_4}}$ vektörünün Bertrand partner eğrisine bağlı ifadesi,

$$\begin{aligned} \gamma_{\xi_4} &= \frac{1}{\sqrt{3}}(T_1-N_1+B_1), \\ T_{\gamma_{\xi_4}} &= \frac{1}{\sqrt{2\Big(1-\frac{\kappa_1}{\tau_1}+\big(\frac{\kappa_1}{\tau_1}\big)^2\Big)}}\Big(\frac{\kappa_1}{\tau_1}T_1-\big(1-\frac{\kappa_1}{\tau_1}\big)N_1-B_1\Big), \\ \gamma_{\xi_4}\wedge T_{\gamma_{\xi_4}} &= \frac{1}{\sqrt{6}\sqrt{1-\frac{\kappa_1}{\tau_1}+\big(\frac{\kappa_1}{\tau_1}\big)^2}}\Big(\big(2-\frac{\kappa_1}{\tau_1}\big)T_1+\big(1+\frac{\kappa_1}{\tau_1}\big)N_1+\big(2\frac{\kappa_1}{\tau_1}-1\big)B_1\Big), \\ T'_{\gamma_{\xi_4}} &= \frac{\sqrt{3}}{4\Big(1-\frac{\kappa_1}{\tau_1}+\big(\frac{\kappa_1}{\tau_1}\big)^2\Big)^2}\left(\vartheta_3 T_1-\vartheta_2 N_1+\vartheta_1 B_1\right) \end{aligned}$$

denklemlerine dönüşür. Geodezik eğrilik tanımından $\kappa_g^{\gamma_{\xi_4}}$ geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\gamma_{\xi_4}} = \frac{1}{4\sqrt{2}\Big(1+\frac{\kappa_1}{\tau_1}+\big(\frac{\kappa_1}{\tau_1}\big)^2\Big)^{\frac{5}{2}}}\Big(\big(2\frac{\kappa_1}{\tau_1}-1\big)\vartheta_1-\big(1+\frac{\kappa_1}{\tau_1}\big)\vartheta_2+\big(2-\frac{\kappa_1}{\tau_1}\big)\vartheta_3\Big)$$

şeklinde elde edilir.

Teorem 4.2.24 α eğrisinin Bertrand partner eğrisi α_1 olsun. α_1 eğrisinin binormaller göstergesine ait $B_1 T_{B_1}(B_1\wedge T_{B_1})$- Smarandache eğrisinin geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\gamma_{\xi_4}} = \frac{\big(2\cot(\varphi-\theta)-1\big)\overline{\vartheta}_1-\big(1+\cot(\varphi-\theta)\big)\overline{\vartheta}_2+\big(2-\cot(\varphi-\theta)\big)\overline{\vartheta}_3}{4\sqrt{2}\Big(1+\cot(\varphi-\theta)+\big(\cot(\varphi-\theta)\big)^2\Big)^{\frac{5}{2}}} \tag{4.2.123}$$

denklemiyle verilir. Burada

$$\begin{cases} \overline{\vartheta}_1 = -2+4\cot(\varphi-\theta)-\cot^2(\varphi-\theta)+2\cot^3(\varphi-\theta) \\ \quad +\cot'(\varphi-\theta)\big(2\cot(\varphi-\theta)-1\big) \\ \\ \overline{\vartheta}_2 = -2+2\cot(\varphi-\theta)-4\cot^2(\varphi-\theta)+\cot^3(\varphi-\theta)-2\cot^4(\varphi-\theta) \\ \quad -\cot'(\varphi-\theta)\big(1+\cot(\varphi-\theta)\big) \\ \\ \overline{\vartheta}_3 = 2\cot(\varphi-\theta)-4\cot^2(\varphi-\theta)+4\cot^3(\varphi-\theta)-2\cot^4(\varphi-\theta) \\ \quad +\cot'(\varphi-\theta)\big(2-\cot(\varphi-\theta)\big) \end{cases} \tag{4.2.124}$$

şeklinde birer katsayıdır.

İspat.

$$\gamma_{\xi_4}(s) = \frac{1}{\sqrt{3}}(B_1 + T_{B_1} + B_1 \wedge T_{B_1})$$

eşitliğinde sırasıyla (4.2.3), (3.3.2) ve (3.3.4) den karşılıkları yazılırsa γ_{ξ_4} vektörünün Bertrand eğrisine bağlı ifadesi

$$\gamma_{\xi_4}(s) = \frac{1}{\sqrt{3}}\big((\sin\theta+\cos\theta)T - N + (\cos\theta-\sin\theta)B\big) \tag{4.2.125}$$

şekline dönüşür. Bu ifadenin türevi alınırsa $T_{\gamma_{\xi_4}}(s)$ teğet vektörü

$$\begin{aligned} T_{\gamma_{\xi_4}}(s) &= \frac{\cot(\varphi-\theta)\cos\theta-\sin\theta}{\sqrt{2\big(1-\cot(\varphi-\theta)+\cot^2(\varphi-\theta)\big)}}T \\ &\quad -\frac{1-\cot(\varphi-\theta)}{\sqrt{2\big(1-\cot(\varphi-\theta)+\cot^2(\varphi-\theta)\big)}}N \\ &\quad -\frac{\cos\theta+\cot(\varphi-\theta)\sin\theta}{\sqrt{2\big(1-\cot(\varphi-\theta)+\cot^2(\varphi-\theta)\big)}}B \end{aligned} \tag{4.2.126}$$

şeklinde bulunur. Bu ifadenin türevi alınırsa katsayılar

$$\begin{cases} \overline{\vartheta}_1 = -2+4\cot(\varphi-\theta)-\cot^2(\varphi-\theta)+2\cot^3(\varphi-\theta) \\ \quad +\cot'(\varphi-\theta)\big(2\cot(\varphi-\theta)-1\big) \\ \overline{\vartheta}_2 = -2+2\cot(\varphi-\theta)-4\cot^2(\varphi-\theta)+\cot^3(\varphi-\theta)-2\cot^4(\varphi-\theta) \\ \quad -\cot'(\varphi-\theta)\big(1+\cot(\varphi-\theta)\big) \\ \overline{\vartheta}_3 = 2\cot(\varphi-\theta)-4\cot^2(\varphi-\theta)+4\cot^3(\varphi-\theta)-2\cot^4(\varphi-\theta) \\ \quad +\cot'(\varphi-\theta)\big(2-\cot(\varphi-\theta)\big) \end{cases}$$

olmak üzere $T'_{\gamma_{\xi_4}}(s)$ türev vektörü

$$\begin{aligned} T'_{\gamma_{\xi_4}}(s) &= \frac{(\overline{\vartheta}_1\sin\theta+\overline{\vartheta}_3\cos\theta)\sqrt{3}}{4\big(1-\cot(\varphi-\theta)+\cot^2(\varphi-\theta)\big)^2}T + \frac{\overline{\vartheta}_2\sqrt{3}}{4\big(1-\cot(\varphi-\theta)+\cot^2(\varphi-\theta)\big)^2}N \\ &\quad +\frac{(\overline{\vartheta}_1\cos\theta-\overline{\vartheta}_3\sin\theta)\sqrt{3}}{4\big(1-\cot(\varphi-\theta)+\cot^2(\varphi-\theta)\big)^2}B \end{aligned}$$

biçiminde olur. (4.2.125) ve (4.2.126) ifadelerinden elde edilen $\gamma_{\xi_4} \wedge T_{\gamma_{\xi_4}}$ vektörü

$$\begin{aligned}\gamma_{\xi_4} \wedge T_{\gamma_{\xi_4}}(s) \;=\; & \frac{(2\cot(\varphi-\theta)-1)\sin\theta+\big(2-\cot(\varphi-\theta)\big)\cos\theta}{\sqrt{6-6\cot(\varphi-\theta)+6\cot^2(\varphi-\theta)}}T \\ & +\frac{1+\cot(\varphi-\theta)}{\sqrt{6-6\cot(\varphi-\theta)+6\cot^2(\varphi-\theta)}}N \\ & +\frac{\big(2\cot(\varphi-\theta)-1\big)\cos\theta+(\cot(\varphi-\theta)-2)\sin\theta}{\sqrt{6-6\cot(\varphi-\theta)+6\cot^2(\varphi-\theta)}}B\end{aligned}$$

şeklinde yazılır. Geodezik eğrilik tanımından $\kappa_g^{\gamma_{\xi_4}}$ geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\gamma_{\xi_4}} = \frac{\big(2\cot(\varphi-\theta)-1\big)\overline{\vartheta}_1-\big(1+\cot(\varphi-\theta)\big)\overline{\vartheta}_2+\big(2-\cot(\varphi-\theta)\big)\overline{\vartheta}_3}{4\sqrt{2}\Big(1+\cot(\varphi-\theta)+\big(\cot(\varphi-\theta)\big)^2\Big)^{\frac{5}{2}}}$$

şeklinde elde edilir.

Tanım 4.2.13 $\alpha_1 : I \to S^2$ Bertrand partner eğrisinin birim Darboux vektörünün çizdiği küresel eğriye ait Sabban çatısı $\{C_1, T_{C_1}, C_1 \wedge T_{C_1}\}$ olsun.

$$\gamma_{\mu_1}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(C_1 + T_{C_1}) \tag{4.2.127}$$

şeklinde tanımlı vektörün çizdiği regüler eğriye $C_1 T_{C_1}$-Smarandache eğrisi denir, (Şenyurt ve ark., 2016a).

Teorem 4.2.25 $C_1 T_{C_1}$-Smarandache eğrisinin geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\gamma_{\mu_1}} = \frac{1}{\big(2+\big(\frac{\|W_1\|}{\varphi_1{}'}\big)^2\big)^{\frac{5}{2}}}\Big(\frac{\|W_1\|}{\varphi_1{}'}\iota_1 - \frac{\|W_1\|}{\varphi_1{}'}\iota_2 + 2\iota_3\Big) \tag{4.2.128}$$

denklemiyle verilir. Burada

$$\begin{cases} \iota_1 = -2-\big(\frac{\|W_1\|}{\varphi_1{}'}\big)^2+\big(\frac{\|W_1\|}{\varphi_1{}'}\big)'\big(\frac{\|W_1\|}{\varphi_1{}'}\big) \\ \iota_2 = -2-3\big(\frac{\|W_1\|}{\varphi_1{}'}\big)^2-\big(\frac{\|W_1\|}{\varphi_1{}'}\big)^4-\big(\frac{\|W_1\|}{\varphi_1{}'}\big)'\big(\frac{\|W_1\|}{\varphi_1{}'}\big) \\ \iota_3 = 2\big(\frac{\|W_1\|}{\varphi_1{}'}\big)+\big(\frac{\|W_1\|}{\varphi_1{}'}\big)^3+\big(\frac{\|W_1\|}{\varphi_1{}'}\big)' \end{cases} \tag{4.2.129}$$

şeklinde birer katsayıdır, (Şenyurt ve ark., 2016a).

İspat.

$$\gamma_{\mu_1}(s)=\frac{1}{\sqrt{2}}(C_1+T_{C_1})$$

eğrisinin $s_{\gamma_{\mu_1}}$ yay parametresine göre türevi alınırsa

$$T_{\gamma_{\mu_1}}\frac{ds_{\gamma_{\mu_1}}}{ds}=\frac{1}{\sqrt{2}}(-C_1+T_{C_1}+\frac{\|W_1\|}{\varphi_1{}'}C_1\wedge T_{C_1})$$

olur. Bu eşitliğin normu alınırsa $\frac{ds_{\gamma_{\mu_1}}}{ds}$ ifadesi

$$\frac{ds_{\gamma_{\mu_1}}}{ds}=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2+\left(\frac{\|W_1\|}{\varphi_1{}'}\right)^2}$$

bulunur. Bulunan bu ifade yukarıda yerine yazılırsa $T_{\gamma_{\mu_1}}(s)$ teğet vektörü

$$T_{\gamma_{\mu_1}}(s)=\frac{1}{\sqrt{2+(\frac{\|W_1\|}{\varphi_1{}'})^2}}(-C_1+T_{C_1}+\frac{\|W_1\|}{\varphi_1{}'}C_1\wedge T_{C_1}) \tag{4.2.130}$$

şeklinde elde edilir. Bu ifadenin tekrar türevi alınırsa katsayılar

$$\begin{cases}\iota_1=-2-(\frac{\|W_1\|}{\varphi_1{}'})^2+(\frac{\|W_1\|}{\varphi_1{}'})'(\frac{\|W_1\|}{\varphi_1{}'})\\ \iota_2=-2-3(\frac{\|W_1\|}{\varphi_1{}'})^2-(\frac{\|W_1\|}{\varphi_1{}'})^4-(\frac{\|W_1\|}{\varphi_1{}'})'(\frac{\|W_1\|}{\varphi_1{}'})\\ \iota_3=2(\frac{\|W_1\|}{\varphi_1{}'})+(\frac{\|W_1\|}{\varphi_1{}'})^3+(\frac{\|W_1\|}{\varphi_1{}'})'\end{cases}$$

olmak üzere $T'_{\gamma_{\mu_1}}(s)$ türev vektörü

$$T'_{\gamma_{\mu_1}}(s)=\frac{\sqrt{2}}{\left(2+(\frac{\|W_1\|}{\varphi_1{}'})^2\right)^2}(\iota_1C_1+\iota_2T_{C_1}+\iota_3C_1\wedge T_{C_1}) \tag{4.2.131}$$

şeklinde bulunur. (4.2.127) ve (4.2.130) ifadelerinden elde edilen $\gamma_{\mu_1}\wedge T_{\gamma_{\mu_1}}$ vektörü

$$\gamma_{\mu_1}\wedge T_{\gamma_{\mu_1}}=\frac{1}{\sqrt{4+2(\frac{\|W_1\|}{\varphi_1{}'})^2}}\left(\frac{\|W_1\|}{\varphi_1{}'}C_1-\frac{\|W_1\|}{\varphi_1{}'}T_{C_1}+2C_1\wedge T_{C_1}\right) \tag{4.2.132}$$

biçiminde yazılır. (4.2.127), (4.2.130), (4.2.131) ve (4.2.132) vektörlerinde (4.2.4) den karşılıkları yazılırsa γ_{μ_1}-Smarandache eğrisine ait Sabban çatısının ve $T'_{\gamma_{\mu_1}}$ vektörünün Bertrand partner eğrisine bağlı ifadesi

$$\begin{aligned}\gamma_{\mu_1}(s)&=\frac{1}{\sqrt{2}}\Big((\sin\varphi_1+\cos\varphi_1)T_1+(\cos\varphi_1-\sin\varphi_1)B_1\Big),\\ T_{\gamma_{\mu_1}}(s)&=\frac{\varphi_1{}'(\cos\varphi_1-\sin\varphi_1)}{\sqrt{2\varphi_1{}'^2+\|W_1\|^2}}T_1+\frac{\|W_1\|}{\sqrt{2\varphi_1{}'^2+\|W_1\|^2}}N_1-\frac{\varphi_1{}'(\cos\varphi_1+\sin\varphi_1)}{\sqrt{2\varphi_1{}'^2+\|W_1\|^2}}B_1,\end{aligned}$$

$$\gamma_{\mu_1} \wedge T_{\gamma_{\mu_1}}(s) = \frac{\|W_1\|(\cos\varphi_1 + \sin\varphi_1)}{\sqrt{2\|W_1\|^2 + 4\big(\varphi_1{}'\big)^2}} T_1 - \frac{\varphi_1{}'}{\sqrt{2\|W_1\|^2 + 4\big(\varphi_1{}'\big)^2}} N_1 + \frac{\|W_1\|(\cos\varphi_1 + \sin\varphi_1)}{\sqrt{2\|W_1\|^2 + 4\big(\varphi_1{}'\big)^2}} B_1,$$

$$T'_{\gamma_{\mu_1}}(s) = \frac{\big(\varphi_1{}'\big)^4\sqrt{2}(\iota_1 \sin\varphi_1 + \iota_2\cos\varphi_1)}{\Big(\|W_1\|^2 + \big(\varphi_1{}'\big)^2\Big)^2} T_1 + \frac{\iota_3\big(\varphi_1{}'\big)^4\sqrt{2}}{\Big(\|W_1\|^2 + \big(\varphi_1{}'\big)^2\Big)^2} N_1 + \frac{\big(\varphi_1{}'\big)^4\sqrt{2}(\iota_1 \cos\varphi_1 - \iota_2\sin\varphi_1)}{\Big(\|W_1\|^2 + \big(\varphi_1{}'\big)^2\Big)^2} B_1$$

denklemlerine dönüşür. Geodezik eğrilik tanımından $\kappa_g^{\gamma_{\mu_1}}$ geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\gamma_{\mu_1}} = \frac{1}{\big(2 + \big(\frac{\|W_1\|}{\varphi_1{}'}\big)^2\big)^{\frac{5}{2}}} \Big(\frac{\|W_1\|}{\varphi_1{}'}\iota_1 - \frac{\|W_1\|}{\varphi_1{}'}\iota_2 + 2\iota_3\Big)$$

şeklinde elde edilir.

Teorem 4.2.26 α eğrisinin Bertrand partner eğrisi α_1 olsun. α_1 eğrisinin birim Darboux vektörünün çizdiği küresel eğriye ait $C_1 T_{C_1}$ - Smarandache eğrisinin geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\gamma_{\mu_1}} = \frac{1}{\big(2 + \big(\frac{\|W\|}{\varphi'}\big)^2\big)^{\frac{5}{2}}} \Big(\frac{\|W\|}{\varphi'}\bar{\iota}_1 - \frac{\|W\|}{\varphi'}\bar{\iota}_2 + 2\bar{\iota}_3\Big) \tag{4.2.133}$$

denklemleriyle verilir. Burada

$$\begin{cases} \bar{\iota}_1 = -2 - \big(\frac{\|W\|}{\varphi'}\big)^2 + \big(\frac{\|W\|}{\varphi'}\big)'\big(\frac{\|W\|}{\varphi'}\big) \\ \bar{\iota}_2 = -2 - 3\big(\frac{\|W\|}{\varphi'}\big)^2 - \big(\frac{\|W\|}{\varphi'}\big)^4 - \big(\frac{\|W\|}{\varphi'}\big)'\big(\frac{\|W\|}{\varphi'}\big) \\ \bar{\iota}_3 = 2\big(\frac{\|W\|}{\varphi'}\big) + \big(\frac{\|W\|}{\varphi'}\big)^3 + 2\big(\frac{\|W\|}{\varphi'}\big)' \end{cases} \tag{4.2.134}$$

şeklinde birer katsayıdır, (Şenyurt ve ark., 2016a).

İspat.

$$\gamma_{\mu_1}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(C_1 + T_{C_1})$$

eşitliğinde sırasıyla (4.2.4), (3.3.2) ve (3.3.4) den karşılıkları yazılırsa γ_{μ_1} vektörünün Bertrand eğrisine bağlı ifadesi

$$\gamma_{\mu_1}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big((-\sin\varphi - \cos\varphi)T + (-\cos\varphi + \sin\varphi)B\Big) \tag{4.2.135}$$

biçiminde olur. Bu ifadenin türevi alınırsa $T_{\gamma_{\mu_1}}(s)$ teğet vektörü

$$T_{\gamma_{\mu_1}}(s) = \frac{\varphi'(\sin\varphi - \cos\varphi)}{\sqrt{2\varphi'^2 + \|W\|^2}} T - \frac{\|W\|}{\sqrt{2\varphi'^2 + \|W\|^2}} N + \frac{\varphi'(\cos\varphi + \sin\varphi)}{\sqrt{2\varphi'^2 + \|W\|^2}} B \tag{4.2.136}$$

şeklinde bulunur. Bu ifadenin tekrar türevi alınırsa katsayılar

$$\begin{cases} \overline{\iota}_1 = -2 - \left(\frac{\|W\|}{\varphi'}\right)^2 + \left(\frac{\|W\|}{\varphi'}\right)'\left(\frac{\|W\|}{\varphi'}\right) \\ \overline{\iota}_2 = -2 - 3\left(\frac{\|W\|}{\varphi'}\right)^2 - \left(\frac{\|W\|}{\varphi'}\right)^4 - \left(\frac{\|W\|}{\varphi'}\right)'\left(\frac{\|W\|}{\varphi'}\right) \\ \overline{\iota}_3 = 2\left(\frac{\|W\|}{\varphi'}\right) + \left(\frac{\|W\|}{\varphi'}\right)^3 + 2\left(\frac{\|W\|}{\varphi'}\right)' \end{cases}$$

olmak üzere $T'_{\gamma_{\mu_1}}(s)$ türev vektörü

$$\begin{aligned} T'_{\gamma_{\mu_1}}(s) \quad = \quad & \frac{(\varphi')^4\sqrt{2}(-\overline{\iota}_1 \sin\varphi - \overline{\iota}_2 \cos\varphi)}{\left(\|W\|^2 + 2\varphi'^2\right)^2} T - \frac{\overline{\iota}_3(\varphi')^4\sqrt{2}}{\left(\|W\|^2 + 2\varphi'^2\right)^2} N \\ & + \frac{(\varphi')^4\sqrt{2}(-\overline{\iota}_1 \cos\varphi + \overline{\iota}_2 \sin\varphi)}{\left(\|W\|^2 + 2\varphi'^2\right)^2} B \end{aligned}$$

biçiminde olur. (4.2.135) ve (4.2.136) ifadelerinden elde edilen $\gamma_{\mu_1} \wedge T_{\gamma_{\mu_1}}$ vektörü

$$\gamma_{\mu_1} \wedge T_{\gamma_{\mu_1}}(s) = \frac{\|W\|(\cos\varphi - \sin\varphi)}{\sqrt{2\|W\|^2 + 4\varphi'^2}} T - \frac{\varphi'}{\sqrt{2\|W\|^2 + 4\varphi'^2}} N - \frac{\|W\|(\cos\varphi + \sin\varphi)}{\sqrt{2\|W\|^2 + 4\varphi'^2}} B$$

şeklinde yazılır. Geodezik eğrilik tanımından $\kappa_g^{\gamma_{\mu_1}}$ geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\gamma_{\mu_1}} = \frac{1}{\left(2 + \left(\frac{\|W\|}{\varphi'}\right)^2\right)^{\frac{5}{2}}} \left(\frac{\|W\|}{\varphi'} \overline{\iota}_1 - \frac{\|W\|}{\varphi'} \overline{\iota}_2 + 2\overline{\iota}_3\right)$$

şeklinde elde edilir.

Tanım 4.2.14 $\alpha_1 : I \to S^2$ Bertrand partner eğrisinin birim Darboux vektörünün çizdiği küresel eğriye ait Sabban çatısı $\{C_1, T_{C_1}, C_1 \wedge T_{C_1}\}$ olsun.

$$\gamma_{\mu_2}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(C_1 + C_1 \wedge T_{C_1}) \tag{4.2.137}$$

şeklinde tanımlı vektörün çizdiği regüler eğriye $C_1(C_1 \wedge T_{C_1})$-Smarandache eğrisi denir, (Şenyurt ve ark., 2016a).

Teorem 4.2.27 $C_1(C_1 \wedge T_{C_1})$-Smarandache eğrisinin geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\gamma_{\mu_2}} = \frac{\|W_1\| + \varphi_1'}{\varphi_1' - \|W_1\|} \tag{4.2.138}$$

denklemiyle verilir, (Şenyurt ve ark., 2016a).

İspat.

$$\gamma_{\mu_2}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(C_1 + C_1 \wedge T_{C_1})$$

eğrisinin $s_{\gamma_{\mu_2}}$ yay parametresine göre türevi alınırsa

$$T_{\gamma_{\mu_2}}\frac{ds_{\gamma_{\mu_2}}}{ds}=\frac{1}{\sqrt{2}}\big(1-\frac{\|W_1\|}{\varphi_1{}'}\big)T_{C_1}$$

olur. Bu eşitliğin normu alınırsa $\frac{ds_{\gamma_{\mu_2}}}{ds}$ ifadesi

$$\frac{ds_{\gamma_{\mu_2}}}{ds}=\frac{1}{\sqrt{2}}\big(1-\frac{\|W_1\|}{\varphi_1{}'}\big)$$

bulunur. Bulunan bu ifade yukarıda yerine yazılırsa $T_{\gamma_{\mu_2}}(s)$ teğet vektörü

$$T_{\gamma_{\mu_2}}(s)=T_{C_1} \tag{4.2.139}$$

şeklinde elde edilir. Bu ifadenin tekrar türevi alınırsa $T'_{\gamma_{\mu_2}}(s)$ türev vektörü

$$T'_{\gamma_{\mu_2}}(s)=\frac{\sqrt{2}}{(1-\frac{\|W_1\|}{\varphi_1{}'})}\big(-C_1+\frac{\|W_1\|}{\varphi_1{}'}C_1\wedge T_{C_1}\big) \tag{4.2.140}$$

biçiminde olur. (4.2.137) ve (4.2.139) ifadelerinden elde edilen $\gamma_{\mu_2}\wedge T_{\gamma_{\mu_2}}$ vektörü

$$\gamma_{\mu_2}\wedge T_{\gamma_{\mu_2}}(s)=\frac{1}{\sqrt{2}}(-C_1+C_1\wedge T_{C_1}) \tag{4.2.141}$$

şeklinde bulunur. (4.2.137), (4.2.139), (4.2.140) ve (4.2.141) vektörlerinde (4.2.4) den karşılıkları yazılırsa γ_{μ_2}-Smarandache eğrisine ait Sabban çatısının ve $T'_{\gamma_{\mu_2}}$ vektörünün Bertrand partner eğrisine bağlı ifadesi,

$$\begin{aligned}
\gamma_{\mu_2}(s) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin\varphi_1 T_1+N_1+\cos\varphi_1 B_1),\\
T_{\gamma_{\mu_2}}(s) &= \cos\varphi_1 T_1-\sin\varphi_1 B_1,\\
\gamma_{\mu_2}\wedge T_{\gamma_{\mu_2}}(s) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(-\sin\varphi_1 T_1+N_1-\cos\varphi_1 B_1),\\
T'_{\gamma_{\mu_2}}(s) &= \frac{-\varphi_1{}'\sin\varphi_1\sqrt{2}}{\varphi_1{}'-\|W_1\|}T_1+\frac{\|W_1\|\sqrt{2}}{\varphi_1{}'-\|W_1\|}N_1-\frac{\varphi_1{}'\sqrt{2}\cos\varphi_1}{\varphi_1{}'-\|W_1\|}B_1
\end{aligned}$$

eşitliklerine dönüşür. Geodezik eğrilik tanımından $\kappa_g^{\gamma_{\mu_2}}$ geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\gamma_{\mu_2}}=\frac{\|W_1\|+\varphi_1{}'}{\varphi_1{}'-\|W_1\|}$$

biçiminde olur.

Teorem 4.2.28 α eğrisinin Bertrand partner eğrisi α_1 olsun. α_1 eğrisinin birim Darboux vektörünün çizdiği küresel eğriye ait $C_1(C_1\wedge T_{C_1})$- Smarandache eğrisinin geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\gamma_{\mu_2}}=\frac{\|W\|+\varphi'}{\varphi'-\|W\|} \tag{4.2.142}$$

denklemleriyle verilir, (Şenyurt ve ark., 2016a).

İspat.

$$\gamma_{\mu_2}(s)=\frac{1}{\sqrt{2}}(C_1+C_1\wedge T_{C_1})$$

eşitliğinde sırasıyla (4.2.4), (3.3.2) ve (3.3.4) den karşılıkları yazılırsa γ_{μ_2} vektörünün Bertrand eğrisine bağlı ifadesi

$$\gamma_{\mu_2}(s)=\frac{1}{\sqrt{2}}(-\sin\varphi\,T+N-\cos\varphi\,B) \tag{4.2.143}$$

biçiminde olur. Bu ifadenin türevi alınırsa $T_{\gamma_{\mu_2}}(s)$ teğet vektörü

$$T_{\gamma_{\mu_2}}(s)=-\cos\varphi\,T+\sin\varphi\,B \tag{4.2.144}$$

şeklinde bulunur. Tekrar türev alınırsa $T'_{\gamma_{\mu_2}}(s)$ türev vektörü

$$T'_{\gamma_{\mu_2}}(s)=\frac{\varphi'\sqrt{2}\sin\varphi}{\|W\|-\varphi'}T-\frac{\|W\|\sqrt{2}}{\varphi'-\|W\|}N+\frac{\varphi'\sqrt{2}\cos\varphi}{\varphi'-\|W\|}B$$

eşitliğiyle bulunur. (4.2.143) ve (4.2.144) ifadelerinden elde edilen $\gamma_{\mu_2}\wedge T_{\gamma_{\mu_2}}$ vektörü

$$\gamma_{\mu_2}\wedge T_{\gamma_{\mu_2}}(s)=\frac{1}{\sqrt{2}}(\sin\varphi\,T-N+\cos\varphi\,B)$$

biçiminde yazılır. Geodezik eğrilik tanımından $\kappa_g^{\gamma_{\mu_2}}$ geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\gamma_{\mu_2}}=\frac{\|W\|+\varphi'}{\varphi'-\|W\|}$$

şeklinde elde edilir.

Tanım 4.2.15 $\alpha_1: I\to S^2$ Bertrand partner eğrisinin birim Darboux vektörünün çizdiği küresel eğriye ait Sabban çatısı $\{C_1,T_{C_1},C_1\wedge T_{C_1}\}$ olsun.

$$\gamma_{\mu_3}(s)=\frac{1}{\sqrt{2}}(T_{C_1}+C_1\wedge T_{C_1}) \tag{4.2.145}$$

şeklinde tanımlı vektörün çizdiği regüler eğriye $T_{C_1}(C_1\wedge T_{C_1})$-Smarandache eğrisi denir, (Şenyurt ve ark., 2016a).

Teorem 4.2.29 $T_{C_1}(C_1\wedge T_{C_1})$-Smarandache eğrisinin geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\gamma_{\mu_3}}=\frac{1}{\left(1+2\left(\frac{\|W_1\|}{\varphi_1{}'}\right)^2\right)^{\frac{5}{2}}}\left(2\frac{\|W_1\|}{\varphi_1{}'}\nu_1-\nu_2+\nu_3\right) \tag{4.2.146}$$

denklemiyle verilir. Burada

$$\begin{cases}\nu_1=\frac{\|W_1\|}{\varphi_1{}'}+2\left(\frac{\|W_1\|}{\varphi_1{}'}\right)^3+2\left(\frac{\|W_1\|}{\varphi_1{}'}\right)'\left(\frac{\|W_1\|}{\varphi_1{}'}\right)\\ \nu_2=-1-3\left(\frac{\|W_1\|}{\varphi_1{}'}\right)^2-2\left(\frac{\|W_1\|}{\varphi_1{}'}\right)^4-\left(\frac{\|W_1\|}{\varphi_1{}'}\right)'\\ \nu_3=-\left(\frac{\|W_1\|}{\varphi_1{}'}\right)^2-2\left(\frac{\|W_1\|}{\varphi_1{}'}\right)^4+\left(\frac{\|W_1\|}{\varphi_1{}'}\right)'\end{cases} \tag{4.2.147}$$

şeklinde birer katsayıdır, (Şenyurt ve ark., 2016a).

İspat.

$$\gamma_{\mu_3}(s)=\frac{1}{\sqrt{2}}(T_{C_1}+C_1\wedge T_{C_1})$$

eğrisinin $s_{\gamma_{\mu_3}}$ yay parametresine göre türevi alınırsa

$$T_{\gamma_{\mu_3}}\frac{ds_{\gamma_{\mu_3}}}{ds}=\frac{1}{\sqrt{2}}(-C_1-\frac{\|W_1\|}{\varphi_1{}'}T_{C_1}+\frac{\|W_1\|}{\varphi_1{}'}C_1\wedge T_{C_1})$$

olur. Bu eşitliğin normu alınırsa $\frac{ds_{\gamma_{\mu_3}}}{ds}$ ifadesi

$$\frac{ds_{\gamma_{\mu_3}}}{ds}=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1+2\Big(\frac{\|W_1\|}{\varphi_1{}'}\Big)^2}$$

bulunur. Bu ifade yukarıda yerine yazılırsa $T_{\gamma_{\mu_3}}(s)$ teğet vektörü

$$T_{\gamma_{\mu_3}}(s)=\frac{1}{\sqrt{1+2(\frac{\|W_1\|}{\varphi_1{}'})^2}}(-C_1-\frac{\|W_1\|}{\varphi_1{}'}T_{C_1}+\frac{\|W_1\|}{\varphi_1{}'}C_1\wedge T_{C_1}) \tag{4.2.148}$$

biçiminde olur. Bu ifadenin tekrar türevi alınırsa katsayılar,

$$\begin{cases} \nu_1=\frac{\|W_1\|}{\varphi_1{}'}+2(\frac{\|W_1\|}{\varphi_1{}'})^3+2(\frac{\|W_1\|}{\varphi_1{}'})'(\frac{\|W_1\|}{\varphi_1{}'}) \\ \nu_2=-1-3(\frac{\|W_1\|}{\varphi_1{}'})^2-2(\frac{\|W_1\|}{\varphi_1{}'})^4-(\frac{\|W_1\|}{\varphi_1{}'})' \\ \nu_3=-(\frac{\|W_1\|}{\varphi_1{}'})^2-2(\frac{\|W_1\|}{\varphi_1{}'})^4+(\frac{\|W_1\|}{\varphi_1{}'})' \end{cases}$$

olmak üzere $T'_{\gamma_{\mu_3}}(s)$ türev vektörü

$$T'_{\gamma_{\mu_3}}(s)=\frac{\sqrt{2}}{\Big(1+2(\frac{\|W_1\|}{\varphi_1{}'})^2\Big)^2}(\nu_1C_1+\nu_2T_{C_1}+\nu_3C_1\wedge T_{C_1}) \tag{4.2.149}$$

şeklinde elde edilir. (4.2.145) ve (4.2.148) ifadelerinden elde edilen $\gamma_{\mu_3}\wedge T_{\gamma_{\mu_3}}$ vektörü

$$\gamma_{\mu_3}\wedge T_{\gamma_{\mu_3}}(s)=\frac{1}{\sqrt{2+4(\frac{\|W_1\|}{\varphi_1{}'})^2}}(2\frac{\|W_1\|}{\varphi_1{}'}C_1-T_{C_1}+C_1\wedge T_{C_1}) \tag{4.2.150}$$

şeklinde yazılır. (4.2.145), (4.2.148), (4.2.149) ve (4.2.150) vektörlerinde (4.2.4) den karşılıkları yazılırsa γ_{μ_3}-Smarandache eğrisine ait Sabban çatısının ve $T'_{\gamma_{\mu_3}}$ vektörünün Bertrand partner eğrisine bağlı ifadesi,

$$\begin{aligned}\gamma_{\mu_3}(s) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\cos\varphi_1T_1+N_1-\sin\varphi_1B_1\big),\\ T_{\gamma_{\mu_3}}(s) &= \frac{-\varphi_1{}'\sin\varphi_1\|W_1\|\cos\varphi_1}{\sqrt{2\|W_1\|^2+(\varphi_1{}')^2}}T_1+\frac{\|W_1\|}{\sqrt{2\|W_1\|^2+(\varphi_1{}')^2}}N_1\\ &\quad+\frac{\|W_1\|\sin\varphi_1-\varphi_1{}'\cos\varphi_1}{\sqrt{2\|W_1\|^2+(\varphi_1{}')^2}}B_1,\end{aligned}$$

$$\gamma_{\mu_3} \wedge T_{\gamma_{\mu_3}}(s) = \frac{2\|W_1\| \sin\varphi_1 - \varphi_1{}' \cos\varphi_1}{\sqrt{4\|W_1\|^2 + 2(\varphi_1{}')^2}} T_1 + \frac{\varphi_1{}'}{\sqrt{4\|W_1\|^2 + 2(\varphi_1{}')^2}} N_1 + \frac{\|W_1\| \cos\varphi_1 + \varphi_1{}' \sin\varphi_1}{\sqrt{2\|W_1\|^2 + 4(\varphi_1{}')^2}} B_1,$$

$$T'_{\gamma_{\mu_3}}(s) = \frac{(\varphi_1{}')^4 \sqrt{2}(\nu_2 \sin\varphi_1 - \nu_1 \cos\varphi_1)}{\left(2\|W_1\|^2 + (\varphi_1{}')^2\right)^2} T_1 + \frac{\nu_3 (\varphi_1{}')^4 \sqrt{2}}{\left(2\|W_1\|^2 + (\varphi_1{}')^2\right)^2} N_1 + \frac{(\varphi_1{}')^4 \sqrt{2}(\nu_1 \sin\varphi_1 + \nu_2 \cos\varphi_1)}{\left(2\|W_1\|^2 + (\varphi_1{}')^2\right)^2} B_1$$

eşitliklerine dönüşür. Geodezik eğrilik tanımından $\kappa_g^{\gamma_{\mu_3}}$ geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\gamma_{\mu_3}} = \frac{1}{\left(1 + 2\left(\frac{\|W_1\|}{\varphi_1{}'}\right)^2\right)^{\frac{5}{2}}} \left(2\frac{\|W_1\|}{\varphi_1{}'}\nu_1 - \nu_2 + \nu_3\right)$$

biçiminde olur.

Teorem 4.2.30 α eğrisinin Bertrand partner eğrisi α_1 olsun. α_1 eğrisinin birim Darboux vektörünün çizdiği küresel eğriye ait $T_{C_1}(C_1 \wedge T_{C_1})$- Smarandache eğrisinin geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\gamma_{\mu_3}} = \frac{1}{\left(1 + 2\left(\frac{\|W\|}{\varphi'}\right)^2\right)^{\frac{5}{2}}} \left(2\frac{\|W\|}{\varphi'}\overline{\nu}_1 - \overline{\nu}_2 + \overline{\nu}_3\right) \tag{4.2.151}$$

denklemiyle verilir. Burada

$$\begin{cases} \overline{\nu}_1 = \left(\frac{\|W\|}{\varphi'}\right) + \left(\frac{\|W\|}{\varphi'}\right)^3 + 2\left(\frac{\|W\|}{\varphi'}\right)'\left(\frac{\|W\|}{\varphi'}\right) \\ \overline{\nu}_2 = -1 - 3\left(\frac{\|W\|}{\varphi'}\right)^2 - 2\left(\frac{\|W\|}{\varphi'}\right)^4 - \left(\frac{\|W\|}{\varphi'}\right)' \\ \overline{\nu}_3 = -\left(\frac{\|W\|}{\varphi'}\right)^2 - 2\left(\frac{\|W\|}{\varphi'}\right)^4 + \left(\frac{\|W\|}{\varphi'}\right)' \end{cases} \tag{4.2.152}$$

şeklinde birer katsayıdır, (Şenyurt ve ark., 2016a).

İspat.

$$\gamma_{\mu_3}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(T_{C_1} + C_1 \wedge T_{C_1})$$

eşitliğinde sırasıyla (4.2.4), (3.3.2) ve (3.3.4) den karşılıkları yazılırsa γ_{μ_3} vektörünün Bertrand eğrisine bağlı ifadesi

$$\gamma_{\mu_3}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\cos\varphi_1 T + N + \sin\varphi B\right) \tag{4.2.153}$$

biçiminde olur. Bu ifadenin türevi alınırsa $T_{\gamma_{\mu_3}}(s)$ teğet vektörü

$$T_{\gamma_{\mu_3}}(s) = \frac{\varphi' \sin\varphi + \|W\| \cos\varphi}{\sqrt{2\|W\|^2 + \varphi'^2}} T + \frac{\|W\|}{\sqrt{2\|W\|^2 + \varphi'^2}} N + \frac{\varphi' \cos\varphi - \|W\| \sin\varphi}{\sqrt{2\|W\|^2 + \varphi'^2}} B \tag{4.2.154}$$

şeklinde bulunur. Tekrar türev alınırsa katsayılar

$$\begin{cases} \overline{v}_1 = \left(\frac{\|W\|}{\varphi'}\right) + \left(\frac{\|W\|}{\varphi'}\right)^3 + 2\left(\frac{\|W\|}{\varphi'}\right)'\left(\frac{\|W\|}{\varphi'}\right) \\ \overline{v}_2 = -1 - 3\left(\frac{\|W\|}{\varphi'}\right)^2 - 2\left(\frac{\|W\|}{\varphi'}\right)^4 - \left(\frac{\|W\|}{\varphi'}\right)' \\ \overline{v}_3 = -\left(\frac{\|W\|}{\varphi'}\right)^2 - 2\left(\frac{\|W\|}{\varphi'}\right)^4 + \left(\frac{\|W\|}{\varphi'}\right)' \end{cases}$$

olmak üzere $T'_{\gamma_{\mu_3}}(s)$ türev vektörü

$$\begin{aligned} T'_{\gamma_{\mu_3}}(s) &= \frac{\varphi'^4\sqrt{2}(-\overline{v}_1 \sin\varphi - \overline{v}_2\cos\varphi)}{\left(2\|W\|^2+\varphi'^2\right)^2}T - \frac{\overline{v}_3\varphi'^4\sqrt{2}}{\left(2\|W\|^2+\varphi'^2\right)^2}N \\ &\quad + \frac{\varphi'^4\sqrt{2}(\overline{v}_2 \sin\varphi - \overline{v}_1\cos\varphi)}{\left(2\|W\|^2+\varphi'^2\right)^2}B \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. (4.2.153) ve (4.2.154) ifadelerinden elde edilen $\gamma_{\mu_3} \wedge T_{\gamma_{\mu_3}}$ vektörü

$$\gamma_{\mu_3} \wedge T_{\gamma_{\mu_3}}(s) = \frac{\varphi'\cos\varphi - 2\|W\|\sin\varphi}{\sqrt{4\|W\|^2+2\varphi'^2}}T + \frac{\varphi'}{\sqrt{4\|W\|^2+2\varphi'^2}}N - \frac{\|W\|\cos\varphi + \varphi'\sin\varphi}{\sqrt{4\|W\|^2+2\varphi'^2}}B$$

şeklinde yazılır. Geodezik eğrilik tanımından $\kappa_g^{\gamma_{\mu_3}}$ geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\gamma_{\mu_3}} = \frac{1}{\left(1+2\left(\frac{\|W\|}{\varphi'}\right)^2\right)^{\frac{5}{2}}}\left(2\frac{\|W\|}{\varphi'}\overline{v}_1 - \overline{v}_2 + \overline{v}_3\right)$$

biçiminde olur.

Tanım 4.2.16 $\alpha_1 : I \to S^2$ Bertrand partner eğrisinin birim Darboux vektörünün çizdiği küresel eğriye ait Sabban çatısı $\{C_1, T_{C_1}, C_1 \wedge T_{C_1}\}$ olsun.

$$\gamma_{\mu_4}(s) = \frac{1}{\sqrt{3}}(C_1 + T_{C_1} + C_1 \wedge T_{C_1}) \tag{4.2.155}$$

şeklinde tanımlı vektörün çizdiği regüler eğriye $C_1 T_{C_1}(C_1 \wedge T_{C_1})$-Smarandache eğrisi denir, (Şenyurt ve ark., 2016a).

Teorem 4.2.31 $C_1 T_{C_1}(C_1 \wedge T_{C_1})$-Smarandache eğrisinin geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\gamma_{\mu_4}} = \frac{\left(2\frac{\|W_1\|}{\varphi_1{}'} - 1\right)\ell_1 + \left(-1 - \frac{\|W_1\|}{\varphi_1{}'}\right)\ell_2 + \left(2 - \frac{\|W_1\|}{\varphi_1{}'}\right)\ell_3}{4\sqrt{2}\left(1 - \frac{\|W_1\|}{\varphi_1{}'} + \left(\frac{\|W_1\|}{\varphi_1{}'}\right)^2\right)^{\frac{5}{2}}} \tag{4.2.156}$$

denklemiyle verilir. Burada

$$\begin{cases} \ell_1 = -2 + 4\left(\frac{\|W_1\|}{\varphi_1{}'}\right) - \left(\frac{\|W_1\|}{\varphi_1{}'}\right)^2 + 2\left(\frac{\|W_1\|}{\varphi_1{}'}\right)^3 + \left(\frac{\|W_1\|}{\varphi_1{}'}\right)'\left(2\frac{\|W_1\|}{\varphi_1{}'} - 1\right) \\ \ell_2 = -2 + 2\left(\frac{\|W_1\|}{\varphi_1{}'}\right) - 4\left(\frac{\|W_1\|}{\varphi_1{}'}\right)^2 + 2\left(\frac{\|W_1\|}{\varphi_1{}'}\right)^3 - 2\left(\frac{\|W_1\|}{\varphi_1{}'}\right)^4 - \left(\frac{\|W_1\|}{\varphi_1{}'}\right)'\left(1 + \frac{\|W_1\|}{\varphi_1{}'}\right) \\ \ell_3 = 2\left(\frac{\|W_1\|}{\varphi_1{}'}\right) - 4\left(\frac{\|W_1\|}{\varphi_1{}'}\right)^2 + 4\left(\frac{\|W_1\|}{\varphi_1{}'}\right)^3 - 2\left(\frac{\|W_1\|}{\varphi_1{}'}\right)^4 + \left(\frac{\|W_1\|}{\varphi_1{}'}\right)'\left(2 - \frac{\|W_1\|}{\varphi_1{}'}\right) \end{cases} \tag{4.2.157}$$

şeklinde birer katsayıdır, (Şenyurt ve ark., 2016a).

İspat.

$$\gamma_{\mu_4}(s)=\frac{1}{\sqrt{3}}(C_1+T_{C_1}+C_1\wedge T_{C_1})$$

eğrisinin $s_{\gamma_{\mu_4}}$ yay parametresine göre türevi alınırsa

$$T_{\gamma_{\mu_4}}\frac{ds_{\gamma_{\mu_4}}}{ds}=\frac{1}{\sqrt{3}}\Big(-C_1+(1-\frac{\|W_1\|}{\varphi_1{}'})T_{C_1}+\frac{\|W_1\|}{\varphi_1{}'}C_1\wedge T_{C_1}\Big)$$

olur. Bu eşitliğin normu alınırsa $\frac{ds_{\gamma_{\mu_4}}}{ds}$ ifadesi

$$\frac{ds_{\gamma_{\mu_4}}}{ds}=\sqrt{\frac{2}{3}\Big(1-\frac{\|W_1\|}{\varphi_1{}'}+(\frac{\|W_1\|}{\varphi_1{}'})^2\Big)}$$

bulunur. Bulunan bu ifade yukarıda yerine yazılırsa $T_{\gamma_{\mu_4}}(s)$ teğet vektörü

$$T_{\gamma_{\mu_4}}(s)=\frac{1}{\sqrt{2\Big(1-\frac{\|W_1\|}{\varphi_1{}'}+(\frac{\|W_1\|}{\varphi_1{}'})^2\Big)}}\Big(-C_1+(1-\frac{\|W_1\|}{\varphi_1{}'})T_{C_1}+\frac{\|W_1\|}{\varphi_1{}'}C_1\wedge T_{C_1}\Big)$$

(4.2.158)

biçiminde olur. Bu ifadenin tekrar türevi alınırsa katsayılar

$$\begin{cases}\ell_1=-2+4(\frac{\|W_1\|}{\varphi_1{}'})-(\frac{\|W_1\|}{\varphi_1{}'})^2+2(\frac{\|W_1\|}{\varphi_1{}'})^3+(\frac{\|W_1\|}{\varphi_1{}'})'(2\frac{\|W_1\|}{\varphi_1{}'}-1)\\ \ell_2=-2+2(\frac{\|W_1\|}{\varphi_1{}'})-4(\frac{\|W_1\|}{\varphi_1{}'})^2+2(\frac{\|W_1\|}{\varphi_1{}'})^3-2(\frac{\|W_1\|}{\varphi_1{}'})^4-(\frac{\|W_1\|}{\varphi_1{}'})'(1+\frac{\|W_1\|}{\varphi_1{}'})\\ \ell_3=2(\frac{\|W_1\|}{\varphi_1{}'})-4(\frac{\|W_1\|}{\varphi_1{}'})^2+4(\frac{\|W_1\|}{\varphi_1{}'})^3-2(\frac{\|W_1\|}{\varphi_1{}'})^4+(\frac{\|W_1\|}{\varphi_1{}'})'(2-\frac{\|W_1\|}{\varphi_1{}'})\end{cases}$$

olmak üzere $T'_{\gamma_{\mu_4}}(s)$ türev vektörü

$$T'_{\gamma_{\mu_4}}(s)=\frac{\sqrt{3}}{4\Big(1-\frac{\|W_1\|}{\varphi_1{}'}+(\frac{\|W_1\|}{\varphi_1{}'})^2\Big)^2}(\ell_1C_1+\ell_2T_{C_1}+\ell_3C_1\wedge T_{C_1})\qquad(4.2.159)$$

şeklinde elde edilir. (4.2.155) ve (4.2.158) ifadelerinden elde edilen $\gamma_{\mu_4}\wedge T_{\gamma_{\mu_4}}$ vektörü

$$\gamma_{\mu_4}\wedge T_{\gamma_{\mu_4}}(s)=\frac{(2\frac{\|W_1\|}{\varphi_1{}'}-1)C_1-(1+\frac{\|W_1\|}{\varphi_1{}'})T_{C_1}+(2-\frac{\|W_1\|}{\varphi_1{}'})C_1\wedge T_{C_1}}{\sqrt{6}\sqrt{1-\frac{\|W_1\|}{\varphi_1{}'}+(\frac{\|W_1\|}{\varphi_1{}'})^2}}\qquad(4.2.160)$$

şeklinde bulunur. (4.2.155), (4.2.158), (4.2.159) ve (4.2.160) vektörlerinde (4.2.4) den karşılıkları yazılırsa γ_{μ_4}-Smarandache eğrisine ait Sabban çatısının ve $T'_{\gamma_{\mu_4}}$ vektörünün Bertrand partner eğrisine bağlı ifadesi,

$$\gamma_{\mu_4}(s)=\frac{1}{\sqrt{3}}\big((\sin\varphi_1+\cos\varphi_1)T_1+N_1+(\cos\varphi_1-\sin\varphi_1)B_1\big),$$

$$T_{\gamma_{\mu_4}}(s) = \frac{(\varphi_1{}' - \|W_1\|)\cos\varphi_1 - \varphi_1{}'\sin\varphi_1}{\sqrt{2(\|W_1\|^2 - \|W_1\|\varphi_1{}' + \varphi_1{}'^2)}}T_1 + \frac{\|W_1\|}{\sqrt{2(\|W_1\|^2 - \|W_1\|\varphi_1{}' + \varphi_1{}'^2)}}N_1$$
$$-\frac{\varphi_1{}'\cos\varphi_1 - (\|W_1\| - \varphi_1)'\sin\varphi_1}{\sqrt{2(\|W_1\|^2 - \|W_1\|\varphi_1{}' + \varphi_1{}'^2)}}B_1,$$

$$\gamma_{\mu_4} \wedge T_{\gamma_{\mu_4}}(s) = \frac{(2\|W_1\| - \varphi_1{}')\sin\varphi_1 - (\|W_1\| + \varphi_1{}')\cos\varphi_1}{\sqrt{6\|W_1\|^2 - 6\|W_1\|\varphi_1{}' + 6\varphi_1{}'^2}}T_1$$
$$+\frac{2\varphi_1{}' - \|W_1\|}{\sqrt{6\|W_1\|^2 - 6\|W_1\|\varphi_1{}' + 6\varphi_1{}'^2}}N_1$$
$$+\frac{(2\|W_1\| - \varphi_1{}')\cos\varphi_1 + (\|W_1\| + \varphi_1{}')\sin\varphi_1}{\sqrt{6\|W_1\|^2 - 6\|W_1\|\varphi_1{}' + 6\varphi_1{}'^2}}B_1,$$

$$T'_{\gamma_{\mu_4}}(s) = \frac{\left(\varphi_1{}'\right)^4\sqrt{3}(\ell_1\sin\varphi_1 + \ell_2\cos\varphi_1)}{4\left(\|W_1\|^2 - \|W_1\|\varphi_1{}' + \varphi_1{}'^2\right)^2}T_1 + \frac{\ell_3\left(\varphi_1{}'\right)^4\sqrt{3}}{4\left(\|W_1\|^2 - \|W_1\|\varphi_1{}' + \varphi_1{}'^2\right)^2}N_1$$
$$+\frac{\left(\varphi_1{}'\right)^4\sqrt{3}(\ell_1\cos\varphi_1 - \ell_2\sin\varphi_1)}{4\left(\|W_1\|^2 - \|W_1\|\varphi_1{}' + \varphi_1{}'^2\right)^2}B_1$$

eşitliklerine dönüşür. Geodezik eğrilik tanımından $\kappa_g^{\gamma_{\mu_4}}$ geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\gamma_{\mu_4}} = \frac{\left(2\frac{\|W_1\|}{\varphi_1{}'} - 1\right)\ell_1 + \left(-1 - \frac{\|W_1\|}{\varphi_1{}'}\right)\ell_2 + \left(2 - \frac{\|W_1\|}{\varphi_1{}'}\right)\ell_3}{4\sqrt{2}\left(1 - \frac{\|W_1\|}{\varphi_1{}'} + \left(\frac{\|W_1\|}{\varphi_1{}'}\right)^2\right)^{\frac{5}{2}}}$$

biçiminde olur.

Teorem 4.2.32 α eğrisinin Bertrand partner eğrisi α_1 olsun. α_1 eğrisinin birim Darboux vektörünün çizdiği küresel eğriye ait $C_1T_{C_1}(C_1 \wedge T_{C_1})$- Smarandache eğrisinin geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\gamma_{\mu_4}} = \frac{\varphi'^5\left(2\|W\| - \varphi'\right)\overline{\ell}_1 - \varphi'^5\left(\|W\| + \varphi'\right)\overline{\ell}_2 + \varphi'^5\left(2\varphi' - \|W\|\right)\overline{\ell}_3}{4\sqrt{2}\left(\varphi'^2 - \|W\|\varphi' + \|W\|^2\right)^{\frac{5}{2}}} \tag{4.2.161}$$

denklemiyle verilir. Burada

$$\begin{cases} \overline{\ell}_1 = -2 + 4\frac{\|W\|}{\varphi'} + 4\left(\frac{\|W\|}{\varphi'}\right) - \left(\frac{\|W\|}{\varphi'}\right)^2 + 2\left(\frac{\|W\|}{\varphi'}\right)^3 + \left(\frac{\|W\|}{\varphi'}\right)'\left(2\frac{\|W\|}{\varphi'} - 1\right) \\ \overline{\ell}_2 = -2 + 2\frac{\|W\|}{\varphi'} - 4\left(\frac{\|W\|}{\varphi'}\right)^2 + \left(\frac{\|W\|}{\varphi'}\right)^3 - 2\left(\frac{\|W\|}{\varphi'}\right)^4 - \left(\frac{\|W\|}{\varphi'}\right)'\left(1 + \frac{\|W\|}{\varphi'}\right) \\ \overline{\ell}_3 = 2\frac{\|W\|}{\varphi'} - 4\left(\frac{\|W\|}{\varphi'}\right)^2 + 4\left(\frac{\|W\|}{\varphi'}\right)^3 - 2\left(\frac{\|W\|}{\varphi'}\right)^4 + \left(\frac{\|W\|}{\varphi'}\right)'\left(2 - \frac{\|W\|}{\varphi'}\right) \end{cases} \tag{4.2.162}$$

şeklinde birer katsayıdır, (Şenyurt ve ark., 2016a).

İspat.

$$\gamma_{\mu_4}(s)=\frac{1}{\sqrt{3}}(C_1+T_{C_1}+C_1\wedge T_{C_1})$$

eşitliğinde sırasıyla (4.2.4), (3.3.2) ve (3.3.4) den karşılıkları yazılırsa γ_{μ_4} vektörünün Bertrand eğrisine bağlı ifadesi

$$\gamma_{\mu_4}(s)=\frac{1}{\sqrt{3}}\big((-\sin\varphi-\cos\varphi)T+N+(\sin\varphi-\cos\varphi)B\big) \tag{4.2.163}$$

biçiminde olur. Bu ifadenin türevi alınırsa $T_{\gamma_{\mu_4}}(s)$ teğet vektörü

$$\begin{aligned} T_{\gamma_{\mu_4}}(s) &= \frac{\varphi'\sin\varphi-(\varphi'-\|W\|)\cos\varphi}{\sqrt{2(\|W\|^2-\|W\|\varphi'+\varphi'^2)}}T+\frac{\|W\|}{\sqrt{2(\|W\|^2-\|W\|\varphi'+\varphi'^2)}}N \\ &\quad+\frac{\varphi'\cos\varphi-(\|W\|-\varphi')\sin\varphi}{\sqrt{2(\|W\|^2-\|W\|\varphi'+\varphi'^2)}}B \end{aligned} \tag{4.2.164}$$

şeklinde bulunur. Bu ifadenin tekrar türevi alınırsa katsayılar

$$\begin{cases} \overline{\ell}_1=-2+4\frac{\|W\|}{\varphi'}+4\big(\frac{\|W\|}{\varphi'}\big)-\big(\frac{\|W\|}{\varphi'}\big)^2+2\big(\frac{\|W\|}{\varphi'}\big)^3+\big(\frac{\|W\|}{\varphi'}\big)'\big(2\frac{\|W\|}{\varphi'}-1\big) \\ \overline{\ell}_2=-2+2\frac{\|W\|}{\varphi'}-4\big(\frac{\|W\|}{\varphi'}\big)^2+\big(\frac{\|W\|}{\varphi'}\big)^3-2\big(\frac{\|W\|}{\varphi'}\big)^4-\big(\frac{\|W\|}{\varphi'}\big)'\big(1+\frac{\|W\|}{\varphi'}\big) \\ \overline{\ell}_3=2\frac{\|W\|}{\varphi'}-4\big(\frac{\|W\|}{\varphi'}\big)^2+4\big(\frac{\|W\|}{\varphi'}\big)^3-2\big(\frac{\|W\|}{\varphi'}\big)^4+\big(\frac{\|W\|}{\varphi'}\big)'\big(2-\frac{\|W\|}{\varphi'}\big) \end{cases}$$

olmak üzere $T'_{\gamma_{\mu_4}}(s)$ türev vektörü

$$\begin{aligned} T'_{\gamma_{\mu_4}}(s) &= \frac{\varphi'^4\sqrt{3}(-\overline{\ell}_1\sin\varphi-\overline{\ell}_2\cos\varphi)}{4\big(\|W\|^2-\|W\|\varphi'+\varphi'^2\big)^2}T-\frac{\overline{\ell}_3\varphi'^4\sqrt{3}}{4\big(\|W\|^2-\|W\|\varphi'+\varphi'^2\big)^2}N \\ &\quad+\frac{\varphi'^4\sqrt{3}(\overline{\ell}_2\sin\varphi-\overline{\ell}_1\cos\varphi)}{4\big(\|W\|^2-\|W\|\varphi'+\varphi'^2\big)^2}B \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. (4.2.163) ve (4.2.164) ifadelerinden elde edilen $\gamma_{\mu_4}\wedge T_{\gamma_{\mu_4}}$ vektörü

$$\begin{aligned} \gamma_{\mu_4}\wedge T_{\gamma_{\mu_4}}(s) &= \frac{(\varphi'-2\|W\|)\sin\varphi+(\|W\|+\varphi')\cos\varphi}{\sqrt{6\|W\|^2-6\|W\|\varphi'+6\varphi'^2}}T+\frac{2\varphi'-\|W\|}{\sqrt{6\|W\|^2-6\|W\|\varphi'+6\varphi'^2}}N \\ &\quad+\frac{(\varphi'-2\|W\|)\cos\varphi-(\|W\|+\varphi')\sin\varphi}{\sqrt{6\|W\|^2-6\|W\|\varphi'+6\varphi'^2}}B \end{aligned}$$

biçiminde olur. Geodezik eğrilik tanımından $\kappa_g^{\gamma_4}$ geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\gamma_4}=\frac{\varphi'^5\big(2\|W\|-\varphi'\big)\overline{\ell}_1-\varphi'^5\big(\|W\|+\varphi'\big)\overline{\ell}_2+\varphi'^5\big(2\varphi'-\|W\|\big)\overline{\ell}_3}{4\sqrt{2}\Big(\varphi'^2-\|W\|\varphi'+\|W\|^2\Big)^{\frac{5}{2}}}$$

şeklinde elde edilir.

Örnek 4.2.1

$$\gamma(s)=\left\{\frac{2}{5}\sin(2s)-\frac{1}{40}\sin(8s),-\frac{2}{5}\cos(2s)+\frac{1}{40}\cos(8s),\frac{4}{15}\sin(3s)\right\}$$

eğrisine ait

$$\begin{aligned}\gamma_1(s) &= \left\{\frac{4}{5}\cos(5s)+\frac{2}{5}\sin(2s)-\frac{1}{40}\sin(8s),\frac{4}{5}\sin(5s)-\frac{2}{5}\cos(2s)+\frac{1}{40}\cos(8s),\right.\\ &\left.-\frac{3}{5}+\frac{4}{15}\sin(3s)\right\}\end{aligned}$$

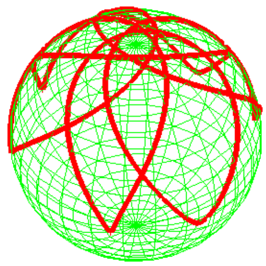
Bertrand partner eğrisinin Frenet vektörleri, eğriliği ve burulması

$$\begin{aligned}T_1 &= \left\{\frac{4\cos(2s)-\cos(8s)-\sin(3s)(16\cos(2s)+4\cos(8s))}{5\sqrt{17-8\sin(3s)}}\right.\\ &+\frac{\cos(3s)(16\sin(2s)+4\sin(8s))}{5\sqrt{17-8\sin(3s)}},\\ &\frac{4\sin(2s)-\sin(8s)-\sin(3s)\,(16\sin(2s)+4\sin(8s))}{5\sqrt{17-8\sin(3s)}}\\ &\left.-\frac{\cos(3s)(16\cos(2s)-4\cos(8s))}{5\sqrt{17-8\sin(3s)}},\frac{4\cos(3s)-16\sin(6s)}{5\sqrt{17-8\sin(3s)}}\right\},\\ N_1 &= \left\{\frac{4}{5}\cos(5s),\frac{4}{5}\sin(5s),-\frac{3}{5}\right\},\\ B_1 &= \left\{\frac{-4\sin(2s)-\sin(8s)+\sin(3s)(16\sin(2s)+4\sin(8s))}{5\sqrt{17-8\sin(3s)}}\right.\\ &-\frac{\cos(3s)(16\cos(2s)-4\cos(8s))}{5\sqrt{17-8\sin(3s)}},\\ &\frac{4\cos(2s)+\cos(8s)-\sin(3s)\,(16\cos(2s)+4\cos(8s))}{5\sqrt{17-8\sin(3s)}}\\ &\left.-\frac{\cos(3s)(16\sin(2s)-4\sin(8s))}{5\sqrt{17-8\sin(3s)}},\frac{4\sin(3s)-16}{5\sqrt{17-8\sin(3s)}}\right\},\\ \kappa_1 &= \frac{13824\cos^2(3s)(\sin(3s)-12)}{24\sin(3s)-145}\\ \tau_1 &= \frac{13824\cos^3(3s)}{24\sin(10s)-145}\end{aligned}$$

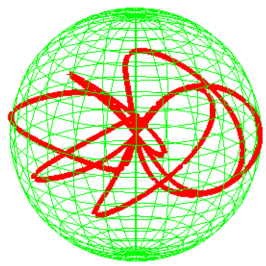
şeklinde bulunur. İnvolüt eğrisinin Frenet vektörlerine ait Sabban çatısına göre Smarandache eğrileri,

$$
\begin{aligned}
\gamma_1 &= \frac{1}{2}\left(T_1 + N_1\right)\\
\gamma_2 &= \frac{1}{2}\left(T_1 + B_1\right)\\
\gamma_3 &= \frac{1}{2}\left(N_1 + B_1\right)\\
\gamma_4 &= \frac{1}{3}\left(T_1 + N_1 + B_1\right)\\
\gamma_{\varsigma_1} &= \frac{1}{2}\left(-\cos\varphi_1 T_1 + N_1 + \sin\varphi_1 B_1\right)\\
\gamma_{\varsigma_2} &= \frac{1}{2}\left(\sin\varphi_1 T_1 + N_1 + \cos\varphi_1 B_1\right)\\
\gamma_{\varsigma_3} &= \frac{1}{2}\left((\sin\varphi_1 - \cos\varphi_1)T_1 + (\sin\varphi_1 + \cos\varphi_1)B_1\right)\\
\gamma_{\varsigma_4} &= \frac{1}{3}\left((\sin\varphi_1 - \cos\varphi_1)T_1 + N_1 + (\sin\varphi_1 + \cos\varphi_1)B_1\right)\\
\gamma_{\xi_1} &= \frac{1}{2}\left(-N_1 + B_1\right)\\
\gamma_{\xi_2} &= \frac{1}{2}\left(T_1 + B_1\right)\\
\gamma_{\xi_3} &= \frac{1}{2}\left(T_1 - N_1\right)\\
\gamma_{\xi_4} &= \frac{1}{3}\left(T_1 - N_1 + B_1\right)\\
\gamma_{\mu_1} &= \frac{1}{2}\left((\sin\varphi_1 + \cos\varphi_1)T_1 + (\cos\varphi_1 - \sin\varphi_1)B_1\right)\\
\gamma_{\mu_2} &= \frac{1}{2}\left(\sin\varphi_1 T_1 + N_1 + \cos\varphi_1 B_1\right)\\
\gamma_{\mu_3} &= \frac{1}{2}\left(\cos\varphi_1 T_1 + N_1 - \sin\varphi_1 B_1\right)\\
\gamma_{\mu_4} &= \frac{1}{3}\left((\sin\varphi_1 + \cos\varphi_1)T_1 + N_1 + (\cos\varphi_1 - \sin\varphi_1)B_1\right).
\end{aligned}
$$

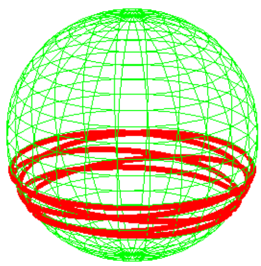
şeklindedir. Burada herbir Smarandache eğrilerinin vektörlerine T_1, N_1, B_1, $\sin\varphi_1$ ve $\cos\varphi_1$ ifadelerindeki karşılıkları yazılıp mapple programıyla çizilirse bu eğriler aşağıdaki gibi olur;



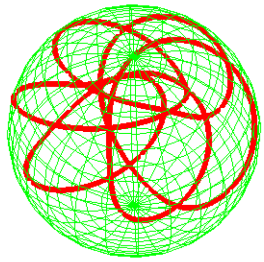
Şekil 4.18: Bertrand partner eğrisine ait γ_1-Smarandache eğrisi



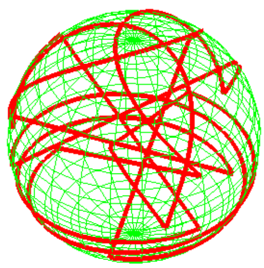
Şekil 4.19: Bertrand partner eğrisine ait γ_2-Smarandache eğrisi



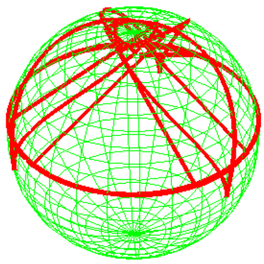
Şekil 4.20: Bertrand partner eğrisine ait γ_3-Smarandache eğrisi



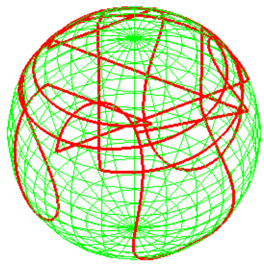
Şekil 4.21: Bertrand partner eğrisine ait γ_4-Smarandache eğrisi



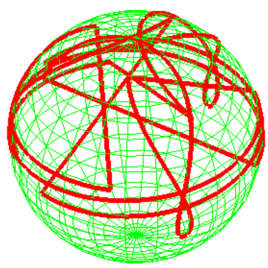
Şekil 4.22: Bertrand partner eğrisine ait γ_{ς_1}-Smarandache eğrisi



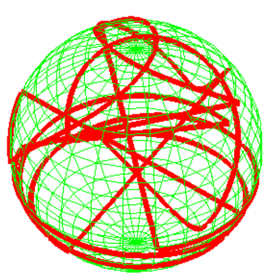
Şekil 4.23: Bertrand partner eğrisine ait γ_{ς_2}-Smarandache eğrisi



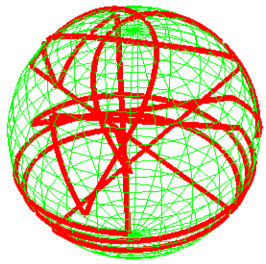
Şekil 4.24: Bertrand partner eğrisine ait γ_{ς_3}-Smarandache eğrisi



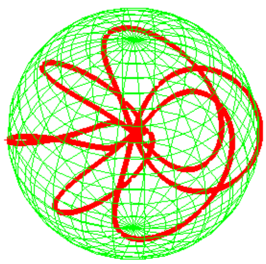
Şekil 4.25: Bertrand partner eğrisine ait γ_{ς_4}-Smarandache eğrisi



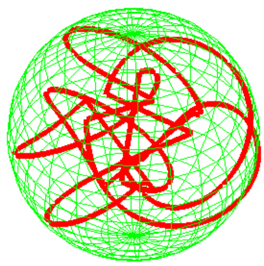
Şekil 4.26: Bertrand partner eğrisine ait γ_{ξ_1}-Smarandache eğrisi



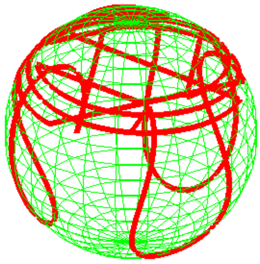
Şekil 4.27: Bertrand partner eğrisine ait γ_{ξ_2}-Smarandache eğrisi



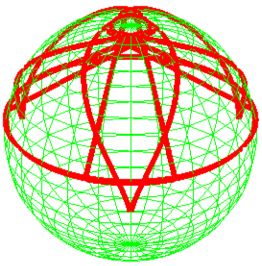
Şekil 4.28: Bertrand partner eğrisine ait γ_{ξ_3}-Smarandache eğrisi



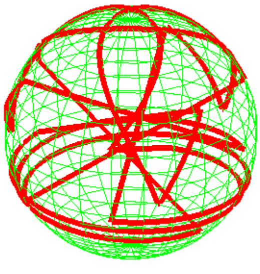
Şekil 4.29: Bertrand partner eğrisine ait γ_{ξ_4}-Smarandache eğrisi



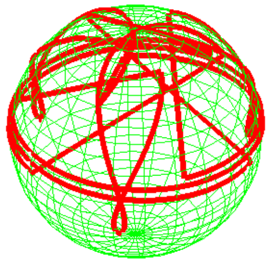
Şekil 4.30: Bertrand partner eğrisine ait γ_{μ_1}-Smarandache eğrisi



Şekil 4.31: Bertrand partner eğrisine ait γ_{μ_2}-Smarandache eğrisi



Şekil 4.32: Bertrand partner eğrisine ait γ_{μ_3}-Smarandache eğrisi



Şekil 4.33: Bertrand partner eğrisine ait γ_{μ_4}-Smarandache eğrisi

4.3 Mannheim Eğri Çiftine Ait Sabban Çatısına Göre Smarandache Eğrileri

Bu bölümde, α eğrisine ait α_2 Mannheim partner eğrisinin Frenet vektörleri ile birim Darboux vektörünün birim küre yüzeyi üzerinde çizdiği eğrilerin Sabban çatısı ve bu çatı konum vektörü alındığında oluşan Smarandache eğrileri araştırılmıştır. Bulunan sonuçların Mannheim eğrisine bağlı ifadeleri verilmiştir. Mannheim eğrisinin T_2, N_2, B_2 Frenet vektörleri ile C_2 birim Darboux vektörünün birim küre yüzeyi üzerinde çizdikleri küresel eğrilerin Sabban çatıları, küresel Frenet formülleri ve geodezik eğrilikleri (Tanım 3.5.1) ve (Teorem 3.5.1)'e benzer olarak sırasıyla

(T_2) teğetler göstergesi için;

$$\begin{cases} T_2 = T_2, \;\; T_{T_2} = N_2, \;\; T_2 \wedge T_{T_2} = B_2, \\ T_2' = T_{T_2}, \;\; T_{T_2}' = -T_2 + \frac{\tau_2}{\kappa_2} T_2 \wedge T_{T_2}, \;\; T_2 \wedge T_{T_2}' = -\frac{\tau_2}{\kappa_2} T_{T_2}, \\ \kappa_g = \langle T_{T_2}', T_2 \wedge T_{T_2} \rangle = \frac{\tau_2}{\kappa_2}, \end{cases} \tag{4.3.1}$$

(N_2) aslinormaller göstergesi için;

$$\begin{cases} N_2 = N_2, \;\; T_{N_2} = -\cos\varphi_2 T_2 + \sin\varphi_2 B_2, \;\; N_2 \wedge T_{N_2} = \sin\varphi_2 T_2 + \cos\varphi_2 B_2, \\ N_2' = T_{N_2}, \;\; T_{N_2}' = -N_2 + \dfrac{\varphi_2'}{\|W_2\|} N_2 \wedge T_{N_2}, \;\; N_2 \wedge T_{N_2}' = -\dfrac{\varphi_2'}{\|W_2\|} T_{N_2}, \\ \kappa_g = \langle T_{N_2}', N_2 \wedge T_{N_2} \rangle = \frac{\varphi_2'}{\|W_2\|}, \end{cases} \tag{4.3.2}$$

(B_2) binormaller göstergesi için;

$$\begin{cases} B_2 = B_2, \;\; T_{B_2} = -N_2, \;\; B_2 \wedge T_{B_2} = T_2, \\ B_2{}' = T_{B_2}, \;\; T_{B_2}{}' = -B_2 + \frac{\kappa_2}{\tau_2} B_2 \wedge T_{B_2}, \;\; B_2 \wedge T_{B_2}{}' = -\frac{\kappa_2}{\tau_2} T_{B_2}, \\ \kappa_g = \langle T_{B_2}{}', B_2 \wedge T_{B_2} \rangle = \frac{\kappa_2}{\tau_2}, \end{cases} \tag{4.3.3}$$

(C_2) eğrisi için;

$$\begin{cases} C_2 = \sin\varphi_2 T_2 + \cos\varphi_2 B_2, \; T_{C_2} = \cos\varphi_2 T_2 - \sin\varphi_2 B_2, \; C_2 \wedge T_{C_2} = N_2, \\ C_2{}' = T_{C_2}, \; T_{C_2}{}' = -C_2 + \dfrac{\|W_2\|}{\varphi_2{}'} C_2 \wedge T_{C_2}, \; C_2 \wedge T_{C_2}{}' = -\dfrac{\|W_2\|}{\varphi_2{}'} T_{C_2}, \\ \kappa_g = \langle T_{C_2}{}', C_2 \wedge T_{C_2} \rangle = \frac{\|W_2\|}{\varphi_2{}'}, \end{cases} \tag{4.3.4}$$

şeklinde bulunur.

Tanım 4.3.1 $\alpha_2 : I \to S^2$ Mannheim partner eğrisinin teğetler göstergesine ait Sabban çatısı $\{T_2, T_{T_2}, T_2 \wedge T_{T_2}\}$ olsun.

$$\widetilde{\beta}_1(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(T_2 + T_{T_2}) \tag{4.3.5}$$

şeklinde tanımlı vektörün çizdiği regüler eğriye $T_2 T_{T_2}$-Smarandache eğrisi denir.

Teorem 4.3.1 $T_2 T_{T_2}$-Smarandache eğrisinin geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\widetilde{\beta}_1} = \frac{1}{\left(2 + \left(\frac{\tau_2}{\kappa_2}\right)^2\right)^{\frac{5}{2}}} \left(\frac{\tau_2}{\kappa_2}\wp_1 + \frac{\tau_2}{\kappa_2}\wp_2 + 2\wp_3\right) \tag{4.3.6}$$

denklemiyle verilir. Burada

$$\begin{cases} \wp_1 = -2 - \left(\frac{\tau_2}{\kappa_2}\right)^2 + \left(\frac{\tau_2}{\kappa_2}\right)'\left(\frac{\tau_2}{\kappa_2}\right) \\ \wp_2 = -2 - 3\left(\frac{\tau_2}{\kappa_2}\right)^2 - \left(\frac{\tau_2}{\kappa_2}\right)^4 - \left(\frac{\tau_2}{\kappa_2}\right)'\left(\frac{\tau_2}{\kappa_2}\right) \\ \wp_3 = 2\left(\frac{\tau_2}{\kappa_2}\right) + \left(\frac{\tau_2}{\kappa_2}\right)^3 + \left(\frac{\tau_2}{\kappa_2}\right)' \end{cases} \tag{4.3.7}$$

şeklinde birer katsayıdır.

İspat.

$$\widetilde{\beta}_1(s)=\frac{1}{\sqrt{2}}(T_2+T_{T_2})$$

eğrisinin $s_{\widetilde{\beta}_1}$ yay parametresine göre türevi alınırsa

$$T_{\widetilde{\beta}_1}\frac{ds_{\widetilde{\beta}_1}}{ds}=\frac{1}{\sqrt{2}}(-T_2+T_{T_2}+\frac{\tau_2}{\kappa_2}T_2\wedge T_{T_2})$$

olur. Bu eşitliğin normu alınırsa $\frac{ds_{\widetilde{\beta}_1}}{ds}$ ifadesi

$$\frac{ds_{\widetilde{\beta}_1}}{ds}=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2+\left(\frac{\tau_2}{\kappa_2}\right)^2}$$

bulunur. Bulunan bu ifade yukarıda yerine yazılırsa $T_{\widetilde{\beta}_1}(s)$ teğet vektörü

$$T_{\widetilde{\beta}_1}(s)=\frac{1}{\sqrt{2+(\frac{\tau_2}{\kappa_2})^2}}\left(-T_2+T_{T_2}+\frac{\tau_2}{\kappa_2}T_2\wedge T_{T_2}\right) \tag{4.3.8}$$

biçiminde olur. (4.3.5) ve (4.3.8) ifadelerinden elde edilen $\widetilde{\beta}_1\wedge T_{\widetilde{\beta}_1}$ vektörü

$$\widetilde{\beta}_1\wedge T_{\widetilde{\beta}_1}(s)=\frac{1}{\sqrt{4+2(\frac{\tau_2}{\kappa_2})^2}}(\frac{\tau_2}{\kappa_2}T_2-\frac{\tau_2}{\kappa_2}T_{T_2}+2T_2\wedge T_{T_2}) \tag{4.3.9}$$

şeklinde yazılır. (4.3.5), (4.3.8) ve (4.3.9) vektörlerinde (4.3.1) den karşılıkları yazılırsa $\widetilde{\beta}_1$-Smarandache eğrisine ait Sabban çatısının Mannheim partner eğrisine bağlı ifadesi,

$$\begin{aligned}
\widetilde{\beta}_1(s) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(T_2+N_2),\\
T_{\widetilde{\beta}_1}(s) &= \frac{1}{\sqrt{2+(\frac{\tau_2}{\kappa_2})^2}}(-T_2+N_2+\frac{\tau_2}{\kappa_2}B_2),\\
\widetilde{\beta}_1\wedge T_{\widetilde{\beta}_1}(s) &= \frac{1}{\sqrt{4+2(\frac{\tau_2}{\kappa_2})^2}}(\frac{\tau_2}{\kappa_2}T_2-\frac{\tau_2}{\kappa_2}N_2+2B_2)
\end{aligned} \tag{4.3.10}$$

denklemlerine dönüşür. (4.3.8) ifadesinin türevi alınırsa katsayılar,

$$\begin{cases}
\wp_1=-2-\left(\frac{\tau_2}{\kappa_2}\right)^2+\left(\frac{\tau_2}{\kappa_2}\right)'\left(\frac{\tau_2}{\kappa_2}\right)\\
\wp_2=-2-3\left(\frac{\tau_2}{\kappa_2}\right)^2-\left(\frac{\tau_2}{\kappa_2}\right)^4-\left(\frac{\tau_2}{\kappa_2}\right)'\left(\frac{\tau_2}{\kappa_2}\right)\\
\wp_3=2\left(\frac{\tau_2}{\kappa_2}\right)+\left(\frac{\tau_2}{\kappa_2}\right)^3+\left(\frac{\tau_2}{\kappa_2}\right)'
\end{cases}$$

olmak üzere $T_{\widetilde{\beta}_1}{}'(s)$ türev vektörü

$$T'_{\widetilde{\beta}_1}(s)=\frac{\sqrt{2}}{\left(2+(\frac{\tau_2}{\kappa_2})^2\right)^2}(\wp_1T_2+\wp_2T_{T_2}+\wp_3T_2\wedge T_{T_2}) \tag{4.3.11}$$

biçiminde olur. Burada (4.3.1) ifadesi yazılırsa $T'_{\widetilde{\beta}_1}(s)$ vektörünün Mannheim partner eğrisine bağlı ifadesi

$$T_{\widetilde{\beta}_1}{}'(s) = \frac{\sqrt{2}}{\left(2+\left(\frac{\tau_2}{\kappa_2}\right)^2\right)^2}\left(\wp_1 T_2 + \wp_2 N_2 + \wp_3 B_2\right)$$

şeklindedir. Geodezik eğrilik tanımından $\kappa_g^{\widetilde{\beta}_1}$ geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\widetilde{\beta}_1} = \frac{1}{\left(2+\left(\frac{\tau_2}{\kappa_2}\right)^2\right)^{\frac{5}{2}}}\left(\frac{\tau_2}{\kappa_2}\wp_1 + \frac{\tau_2}{\kappa_2}\wp_2 + 2\wp_3\right)$$

şeklinde elde edilir.

Teorem 4.3.2 (α, α_2) Mannheim eğri çifti, T ile T_2 teğet vektörleri arasındaki açı θ olsun. $T_2T_{T_2}$- Smarandache eğrisine ait geodezik eğriliğinin Mannheim eğrisine bağlı ifadesi

$$\kappa_g^{\widetilde{\beta}_1} = \frac{1}{\left(2+\left(\frac{\|W\|}{\theta'}\right)^2\right)^{\frac{5}{2}}}\left(\frac{\|W\|}{\theta'}\overline{\wp}_1 + \frac{\|W\|}{\theta'}\overline{\wp}_2 + 2\overline{\wp}_3\right) \tag{4.3.12}$$

denklemiyle verilir. Burada

$$\begin{cases} \overline{\wp}_1 = -2-\left(\frac{\|W\|}{\theta'}\right)^2 + \left(\frac{\|W\|}{\theta'}\right)'\left(\frac{\|W\|}{\theta'}\right) \\ \\ \overline{\wp}_2 = -2-3\left(\frac{\|W\|}{\theta'}\right)^2 - \left(\frac{\|W\|}{\theta'}\right)^4 - \left(\frac{\|W\|}{\theta'}\right)'\left(\frac{\|W\|}{\theta'}\right) \\ \\ \overline{\wp}_3 = 2\left(\frac{\|W\|}{\theta'}\right) + \left(\frac{\|W\|}{\theta'}\right)^3 + \left(\frac{\|W\|}{\theta'}\right)' \end{cases} \tag{4.3.13}$$

şeklinde birer katsayıdır.

İspat.

$$\widetilde{\beta}_1(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(T_2 + T_{T_2}\right)$$

eşitliğine sırasıyla (4.3.1), (3.4.4) ve (3.4.8) den karşılıkları yazılırsa $\widetilde{\beta}_1$ vektörünün Mannheim eğrisine bağlı ifadesi

$$\widetilde{\beta}_1(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left((\sin\theta+\cos\theta)T + (\cos\theta-\sin\theta)B\right) \tag{4.3.14}$$

biçiminde olur. Bu ifadenin türevi alınırsa $T_{\widetilde{\beta}_1}(s)$ teğet vektörü

$$T_{\widetilde{\beta}_1}(s) = \frac{\theta'(\sin\theta-\cos\theta)}{\sqrt{\|W\|^2+2\theta'^2}}T + \frac{\|W\|}{\sqrt{\|W\|^2+2\theta'^2}}N + \frac{\theta'(\cos\theta+\sin\theta)}{\sqrt{\|W\|^2+2\theta'^2}}B \tag{4.3.15}$$

şeklinde bulunur. Bu ifadenin türevi alınırsa

$$
\begin{cases}
\overline{\wp}_1 = -2 - \left(\frac{\|W\|}{\theta'}\right)^2 + \left(\frac{\|W\|}{\theta'}\right)'\left(\frac{\|W\|}{\theta'}\right) \\
\overline{\wp}_2 = -2 - 3\left(\frac{\|W\|}{\theta'}\right)^2 - \left(\frac{\|W\|}{\theta'}\right)^4 - \left(\frac{\|W\|}{\theta'}\right)'\left(\frac{\|W\|}{\theta'}\right) \\
\overline{\wp}_3 = 2\left(\frac{\|W\|}{\theta'}\right) + \left(\frac{\|W\|}{\theta'}\right)^3 + \left(\frac{\|W\|}{\theta'}\right)'
\end{cases}
$$

olmak üzere $T'_{\widetilde{\beta}_1}(s)$ türev vektörü

$$
\begin{aligned}
T'_{\widetilde{\beta}_1}(s) \quad = \quad & \frac{(\theta')^4\sqrt{2}(\overline{\wp}_1\cos\theta + \overline{\wp}_2\sin\theta)}{(\|W\|^2+2\theta'^2)^2}T + \frac{(\theta')^4\sqrt{2}\overline{\wp}_3}{(\|W\|^2+2\theta'^2)^2}N \\
& + \frac{(\theta')^4\sqrt{2}(\overline{\wp}_2\cos\theta - \overline{\wp}_1\sin\theta)}{(\|W\|^2+2\theta'^2)^2}B
\end{aligned}
$$

biçiminde olur. (4.3.14) ve (4.3.15) ifadelerinden elde edilen $\widetilde{\beta}_1 \wedge T_{\widetilde{\beta}_1}$ vektörü

$$
\widetilde{\beta}_1 \wedge T_{\widetilde{\beta}_1}(s) = \frac{\|W\|(\cos\theta+\sin\theta)}{\sqrt{2\|W\|^2+4\theta'^2}}T + \frac{2\theta'}{\sqrt{2\|W\|^2+4\theta'^2}}N + \frac{\|W\|(\cos\theta-\sin\theta)}{\sqrt{2\|W\|^2+4\theta'^2}}B
$$

şeklinde yazılır. Geodezik eğrilik tanımından $\kappa_g^{\widetilde{\beta}_1}$ geodezik eğriliği

$$
\kappa_g^{\widetilde{\beta}_1} = \frac{1}{\left(2+\left(\frac{\|W\|}{\theta'}\right)^2\right)^{\frac{5}{2}}}\left(\frac{\|W\|}{\theta'}\overline{\wp}_1 + \frac{\|W\|}{\theta'}\overline{\wp}_2 + 2\overline{\wp}_3\right)
$$

şeklinde elde edilir.

Teorem 4.3.3 (α, α_2) Mannheim eğri çifti ve binormal vektörü ile Darboux vektörü arasındaki açı φ olsun. $T_2T_{T_2}$- Smarandache eğrisine ait geodezik eğriliğinin Mannheim eğrisine bağlı ifadesi

$$
\kappa_g^{\widetilde{\beta}_1} = \frac{1}{\left(2+\left(\frac{\|W\|}{\varphi'}\right)^2\right)^{\frac{5}{2}}}\left(\frac{\|W\|}{\varphi'}\underline{\wp}_1 - \frac{\|W\|}{\varphi'}\underline{\wp}_2 + 2\underline{\wp}_3\right) \tag{4.3.16}
$$

denklemiyle verilir. Burada

$$
\begin{cases}
\underline{\wp}_1 = -2 - \left(\frac{\|W\|}{\varphi'}\right)^2 + \left(\frac{\|W\|}{\varphi'}\right)'\left(\frac{\|W\|}{\varphi'}\right) \\
\underline{\wp}_2 = -2 - 3\left(\frac{\|W\|}{\varphi'}\right)^2 - \left(\frac{\|W\|}{\varphi'}\right)^4 - \left(\frac{\|W\|}{\varphi'}\right)'\left(\frac{\|W\|}{\varphi'}\right) \\
\underline{\wp}_3 = 2\left(\frac{\|W\|}{\varphi'}\right) + \left(\frac{\|W\|}{\varphi'}\right)^3 + \left(\frac{\|W\|}{\varphi'}\right)'
\end{cases} \tag{4.3.17}
$$

şeklinde birer katsayıdır.

İspat.

$$\widetilde{\beta}_1(s)=\frac{1}{\sqrt{2}}(T_2+T_{T_2})$$

eşitliğine sırasıyla (4.3.1) ve (3.4.10) dan karşılıkları yazılırsa $\widetilde{\beta}_1$ vektörünün Mannheim eğrisine bağlı ifadesi

$$\widetilde{\beta}_1(s)=\frac{1}{\sqrt{2}}\big((\sin\varphi-\cos\varphi)T+(\cos\varphi+\sin\varphi)B\big) \tag{4.3.18}$$

biçiminde olur. Bu ifadenin türevi alınırsa $T_{\widetilde{\beta}_1}(s)$ teğet vektörü

$$T_{\widetilde{\beta}_1}(s)=\frac{\varphi'(-\sin\varphi-\cos\varphi)}{\sqrt{\|W\|^2+2\varphi'^2}}T+\frac{\|W\|}{\sqrt{\|W\|^2+2\varphi'^2}}N+\frac{\varphi'(\sin\varphi-\cos\varphi)}{\sqrt{\|W\|^2+2\varphi'^2}}B \tag{4.3.19}$$

şeklinde bulunur. Bu ifadenin de türevi alınırsa katsayılar

$$\begin{cases}\underline{\wp}_1=-2-\left(\frac{\|W\|}{\varphi'}\right)^2+\left(\frac{\|W\|}{\varphi'}\right)'\left(\frac{\|W\|}{\varphi'}\right)\\ \underline{\wp}_2=-2-3\left(\frac{\|W\|}{\varphi'}\right)^2-\left(\frac{\|W\|}{\varphi'}\right)^4-\left(\frac{\|W\|}{\varphi'}\right)'\left(\frac{\|W\|}{\varphi'}\right)\\ \underline{\wp}_3=2\left(\frac{\|W\|}{\varphi'}\right)+\left(\frac{\|W\|}{\varphi'}\right)^3+\left(\frac{\|W\|}{\varphi'}\right)'\end{cases}$$

olmak üzere $T'_{\widetilde{\beta}_1}(s)$ türev vektörü

$$\begin{aligned}T'_{\widetilde{\beta}_1}(s) &= \frac{(\varphi')^4\sqrt{2}(\underline{\wp}_1\sin\varphi-\underline{\wp}_2\cos\varphi)}{(\|W\|^2+2\varphi'^2)^2}T+\frac{(\varphi')^4\sqrt{2}\underline{\wp}_3}{(\|W\|^2+2\varphi'^2)^2}N\\ &\quad+\frac{(\varphi')^4\sqrt{2}(\underline{\wp}_2\sin\varphi+\underline{\wp}_1\cos\varphi)}{(\|W\|^2+2\varphi'^2)^2}B\end{aligned}$$

biçiminde olur. (4.3.18) ve (4.3.19) ifadelerinden elde edilen $\widetilde{\beta}_1\wedge T_{\widetilde{\beta}_1}$ vektörü

$$\widetilde{\beta}_1\wedge T_{\widetilde{\beta}_1}(s)=\frac{\|W\|(\sin\varphi-\cos\varphi)}{\sqrt{2\|W\|^2+4\varphi'^2}}T+\frac{2\varphi'}{\sqrt{2\|W\|^2+4\varphi'^2}}N+\frac{\|W\|(\cos\varphi+\sin\varphi)}{\sqrt{2\|W\|^2+4\varphi'^2}}B$$

eşitliğiyle yazılır. Geodezik eğrilik tanımından $\kappa_g^{\widetilde{\beta}_1}$ geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\widetilde{\beta}_1}=\frac{1}{\left(2+\left(\frac{\|W\|}{\varphi'}\right)^2\right)^{\frac{5}{2}}}\left(\frac{\|W\|}{\varphi'}\underline{\wp}_1-\frac{\|W\|}{\varphi'}\underline{\wp}_2+2\underline{\wp}_3\right)$$

biçiminde elde edilir.

Tanım 4.3.2 $\alpha_2: I\to S^2$ Mannheim partner eğrisinin teğetler göstergesine ait Sabban çatısı $\{T_2, T_{T_2}, T_2\wedge T_{T_2}\}$ olsun.

$$\widetilde{\beta}_2(s)=\frac{1}{\sqrt{2}}(T_2+T_2\wedge T_{T_2}) \tag{4.3.20}$$

şeklinde tanımlı vektörün çizdiği regüler eğriye $T_2(T_2\wedge T_{T_2})$-Smarandache eğrisi denir.

Teorem 4.3.4 $T_2(T_2 \wedge T_{T_2})$-Smarandache eğrisinin geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\widetilde{\beta}_2} = \frac{(\kappa_2 + \tau_2)}{(\kappa_2 - \tau_2)} \tag{4.3.21}$$

denklemiyle verilir.

İspat.

$$\widetilde{\beta}_2(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(T_2 + T_2 \wedge T_{T_2})$$

eğrisinin $s_{\widetilde{\beta}_2}$ yay parametresine göre türevi alınırsa

$$T_{\widetilde{\beta}_2}\frac{ds_{\widetilde{\beta}_2}}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(1 - \frac{\tau_2}{\kappa_2}\big)T_{T_2}$$

olur. Bu eşitliğin normu alınırsa $\frac{ds_{\widetilde{\beta}_2}}{ds}$ ifadesi

$$\frac{ds_{\widetilde{\beta}_2}}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(1 - \frac{\tau_2}{\kappa_2}\big)$$

bulunur. Bulunan bu ifade yukarıda yerine yazılırsa $T_{\widetilde{\beta}_2}(s)$ teğet vektörü

$$T_{\widetilde{\beta}_2}(s) = T_{T_2} \tag{4.3.22}$$

biçiminde olur. (4.3.20) ve (4.3.22) ifadelerinden elde edilen $\widetilde{\beta}_2 \wedge T_{\widetilde{\beta}_2}$ vektörü

$$\widetilde{\beta}_2 \wedge T_{\widetilde{\beta}_2}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-T_2 + T_2 \wedge T_{T_2}) \tag{4.3.23}$$

şeklinde yazılır. (4.3.20), (4.3.22) ve (4.3.23) vektörlerinde (4.3.1) den karşılıkları yazılırsa $\widetilde{\beta}_2$-Smarandache eğrisine ait Sabban çatısının Mannheim partner eğrisine bağlı ifadesi,

$$\begin{aligned}
\widetilde{\beta}_2(s) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(T_2 + B_2), \\
T_{\widetilde{\beta}_2}(s) &= N_2, \\
\widetilde{\beta}_2 \wedge T_{\widetilde{\beta}_2}(s) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(-T_2 + B_2)
\end{aligned}$$

denklemlerine dönüşür. (4.3.22) ifadesinin türevi alınırsa $T'_{\widetilde{\beta}_2}(s)$ türev vektörü

$$T'_{\widetilde{\beta}_2}(s) = \frac{\sqrt{2}}{(1 - \frac{\tau_2}{\kappa_2})}\big(-T_2 + \frac{\tau_2}{\kappa_2}T_2 \wedge T_{T_2}\big) \tag{4.3.24}$$

biçiminde olur ve bu ifadeye (4.3.1) deki karşılıkları yazılırsa $T'_{\widetilde{\beta}_2}(s)$ türev vektörünün Mannheim partner eğrisine bağlı ifadesi

$$T'_{\widetilde{\beta}_2}(s) = \frac{\sqrt{2}}{(1-\frac{\tau_2}{\kappa_2})}\big(-T_2 + \frac{\tau_2}{\kappa_2}B_2\big)$$

şeklindedir. Geodezik eğrilik tanımından $\kappa_g^{\widetilde{\beta}_2}$ geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\widetilde{\beta}_2} = \frac{(\kappa_2 + \tau_2)}{(\kappa_2 - \tau_2)}$$

biçiminde olur.

Teorem 4.3.5 (α, α_2) Mannheim eğri çifti, T ile T_2 teğet vektörleri arasındaki açı θ olsun. α_2 eğrisinin teğetler göstergesine ait $T_2(T_2 \wedge T_{T_2})$- Smarandache eğrisinin geodezik eğriliğinin Mannheim eğrisine bağlı ifadesi

$$\kappa_g^{\widetilde{\beta}_2} = \frac{\|W\| + \theta'}{\theta' - \|W\|} \tag{4.3.25}$$

denklemiyle verilir.

İspat.

$$\widetilde{\beta}_2(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(T_2 + T_2 \wedge T_{T_2})$$

eşitliğinde sırasıyla (4.3.1), (3.4.4) ve (3.4.8) den karşılıkları yazılırsa $\widetilde{\beta}_2$ vektörünün Mannheim eğrisine bağlı ifadesi

$$\widetilde{\beta}_2(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\theta T + N - \sin\theta B) \tag{4.3.26}$$

biçiminde olur. Bu ifadenin türevi alınırsa $T_{\widetilde{\beta}_2}(s)$ teğet vektörü

$$T_{\widetilde{\beta}_2}(s) = \sin\theta T + \cos\theta B \tag{4.3.27}$$

şeklinde bulunur. Bu ifadenin tekrar türevi alınırsa $T'_{\widetilde{\beta}_2}(s)$ türev vektörü

$$T'_{\widetilde{\beta}_2}(s) = \frac{\theta'\sqrt{2}\cos\theta}{\|W\| - \theta'}T + \frac{\|W\|\sqrt{2}}{\theta' - \|W\|}N + \frac{\theta'\sqrt{2}\sin\theta}{\|W\| - \theta'}B$$

elde edilir. (4.3.26) ve (4.3.27) ifadelerinden elde edilen $\widetilde{\beta}_2 \wedge T_{\widetilde{\beta}_2}$ vektörü

$$\widetilde{\beta}_2 \wedge T_{\widetilde{\beta}_2}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\cos\theta T + N + \sin\theta B)$$

şeklinde yazılır. Geodezik eğrilik tanımından $\kappa_g^{\widetilde{\beta}_2}$ geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\widetilde{\beta}_2} = \frac{\|W\| + \theta'}{\theta' - \|W\|}$$

biçiminde olur.

Teorem 4.3.6 (α, α_2) Mannheim eğri çifti ve binormal vektörü ile Darboux vektörü arasındaki açı φ olsun. α_2 eğrisinin teğetler göstergesine ait $T_2(T_2 \wedge T_{T_2})$- Smarandache eğrisinin geodezik eğriliğinin Mannheim eğrisine bağlı ifadesi

$$\kappa_g^{\widetilde{\beta}_2} = \frac{\varphi' + \|W\|}{\varphi' - \|W\|} \tag{4.3.28}$$

denklemiyle verilir.

İspat.

$$\widetilde{\beta}_2(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(T_2 + T_2 \wedge T_{T_2})$$

eşitliğinde sırasıyla (4.3.1) ve (3.4.10) dan karşılıkları yazılırsa $\widetilde{\beta}_2$ vektörünün Mannheim eğrisi-ne bağlı ifadesi

$$\widetilde{\beta}_2(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin\varphi\, T + N + \cos\varphi\, B) \tag{4.3.29}$$

biçiminde olur. Bu ifadenin türevi alınırsa $T_{\widetilde{\beta}_2}(s)$ teğet vektörü

$$T_{\widetilde{\beta}_2}(s) = -\cos\varphi\, T + \sin\varphi\, B \tag{4.3.30}$$

eşitliğiyle bulunur. Bu ifadenin tekrar türevi alınırsa $T'_{\widetilde{\beta}_2}(s)$ türev vektörü

$$T'_{\widetilde{\beta}_2}(s) = \frac{\varphi'\sqrt{2}\sin\varphi}{\|W\| - \varphi'}T + \frac{\|W\|\sqrt{2}}{\varphi' - \|W\|}N + \frac{\varphi'\sqrt{2}\cos\varphi}{\|W\| - \varphi'}B$$

biçiminde bulunur. (4.3.29) ve (4.3.30) ifadelerinden elde edilen $\widetilde{\beta}_2 \wedge T_{\widetilde{\beta}_2}$ vektörü

$$\widetilde{\beta}_2 \wedge T_{\widetilde{\beta}_2}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\sin\varphi\, T + N - \cos\varphi\, B)$$

şeklinde yazılır. Geodezik eğrilik tanımından $\kappa_g^{\widetilde{\beta}_2}$ geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\widetilde{\beta}_2} = \frac{\varphi' + \|W\|}{\varphi' - \|W\|}$$

şeklinde elde edilir.

Tanım 4.3.3 $\alpha_2 : I \to S^2$ Mannheim partner eğrisinin teğetler göstergesine ait Sabban çatısı $\{T_2, T_{T_2}, T_2 \wedge T_{T_2}\}$ olsun.

$$\widetilde{\beta}_3(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(T_{T_2} + T_2 \wedge T_{T_2}) \tag{4.3.31}$$

şeklinde tanımlı vektörün çizdiği regüler eğriye $T_{T_2}(T_2 \wedge T_{T_2})$-Smarandache eğrisi denir.

Teorem 4.3.7 $T_{T_2}(T_2 \wedge T_{T_2})$-Smarandache eğrisinin geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\widetilde{\beta}_3} = \frac{1}{\left(1+2\left(\frac{\tau_2}{\kappa_2}\right)^2\right)^{\frac{5}{2}}}\left(2\frac{\tau_2}{\kappa_2}\mho_1 - \mho_2 + \mho_3\right) \tag{4.3.32}$$

denklemiyle verilir. Burada

$$\begin{cases} \mho_1 = \frac{\tau_2}{\kappa_2} + 2\left(\frac{\tau_2}{\kappa_2}\right)^3 + 2\left(\frac{\tau_2}{\kappa_2}\right)'\left(\frac{\tau_2}{\kappa_2}\right) \\ \mho_2 = -1 - 3\left(\frac{\tau_2}{\kappa_2}\right)^2 - 2\left(\frac{\tau_2}{\kappa_2}\right)^4 - \left(\frac{\tau_2}{\kappa_2}\right)' \\ \mho_3 = -\left(\frac{\tau_2}{\kappa_2}\right)^2 - 2\left(\frac{\tau_2}{\kappa_2}\right)^4 + \left(\frac{\tau_2}{\kappa_2}\right)' \end{cases} \tag{4.3.33}$$

şeklinde birer katsayıdır.

İspat.

$$\widetilde{\beta}_3(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(T_{T_2} + T_2 \wedge T_{T_2})$$

eğrisinin $s_{\widetilde{\beta}_3}$ yay parametresine göre türevi alınırsa

$$T_{\widetilde{\beta}_3}\frac{ds_{\widetilde{\beta}_3}}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-T_2 - \frac{\tau_2}{\kappa_2}T_{T_2} + \frac{\tau_2}{\kappa_2}T_2 \wedge T_{T_2})$$

olur. Bu eşitliğin normu alınırsa $\frac{ds_{\widetilde{\beta}_3}}{ds}$ ifadesi

$$\frac{ds_{\widetilde{\beta}_3}}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1+2\left(\frac{\tau_2}{\kappa_2}\right)^2}$$

bulunur. Bu ifade yukarıda yerine yazılırsa $T_{\widetilde{\beta}_3}(s)$ teğet vektörü

$$T_{\widetilde{\beta}_3}(s) = \frac{1}{\sqrt{1+2\left(\frac{\tau_2}{\kappa_2}\right)^2}}\left(-T_2 - \frac{\tau_2}{\kappa_2}T_{T_2} + \frac{\tau_2}{\kappa_2}T_2 \wedge T_{T_2}\right) \tag{4.3.34}$$

biçiminde olur. (4.3.31) ve (4.3.34) ifadelerinden elde edilen $\widetilde{\beta}_3 \wedge T_{\widetilde{\beta}_3}$ vektörü

$$\widetilde{\beta}_3 \wedge T_{\widetilde{\beta}_3}(s) = \frac{1}{\sqrt{2+4\left(\frac{\tau_2}{\kappa_2}\right)^2}}\left(2\frac{\tau_2}{\kappa_2}T_2 - T_{T_2} + T_2 \wedge T_{T_2}\right) \tag{4.3.35}$$

eşitliğiyle bulunur. (4.3.31), (4.3.34) ve (4.3.35) vektörlerinde (4.3.1) den karşılıkları yazılırsa $\widetilde{\beta}_3$-Smarandache eğrisine ait Sabban çatısının Mannheim partner eğrisine bağlı ifadeleri,

$$\begin{aligned}
\widetilde{\beta}_3(s) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(N_2+B_2),\\
T_{\widetilde{\beta}_3}(s) &= \frac{1}{\sqrt{1+2\left(\frac{\tau_2}{\kappa_2}\right)^2}}\left(-T_2-\frac{\tau_2}{\kappa_2}N_2+\frac{\tau_2}{\kappa_2}B_2\right), \qquad (4.3.36)\\
\widetilde{\beta}_3\wedge T_{\widetilde{\beta}_3}(s) &= \frac{1}{\sqrt{2+4\left(\frac{\tau_2}{\kappa_2}\right)^2}}\left(2\frac{\tau_2}{\kappa_2}T_2-N_2+B_2\right),
\end{aligned}$$

denklemlerine dönüşür. (4.3.34) ifadesinin türevi alınırsa katsayılar,

$$\begin{cases}
\mho_1=\frac{\tau_2}{\kappa_2}+2\left(\frac{\tau_2}{\kappa_2}\right)^3+2\left(\frac{\tau_2}{\kappa_2}\right)'\left(\frac{\tau_2}{\kappa_2}\right)\\
\mho_2=-1-3\left(\frac{\tau_2}{\kappa_2}\right)^2-2\left(\frac{\tau_2}{\kappa_2}\right)^4-\left(\frac{\tau_2}{\kappa_2}\right)'\\
\mho_3=-\left(\frac{\tau_2}{\kappa_2}\right)^2-2\left(\frac{\tau_2}{\kappa_2}\right)^4+\left(\frac{\tau_2}{\kappa_2}\right)'
\end{cases}$$

olmak üzere $T'_{\widetilde{\beta}_3}(s)$ türev vektörü

$$T'_{\widetilde{\beta}_3}=\frac{\sqrt{2}}{\left(1+2\left(\frac{\tau_2}{\kappa_2}\right)^2\right)^2}\left(\mho_1T_2+\mho_2T_{T_2}+\mho_3T_2\wedge T_{T_2}\right) \qquad (4.3.37)$$

biçiminde olur ve bu ifadeye (4.3.1) eşitliğindeki karşılıkları yazılırsa $T'_{\widetilde{\beta}_3}(s)$ vektörünün Mannheim partner eğrisine bağlı ifadesi

$$T'_{\widetilde{\beta}_3}(s)=\frac{\sqrt{2}}{\left(1+2\left(\frac{\tau_2}{\kappa_2}\right)^2\right)^2}\left(\mho_1T_2+\mho_2N_2+\mho_3B_2\right)$$

şeklinde elde edilir. Geodezik eğrilik tanımından $\kappa_g^{\widetilde{\beta}_3}$ geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\widetilde{\beta}_3}=\frac{1}{\left(1+2\left(\frac{\tau_2}{\kappa_2}\right)^2\right)^{\frac{5}{2}}}\left(2\frac{\tau_2}{\kappa_2}\mho_1-\mho_2+\mho_3\right)$$

şeklindedir.

Teorem 4.3.8 (α,α_2) Mannheim eğri çifti, T ile T_2 teğet vektörleri arasındaki açı θ olsun. α_2 eğrisinin teğetler göstergesine ait $T_{T_2}(T_2\wedge T_{T_2})$- Smarandache eğrisinin geodezik eğriliğinin Mannheim eğrisine bağlı ifadesi

$$\kappa_g^{\widetilde{\beta}_3}=\frac{1}{\left(1+2\left(\frac{\|W\|}{\theta'}\right)^2\right)^{\frac{5}{2}}}\left(2\frac{\|W\|}{\theta'}\overline{\mho}_1-\overline{\mho}_2+\overline{\mho}_3\right) \qquad (4.3.38)$$

denklemiyle verilir. Burada

$$\begin{cases} \overline{\mho}_1 = \left(\frac{\|W\|}{\theta'}\right) + 2\left(\frac{\|W\|}{\theta'}\right)^3 + 2\left(\frac{\|W\|}{\theta'}\right)'\left(\frac{\|W\|}{\theta'}\right) \\ \overline{\mho}_2 = -1 - 3\left(\frac{\|W\|}{\theta'}\right)^2 - 2\left(\frac{\|W\|}{\theta'}\right)^4 - \left(\frac{\|W\|}{\theta'}\right)' \\ \overline{\mho}_3 = -\left(\frac{\|W\|}{\theta'}\right)^2 - 2\left(\frac{\|W\|}{\theta'}\right)^4 + \left(\frac{\|W\|}{\theta'}\right)' \end{cases} \tag{4.3.39}$$

şeklinde birer katsayıdır.

İspat.

$$\widetilde{\beta}_3(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(T_{T_2} + T_2 \wedge T_{T_2})$$

eşitliğinde sırasıyla (4.3.1), (3.4.4) ve (3.4.8) den karşılıkları yazılırsa $\widetilde{\beta}_3$ vektörünün θ açısına göre Mannheim eğrisine bağlı ifadesi

$$\widetilde{\beta}_3(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\sin\theta T + N + \cos\theta B\big) \tag{4.3.40}$$

biçiminde olur. Bu ifadenin türevi alınırsa $T_{\widetilde{\beta}_3}(s)$ teğet vektörü

$$T_{\widetilde{\beta}_3}(s) = \frac{-\theta'\cos\theta - \|W\|\sin\theta}{\sqrt{2\|W\|^2 + \theta'^2}}T + \frac{\|W\|}{\sqrt{2\|W\|^2 + \theta'^2}}N + \frac{\theta'\sin\theta - \|W\|\cos\theta}{\sqrt{2\|W\|^2 + \theta'^2}}B \tag{4.3.41}$$

şeklinde bulunur. Bu ifadenin de türevi alınırsa katsayılar

$$\begin{cases} \overline{\mho}_1 = \left(\frac{\|W\|}{\theta'}\right) + 2\left(\frac{\|W\|}{\theta'}\right)^3 + 2\left(\frac{\|W\|}{\theta'}\right)'\left(\frac{\|W\|}{\theta'}\right) \\ \overline{\mho}_2 = -1 - 3\left(\frac{\|W\|}{\theta'}\right)^2 - 2\left(\frac{\|W\|}{\theta'}\right)^4 - \left(\frac{\|W\|}{\theta'}\right)' \\ \overline{\mho}_3 = -\left(\frac{\|W\|}{\theta'}\right)^2 - 2\left(\frac{\|W\|}{\theta'}\right)^4 + \left(\frac{\|W\|}{\theta'}\right)' \end{cases}$$

olmak üzere $T'_{\widetilde{\beta}_3}(s)$ türev vektörü

$$\begin{aligned} T'_{\widetilde{\beta}_3}(s) \quad &= \quad \frac{(\theta')^4\sqrt{2}(\overline{\mho}_2\sin\theta + \overline{\mho}_1\cos\theta)}{2(\|W\|^2 + \theta'^2)^2}T + \frac{(\theta')^4\overline{\mho}_3\sqrt{2}}{(2\|W\|^2 + \theta'^2)^2}N \\ &\quad + \frac{(\theta')^4\sqrt{2}(\overline{\mho}_2\cos\theta - \overline{\mho}_1\sin\theta)}{(2\|W\|^2 + \theta'^2)^2}B \end{aligned}$$

şeklindedir. (4.3.40) ve (4.3.41) ifadelerinden elde edilen $\widetilde{\beta}_3 \wedge T_{\widetilde{\beta}_3}$ vektörü

$$\widetilde{\beta}_3 \wedge T_{\widetilde{\beta}_3}(s) = \frac{2\|W\|\cos\theta - \theta'\sin\theta}{\sqrt{4\|W\|^2 + 2\theta'^2}}T + \frac{\theta'}{\sqrt{4\|W\|^2 + 2\theta'^2}}N - \frac{2\|W\|\sin\theta + \theta'\cos\theta}{\sqrt{4\|W\|^2 + 2\theta'^2}}B$$

şeklinde yazılır. Geodezik eğrilik tanımından $\kappa_g^{\widetilde{\beta}_3}$ geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\widetilde{\beta}_3} = \frac{1}{\left(1 + 2\left(\frac{\|W\|}{\theta'}\right)^2\right)^{\frac{5}{2}}}\left(2\frac{\|W\|}{\theta'}\overline{\mho}_1 - \overline{\mho}_2 + \overline{\mho}_3\right)$$

biçiminde olur.

Teorem 4.3.9 (α,α_2) Mannheim eğri çifti ve binormal vektörü ile Darboux vektörü arasındaki açı φ olsun. α_2 eğrisinin teğetler göstergesine ait $T_{T_2}(T_2 \wedge T_{T_2})$- Smarandache eğrisinin geodezik eğriliğinin Mannheim eğrisine bağlı ifadesi

$$\kappa_g^{\widetilde{\beta}_3} = \frac{1}{\left(1+2\left(\frac{\|W\|}{\varphi'}\right)^2\right)^{\frac{5}{2}}}\left(2\frac{\|W\|}{\varphi'}\underline{\mho}_1 - \underline{\mho}_2 + \underline{\mho}_3\right)$$

denklemiyle verilir. Burada

$$\begin{cases} \underline{\mho}_1 = \left(\frac{\|W\|}{\varphi'}\right) + 2\left(\frac{\|W\|}{\varphi'}\right)^3 + 2\left(\frac{\|W\|}{\varphi'}\right)'\left(\frac{\|W\|}{\varphi'}\right) \\ \underline{\mho}_2 = -1 - 3\left(\frac{\|W\|}{\varphi'}\right)^2 - 2\left(\frac{\|W\|}{\varphi'}\right)^4 - \left(\frac{\|W\|}{\varphi'}\right)' \\ \underline{\mho}_3 = -\left(\frac{\|W\|}{\varphi'}\right)^2 - 2\left(\frac{\|W\|}{\varphi'}\right)^4 + \left(\frac{\|W\|}{\varphi'}\right)' \end{cases}$$

şeklinde birer katsayıdır.

İspat.

$$\widetilde{\beta}_3(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(T_{T_2} + T_2 \wedge T_{T_2})$$

eşitliğinde sırasıyla (4.3.1) ve (3.4.10) dan karşılıkları yazılırsa $\widetilde{\beta}_3$ vektörünün Mannheim eğrisi-ne bağlı ifadesi

$$\widetilde{\beta}_3(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\cos\varphi\, T + N + \sin\varphi\, B\right) \tag{4.3.42}$$

biçiminde olur. Bu ifadenin türevi alınırsa $T_{\widetilde{\beta}_3}(s)$ teğet vektörü

$$T_{\widetilde{\beta}_3}(s) = \frac{\|W\|\cos\varphi - \varphi'\sin\varphi}{\sqrt{2\|W\|^2+\varphi'^2}}T + \frac{\|W\|}{\sqrt{2\|W\|^2+\varphi'^2}}N - \frac{\varphi'\cos\varphi + \|W\|\sin\varphi}{\sqrt{2\|W\|^2+\varphi'^2}}B \tag{4.3.43}$$

şeklinde bulunur. Bu ifadenin de türevi alınırsa katsayılar

$$\begin{cases} \underline{\mho}_1 = \left(\frac{\|W\|}{\varphi'}\right) + 2\left(\frac{\|W\|}{\varphi'}\right)^3 + 2\left(\frac{\|W\|}{\varphi'}\right)'\left(\frac{\|W\|}{\varphi'}\right) \\ \underline{\mho}_2 = -1 - 3\left(\frac{\|W\|}{\varphi'}\right)^2 - 2\left(\frac{\|W\|}{\varphi'}\right)^4 - \left(\frac{\|W\|}{\varphi'}\right)' \\ \underline{\mho}_3 = -\left(\frac{\|W\|}{\varphi'}\right)^2 - 2\left(\frac{\|W\|}{\varphi'}\right)^4 + \left(\frac{\|W\|}{\varphi'}\right)' \end{cases}$$

olmak üzere $T'_{\widetilde{\beta}_3}(s)$ türev vektörü

$$\begin{aligned} T'_{\widetilde{\beta}_3}(s) &= \frac{(\varphi')^4\sqrt{2}(\underline{\mho}_1\sin\varphi - \underline{\mho}_2\cos\varphi)}{2(\|W\|^2+\varphi'^2)^2}T + \frac{(\varphi')^4\underline{\mho}_3\sqrt{2}}{(2\|W\|^2+\varphi'^2)^2}N \\ &+ \frac{(\varphi')^4\sqrt{2}(\underline{\mho}_2\sin\varphi + \underline{\mho}_1\cos\varphi)}{(2\|W\|^2+\varphi'^2)^2}B \end{aligned}$$

şeklinde bulunur. (4.3.42) ve (4.3.43) ifadelerinden elde edilen $\widetilde{\beta}_3 \wedge T_{\widetilde{\beta}_3}$ vektörü

$$\widetilde{\beta}_3 \wedge T_{\widetilde{\beta}_3}(s) = \frac{2\|W\|\sin\varphi + \varphi'\cos\varphi}{\sqrt{4\|W\|^2+2\varphi'^2}}T + \frac{\varphi'}{\sqrt{4\|W\|^2+2\varphi'^2}}N + \frac{2\|W\|\cos\varphi - \varphi'\sin\varphi}{\sqrt{4\|W\|^2+2\varphi'^2}}B$$

şeklinde yazılır. Geodezik eğrilik tanımından $\kappa_g^{\widetilde{\beta}_3}$ geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\widetilde{\beta}_3} = \frac{1}{\left(1+2\left(\frac{\|W\|}{\varphi'}\right)^2\right)^{\frac{5}{2}}}\left(2\frac{\|W\|}{\varphi'}\underline{\mho}_1 - \underline{\mho}_2 + \underline{\mho}_3\right)$$

biçiminde elde edilir.

Tanım 4.3.4 $\alpha_2 : I \to S^2$ Mannheim partner eğrisinin teğetler göstergesine ait Sabban çatısı $\{T_2, T_{T_2}, T_2 \wedge T_{T_2}\}$ olsun.

$$\widetilde{\beta}_4(s) = \frac{1}{\sqrt{3}}(T_2 + T_{T_2} + T_2 \wedge T_{T_2}) \tag{4.3.44}$$

şeklinde tanımlı vektörün çizdiği regüler eğriye $T_2T_{T_2}(T_2 \wedge T_{T_2})$-Smarandache eğrisi denir.

Teorem 4.3.10 $T_2T_{T_2}(T_2 \wedge T_{T_2})$-Smarandache eğrisinin geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\widetilde{\beta}_4} = \frac{1}{4\sqrt{2}\left(1+\frac{\tau_2}{\kappa_2}+\left(\frac{\tau_2}{\kappa_2}\right)^2\right)^{\frac{5}{2}}}\left(\left(2\frac{\tau_2}{\kappa_2}-1\right)\widetilde{\Im}_1 - \left(1+\frac{\tau_2}{\kappa_2}\right)\widetilde{\Im}_2 + \left(2-\frac{\tau_2}{\kappa_2}\right)\widetilde{\Im}_3\right) \tag{4.3.45}$$

denklemiyle verilir. Burada

$$\begin{cases} \widetilde{\Im}_1 = -2+4\left(\frac{\tau_2}{\kappa_2}\right)-\left(\frac{\tau_2}{\kappa_2}\right)^2+2\left(\frac{\tau_2}{\kappa_2}\right)^3+\left(\frac{\tau_2}{\kappa_2}\right)'\left(2\frac{\tau_2}{\kappa_2}-1\right) \\ \widetilde{\Im}_2 = -2+2\left(\frac{\tau_2}{\kappa_2}\right)-4\left(\frac{\tau_2}{\kappa_2}\right)^2+2\left(\frac{\tau_2}{\kappa_2}\right)^3-2\left(\frac{\tau_2}{\kappa_2}\right)^4-\left(\frac{\tau_2}{\kappa_2}\right)'\left(1+\frac{\tau_2}{\kappa_2}\right) \\ \widetilde{\Im}_3 = 2\left(\frac{\tau_2}{\kappa_2}\right)-4\left(\frac{\tau_2}{\kappa_2}\right)^2+4\left(\frac{\tau_2}{\kappa_2}\right)^3-2\left(\frac{\tau_2}{\kappa_2}\right)^4+\left(\frac{\tau_2}{\kappa_2}\right)'\left(2-\frac{\tau_2}{\kappa_2}\right) \end{cases} \tag{4.3.46}$$

şeklinde birer katsayıdır.

İspat.

$$\widetilde{\beta}_4(s) = \frac{1}{\sqrt{3}}(T_2 + T_{T_2} + T_2 \wedge T_{T_2})$$

eğrisinin $s_{\widetilde{\beta}_4}$ yay parametresine göre türevi alınırsa

$$T_{\widetilde{\beta}_4}\frac{ds_{\widetilde{\beta}_4}}{ds} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(-T_2+\left(1-\frac{\tau_2}{\kappa_2}\right)T_{T_2}+\frac{\tau_2}{\kappa_2}T_2\wedge T_{T_2}\right)$$

olur. Bu eşitliğin normu alınırsa $\frac{ds_{\widetilde{\beta}_4}}{ds}$ ifadesi

$$\frac{ds_{\widetilde{\beta}_4}}{ds} = \sqrt{\frac{2}{3}\left(1-\frac{\tau_2}{\kappa_2}+\left(\frac{\tau_2}{\kappa_2}\right)^2\right)}$$

bulunur. Bulunan bu ifade yukarıda yerine yazılırsa $T_{\widetilde{\beta}_4}(s)$ teğet vektörü

$$T_{\widetilde{\beta}_4}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\left(1-\frac{\tau_2}{\kappa_2}+\left(\frac{\tau_2}{\kappa_2}\right)^2\right)}}\left(-T_2+\left(1-\frac{\tau_2}{\kappa_2}\right)T_{T_2}+\frac{\tau_2}{\kappa_2}T_2\wedge T_{T_2}\right) \tag{4.3.47}$$

biçiminde olur. (4.3.44) ve (4.3.47) ifadelerinden elde edilen $\widetilde{\beta}_4 \wedge T_{\widetilde{\beta}_4}$ vektörü

$$\widetilde{\beta}_4 \wedge T_{\widetilde{\beta}_4}(s) = \frac{1}{\sqrt{6}\sqrt{1-\frac{\tau_2}{\kappa_2}+\left(\frac{\tau_2}{\kappa_2}\right)^2}}\Big((2\frac{\tau_2}{\kappa_2}-1)T_2-(1+\frac{\tau_2}{\kappa_2})T_{T_2}+(2-\frac{\tau_2}{\kappa_2})T_2\wedge T_{T_2}\Big) \tag{4.3.48}$$

şeklinde yazılır. (4.3.44), (4.3.47) ve (4.3.48) vektörlerinde (4.3.1) den karşılıkları yazılırsa $\widetilde{\beta}_4$-Smarandache eğrisine ait Sabban çatısının Mannheim partner eğrisine bağlı ifadesi

$$\begin{aligned}
\widetilde{\beta}_4(s) &= \frac{1}{\sqrt{3}}(T_2+N_2+B_2),\\
T_{\widetilde{\beta}_4}(s) &= \frac{1}{\sqrt{2\Big(1-\frac{\tau_2}{\kappa_2}+\left(\frac{\tau_2}{\kappa_2}\right)^2\Big)}}\Big(-T_2+\big(1-\frac{\tau_2}{\kappa_2}\big)N_2+\frac{\tau_2}{\kappa_2}B_2\Big),\\
\widetilde{\beta}_4 \wedge T_{\widetilde{\beta}_4}(s) &= \frac{1}{\sqrt{6}\sqrt{1-\frac{\tau_2}{\kappa_2}+\left(\frac{\tau_2}{\kappa_2}\right)^2}}\Big((2\frac{\tau_2}{\kappa_2}-1)T_2-(1+\frac{\tau_2}{\kappa_2})N_2+(2-\frac{\tau_2}{\kappa_2})B_2\Big)
\end{aligned}$$

denklemlerine dönüşür. (4.3.47) ifadesinin türevi alınırsa katsayılar

$$\begin{cases}
\widetilde{\Im}_1 = -2+4\big(\frac{\tau_2}{\kappa_2}\big)-\big(\frac{\tau_2}{\kappa_2}\big)^2+2\big(\frac{\tau_2}{\kappa_2}\big)^3+\big(\frac{\tau_2}{\kappa_2}\big)'\big(2\frac{\tau_2}{\kappa_2}-1\big)\\[2ex]
\widetilde{\Im}_2 = -2+2\big(\frac{\tau_2}{\kappa_2}\big)-4\big(\frac{\tau_2}{\kappa_2}\big)^2+2\big(\frac{\tau_2}{\kappa_2}\big)^3-2\big(\frac{\tau_2}{\kappa_2}\big)^4-\big(\frac{\tau_2}{\kappa_2}\big)'\big(1+\frac{\tau_2}{\kappa_2}\big)\\[2ex]
\widetilde{\Im}_3 = 2\big(\frac{\tau_2}{\kappa_2}\big)-4\big(\frac{\tau_2}{\kappa_2}\big)^2+4\big(\frac{\tau_2}{\kappa_2}\big)^3-2\big(\frac{\tau_2}{\kappa_2}\big)^4+\big(\frac{\tau_2}{\kappa_2}\big)'\big(2-\frac{\tau_2}{\kappa_2}\big)
\end{cases}$$

olmak üzere $T'_{\widetilde{\beta}_4}(s)$ türev vektörü

$$T'_{\widetilde{\beta}_4} = \frac{\sqrt{3}}{4\Big(1-\frac{\tau_2}{\kappa_2}+\big(\frac{\tau_2}{\kappa_2}\big)^2\Big)^2}\big(\widetilde{\Im}_1T_2+\widetilde{\Im}_2T_{T_2}+\widetilde{\Im}_3T_2\wedge T_{T_2}\big) \tag{4.3.49}$$

şeklinde elde edilir. Bu eşitliğe (4.3.1) den karşılıkları yazılırsa $T'_{\widetilde{\beta}_4}(s)$ türev vektörünün Mann-heim partner eğrisine bağlı ifadesi

$$T'_{\widetilde{\beta}_4} = \frac{\sqrt{3}}{4\Big(1-\frac{\tau_2}{\kappa_2}+\big(\frac{\tau_2}{\kappa_2}\big)^2\Big)^2}\big(\widetilde{\Im}_1T_2+\widetilde{\Im}_2N_2+\widetilde{\Im}_3B_2\big)$$

şekline dönüşür. Geodezik eğrilik tanımından $\kappa_g^{\widetilde{\beta}_4}$ geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\widetilde{\beta}_4} = \frac{1}{4\sqrt{2}\big(1+\frac{\tau_2}{\kappa_2}+\big(\frac{\tau_2}{\kappa_2}\big)^2\big)^{\frac{5}{2}}}\Big((2\frac{\tau_2}{\kappa_2}-1)\widetilde{\Im}_1-\big(1+\frac{\tau_2}{\kappa_2}\big)\widetilde{\Im}_2+\big(2-\frac{\tau_2}{\kappa_2}\big)\widetilde{\Im}_3\Big)$$

biçiminde bulunur.

Teorem 4.3.11 (α, α_2) Mannheim eğri çifti, T ile T_2 teğet vektörleri arasındaki açı θ olsun. α_2 eğrisinin teğetler göstergesine ait $T_2T_{T_2}(T_2 \wedge T_{T_2})$- Smarandache eğrisinin geodezik eğriliğinin Mannheim eğrisine bağlı ifadesi

$$\kappa_g^{\widetilde{\beta}_4} = \frac{1}{4\sqrt{2}\Big(1+\frac{\|W\|}{\theta'}+\big(\frac{\|W\|}{\theta'}\big)^2\Big)^{\frac{5}{2}}}\Big(\big(2\frac{\|W\|}{\theta'}-1\big)\overline{\Im}_1-\big(1+\frac{\|W\|}{\theta'}\big)\overline{\Im}_2+\big(2-\frac{\|W\|}{\theta'}\big)\overline{\Im}_3\Big) \tag{4.3.50}$$

denklemiyle verilir. Burada

$$\begin{cases} \overline{\Im}_1 = -2+4\big(\frac{\|W\|}{\theta'}\big)-4\big(\frac{\|W\|}{\theta'}\big)^2+2\big(\frac{\|W\|}{\theta'}\big)^3+\big(\frac{\|W\|}{\theta'}\big)'\big(2\frac{\|W\|}{\theta'}-1\big) \\ \overline{\Im}_2 = -2+2\big(\frac{\|W\|}{\theta'}\big)-4\big(\frac{\|W\|}{\theta'}\big)^2+\big(\frac{\|W\|}{\theta'}\big)^3-2\big(\frac{\|W\|}{\theta'}\big)^4-\big(\frac{\|W\|}{\theta'}\big)'\big(1+\frac{\|W\|}{\theta'}\big) \\ \overline{\Im}_3 = 2\big(\frac{\|W\|}{\theta'}\big)-4\big(\frac{\|W\|}{\theta'}\big)^2+4\big(\frac{\|W\|}{\theta'}\big)^3-2\big(\frac{\|W\|}{\theta'}\big)^4+\big(\frac{\|W\|}{\theta'}\big)'\big(2-\frac{\|W\|}{\theta'}\big) \end{cases} \tag{4.3.51}$$

şeklinde birer katsayıdır.

İspat.

$$\widetilde{\beta}_4(s) = \frac{1}{\sqrt{3}}(T_2+T_{T_2}+T_2\wedge T_{T_2})$$

eşitliğinde sırasıyla (4.3.1), (3.4.4) ve (3.4.8) den karşılıkları yazılırsa $\widetilde{\beta}_4$ vektörünün θ açısına göre Mannheim eğrisine bağlı ifadesi

$$\widetilde{\beta}_4(s) = \frac{1}{\sqrt{3}}\big((\sin\theta+\cos\theta)T+N+(\cos\theta-\sin\theta)B\big) \tag{4.3.52}$$

olur ve bu ifadenin türevi alınırsa $T_{\widetilde{\beta}_4}(s)$ teğet vektörü

$$\begin{aligned} T_{\widetilde{\beta}_4}(s) &= \frac{\theta'\cos\theta-\big(\|W\|-\theta'\big)\sin\theta}{\sqrt{2(\|W\|^2-\|W\|\theta'+\theta'^2)}}T+\frac{\|W\|}{\sqrt{2(\|W\|^2-\|W\|\theta'+\theta'^2)}}N \\ &\quad -\frac{\theta'\sin\theta+(\|W\|-\theta')\cos\theta}{\sqrt{2(\|W\|^2-\|W\|\theta'+\theta'^2)}}B \end{aligned} \tag{4.3.53}$$

şeklinde bulunur. Bu ifadenin de türevi alınırsa katsayılar

$$\begin{cases} \overline{\Im}_1 = -2+4\big(\frac{\|W\|}{\theta'}\big)-4\big(\frac{\|W\|}{\theta'}\big)^2+2\big(\frac{\|W\|}{\theta'}\big)^3+\big(\frac{\|W\|}{\theta'}\big)'\big(2\frac{\|W\|}{\theta'}-1\big) \\ \overline{\Im}_2 = -2+2\big(\frac{\|W\|}{\theta'}\big)-4\big(\frac{\|W\|}{\theta'}\big)^2+\big(\frac{\|W\|}{\theta'}\big)^3-2\big(\frac{\|W\|}{\theta'}\big)^4-\big(\frac{\|W\|}{\theta'}\big)'\big(1+\frac{\|W\|}{\theta'}\big) \\ \overline{\Im}_3 = 2\big(\frac{\|W\|}{\theta'}\big)-4\big(\frac{\|W\|}{\theta'}\big)^2+4\big(\frac{\|W\|}{\theta'}\big)^3-2\big(\frac{\|W\|}{\theta'}\big)^4+\big(\frac{\|W\|}{\theta'}\big)'\big(2-\frac{\|W\|}{\theta'}\big) \end{cases}$$

olmak üzere $T'_{\widetilde{\beta}_4}(s)$ türev vektörü

$$\begin{aligned} T'_{\widetilde{\beta}_4}(s) &= \frac{(\theta')^4\sqrt{3}(\overline{\Im}_2\sin\theta+\overline{\Im}_1\cos\theta)}{4(\|W\|^2-\|W\|\theta'+\theta'^2)^2}T+\frac{(\theta')^4\sqrt{3}\overline{\Im}_3}{4(\|W\|^2-\|W\|\theta'+\theta'^2)^2}N \\ &\quad +\frac{(\theta')^4\sqrt{3}(\overline{\Im}_2\cos\theta-\overline{\Im}_1\sin\theta)}{4(\|W\|^2-\|W\|\theta'+\theta'^2)^2}B \end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. (4.3.52) ve (4.3.53) ifadelerinden elde edilen $\widetilde{\beta}_4 \wedge T_{\widetilde{\beta}_4}$ vektörü

$$\begin{aligned}\widetilde{\beta}_4 \wedge T_{\widetilde{\beta}_4}(s) &= \frac{(2\|W\|-\theta')\cos\theta-(\|W\|+\theta')\sin\theta}{\sqrt{6\|W\|^2-6\|W\|\theta'+6\theta'^2}}T+\frac{2\theta'-\|W\|}{\sqrt{6\|W\|^2-6\|W\|\theta'+6\theta'^2}}N\\ &\quad -\frac{(2\|W\|-\theta')\sin\theta+(\|W\|+\theta')\cos\theta}{\sqrt{6\|W\|^2-6\|W\|\theta'+6\theta'^2}}B\end{aligned}$$

şeklinde yazılır. Geodezik eğrilik tanımından $\kappa_g^{\widetilde{\beta}_4}$ geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\widetilde{\beta}_4}=\frac{1}{4\sqrt{2}\big(1+\frac{\|W\|}{\theta'}+(\frac{\|W\|}{\theta'})^2\big)^{\frac{5}{2}}}\Big((2\frac{\|W\|}{\theta'}-1)\Im_1-(1+\frac{\|W\|}{\theta'})\Im_2+(2-\frac{\|W\|}{\theta'})\Im_3\Big)$$

biçiminde olur.

Teorem 4.3.12 (α,α_2) Mannheim eğri çifti ve binormal vektörü ile Darboux vektörü arasındaki açı φ olsun. α_2 eğrisinin teğetler göstergesine ait $T_2T_{T_2}(T_2\wedge T_{T_2})$- Smarandache eğrisinin geodezik eğriliğinin Mannheim eğrisine bağlı ifadesi

$$\kappa_g^{\widetilde{\beta}_4}=\frac{1}{4\sqrt{2}\big(1+\frac{\|W\|}{\varphi'}+(\frac{\|W\|}{\varphi'})^2\big)^{\frac{5}{2}}}\Big((2\frac{\|W\|}{\varphi'}-1)\underline{\Im}_1-(1+\frac{\|W\|}{\varphi'})\underline{\Im}_2+(2-\frac{\|W\|}{\varphi'})\underline{\Im}_3\Big) \tag{4.3.54}$$

denklemiyle verilir. Burada

$$\begin{cases}\underline{\Im}_1=-2+4(\frac{\|W\|}{\varphi'})-4(\frac{\|W\|}{\varphi'})^2+2(\frac{\|W\|}{\varphi'})^3+(\frac{\|W\|}{\varphi'})'(2\frac{\|W\|}{\varphi'}-1)\\ \underline{\Im}_2=-2+2(\frac{\|W\|}{\varphi'})-4(\frac{\|W\|}{\varphi'})^2+(\frac{\|W\|}{\varphi'})^3-2(\frac{\|W\|}{\varphi'})^4-(\frac{\|W\|}{\varphi'})'(1+\frac{\|W\|}{\varphi'})\\ \underline{\Im}_3=2(\frac{\|W\|}{\varphi'})-4(\frac{\|W\|}{\varphi'})^2+4(\frac{\|W\|}{\varphi'})^3-2(\frac{\|W\|}{\varphi'})^4+(\frac{\|W\|}{\varphi'})'(2-\frac{\|W\|}{\varphi'})\end{cases} \tag{4.3.55}$$

şeklinde birer katsayıdır.

İspat.

$$\widetilde{\beta}_4(s)=\frac{1}{\sqrt{3}}(T_2+T_{T_2}+T_2\wedge T_{T_2})$$

eşitliğinde sırasıyla (4.3.1) ve (3.4.10) dan karşılıkları yazılırsa $\widetilde{\beta}_4$ vektörünün Mannheim eğrisine bağlı ifadesi

$$\widetilde{\beta}_4(s)=\frac{1}{\sqrt{3}}\big((\sin\varphi-\cos\varphi)T+N+(\cos\varphi+\sin\varphi)B\big) \tag{4.3.56}$$

biçiminde olur. Bu ifadenin türevi alınırsa $T_{\widetilde{\beta}_4}(s)$ teğet vektörü

$$T_{\widetilde{\beta}_4}(s) = \frac{\varphi' \sin\varphi + \left(\|W\| - \varphi'\right)\cos\varphi}{\sqrt{2(\|W\|^2 - \|W\|\varphi' + \varphi'^2)}}T + \frac{\|W\|}{\sqrt{2(\|W\|^2 - \|W\|\varphi' + \varphi'^2)}}N$$
$$+\frac{\varphi' \cos\varphi - (\|W\| - \varphi')\sin\varphi}{\sqrt{2(\|W\|^2 - \|W\|\varphi' + \varphi'^2)}}B \tag{4.3.57}$$

şeklinde bulunur. Bu ifadenin de türevi alınırsa katsayılar

$$\begin{cases} \underline{\Im}_1 = -2+4\left(\frac{\|W\|}{\varphi'}\right) - 4\left(\frac{\|W\|}{\varphi'}\right)^2 + 2\left(\frac{\|W\|}{\varphi'}\right)^3 + \left(\frac{\|W\|}{\varphi'}\right)'\left(2\frac{\|W\|}{\varphi'} - 1\right) \\ \underline{\Im}_2 = -2+2\left(\frac{\|W\|}{\varphi'}\right) - 4\left(\frac{\|W\|}{\varphi'}\right)^2 + \left(\frac{\|W\|}{\varphi'}\right)^3 - 2\left(\frac{\|W\|}{\varphi'}\right)^4 - \left(\frac{\|W\|}{\varphi'}\right)'\left(1 + \frac{\|W\|}{\varphi'}\right) \\ \underline{\Im}_3 = 2\left(\frac{\|W\|}{\varphi'}\right) - 4\left(\frac{\|W\|}{\varphi'}\right)^2 + 4\left(\frac{\|W\|}{\varphi'}\right)^3 - 2\left(\frac{\|W\|}{\varphi'}\right)^4 + \left(\frac{\|W\|}{\varphi'}\right)'\left(2 - \frac{\|W\|}{\varphi'}\right) \end{cases}$$

olmak üzere $T'_{\widetilde{\beta}_4}(s)$ türev vektörü

$$T'_{\widetilde{\beta}_4}(s) = \frac{(\varphi')^4\sqrt{3}(\underline{\Im}_1 \sin\varphi - \underline{\Im}_2 \cos\varphi)}{4(\|W\|^2 - \|W\|\varphi' + \varphi'^2)^2}T + \frac{(\varphi')^4\sqrt{3}\underline{\Im}_3}{4(\|W\|^2 - \|W\|\varphi' + \varphi'^2)^2}N$$
$$+\frac{(\varphi')^4\sqrt{3}(\underline{\Im}_2 \sin\varphi + \underline{\Im}_1 \cos\varphi)}{4(\|W\|^2 - \|W\|\varphi' + \varphi'^2)^2}B$$

biçiminde olur. (4.3.52) ve (4.3.53) ifadelerinden elde edilen $\widetilde{\beta}_4 \wedge T_{\widetilde{\beta}_4}$ vektörü

$$\widetilde{\beta}_4 \wedge T_{\widetilde{\beta}_4}(s) = \frac{(2\|W\| - \varphi')\sin\varphi + (\|W\| + \varphi')\cos\varphi}{\sqrt{6\|W\|^2 - 6\|W\|\varphi' + 6\varphi'^2}}T + \frac{2\varphi' - \|W\|}{\sqrt{6\|W\|^2 - 6\|W\|\varphi' + 6\varphi'^2}}N$$
$$+\frac{(2\|W\| - \varphi')\cos\varphi - (\|W\| + \varphi')\sin\varphi}{\sqrt{6\|W\|^2 - 6\|W\|\varphi' + 6\varphi'^2}}B$$

şeklinde yazılır. Geodezik eğrilik tanımından $\kappa_g^{\widetilde{\beta}_4}$ geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\widetilde{\beta}_4} = \frac{1}{4\sqrt{2}\left(1 + \frac{\|W\|}{\varphi'} + \left(\frac{\|W\|}{\varphi'}\right)^2\right)^{\frac{5}{2}}}\left(\left(2\frac{\|W\|}{\varphi'} - 1\right)\underline{\Im}_1 - \left(1 + \frac{\|W\|}{\varphi'}\right)\underline{\Im}_2 + \left(2 - \frac{\|W\|}{\varphi'}\right)\underline{\Im}_3\right)$$

biçiminde elde edilir.

Tanım 4.3.5 $\alpha_2 : I \to S^2$ Mannheim partner eğrisinin aslinormaller göstergesine ait Sabban çatısı $\{N_2, T_{N_2}, N_2 \wedge T_{N_2}\}$ olsun.

$$\widetilde{\beta}_{\varsigma_1}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(N_2 + T_{N_2}) \tag{4.3.58}$$

şeklinde tanımlı vektörün çizdiği regüler eğriye $N_2T_{N_2}$-Smarandache eğrisi denir.

Teorem 4.3.13 $N_2T_{N_2}$-Smarandache eğrisinin geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\widetilde{\beta}_{\varsigma_1}} = \frac{1}{\left(2+\left(\frac{\varphi_2'}{\|W_2\|}\right)^2\right)^{\frac{5}{2}}}\left(\frac{\varphi_2'}{\|W_2\|}\widetilde{\varpi}_1 - \frac{\varphi_2'}{\|W_2\|}\widetilde{\varpi}_2 + 2\widetilde{\varpi}_3\right) \tag{4.3.59}$$

denklemiyle verilir. Burada

$$\begin{cases} \widetilde{\varpi}_1 = -2-\left(\frac{\varphi_2'}{\|W_2\|}\right)^2+\left(\frac{\varphi_2'}{\|W_2\|}\right)'\left(\frac{\varphi_2'}{\|W_2\|}\right) \\ \\ \widetilde{\varpi}_2 = -2-3\left(\frac{\varphi_2'}{\|W_2\|}\right)^2-\left(\frac{\varphi_2'}{\|W_2\|}\right)^4-\left(\frac{\varphi_2'}{\|W_2\|}\right)'\left(\frac{\varphi_2'}{\|W_2\|}\right) \\ \\ \widetilde{\varpi}_3 = 2\left(\frac{\varphi_2'}{\|W_2\|}\right)+\left(\frac{\varphi_2'}{\|W_2\|}\right)^3+\left(\frac{\varphi_2'}{\|W_2\|}\right)' \end{cases} \tag{4.3.60}$$

şeklinde birer katsayıdır.

İspat.

$$\widetilde{\beta}_{\varsigma_1}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(N_2 + T_{N_2})$$

eğrisinin $s_{\widetilde{\beta}_{\varsigma_1}}$ yay parametresine göre türevi alınırsa

$$T_{\widetilde{\beta}_{\varsigma_1}}\frac{ds_{\widetilde{\beta}_{\varsigma_1}}}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-N_2 + T_{N_2} + \frac{\varphi_2'}{\|W_2\|}N_2 \wedge T_{N_2}\right)$$

olur. Bu eşitliğin normu alınırsa $\frac{ds_{\widetilde{\beta}_{\varsigma_1}}}{ds}$ ifadesi

$$\frac{ds_{\widetilde{\beta}_{\varsigma_1}}}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2+\left(\frac{\varphi_2'}{\|W_2\|}\right)^2}$$

bulunur. Bulunan bu ifade yukarıda yerine yazılırsa $T_{\widetilde{\beta}_{\varsigma_1}}(s)$ teğet vektörü

$$T_{\widetilde{\beta}_{\varsigma_1}}(s) = \frac{1}{\sqrt{2+\left(\frac{\varphi_2'}{\|W_2\|}\right)^2}}\left(-N_2 + T_{N_2} + \frac{\varphi_2'}{\|W_2\|}N_2 \wedge T_{N_2}\right) \tag{4.3.61}$$

biçiminde olur. Bu ifadenin tekrar türevi alınırsa katsayılar,

$$\begin{cases} \widetilde{\varpi}_1 = -2-\left(\frac{\varphi_2'}{\|W_2\|}\right)^2+\left(\frac{\varphi_2'}{\|W_2\|}\right)'\left(\frac{\varphi_2'}{\|W_2\|}\right) \\ \widetilde{\varpi}_2 = -2-3\left(\frac{\varphi_2'}{\|W_2\|}\right)^2-\left(\frac{\varphi_2'}{\|W_2\|}\right)^4-\left(\frac{\varphi_2'}{\|W_2\|}\right)'\left(\frac{\varphi_2'}{\|W_2\|}\right) \\ \widetilde{\varpi}_3 = 2\left(\frac{\varphi_2'}{\|W_2\|}\right)+\left(\frac{\varphi_2'}{\|W_2\|}\right)^3+\left(\frac{\varphi_2'}{\|W_2\|}\right)' \end{cases}$$

olmak üzere $T'_{\widetilde{\beta}_{\varsigma_1}}(s)$ türev vektörü

$$T'_{\widetilde{\beta}_{\varsigma_1}}(s) = \frac{\sqrt{2}}{\left(2+\left(\frac{\varphi_2'}{\|W_2\|}\right)^2\right)^2}\left(\widetilde{\varpi}_1 N_2 + \widetilde{\varpi}_2 T_{N_2} + \widetilde{\varpi}_3 N_2 \wedge T_{N_2}\right) \tag{4.3.62}$$

şeklinde bulunur. (4.3.58) ve (4.3.61) ifadelerinden elde edilen $\widetilde{\beta}_{\varsigma_1} \wedge T_{\widetilde{\beta}_{\varsigma_1}}$ vektörü

$$\widetilde{\beta}_{\varsigma_1} \wedge T_{\widetilde{\beta}_{\varsigma_1}}(s) = \frac{1}{\sqrt{4+2\left(\frac{\varphi_2{}'}{\|W_2\|}\right)^2}}\left(\frac{\varphi_2{}'}{\|W_2\|}N_2 - \frac{\varphi_2{}'}{\|W_2\|}T_{N_2} + 2N_2 \wedge T_{N_2}\right) \qquad (4.3.63)$$

şeklinde yazılır. (4.3.58), (4.3.61), (4.3.62) ve (4.3.63) vektörlerinde (4.3.2) den karşılıkları yazılırsa $\widetilde{\beta}_{\varsigma_1}$-Smarandache eğrisine ait Sabban çatısının ve $T'_{\widetilde{\beta}_{\varsigma_2}}$ türev vektörünün Mannheim partner eğrisine bağlı ifadesi,

$$\begin{aligned}
\widetilde{\beta}_{\varsigma_1}(s) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(-\cos\varphi_2 T_2 + N_2 + \sin\varphi_2 B_2), \\
T_{\widetilde{\beta}_{\varsigma_1}}(s) &= \frac{\varphi_2{}'\sin\varphi_2 - \|W_2\|\cos\varphi_2}{\sqrt{2\|W_2\|^2+\varphi_2{}'^2}}T_2 + \frac{\|W_2\|}{\sqrt{2\|W_2\|^2+\varphi_2{}'^2}}N_2 \\
&\quad + \frac{\varphi_2{}'\cos\varphi_2 + \|W_2\|\sin\varphi_2}{\sqrt{2\|W_2\|^2+\varphi_2{}'^2}}B_2, \\
\widetilde{\beta}_{\varsigma_1} \wedge T_{\widetilde{\beta}_{\varsigma_1}}(s) &= \frac{\varphi_2{}'\cos\varphi_2 + 2\|W_2\|\sin\varphi_2}{\sqrt{4\|W_2\|^2+2\varphi_2{}'^2}}T_2 - \frac{\varphi_2{}'}{\sqrt{4\|W_2\|^2+2\varphi_2{}'^2}}N_2 \\
&\quad + \frac{2\|W_2\|\cos\varphi_2 - \varphi_2{}'\sin\varphi_2}{\sqrt{4\|W_2\|^2+2\varphi_2{}'^2}}B_2, \\
T'_{\widetilde{\beta}_{\varsigma_1}}(s) &= \frac{\|W_2\|^4\sqrt{2}(\widetilde{\varpi}_3\sin\varphi_2 - \widetilde{\varpi}_2\cos\varphi_2)}{\left(2\|W_2\|^2+\varphi_2{}'^2\right)^2}T_2 + \frac{\widetilde{\varpi}_1\|W_2\|^4\sqrt{2}}{\left(2\|W_2\|^2+\varphi_2{}'^2\right)^2}N_2 \\
&\quad + \frac{\|W_2\|^4\sqrt{2}(\widetilde{\varpi}_2\sin\varphi_2 + \cos\varphi_2\widetilde{\varpi}_3)}{\left(2\|W_2\|^2+\varphi_2{}'^2\right)^2}B_2
\end{aligned}$$

denklemlerine dönüşür. Geodezik eğrilik tanımından $\kappa_g^{\widetilde{\beta}_{\varsigma_1}}$ geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\widetilde{\beta}_{\varsigma_1}} = \frac{1}{\left(2+\left(\frac{\varphi_2{}'}{\|W_2\|}\right)^2\right)^{\frac{5}{2}}}\left(\frac{\varphi_2{}'}{\|W_2\|}\widetilde{\varpi}_1 - \frac{\varphi_2{}'}{\|W_2\|}\widetilde{\varpi}_2 + 2\widetilde{\varpi}_3\right)$$

biçiminde elde edilir.

Teorem 4.3.14 (α,α_2) Mannheim eğri çifti, T ile T_2 teğet vektörleri arasındaki açı θ olsun. α_2 eğrisinin aslinormaller göstergesine ait $N_2T_{N_2}$- Smarandache eğrisinin geodezik eğriliğinin Mannheim eğrisine bağlı ifadesi

$$\kappa_g^{\widetilde{\beta}_{\varsigma_1}} = \frac{1}{(2+F^2)^{\frac{5}{2}}}\left(F\overline{\widetilde{\varpi}}_1 - F\overline{\widetilde{\varpi}}_2 + 2\overline{\widetilde{\varpi}}_3\right) \qquad (4.3.64)$$

denklemiyle verilir. Burada

$$\digamma = \frac{\varphi_2{}'}{\|W_2\|} = \Big(\frac{\|W\|}{\sqrt{\theta'^2 + \|W\|^2}}\Big)'\frac{\lambda\tau}{\theta'}\sec\theta$$

olmak üzere

$$\begin{cases} \overline{\overline{\widetilde{\varpi}}}_1 = -2 - \digamma^2 + \digamma'\digamma \\ \overline{\overline{\widetilde{\varpi}}}_2 = -2 - 3\digamma^2 - \digamma^4 - \digamma'\digamma \\ \overline{\overline{\widetilde{\varpi}}}_3 = 2\digamma + \digamma^3 + \digamma' \end{cases} \tag{4.3.65}$$

şeklinde birer katsayıdır.

İspat.

$$\widetilde{\beta}_{\varsigma_1}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(N_2 + T_{N_2})$$

eşitliğinde sırasıyla (4.3.2), (3.4.4) ve (3.4.8) den karşılıkları yazılırsa $\widetilde{\beta}_{\varsigma_1}$ vektörünün Mannheim eğrisine bağlı ifadesi

$$\begin{aligned} \widetilde{\beta}_{\varsigma_1}(s) \quad = \quad & \frac{\sqrt{\theta'^2 + \|W\|^2}\sin\theta - \theta'\cos\theta}{\sqrt{2\theta'^2 + 2\|W\|^2}}T + \frac{\|W\|}{\sqrt{2\theta'^2 + 2\|W\|^2}}N \\ & + \frac{\theta'\sin\theta + \sqrt{\theta'^2 + \|W\|^2}\cos\theta}{\sqrt{2\theta'^2 + 2\|W\|^2}}B \end{aligned} \tag{4.3.66}$$

şeklinde olur. Bu ifadenin türevi alınırsa $T_{\widetilde{\beta}_{\varsigma_1}}(s)$ teğet vektörü

$$\begin{aligned} T_{\widetilde{\beta}_{\varsigma_1}}(s) \quad = \quad & \frac{(\digamma\|W\| - \theta')\cos\theta - \sqrt{\|W\|^2 + \theta'^2}\sin\theta}{\sqrt{\|W\|^2 + \theta'^2}\sqrt{2 + \digamma^2}}T + \frac{\digamma\theta' + \|W\|}{\sqrt{\|W\|^2 + \theta'^2}\sqrt{2 + \digamma^2}}N \\ & - \frac{(\digamma\|W\| + \theta')\sin\theta + \sqrt{\|W\|^2 + \theta'^2}\cos\theta}{\sqrt{\|W\|^2 + \theta'^2}\sqrt{2 + \digamma^2}}B \end{aligned} \tag{4.3.67}$$

şeklinde bulunur. Burada

$$\digamma = \Big(\frac{\|W\|}{\sqrt{\theta'^2 + \|W\|^2}}\Big)'\frac{\lambda\tau}{\theta'}\sec\theta \tag{4.3.68}$$

şeklinde bir katsayıdır. (4.3.66) ve (4.3.67) ifadelerinden elde edilen $\widetilde{\beta}_{\varsigma_1} \wedge T_{\widetilde{\beta}_{\varsigma_1}}$ vektörü

$$\begin{aligned}
\widetilde{\beta}_{\varsigma_1} \wedge T_{\widetilde{\beta}_{\varsigma_1}}(s) \;=\;& \frac{(2\|W\| - \digamma\theta')\cos\theta - \digamma\sqrt{\|W\|^2+\theta'^2}\sin\theta}{\sqrt{4+2\digamma^2}\sqrt{\|W\|^2+\theta'^2}}T \\
&+\frac{2\theta' - \digamma\|W\|}{\sqrt{4+2\digamma^2}\sqrt{\|W\|^2+\theta'^2}}N \\
&+\frac{(\digamma\theta' - 2\|W\|)\sin\theta - \digamma\sqrt{\|W\|^2+\theta'^2}\cos\theta}{\sqrt{4+2\digamma^2}\sqrt{\|W\|^2+\theta'^2}}B
\end{aligned}$$

biçiminde yazılır. (4.3.67) ifadesinin türevi alınırsa $T'_{\widetilde{\beta}_{\varsigma_1}}$ türev vektörü

$$\begin{cases}
\overline{\overline{\varpi}}_1 = -2 - \digamma^2 + \digamma'\digamma \\
\overline{\overline{\varpi}}_2 = -2 - 3\digamma^2 - \digamma^4 - \digamma'\digamma \\
\overline{\overline{\varpi}}_3 = 2\digamma + \digamma^3 + \digamma'
\end{cases}$$

olmak üzere $T'_{\widetilde{\beta}_{\varsigma_1}}$ türev vektörü

$$\begin{aligned}
T'_{\widetilde{\beta}_{\varsigma_1}}(s) \;=\;& \frac{(\overline{\overline{\varpi}}_3\|W\| - \overline{\overline{\varpi}}_2\theta')\sqrt{2}\cos\theta + \sqrt{2\|W\|^2+2\theta'^2}\,\overline{\overline{\varpi}}_1\sin\theta}{(2+\digamma^2)^2\sqrt{\|W\|^2+\theta'^2}}T \\
&+\frac{(\overline{\overline{\varpi}}_3\theta' + \overline{\overline{\varpi}}_2\|W\|)\sqrt{2}}{(2+\digamma^2)^2\sqrt{\|W\|^2+\theta'^2}}N \\
&+\frac{(\overline{\overline{\varpi}}_2\theta' - \overline{\overline{\varpi}}_3\|W\|)\sqrt{2}\sin\theta + \sqrt{2\|W\|^2+2\theta'^2}\,\overline{\overline{\varpi}}_1\cos\theta}{(2+\digamma^2)^2\sqrt{\|W\|^2+\theta'^2}}B
\end{aligned}$$

biçiminde bulunur. Geodezik eğrilik tanımından $\kappa_g^{\widetilde{\beta}_{\varsigma_2}}$ geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\widetilde{\beta}_{\varsigma_1}} = \frac{1}{\left(2+\digamma^2\right)^{\frac{5}{2}}}\left(\digamma\overline{\overline{\varpi}}_1 - \digamma\overline{\overline{\varpi}}_2 + 2\overline{\overline{\varpi}}_3\right)$$

şeklinde elde edilir.

Teorem 4.3.15 (α, α_2) Mannheim eğri çifti ve binormal vektörü ile Darboux vektörü arasındaki açı φ olsun. α_2 eğrisinin aslinormaller göstergesine ait $N_2T_{N_2}$- Smarandache eğrisinin geodezik eğriliğinin Mannheim eğrisine bağlı ifadesi

$$\kappa_g^{\widetilde{\beta}_{\varsigma_1}} = \frac{1}{\left(2+(\overline{\digamma})^2\right)^{\frac{5}{2}}}\left(\overline{\digamma}\,\underline{\widetilde{\varpi}}_1 - \overline{\digamma}\,\underline{\widetilde{\varpi}}_2 + 2\underline{\widetilde{\varpi}}_3\right) \tag{4.3.69}$$

denklemiyle verilir. Burada

$$\overline{F}=\Big(\frac{\|W\|}{\sqrt{\varphi'^2+\|W\|^2}}\Big)'\frac{\lambda\tau}{\varphi'}\csc\varphi$$

olmak üzere

$$\begin{cases}\underline{\widetilde{\varpi}}_1=-2-(\overline{F})^2+\overline{F}'\overline{F}\\ \underline{\widetilde{\varpi}}_2=-2-3(\overline{F})^2-\overline{F}^4-\overline{F}'\overline{F}\\ \underline{\widetilde{\varpi}}_3=2\overline{F}+\overline{F}^3+\overline{F}'\end{cases}\tag{4.3.70}$$

şeklinde birer katsayıdır.

İspat.

$$\widetilde{\beta}_{\varsigma_1}(s)=\frac{1}{\sqrt{2}}(N_2+T_{N_2})$$

eşitliğinde sırasıyla (4.3.2) ve (3.4.10) dan karşılıkları yazılırsa $\widetilde{\beta}_{\varsigma_1}$ vektörünün Mannheim eğrisine bağlı ifadesi

$$\begin{aligned}\widetilde{\beta}_{\varsigma_1}(s) &= \frac{-\sqrt{\varphi'^2+\|W\|^2}\cos\varphi-\varphi'\sin\varphi}{\sqrt{2\varphi'^2+2\|W\|^2}}T+\frac{\|W\|}{\sqrt{2\varphi'^2+2\|W\|^2}}N\\ &\quad+\frac{\sqrt{\varphi'^2+\|W\|^2}\sin\varphi-\varphi'\cos\varphi}{\sqrt{2\varphi'^2+2\|W\|^2}}B\end{aligned}\tag{4.3.71}$$

biçiminde olur. Bu ifadenin türevi alınırsa $T_{\widetilde{\beta}_{\varsigma_1}}(s)$ teğet vektörü

$$\begin{aligned}T_{\widetilde{\beta}_{\varsigma_1}}(s) &= \frac{(\overline{F}\|W\|-\varphi')\sin\varphi+\sqrt{\|W\|^2+\varphi'^2}\cos\varphi}{\sqrt{\|W\|^2+\varphi'^2}\sqrt{2+(\overline{F})^2}}T+\frac{\overline{F}\varphi'+\|W\|}{\sqrt{\|W\|^2+\varphi'^2}\sqrt{2+(\overline{F})^2}}N\\ &\quad-\frac{(\overline{F}\|W\|-\varphi')\cos\varphi-\sqrt{\|W\|^2+\varphi'^2}\sin\varphi}{\sqrt{\|W\|^2+\varphi'^2}\sqrt{2+(\overline{F})^2}}B\end{aligned}\tag{4.3.72}$$

şeklinde bulunur. Burada

$$\overline{F}=\Big(\frac{\|W\|}{\sqrt{\varphi'^2+\|W\|^2}}\Big)'\frac{\lambda\tau}{\varphi'}\csc\varphi\tag{4.3.73}$$

şeklinde bir katsayıdır. (4.3.71) ve (4.3.72) ifadelerinden elde edilen $\widetilde{\beta}_{\varsigma_1} \wedge T_{\widetilde{\beta}_{\varsigma_1}}$ vektörü

$$\begin{aligned}
\widetilde{\beta}_{\varsigma_1} \wedge T_{\widetilde{\beta}_{\varsigma_1}}(s) &= \frac{(2\|W\| - \overline{F}\varphi')\sin\varphi + \overline{F}\sqrt{\|W\|^2+\varphi'^2}\cos\varphi}{\sqrt{4+2(\overline{F})^2}\sqrt{\|W\|^2+\varphi'^2}} T \\
&\quad + \frac{2\varphi' - \overline{F}\|W\|}{\sqrt{4+2(\overline{F})^2}\sqrt{\|W\|^2+\varphi'^2}} N \\
&\quad + \frac{(2\|W\| - \overline{F}\varphi')\cos\varphi - \overline{F}\sqrt{\|W\|^2+\varphi'^2}\sin\varphi}{\sqrt{4+2(\overline{F})^2}\sqrt{\|W\|^2+\varphi'^2}} B
\end{aligned}$$

biçiminde yazılır. (4.3.67) ifadesinin türevi alınırsa katsayılar

$$\begin{cases}
\underline{\widetilde{\varpi}}_1 = -2 - (\overline{F})^2 + \overline{F}'\overline{F} \\
\underline{\widetilde{\varpi}}_2 = -2 - 3(\overline{F})^2 - \overline{F}^4 - \overline{F}'\overline{F} \\
\underline{\widetilde{\varpi}}_3 = 2\overline{F} + \overline{F}^3 + \overline{F}'
\end{cases}$$

olmak üzere $T'_{\widetilde{\beta}_{\varsigma_1}}(s)$ türev vektörü

$$\begin{aligned}
T'_{\widetilde{\beta}_{\varsigma_1}}(s) &= \frac{(\underline{\widetilde{\varpi}}_3\|W\| - \underline{\widetilde{\varpi}}_2\varphi')\sqrt{2}\sin\varphi - \sqrt{2\|W\|^2+2\varphi'^2}\,\underline{\widetilde{\varpi}}_1\cos\varphi}{\left(2+(\overline{F})^2\right)^2\sqrt{\|W\|^2+\varphi'^2}} T \\
&\quad + \frac{(\underline{\widetilde{\varpi}}_3\varphi' + \underline{\widetilde{\varpi}}_2\|W\|)\sqrt{2}}{\left(2+(\overline{F})^2\right)^2\sqrt{\|W\|^2+\varphi'^2}} N \\
&\quad + \frac{\sqrt{2\|W\|^2+2\varphi'^2}\,\underline{\widetilde{\varpi}}_1\sin\varphi - (\underline{\widetilde{\varpi}}_2\varphi' - \underline{\widetilde{\varpi}}_3\|W\|)\sqrt{2}\cos\varphi}{\left(2+(\overline{F})^2\right)^2\sqrt{\|W\|^2+\varphi'^2}} B
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Geodezik eğrilik tanımından $\kappa_g^{\widetilde{\beta}_{\varsigma_1}}$ geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\widetilde{\beta}_{\varsigma_1}} = \frac{1}{\left(2+(\overline{F})^2\right)^{\frac{5}{2}}}\left(\overline{F}\underline{\widetilde{\varpi}}_1 - \overline{F}\underline{\widetilde{\varpi}}_2 + 2\underline{\widetilde{\varpi}}_3\right)$$

biçiminde elde edilir.

Tanım 4.3.6 $\alpha_2 : I \to S^2$ Mannheim partner eğrisinin aslinormaller göstergesine ait Sabban çatısı $\{N_2, T_{N_2}, N_2 \wedge T_{N_2}\}$ olsun.

$$\widetilde{\beta}_{\varsigma_2}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(N_2 + N_2 \wedge T_{N_2}) \tag{4.3.74}$$

şeklinde tanımlı vektörün çizdiği regüler eğriye $N_2(N_2 \wedge T_{N_2})$-Smarandache eğrisi denir.

Teorem 4.3.16 $N_2(N_2 \wedge T_{N_2})$-Smarandache eğrisinin geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\widetilde{\beta}_{\varsigma_2}} = \frac{\|W_2\| + \varphi_2{}'}{\|W_2\| - \varphi_2{}'} \tag{4.3.75}$$

denklemiyle verilir.

İspat.

$$\widetilde{\beta}_{\varsigma_2}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(N_2 + N_2 \wedge T_{N_2})$$

eğrisinin $s_{\widetilde{\beta}_{\varsigma_2}}$ yay parametresine göre türevi alınırsa

$$T_{\widetilde{\beta}_{\varsigma_2}} \frac{ds_{\widetilde{\beta}_{\varsigma_2}}}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(1 - \frac{\varphi_2{}'}{\|W_2\|}\big)T_{N_2} \tag{4.3.76}$$

olur. Bu eşitliğin normu alınırsa $\frac{ds_{\widetilde{\beta}_{\varsigma_2}}}{ds}$ ifadesi

$$\frac{ds_{\widetilde{\beta}_{\varsigma_2}}}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(1 - \frac{\varphi_2{}'}{\|W_2\|}\big) \tag{4.3.77}$$

bulunur. Bu ifade yukarıda yerine yazılırsa $T_{\widetilde{\beta}_{\varsigma_2}}(s)$ teğet vektörü

$$T_{\widetilde{\beta}_{\varsigma_2}}(s) = T_{N_2} \tag{4.3.78}$$

biçiminde olur. Bu ifadenin tekrar türevi alınırsa $T'_{\widetilde{\beta}_{\varsigma_2}}(s)$ türev vektörü

$$T'_{\widetilde{\beta}_{\varsigma_2}}(s) = \frac{\sqrt{2}}{(1 - \frac{\varphi_2{}'}{\|W_2\|})}\big(-N_2 + \frac{\varphi_2{}'}{\|W_2\|}N_2 \wedge T_{N_2}\big) \tag{4.3.79}$$

şeklinde bulunur. (4.3.74) ve (4.3.78) ifadelerinden elde edilen $\widetilde{\beta}_{\varsigma_2} \wedge T_{\widetilde{\beta}_{\varsigma_2}}$ vektörü

$$\widetilde{\beta}_{\varsigma_2} \wedge T_{\widetilde{\beta}_{\varsigma_2}}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-N_2 + N_2 \wedge T_{N_2}) \tag{4.3.80}$$

şeklinde yazılır. (4.3.74), (4.3.78), (4.3.79) ve (4.3.80) vektörlerinde (4.3.2) den karşılıkları yazılırsa $\widetilde{\beta}_{\varsigma_2}$-Smarandache eğrisine ait Sabban çatısının ve $T'_{\widetilde{\beta}_{\varsigma_2}}$ vektörünün Mannheim partner eğrisine bağlı ifadesi,

$$\begin{aligned}
\widetilde{\beta}_{\varsigma_2}(s) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin\varphi_2 T_2 + N_2 + \cos\varphi_2 B_2), \\
T_{\widetilde{\beta}_{\varsigma_2}}(s) &= -\cos\varphi_2 T_2 + \sin\varphi_2 B_2, \\
\widetilde{\beta}_{\varsigma_2} \wedge T_{\widetilde{\beta}_{\varsigma_2}}(s) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin\varphi_2 T_2 - N_2 + \cos\varphi_2 B_2), \\
T'_{\widetilde{\beta}_{\varsigma_2}}(s) &= \frac{\varphi_2{}'\sin\varphi_2\sqrt{2}}{\|W_2\| - \varphi_2{}'}T_2 - \frac{\|W_2\|\sqrt{2}}{\|W_2\| - \varphi_2{}'}N_2 + \frac{\varphi_2{}'\cos\varphi_2\sqrt{2}}{\|W_2\| - \varphi_2{}'}B_2
\end{aligned}$$

denklemlerine dönüşür. Geodezik eğrilik tanımından $\kappa_g^{\widetilde{\beta}_{\varsigma_2}}$ geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\widetilde{\beta}_{\varsigma_2}} = \frac{\|W_2\| + \varphi_2{}'}{\|W_2\| - \varphi_2{}'}$$

biçiminde olur.

Teorem 4.3.17 (α, α_2) Mannheim eğri çifti, T ile T_2 teğet vektörleri arasındaki açı θ olsun. α_2 eğrisinin aslinormaller göstergesine ait $N_2(N_2 \wedge T_{N_2})$- Smarandache eğrisinin geodezik eğriliğinin Mannheim eğrisine bağlı ifadesi

$$\kappa_g^{\widetilde{\beta}_{\varsigma_2}} = \frac{1+F}{1-F}$$

denklemiyle verilir.

İspat.

$$\widetilde{\beta}_{\varsigma_2}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(N_2 + N_2 \wedge T_{N_2})$$

eşitliğinde sırasıyla (4.3.2), (3.4.4) ve (3.4.8) den karşılıkları yazılırsa $\widetilde{\beta}_{\varsigma_2}$ vektörünün θ açısına göre Mannheim eğrisine bağlı ifadesi

$$\begin{aligned}\widetilde{\beta}_{\varsigma_2}(s) \quad = \quad & \frac{\|W\|\cos\theta + \sqrt{\theta'^2 + \|W\|^2}\sin\theta}{\sqrt{2\theta'^2 + 2\|W\|^2}}T + \frac{\theta'}{\sqrt{2\theta'^2 + 2\|W\|^2}}N \\ & + \frac{\sqrt{\theta'^2 + \|W\|^2}\cos\theta - \|W\|\sin\theta}{\sqrt{2\theta'^2 + 2\|W\|^2}}B\end{aligned} \tag{4.3.81}$$

bulunur. Bu ifadenin türevi alınırsa $T_{\widetilde{\beta}_{\varsigma_2}}(s)$ teğet vektörü

$$T_{\widetilde{\beta}_{\varsigma_2}}(s) = \frac{-\theta'\cos\theta}{\sqrt{\|W\|^2 + \theta'^2}}T + \frac{\|W\|}{\sqrt{\|W\|^2 + \theta'^2}}N + \frac{\theta'\sin\theta}{\sqrt{\|W\|^2 + \theta'^2}}B \tag{4.3.82}$$

biçiminde olur. (4.3.81) ve (4.3.82) ifadelerinden elde edilen $\widetilde{\beta}_{\varsigma_2} \wedge T_{\widetilde{\beta}_{\varsigma_2}}$ vektörü

$$\begin{aligned}\widetilde{\beta}_{\varsigma_2} \wedge T_{\widetilde{\beta}_{\varsigma_2}}(s) \quad = \quad & \frac{\|W\|\cos\theta - \sqrt{\|W\|^2 + \theta'^2}\sin\theta}{\sqrt{2\|W\|^2 + 2\theta'^2}}T + \frac{\theta'}{\sqrt{2\|W\|^2 + 2\theta'^2}}N \\ & - \frac{\|W\|\sin\theta - \sqrt{\|W\|^2 + \theta'^2}\cos\theta}{\sqrt{2\|W\|^2 + 2\theta'^2}}B\end{aligned}$$

şeklinde yazılır. (4.3.82) ifadesinin türevi alınırsa $T'_{\widetilde{\beta}_{\varsigma_2}}(s)$ türev vektörü

$$\digamma = \Big(\frac{\|W\|}{\sqrt{\theta'^2+\|W\|^2}}\Big)'\frac{\lambda\tau}{\theta'}\sec\theta$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} T'_{\widetilde{\beta}_{\varsigma_2}}(s) &= \frac{\digamma\sqrt{2}\|W\|\cos\theta-\sqrt{2\|W\|^2+2\theta'^2}\sin\theta}{(1-\digamma)\sqrt{\|W\|^2+\theta'^2}}T+\frac{\digamma\sqrt{2}\theta'}{(1-\digamma)\sqrt{\|W\|^2+\theta'^2}}N \\ &\quad -\frac{\digamma\sqrt{2}\|W\|\sin\theta+\sqrt{2\|W\|^2+2\theta'^2}\cos\theta}{(1-\digamma)\sqrt{\|W\|^2+\theta'^2}}B \end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Geodezik eğrilik tanımından $\kappa_g^{\widetilde{\beta}_{\varsigma_2}}$ geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\widetilde{\beta}_{\varsigma_2}} = \frac{1+\digamma}{1-\digamma}$$

biçiminde elde edilir.

Teorem 4.3.18 (α,α_2) Mannheim eğri çifti ve binormal vektörü ile Darboux vektörü arasındaki açı φ olsun. α_2 eğrisinin aslinormaller göstergesine ait $N_2(N_2\wedge T_{N_2})$- Smarandache eğrisinin geodezik eğriliğinin Mannheim eğrisine bağlı ifadesi

$$\kappa_g^{\widetilde{\beta}_{\varsigma_2}} = \frac{1+\overline{\digamma}}{1-\overline{\digamma}} \tag{4.3.83}$$

denklemiyle verilir.

İspat.

$$\widetilde{\beta}_{\varsigma_2}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(N_2+N_2\wedge T_{N_2})$$

eşitliğinde sırasıyla (4.3.2) ve (3.4.10) dan karşılıkları yazılırsa $\widetilde{\beta}_{\varsigma_2}$ vektörünün Mannheim eğrisine bağlı ifadesi

$$\begin{aligned} \widetilde{\beta}_{\varsigma_2}(s) &= \frac{\|W\|\sin\varphi-\sqrt{\varphi'^2+\|W\|^2}\cos\varphi}{\sqrt{2\varphi'^2+2\|W\|^2}}T+\frac{\varphi'}{\sqrt{2\varphi'^2+2\|W\|^2}}N \\ &\quad +\frac{\sqrt{\varphi'^2+\|W\|^2}\sin\varphi+\|W\|\cos\varphi}{\sqrt{2\varphi'^2+2\|W\|^2}}B \end{aligned} \tag{4.3.84}$$

şeklinde bulunur. Bu ifadenin türevi alınırsa $T_{\widetilde{\beta}_{\varsigma_2}}(s)$ teğet vektörü

$$T_{\widetilde{\beta}_{\varsigma_2}}(s)=\frac{-\varphi'\sin\varphi}{\sqrt{\|W\|^2+\varphi'^2}}T+\frac{\|W\|}{\sqrt{\|W\|^2+\varphi'^2}}N-\frac{\varphi'\cos\varphi}{\sqrt{\|W\|^2+\varphi'^2}}B \tag{4.3.85}$$

biçiminde olur. (4.3.84) ve (4.3.85) ifadelerinden elde edilen $\widetilde{\beta}_{\varsigma_2}\wedge T_{\widetilde{\beta}_{\varsigma_2}}$ vektörü

$$\begin{aligned}\widetilde{\beta}_{\varsigma_2}\wedge T_{\widetilde{\beta}_{\varsigma_2}}(s) &= \frac{\|W\|\sin\varphi+\sqrt{\|W\|^2+\varphi'^2}\cos\varphi}{\sqrt{2\|W\|^2+2\varphi'^2}}T+\frac{\varphi'}{\sqrt{2\|W\|^2+2\varphi'^2}}N\\ &\quad -\frac{\|W\|\cos\varphi-\sqrt{\|W\|^2+\varphi'^2}\sin\varphi}{\sqrt{2\|W\|^2+2\varphi'^2}}B\end{aligned}$$

şeklinde yazılır. (4.3.82) ifadesinin türevi alınırsa $T'_{\widetilde{\beta}_{\varsigma_2}}(s)$ türev vektörü

$$\overline{F}=\Big(\frac{\|W\|}{\sqrt{\varphi'^2+\|W\|^2}}\Big)'\frac{\lambda\tau}{\varphi'}\csc\varphi$$

olmak üzere $T'_{\widetilde{\beta}_{\varsigma_2}}(s)$ türev vektörü

$$\begin{aligned}T'_{\widetilde{\beta}_{\varsigma_2}}(s) &= \frac{\overline{F}\sqrt{2}\|W\|\sin\varphi+\sqrt{2\|W\|^2+2\varphi'^2}\cos\varphi}{(1-\overline{F})\sqrt{\|W\|^2+\varphi'^2}}T+\frac{\overline{F}\sqrt{2}\varphi'}{(1-\overline{F})\sqrt{\|W\|^2+\varphi'^2}}N\\ &\quad -\frac{\overline{F}\sqrt{2}\|W\|\cos\varphi-\sqrt{2\|W\|^2+2\varphi'^2}\sin\varphi}{(1-\overline{F})\sqrt{\|W\|^2+\varphi'^2}}B\end{aligned}$$

biçiminde olur. Geodezik eğrilik tanımından $\kappa_g^{\widetilde{\beta}_{\varsigma_2}}$ geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\widetilde{\beta}_{\varsigma_2}}=\frac{1+\overline{F}}{1-\overline{F}}$$

şeklinde elde edilir.

Tanım 4.3.7 $\alpha_2: I\to S^2$ Mannheim partner eğrisinin aslinormaller göstergesine ait Sabban çatısı $\{N_2, T_{N_2}, N_2\wedge T_{N_2}\}$ olsun.

$$\widetilde{\beta}_{\varsigma_3}(s)=\frac{1}{\sqrt{2}}(T_{N_2}+N_2\wedge T_{N_2}) \tag{4.3.86}$$

şeklinde tanımlı vektörün çizdiği regüler eğriye $T_{N_2}(N_2\wedge T_{N_2})$-Smarandache eğrisi denir.

Teorem 4.3.19 $T_{N_2}(N_2 \wedge T_{N_2})$-Smarandache eğrisinin geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\widetilde{\beta}_{\varsigma_3}} = \frac{1}{\left(1+2\left(\frac{\varphi_2{}'}{\|W_2\|}\right)^2\right)^{\frac{5}{2}}}\left(2\frac{\varphi_2{}'}{\|W_2\|}\widetilde{\delta}_1 - \widetilde{\delta}_2 + \widetilde{\delta}_3\right) \tag{4.3.87}$$

denklemiyle verilir. Burada

$$\begin{cases} \widetilde{\delta}_1 = \frac{\varphi_2{}'}{\|W_2\|} + 2\left(\frac{\varphi_2{}'}{\|W_2\|}\right)^3 + 2\left(\frac{\varphi_2{}'}{\|W_2\|}\right)'\left(\frac{\varphi_2{}'}{\|W_2\|}\right) \\ \\ \widetilde{\delta}_2 = -1 - 3\left(\frac{\varphi_2{}'}{\|W_2\|}\right)^2 - 2\left(\frac{\varphi_2{}'}{\|W_2\|}\right)^4 - \left(\frac{\varphi_2{}'}{\|W_2\|}\right)' \\ \\ \widetilde{\delta}_3 = -\left(\frac{\varphi_2{}'}{\|W_2\|}\right)^2 - 2\left(\frac{\varphi_2{}'}{\|W_2\|}\right)^4 + \left(\frac{\varphi_2{}'}{\|W_2\|}\right)' \end{cases} \tag{4.3.88}$$

şeklinde birer katsayıdır.

İspat.

$$\widetilde{\beta}_{\varsigma_3}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(T_{N_2} + N_2 \wedge T_{N_2})$$

eğrisinin $s_{\widetilde{\beta}_{\varsigma_3}}$ yay parametresine göre türevi alınırsa

$$T_{\widetilde{\beta}_{\varsigma_3}}\frac{ds_{\widetilde{\beta}_{\varsigma_3}}}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-N_2 - \frac{\varphi_2{}'}{\|W_2\|}T_{N_2} + \frac{\varphi_2{}'}{\|W_2\|}N_2 \wedge T_{N_2})$$

olur. Bu eşitliğin normu alınırsa $\frac{ds_{\widetilde{\beta}_{\varsigma_3}}}{ds}$ ifadesi

$$\frac{ds_{\widetilde{\beta}_{\varsigma_3}}}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1+2\left(\frac{\varphi_2{}'}{\|W_2\|}\right)^2}$$

bulunur ve Bulunan bu ifade yukarıda yerine yazılırsa $T_{\widetilde{\beta}_{\varsigma_3}}(s)$ teğet vektörü

$$T_{\widetilde{\beta}_{\varsigma_3}}(s) = \frac{1}{\sqrt{1+2\left(\frac{\varphi_2{}'}{\|W_2\|}\right)^2}}(-N_2 - \frac{\varphi_2{}'}{\|W_2\|}T_{N_2} + \frac{\varphi_2{}'}{\|W_2\|}N_2 \wedge T_{N_2}) \tag{4.3.89}$$

biçiminde olur. Bu ifadenin türevi alınırsa katsayılar

$$\begin{cases} \widetilde{\delta}_1 = \frac{\varphi_2{}'}{\|W_2\|} + 2\left(\frac{\varphi_2{}'}{\|W_2\|}\right)^3 + 2\left(\frac{\varphi_2{}'}{\|W_2\|}\right)'\left(\frac{\varphi_2{}'}{\|W_2\|}\right) \\ \widetilde{\delta}_2 = -1 - 3\left(\frac{\varphi_2{}'}{\|W_2\|}\right)^2 - 2\left(\frac{\varphi_2{}'}{\|W_2\|}\right)^4 - \left(\frac{\varphi_2{}'}{\|W_2\|}\right)' \\ \widetilde{\delta}_3 = -\left(\frac{\varphi_2{}'}{\|W_2\|}\right)^2 - 2\left(\frac{\varphi_2{}'}{\|W_2\|}\right)^4 + \left(\frac{\varphi_2{}'}{\|W_2\|}\right)' \end{cases} \tag{4.3.90}$$

olmak üzere $T'_{\widetilde{\beta}_{\varsigma_3}}(s)$ türev vektörü

$$T'_{\widetilde{\beta}_{\varsigma_3}}(s) = \frac{\sqrt{2}}{\left(1+2\left(\frac{\varphi_2{}'}{\|W_2\|}\right)^2\right)^2}(\widetilde{\delta}_1 N_2 + \widetilde{\delta}_2 T_{N_2} + \widetilde{\delta}_3 N_2 \wedge T_{N_2}) \tag{4.3.91}$$

şeklinde elde edilir. (4.3.86) ve (4.3.89) ifadelerinden elde edilen $\widetilde{\beta}_{\varsigma_3} \wedge T_{\widetilde{\beta}_{\varsigma_3}}$ vektörü

$$\widetilde{\beta}_{\varsigma_3} \wedge T_{\widetilde{\beta}_{\varsigma_3}}(s) = \frac{1}{\sqrt{2+4\left(\frac{\varphi_2{}'}{\|W_2\|}\right)^2}}\left(2\frac{\varphi_2{}'}{\|W_2\|}N_2 - T_{N_2} + N_2 \wedge T_{N_2}\right) \tag{4.3.92}$$

şeklinde yazılır. (4.3.86), (4.3.89), (4.3.91) ve (4.3.92) vektörlerinde (4.3.2) den karşılıkları yazılırsa $\widetilde{\beta}_{\varsigma_3}$-Smarandache eğrisine ait Sabban çatısının ve $T'_{\widetilde{\beta}_{\varsigma_3}}$ vektörünün Mannheim partner eğrisine bağlı ifadesi,

$$\begin{aligned}
\widetilde{\beta}_{\varsigma_3}(s) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big((\sin\varphi_2 - \cos\varphi_2)T_2 + (\sin\varphi_2 + \cos\varphi_2)B_2\Big), \\
T_{\widetilde{\beta}_{\varsigma_3}}(s) &= \frac{\varphi_2{}'(\sin\varphi_2 + \cos\varphi_2)}{\sqrt{\|W_2\|^2 + 2\varphi_2{}'^2}}T_2 - \frac{\|W_2\|}{\sqrt{\|W_2\|^2 + 2\varphi_2{}'^2}}N_2 + \frac{\varphi_2{}'(\cos\varphi_2 - \sin\varphi_2)}{\sqrt{\|W_2\|^2 + 2\varphi_2{}'^2}}B_2, \\
\widetilde{\beta}_{\varsigma_3} \wedge T_{\widetilde{\beta}_{\varsigma_3}}(s) &= \frac{\cos\varphi_2 + \sin\varphi_2}{\sqrt{2\|W_2\|^2 + 4\varphi_2{}'^2}}T_2 + \frac{2\varphi_2{}'}{\sqrt{2\|W_2\|^2 + 4\varphi_2{}'^2}}N_2 + \frac{\cos\varphi_2 - \sin\varphi_2}{\sqrt{2\|W_2\|^2 + 4\varphi_2{}'^2}}B_2, \\
T'_{\widetilde{\beta}_{\varsigma_3}}(s) &= \frac{\|W_2\|^4\sqrt{2}(\widetilde{\delta}_3\sin\varphi_2 - \widetilde{\delta}_2\cos\varphi_2)}{\left(\|W_2\|^2 + 2\varphi_2{}'^2\right)^2}T_2 + \frac{\widetilde{\delta}_1\|W_2\|^4\sqrt{2}}{\left(\|W_2\|^2 + 2\varphi_2{}'^2\right)^2}N_2 \\
&\quad + \frac{\|W_2\|^4\sqrt{2}(\widetilde{\delta}_2\sin\varphi_2 + \widetilde{\delta}_3\cos\varphi_2)}{\left(\|W_2\|^2 + 2\varphi_2{}'^2\right)^2}B_2
\end{aligned}$$

denklemlerine dönüşür. Geodezik eğrilik tanımından $\kappa_g^{\widetilde{\beta}_{\varsigma_3}}$ geodezik eğriliği,

$$\kappa_g^{\widetilde{\beta}_{\varsigma_3}} = \frac{1}{\left(1+2\left(\frac{\varphi_2{}'}{\|W_2\|}\right)^2\right)^{\frac{5}{2}}}\left(2\frac{\varphi_2{}'}{\|W_2\|}\widetilde{\delta}_1 - \widetilde{\delta}_2 + \widetilde{\delta}_3\right)$$

biçiminde elde edilir.

Teorem 4.3.20 (α, α_2) Mannheim eğri çifti, T ile T_2 teğet vektörleri arasındaki açı θ olsun. α_2 eğrisinin aslinormaller göstergesine ait $T_{N_2}(N_2 \wedge T_{N_2})$- Smarandache eğrisinin geodezik eğriliğinin Mannheim eğrisine bağlı ifadesi

$$\kappa_g^{\widetilde{\beta}_{\varsigma_3}} = \frac{1}{(2+\digamma^2)^{\frac{5}{2}}}\left(2\digamma\,\overline{\overline{\delta}}_1 - \overline{\overline{\delta}}_2 + \overline{\overline{\delta}}_3\right) \tag{4.3.93}$$

denklemiyle verilir. Burada

$$\begin{cases}
\overline{\overline{\delta}}_1 = \digamma + 2\digamma^3 + 2\digamma'\digamma \\
\overline{\overline{\delta}}_2 = -1 - 3\digamma^2 - 2\digamma^4 - \digamma' \\
\overline{\overline{\delta}}_3 = -\digamma^2 - 2\digamma^4 + \digamma'
\end{cases} \tag{4.3.94}$$

şeklinde birer katsayıdır.

İspat.

$$\widetilde{\beta}_{ç_3}(s)=\frac{1}{\sqrt{2}}(T_{N_2}+N_2\wedge T_{N_2})$$

eşitliğinde sırasıyla (4.3.2), (3.4.4) ve (3.4.8) den karşılıkları yazılırsa $\widetilde{\beta}_{ç_3}$ vektörünün Mannheim eğrisine bağlı ifadesi

$$\widetilde{\beta}_{ç_3}(s)=\frac{(\|W\|-\theta')\cos\theta}{\sqrt{2\theta'^2+2\|W\|^2}}T+\frac{\theta'+\|W\|}{\sqrt{2\theta'^2+2\|W\|^2}}N+\frac{(\theta'-\|W\|)\sin\theta}{\sqrt{2\theta'^2+2\|W\|^2}}B \tag{4.3.95}$$

biçiminde olur. Bu ifadenin türevi alınırsa

$$F=\Big(\frac{\|W\|}{\sqrt{\theta'^2+\|W\|^2}}\Big)'\frac{\lambda\tau}{\theta'}\sec\theta$$

olmak üzere $T_{\widetilde{\beta}_{ç_3}}(s)$ teğet vektörü

$$\begin{aligned}T_{\widetilde{\beta}_{ç_3}}(s) \;=\;& \frac{F(\|W\|+\theta')\cos\theta-\sqrt{\|W\|^2+\theta'^2}\sin\theta}{\sqrt{1+2F^2}\sqrt{\|W\|^2+\theta'^2}}T+\frac{F(\theta'-\|W\|)}{\sqrt{1+2F^2}\sqrt{\|W\|^2+\theta'^2}}N \\ & -\frac{F(\|W\|+\theta')\sin\theta+\sqrt{\|W\|^2+\theta'^2}\cos\theta}{\sqrt{1+2F^2}\sqrt{\|W\|^2+\theta'^2}}B\end{aligned} \tag{4.3.96}$$

şeklinde bulunur. Bu ifadenin tekrar türevi alınırsa katsayılar

$$\begin{cases}\overline{\overline{\delta}}_1=F+2F^3+2F'F\\ \overline{\overline{\delta}}_2=-1-3F^2-2F^4-F'\\ \overline{\overline{\delta}}_3=-F^2-2F^4+F'\end{cases}$$

olmak üzere $T'_{\widetilde{\beta}_{ç_3}}(s)$ türev vektörü

$$\begin{aligned}T'_{\widetilde{\beta}_{ç_3}}(s) \;=\;& \frac{(\overline{\overline{\delta}}_3\|W\|-\overline{\overline{\delta}}_2\theta')\sqrt{2}\cos\theta+\overline{\overline{\delta}}_1\sqrt{2\|W\|^2+2\theta'^2}\sin\theta)}{(1+2F^2)^2\sqrt{\theta'^2+\|W\|^2}}T \\ & +\frac{(\overline{\overline{\delta}}_3\theta'+\overline{\overline{\delta}}_2\|W\|)\sqrt{2}}{(1+2F^2)^2\sqrt{\theta'^2+\|W\|^2}}N \\ & +\frac{(\overline{\overline{\delta}}_2\theta'-\overline{\overline{\delta}}_3\|W\|)\sqrt{2}\sin\theta+\overline{\overline{\delta}}_1\sqrt{2\|W\|^2+2\theta'^2}\cos\theta}{(1+2F^2)^2\sqrt{\theta'^2+\|W\|^2}}B\end{aligned}$$

biçiminde olur. (4.3.95) ve (4.3.96) ifadelerinden elde edilen $\widetilde{\beta}_{\varsigma_3} \wedge T_{\widetilde{\beta}_{\varsigma_3}}$ vektörü

$$\begin{aligned}
\widetilde{\beta}_{\varsigma_3} \wedge T_{\widetilde{\beta}_{\varsigma_3}}(s) &= \frac{(\|W\|+\theta')\cos\theta + 2F\sqrt{\|W\|^2+\theta'^2}\sin\theta}{\sqrt{2+4F^2}\sqrt{\|W\|^2+\theta'^2}}T \\
&\quad + \frac{\theta' - \|W\|}{\sqrt{2+4F^2}\sqrt{\|W\|^2+\theta'^2}}N \\
&\quad + \frac{2F\sqrt{\|W\|^2+\theta'^2}\cos\theta - (\|W\|+\theta')\sin\theta}{\sqrt{2+4F^2}\sqrt{\|W\|^2+\theta'^2}}B
\end{aligned}$$

şeklinde yazılır. Geodezik eğrilik tanımından $\kappa_g^{\widetilde{\beta}_{\varsigma_3}}$ geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\widetilde{\beta}_{\varsigma_3}} = \frac{1}{\left(2+F^2\right)^{\frac{5}{2}}}\left(2F\overline{\widetilde{\delta}}_1 - \overline{\widetilde{\delta}}_2 + \overline{\widetilde{\delta}}_3\right)$$

biçiminde elde edilir.

Teorem 4.3.21 (α, α_2) Mannheim eğri çifti ve binormal vektörü ile Darboux vektörü arasındaki açı φ olsun. α_2 eğrisinin aslinormaller göstergesine ait $T_{N_2}(N_2 \wedge T_{N_2})$- Smarandache eğrisinin geodezik eğriliğinin Mannheim eğrisine bağlı ifadesi

$$\kappa_g^{\widetilde{\beta}_{\varsigma_3}} = \frac{1}{\left(2+(\overline{F})^2\right)^{\frac{5}{2}}}\left(2\overline{F}\,\underline{\widetilde{\delta}}_1 - \underline{\widetilde{\delta}}_2 + \underline{\widetilde{\delta}}_3\right) \tag{4.3.97}$$

denklemiyle verilir. Burada

$$\begin{cases}
\underline{\widetilde{\delta}}_1 = \overline{F} + 2\overline{F}^3 + 2\overline{F}'\overline{F} \\
\underline{\widetilde{\delta}}_2 = -1 - 3(\overline{F})^2 - 2\overline{F}^4 - \overline{F}' \\
\underline{\widetilde{\delta}}_3 = -(\overline{F})^2 - 2\overline{F}^4 + \overline{F}'
\end{cases} \tag{4.3.98}$$

şeklinde birer katsayıdır.

İspat.

$$\widetilde{\beta}_{\varsigma_3}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(T_{N_2} + N_2 \wedge T_{N_2})$$

eşitliğinde sırasıyla (4.3.2) ve (3.4.10) dan karşılıkları yazılırsa $\widetilde{\beta}_{\varsigma_3}$ vektörünün Mannheim eğrisine bağlı ifadesi

$$\widetilde{\beta}_{\varsigma_3}(s) = \frac{(\|W\|+\varphi')\sin\varphi}{\sqrt{2\varphi'^2+2\|W\|^2}}T + \frac{\varphi'+\|W\|}{\sqrt{2\varphi'^2+2\|W\|^2}}N + \frac{(\|W\|-\varphi')\cos\varphi}{\sqrt{2\varphi'^2+2\|W\|^2}}B \tag{4.3.99}$$

biçiminde olur. Bu ifadenin türevi alınırsa

$$\digamma=\Big(\frac{\|W\|}{\sqrt{\theta'^2+\|W\|^2}}\Big)'\frac{\lambda\tau}{\theta'}\sec\theta$$

olmak üzere $T_{\widetilde{\beta}_{\varsigma_3}}(s)$ teğet vektörü

$$T_{\widetilde{\beta}_{\varsigma_3}}(s) = \frac{\overline{\digamma}(\|W\|+\varphi')\sin\varphi+\sqrt{\|W\|^2+\varphi'^2}\cos\varphi}{\sqrt{1+2(\overline{\digamma})^2}\sqrt{\|W\|^2+\varphi'^2}}T+\frac{\overline{\digamma}(\varphi'-\|W\|)}{\sqrt{1+2(\overline{\digamma})^2}\sqrt{\|W\|^2+\varphi'^2}}N \tag{4.3.100}$$

$$+\frac{\overline{\digamma}(\|W\|+\varphi')\cos\varphi-\sqrt{\|W\|^2+\varphi'^2}\sin\varphi}{\sqrt{1+2(\overline{\digamma})^2}\sqrt{\|W\|^2+\varphi'^2}}B$$

şeklinde bulunur. Bu ifadenin tekrar türevi alınırsa katsayılar

$$\begin{cases}\underline{\widetilde{\delta}}_1=\overline{\digamma}+2\overline{\digamma}^3+2\overline{\digamma}'\overline{\digamma}\\ \underline{\widetilde{\delta}}_2=-1-3(\overline{\digamma})^2-2\overline{\digamma}^4-\overline{\digamma}'\\ \underline{\widetilde{\delta}}_3=-(\overline{\digamma})^2-2\overline{\digamma}^4+\overline{\digamma}'\end{cases}$$

olmak üzere $T'_{\widetilde{\beta}_{\varsigma_3}}(s)$ türev vektörü

$$T'_{\widetilde{\beta}_{\varsigma_3}}(s) = \frac{(\underline{\widetilde{\delta}}_3\|W\|-\underline{\widetilde{\delta}}_2\varphi')\sqrt{2}\sin\varphi-\underline{\widetilde{\delta}}_1\sqrt{2\|W\|^2+2\varphi'^2}\cos\varphi}{(1+2(\overline{\digamma})^2)^2\sqrt{\varphi'^2+\|W\|^2}}T$$

$$+\frac{(\underline{\widetilde{\delta}}_3\varphi'+\underline{\widetilde{\delta}}_2\|W\|)\sqrt{2}}{(1+2(\overline{\digamma})^2)^2\sqrt{\varphi'^2+\|W\|^2}}N$$

$$+\frac{\underline{\widetilde{\delta}}_1\sqrt{2\|W\|^2+2\varphi'^2}\sin\varphi-(\underline{\widetilde{\delta}}_2\varphi'-\underline{\widetilde{\delta}}_3\|W\|)\sqrt{2}\cos\varphi}{(1+2(\overline{\digamma})^2)^2\sqrt{\varphi'^2+\|W\|^2}}B$$

şeklinde bulunur. (4.3.99) ve (4.3.100) ifadelerinden elde edilen $\widetilde{\beta}_{\varsigma_3}\wedge T_{\widetilde{\beta}_{\varsigma_3}}$ vektörü

$$\widetilde{\beta}_{\varsigma_3}\wedge T_{\widetilde{\beta}_{\varsigma_3}}(s) = \frac{(\|W\|+\varphi')\sin\varphi-2\overline{\digamma}\sqrt{\|W\|^2+\varphi'^2}\cos\varphi}{\sqrt{2+4(\overline{\digamma})^2}\sqrt{\|W\|^2+\varphi'^2}}T$$

$$+\frac{\varphi'-\|W\|}{\sqrt{2+4(\overline{\digamma})^2}\sqrt{\|W\|^2+\varphi'^2}}N$$

$$+\frac{2\overline{\digamma}\sqrt{\|W\|^2+\varphi'^2}\sin\varphi+(\|W\|+\varphi')\cos\varphi}{\sqrt{2+4(\overline{\digamma})^2}\sqrt{\|W\|^2+\varphi'^2}}B$$

şeklinde yazılır. Geodezik eğrilik tanımından $\kappa_g^{\widetilde{\beta}_{\varsigma_3}}$ geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\widetilde{\beta}_{\varsigma_3}} = \frac{1}{\left(2+(\overline{F})^2\right)^{\frac{5}{2}}}\left(2\overline{F}\,\underline{\widetilde{\delta}}_1 - \underline{\widetilde{\delta}}_2 + \underline{\widetilde{\delta}}_3\right)$$

biçiminde elde edilir.

Tanım 4.3.8 $\alpha_2 : I \to S^2$ Mannheim partner eğrisinin aslinormaller göstergesine ait Sabban çatısı $\{N_2, T_{N_2}, N_2 \wedge T_{N_2}\}$ olsun.

$$\widetilde{\beta}_{\varsigma_4}(s) = \frac{1}{\sqrt{3}}(N_2 + T_{N_2} + N_2 \wedge T_{N_2}) \tag{4.3.101}$$

şeklinde tanımlı vektörün çizdiği regüler eğriye $N_2T_{N_2}(N_2 \wedge T_{N_2})$-Smarandache eğrisi denir.

Teorem 4.3.22 $N_2T_{N_2}(N_2 \wedge T_{N_2})$-Smarandache eğrisinin geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\widetilde{\beta}_{\varsigma_4}} = \frac{\left(2\frac{\varphi_2{}'}{\|W_2\|} - 1\right)\widetilde{\rho}_1 + \left(-1 - \frac{\varphi_2{}'}{\|W_2\|}\right)\widetilde{\rho}_2 + \left(2 - \frac{\varphi_2{}'}{\|W_2\|}\right)\widetilde{\rho}_3}{4\sqrt{2}\left(1 - \frac{\varphi_2{}'}{\|W_2\|} + \left(\frac{\varphi_2{}'}{\|W_2\|}\right)^2\right)^{\frac{5}{2}}} \tag{4.3.102}$$

denklemiyle verilir. Burada

$$\begin{cases} \widetilde{\rho}_1 = -2 + 4\left(\frac{\varphi_2{}'}{\|W_2\|}\right) - \left(\frac{\varphi_2{}'}{\|W_2\|}\right)^2 + 2\left(\frac{\varphi_2{}'}{\|W_2\|}\right)^3 + \left(\frac{\varphi_2{}'}{\|W_2\|}\right)'\left(2\frac{\varphi_2{}'}{\|W_2\|} - 1\right) \\ \widetilde{\rho}_2 = -2 + 2\left(\frac{\varphi_2{}'}{\|W_2\|}\right) - 4\left(\frac{\varphi_2{}'}{\|W_2\|}\right)^2 + 2\left(\frac{\varphi_2{}'}{\|W_2\|}\right)^3 - 2\left(\frac{\varphi_2{}'}{\|W_2\|}\right)^4 - \left(\frac{\varphi_2{}'}{\|W_2\|}\right)'\left(1 + \frac{\varphi_2{}'}{\|W_2\|}\right) \\ \widetilde{\rho}_3 = 2\left(\frac{\varphi_2{}'}{\|W_2\|}\right) - 4\left(\frac{\varphi_2{}'}{\|W_2\|}\right)^2 + 4\left(\frac{\varphi_2{}'}{\|W_2\|}\right)^3 - 2\left(\frac{\varphi_2{}'}{\|W_2\|}\right)^4 + \left(\frac{\varphi_2{}'}{\|W_2\|}\right)'\left(2 - \frac{\varphi_2{}'}{\|W_2\|}\right) \end{cases} \tag{4.3.103}$$

şeklinde birer katsayıdır.

İspat.

$$\widetilde{\beta}_{\varsigma_4}(s) = \frac{1}{\sqrt{3}}(N_2 + T_{N_2} + N_2 \wedge T_{N_2})$$

eğrisinin $s_{\widetilde{\beta}_{\varsigma_4}}$ yay parametresine türevi alınırsa

$$T_{\widetilde{\beta}_{\varsigma_4}} \frac{ds_{\widetilde{\beta}_{\varsigma_4}}}{ds} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(-N_2 + \left(1 - \frac{\varphi_2{}'}{\|W_2\|}\right)T_{N_2} + \frac{\varphi_2{}'}{\|W_2\|}N_2 \wedge T_{N_2}\right)$$

olur. Bu eşitliğin normu alınırsa $\frac{ds_{\widetilde{\beta}_{\varsigma_4}}}{ds}$ ifadesi

$$\frac{ds_{\widetilde{\beta}_{\varsigma_4}}}{ds} = \sqrt{\frac{2}{3}\left(1 - \frac{\varphi_2{}'}{\|W_2\|} + \left(\frac{\varphi_2{}'}{\|W_2\|}\right)^2\right)}$$

elde edilir. Bu ifade eşitlikte yazılırsa $T_{\widetilde{\beta}_{\varsigma_4}}(s)$ teğet vektörü

$$T_{\widetilde{\beta}_{\varsigma_4}}(s)=\frac{1}{\sqrt{2\Big(1-\frac{\varphi_2{}'}{\|W_2\|}+\big(\frac{\varphi_2{}'}{\|W_2\|}\big)^2\Big)}}\Big(-N_2+\big(1-\frac{\varphi_2{}'}{\|W_2\|}\big)T_{N_2}+\frac{\varphi_2{}'}{\|W_2\|}N_2\wedge T_{N_2}\Big) \tag{4.3.104}$$

biçiminde olur. Bu ifadenin tekrar türevi alınırsa katsayılar

$$\begin{cases}\widetilde{\rho}_1=-2+4\big(\frac{\varphi_2{}'}{\|W_2\|}\big)-\big(\frac{\varphi_2{}'}{\|W_2\|}\big)^2+2\big(\frac{\varphi_2{}'}{\|W_2\|}\big)^3+\big(\frac{\varphi_2{}'}{\|W_2\|}\big)'\big(2\frac{\varphi_2{}'}{\|W_2\|}-1\big)\\ \widetilde{\rho}_2=-2+2\big(\frac{\varphi_2{}'}{\|W_2\|}\big)-4\big(\frac{\varphi_2{}'}{\|W_2\|}\big)^2+2\big(\frac{\varphi_2{}'}{\|W_2\|}\big)^3-2\big(\frac{\varphi_2{}'}{\|W_2\|}\big)^4-\big(\frac{\varphi_2{}'}{\|W_2\|}\big)'\big(1+\frac{\varphi_2{}'}{\|W_2\|}\big)\\ \widetilde{\rho}_3=2\big(\frac{\varphi_2{}'}{\|W_2\|}\big)-4\big(\frac{\varphi_2{}'}{\|W_2\|}\big)^2+4\big(\frac{\varphi_2{}'}{\|W_2\|}\big)^3-2\big(\frac{\varphi_2{}'}{\|W_2\|}\big)^4+\big(\frac{\varphi_2{}'}{\|W_2\|}\big)'\big(2-\frac{\varphi_2{}'}{\|W_2\|}\big)\end{cases}$$

olmak üzere $T'_{\widetilde{\beta}_{\varsigma_4}}(s)$ türev vektörü

$$T'_{\widetilde{\beta}_{\varsigma_4}}(s)=\frac{\sqrt{3}}{4\Big(1-\frac{\varphi_2{}'}{\|W_2\|}+\big(\frac{\varphi_2{}'}{\|W_2\|}\big)^2\Big)^2}\big(\widetilde{\rho}_1N_2+\widetilde{\rho}_2T_{N_2}+\widetilde{\rho}_3N_2\wedge T_{N_2}\big) \tag{4.3.105}$$

şeklinde elde edilir. (4.3.101) ve (4.3.104) ifadelerinden elde edilen $\widetilde{\beta}_{\varsigma_4}\wedge T_{\widetilde{\beta}_{\varsigma_4}}$ vektörü

$$\widetilde{\beta}_{\varsigma_4}\wedge T_{\widetilde{\beta}_{\varsigma_4}}(s)=\frac{\big(2\frac{\varphi_2{}'}{\|W_2\|}-1\big)N_2-\big(1+\frac{\varphi_2{}'}{\|W_2\|}\big)T_{N_2}+\big(2-\frac{\varphi_2{}'}{\|W_2\|}\big)N_2\wedge T_{N_2}}{\sqrt{6}\sqrt{1-\frac{\varphi_2{}'}{\|W_2\|}+\big(\frac{\varphi_2{}'}{\|W_2\|}\big)^2}} \tag{4.3.106}$$

şeklinde bulunur. (4.3.101), (4.3.104), (4.3.105) ve (4.3.106) vektörlerinde (4.3.2) den karşılıkları yazılırsa $\widetilde{\beta}_{\varsigma_4}$-Smarandache eğrisine ait Sabban çatısının ve $T'_{\widetilde{\beta}_{\varsigma_4}}$ vektörünün Mannheim partner eğrisinin Frenet vektörlerine, eğriliğine ve burulmasına bağlı ifadesi,

$$\begin{aligned}\widetilde{\beta}_{\varsigma_4}(s) &= \frac{1}{\sqrt{3}}\Big((\sin\varphi_2-\cos\varphi_2)T_2+N_2+(\sin\varphi_2+\cos\varphi_2)B_2\Big),\\
T_{\widetilde{\beta}_{\varsigma_4}}(s) &= \frac{\varphi_2{}'\sin\varphi_2-(\|W_2\|-\varphi_2{}')\cos\varphi_2}{\sqrt{2(\|W_2\|^2-\|W_2\|\varphi_2{}'+2\varphi_2{}'^2)}}T_2-\frac{\|W_2\|}{\sqrt{2(\|W_2\|^2-\|W_2\|\varphi_2{}'+2\varphi_2{}'^2)}}N_2\\
&\quad+\frac{\varphi_2{}'\cos\varphi_2+(\|W_2\|-\varphi_2)'\sin\varphi_2}{\sqrt{2(\|W_2\|^2-\|W_2\|\varphi_2{}'+2\varphi_2{}'^2)}}B_2,\\
\widetilde{\beta}_{\varsigma_4}\wedge T_{\widetilde{\beta}_{\varsigma_4}}(s) &= \frac{(2\|W_2\|-\varphi_2{}')\sin\varphi_2+(\|W_2\|+\varphi_2{}')\cos\varphi_2}{\sqrt{6\|W_2\|^2-6\|W_2\|\varphi_2{}'+6\varphi_2{}'^2}}T_2\\
&\quad+\frac{2\varphi_2{}'-\|W_2\|}{\sqrt{6\|W_2\|^2-6\|W_2\|\varphi_2{}'+6\varphi_2{}'^2}}N_2\\
&\quad+\frac{(2\|W_2\|-\varphi_2{}')\cos\varphi_2-(\|W_2\|+\varphi_2{}')\sin\varphi_2}{\sqrt{6\|W_2\|^2-6\|W_2\|\varphi_2{}'+6\varphi_2{}'^2}}B_2,\end{aligned}$$

$$T'_{\widetilde{\beta}_{\varsigma_4}}(s) = \frac{\|W_2\|^4\sqrt{3}(\widetilde{\rho}_3\sin\varphi_2 - \widetilde{\rho}_2\cos\varphi_2)}{4\big(\|W_2\|^2 - \|W_2\|\varphi_2{}' + \varphi_2{}'^2\big)^2}T_2 + \frac{\widetilde{\rho}_1\|W_2\|^4\sqrt{3}}{4\big(\|W_2\|^2 - \|W_2\|\varphi_2{}' + \varphi_2{}'^2\big)^2}N_2$$
$$+\frac{\|W_2\|^4\sqrt{3}(\widetilde{\rho}_2\sin\varphi_2 + \widetilde{\rho}_3\cos\varphi_2)}{4\big(\|W_2\|^2 - \|W_2\|\varphi_2{}' + \varphi_2{}'^2\big)^2}B_2$$

denklemlerine dönüşür. Geodezik eğrilik tanımından $\kappa_g^{\widetilde{\beta}_{\varsigma_4}}$ geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\widetilde{\beta}_{\varsigma_4}} = \frac{\big(2\frac{\varphi_2{}'}{\|W_2\|} - 1\big)\widetilde{\rho}_1 + \big(-1 - \frac{\varphi_2{}'}{\|W_2\|}\big)\widetilde{\rho}_2 + \big(2 - \frac{\varphi_2{}'}{\|W_2\|}\big)\widetilde{\rho}_3}{4\sqrt{2}\Big(1 - \frac{\varphi_2{}'}{\|W_2\|} + (\frac{\varphi_2{}'}{\|W_2\|})^2\Big)^{\frac{5}{2}}}$$

biçiminde elde edilir.

Teorem 4.3.23 (α, α_2) Mannheim eğri çifti, T ile T_2 teğet vektörleri arasındaki açı θ olsun. α_2 eğrisinin aslinormaller göstergesine ait $N_2T_{N_2}(N_2 \wedge T_{N_2})$- Smarandache eğrisinin geodezik eğriliğinin Mannheim eğrisine bağlı ifadesi

$$\kappa_g^{\widetilde{\beta}_{\varsigma_4}} = \frac{(2\digamma - 1)\overline{\overline{\rho}}_1 - (1+\digamma)\overline{\overline{\rho}}_2 + (2-\digamma)\overline{\overline{\rho}}_3}{4\sqrt{2}(1-\digamma+\digamma^2)^{\frac{5}{2}}} \tag{4.3.107}$$

denklemiyle verilir. Burada

$$\begin{cases} \overline{\overline{\rho}}_1 = -2 + 4\digamma - 4\digamma^2 + 2\digamma^3 + 2\digamma'(2\digamma - 1) \\ \overline{\overline{\rho}}_2 = -2 + 2\digamma - 4\digamma^2 + 2\digamma^3 - 2\digamma^4 - \digamma'(1+\digamma) \\ \overline{\overline{\rho}}_3 = 2\digamma - 4\digamma^2 + 4\digamma^3 - 2\digamma^4 + \digamma'(2-\digamma) \end{cases} \tag{4.3.108}$$

şeklinde birer katsayıdır.

İspat.

$$\widetilde{\beta}_{\varsigma_4}(s) = \frac{1}{\sqrt{3}}(N_2 + T_{N_2} + N_2 \wedge T_{N_2})$$

eşitliğinde sırasıyla (4.3.2), (3.4.4) ve (3.4.8) den karşılıkları yazılırsa $\widetilde{\beta}_{\varsigma_4}$ vektörünün Mannheim eğrisine bağlı ifadesi

$$\widetilde{\beta}_{\varsigma_4}(s) = \frac{(\|W\| - \theta')\cos\theta + \sqrt{\theta'^2 + \|W\|^2}\sin\theta}{\sqrt{3\theta'^2 + 3\|W\|^2}}T + \frac{\theta' + \|W\|}{\sqrt{3\theta'^2 + 3\|W\|^2}}N$$
$$+\frac{(\theta' - \|W\|)\sin\theta + \sqrt{\theta'^2 + \|W\|^2}\cos\theta}{\sqrt{3\theta'^2 + 3\|W\|^2}}B \tag{4.3.109}$$

biçiminde olur. Bu ifadenin türevi alınırsa $T_{\widetilde{\beta}_{\varsigma_4}}(s)$ teğet vektörü

$$\digamma = \Big(\frac{\|W\|}{\sqrt{\theta'^2 + \|W\|^2}}\Big)'\frac{\lambda\tau}{\theta'}\sec\theta$$

olmak üzere

$$
\begin{aligned}
T_{\widetilde{\beta}_{\varsigma_4}}(s) &= \frac{\left(\digamma\|W\|-(1-\digamma)\theta'\right)\cos\theta-\sqrt{\|W\|^2+\theta'^2}\sin\theta}{\sqrt{2(1-\digamma+\digamma^2)}\sqrt{\|W\|^2+\theta'^2}}T \\
&+\frac{\digamma\theta'+(1-\digamma)\|W\|}{\sqrt{2(1-\digamma+\digamma^2)}\sqrt{\|W\|^2+\theta'^2}}N \qquad (4.3.110)\\
&+\frac{\left((1-\digamma)\theta'-\digamma\|W\|\right)\sin\theta-\sqrt{\|W\|^2+\theta'^2}\cos\theta}{\sqrt{2(1-\digamma+\digamma^2)}\sqrt{\|W\|^2+\theta'^2}}B
\end{aligned}
$$

biçiminde olur. Bu ifadenin türevi alınırsa katsayılar

$$
\begin{cases}
\overline{\overline{\rho}}_1=-2+4\digamma-4\digamma^2+2\digamma^3+2\digamma'(2\digamma-1)\\
\overline{\overline{\rho}}_2=-2+2\digamma-4\digamma^2+2\digamma^3-2\digamma^4-\digamma'(1+\digamma)\\
\overline{\overline{\rho}}_3=2\digamma-4\digamma^2+4\digamma^3-2\digamma^4+\digamma'(2-\digamma)
\end{cases}
$$

olmak üzere $T'_{\widetilde{\beta}_{\varsigma_4}}(s)$ türev vektörü

$$
\begin{aligned}
T'_{\widetilde{\beta}_{\varsigma_4}}(s) &= \frac{(\overline{\overline{\rho}}_3\theta'-\overline{\overline{\rho}}_2\|W\|)\sqrt{3}\cos\theta+\overline{\overline{\rho}}_1\sqrt{3\|W\|^2+3\theta'^2}\sin\theta}{4(1-\digamma+\digamma^2)^2\sqrt{\theta'^2+\|W\|^2}}T \\
&+\frac{(\overline{\overline{\rho}}_3\|W\|+\overline{\overline{\rho}}_2\theta')\sqrt{3}}{4(1-\digamma+\digamma^2)^2\sqrt{\theta'^2+\|W\|^2}}N \\
&+\frac{(\overline{\overline{\rho}}_2\|W\|-\overline{\overline{\rho}}_3\theta')\sqrt{3}\sin\theta+\overline{\overline{\rho}}_1\sqrt{3\|W\|^2+3\theta'^2}\cos\theta}{4(1-\digamma+\digamma^2)^2\sqrt{\theta'^2+\|W\|^2}}B
\end{aligned}
$$

şeklinde bulunur. (4.3.109) ve (4.3.110) ifadelerinden elde edilen $\widetilde{\beta}_{\varsigma_4}\wedge T_{\widetilde{\beta}_{\varsigma_4}}$ vektörü

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\beta}_{\varsigma_4}\wedge T_{\widetilde{\beta}_{\varsigma_4}}(s) &= \frac{\left((2-\digamma)\|W\|+(1+\digamma)\theta'\right)\cos\theta+(2\digamma-1)\sqrt{\|W\|^2+\theta'^2}\sin\theta}{\sqrt{6-6\digamma+6\digamma^2}\sqrt{\|W\|^2+\theta'^2}}T \\
&+\frac{(2-\digamma)\theta'-(1+\digamma)\|W\|}{\sqrt{6-6\digamma+6\digamma^2}\sqrt{\|W\|^2+\theta'^2}}N \\
&+\frac{(2\digamma-1)\sqrt{\|W\|^2+\theta'^2}\cos\theta-\left((2-\digamma)\|W\|-(1+\digamma)\theta'\right)\sin\theta}{\sqrt{6-6\digamma+6\digamma^2}\sqrt{\|W\|^2+\theta'^2}}B
\end{aligned}
$$

şeklinde yazılır. Geodezik eğrilik tanımından $\kappa_g^{\widetilde{\beta}_{\varsigma_4}}$ geodezik eğriliği

$$
\kappa_g^{\widetilde{\beta}_{\varsigma_4}}=\frac{(2\digamma-1)\overline{\overline{\rho}}_1-(1+\digamma)\overline{\overline{\rho}}_2+(2-\digamma)\overline{\overline{\rho}}_3}{4\sqrt{2}(1-\digamma+\digamma^2)^{\frac{5}{2}}}
$$

biçiminde elde edilir.

Teorem 4.3.24 (α,α_2) Mannheim eğri çifti, T ile T_2 teğet vektörleri arasındaki açı θ olsun. α_2 eğrisinin aslinormaller göstergesine ait $N_2 T_{N_2}(N_2 \wedge T_{N_2})$- Smarandache eğrisinin geodezik eğriliğinin Mannheim eğrisine bağlı ifadesi

$$\kappa_g^{\widetilde{\beta}_{\varsigma_4}} = \frac{(2\overline{F}-1)\underline{\widetilde{\rho}}_1-(1+\overline{F})\underline{\widetilde{\rho}}_2+(2-\overline{F})\underline{\widetilde{\rho}}_3}{4\sqrt{2}(1-\overline{F}+(\overline{F})^2)^{\frac{5}{2}}} \tag{4.3.111}$$

denklemiyle verilir. Burada

$$\begin{cases} \underline{\widetilde{\rho}}_1 = -2+4\overline{F}-4(\overline{F})^2+2\overline{F}^3+2\overline{F}'(2\overline{F}-1) \\ \underline{\widetilde{\rho}}_2 = -2+2\overline{F}-4(\overline{F})^2+2\overline{F}^3-2\overline{F}^4-\overline{F}'(1+\overline{F}) \\ \underline{\widetilde{\rho}}_3 = 2\overline{F}-4(\overline{F})^2+4\overline{F}^3-2\overline{F}^4+\overline{F}'(2-\overline{F}) \end{cases} \tag{4.3.112}$$

şeklinde birer katsayıdır.

İspat.

$$\widetilde{\beta}_{\varsigma_4}(s) = \frac{1}{\sqrt{3}}(N_2+T_{N_2}+N_2\wedge T_{N_2})$$

eşitliğinde sırasıyla (4.3.2) ve (3.4.10) dan karşılıkları yazılırsa $\widetilde{\beta}_{\varsigma_3}$ vektörünün Mannheim eğrisine bağlı ifadesi

$$\begin{aligned} \widetilde{\beta}_{\varsigma_4}(s) &= \frac{(\|W\|-\varphi')\sin\varphi-\sqrt{\varphi'^2+\|W\|^2}\cos\varphi}{\sqrt{3\varphi'^2+3\|W\|^2}}T+\frac{\varphi'+\|W\|}{\sqrt{3\varphi'^2+3\|W\|^2}}N \\ &\quad+\frac{(\|W\|-\varphi')\cos\varphi+\sqrt{\varphi'^2+\|W\|^2}\sin\varphi}{\sqrt{3\varphi'^2+3\|W\|^2}}B \end{aligned} \tag{4.3.113}$$

biçiminde olur. Bu ifadenin türevi alınırsa $T_{\widetilde{\beta}_{\varsigma_4}}(s)$ teğet vektörü

$$\overline{F} = \Big(\frac{\|W\|}{\sqrt{\varphi'^2+\|W\|^2}}\Big)'\frac{\lambda\tau}{\varphi'}\csc\varphi$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} T_{\widetilde{\beta}_{\varsigma_4}}(s) &= \frac{\big(\overline{F}\|W\|-(1-\overline{F})\varphi'\big)\sin\varphi+\sqrt{\|W\|^2+\varphi'^2}\cos\varphi}{\sqrt{2(1-\overline{F}+(\overline{F})^2)}\sqrt{\|W\|^2+\varphi'^2}}T \\ &\quad+\frac{\overline{F}\varphi'+(1-\overline{F})\|W\|}{\sqrt{2(1-\overline{F}+(\overline{F})^2)}\sqrt{\|W\|^2+\varphi'^2}}N \\ &\quad+\frac{\big(\overline{F}\|W\|-(1-\overline{F})\varphi'\big)\cos\varphi-\sqrt{\|W\|^2+\varphi'^2}\sin\varphi}{\sqrt{2(1-\overline{F}+(\overline{F})^2)}\sqrt{\|W\|^2+\varphi'^2}}B \end{aligned} \tag{4.3.114}$$

şeklinde bulunur. Bu ifadenin türevi alınırsa katsayılar

$$\begin{cases} \underline{\widetilde{\rho}}_1 = -2+4\overline{F}-4(\overline{F})^2+2\overline{F}^3+2\overline{F}'(2\overline{F}-1) \\ \underline{\widetilde{\rho}}_2 = -2+2\overline{F}-4(\overline{F})^2+2\overline{F}^3-2\overline{F}^4-\overline{F}'(1+\overline{F}) \\ \underline{\widetilde{\rho}}_3 = 2\overline{F}-4(\overline{F})^2+4\overline{F}^3-2\overline{F}^4+\overline{F}'(2-\overline{F}) \end{cases}$$

olmak üzere $T'_{\widetilde{\beta}_{\varsigma_4}}(s)$ türev vektörü

$$\begin{aligned} T'_{\widetilde{\beta}_{\varsigma_4}}(s) &= \frac{(\underline{\widetilde{\rho}}_3\varphi'-\underline{\widetilde{\rho}}_2\|W\|)\sqrt{3}\sin\varphi-\underline{\widetilde{\rho}}_1\sqrt{3\|W\|^2+3\varphi'^2}\cos\varphi}{4(1-\overline{F}+(\overline{F})^2)^2\sqrt{\varphi'^2+\|W\|^2}}T \\ &+\frac{(\underline{\widetilde{\rho}}_3\|W\|+\underline{\widetilde{\rho}}_2\varphi')\sqrt{3}}{4(1-\overline{F}+(\overline{F})^2)^2\sqrt{\varphi'^2+\|W\|^2}}N \\ &+\frac{(\underline{\widetilde{\rho}}_3\varphi'-\underline{\widetilde{\rho}}_2\|W\|)\sqrt{3}\cos\varphi+\underline{\widetilde{\rho}}_1\sqrt{3\|W\|^2+3\varphi'^2}\sin\varphi}{4(1-\overline{F}+(\overline{F})^2)^2\sqrt{\varphi'^2+\|W\|^2}}B \end{aligned}$$

şeklinde bulunur. (4.3.113) ve (4.3.114) ifadelerinden elde edilen $\widetilde{\beta}_{\varsigma_4}\wedge T_{\widetilde{\beta}_{\varsigma_4}}$ vektörü

$$\begin{aligned} \widetilde{\beta}_{\varsigma_4}\wedge T_{\widetilde{\beta}_{\varsigma_4}}(s) &= \frac{\big((2-\overline{F})\|W\|+(1+\overline{F})\varphi'\big)\sin\varphi-(2\overline{F}-1)\sqrt{\|W\|^2+\varphi'^2}\cos\varphi}{\sqrt{6-6\overline{F}+6(\overline{F})^2}\sqrt{\|W\|^2+\varphi'^2}}T \\ &+\frac{(2-\overline{F})\varphi'-(1+\overline{F})\|W\|}{\sqrt{6-6\overline{F}+6(\overline{F})^2}\sqrt{\|W\|^2+\varphi'^2}}N \\ &+\frac{(2\overline{F}-1)\sqrt{\|W\|^2+\varphi'^2}\sin\varphi+\big((2-\overline{F})\|W\|+(1+\overline{F})\varphi'\big)\cos\varphi}{\sqrt{6-6\overline{F}+6(\overline{F})^2}\sqrt{\|W\|^2+\varphi'^2}}B \end{aligned}$$

şeklinde yazılır. Geodezik eğrilik tanımından $\kappa_g^{\widetilde{\beta}_{\varsigma_4}}$ geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\widetilde{\beta}_{\varsigma_4}} = \frac{(2\overline{F}-1)\underline{\widetilde{\rho}}_1-(1+\overline{F})\underline{\widetilde{\rho}}_2+(2-\overline{F})\underline{\widetilde{\rho}}_3}{4\sqrt{2}(1-\overline{F}+(\overline{F})^2)^{\frac{5}{2}}}$$

biçiminde olur.

Tanım 4.3.9 $\alpha_2 : I \to S^2$ Mannheim partner eğrisinin binormaller göstergesine ait Sabban çatısı $\{B_2, T_{B_2}, B_2\wedge T_{B_2}\}$ olsun.

$$\widetilde{\beta}_{\xi_1}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(B_2+T_{B_2}) \qquad (4.3.115)$$

şeklinde tanımlı vektörün çizdiği regüler eğriye $B_2T_{B_2}$-Smarandache eğrisi denir.

Teorem 4.3.25 $B_2 T_{B_2}$-Smarandache eğrisinin geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\widetilde{\beta}_{\xi_1}} = \frac{1}{\left(2+\left(\frac{\kappa_2}{\tau_2}\right)^2\right)^{\frac{5}{2}}}\left(\frac{\kappa_2}{\tau_2}\hbar_1 - \frac{\kappa_2}{\tau_2}\hbar_2 + 2\hbar_3\right) \tag{4.3.116}$$

denklemiyle verilir. Burada

$$\begin{cases} \hbar_1 = -2 - \left(\frac{\kappa_2}{\tau_2}\right)^2 + \left(\frac{\kappa_2}{\tau_2}\right)'\left(\frac{\kappa_2}{\tau_2}\right) \\ \\ \hbar_2 = -2 - 3\left(\frac{\kappa_2}{\tau_2}\right)^2 - \left(\frac{\kappa_2}{\tau_2}\right)^4 - \left(\frac{\kappa_2}{\tau_2}\right)'\left(\frac{\kappa_2}{\tau_2}\right) \\ \\ \hbar_3 = 2\left(\frac{\kappa_2}{\tau_2}\right) + \left(\frac{\kappa_2}{\tau_2}\right)^3 + \left(\frac{\kappa_2}{\tau_2}\right)' \end{cases} \tag{4.3.117}$$

şeklinde birer katsayıdır.

İspat.

$$\widetilde{\beta}_{\xi_1}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(B_2 + T_{B_2})$$

eğrisinin $s_{\widetilde{\beta}_{\xi_1}}$ yay parametresine göre türevi alınırsa

$$T_{\widetilde{\beta}_{\xi_1}} \frac{ds_{\widetilde{\beta}_{\xi_2}}}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-B_2 + T_{B_2} + \frac{\kappa_2}{\tau_2}B_2 \wedge T_{B_2}\right)$$

olur. Bu eşitliğin normu alınırsa $\frac{ds_{\widetilde{\beta}_{\xi_2}}}{ds}$ ifadesi

$$\frac{ds_{\widetilde{\beta}_{\xi_1}}}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2+\left(\frac{\kappa_2}{\tau_2}\right)^2}$$

elde edilir. Bu ifade yukarıda yerine yazılırsa $T_{\widetilde{\beta}_{\xi_1}}(s)$ teğet vektörü

$$T_{\widetilde{\beta}_{\xi_1}}(s) = \frac{1}{\sqrt{2+\left(\frac{\kappa_2}{\tau_2}\right)^2}}\left(-B_2 + T_{B_2} + \frac{\kappa_2}{\tau_2}B_2 \wedge T_{B_2}\right) \tag{4.3.118}$$

biçiminde olur. Bu ifadenin tekrar türevi alınırsa katsayılar

$$\begin{cases} \hbar_1 = -2 - \left(\frac{\kappa_2}{\tau_2}\right)^2 + \left(\frac{\kappa_2}{\tau_2}\right)'\left(\frac{\kappa_2}{\tau_2}\right) \\ \hbar_2 = -2 - 3\left(\frac{\kappa_2}{\tau_2}\right)^2 - \left(\frac{\kappa_2}{\tau_2}\right)^4 - \left(\frac{\kappa_2}{\tau_2}\right)'\left(\frac{\kappa_2}{\tau_2}\right) \\ \hbar_3 = 2\left(\frac{\kappa_2}{\tau_2}\right) + \left(\frac{\kappa_2}{\tau_2}\right)^3 + \left(\frac{\kappa_2}{\tau_2}\right)' \end{cases} \tag{4.3.119}$$

olmak üzere $T'_{\widetilde{\beta}_{\xi_1}}(s)$ türev vektörü

$$T'_{\widetilde{\beta}_{\xi_1}}(s) = \frac{\sqrt{2}}{\left(2+\left(\frac{\kappa_2}{\tau_2}\right)^2\right)^2}\left(\hbar_1 B_2 + \hbar_2 T_{B_2} + \hbar_3 B_2 \wedge T_{B_2}\right) \tag{4.3.120}$$

şeklinde elde edilir. (4.3.115) ve (4.3.118) ifadelerinden elde edilen $\widetilde{\beta}_{\xi_1} \wedge T_{\widetilde{\beta}_{\xi_1}}$ vektörü

$$\widetilde{\beta}_{\xi_1} \wedge T_{\widetilde{\beta}_{\xi_1}} = \frac{1}{\sqrt{4+2(\frac{\kappa_2}{\tau_2})^2}}(\frac{\kappa_2}{\tau_2}B_2 - \frac{\kappa_2}{\tau_2}T_{B_2} + 2B_2 \wedge T_{B_2}) \tag{4.3.121}$$

şeklinde yazılır. (4.3.115), (4.3.118), (4.3.120) ve (4.3.121) vektörlerinde (4.3.3) den karşılıkları yazılırsa $\widetilde{\beta}_{\xi_1}$-Smarandache eğrisine ait Sabban çatısının ve $T'_{\widetilde{\beta}_{\xi_1}}$ vektörünün Mannheim partner eğrisine ait Frenet vektörlerine, eğriliğine ve burulmasına bağlı ifadesi,

$$\begin{aligned}
\widetilde{\beta}_{\xi_1}(s) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(-N_2 + B_2\Big) \\
T_{\widetilde{\beta}_{\xi_1}}(s) &= \frac{1}{\sqrt{2+\Big(\frac{\kappa_2}{\tau_2}\Big)^2}}\Big(\frac{\kappa_2}{\tau_2}T_2 - N_2 - B_2\Big) \\
\widetilde{\beta}_{\xi_1} \wedge T_{\widetilde{\beta}_{\xi_1}}(s) &= \frac{1}{\sqrt{4+2(\frac{\kappa_2}{\tau_2})^2}}\Big(2T_2 + \frac{\kappa_2}{\tau_2}N_2 + \frac{\kappa_2}{\tau_2}B_2\Big) \\
T'_{\widetilde{\beta}_{\xi_1}}(s) &= \frac{\sqrt{2}}{\Big(2+(\frac{\kappa_2}{\tau_2})^2\Big)^2}\Big(\hbar_3 T_2 - \hbar_2 N_2 + \hbar_1 B_2\Big)
\end{aligned}$$

denklemlerine dönüşür. Geodezik eğrilik tanımından $\kappa_g^{\widetilde{\beta}_{\xi_1}}$ geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\widetilde{\beta}_{\xi_1}} = \frac{1}{\Big(2+(\frac{\kappa_2}{\tau_2})^2\Big)^{\frac{5}{2}}}(\frac{\kappa_2}{\tau_2}\hbar_1 - \frac{\kappa_2}{\tau_2}\hbar_2 + 2\hbar_3)$$

biçiminde olur.

Teorem 4.3.26 (α, α_2) Mannheim eğri çifti, T ile T_2 teğet vektörleri arasındaki açı θ olsun. α_2 eğrisinin binormaller göstergesine ait $B_2T_{B_2}$- Smarandache eğrisinin geodezik eğriliğinin Mannheim eğrisine bağlı ifadesi

$$\kappa_g^{\widetilde{\beta}_{\xi_1}} = \frac{1}{\Big(2+(\frac{\theta'}{\|W\|})^2\Big)^{\frac{5}{2}}}\Big(\frac{\theta'}{\|W\|}\bar{\hbar}_1 - \frac{\theta'}{\|W\|}\bar{\hbar}_2 + 2\bar{\hbar}_3\Big) \tag{4.3.122}$$

denklemiyle verilir. Burada

$$\begin{cases}
\bar{\hbar}_1 = -2 - \big(\frac{\theta'}{\|W\|}\big)^2 + \big(\frac{\theta'}{\|W\|}\big)'\big(\frac{\theta'}{\|W\|}\big) \\
\bar{\hbar}_2 = -2 - 3\big(\frac{\theta'}{\|W\|}\big)^2 - \big(\frac{\theta'}{\|W\|}\big)^4 - \big(\frac{\theta'}{\|W\|}\big)'\big(\frac{\theta'}{\|W\|}\big) \\
\bar{\hbar}_3 = 2\big(\frac{\theta'}{\|W\|}\big) + \big(\frac{\theta'}{\|W\|}\big)^3 + 2\big(\frac{\theta'}{\|W\|}\big)'
\end{cases} \tag{4.3.123}$$

şeklinde birer katsayıdır.

İspat.

$$\widetilde{\beta}_{\xi_1}(s)=\frac{1}{\sqrt{2}}(B_2+T_{B_2})$$

eşitliğinde sırasıyla (4.3.3), (3.4.4) ve (3.4.8) den karşılıkları yazılırsa $\widetilde{\beta}_{\xi_1}$ vektörünün Mannheim eğrisine bağlı ifadesi

$$\widetilde{\beta}_{\xi_1}(s)=\frac{1}{\sqrt{2}}\big(-\sin\theta T+N-\cos\theta B\big) \tag{4.3.124}$$

biçiminde olur. Bu ifadenin türevi alınırsa $T_{\widetilde{\beta}_{\xi_1}}(s)$ teğet vektörü

$$T_{\widetilde{\beta}_{\xi_1}}(s)=\frac{\theta'\cos\theta-\|W\|\sin\theta}{\sqrt{2\|W\|^2+\theta'^2}}T-\frac{\|W\|}{\sqrt{2\|W\|^2+\theta'^2}}N-\frac{\theta'\sin\theta+\|W\|\cos\theta}{\sqrt{2\|W\|^2+\theta'^2}}B \tag{4.3.125}$$

şeklinde bulunur. Bu ifadenin türevi alınırsa katsayılar

$$\begin{cases}\bar{\hbar}_1=-2-\big(\frac{\theta'}{\|W\|}\big)^2+\big(\frac{\theta'}{\|W\|}\big)'\big(\frac{\theta'}{\|W\|}\big)\\ \bar{\hbar}_2=-2-3\big(\frac{\theta'}{\|W\|}\big)^2-\big(\frac{\theta'}{\|W\|}\big)^4-\big(\frac{\theta'}{\|W\|}\big)'\big(\frac{\theta'}{\|W\|}\big)\\ \bar{\hbar}_3=2\big(\frac{\theta'}{\|W\|}\big)+\big(\frac{\theta'}{\|W\|}\big)^3+2\big(\frac{\theta'}{\|W\|}\big)'\end{cases}$$

olmak üzere $T'_{\widetilde{\beta}_{\xi_1}}(s)$ türev vektörü

$$\begin{aligned}T'_{\widetilde{\beta}_{\xi_1}}(s) &= \frac{\|W\|^4\sqrt{2}(\bar{\hbar}_3\cos\theta-\bar{\hbar}_2\sin\theta)}{(2\|W\|^2+\theta'^2)^2}T+\frac{\|W\|^4\sqrt{2}\bar{\hbar}_1}{(2\|W\|^2+\theta'^2)^2}N\\ &\quad-\frac{\|W\|^4\sqrt{2}(\bar{\hbar}_2\cos\theta+\bar{\hbar}_3\sin\theta)}{(2\|W\|^2+\theta'^2)^2}B\end{aligned}$$

biçiminde olur. (4.3.124) ve (4.3.125) ifadelerinden elde edilen $\widetilde{\beta}_{\xi_1}\wedge T_{\widetilde{\beta}_{\xi_1}}$ vektörü

$$\widetilde{\beta}_{\xi_1}\wedge T_{\widetilde{\beta}_{\xi_1}}(s)=\frac{2\|W\|\cos\theta+\theta'\sin\theta}{\sqrt{4\|W\|^2+2\theta'^2}}T+\frac{\theta'}{\sqrt{4\|W\|^2+2\theta'^2}}N+\frac{\theta'\cos\theta-2\|W\|\sin\theta}{\sqrt{4\|W\|^2+2\theta'^2}}B$$

şeklinde yazılır. Geodezik eğrilik tanımından $\kappa_g^{\widetilde{\beta}_{\xi_1}}$ geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\widetilde{\beta}_{\xi_1}}=\frac{1}{\Big(2+\big(\frac{\theta'}{\|W\|}\big)^2\Big)^{\frac{5}{2}}}\Big(\frac{\theta'}{\|W\|}\bar{\hbar}_1-\frac{\theta'}{\|W\|}\bar{\hbar}_2+2\bar{\hbar}_3\Big)$$

biçiminde elde edilir.

Teorem 4.3.27 (α,α_2) Mannheim eğri çifti ve binormal vektörü ile Darboux vektörü arasındaki açı φ olsun. α_2 eğrisinin binormaller göstergesine ait $B_2T_{B_2}$- Smarandache eğrisinin geodezik eğriliğinin Mannheim eğrisine bağlı ifadesi

$$\kappa_g^{\widetilde{\beta}_{\xi_1}}=\frac{1}{\Big(2+\big(\frac{\varphi'}{\|W\|}\big)^2\Big)^{\frac{5}{2}}}\Big(\frac{\varphi'}{\|W\|}\underline{\hbar}_1-\frac{\varphi'}{\|W\|}\underline{\hbar}_2+2\underline{\hbar}_3\Big) \tag{4.3.126}$$

denklemiyle verilir. Burada

$$\begin{cases} \underline{\hbar}_1 = -2 - \left(\frac{\varphi'}{\|W\|}\right)^2 + \left(\frac{\varphi'}{\|W\|}\right)'\left(\frac{\varphi'}{\|W\|}\right) \\ \underline{\hbar}_2 = -2 - 3\left(\frac{\varphi'}{\|W\|}\right)^2 - \left(\frac{\varphi'}{\|W\|}\right)^4 - \left(\frac{\varphi'}{\|W\|}\right)'\left(\frac{\varphi'}{\|W\|}\right) \\ \underline{\hbar}_3 = 2\left(\frac{\varphi'}{\|W\|}\right) + \left(\frac{\varphi'}{\|W\|}\right)^3 + 2\left(\frac{\varphi'}{\|W\|}\right)' \end{cases} \tag{4.3.127}$$

şeklinde birer katsayıdır.

İspat.

$$\widetilde{\beta}_{\xi_1}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(B_2 + T_{B_2})$$

eşitliğinde sırasıyla (4.3.3) ve (3.4.10) dan karşılıkları yazılırsa $\widetilde{\beta}_{\xi_1}$ vektörünün Mannheim eğrisine bağlı ifadesi

$$\widetilde{\beta}_{\xi_1}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\varphi\, T + N - \sin\varphi\, B\right) \tag{4.3.128}$$

biçiminde olur. Bu ifadenin türevi alınırsa $T_{\widetilde{\beta}_{\xi_1}}(s)$ teğet vektörü

$$T_{\widetilde{\beta}_{\xi_1}}(s) = \frac{\varphi'\sin\varphi + \|W\|\cos\varphi}{\sqrt{2\|W\|^2 + \varphi'^2}}T - \frac{\|W\|}{\sqrt{2\|W\|^2 + \varphi'^2}}N + \frac{\varphi'\cos\varphi - \|W\|\sin\varphi}{\sqrt{2\|W\|^2 + \varphi'^2}}B \tag{4.3.129}$$

şeklinde bulunur. Bu ifadenin türevi alınırsa katsayılar

$$\begin{cases} \underline{\hbar}_1 = -2 - \left(\frac{\varphi'}{\|W\|}\right)^2 + \left(\frac{\varphi'}{\|W\|}\right)'\left(\frac{\varphi'}{\|W\|}\right) \\ \underline{\hbar}_2 = -2 - 3\left(\frac{\varphi'}{\|W\|}\right)^2 - \left(\frac{\varphi'}{\|W\|}\right)^4 - \left(\frac{\varphi'}{\|W\|}\right)'\left(\frac{\varphi'}{\|W\|}\right) \\ \underline{\hbar}_3 = 2\left(\frac{\varphi'}{\|W\|}\right) + \left(\frac{\varphi'}{\|W\|}\right)^3 + 2\left(\frac{\varphi'}{\|W\|}\right)' \end{cases}$$

olmak üzere $T'_{\widetilde{\beta}_{\xi_1}}(s)$ türev vektörü

$$\begin{aligned} T'_{\widetilde{\beta}_{\xi_1}}(s) &= \frac{\|W\|^4\sqrt{2}(\underline{\hbar}_3\sin\varphi + \underline{\hbar}_2\cos\varphi)}{(2\|W\|^2 + \varphi'^2)^2}T + \frac{\|W\|^4\sqrt{2}\underline{\hbar}_1}{(2\|W\|^2 + \varphi'^2)^2}N \\ &\quad + \frac{\|W\|^4\sqrt{2}(\underline{\hbar}_3\cos\varphi - \underline{\hbar}_2\sin\varphi)}{(2\|W\|^2 + \varphi'^2)^2}B \end{aligned}$$

şeklinde olur. (4.3.128) ve(4.3.129) ifadelerinden elde edilen $\widetilde{\beta}_{\xi_1} \wedge T_{\widetilde{\beta}_{\xi_1}}$ vektörü

$$\widetilde{\beta}_{\xi_1} \wedge T_{\widetilde{\beta}_{\xi_1}}(s) = \frac{2\|W\|\sin\varphi - \varphi'\cos\varphi}{\sqrt{4\|W\|^2 + 2\varphi'^2}}T + \frac{\varphi'}{\sqrt{4\|W\|^2 + 2\varphi'^2}}N + \frac{\varphi'\sin\varphi + 2\|W\|\cos\varphi}{\sqrt{4\|W\|^2 + 2\varphi'^2}}B$$

şeklinde yazılır. Geodezik eğrilik tanımından $\kappa_g^{\widetilde{\beta}_{\xi_1}}$ geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\widetilde{\beta}_{\xi_1}} = \frac{1}{\left(2+\left(\frac{\varphi'}{\|W\|}\right)^2\right)^{\frac{5}{2}}}\left(\frac{\varphi'}{\|W\|}\underline{\hbar}_1 - \frac{\varphi'}{\|W\|}\underline{\hbar}_2 + 2\underline{\hbar}_3\right)$$

biçiminde elde edilir.

Tanım 4.3.10 $\alpha_2 : I \to S^2$ Mannheim partner eğrisinin binormaller göstergesine ait Sabban çatısı $\{B_2, T_{B_2}, B_2 \wedge T_{B_2}\}$ olsun.

$$\widetilde{\beta}_{\xi_2}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(B_2 + B_2 \wedge T_{B_2}) \tag{4.3.130}$$

şeklinde tanımlı vektörün çizdiği regüler eğriye $B_2(B_2 \wedge T_{B_2})$-Smarandache eğrisi denir.

Teorem 4.3.28 $B_2(B_2 \wedge T_{B_2})$-Smarandache eğrisinin geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\widetilde{\beta}_{\xi_2}} = \frac{(\tau_2 + \kappa_2)}{(\tau_2 - \kappa_2)} \tag{4.3.131}$$

denklemiyle verilir.

İspat.

$$\widetilde{\beta}_{\xi_2}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(B_2 + B_2 \wedge T_{B_2})$$

eğrisinin $s_{\widetilde{\beta}_{\xi_2}}$ yay parametresine göre türevi alınırsa

$$T_{\widetilde{\beta}_{\xi_2}}\frac{ds_{\widetilde{\beta}_{\xi_2}}}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 - \frac{\kappa_2}{\tau_2}\right)T_{B_2}$$

olur. Bu eşitliğin normu alınırsa $\frac{ds_{\widetilde{\beta}_{\xi_2}}}{ds}$ ifadesi

$$\frac{ds_{\widetilde{\beta}_{\xi_2}}}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 - \frac{\kappa_2}{\tau_2}\right)$$

bulunur. Bu ifade yukarıda yerine yazılırsa $T_{\widetilde{\beta}_{\xi_2}}(s)$ teğet vektörü

$$T_{\widetilde{\beta}_{\xi_2}}(s) = T_{B_2} \tag{4.3.132}$$

biçiminde olur. Bu ifadenin tekrar türevi alınırsa $T'_{\widetilde{\beta}_{\xi_2}}(s)$ türev vektörü

$$T'_{\widetilde{\beta}_{\xi_2}}(s) = \frac{\sqrt{2}}{(1 - \frac{\kappa_2}{\tau_2})}\left(-B_2 + \frac{\kappa_2}{\tau_2}B_2 \wedge T_{B_2}\right) \tag{4.3.133}$$

şeklinded bulunur. (4.3.130) ve (4.3.132) ifadelerinden elde edilen $\widetilde{\beta}_{\xi_2} \wedge T_{\widetilde{\beta}_{\xi_2}}$ vektörü

$$\widetilde{\beta}_{\xi_2} \wedge T_{\widetilde{\beta}_{\xi_2}}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-B_2 + B_2 \wedge T_{B_2}) \tag{4.3.134}$$

şeklinde yazılır. (4.3.130), (4.3.132), (4.3.133) ve (4.3.134) vektörlerinde (4.3.3) den karşılıkları yazılırsa $\widetilde{\beta}_{\xi_2}$-Smarandache eğrisine ait Sabban çatısının ve $T'_{\widetilde{\beta}_{\xi_2}}$ vektörünün Mannheim partner eğrisine bağlı ifadesi,

$$\begin{aligned}
\widetilde{\beta}_{\xi_2}(s) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(T_2 + B_2), \\
T_{\widetilde{\beta}_{\xi_2}}(s) &= -N_2, \\
\widetilde{\beta}_{\xi_2} \wedge T_{\widetilde{\beta}_{\xi_2}}(s) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(T_2 - B_2), \\
T'_{\widetilde{\beta}_{\xi_2}}(s) &= \frac{\sqrt{2}}{(1 - \frac{\kappa_2}{\tau_2})}\left(\frac{\kappa_2}{\tau_2}T_2 - B_2\right)
\end{aligned}$$

eşitliklerine dönüşür. Geodezik eğrilik tanımından $\kappa_g^{\widetilde{\beta}_{\xi_2}}$ geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\widetilde{\beta}_{\xi_2}} = \frac{(\tau_2 + \kappa_2)}{(\tau_2 - \kappa_2)}$$

biçiminde elde edilir.

Teorem 4.3.29 (α, α_2) Mannheim eğri çifti, T ile T_2 teğet vektörleri arasındaki açı θ olsun. α_2 eğrisinin binormaller göstergesine ait $B_2(B_2 \wedge T_{B_2})$- Smarandache eğrisinin geodezik eğriliğinin Mannheim eğrisine bağlı ifadesi

$$\kappa_g^{\widetilde{\beta}_{\xi_2}} = \frac{\|W\| + \theta'}{\|W\| - \theta'} \tag{4.3.135}$$

denklemiyle verilir.

İspat.

$$\widetilde{\beta}_{\xi_2}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(B_2 + B_2 \wedge T_{B_2})$$

eşitliğinde sırasıyla (4.3.3), (3.4.4) ve (3.4.8) den karşılıkları yazılırsa $\widetilde{\beta}_{\xi_2}$ vektörünün Mannheim eğrisine bağlı ifadesi

$$\widetilde{\beta}_{\xi_2}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\theta T + N - \sin\theta B) \tag{4.3.136}$$

biçiminde olur. Bu ifadenin türevi alınırsa $T_{\widetilde{\beta}_{\xi_2}}(s)$ teğet vektörü

$$T_{\widetilde{\beta}_{\xi_2}}(s) = -\sin\theta T - \cos\theta B \tag{4.3.137}$$

şeklinde bulunur. Bu ifadenin türevi alınırsa $T'_{\widetilde{\beta}_{\xi_2}}(s)$ türev vektörü

$$T'_{\widetilde{\beta}_{\xi_2}}(s)=\frac{\theta'\sqrt{2}\cos\theta}{\|W\|-\theta'}T+\frac{\|W\|\sqrt{2}}{\theta'-\|W\|}N+\frac{\theta'\sqrt{2}\sin\theta}{\theta'-\|W\|}B$$

biçiminde olur. (4.3.139) ve (4.3.140) ifadelerinden elde edilen $\widetilde{\beta}_{\xi_2}\wedge T_{\widetilde{\beta}_{\xi_2}}$ vektörü

$$\widetilde{\beta}_{\xi_2}\wedge T_{\widetilde{\beta}_{\xi_2}}(s)=\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\theta T-N-\sin\theta B)$$

şeklinde yazılır. Geodezik eğrilik tanımından $\kappa_g^{\widetilde{\beta}_{\xi_2}}$ geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\widetilde{\beta}_{\xi_2}}=\frac{\|W\|+\theta'}{\|W\|-\theta'}$$

biçiminde elde edilir.

Teorem 4.3.30 (α,α_2) Mannheim eğri çifti ve binormal vektörü ile Darboux vektörü arasındaki açı φ olsun. α_2 eğrisinin binormaller göstergesine ait $B_2(B_2\wedge T_{B_2})$- Smarandache eğrisinin geodezik eğriliğinin Mannheim eğrisine bağlı ifadesi

$$\kappa_g^{\widetilde{\beta}_{\xi_2}}=\frac{\|W\|+\varphi'}{\|W\|-\varphi'} \tag{4.3.138}$$

denklemiyle verilir.

İspat.

$$\widetilde{\beta}_{\xi_2}(s)=\frac{1}{\sqrt{2}}(B_2+B_2\wedge T_{B_2})$$

eşitliğinde sırasıyla (4.3.3) ve (3.4.10) dan karşılıkları yazılırsa $\widetilde{\beta}_{\xi_2}$ vektörünün Mannheim eğrisine bağlı ifadesi

$$\widetilde{\beta}_{\xi_2}(s)=\frac{1}{\sqrt{2}}(\sin\varphi T+N+\cos\varphi B) \tag{4.3.139}$$

biçiminde olur. Bu ifadenin türevi alınırsa $T_{\widetilde{\beta}_{\xi_2}}(s)$ teğet vektörü

$$T_{\widetilde{\beta}_{\xi_2}}(s)=\cos\varphi T-\sin\varphi B \tag{4.3.140}$$

biçiminde elde edilir. Bu ifadenin türevi alınırsa $T'_{\widetilde{\beta}_{\xi_2}}(s)$ türev vektörü

$$T'_{\widetilde{\beta}_{\xi_2}}(s)=\frac{\varphi'\sqrt{2}\sin\varphi}{\|W\|-\varphi'}T-\frac{\|W\|\sqrt{2}}{\|W\|-\varphi'}N+\frac{\varphi'\sqrt{2}\cos\varphi}{\|W\|-\varphi'}B$$

şeklinde bulunur. (4.3.139) ve (4.3.140) ifadelerinden elde edilen $\widetilde{\beta}_{\xi_2}\wedge T_{\widetilde{\beta}_{\xi_2}}$ vektörü

$$\widetilde{\beta}_{\xi_2}\wedge T_{\widetilde{\beta}_{\xi_2}}(s)=\frac{1}{\sqrt{2}}(\sin\varphi T-N+\cos\varphi B)$$

şeklinde yazılır. Geodezik eğrilik tanımından $\kappa_g^{\widetilde{\beta}_{\xi_2}}$ geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\widetilde{\beta}_{\xi_2}} = \frac{\|W\| + \varphi'}{\|W\| - \varphi'}$$

biçiminde elde edilir.

Tanım 4.3.11 $\alpha_2 : I \to S^2$ Mannheim partner eğrisinin binormaller göstergesine ait Sabban çatısı $\{B_2, T_{B_2}, B_2 \wedge T_{B_2}\}$ olsun.

$$\widetilde{\beta}_{\xi_3}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(T_{B_2} + B_2 \wedge T_{B_2}) \tag{4.3.141}$$

şeklinde tanımlı vektörün çizdiği regüler eğriye $T_{B_2}(B_2 \wedge T_{B_2})$-Smarandache eğrisi denir.

Teorem 4.3.31 $T_{B_2}(B_2 \wedge T_{B_2})$-Smarandache eğrisinin geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\widetilde{\beta}_{\xi_3}} = \frac{1}{\left(1 + 2\left(\frac{\kappa_2}{\tau_2}\right)^2\right)^{\frac{5}{2}}}\left(2\frac{\kappa_2}{\tau_2}\nabla_1 - \nabla_2 + \nabla_3\right) \tag{4.3.142}$$

denklemiyle verilir. Burada

$$\begin{cases} \nabla_1 = \frac{\kappa_2}{\tau_2} + 2\left(\frac{\kappa_2}{\tau_2}\right)^3 + 2\left(\frac{\kappa_2}{\tau_2}\right)'\left(\frac{\kappa_2}{\tau_2}\right) \\ \nabla_2 = -1 - 3\left(\frac{\kappa_2}{\tau_2}\right)^2 - 2\left(\frac{\kappa_2}{\tau_2}\right)^4 - \left(\frac{\kappa_2}{\tau_2}\right)' \\ \nabla_3 = -\left(\frac{\kappa_2}{\tau_2}\right)^2 - 2\left(\frac{\kappa_2}{\tau_2}\right)^4 + \left(\frac{\kappa_2}{\tau_2}\right)' \end{cases} \tag{4.3.143}$$

şeklinde birer katsayıdır.

İspat.

$$\widetilde{\beta}_{\xi_3}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(T_{B_2} + B_2 \wedge T_{B_2})$$

eğrisinin $s_{\widetilde{\beta}_{\xi_3}}$ yay parametresine göre türevi alınırsa

$$T_{\widetilde{\beta}_{\xi_3}} \frac{ds_{\widetilde{\beta}_{\xi_3}}}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-B_2 - \frac{\kappa_2}{\tau_2}T_{B_2} + \frac{\kappa_2}{\tau_2}B_2 \wedge T_{B_2}\right)$$

olur. Bu eşitliğin normu alınırsa $\frac{ds_{\widetilde{\beta}_{\xi_3}}}{ds}$ ifadesi

$$\frac{ds_{\widetilde{\beta}_{\xi_3}}}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1 + 2\left(\frac{\kappa_2}{\tau_2}\right)^2}$$

bulunur. Bulunan bu ifade yukarıda yerine yazılırsa $T_{\widetilde{\beta}_{\xi_3}}(s)$ teğet vektörü

$$T_{\widetilde{\beta}_{\xi_3}}(s) = \frac{1}{\sqrt{1 + 2\left(\frac{\kappa_2}{\tau_2}\right)^2}}\left(-B_2 - \frac{\kappa_2}{\tau_2}T_{B_2} + \frac{\kappa_2}{\tau_2}B_2 \wedge T_{B_2}\right) \tag{4.3.144}$$

biçiminde olur. Bu ifadenin tekrar türevi alınırsa katsayılar,

$$\begin{cases}\nabla_1 = \frac{\kappa_2}{\tau_2} + 2\big(\frac{\kappa_2}{\tau_2}\big)^3 + 2\big(\frac{\kappa_2}{\tau_2}\big)'\big(\frac{\kappa_2}{\tau_2}\big) \\ \nabla_2 = -1 - 3\big(\frac{\kappa_2}{\tau_2}\big)^2 - 2\big(\frac{\kappa_2}{\tau_2}\big)^4 - \big(\frac{\kappa_2}{\tau_2}\big)' \\ \nabla_3 = -\big(\frac{\kappa_2}{\tau_2}\big)^2 - 2\big(\frac{\kappa_2}{\tau_2}\big)^4 + \big(\frac{\kappa_2}{\tau_2}\big)'\end{cases}$$

olmak üzere $T'_{\widetilde{\beta}_{\xi_3}}(s)$ türev vektörü

$$T'_{\widetilde{\beta}_{\xi_3}}(s) = \frac{\sqrt{2}}{\Big(1+2\big(\frac{\kappa_2}{\tau_2}\big)^2\Big)^2}(\nabla_1 B_2 + \nabla_2 T_{B_2} + \nabla_3 B_2 \wedge T_{B_2}) \tag{4.3.145}$$

şeklinde olur. (4.3.141) ve (4.3.144) ifadelerinden elde edilen $\widetilde{\beta}_{\xi_3} \wedge T_{\widetilde{\beta}_{\xi_3}}$ vektörü

$$\widetilde{\beta}_{\xi_3} \wedge T_{\widetilde{\beta}_{\xi_3}}(s) = \frac{1}{\sqrt{2+4\big(\frac{\kappa_2}{\tau_2}\big)^2}}(2\frac{\kappa_2}{\tau_2}B_2 - T_{B_2} + B_2 \wedge T_{B_2}) \tag{4.3.146}$$

biçiminde yazılır. (4.3.141), (4.3.144), (4.3.145) ve (4.3.146) vektörlerinde (4.3.3) den karşılıkları yazılırsa $\widetilde{\beta}_{\xi_3}$-Smarandache eğrisine ait Sabban çatısının ve $T'_{\widetilde{\beta}_{\xi_3}}$ vektörünün Mannheim partner eğrisine bağlı ifadesi,

$$\begin{aligned}
\widetilde{\beta}_{\xi_3}(s) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(T_2 - N_2\Big), \\
T_{\widetilde{\beta}_{\xi_3}}(s) &= \frac{1}{\sqrt{1+2\big(\frac{\kappa_2}{\tau_2}\big)^2}}\Big(\frac{\kappa_2}{\tau_2}T_2 + \frac{\kappa_2}{\tau_2}N_2 - B_2\Big), \\
\widetilde{\beta}_{\xi_3} \wedge T_{\widetilde{\beta}_{\xi_3}}(s) &= \frac{1}{\sqrt{2+4\big(\frac{\kappa_2}{\tau_2}\big)^2}}\Big(T_2 + N_2 + 2\frac{\kappa_2}{\tau_2}B_2\Big), \\
T'_{\widetilde{\beta}_{\xi_3}}(s) &= \frac{\sqrt{2}}{\Big(1+2\big(\frac{\kappa_2}{\tau_2}\big)^2\Big)^2}\Big(\nabla_3 T_2 - \nabla_2 N_2 + \nabla_1 B_2\Big)
\end{aligned}$$

eşitliklerine dönüşür. Geodezik eğrilik tanımından $\kappa_g^{\widetilde{\beta}_{\xi_3}}$ geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\widetilde{\beta}_{\xi_3}} = \frac{1}{\Big(1+2\big(\frac{\kappa_2}{\tau_2}\big)^2\Big)^{\frac{5}{2}}}\big(2\frac{\kappa_2}{\tau_2}\nabla_1 - \nabla_2 + \nabla_3\big)$$

şeklinde elde edilir.

Teorem 4.3.32 (α, α_2) Mannheim eğri çifti, T ile T_2 teğet vektörleri arasındaki açı θ olsun. α_2 eğrisinin binormaller göstergesine ait $T_{B_2}(B_2 \wedge T_{B_2})$- Smarandache eğrisinin geodezik eğriliğinin Mannheim eğrisine bağlı ifadesi

$$\kappa_g^{\widetilde{\beta}_{\xi_3}} = \frac{1}{\Big(1+2\big(\frac{\theta'}{\|W\|}\big)^2\Big)^{\frac{5}{2}}}\big(2\frac{\theta'}{\|W\|}\overline{\nabla}_1 - \overline{\nabla}_2 + \overline{\nabla}_3\big) \tag{4.3.147}$$

denklemiyle verilir. Burada

$$\begin{cases} \overline{\nabla}_1 = \big(\frac{\theta'}{\|W\|}\big) + \big(\frac{\theta'}{\|W\|}\big)^3 + 2\big(\frac{\theta'}{\|W\|}\big)'\big(\frac{\theta'}{\|W\|}\big) \\ \overline{\nabla}_2 = -1 - 3\big(\frac{\theta'}{\|W\|}\big)^2 - 2\big(\frac{\theta'}{\|W\|}\big)^4 - \big(\frac{\theta'}{\|W\|}\big)' \\ \overline{\nabla}_3 = -\big(\frac{\theta'}{\|W\|}\big)^2 - 2\big(\frac{\theta'}{\|W\|}\big)^4 + \big(\frac{\theta'}{\|W\|}\big)' \end{cases} \tag{4.3.148}$$

şeklinde birer katsayıdır.

İspat.

$$\widetilde{\beta}_{\xi_3}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(T_{B_2} + B_2 \wedge T_{B_2})$$

eşitliğinde sırasıyla (4.3.3), (3.4.4) ve (3.4.8) den karşılıkları yazılırsa $\widetilde{\beta}_{\xi_3}$ vektörünün Mannheim eğrisine bağlı ifadesi

$$\widetilde{\beta}_{\xi_3}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}\big((\cos\theta - \sin\theta)T - (\sin\theta + \cos\theta)B\big) \tag{4.3.149}$$

biçiminde olur. Bu ifadenin türevi alınırsa $T_{\widetilde{\beta}_{\xi_3}}(s)$ teğet vektörü

$$T_{\widetilde{\beta}_{\xi_3}}(s) = \frac{\theta'(\sin\theta + \cos\theta)}{\sqrt{\|W\|^2 + 2\theta'^2}}T - \frac{\|W\|}{\sqrt{\|W\|^2 + 2\theta'^2}}N + \frac{\theta'(\cos\theta - \sin\theta)}{\sqrt{\|W\|^2 + 2\theta'^2}}B \tag{4.3.150}$$

şeklinde bulunur. Bu ifadenin türevi alınırsa katsayılar

$$\begin{cases} \overline{\nabla}_1 = \big(\frac{\theta'}{\|W\|}\big) + \big(\frac{\theta'}{\|W\|}\big)^3 + 2\big(\frac{\theta'}{\|W\|}\big)'\big(\frac{\theta'}{\|W\|}\big) \\ \overline{\nabla}_2 = -1 - 3\big(\frac{\theta'}{\|W\|}\big)^2 - 2\big(\frac{\theta'}{\|W\|}\big)^4 - \big(\frac{\theta'}{\|W\|}\big)' \\ \overline{\nabla}_3 = -\big(\frac{\theta'}{\|W\|}\big)^2 - 2\big(\frac{\theta'}{\|W\|}\big)^4 + \big(\frac{\theta'}{\|W\|}\big)' \end{cases}$$

olmak üzere $T'_{\widetilde{\beta}_{\xi_3}}(s)$ türev vektörü

$$\begin{aligned} T'_{\widetilde{\beta}_{\xi_3}}(s) \quad = \quad & \frac{\|W\|^4\sqrt{2}(\overline{\nabla}_2\sin\theta + \overline{\nabla}_3\cos\theta)}{(\|W\|^2 + 2\theta'^2)^2}T + \frac{\|W\|^4\sqrt{2}\overline{\nabla}_1}{(\|W\|^2 + 2\theta'^2)^2}N \\ & - \frac{\|W\|^4\sqrt{2}(\overline{\nabla}_2\cos\theta + \overline{\nabla}_3\sin\theta)}{(\|W\|^2 + 2\theta'^2)^2}B \end{aligned}$$

biçiminde bulunur. (4.3.149) ve (4.3.150) ifadelerinden elde edilen $\widetilde{\beta}_{\xi_3} \wedge T_{\widetilde{\beta}_{\xi_3}}$ vektörü

$$\widetilde{\beta}_{\xi_3} \wedge T_{\widetilde{\beta}_{\xi_3}}(s) = \frac{\|W\|(\sin\theta + \cos\theta)}{\sqrt{2\|W\|^2 + 4\theta'^2}}T + \frac{2\theta'}{\sqrt{2\|W\|^2 + 4\theta'^2}}N + \frac{\|W\|(\cos\theta - \sin\theta)}{\sqrt{2\|W\|^2 + 4\theta'^2}}B$$

şeklinde yazılır. Geodezik eğrilik tanımından $\kappa_g^{\widetilde{\beta}_{\xi_3}}$ geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\widetilde{\beta}_{\xi_3}} = \frac{1}{\left(1+2\left(\frac{\theta'}{\|W\|}\right)^2\right)^{\frac{5}{2}}}\left(2\frac{\theta'}{\|W\|}\overline{\nabla}_1 - \overline{\nabla}_2 + \overline{\nabla}_3\right)$$

biçiminde elde edilir.

Teorem 4.3.33 (α, α_2) Mannheim eğri çifti ve binormal vektörü ile Darboux vektörü arasındaki açı φ olsun. α_2 eğrisinin binormaller göstergesine ait $T_{B_2}(B_2 \wedge T_{B_2})$- Smarandache eğrisinin geodezik eğriliğinin Mannheim eğrisine bağlı ifadesi

$$\kappa_g^{\widetilde{\beta}_{\xi_3}} = \frac{1}{\left(1+2\left(\frac{\varphi'}{\|W\|}\right)^2\right)^{\frac{5}{2}}}\left(2\frac{\varphi'}{\|W\|}\underline{\nabla}_1 - \underline{\nabla}_2 + \underline{\nabla}_3\right) \tag{4.3.151}$$

denklemiyle verilir. Burada

$$\begin{cases} \underline{\nabla}_1 = \left(\frac{\varphi'}{\|W\|}\right) + \left(\frac{\varphi'}{\|W\|}\right)^3 + 2\left(\frac{\varphi'}{\|W\|}\right)'\left(\frac{\varphi'}{\|W\|}\right) \\ \underline{\nabla}_2 = -1 - 3\left(\frac{\varphi'}{\|W\|}\right)^2 - 2\left(\frac{\varphi'}{\|W\|}\right)^4 - \left(\frac{\varphi'}{\|W\|}\right)' \\ \underline{\nabla}_3 = -\left(\frac{\varphi'}{\|W\|}\right)^2 - 2\left(\frac{\varphi'}{\|W\|}\right)^4 + \left(\frac{\varphi'}{\|W\|}\right)' \end{cases} \tag{4.3.152}$$

şeklinde birer katsayıdır.

İspat.

$$\widetilde{\beta}_{\xi_3}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(T_{B_2} + B_2 \wedge T_{B_2})$$

eşitliğinde sırasıyla (4.3.3) ve (3.4.10) dan karşılıkları yazılırsa $\widetilde{\beta}_{\xi_3}$ vektörünün Mannheim eğrisine bağlı ifadesi

$$\widetilde{\beta}_{\xi_3}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}\big((\sin\varphi + \cos\varphi)T + (\cos\varphi - \sin\varphi)B\big) \tag{4.3.153}$$

biçiminde olur. Bu ifadenin türevi alınırsa $T_{\widetilde{\beta}_{\xi_3}}(s)$ teğet vektörü

$$T_{\widetilde{\beta}_{\xi_3}}(s) = \frac{\varphi'(\sin\varphi - \cos\varphi)}{\sqrt{\|W\|^2 + 2\varphi'^2}}T - \frac{\|W\|}{\sqrt{\|W\|^2 + 2\varphi'^2}}N + \frac{\varphi'(\sin\varphi + \cos\varphi)}{\sqrt{\|W\|^2 + 2\varphi'^2}}B \tag{4.3.154}$$

şeklinde bulunur. Bu ifadenin türevi alınırsa katsayılar

$$\begin{cases} \underline{\nabla}_1 = \left(\frac{\varphi'}{\|W\|}\right) + \left(\frac{\varphi'}{\|W\|}\right)^3 + 2\left(\frac{\varphi'}{\|W\|}\right)'\left(\frac{\varphi'}{\|W\|}\right) \\ \underline{\nabla}_2 = -1 - 3\left(\frac{\varphi'}{\|W\|}\right)^2 - 2\left(\frac{\varphi'}{\|W\|}\right)^4 - \left(\frac{\varphi'}{\|W\|}\right)' \\ \underline{\nabla}_3 = -\left(\frac{\varphi'}{\|W\|}\right)^2 - 2\left(\frac{\varphi'}{\|W\|}\right)^4 + \left(\frac{\varphi'}{\|W\|}\right)' \end{cases}$$

olmak üzere $T'_{\widetilde{\beta}_{\xi_3}}(s)$ türev vektörü

$$\begin{aligned} T'_{\widetilde{\beta}_{\xi_3}}(s) &= \frac{\|W\|^4\sqrt{2}(\underline{\nabla}_3\sin\varphi-\underline{\nabla}_2\cos\varphi)}{(\|W\|^2+2\varphi'^2)^2}T+\frac{\|W\|^4\sqrt{2}\underline{\nabla}_1}{(\|W\|^2+2\varphi'^2)^2}N \\ &+\frac{\|W\|^4\sqrt{2}(\underline{\nabla}_3\cos\varphi-\underline{\nabla}_2\sin\varphi)}{(\|W\|^2+2\varphi'^2)^2}B \end{aligned}$$

şeklinde bulunur. (4.3.153) ve (4.3.154) ifadelerinden elde edilen $\widetilde{\beta}_{\xi_3}\wedge T_{\widetilde{\beta}_{\xi_3}}$ vektörü

$$\widetilde{\beta}_{\xi_3}\wedge T_{\widetilde{\beta}_{\xi_3}}(s)=\frac{\|W\|(\sin\varphi-\cos\varphi)}{\sqrt{2\|W\|^2+4\varphi'^2}}T+\frac{2\varphi'}{\sqrt{2\|W\|^2+4\varphi'^2}}N+\frac{\|W\|(\sin\varphi+\cos\varphi)}{\sqrt{2\|W\|^2+4\varphi'^2}}B$$

biçiminde yazılır. Geodezik eğrilik tanımından $\kappa_g^{\widetilde{\beta}_{\xi_3}}$ geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\widetilde{\beta}_{\xi_3}}=\frac{1}{\left(1+2\left(\frac{\varphi'}{\|W\|}\right)^2\right)^{\frac{5}{2}}}\left(2\frac{\varphi'}{\|W\|}\underline{\nabla}_1-\underline{\nabla}_2+\underline{\nabla}_3\right)$$

biçiminde elde edilir.

Tanım 4.3.12 $\alpha_2 : I\rightarrow S^2$ Mannheim partner eğrisinin binormaller göstergesine ait Sabban çatısı $\{B_2, T_{B_2}, B_2\wedge T_{B_2}\}$ olsun.

$$\widetilde{\beta}_{\xi_4}(s)=\frac{1}{\sqrt{3}}(B_2+T_{B_2}+B_2\wedge T_{B_2}) \tag{4.3.155}$$

şeklinde tanımlı vektörün çizdiği regüler eğriye $B_2T_{B_2}(B_2\wedge T_{B_2})$-Smarandache eğrisi denir.

Teorem 4.3.34 $B_2T_{B_2}(B_2\wedge T_{B_2})$-Smarandache eğrisinin geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\widetilde{\beta}_{\xi_4}}=\frac{1}{4\sqrt{2}\left(1+\frac{\kappa_2}{\tau_2}+\left(\frac{\kappa_2}{\tau_2}\right)^2\right)^{\frac{5}{2}}}\left(\left(2\frac{\kappa_2}{\tau_2}-1\right)\flat_1-\left(1+\frac{\kappa_2}{\tau_2}\right)\flat_2+\left(2-\frac{\kappa_2}{\tau_2}\right)\flat_3\right) \tag{4.3.156}$$

denklemiyle verilir. Burada

$$\begin{cases} \flat_1=-2+4\left(\frac{\kappa_2}{\tau_2}\right)-\left(\frac{\kappa_2}{\tau_2}\right)^2+2\left(\frac{\kappa_2}{\tau_2}\right)^3+\left(\frac{\kappa_2}{\tau_2}\right)'\left(2\frac{\kappa_2}{\tau_2}-1\right) \\ \flat_2=-2+2\left(\frac{\kappa_2}{\tau_2}\right)-4\left(\frac{\kappa_2}{\tau_2}\right)^2+2\left(\frac{\kappa_2}{\tau_2}\right)^3-2\left(\frac{\kappa_2}{\tau_2}\right)^4-\left(\frac{\kappa_2}{\tau_2}\right)'\left(1+\frac{\kappa_2}{\tau_2}\right) \\ \flat_3=2\left(\frac{\kappa_2}{\tau_2}\right)-4\left(\frac{\kappa_2}{\tau_2}\right)^2+4\left(\frac{\kappa_2}{\tau_2}\right)^3-2\left(\frac{\kappa_2}{\tau_2}\right)^4+\left(\frac{\kappa_2}{\tau_2}\right)'\left(2-\frac{\kappa_2}{\tau_2}\right) \end{cases} \tag{4.3.157}$$

şeklinde birer katsayıdır.

İspat.

$$\widetilde{\beta}_{\xi_4}(s)=\frac{1}{\sqrt{3}}(B_2+T_{B_2}+B_2\wedge T_{B_2})$$

eğrisinin $s_{\widetilde{\beta}_{\xi_4}}$ yay parametresine göre türevi alınırsa

$$T_{\widetilde{\beta}_{\xi_4}}\frac{ds_{\widetilde{\beta}_{\xi_4}}}{ds}=\frac{1}{\sqrt{3}}\Big(-B_2+\big(1-\frac{\kappa_2}{\tau_2}\big)T_{B_2}+\frac{\kappa_2}{\tau_2}B_2\wedge T_{B_2}\Big)$$

biçiminde olur ve bu ifadenin normu alınırsa $\frac{ds_{\widetilde{\beta}_{\xi_4}}}{ds}$ ifadesi

$$\frac{ds_{\widetilde{\beta}_{\xi_4}}}{ds}=\sqrt{\frac{2}{3}\Big(1-\frac{\kappa_2}{\tau_2}+\big(\frac{\kappa_2}{\tau_2}\big)^2\Big)}$$

bulunur. Bulunan bu ifade yukarıda yerine yazılırsa $T_{\widetilde{\beta}_{\xi_4}}(s)$ teğet vektörü

$$T_{\widetilde{\beta}_{\xi_4}}(s)=\frac{1}{\sqrt{2\Big(1-\frac{\kappa_2}{\tau_2}+\big(\frac{\kappa_2}{\tau_2}\big)^2\Big)}}\Big(-B_2+\big(1-\frac{\kappa_2}{\tau_2}\big)T_{B_2}+\frac{\kappa_2}{\tau_2}B_2\wedge T_{B_2}\Big) \tag{4.3.158}$$

biçiminde elde edilir. Tekrar türev alınırsa katsayılar,

$$\begin{cases}\flat_1=-2+4\big(\frac{\kappa_2}{\tau_2}\big)-\big(\frac{\kappa_2}{\tau_2}\big)^2+2\big(\frac{\kappa_2}{\tau_2}\big)^3+\big(\frac{\kappa_2}{\tau_2}\big)'\big(2\frac{\kappa_2}{\tau_2}-1\big)\\ \flat_2=-2+2\big(\frac{\kappa_2}{\tau_2}\big)-4\big(\frac{\kappa_2}{\tau_2}\big)^2+2\big(\frac{\kappa_2}{\tau_2}\big)^3-2\big(\frac{\kappa_2}{\tau_2}\big)^4-\big(\frac{\kappa_2}{\tau_2}\big)'\big(1+\frac{\kappa_2}{\tau_2}\big)\\ \flat_3=2\big(\frac{\kappa_2}{\tau_2}\big)-4\big(\frac{\kappa_2}{\tau_2}\big)^2+4\big(\frac{\kappa_2}{\tau_2}\big)^3-2\big(\frac{\kappa_2}{\tau_2}\big)^4+\big(\frac{\kappa_2}{\tau_2}\big)'\big(2-\frac{\kappa_2}{\tau_2}\big)\end{cases}$$

olmak üzere $T'_{\widetilde{\beta}_{\xi_4}}(s)$ türev vektörü

$$T'_{\widetilde{\beta}_{\xi_4}}(s)=\frac{\sqrt{3}}{4\Big(1-\frac{\kappa_2}{\tau_2}+\big(\frac{\kappa_2}{\tau_2}\big)^2\Big)^2}(\flat_1B_2+\flat_2T_{B_2}+\flat_3B_2\wedge T_{B_2}) \tag{4.3.159}$$

şeklinde bulunur. (4.3.155) ve (4.3.158) ifadelerinden elde edilen $\widetilde{\beta}_{\xi_4}\wedge T_{\widetilde{\beta}_{\xi_4}}$ vektörü

$$\widetilde{\beta}_{\xi_4}\wedge T_{\widetilde{\beta}_{\xi_4}}(s)=\frac{\big(2\frac{\kappa_2}{\tau_2}-1\big)B_2-\big(1+\frac{\kappa_2}{\tau_2}\big)T_{B_2}+\big(2-\frac{\kappa_2}{\tau_2}\big)B_2\wedge T_{B_2}}{\sqrt{6}\sqrt{1-\frac{\kappa_2}{\tau_2}+\big(\frac{\kappa_2}{\tau_2}\big)^2}} \tag{4.3.160}$$

biçiminde yazılır. (4.3.155), (4.3.158), (4.3.159) ve (4.3.160) vektörlerinde (4.3.3) den karşılıkları yazılırsa $\widetilde{\beta}_{\xi_4}$-Smarandache eğrisine ait Sabban çatısının ve $T'_{\widetilde{\beta}_{\xi_4}}$ vektörünün Mannheim partner eğrisine bağlı ifadesi,

$$\begin{aligned}\widetilde{\beta}_{\xi_4}&=\frac{1}{\sqrt{3}}(T_2-N_2+B_2),\\ T_{\widetilde{\beta}_{\xi_4}}&=\frac{1}{\sqrt{2\Big(1-\frac{\kappa_2}{\tau_2}+\big(\frac{\kappa_2}{\tau_2}\big)^2\Big)}}\Big(\frac{\kappa_2}{\tau_2}T_2-\big(1-\frac{\kappa_2}{\tau_2}\big)N_2-B_2\Big),\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\beta}_{\xi_4} \wedge T_{\widetilde{\beta}_{\xi_4}} &= \frac{1}{\sqrt{6}\sqrt{1-\frac{\kappa_2}{\tau_2}+\left(\frac{\kappa_2}{\tau_2}\right)^2}}\Big((2-\frac{\kappa_2}{\tau_2})T_2+(1+\frac{\kappa_2}{\tau_2})N_2+(2\frac{\kappa_2}{\tau_2}-1)B_2\Big), \\
T'_{\widetilde{\beta}_{\xi_4}} &= \frac{\sqrt{3}}{4\Big(1-\frac{\kappa_2}{\tau_2}+\left(\frac{\kappa_2}{\tau_2}\right)^2\Big)^2}\left(\flat_3 T_2-\flat_2 N_2+\flat_1 B_2\right)
\end{aligned}
$$

denklemlerine dönüşür. Geodezik eğrilik tanımından $\kappa_g^{\widetilde{\beta}_{\xi_4}}$ geodezik eğriliği

$$
\kappa_g^{\widetilde{\beta}_{\xi_4}} = \frac{1}{4\sqrt{2}\left(1+\frac{\kappa_2}{\tau_2}+\left(\frac{\kappa_2}{\tau_2}\right)^2\right)^{\frac{5}{2}}}\Big(\big(2\frac{\kappa_2}{\tau_2}-1\big)\flat_1-\big(1+\frac{\kappa_2}{\tau_2}\big)\flat_2+\big(2-\frac{\kappa_2}{\tau_2}\big)\flat_3\Big)
$$

şeklinde olur.

Teorem 4.3.35 (α,α_2) Mannheim eğri çifti, T ile T_2 teğet vektörleri arasındaki açı θ olsun. α_2 eğrisinin binormaller göstergesine ait $B_2 T_{B_2}(B_2 \wedge T_{B_2})$- Smarandache eğrisinin geodezik eğriliğinin Mannheim eğrisine bağlı ifadesi

$$
\kappa_g^{\widetilde{\beta}_{\xi_4}} = \frac{1}{4\sqrt{2}\Big(1+\frac{\theta'}{\|W\|}+\left(\frac{\theta'}{\|W\|}\right)^2\Big)^{\frac{5}{2}}}\Big((2\frac{\theta'}{\|W\|}-1)\bar{\flat}_1-(1+\frac{\theta'}{\|W\|})\bar{\flat}_2+(2-\frac{\theta'}{\|W\|})\bar{\flat}_3\Big) \tag{4.3.161}
$$

denklemiyle verilir. Burada

$$
\begin{cases}
\bar{\flat}_1 = -2+4\left(\frac{\theta'}{\|W\|}\right)-\left(\frac{\theta'}{\|W\|}\right)^2+2\left(\frac{\theta'}{\|W\|}\right)^3+\left(\frac{\theta'}{\|W\|}\right)'\left(2\frac{\theta'}{\|W\|}-1\right) \\
\bar{\flat}_2 = -2+2\frac{\theta'}{\|W\|}-4\left(\frac{\theta'}{\|W\|}\right)^2+\left(\frac{\theta'}{\|W\|}\right)^3-2\left(\frac{\theta'}{\|W\|}\right)^4-\left(\frac{\theta'}{\|W\|}\right)'\left(1+\frac{\theta'}{\|W\|}\right) \\
\bar{\flat}_3 = 2\frac{\theta'}{\|W\|}-4\left(\frac{\theta'}{\|W\|}\right)^2+4\left(\frac{\theta'}{\|W\|}\right)^3-2\left(\frac{\theta'}{\|W\|}\right)^4+\left(\frac{\theta'}{\|W\|}\right)'\left(2-\frac{\theta'}{\|W\|}\right)
\end{cases} \tag{4.3.162}
$$

şeklinde birer katsayıdır.

İspat.

$$
\widetilde{\beta}_{\xi_4}(s) = \frac{1}{\sqrt{3}}(B_2+T_{B_2}+B_2\wedge T_{B_2})
$$

eşitliğinde sırasıyla (4.3.3), (3.4.4) ve (3.4.8) den karşılıkları yazılırsa $\widetilde{\beta}_{\xi_4}$ vektörünün Mannheim eğrisine bağlı ifadesi

$$
\widetilde{\beta}_{\xi_4}(s) = \frac{1}{\sqrt{3}}\Big((\cos\theta-\sin\theta)T+N-(\cos\theta+\sin\theta)B\Big) \tag{4.3.163}
$$

biçiminde olur. Bu ifadenin türevi alınırsa $T_{\widetilde{\beta}_{\xi_4}}(s)$ teğet vektörü

$$\begin{aligned}T_{\widetilde{\beta}_{\xi_4}}(s) &= \frac{\theta'\cos\theta+\left(\theta'-\|W\|\right)\sin\theta}{\sqrt{2(\|W\|^2-\|W\|\theta'+\theta'^2)}}T-\frac{\|W\|}{\sqrt{2(\|W\|^2-\|W\|\theta'+\theta'^2)}}N \\ &\quad -\frac{\theta'\sin\theta-(\theta'-\|W\|)\cos\theta}{\sqrt{2(\|W\|^2-\|W\|\theta'+\theta'^2)}}B\end{aligned} \tag{4.3.164}$$

şeklinde bulunur. Bu ifadenin türevi alınırsa katsayılar

$$\begin{cases}\bar{\flat}_1=-2+4\left(\frac{\theta'}{\|W\|}\right)-\left(\frac{\theta'}{\|W\|}\right)^2+2\left(\frac{\theta'}{\|W\|}\right)^3+\left(\frac{\theta'}{\|W\|}\right)'\left(2\frac{\theta'}{\|W\|}-1\right)\\ \bar{\flat}_2=-2+2\frac{\theta'}{\|W\|}-4\left(\frac{\theta'}{\|W\|}\right)^2+\left(\frac{\theta'}{\|W\|}\right)^3-2\left(\frac{\theta'}{\|W\|}\right)^4-\left(\frac{\theta'}{\|W\|}\right)'\left(1+\frac{\theta'}{\|W\|}\right)\\ \bar{\flat}_3=2\frac{\theta'}{\|W\|}-4\left(\frac{\theta'}{\|W\|}\right)^2+4\left(\frac{\theta'}{\|W\|}\right)^3-2\left(\frac{\theta'}{\|W\|}\right)^4+\left(\frac{\theta'}{\|W\|}\right)'\left(2-\frac{\theta'}{\|W\|}\right)\end{cases}$$

olmak üzere $T'_{\widetilde{\beta}_{\xi_4}}(s)$ türev vektörü

$$\begin{aligned}T'_{\widetilde{\beta}_{\xi_4}}(s) &= \frac{\|W\|^4\sqrt{3}(\bar{\flat}_3\cos\theta-\bar{\flat}_2\sin\theta)}{4(\|W\|^2-\|W\|\theta'+\theta'^2)^2}T+\frac{\|W\|^4\sqrt{3}\bar{\flat}_1}{4(\|W\|^2-\|W\|\theta'+\theta'^2)^2}N \\ &\quad -\frac{\|W\|^4\sqrt{3}(\bar{\flat}_2\cos\theta+\bar{\flat}_3\sin\theta)}{4(\|W\|^2-\|W\|\theta'+\theta'^2)^2}B\end{aligned}$$

biçiminde olur. (4.3.163) ve(4.3.164) ifadelerinden elde edilen $\widetilde{\beta}_{\xi_4}\wedge T_{\widetilde{\beta}_{\xi_4}}$ vektörü

$$\begin{aligned}\widetilde{\beta}_{\xi_4}\wedge T_{\widetilde{\beta}_{\xi_4}}(s) &= \frac{(2\|W\|-\theta')\cos\theta+(\|W\|+\theta')\sin\theta}{\sqrt{6\|W\|^2-6\|W\|\theta'+6\theta'^2}}T+\frac{2\theta'-\|W\|}{\sqrt{6\|W\|^2-6\|W\|\theta'+6\theta'^2}}N \\ &\quad +\frac{(\|W\|+\theta')\cos\theta-(2\|W\|-\theta')\sin\theta}{\sqrt{6\|W\|^2-6\|W\|\theta'+6\theta'^2}}B\end{aligned}$$

şeklinde yazılır. Geodezik eğrilik tanımından $\kappa_g^{\widetilde{\beta}_{\xi_4}}$ geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\widetilde{\beta}_{\xi_4}}=\frac{1}{4\sqrt{2}\left(1+\frac{\theta'}{\|W\|}+\left(\frac{\theta'}{\|W\|}\right)^2\right)^{\frac{5}{2}}}\left(\left(2\frac{\theta'}{\|W\|}-1\right)\bar{\flat}_1-\left(1+\frac{\theta'}{\|W\|}\right)\bar{\flat}_2+\left(2-\frac{\theta'}{\|W\|}\right)\bar{\flat}_3\right)$$

şeklinde elde edilir.

Teorem 4.3.36 (α,α_2) Mannheim eğri çifti ve binormal vektörü ile Darboux vektörü arasındaki açı φ olsun. α_2 eğrisinin binormaller göstergesine ait $B_2T_{B_2}(B_2\wedge T_{B_2})$- Smarandache eğrisinin geodezik eğriliğinin Mannheim eğrisine bağlı ifadesi

$$\kappa_g^{\widetilde{\beta}_{\xi_4}}=\frac{1}{4\sqrt{2}\left(1+\frac{\varphi'}{\|W\|}+\left(\frac{\varphi'}{\|W\|}\right)^2\right)^{\frac{5}{2}}}\left(\left(2\frac{\varphi'}{\|W\|}-1\right)\underline{\flat}_1-\left(1+\frac{\varphi'}{\|W\|}\right)\underline{\flat}_2+\left(2-\frac{\varphi'}{\|W\|}\right)\underline{\flat}_3\right) \tag{4.3.165}$$

denklemiyle verilir. Burada

$$\begin{cases} \flat_1 = -2+4\left(\frac{\varphi'}{\|W\|}\right)-\left(\frac{\varphi'}{\|W\|}\right)^2+2\left(\frac{\varphi'}{\|W\|}\right)^3+\left(\frac{\varphi'}{\|W\|}\right)'\left(2\frac{\varphi'}{\|W\|}-1\right) \\ \flat_2 = -2+2\frac{\varphi'}{\|W\|}-4\left(\frac{\varphi'}{\|W\|}\right)^2+\left(\frac{\varphi'}{\|W\|}\right)^3-2\left(\frac{\varphi'}{\|W\|}\right)^4-\left(\frac{\varphi'}{\|W\|}\right)'\left(1+\frac{\varphi'}{\|W\|}\right) \\ \flat_3 = 2\frac{\varphi'}{\|W\|}-4\left(\frac{\varphi'}{\|W\|}\right)^2+4\left(\frac{\varphi'}{\|W\|}\right)^3-2\left(\frac{\varphi'}{\|W\|}\right)^4+\left(\frac{\varphi'}{\|W\|}\right)'\left(2-\frac{\varphi'}{\|W\|}\right) \end{cases} \tag{4.3.166}$$

şeklinde birer katsayıdır.

İspat.

$$\widetilde{\beta}_{\xi_4}(s) = \frac{1}{\sqrt{3}}(B_2+T_{B_2}+B_2\wedge T_{B_2})$$

eşitliğinde sırasıyla (4.3.3), (3.4.4) ve (3.4.8) den karşılıkları yazılırsa $\widetilde{\beta}_{\xi_4}$ vektörünün Mannheim eğrisine bağlı ifadesi

$$\widetilde{\beta}_{\xi_4}(s) = \frac{1}{\sqrt{3}}\big((\sin\varphi+\cos\varphi)T+N+(\cos\varphi-\sin\varphi)B\big) \tag{4.3.167}$$

biçiminde olur. Bu ifadenin türevi alınırsa $T_{\widetilde{\beta}_{\xi_4}}(s)$ teğet vektörü

$$\begin{aligned} T_{\widetilde{\beta}_{\xi_4}}(s) &= \frac{\varphi'\sin\varphi-\big(\varphi'-\|W\|\big)\cos\varphi}{\sqrt{2(\|W\|^2-\|W\|\varphi'+\varphi'^2)}}T-\frac{\|W\|}{\sqrt{2(\|W\|^2-\|W\|\varphi'+\varphi'^2)}}N \\ &\quad+\frac{\varphi'\cos\varphi+(\varphi'-\|W\|)\sin\varphi}{\sqrt{2(\|W\|^2-\|W\|\varphi'+\varphi'^2)}}B \end{aligned} \tag{4.3.168}$$

şeklinde bulunur. Bu ifadenin türevi alınırsa katsayılar

$$\begin{cases} \flat_1 = -2+4\left(\frac{\varphi'}{\|W\|}\right)-\left(\frac{\varphi'}{\|W\|}\right)^2+2\left(\frac{\varphi'}{\|W\|}\right)^3+\left(\frac{\varphi'}{\|W\|}\right)'\left(2\frac{\varphi'}{\|W\|}-1\right) \\ \flat_2 = -2+2\frac{\varphi'}{\|W\|}-4\left(\frac{\varphi'}{\|W\|}\right)^2+\left(\frac{\varphi'}{\|W\|}\right)^3-2\left(\frac{\varphi'}{\|W\|}\right)^4-\left(\frac{\varphi'}{\|W\|}\right)'\left(1+\frac{\varphi'}{\|W\|}\right) \\ \flat_3 = 2\frac{\varphi'}{\|W\|}-4\left(\frac{\varphi'}{\|W\|}\right)^2+4\left(\frac{\varphi'}{\|W\|}\right)^3-2\left(\frac{\varphi'}{\|W\|}\right)^4+\left(\frac{\varphi'}{\|W\|}\right)'\left(2-\frac{\varphi'}{\|W\|}\right) \end{cases}$$

olmak üzere $T'_{\widetilde{\beta}_{\xi_4}}(s)$ türev vektörü

$$\begin{aligned} T'_{\widetilde{\beta}_{\xi_4}}(s) &= \frac{\|W\|^4\sqrt{3}(\flat_3\sin\varphi+\flat_2\cos\varphi)}{4(\|W\|^2-\|W\|\varphi'+\varphi'^2)^2}T+\frac{\|W\|^4\sqrt{3}\flat_1}{4(\|W\|^2-\|W\|\varphi'+\varphi'^2)^2}N \\ &\quad+\frac{\|W\|^4\sqrt{3}(\flat_3\cos\varphi-\flat_2\sin\varphi)}{4(\|W\|^2-\|W\|\varphi'+\varphi'^2)^2}B \end{aligned}$$

biçiminde bulunur. (4.3.167) ve (4.3.168) ifadelerinden elde edilen $\widetilde{\beta}_{\xi_4} \wedge T_{\widetilde{\beta}_{\xi_4}}$ vektörü

$$\widetilde{\beta}_{\xi_4} \wedge T_{\widetilde{\beta}_{\xi_4}}(s) = \frac{(2\|W\| - \varphi')\sin\varphi - (\|W\| + \varphi')\cos\varphi}{\sqrt{6\|W\|^2 - 6\|W\|\varphi' + 6\varphi'^2}} T + \frac{2\varphi' - \|W\|}{\sqrt{6\|W\|^2 - 6\|W\|\varphi' + 6\varphi'^2}} N + \frac{(\|W\| + \varphi')\sin\varphi + (2\|W\| - \varphi')\cos\varphi}{\sqrt{6\|W\|^2 - 6\|W\|\varphi' + 6\varphi'^2}} B$$

şeklinde yazılır. Geodezik eğrilik tanımından $\kappa_g^{\widetilde{\beta}_{\xi_4}}$ geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\widetilde{\beta}_{\xi_4}} = \frac{1}{4\sqrt{2}\left(1 + \frac{\theta'}{\|W\|} + \left(\frac{\theta'}{\|W\|}\right)^2\right)^{\frac{5}{2}}} \left(\left(2\frac{\theta'}{\|W\|} - 1\right)\flat_1 - \left(1 + \frac{\theta'}{\|W\|}\right)\flat_2 + \left(2 - \frac{\theta'}{\|W\|}\right)\flat_3 \right)$$

biçiminde olur.

Tanım 4.3.13 $\alpha_2 : I \to S^2$ Mannheim partner eğrisinin birim Darboux vektörünün çizdiği küresel eğriye ait Sabban çatısı $\{C_2, T_{C_2}, C_2 \wedge T_{C_2}\}$ olsun.

$$\widetilde{\beta}_{\mu_1}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(C_2 + T_{C_2}) \tag{4.3.169}$$

şeklinde tanımlı vektörün çizdiği regüler eğriye $C_2 T_{C_2}$-Smarandache eğrisi denir.

Teorem 4.3.37 $C_2 T_{C_2}$-Smarandache eğrisinin geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\widetilde{\beta}_{\mu_1}} = \frac{1}{\left(2 + \left(\frac{\|W_2\|}{\varphi_2'}\right)^2\right)^{\frac{5}{2}}} \left(\frac{\|W_2\|}{\varphi_2'} \aleph_1 - \frac{\|W_2\|}{\varphi_2'} \aleph_2 + 2\aleph_3 \right) \tag{4.3.170}$$

denklemiyle verilir. Burada

$$\begin{cases} \aleph_1 = -2 - \left(\frac{\|W_2\|}{\varphi_2'}\right)^2 + \left(\frac{\|W_2\|}{\varphi_2'}\right)'\left(\frac{\|W_2\|}{\varphi_2'}\right) \\ \aleph_2 = -2 - 3\left(\frac{\|W_2\|}{\varphi_2'}\right)^2 - \left(\frac{\|W_2\|}{\varphi_2'}\right)^4 - \left(\frac{\|W_2\|}{\varphi_2'}\right)'\left(\frac{\|W_2\|}{\varphi_2'}\right) \\ \aleph_3 = 2\left(\frac{\|W_2\|}{\varphi_2'}\right) + \left(\frac{\|W_2\|}{\varphi_2'}\right)^3 + \left(\frac{\|W_2\|}{\varphi_2'}\right)' \end{cases} \tag{4.3.171}$$

şeklinde birer katsayıdır.

İspat.

$$\widetilde{\beta}_{\mu_1}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(C_2 + T_{C_2})$$

eğrisinin $s_{\widetilde{\beta}_{\mu_1}}$ yay parametresine göre türevi alınırsa

$$T_{\widetilde{\beta}_{\mu_1}} \frac{ds_{\widetilde{\beta}_{\mu_1}}}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-C_2 + T_{C_2} + \frac{\|W_2\|}{\varphi_2'} C_2 \wedge T_{C_2}\right)$$

olur. Bu eşitliğin normu alınırsa $\frac{ds_{\widetilde{\beta}_{\mu_1}}}{ds}$ ifadesi,

$$\frac{ds_{\widetilde{\beta}_{\mu_1}}}{ds}=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2+\Big(\frac{\|W_2\|}{\varphi_2{}'}\Big)^2}$$

bulunur. Bulunan bu ifade yukarıda yerine yazılırsa $T_{\widetilde{\beta}_{\mu_1}}(s)$ teğet vektörü

$$T_{\widetilde{\beta}_{\mu_1}}(s)=\frac{1}{\sqrt{2+(\frac{\|W_2\|}{\varphi_2{}'})^2}}(-C_2+T_{C_2}+\frac{\|W_2\|}{\varphi_2{}'}C_2\wedge T_{C_2}) \tag{4.3.172}$$

biçiminde elde edilir. Tekrar türev alınırsa katsayılar,

$$\begin{cases}\aleph_1=-2-(\frac{\|W_2\|}{\varphi_2{}'})^2+(\frac{\|W_2\|}{\varphi_2{}'})'(\frac{\|W_2\|}{\varphi_2{}'})\\ \aleph_2=-2-3(\frac{\|W_2\|}{\varphi_2{}'})^2-(\frac{\|W_2\|}{\varphi_2{}'})^4-(\frac{\|W_2\|}{\varphi_2{}'})'(\frac{\|W_2\|}{\varphi_2{}'})\\ \aleph_3=2(\frac{\|W_2\|}{\varphi_2{}'})+(\frac{\|W_2\|}{\varphi_2{}'})^3+(\frac{\|W_2\|}{\varphi_2{}'})'\end{cases}$$

olmak üzere $T'_{\widetilde{\beta}_{\mu_1}}(s)$ türev vektörü

$$T'_{\widetilde{\beta}_{\mu_1}}(s)=\frac{\sqrt{2}}{\Big(2+(\frac{\|W_2\|}{\varphi_2{}'})^2\Big)^2}(\aleph_1C_2+\aleph_2T_{C_2}+\aleph_3C_2\wedge T_{C_2}) \tag{4.3.173}$$

biçiminde olur. (4.3.169) ve (4.3.172) ifadelerinden elde edilen $\widetilde{\beta}_{\mu_1}\wedge T_{\widetilde{\beta}_{\mu_1}}$ vektörü

$$\widetilde{\beta}_{\mu_1}\wedge T_{\widetilde{\beta}_{\mu_1}}=\frac{1}{\sqrt{4+2(\frac{\|W_2\|}{\varphi_2{}'})^2}}(\frac{\|W_2\|}{\varphi_2{}'}C_2-\frac{\|W_2\|}{\varphi_2{}'}T_{C_2}+2C_2\wedge T_{C_2}) \tag{4.3.174}$$

biçiminde yazılır. (4.3.169), (4.3.172), (4.3.173) ve (4.3.174) vektörlerinde (4.3.4) den karşılıkları yazılırsa $\widetilde{\beta}_{\mu_1}$-Smarandache eğrisine ait Sabban çatısının ve $T'_{\widetilde{\beta}_{\mu_1}}$ vektörünün Mannheim partner eğrisine bağlı ifadesi,

$$\begin{aligned}\widetilde{\beta}_{\mu_1}(s)&=\frac{1}{\sqrt{2}}\Big((\sin\varphi_2+\cos\varphi_2)T_2+(\cos\varphi_2-\sin\varphi_2)B_2\Big),\\ T_{\widetilde{\beta}_{\mu_1}}(s)&=\frac{\varphi_2{}'(\cos\varphi_2-\sin\varphi_2)}{\sqrt{2\varphi_2{}'^2+\|W_2\|^2}}T_2+\frac{\|W_2\|}{\sqrt{2\varphi_2{}'^2+\|W_2\|^2}}N_2-\frac{\varphi_2{}'(\cos\varphi_2+\sin\varphi_2)}{\sqrt{2\varphi_2{}'^2+\|W_2\|^2}}B_2,\\ \widetilde{\beta}_{\mu_1}\wedge T_{\widetilde{\beta}_{\mu_1}}(s)&=\frac{\|W_2\|(\cos\varphi_2+\sin\varphi_2)}{\sqrt{2\|W_2\|^2+4(\varphi_2{}')^2}}T_2-\frac{\varphi_2{}'}{\sqrt{2\|W_2\|^2+4(\varphi_2{}')^2}}N_2\\ &\quad+\frac{\|W_2\|(\cos\varphi_2+\sin\varphi_2)}{\sqrt{2\|W_2\|^2+4(\varphi_2{}')^2}}B_2,\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
T'_{\widetilde{\beta}_{\mu_1}}(s) &= \frac{({\varphi_2}')^4\sqrt{2}(\aleph_1\sin\varphi_2+\aleph_2\cos\varphi_2)}{\left(\|W_2\|^2+({\varphi_2}')^2\right)^2}T_2+\frac{\aleph_3({\varphi_2}')^4\sqrt{2}}{\left(\|W_2\|^2+({\varphi_2}')^2\right)^2}N_2 \\
&\quad+\frac{({\varphi_2}')^4\sqrt{2}(\aleph_1\cos\varphi_2-\aleph_2\sin\varphi_2)}{\left(\|W_2\|^2+({\varphi_2}')^2\right)^2}B_2
\end{aligned}
$$

denklemlerine dönüşür. Geodezik eğrilik tanımından $\kappa_g^{\widetilde{\beta}_{\mu_1}}$ geodezik eğriliği

$$
\kappa_g^{\widetilde{\beta}_{\mu_1}} = \frac{1}{\left(2+\left(\frac{\|W_2\|}{{\varphi_2}'}\right)^2\right)^{\frac{5}{2}}}\left(\frac{\|W_2\|}{{\varphi_2}'}\aleph_1-\frac{\|W_2\|}{{\varphi_2}'}\aleph_2+2\aleph_3\right)
$$

biçiminde olur.

Teorem 4.3.38 (α,α_2) Mannheim eğri çifti, T ile T_2 teğet vektörleri arasındaki açı θ olsun. α_2 eğrisinin birim Darboux vektörünün çizdiği küresel eğriye ait $C_2T_{C_2}$- Smarandache eğrisinin geodezik eğriliğinin Mannheim eğrisine bağlı ifadesi

$$
\kappa_g^{\widetilde{\beta}_{\mu_1}} = \frac{1}{\left(2+\frac{1}{F^2}\right)^{\frac{5}{2}}}\left(\frac{1}{F}\overline{\aleph}_1-\frac{1}{F}\overline{\aleph}_2+2\overline{\aleph}_3\right) \tag{4.3.175}
$$

denklemiyle verilir.

$$
\begin{cases}
\overline{\aleph}_1 = -2-\frac{1}{F^2}+\frac{1}{F'}\frac{1}{F} \\[2ex]
\overline{\aleph}_2 = -2-3\frac{1}{F^2}-\frac{1}{F^4}-\frac{1}{F'}\frac{1}{F} \\[2ex]
\overline{\aleph}_3 = 2\frac{1}{F}+\frac{1}{F^3}+2\frac{1}{F'}
\end{cases}
$$

şeklinde birer katsayıdır.

İspat.

$$
\widetilde{\beta}_{\mu_1}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(C_2+T_{C_2})
$$

eşitliğinde sırasıyla (4.3.4), (3.4.4) ve (3.4.8) den karşılıkları yazılırsa $\widetilde{\beta}_{\mu_1}$ vektörünün Mannheim eğrisine bağlı ifadesi

$$
\widetilde{\beta}_{\mu_1}(s) = \frac{(\theta'+\|W\|)\cos\theta}{\sqrt{2\theta'^2+2\|W\|^2}}T-\frac{\theta'-\|W\|}{\sqrt{2\theta'^2+2\|W\|^2}}N-\frac{(\theta'+\|W\|)\sin\theta}{\sqrt{2\theta'^2+2\|W\|^2}}B \tag{4.3.176}
$$

biçiminde olur. Bu ifadenin türevi alınırsa $T_{\widetilde{\beta}_{\mu_1}}(s)$ teğet vektörü

$$
F = \left(\frac{\|W\|}{\sqrt{\theta'^2+\|W\|^2}}\right)'\frac{\lambda\tau}{\theta'}\sec\theta
$$

olmak üzere

$$T_{\widetilde{\beta}_{\mu_1}}(s) = \frac{(\theta'-\|W\|)F\cos\theta-\sqrt{\|W\|^2+\theta'^2}\cos\theta}{\sqrt{\|W\|^2+\theta'^2}\sqrt{1+2F^2}}T+\frac{F(\theta'+\|W\|)}{\sqrt{\|W\|^2+\theta'^2}\sqrt{1+2F^2}}N \tag{4.3.177}$$

$$+\frac{(\|W\|-\theta')F\sin\theta+\sqrt{\|W\|^2+\theta'^2}\cos\theta}{\sqrt{\|W\|^2+\theta'^2}\sqrt{1+2F^2}}B$$

şeklinde bulunur. Tekrar türev alınırsa katsayılar

$$\begin{cases} \overline{\aleph}_1 = -2-\frac{1}{F^2}+\frac{1}{F'}\frac{1}{F} \\ \overline{\aleph}_2 = -2-3\frac{1}{F^2}-\frac{1}{F^4}-\frac{1}{F'}\frac{1}{F} \\ \overline{\aleph}_3 = 2\frac{1}{F}+\frac{1}{F^3}+2\frac{1}{F'} \end{cases}$$

olmak üzere $T'_{\widetilde{\beta}_{\mu_1}}(s)$ türev vektörü

$$T'_{\widetilde{\beta}_{\mu_1}}(s) = \frac{(\overline{\aleph}_1\|W\|+\overline{\aleph}_2\theta')F^4\sqrt{2}\cos\theta-\overline{\aleph}_3F^4\sqrt{2\|W\|^2+2\theta'^2}\sin\theta}{(1+2F^2)^2\sqrt{\|W\|^2+\theta'^2}}T$$

$$+\frac{(\overline{\aleph}_1\theta'-\overline{\aleph}_2\|W\|)F^4\sqrt{2}}{(1+2F^2)^2\sqrt{\|W\|^2+\theta'^2}}N$$

$$+\frac{(\overline{\aleph}_2\theta'-\overline{\aleph}_1\|W\|)F^4\sqrt{2}\sin\theta+\overline{\aleph}_3F^4\sqrt{2\|W\|^2+2\theta'^2}\cos\theta}{(1+2F^2)^2\sqrt{\|W\|^2+\theta'^2}}B$$

biçiminde olur. (4.3.176) ve (4.3.177) ifadelerinden elde edilen $\widetilde{\beta}_{\mu_1}\wedge T_{\widetilde{\beta}_{\mu_1}}$ vektörü

$$\widetilde{\beta}_{\mu_1}\wedge T_{\widetilde{\beta}_{\mu_1}}(s) = \frac{(\|W\|-\theta')\cos\theta+2F\sqrt{\|W\|^2+\theta'^2}\sin\theta}{\sqrt{2+4F^2}\sqrt{\|W\|^2+\theta'^2}}T$$

$$+\frac{\theta'+F\|W\|}{\sqrt{2+4F^2}\sqrt{\|W\|^2+\theta'^2}}N$$

$$-\frac{(\|W\|+\theta')\sin\theta-2F\sqrt{\|W\|^2+\theta'^2}\cos\theta}{\sqrt{2+4F^2}\sqrt{\|W\|^2+\theta'^2}}B$$

şeklinde yazılır. Geodezik eğrilik tanımından $\kappa_g^{\widetilde{\beta}_{\mu_1}}$ geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\widetilde{\beta}_{\mu_1}} = \frac{1}{\left(2+\frac{1}{F^2}\right)^{\frac{5}{2}}}\left(\frac{1}{F}\overline{\aleph}_1-\frac{1}{F}\overline{\aleph}_2+2\overline{\aleph}_3\right)$$

biçiminde elde edilir.

Teorem 4.3.39 (α, α_2) Mannheim eğri çifti ve binormal vektörü ile Darboux vektörü arasındaki açı φ olsun. α_2 eğrisinin birim Darboux vektörünün çizdiği küresel eğriye ait $C_2T_{C_2}$- Smarandache eğrisinin geodezik eğriliğinin Mannheim eğrisine bağlı ifadesi

$$\kappa_g^{\widetilde{\beta}_{\mu_1}} = \frac{1}{\left(2+\frac{1}{(\overline{F})^2}\right)^{\frac{5}{2}}}\left(\frac{1}{\overline{F}}\underline{\aleph}_1 - \frac{1}{\overline{F}}\underline{\aleph}_2 + 2\underline{\aleph}_3\right) \tag{4.3.178}$$

denklemiyle verilir. Burada

$$\begin{cases} \underline{\aleph}_1 = -2 - \frac{1}{(\overline{F})^2} + \frac{1}{\overline{F}'}\frac{1}{\overline{F}} \\ \\ \underline{\aleph}_2 = -2 - 3\frac{1}{(\overline{F})^2} - \frac{1}{\overline{F}^4} - \frac{1}{\overline{F}'}\frac{1}{\overline{F}} \\ \\ \underline{\aleph}_3 = 2\frac{1}{\overline{F}} + \frac{1}{\overline{F}^3} + 2\frac{1}{\overline{F}'} \end{cases} \tag{4.3.179}$$

şeklinde birer katsayıdır.

İspat.

$$\widetilde{\beta}_{\mu_1}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(C_2 + T_{C_2})$$

eşitliğinde sırasıyla (4.3.4) ve (3.4.10) dan karşılıkları yazılırsa $\widetilde{\beta}_{\mu_1}$ vektörünün Mannheim eğrisine bağlı ifadesi

$$\widetilde{\beta}_{\mu_1}(s) = \frac{(\varphi' + \|W\|)\sin\varphi}{\sqrt{2\varphi'^2 + 2\|W\|^2}}T - \frac{\varphi' - \|W\|}{\sqrt{2\varphi'^2 + 2\|W\|^2}}N + \frac{(\varphi' + \|W\|)\cos\varphi}{\sqrt{2\varphi'^2 + 2\|W\|^2}}B \tag{4.3.180}$$

biçiminde olur. Bu ifadenin türevi alınırsa $T_{\widetilde{\beta}_{\mu_1}}(s)$ teğet vektörü

$$\overline{F} = \left(\frac{\|W\|}{\sqrt{\varphi'^2 + \|W\|^2}}\right)'\frac{\lambda\tau}{\varphi'}\csc\varphi$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} T_{\widetilde{\beta}_{\mu_1}}(s) \quad = \quad & \frac{(\varphi' - \|W\|)\overline{F}\sin\varphi - \sqrt{\|W\|^2 + \varphi'^2}\cos\varphi}{\sqrt{\|W\|^2 + \varphi'^2}\sqrt{1 + 2(\overline{F})^2}}T - \frac{\overline{F}(\varphi' + \|W\|)}{\sqrt{\|W\|^2 + \varphi'^2}\sqrt{1 + 2(\overline{F})^2}}N \\ & + \frac{\sqrt{\|W\|^2 + \varphi'^2}\sin\varphi - (\|W\| - \varphi')\overline{F}\cos\varphi}{\sqrt{\|W\|^2 + \varphi'^2}\sqrt{1 + 2(\overline{F})^2}}B \end{aligned} \tag{4.3.181}$$

şeklinde bulunur. Tekrar türev alınırsa katsayılar

$$\begin{cases} \underline{\aleph}_1 = -2 - \frac{1}{(\overline{F})^2} + \frac{1}{\overline{F}'}\frac{1}{\overline{F}} \\ \underline{\aleph}_2 = -2 - 3\frac{1}{(\overline{F})^2} - \frac{1}{\overline{F}^4} - \frac{1}{\overline{F}'}\frac{1}{\overline{F}} \\ \underline{\aleph}_3 = 2\frac{1}{\overline{F}} + \frac{1}{\overline{F}^3} + 2\frac{1}{\overline{F}'} \end{cases}$$

olmak üzere $T'_{\widetilde{\beta}_{\mu_1}}(s)$ türev vektörü

$$\begin{aligned}T'_{\widetilde{\beta}_{\mu_1}}(s) &= \frac{(\underline{\aleph}_1\|W\|+\underline{\aleph}_2\varphi')\overline{F}^4\sqrt{2}\sin\varphi-\underline{\aleph}_3\overline{F}^4\sqrt{2\|W\|^2+2\varphi'^2}\cos\varphi}{(1+2(\overline{F})^2)^2\sqrt{\|W\|^2+\varphi'^2}}T\\ &+\frac{(\underline{\aleph}_1\varphi'-\underline{\aleph}_2\|W\|)\overline{F}^4\sqrt{2}}{(1+2(\overline{F})^2)^2\sqrt{\|W\|^2+\varphi'^2}}N\\ &+\frac{(\underline{\aleph}_1\|W\|-\underline{\aleph}_2\varphi')\overline{F}^4\sqrt{2}\cos\varphi+\underline{\aleph}_3\overline{F}^4\sqrt{2\|W\|^2+2\varphi'^2}\sin\varphi}{(1+2(\overline{F})^2)^2\sqrt{\|W\|^2+\varphi'^2}}B\end{aligned}$$

biçiminde olur. (4.3.180) ve (4.3.181) ifadelerinden elde edilen $\widetilde{\beta}_{\mu_1}\wedge T_{\widetilde{\beta}_{\mu_1}}$ vektörü

$$\begin{aligned}\widetilde{\beta}_{\mu_1}\wedge T_{\widetilde{\beta}_{\mu_1}}(s) &= \frac{(\|W\|-\varphi')\sin\varphi-2\overline{F}\sqrt{\|W\|^2+\varphi'^2}\cos\varphi}{\sqrt{2+4(\overline{F})^2}\sqrt{\|W\|^2+\varphi'^2}}T\\ &+\frac{\varphi'+\overline{F}\|W\|}{\sqrt{2+4(\overline{F})^2}\sqrt{\|W\|^2+\varphi'^2}}N\\ &+\frac{(\|W\|+\varphi')\cos\varphi+2\overline{F}\sqrt{\|W\|^2+\varphi'^2}\sin\varphi}{\sqrt{2+4(\overline{F})^2}\sqrt{\|W\|^2+\varphi'^2}}B\end{aligned}$$

şeklinde yazılır. Geodezik eğrilik tanımından $\kappa_g^{\widetilde{\beta}_{\mu_1}}$ geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\widetilde{\beta}_{\mu_1}}=\frac{1}{\left(2+\frac{1}{(\overline{F})^2}\right)^{\frac{5}{2}}}\left(\frac{1}{\overline{F}}\underline{\aleph}_1-\frac{1}{\overline{F}}\underline{\aleph}_2+2\underline{\aleph}_3\right)$$

biçiminde elde edilir.

Tanım 4.3.14 $\alpha_2 : I\to S^2$ Mannheim partner eğrisinin birim Darboux vektörünün çizdiği küresel eğriye ait Sabban çatısı $\{C_2, T_{C_2}, C_2\wedge T_{C_2}\}$ olsun.

$$\widetilde{\beta}_{\mu_2}(s)=\frac{1}{\sqrt{2}}(C_2+C_2\wedge T_{C_2}) \tag{4.3.182}$$

şeklinde tanımlı vektörün çizdiği regüler eğriye $C_2(C_2\wedge T_{C_2})$-Smarandache eğrisi denir, (Şenyurt ve ark., 2016b).

Teorem 4.3.40 $C_2(C_2\wedge T_{C_2})$-Smarandache eğrisinin geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\widetilde{\beta}_{\mu_2}}=\frac{\|W_2\|+\varphi_2'}{\varphi_2'-\|W_2\|} \tag{4.3.183}$$

denklemleriyle verilir.

İspat.

$$\widetilde{\beta}_{\mu_2}(s)=\frac{1}{\sqrt{2}}(C_2+C_2\wedge T_{C_2})$$

eğrisinin $s_{\widetilde{\beta}_{\mu_2}}$ yay parametresine göre türevi alınırsa

$$T_{\widetilde{\beta}_{\mu_2}}\frac{ds_{\widetilde{\beta}_{\mu_2}}}{ds}=\frac{1}{\sqrt{2}}\big(1-\frac{\|W_2\|}{\varphi_2{}'}\big)T_{C_2}$$

biçiminde olur. Bu eşitliğin normu alınırsa $\frac{ds_{\widetilde{\beta}_{\mu_2}}}{ds}$ ifadesi,

$$\frac{ds_{\widetilde{\beta}_{\mu_2}}}{ds}=\frac{1}{\sqrt{2}}\big(1-\frac{\|W_2\|}{\varphi_2{}'}\big)$$

bulunur. Bulunan bu ifade yukarıda yerine yazılırsa $T_{\widetilde{\beta}_{\mu_2}}(s)$ teğet vektörü

$$T_{\widetilde{\beta}_{\mu_2}}(s)=T_{C_2} \tag{4.3.184}$$

şeklinde elde edilir. Tekrar türev alınırsa $T'_{\widetilde{\beta}_{\mu_2}}(s)$ türev vektörü

$$T'_{\widetilde{\beta}_{\mu_2}}(s)=\frac{\sqrt{2}}{(1-\frac{\|W_2\|}{\varphi_2{}'})}\big(-C_2+\frac{\|W_2\|}{\varphi_2{}'}C_2\wedge T_{C_2}\big) \tag{4.3.185}$$

biçiminde olur. (4.3.182) ve (4.3.184) ifadelerinden elde edilen $\widetilde{\beta}_{\mu_2}\wedge T_{\widetilde{\beta}_{\mu_2}}$ vektörü

$$\widetilde{\beta}_{\mu_2}\wedge T_{\widetilde{\beta}_{\mu_2}}(s)=\frac{1}{\sqrt{2}}(-C_2+C_2\wedge T_{C_2}) \tag{4.3.186}$$

şeklinde yazılır. (4.3.182), (4.3.184), (4.3.185) ve (4.3.186) vektörlerinde (4.3.4) den karşılıkları yazılırsa $\widetilde{\beta}_{\mu_2}$-Smarandache eğrisine ait Sabban çatısının ve $T'_{\widetilde{\beta}_{\mu_2}}$ vektörünün Mannheim partner eğrisine bağlı ifadesi,

$$\begin{aligned}
\widetilde{\beta}_{\mu_2}(s) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin\varphi_2 T_2+N_2+\cos\varphi_2 B_2),\\
T_{\widetilde{\beta}_{\mu_2}}(s) &= \cos\varphi_2 T_2-\sin\varphi_2 B_2,\\
\widetilde{\beta}_{\mu_2}\wedge T_{\widetilde{\beta}_{\mu_2}}(s) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(-\sin\varphi_2 T_2+N_2-\cos\varphi_2 B_2),\\
T'_{\widetilde{\beta}_{\mu_2}}(s) &= \frac{-\varphi_2{}'\sin\varphi_2\sqrt{2}}{\varphi_2{}'-\|W_2\|}T_2+\frac{\|W_2\|\sqrt{2}}{\varphi_2{}'-\|W_2\|}N_2-\frac{\varphi_2{}'\sqrt{2}\cos\varphi_2}{\varphi_2{}'-\|W_2\|}B_2
\end{aligned}$$

denklemlerine dönüşür. Geodezik eğrilik tanımından $\kappa_g^{\widetilde{\beta}_{\mu_2}}$ geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\widetilde{\beta}_{\mu_2}}=\frac{\|W_2\|+\varphi_2{}'}{\varphi_2{}'-\|W_2\|}$$

biçiminde elde edilir.

Teorem 4.3.41 (α, α_2) Mannheim eğri çifti, T ile T_2 teğet vektörleri arasındaki açı θ olsun. α_2 eğrisinin birim Darboux vektörünün çizdiği küresel eğriye ait $C_2(C_2 \wedge T_{C_2})$- Smarandache eğrisinin geodezik eğriliğinin Mannheim eğrisine bağlı ifadesi

$$\kappa_g^{\widetilde{\beta}_{\mu_2}} = \frac{1+F}{1-F} \tag{4.3.187}$$

denklemiyle verilir.

İspat.

$$\widetilde{\beta}_{\mu_2}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(C_2 + C_2 \wedge T_{C_2})$$

eşitliğinde sırasıyla (4.3.4), (3.4.4) ve (3.4.8) den karşılıkları yazılırsa $\widetilde{\beta}_{\mu_2}$ vektörünün Mannheim eğrisine bağlı ifadesi

$$\begin{aligned} \widetilde{\beta}_{\mu_2}(s) \quad = \quad & \frac{\|W\|\cos\theta + \sqrt{\theta'^2 + \|W\|^2}\sin\theta}{\sqrt{2\theta'^2 + 2\|W\|^2}} T + \frac{\theta'}{\sqrt{2\theta'^2 + 2\|W\|^2}} N \\ & + \frac{\sqrt{\theta'^2 + \|W\|^2}\cos\theta - \|W\|\sin\theta}{\sqrt{2\theta'^2 + 2\|W\|^2}} B \end{aligned} \tag{4.3.188}$$

biçiminde olur. Bu ifadenin türevi alınırsa $T_{\widetilde{\beta}_{\mu_2}}(s)$ teğet vektörü

$$T_{\widetilde{\beta}_{\mu_2}}(s) = \frac{\theta'\cos\theta}{\sqrt{\|W\|^2 + \theta'^2}} T - \frac{\|W\|}{\sqrt{\|W\|^2 + \theta'^2}} N - \frac{\theta'\sin\theta}{\sqrt{\|W\|^2 + \theta'^2}} B \tag{4.3.189}$$

şeklinde bulunur. Bu ifadenin tekrar türevi alınırsa

$$F = \left(\frac{\|W\|}{\sqrt{\theta'^2 + \|W\|^2}}\right)' \frac{\lambda\tau}{\theta'} \sec\theta$$

olmak üzere $T'_{\widetilde{\beta}_{\mu_2}}(s)$ türev vektörü

$$\begin{aligned} T'_{\widetilde{\beta}_{\mu_2}}(s) \quad = \quad & \frac{\sqrt{2\|W\|^2 + 2\theta'^2}\sin\theta - F\sqrt{2}\|W\|\cos\theta}{(F-1)\sqrt{\|W\|^2 + \theta'^2}} T + \frac{F\sqrt{2}\theta'}{(F-1)\sqrt{\|W\|^2 + \theta'^2}} N \\ & + \frac{F\sqrt{2}\|W\|\sin\theta + \sqrt{2\|W\|^2 + 2\theta'^2}\cos\theta}{(F-1)\sqrt{\|W\|^2 + \theta'^2}} B \end{aligned}$$

biçiminde bulunur. (4.3.188) ve (4.3.189) ifadelerinden elde edilen $\widetilde{\beta}_{\mu_2} \wedge T_{\widetilde{\beta}_{\mu_2}}$ vektörü

$$\widetilde{\beta}_{\mu_2} \wedge T_{\widetilde{\beta}_{\mu_2}}(s) = \frac{\sqrt{\|W\|^2+\theta'^2}\sin\theta - \|W\|\cos\theta}{\sqrt{2\|W\|^2+2\theta'^2}}T - \frac{\theta'}{\sqrt{2\|W\|^2+2\theta'^2}}N + \frac{\|W\|\sin\theta + \sqrt{\|W\|^2+\theta'^2}\cos\theta}{\sqrt{2\|W\|^2+2\theta'^2}}B$$

şeklinde yazılır. Geodezik eğrilik tanımından $\kappa_g^{\widetilde{\beta}_{\mu_2}}$ geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\widetilde{\beta}_{\mu_2}} = \frac{1+F}{1-F}$$

biçiminde elde edilir.

Teorem 4.3.42 (α,α_2) Mannheim eğri çifti ve binormal vektörü ile Darboux vektörü arasındaki açı φ olsun. α_2 eğrisinin birim Darboux vektörünün çizdiği küresel eğriye ait $C_2(C_2 \wedge T_{C_2})$- Smarandache eğrisinin geodezik eğriliğinin Mannheim eğrisine bağlı ifadesi

$$\kappa_g^{\widetilde{\beta}_{\mu_2}} = \frac{1+\overline{F}}{1-\overline{F}} \tag{4.3.190}$$

denklemiyle verilir.

İspat.

$$\widetilde{\beta}_{\mu_2}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(C_2 + C_2 \wedge T_{C_2})$$

eşitliğinde sırasıyla (4.3.4) ve (3.4.10) dan karşılıkları yazılırsa $\widetilde{\beta}_{\mu_2}$ vektörünün Mannheim eğrisine göre bağlı ifadesi

$$\widetilde{\beta}_{\mu_2}(s) = \frac{\|W\|\sin\varphi - \sqrt{\varphi'^2+\|W\|^2}\cos\varphi}{\sqrt{2\varphi'^2+2\|W\|^2}}T + \frac{\varphi'}{\sqrt{2\varphi'^2+2\|W\|^2}}N + \frac{\sqrt{\varphi'^2+\|W\|^2}\sin\varphi + \|W\|\cos\varphi}{\sqrt{2\varphi'^2+2\|W\|^2}}B \tag{4.3.191}$$

biçiminde olur. Bu ifadenin türevi alınırsa $T_{\widetilde{\beta}_{\mu_2}}(s)$ teğet vektörü

$$T_{\widetilde{\beta}_{\mu_2}}(s) = \frac{\varphi'\sin\varphi}{\sqrt{\|W\|^2+\varphi'^2}}T - \frac{\|W\|}{\sqrt{\|W\|^2+\varphi'^2}}N + \frac{\varphi'\cos\varphi}{\sqrt{\|W\|^2+\varphi'^2}}B \tag{4.3.192}$$

şeklinde bulunur. Tekrar türevi alınırsa

$$\overline{F} = \Big(\frac{\|W\|}{\sqrt{\varphi'^2 + \|W\|^2}}\Big)' \frac{\lambda\tau}{\varphi'} \csc\varphi$$

olmak üzere $T'_{\widetilde{\beta}_{\mu_2}}(s)$ türev vektörü

$$\begin{aligned} T'_{\widetilde{\beta}_{\mu_2}}(s) &= \frac{-\sqrt{2\|W\|^2 + 2\varphi'^2}\cos\varphi - \overline{F}\sqrt{2}\|W\|\sin\varphi}{(\overline{F}-1)\sqrt{\|W\|^2 + \varphi'^2}}T + \frac{\overline{F}\sqrt{2}\varphi'}{(\overline{F}-1)\sqrt{\|W\|^2 + \varphi'^2}}N \\ &+ \frac{\sqrt{2\|W\|^2 + 2\varphi'^2}\sin\varphi - \overline{F}\sqrt{2}\|W\|\cos\varphi}{(\overline{F}-1)\sqrt{\|W\|^2 + \varphi'^2}}B \end{aligned}$$

biçiminde elde edilir. (4.3.191) ve (4.3.192) ifadelerinden elde edilen $\widetilde{\beta}_{\mu_2} \wedge T_{\widetilde{\beta}_{\mu_2}}$ vektörü

$$\begin{aligned} \widetilde{\beta}_{\mu_2} \wedge T_{\widetilde{\beta}_{\mu_2}}(s) &= \frac{-\|W\|\sin\varphi - \sqrt{\|W\|^2 + \varphi'^2}\cos\varphi}{\sqrt{2\|W\|^2 + 2\varphi'^2}}T - \frac{\varphi'}{\sqrt{2\|W\|^2 + 2\varphi'^2}}N \\ &+ \frac{\sqrt{\|W\|^2 + \varphi'^2}\sin\varphi - \|W\|\cos\varphi}{\sqrt{2\|W\|^2 + 2\varphi'^2}}B \end{aligned}$$

şeklinde yazılır. Geodezik eğrilik tanımından $\kappa_g^{\widetilde{\beta}_{\mu_2}}$ geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\widetilde{\beta}_{\mu_2}} = \frac{1 + \overline{F}}{\overline{F} - 1}$$

biçiminde olur.

Tanım 4.3.15 $\alpha_2 : I \to S^2$ Mannheim partner eğrisinin birim Darboux vektörünün çizdiği küresel eğriye ait Sabban çatısı $\{C_2, T_{C_2}, C_2 \wedge T_{C_2}\}$ olsun.

$$\widetilde{\beta}_{\mu_3}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(T_{C_2} + C_2 \wedge T_{C_2}) \tag{4.3.193}$$

şeklinde tanımlı vektörün çizdiği regüler eğriye $T_{C_2}(C_2 \wedge T_{C_2})$-Smarandache eğrisi denir.

Teorem 4.3.43 $T_{C_2}(C_2 \wedge T_{C_2})$-Smarandache eğrisinin geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\widetilde{\beta}_{\mu_3}} = \frac{1}{\big(1 + 2(\frac{\|W_2\|}{\varphi_2'})^2\big)^{\frac{5}{2}}}\Big(2\frac{\|W_2\|}{\varphi_2'}\triangle_1 - \triangle_2 + \triangle_3\Big) \tag{4.3.194}$$

denklemiyle verilir. Burada

$$\begin{cases} \triangle_1 = \frac{\|W_2\|}{\varphi_2'} + 2\big(\frac{\|W_2\|}{\varphi_2'}\big)^3 + 2\big(\frac{\|W_2\|}{\varphi_2'}\big)'\big(\frac{\|W_2\|}{\varphi_2'}\big) \\ \\ \triangle_2 = -1 - 3\big(\frac{\|W_2\|}{\varphi_2'}\big)^2 - 2\big(\frac{\|W_2\|}{\varphi_2'}\big)^4 - \big(\frac{\|W_2\|}{\varphi_2'}\big)' \\ \\ \triangle_3 = -\big(\frac{\|W_2\|}{\varphi_2'}\big)^2 - 2\big(\frac{\|W_2\|}{\varphi_2'}\big)^4 + \big(\frac{\|W_2\|}{\varphi_2'}\big)' \end{cases} \tag{4.3.195}$$

şeklinde birer katsayıdır.

İspat.

$$\widetilde{\beta}_{\mu_3}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(T_{C_2} + C_2 \wedge T_{C_2})$$

eğrisinin $s_{\widetilde{\beta}_{\mu_3}}$ yay parametresine göre türevi alınırsa

$$T_{\widetilde{\beta}_{\mu_3}} \frac{ds_{\widetilde{\beta}_{\mu_3}}}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-C_2 - \frac{\|W_2\|}{\varphi_2{}'}T_{C_2} + \frac{\|W_2\|}{\varphi_2{}'}C_2 \wedge T_{C_2})$$

olur. Eşitliğin normu alınırsa $\frac{ds_{\widetilde{\beta}_{\mu_3}}}{ds}$ ifadesi,

$$\frac{ds_{\widetilde{\beta}_{\mu_3}}}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1 + 2\Big(\frac{\|W_2\|}{\varphi_2{}'}\Big)^2}$$

şeklinde bulunur. Bulunan bu ifade yukarıda yerine yazılırsa $T_{\widetilde{\beta}_{\mu_3}}(s)$ teğet vektörü

$$T_{\widetilde{\beta}_{\mu_3}}(s) = \frac{1}{\sqrt{1 + 2(\frac{\|W_2\|}{\varphi_2{}'})^2}}(-C_2 - \frac{\|W_2\|}{\varphi_2{}'}T_{C_2} + \frac{\|W_2\|}{\varphi_2{}'}C_2 \wedge T_{C_2}) \tag{4.3.196}$$

biçiminde olur. Bu ifadenin tekrar türevi alınırsa katsayılar,

$$\begin{cases} \triangle_1 = \frac{\|W_2\|}{\varphi_2{}'} + 2(\frac{\|W_2\|}{\varphi_2{}'})^3 + 2(\frac{\|W_2\|}{\varphi_2{}'})'(\frac{\|W_2\|}{\varphi_2{}'}) \\ \triangle_2 = -1 - 3(\frac{\|W_2\|}{\varphi_2{}'})^2 - 2(\frac{\|W_2\|}{\varphi_2{}'})^4 - (\frac{\|W_2\|}{\varphi_2{}'})' \\ \triangle_3 = -(\frac{\|W_2\|}{\varphi_2{}'})^2 - 2(\frac{\|W_2\|}{\varphi_2{}'})^4 + (\frac{\|W_2\|}{\varphi_2{}'})' \end{cases} \tag{4.3.197}$$

olmak üzere $T'_{\widetilde{\beta}_{\mu_3}}(s)$ türev vektörü

$$T'_{\widetilde{\beta}_{\mu_3}}(s) = \frac{\sqrt{2}}{\Big(1 + 2(\frac{\|W_2\|}{\varphi_2{}'})^2\Big)^2}(\triangle_1 C_2 + \triangle_2 T_{C_2} + \triangle_3 C_2 \wedge T_{C_2}) \tag{4.3.198}$$

biçiminde elde edilir. (4.3.193) ve (4.3.196) ifadelerinden elde edilen $\widetilde{\beta}_{\mu_3} \wedge T_{\widetilde{\beta}_{\mu_3}}$ vektörü

$$\widetilde{\beta}_{\mu_3} \wedge T_{\widetilde{\beta}_{\mu_3}}(s) = \frac{1}{\sqrt{2 + 4(\frac{\|W_2\|}{\varphi_2{}'})^2}}\Big(2\frac{\|W_2\|}{\varphi_2{}'}C_2 - T_{C_2} + C_2 \wedge T_{C_2}\Big) \tag{4.3.199}$$

şeklinde yazılır. (4.3.193), (4.3.196), (4.3.198) ve (4.3.199) vektörlerinde (4.3.4) den karşılıkları yazılırsa $\widetilde{\beta}_{\mu_3}$-Smarandache eğrisine ait Sabban çatısının ve $T'_{\widetilde{\beta}_{\mu_3}}$ vektörünün Mannheim partner eğrisine bağlı ifadesi,

$$\widetilde{\beta}_{\mu_3}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\cos\varphi_2 T_2 + N_2 - \sin\varphi_2 B_2\big),$$

$$\begin{aligned}
T_{\widetilde{\beta}_{\mu_3}}(s) &= \frac{-\varphi_2{}'\sin\varphi_2\|W_2\|\cos\varphi_2}{\sqrt{2\|W_2\|^2+\varphi_2{}'^2}}T_2 + \frac{\|W_2\|}{\sqrt{2\|W_2\|^2+\varphi_2{}'^2}}N_2 \\
&\quad + \frac{\|W_2\|\sin\varphi_2 - \varphi_2{}'\cos\varphi_2}{\sqrt{2\|W_2\|^2+\varphi_2{}'^2}}B_2, \\
\widetilde{\beta}_{\mu_3}\wedge T_{\widetilde{\beta}_{\mu_3}}(s) &= \frac{2\|W_2\|\sin\varphi_2 - \varphi_2{}'\cos\varphi_2}{\sqrt{4\|W_2\|^2+2\varphi_2{}'^2}}T_2 + \frac{\varphi_2{}'}{\sqrt{4\|W_2\|^2+2\varphi_2{}'^2}}N_2 \\
&\quad + \frac{\|W_2\|\cos\varphi_2 + \varphi_2{}'\sin\varphi_2}{\sqrt{2\|W_2\|^2+4\varphi_2{}'^2}}B_2, \\
T'_{\widetilde{\beta}_{\mu_3}}(s) &= \frac{(\varphi_2{}')^4\sqrt{2}(\triangle_2\sin\varphi_2 - \triangle_1\cos\varphi_2)}{\big(2\|W_2\|^2+(\varphi_2{}')^2\big)^2}T_2 + \frac{\triangle_3(\varphi_2{}')^4\sqrt{2}}{\big(2\|W_2\|^2+\varphi_2{}'^2\big)^2}N_2 \\
&\quad + \frac{(\varphi_2{}')^4\sqrt{2}(\triangle_1\sin\varphi_2 + \triangle_2\cos\varphi_2)}{\big(2\|W_2\|^2+\varphi_2{}'^2\big)^2}B_2
\end{aligned}$$

eşitliklerine dönüşür. Geodezik eğrilik tanımından $\kappa_g^{\widetilde{\beta}_{\mu_3}}$ geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\widetilde{\beta}_{\mu_3}} = \langle T'_{\widetilde{\beta}_{\mu_3}}, \widetilde{\beta}_{\mu_3}\wedge T_{\widetilde{\beta}_{\mu_3}}\rangle = \frac{1}{\Big(1+2\big(\frac{\|W_2\|}{\varphi_2{}'}\big)^2\Big)^{\frac{5}{2}}}\Big(2\frac{\|W_2\|}{\varphi_2{}'}\triangle_1 - \triangle_2 + \triangle_3\Big)$$

biçiminde olur.

Teorem 4.3.44 (α,α_2) Mannheim eğri çifti, T ile T_2 teğet vektörleri arasındaki açı θ olsun. α_2 eğrisinin birim Darboux vektörünün çizdiği küresel eğriye ait $T_{C_2}(C_2\wedge T_{C_2})$-Smarandache eğrisinin geodezik eğriliğinin Mannheim eğrisine bağlı ifadesi

$$\kappa_g^{\widetilde{\beta}_{\mu_3}} = \frac{1}{(2+F^2)^{\frac{5}{2}}}\big(2F^5\overline{\triangle}_1 - F^4\overline{\triangle}_2 + F^4\overline{\triangle}_3\big) \tag{4.3.200}$$

denklemiyle verilir. Burada

$$\begin{cases}
\overline{\triangle}_1 = \frac{1}{F} + 2\frac{1}{F^3} + 2\frac{1}{F'}\frac{1}{F} \\
\overline{\triangle}_2 = -1 - 3\frac{1}{F^2} - 2\frac{1}{F^4} - \frac{1}{F'} \\
\overline{\triangle}_3 = -\frac{1}{F^2} - 2\frac{1}{F^4} + \frac{1}{F'}
\end{cases}$$

şeklinde birer katsayıdır.

İspat.

$$\widetilde{\beta}_{\mu_3}(s)=\frac{1}{\sqrt{2}}(T_{C_2}+C_2\wedge T_{C_2})$$

eşitliğinde sırasıyla (4.3.4), (3.4.4) ve (3.4.8) den karşılıkları yazılırsa $\widetilde{\beta}_{\mu_3}$ vektörünün Mannheim eğrisine bağlı ifadesi

$$\begin{aligned}\widetilde{\beta}_{\mu_3}(s) &= \frac{\theta'\cos\theta+\sqrt{\|W\|^2+\theta'^2}\sin\theta}{\sqrt{2\theta'^2+2\|W\|^2}}T+\frac{\|W\|}{\sqrt{2\theta'^2+2\|W\|^2}}N \\ &\quad +\frac{\sqrt{\|W\|^2+\theta'^2}\cos\theta-\theta'\sin\theta}{\sqrt{2\theta'^2+2\|W\|^2}}B\end{aligned} \tag{4.3.201}$$

biçiminde olur. Bu ifadenin türevi alınırsa $T_{\widetilde{\beta}_{\mu_3}}(s)$ teğet vektörü

$$F=\Big(\frac{\|W\|}{\sqrt{\theta'^2+\|W\|^2}}\Big)'\frac{\lambda\tau}{\theta'}\sec\theta$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}T_{\widetilde{\beta}_{\mu_3}}(s) &= \frac{\sqrt{\|W\|^2+\theta'^2}\sin\theta-(\theta'+F\|W\|)\cos\theta}{\sqrt{2+F^2}\sqrt{\|W\|^2+\theta'^2}}T+\frac{\|W\|-F\theta'}{\sqrt{2+F^2}\sqrt{\|W\|^2+\theta'^2}}N \\ &\quad +\frac{(F\|W\|+\theta')\sin\theta+\sqrt{\|W\|^2+\theta'^2}\cos\theta}{\sqrt{2+F^2}\sqrt{\|W\|^2+\theta'^2}}B\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Bu ifadenin tekrar türevi alınırsa katsayılar

$$\begin{cases}\overline{\triangle}_1=\frac{1}{F}+2\frac{1}{F^3}+2\frac{1}{F'}\frac{1}{F}\\ \overline{\triangle}_2=-1-3\frac{1}{F^2}-2\frac{1}{F^4}-\frac{1}{F'}\\ \overline{\triangle}_3=-\frac{1}{F^2}-2\frac{1}{F^4}+\frac{1}{F'}\end{cases}$$

olmak üzere $T'_{\widetilde{\beta}_{\mu_3}}(s)$ türev vektörü

$$\begin{aligned}T'_{\widetilde{\beta}_{\mu_3}}(s) &= \frac{(\overline{\triangle}_2\|W\|-\overline{\triangle}_1\theta')F^4\sqrt{2}\cos\theta+\overline{\triangle}_3F^4\sqrt{2\|W\|^2+2\theta'^2}\sin\theta}{(2+F^2)^2\sqrt{\theta'^2+\|W\|^2}}T \\ &\quad +\frac{F^4\sqrt{2}(\overline{\triangle}_2\theta'+\overline{\triangle}_1\|W\|)}{(2+F^2)^2\sqrt{\theta'^2+\|W\|^2}}N \\ &\quad +\frac{(\overline{\triangle}_1\theta'-\overline{\triangle}_2\|W\|)F^4\sqrt{2}\sin\theta+\overline{\triangle}_3F^4\sqrt{2\|W\|^2+2\theta'^2}\cos\theta}{(2+F^2)^2\sqrt{\theta'^2+\|W\|^2}}B\end{aligned}$$

biçiminde olur. (4.3.201) ve (4.3.202) ifadelerinden elde edilen $\widetilde{\beta}_{\mu_3} \wedge T_{\widetilde{\beta}_{\mu_3}}$ vektörü

$$\begin{aligned}\widetilde{\beta}_{\mu_3} \wedge T_{\widetilde{\beta}_{\mu_3}}(s) &= \frac{(2\|W\| - F\theta')\cos\theta + F\sqrt{\|W\|^2+\theta'^2}\sin\theta}{\sqrt{4+2F^2}\sqrt{\|W\|^2+\theta'^2}}T \\ &+ \frac{2\theta' - F\|W\|}{\sqrt{4+2F^2}\sqrt{\|W\|^2+\theta'^2}}N \\ &+ \frac{(F\theta' - 2\|W\|)\sin\theta + F\sqrt{\|W\|^2+\theta'^2}\cos\theta}{\sqrt{4+2F^2}\sqrt{\|W\|^2+\theta'^2}}B\end{aligned}$$

şeklinde yazılır. Geodezik eğrilik tanımından $\kappa_g^{\widetilde{\beta}_{\mu_3}}$ geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\widetilde{\beta}_{\mu_3}} = \frac{1}{\left(2+F^2\right)^{\frac{5}{2}}}\left(2F^5\overline{\triangle}_1 - F^4\overline{\triangle}_2 + F^4\overline{\triangle}_3\right)$$

şeklinde elde edilir.

Teorem 4.3.45 (α, α_2) Mannheim eğri çifti ve binormal vektörü ile Darboux vektörü arasındaki açı φ olsun. α_2 eğrisinin birim Darboux vektörünün çizdiği küresel eğriye ait $T_{C_2}(C_2 \wedge T_{C_2})$- Smarandache eğrisinin geodezik eğriliğinin Mannheim eğrisine bağlı ifadesi

$$\kappa_g^{\widetilde{\beta}_{\mu_3}} = \frac{1}{\left(2+(\overline{F})^2\right)^{\frac{5}{2}}}\left(2\overline{F}^5\underline{\triangle}_1 - \overline{F}^4\underline{\triangle}_2 + \overline{F}^4\underline{\triangle}_3\right) \qquad (4.3.202)$$

denklemiyle verilir. Burada

$$\begin{cases}\underline{\triangle}_1 = \frac{1}{F} + 2\frac{1}{F^3} + 2\frac{1}{F'}\frac{1}{F} \\ \underline{\triangle}_2 = -1 - 3\frac{1}{(F)^2} - 2\frac{1}{F^4} - \frac{1}{F'} \\ \underline{\triangle}_3 = -\frac{1}{(F)^2} - 2\frac{1}{F^4} + \frac{1}{F'}\end{cases} \qquad (4.3.203)$$

şeklinde birer katsayıdır.

İspat.

$$\widetilde{\beta}_{\mu_3}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(T_{C_2} + C_2 \wedge T_{C_2})$$

eşitliğinde sırasıyla (4.3.4) ve (3.4.10) dan karşılıkları yazılırsa $\widetilde{\beta}_{\mu_3}$ vektörünün Mannheim eğrisine bağlı ifadesi

$$\begin{aligned}\widetilde{\beta}_{\mu_3}(s) &= \frac{\varphi'\sin\varphi - \sqrt{\|W\|^2+\varphi'^2}\cos\varphi}{\sqrt{2\varphi'^2+2\|W\|^2}}T + \frac{\|W\|}{\sqrt{2\varphi'^2+2\|W\|^2}}N \\ &+ \frac{\sqrt{\|W\|^2+\varphi'^2}\sin\varphi + \varphi'\cos\varphi}{\sqrt{2\varphi'^2+2\|W\|^2}}B\end{aligned} \qquad (4.3.204)$$

biçiminde olur. Bu ifadenin türevi alınırsa $T_{\widetilde{\beta}_{\mu_3}}(s)$ teğet vektörü

$$\overline{F} = \Big(\frac{\|W\|}{\sqrt{\varphi'^2+\|W\|^2}}\Big)'\frac{\lambda\tau}{\varphi'}\csc\varphi$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
T_{\widetilde{\beta}_{\mu_3}}(s) &= \frac{-\sqrt{\|W\|^2+\varphi'^2}\cos\varphi-(\varphi'+\overline{F}\|W\|)\sin\varphi}{\sqrt{2+(\overline{F})^2}\sqrt{\|W\|^2+\varphi'^2}}T+\frac{\|W\|-\overline{F}\varphi'}{\sqrt{2+(\overline{F})^2}\sqrt{\|W\|^2+\varphi'^2}}N\\
&\quad+\frac{\sqrt{\|W\|^2+\varphi'^2}\sin\varphi-(\overline{F}\|W\|+\varphi')\cos\varphi}{\sqrt{2+(\overline{F})^2}\sqrt{\|W\|^2+\varphi'^2}}B
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Bu ifadenin tekrar türevi alınırsa katsayılar

$$\begin{cases}
\underline{\triangle}_1 = \frac{1}{\overline{F}}+2\frac{1}{\overline{F}^3}+2\frac{1}{\overline{F}'}\frac{1}{\overline{F}}\\
\underline{\triangle}_2 = -1-3\frac{1}{(\overline{F})^2}-2\frac{1}{\overline{F}^4}-\frac{1}{\overline{F}'}\\
\underline{\triangle}_3 = -\frac{1}{(\overline{F})^2}-2\frac{1}{\overline{F}^4}+\frac{1}{\overline{F}'}
\end{cases}$$

olmak üzere $T'_{\widetilde{\beta}_{\mu_3}}(s)$ türev vektörü

$$\begin{aligned}
T'_{\widetilde{\beta}_{\mu_3}}(s) &= \frac{(\underline{\triangle}_2\|W\|-\underline{\triangle}_1\varphi')\overline{F}^4\sqrt{2}\sin\varphi-\underline{\triangle}_3\overline{F}^4\sqrt{2\|W\|^2+2\varphi'^2}\cos\varphi}{(2+(\overline{F})^2)^2\sqrt{\varphi'^2+\|W\|^2}}T\\
&\quad+\frac{\overline{F}^4\sqrt{2}(\underline{\triangle}_2\varphi'+\underline{\triangle}_1\|W\|)}{(2+(\overline{F})^2)^2\sqrt{\varphi'^2+\|W\|^2}}N\\
&\quad+\frac{(\underline{\triangle}_2\|W\|-\underline{\triangle}_1\varphi')\overline{F}^4\sqrt{2}\cos\varphi+\underline{\triangle}_3\overline{F}^4\sqrt{2\|W\|^2+2\varphi'^2}\sin\varphi}{(2+(\overline{F})^2)^2\sqrt{\varphi'^2+\|W\|^2}}B
\end{aligned}$$

biçiminde olur. (4.3.204) ve (4.3.205) ifadelerinden elde edilen $\widetilde{\beta}_{\mu_3}\wedge T_{\widetilde{\beta}_{\mu_3}}$ vektörü

$$\begin{aligned}
\widetilde{\beta}_{\mu_3}\wedge T_{\widetilde{\beta}_{\mu_3}}(s) &= \frac{(2\|W\|-\overline{F}\varphi')\sin\varphi-\overline{F}\sqrt{\|W\|^2+\varphi'^2}\cos\varphi}{\sqrt{4+2(\overline{F})^2}\sqrt{\|W\|^2+\varphi'^2}}T\\
&\quad+\frac{2\varphi'-\overline{F}\|W\|}{\sqrt{4+2(\overline{F})^2}\sqrt{\|W\|^2+\varphi'^2}}N\\
&\quad+\frac{(2\|W\|-\overline{F}\varphi')\cos\varphi+\overline{F}\sqrt{\|W\|^2+\varphi'^2}\sin\varphi}{\sqrt{4+2(\overline{F})^2}\sqrt{\|W\|^2+\varphi'^2}}B
\end{aligned}$$

şeklinde yazılır. Geodezik eğrilik tanımından $\kappa_g^{\widetilde{\beta}_{\mu_3}}$ geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\widetilde{\beta}_{\mu_3}} = \frac{1}{(2+(\overline{F})^2)^{\frac{5}{2}}}\left(2\overline{F}^5\underline{\triangle}_1 - \overline{F}^4\underline{\triangle}_2 + \overline{F}^4\underline{\triangle}_3\right)$$

biçiminde olur.

Tanım 4.3.16 $\alpha_2 : I \to S^2$ Mannheim partner eğrisinin birim Darboux vektörünün çizdiği küresel eğriye ait Sabban çatısı $\{C_2, T_{C_2}, C_2 \wedge T_{C_2}\}$ olsun.

$$\widetilde{\beta}_{\mu_4}(s) = \frac{1}{\sqrt{3}}(C_2 + T_{C_2} + C_2 \wedge T_{C_2}) \tag{4.3.205}$$

şeklinde tanımlı vektörün çizdiği regüler eğriye $C_2T_{C_2}(C_2 \wedge T_{C_2})$-Smarandache eğrisi denir.

Teorem 4.3.46 $C_2T_{C_2}(C_2 \wedge T_{C_2})$-Smarandache eğrisinin geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\widetilde{\beta}_{\mu_4}} = \frac{\left(2\frac{\|W_2\|}{\varphi_2{}'} - 1\right)\varkappa_1 + \left(-1 - \frac{\|W_2\|}{\varphi_2{}'}\right)\varkappa_2 + \left(2 - \frac{\|W_2\|}{\varphi_2{}'}\right)\varkappa_3}{4\sqrt{2}\left(1 - \frac{\|W_2\|}{\varphi_2{}'} + (\frac{\|W_2\|}{\varphi_2{}'})^2\right)^{\frac{5}{2}}} \tag{4.3.206}$$

denklemiyle verilir. Burada

$$\begin{cases} \varkappa_1 = -2 + 4\left(\frac{\|W_2\|}{\varphi_2{}'}\right) - \left(\frac{\|W_2\|}{\varphi_2{}'}\right)^2 + 2\left(\frac{\|W_2\|}{\varphi_2{}'}\right)^3 + \left(\frac{\|W_2\|}{\varphi_2{}'}\right)'\left(2\frac{\|W_2\|}{\varphi_2{}'} - 1\right) \\ \varkappa_2 = -2 + 2\left(\frac{\|W_2\|}{\varphi_2{}'}\right) - 4\left(\frac{\|W_2\|}{\varphi_2{}'}\right)^2 + 2\left(\frac{\|W_2\|}{\varphi_2{}'}\right)^3 - 2\left(\frac{\|W_2\|}{\varphi_2{}'}\right)^4 - \left(\frac{\|W_2\|}{\varphi_2{}'}\right)'\left(1 + \frac{\|W_2\|}{\varphi_2{}'}\right) \\ \varkappa_3 = 2\left(\frac{\|W_2\|}{\varphi_2{}'}\right) - 4\left(\frac{\|W_2\|}{\varphi_2{}'}\right)^2 + 4\left(\frac{\|W_2\|}{\varphi_2{}'}\right)^3 - 2\left(\frac{\|W_2\|}{\varphi_2{}'}\right)^4 + \left(\frac{\|W_2\|}{\varphi_2{}'}\right)'\left(2 - \frac{\|W_2\|}{\varphi_2{}'}\right) \end{cases} \tag{4.3.207}$$

şeklinde birer katsayıdır.

İspat.

$$\widetilde{\beta}_{\mu_4}(s) = \frac{1}{\sqrt{3}}(C_2 + T_{C_2} + C_2 \wedge T_{C_2})$$

eğrisinin $s_{\widetilde{\beta}_{\mu_4}}$ yay parametresine göre türevi alınırsa

$$T_{\widetilde{\beta}_{\mu_4}}\frac{ds_{\widetilde{\beta}_{\mu_4}}}{ds} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(-C_2 + \left(1 - \frac{\|W_2\|}{\varphi_2{}'}\right)T_{C_2} + \frac{\|W_2\|}{\varphi_2{}'}C_2 \wedge T_{C_2}\right)$$

olur. Bu eşitliğin normu alınırsa $\frac{ds_{\widetilde{\beta}_{\mu_4}}}{ds}$ ifadesi

$$\frac{ds_{\widetilde{\beta}_{\mu_4}}}{ds} = \sqrt{\frac{2}{3}\left(1 - \frac{\|W_2\|}{\varphi_2{}'} + (\frac{\|W_2\|}{\varphi_2{}'})^2\right)}$$

bulunur. Bulunan bu ifade yukarıda yerine yazılırsa $T_{\widetilde{\beta}_{\mu_4}}(s)$ teğet vektörü

$$T_{\widetilde{\beta}_{\mu_4}}(s)=\frac{1}{\sqrt{2\Big(1-\frac{\|W_2\|}{\varphi_2{}'}+\big(\frac{\|W_2\|}{\varphi_2{}'}\big)^2\Big)}}\Big(-C_2+\big(1-\frac{\|W_2\|}{\varphi_2{}'}\big)T_{C_2}+\frac{\|W_2\|}{\varphi_2{}'}C_2\wedge T_{C_2}\Big) \tag{4.3.208}$$

biçiminde olur. Bu ifadenin tekrar türevi alınırsa katsayılar,

$$\begin{cases}\varkappa_1=-2+4\big(\frac{\|W_2\|}{\varphi_2{}'}\big)-\big(\frac{\|W_2\|}{\varphi_2{}'}\big)^2+2\big(\frac{\|W_2\|}{\varphi_2{}'}\big)^3+\big(\frac{\|W_2\|}{\varphi_2{}'}\big)'\big(2\frac{\|W_2\|}{\varphi_2{}'}-1\big)\\[2ex] \varkappa_2=-2+2\big(\frac{\|W_2\|}{\varphi_2{}'}\big)-4\big(\frac{\|W_2\|}{\varphi_2{}'}\big)^2+2\big(\frac{\|W_2\|}{\varphi_2{}'}\big)^3-2\big(\frac{\|W_2\|}{\varphi_2{}'}\big)^4-\big(\frac{\|W_2\|}{\varphi_2{}'}\big)'\big(1+\frac{\|W_2\|}{\varphi_2{}'}\big)\\[2ex] \varkappa_3=2\big(\frac{\|W_2\|}{\varphi_2{}'}\big)-4\big(\frac{\|W_2\|}{\varphi_2{}'}\big)^2+4\big(\frac{\|W_2\|}{\varphi_2{}'}\big)^3-2\big(\frac{\|W_2\|}{\varphi_2{}'}\big)^4+\big(\frac{\|W_2\|}{\varphi_2{}'}\big)'\big(2-\frac{\|W_2\|}{\varphi_2{}'}\big)\end{cases}$$

olmak üzere $T'_{\widetilde{\beta}_{\mu_4}}(s)$ türev vektörü

$$T'_{\widetilde{\beta}_{\mu_4}}(s)=\frac{\sqrt{3}}{4\Big(1-\frac{\|W_2\|}{\varphi_2{}'}+\big(\frac{\|W_2\|}{\varphi_2{}'}\big)^2\Big)^2}\big(\varkappa_1C_2+\varkappa_2T_{C_2}+\varkappa_3C_2\wedge T_{C_2}\big) \tag{4.3.209}$$

biçiminde olur. (4.3.205) ve (4.3.208) ifadelerinden elde edilen $\widetilde{\beta}_{\mu_4}\wedge T_{\widetilde{\beta}_{\mu_4}}$ vektörü

$$\widetilde{\beta}_{\mu_4}\wedge T_{\widetilde{\beta}_{\mu_4}}(s)=\frac{\big(2\frac{\|W_2\|}{\varphi_2{}'}-1\big)C_2-\big(1+\frac{\|W_2\|}{\varphi_2{}'}\big)T_{C_2}+\big(2-\frac{\|W_2\|}{\varphi_2{}'}\big)C_2\wedge T_{C_2}}{\sqrt{6}\sqrt{1-\frac{\|W_2\|}{\varphi_2{}'}+\big(\frac{\|W_2\|}{\varphi_2{}'}\big)^2}} \tag{4.3.210}$$

şeklinde yazılır. (4.3.205), (4.3.208), (4.3.209) ve (4.3.210) vektörlerinde (4.3.4) deki karşılığı yazılırsa $\widetilde{\beta}_{\mu_4}$-Smarandache eğrisine ait Sabban çatısının ve $T'_{\widetilde{\beta}_{\mu_4}}$ vektörünün Mannheim partner eğrisine bağlı ifadesi,

$$\begin{aligned}\widetilde{\beta}_{\mu_4}(s) &= \frac{1}{\sqrt{3}}\big((\sin\varphi_2+\cos\varphi_2)T_2+N_2+(\cos\varphi_2-\sin\varphi_2)B_2\big),\\ T_{\widetilde{\beta}_{\mu_4}}(s) &= \frac{(\varphi_2{}'-\|W_2\|)\cos\varphi_2-\varphi_2{}'\sin\varphi_2}{\sqrt{2(\|W_2\|^2-\|W_2\|\varphi_2{}'+\varphi_2{}'^2)}}T_2+\frac{\|W_2\|}{\sqrt{2(\|W_2\|^2-\|W_2\|\varphi_2{}'+\varphi_2{}'^2)}}N_2\\ &\quad-\frac{\varphi_2{}'\cos\varphi_2-(\|W_2\|-\varphi_2)'\sin\varphi_2}{\sqrt{2(\|W_2\|^2-\|W_2\|\varphi_2{}'+\varphi_2{}'^2)}}B_2,\end{aligned}$$

$$\widetilde{\beta}_{\mu_4}\wedge T_{\widetilde{\beta}_{\mu_4}}(s) = \frac{(2\|W_2\|-\varphi_2{}')\sin\varphi_2-(\|W_2\|+\varphi_2{}')\cos\varphi_2}{\sqrt{6\|W_2\|^2-6\|W_2\|\varphi_2{}'+6\varphi_2{}'^2}}T_2$$
$$+\frac{2\varphi_2{}'-\|W_2\|}{\sqrt{6\|W_2\|^2-6\|W_2\|\varphi_2{}'+6\varphi_2{}'^2}}N_2$$
$$+\frac{(2\|W_2\|-\varphi_2{}')\cos\varphi_2+(\|W_2\|+\varphi_2{}')\sin\varphi_2}{\sqrt{6\|W_2\|^2-6\|W_2\|\varphi_2{}'+6\varphi_2{}'^2}}B_2,$$

$$T'_{\widetilde{\beta}_{\mu_4}}(s) = \frac{(\varphi_2{}')^4\sqrt{3}(\varkappa_1\sin\varphi_2+\varkappa_2\cos\varphi_2)}{4(\|W_2\|^2-\|W_2\|\varphi_2{}'+\varphi_2{}'^2)^2}T_2+\frac{\varkappa_3(\varphi_2{}')^4\sqrt{3}}{4(\|W_2\|^2-\|W_2\|\varphi_2{}'+\varphi_2{}'^2)^2}N_2$$
$$+\frac{(\varphi_2{}')^4\sqrt{3}(\varkappa_1\cos\varphi_2-\varkappa_2\sin\varphi_2)}{4(\|W_2\|^2-\|W_2\|\varphi_2{}'+\varphi_2{}'^2)^2}B_2$$

eşitliklerine dönüşür. Geodezik eğrilik tanımından $\kappa_g^{\widetilde{\beta}_{\mu_4}}$ geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\widetilde{\beta}_{\mu_4}} = \frac{\left(2\frac{\|W_2\|}{\varphi_2{}'}-1\right)\varkappa_1+\left(-1-\frac{\|W_2\|}{\varphi_2{}'}\right)\varkappa_2+\left(2-\frac{\|W_2\|}{\varphi_2{}'}\right)\varkappa_3}{4\sqrt{2}\left(1-\dfrac{\|W_2\|}{\varphi_2{}'}+(\dfrac{\|W_2\|}{\varphi_2{}'})^2\right)^{\frac{5}{2}}}$$

biçiminde olur.

Teorem 4.3.47 (α,α_2) Mannheim eğri çifti, T ile T_2 teğet vektörleri arasındaki açı θ olsun. α_2 eğrisinin birim Darboux vektörünün çizdiği küresel eğriye ait $C_2T_{C_2}(C_2\wedge T_{C_2})$-Smarandache eğrisine ait geodezik eğriliğinin Mannheim eğrisinin Frenet vektörlerine, eğriliğine ve burulmasına bağlı ifadesi

$$\kappa_g^{\widetilde{\beta}_{\mu_4}} = \frac{(2F^4-F^5)\overline{\varkappa}_1-(F^5+F^4)\overline{\varkappa}_2+(2F^5-F^4)\overline{\varkappa}_3}{4\sqrt{2}(1-F+F^2)^{\frac{5}{2}}} \qquad (4.3.211)$$

denklemiyle verilir. Burada

$$F = \left(\frac{\|W\|}{\sqrt{\theta'^2+\|W\|^2}}\right)'\frac{\lambda\tau}{\theta'}\sec\theta$$

olmak üzere

$$\begin{cases}\overline{\varkappa}_1 = -2+4\frac{1}{F}-4\frac{1}{F^2}+2\frac{1}{F^3}+2\frac{1}{F'}\left(2\frac{1}{F}-1\right)\\ \overline{\varkappa}_2 = -2+2\frac{1}{F}-4\frac{1}{F^2}+2\frac{1}{F^3}-2\frac{1}{F^4}-\frac{1}{F'}\left(1+\frac{1}{F}\right)\\ \overline{\varkappa}_3 = 2\frac{1}{F}-4\frac{1}{F^2}+4\frac{1}{F^3}-2\frac{1}{F^4}+\frac{1}{F'}\left(2-\frac{1}{F}\right)\end{cases} \qquad (4.3.212)$$

şeklinde birer katsayıdır.

İspat.

$$\widetilde{\beta}_{\mu_4}(s) = \frac{1}{\sqrt{3}}(C_2+T_{C_2}+C_2\wedge T_{C_2})$$

eşitliğinde sırasıyla (4.3.4), (3.4.4) ve (3.4.8) den karşılıkları yazılırsa $\widetilde{\beta}_{\mu_4}$ vektörünün Mannheim eğrisine bağlı ifadesi

$$\begin{aligned}
\widetilde{\beta}_{\mu_4}(s) \;=\; & \frac{(\theta' + \|W\|)\cos\theta + \sqrt{\theta'^2 + \|W\|^2}\sin\theta}{\sqrt{3\theta'^2 + 3\|W\|^2}} T + \frac{\theta' - \|W\|}{\sqrt{3\theta'^2 + 3\|W\|^2}} N \\
& + \frac{\sqrt{\theta'^2 + \|W\|^2}\cos\theta - (\theta' + \|W\|)\sin\theta}{\sqrt{3\theta'^2 + 3\|W\|^2}} B
\end{aligned} \tag{4.3.213}$$

biçiminde olur. Bu ifadenin türevi alınırsa $T_{\widetilde{\beta}_{\mu_4}}(s)$ teğet vektörü

$$\digamma = \left(\frac{\|W\|}{\sqrt{\theta'^2 + \|W\|^2}}\right)' \frac{\lambda\tau}{\theta'} \sec\theta$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
T_{\widetilde{\beta}_{\mu_4}}(s) \;=\; & \frac{\big((\digamma - 1)\theta' - \digamma\|W\|\big)\cos\theta + \sqrt{\|W\|^2 + \theta'^2}\sin\theta}{\sqrt{2(1-\digamma+\digamma^2)}\sqrt{\|W\|^2 + \theta'^2}} T \\
& + \frac{\digamma\theta' - (1-\digamma)\|W\|}{\sqrt{2(1-\digamma+\digamma^2)}\sqrt{\|W\|^2 + \theta'^2}} N \\
& + \frac{\big(\digamma\|W\| + (1-\digamma)\theta'\big)\sin\theta + \sqrt{\|W\|^2 + \theta'^2}\cos\theta}{\sqrt{2(1-\digamma+\digamma^2)}\sqrt{\|W\|^2 + \theta'^2}} B
\end{aligned} \tag{4.3.214}$$

şeklinde bulunur. Bu ifadenin tekrar türevi alınırsa katsayılar

$$\begin{cases}
\overline{\varkappa}_1 = -2 + 4\frac{1}{\digamma} - 4\frac{1}{\digamma^2} + 2\frac{1}{\digamma^3} + 2\frac{1}{\digamma'}\left(2\frac{1}{\digamma} - 1\right) \\
\overline{\varkappa}_2 = -2 + 2\frac{1}{\digamma} - 4\frac{1}{\digamma^2} + 2\frac{1}{\digamma^3} - 2\frac{1}{\digamma^4} - \frac{1}{\digamma'}\left(1 + \frac{1}{\digamma}\right) \\
\overline{\varkappa}_3 = 2\frac{1}{\digamma} - 4\frac{1}{\digamma^2} + 4\frac{1}{\digamma^3} - 2\frac{1}{\digamma^4} + \frac{1}{\digamma'}\left(2 - \frac{1}{\digamma}\right)
\end{cases}$$

olmak üzere $T'_{\widetilde{\beta}_{\mu_4}}(s)$ türev vektörü

$$\begin{aligned}
T'_{\widetilde{\beta}_{\mu_4}}(s) \;=\; & \frac{(\overline{\varkappa}_1\|W\| + \overline{\varkappa}_2\theta')\digamma^4\sqrt{3}\cos\theta + \overline{\varkappa}_3\digamma^4\sqrt{3\|W\|^2 + 3\theta'^2}\sin\theta}{4(1-\digamma+\digamma^2)^2\sqrt{\theta'^2 + \|W\|^2}} T \\
& + \frac{(\overline{\varkappa}_1\theta' - \overline{\varkappa}_2\|W\|)\digamma^4\sqrt{3}}{4(1-\digamma+\digamma^2)^2\sqrt{\theta'^2 + \|W\|^2}} N \\
& + \frac{\overline{\varkappa}_3\digamma^4\sqrt{3\|W\|^2 + 3\theta'^2}\cos\theta - (\overline{\varkappa}_1\|W\| + \overline{\varkappa}_2\theta')\digamma^4\sqrt{3}\sin\theta}{4(1-\digamma+\digamma^2)^2\sqrt{\theta'^2 + \|W\|^2}} B
\end{aligned}$$

biçiminde elde edilir. (4.3.213) ve (4.3.214) ifadelerinden elde edilen $\widetilde{\beta}_{\mu_4} \wedge T_{\widetilde{\beta}_{\mu_4}}$ vektörü

$$\begin{aligned}\widetilde{\beta}_{\mu_4} \wedge T_{\widetilde{\beta}_{\mu_4}}(s) \;=\;& \frac{((2-\overline{F})\|W\| - (1+\overline{F})\theta')\cos\theta + (2\overline{F}1)\sqrt{\|W\|^2+\theta'^2}\sin\theta}{\sqrt{6-6\overline{F}+6\overline{F}^2}\sqrt{\|W\|^2+\theta'^2}}T \\ &+\frac{(2-\overline{F})\theta' + (1+\overline{F})\|W\|}{\sqrt{6-6\overline{F}+6\overline{F}^2}\sqrt{\|W\|^2+\theta'^2}}N \\ &+\frac{((\overline{F}-2)\|W\| - (1+\overline{F})\theta')\sin\theta + (2\overline{F}-1)\sqrt{\|W\|^2+\theta'^2}\cos\theta}{\sqrt{6-6\overline{F}+6\overline{F}^2}\sqrt{\|W\|^2+\theta'^2}}B\end{aligned}$$

şeklinde yazılır. Geodezik eğrilik tanımından $\kappa_g^{\widetilde{\beta}_{\mu_4}}$ geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\widetilde{\beta}_{\mu_4}} = \frac{(2\overline{F}^4 - \overline{F}^5)\overline{\varkappa}_1 - (\overline{F}^5 + \overline{F}^4)\overline{\varkappa}_2 + (2\overline{F}^5 - \overline{F}^4)\overline{\varkappa}_3}{4\sqrt{2}(1-\overline{F}+\overline{F}^2)^{\frac{5}{2}}}$$

biçiminde olur.

Teorem 4.3.48 (α, α_2) Mannheim eğri çifti ve binormal vektörü ile Darboux vektörü arasındaki açı φ olsun. α_2 eğrisinin birim Darboux vektörünün çizdiği küresel eğriye ait $C_2T_{C_2}(C_2 \wedge T_{C_2})$- Smarandache eğrisinin geodezik eğriliğinin Mannheim eğrisine bağlı ifadesi

$$\kappa_g^{\widetilde{\beta}_{\mu_4}} = \frac{(2\overline{F}^4 - \overline{F}^5)\underline{\varkappa}_1 - (\overline{F}^5 + \overline{F}^4)\underline{\varkappa}_2 + (2\overline{F}^5 - \overline{F}^4)\underline{\varkappa}_3}{4\sqrt{2}(1-\overline{F}+(\overline{F})^2)^{\frac{5}{2}}}.$$

denklemiyle verilir. Burada

$$\overline{F} = \Big(\frac{\|W\|}{\sqrt{\varphi'^2+\|W\|^2}}\Big)'\frac{\lambda\tau}{\varphi'}\csc\varphi$$

olmak üzere

$$\begin{cases} \underline{\varkappa}_1 = -2 + 4\frac{1}{\overline{F}} - 4\frac{1}{(\overline{F})^2} + 2\frac{1}{\overline{F}^3} + 2\frac{1}{\overline{F}'}\big(2\frac{1}{\overline{F}} - 1\big) \\ \underline{\varkappa}_2 = -2 + 2\frac{1}{\overline{F}} - 4\frac{1}{(\overline{F})^2} + 2\frac{1}{\overline{F}^3} - 2\frac{1}{\overline{F}^4} - \frac{1}{\overline{F}'}\big(1 + \frac{1}{\overline{F}}\big) \\ \underline{\varkappa}_3 = 2\frac{1}{\overline{F}} - 4\frac{1}{(\overline{F})^2} + 4\frac{1}{\overline{F}^3} - 2\frac{1}{\overline{F}^4} + \frac{1}{\overline{F}'}\big(2 - \frac{1}{\overline{F}}\big) \end{cases}$$

şeklinde birer katsayıdır.

İspat.

$$\widetilde{\beta}_{\mu_4}(s) = \frac{1}{\sqrt{3}}(C_2 + T_{C_2} + C_2 \wedge T_{C_2})$$

eşitliğinde sırasıyla (4.3.4), (3.4.4) ve (3.4.8) den karşılıkları yazılırsa $\widetilde{\beta}_{\mu_4}$ vektörünün Mannheim eğrisine bağlı ifadesi

$$\begin{aligned}\widetilde{\beta}_{\mu_4}(s) &= \frac{(\varphi'+\|W\|)\sin\varphi-\sqrt{\varphi'^2+\|W\|^2}\cos\varphi}{\sqrt{3\varphi'^2+3\|W\|^2}}T+\frac{\varphi'-\|W\|}{\sqrt{3\varphi'^2+3\|W\|^2}}N \\ &\quad+\frac{\sqrt{\varphi'^2+\|W\|^2}\sin\varphi+(\varphi'+\|W\|)\cos\varphi}{\sqrt{3\varphi'^2+3\|W\|^2}}B\end{aligned} \tag{4.3.215}$$

biçiminde olur ve bu ifadenin türevi alınırsa $T_{\widetilde{\beta}_{\mu_4}}(s)$ teğet vektörü

$$\overline{F}=\Big(\frac{\|W\|}{\sqrt{\varphi'^2+\|W\|^2}}\Big)'\frac{\lambda\tau}{\varphi'}\csc\varphi$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}T_{\widetilde{\beta}_{\mu_4}}(s) &= \frac{\big((\overline{F}-1)\varphi'-\overline{F}\|W\|\big)\sin\varphi-\sqrt{\|W\|^2+\varphi'^2}\cos\varphi}{\sqrt{2(1-\overline{F}+(\overline{F})^2)}\sqrt{\|W\|^2+\varphi'^2}}T \\ &\quad+\frac{\overline{F}\varphi'+(\overline{F}-1)\|W\|}{\sqrt{2(1-\overline{F}+(\overline{F})^2)}\sqrt{\|W\|^2+\varphi'^2}}N \\ &\quad+\frac{\sqrt{\|W\|^2+\varphi'^2}\sin\varphi-\big(\overline{F}\|W\|+(1-\overline{F})\varphi'\big)\cos\varphi}{\sqrt{2(1-\overline{F}+(\overline{F})^2)}\sqrt{\|W\|^2+\varphi'^2}}B\end{aligned} \tag{4.3.216}$$

şeklinde bulunur. Bu ifadenin tekrar türevi alınırsa katsayılar

$$\begin{cases}\underline{\varkappa}_1=-2+4\frac{1}{\overline{F}}-4\frac{1}{(\overline{F})^2}+2\frac{1}{\overline{F}^3}+2\frac{1}{\overline{F}'}\big(2\frac{1}{\overline{F}}-1\big)\\ \underline{\varkappa}_2=-2+2\frac{1}{\overline{F}}-4\frac{1}{(\overline{F})^2}+2\frac{1}{\overline{F}^3}-2\frac{1}{\overline{F}^4}-\frac{1}{\overline{F}'}\big(1+\frac{1}{\overline{F}}\big)\\ \underline{\varkappa}_3=2\frac{1}{\overline{F}}-4\frac{1}{(\overline{F})^2}+4\frac{1}{\overline{F}^3}-2\frac{1}{\overline{F}^4}+\frac{1}{\overline{F}'}\big(2-\frac{1}{\overline{F}}\big)\end{cases}$$

olmak üzere $T'_{\widetilde{\beta}_{\mu_4}}(s)$ türev vektörü

$$\begin{aligned}T'_{\widetilde{\beta}_{\mu_4}}(s) &= \frac{(\underline{\varkappa}_1\|W\|+\underline{\varkappa}_2\varphi')\overline{F}^4\sqrt{3}\sin\varphi-\underline{\varkappa}_3\overline{F}^4\sqrt{3\|W\|^2+3\varphi'^2}\cos\varphi}{4(1-\overline{F}+(\overline{F})^2)^2\sqrt{\varphi'^2+\|W\|^2}}T \\ &\quad+\frac{(\underline{\varkappa}_1\varphi'-\underline{\varkappa}_2\|W\|)\overline{F}^4\sqrt{3}}{4(1-\overline{F}+(\overline{F})^2)^2\sqrt{\varphi'^2+\|W\|^2}}N \\ &\quad+\frac{\underline{\varkappa}_3\overline{F}^4\sqrt{3\|W\|^2+3\varphi'^2}\sin\varphi+(\underline{\varkappa}_1\|W\|+\underline{\varkappa}_2\varphi')\overline{F}^4\sqrt{3}\cos\varphi}{4(1-\overline{F}+(\overline{F})^2)^2\sqrt{\varphi'^2+\|W\|^2}}B\end{aligned}$$

biçiminde elde edilir. (4.3.213) ve (4.3.214) ifadelerinden elde edilen $\widetilde{\beta}_{\mu_4} \wedge T_{\widetilde{\beta}_{\mu_4}}$ vektörü

$$\begin{aligned}
\widetilde{\beta}_{\mu_4} \wedge T_{\widetilde{\beta}_{\mu_4}}(s) \;\; = \;\; & \frac{((2-\overline{F})\|W\|-(1+\overline{F})\varphi')\sin\varphi-(2\overline{F}1)\sqrt{\|W\|^2+\varphi'^2}\cos\varphi}{\sqrt{6-6\overline{F}+6(\overline{F})^2}\sqrt{\|W\|^2+\varphi'^2}}T \\
& +\frac{(2-\overline{F})\varphi'+(1+\overline{F})\|W\|}{\sqrt{6-6\overline{F}+6(\overline{F})^2}\sqrt{\|W\|^2+\varphi'^2}}N \\
& +\frac{((2-\overline{F})\|W\|+(1+\overline{F})\varphi')\cos\varphi+(2\overline{F}-1)\sqrt{\|W\|^2+\varphi'^2}\sin\varphi}{\sqrt{6-6\overline{F}+6(\overline{F})^2}\sqrt{\|W\|^2+\varphi'^2}}B
\end{aligned}$$

şeklinde yazılır. Geodezik eğrilik tanımından $\kappa_g^{\widetilde{\beta}_{\mu_4}}$ geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\widetilde{\beta}_{\mu_4}} = \frac{(2\overline{F}^4-\overline{F}^5)\underline{\varkappa}_1-(\overline{F}^5+\overline{F}^4)\underline{\varkappa}_2+(2\overline{F}^5-\overline{F}^4)\underline{\varkappa}_3}{4\sqrt{2}(1-\overline{F}+(\overline{F})^2)^{\frac{5}{2}}}.$$

biçiminde olur.

5. SONUÇ ve ÖNERİLER

Bu tezle ilgili sonuçlar bulgular bölümünde yer almaktadır. Burada bazı özel eğrilerin, **involüt eğrisi, Bertrand partner eğrisi, Mannheim partner eğrisi**, Frenet elemanlarının ve birim Darboux vektörünün birim küre yüzeyi üzerinde çizdiği eğrilerin Sabban çatıları oluşturuldu ve bu Sabban çatıları konum vektörü olarak alındığında oluşan Smarandache eğrileri tanımlandı ve bu Smarandache eğrilerinin geodezik eğrilikleri hesaplandı. Daha sonra bulunan sonuçlar esas eğriye, **evolüt eğrisi, Bertrand eğrisi, Mannheim eğrisi** bağlı olarak ifade edildi.

Bu çalışma Dual uzay, Lorentz uzayı gibi farklı uzaylar üzerinde de yapılabilir. Bu uzaylar üzerinde Darboux çatısı, Sabban çatısı, Bishop çatısı gibi farklı çatılar üzerine inşa edilerek bu çatılar tarafından oluşturulan Smarandache eğrileri tanımlanıp, oluşturulan Smarandache eğrileri ile ilgili sonuçlar bulunabilir.

6. KAYNAKLAR

Ali, A. T. 2010. Special Smarandache curves in the Euclidean space. International Journal of Mathematical Combinatorics, 2: 30-36.

Bayrak, N., Bektaş, Ö., Yüce, S. 2016. Special Smarandache curves in E_1^3. Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1: Mathematics and Statistics, 65(2):143-160.

Bektaş, Ö., Yüce, S. 2013. Special Smarandache curves according to Darboux frame in Euclidean 3-space. Romanian Journal of Mathematics and Computer Science, 3(1):48-59.

Bilici, M. 1999. İnvolüt-evolüt eğrilerinin küresel göstergelerinin geodezik eğrilikleri ve tabii liftleri. Yüksek Lisans Tezi, Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Samsun.

Çalışkan, A., Şenyurt, S. 2015a. Smarandache curves in terms of Sabban frame of spherical indicatrix curves. General Mathematics Notes, 31(2):1-15.

Çalışkan, A., Şenyurt, S. 2015b. N^*C^*- Smarandache curves of Mannheim curve couple according to Frenet frame. International Journal of Mathematical Combinatorics, 1:1-13.

Çalışkan, A., Şenyurt, S. 2016. Smarandache curves in terms of Sabban frame of fixed pole curve. Boletim da Sociedade parananse de Mathematica 3 srie. 34(2):53-62.

Çalışkan, M., Bilici, M. 2002. Some characterizations for the pair of involute-evolute curves in Euclidean space E^3. Bulletin of Pure and Applied Sciences. 21E(2):289-294.

Çetin M., Tuncer Y., Karacan M. K. 2014. Smarandache curves according to Bishop frame in Euclidean 3-space. General Mathematics Notes, 20:50-66.

Ekmekçi, N., İlarslan, K. 2001. On Bertrand curves and their characterization. Differential Geometry-Dynamical Systems, 3(2):17-24.

Fenchel, W. 1951. On the differential geometry of closed space curves. Bulletin of the American Mathematical Society, 57:44-54.

Görgülü, A., Özdamar, E. 1986. A generalizations of the Bertrand curves as general inclined curve in E^n. Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1, 35:53-60.

Hacısalihoğlu, H.H. 1983. Diferensiyel Geometri. İnönü Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Yayınları, Mat. No.7, Malatya.

Liu, H., Wang, F. 2008. Mannheim partner curves in 3-space. Journal of Geometry, 88(1-2):120-126.

Millman, R. S., Parker, G.D. 1977. Elements of Differential Geometry, Prentice- Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 265.

Orbay, K., Kasap, E. 2009. On Mannheim partner curves in E^3. International Journal of Physical Sciences 4 (5):261-264.

Özdamar, D. 2012. Üç boyutlu uzayda Mannheim eğri çifti. Yüksek Lisans Tezi, Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Afyon.

Sabuncuoğlu, A. 2006. Diferensiyel Geometri. Nobel Yayın Dağıtım, Ankara.

Şenyurt, S. 2012. Natural lifts and the geodesic sprays for the spherical indicatrices of the Mannheim partner curves in E^3. International Journal of the Physical Sciences, 7(23): 2980-2993.

Şenyurt, S., Özgüner, Z. 2013. Bertrand eğri çiftinin küresel göstergelerinin geodezik eğrilikleri ve tabii liftleri. Ordu Üniversitesi Bilim ve Teknoloji Dergisi, 3(2):58-81.

Şenyurt, S., Sivas, S. 2013. Smarandache eğrilerine ait bir uygulama. Ordu Üniversitesi Bilim ve Teknoloji Dergisi, 3(1):46-60.

Şenyurt, S., Sivas, S. 2014. İnvolüt evolüt eğrilerine ait Frenet çatısına göre Smarandache eğrileri. Yüksek Lisans Tezi, Ordu Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ordu.

Şenyurt, S., Çalışkan, A. 2014. Mannheim eğri çiftine ait Frenet çatısına göre Smarandache eğrileri. Yüksek Lisans Tezi, Ordu Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ordu.

Şenyurt, S., Çelik, Ü. 2016. Bertrand eğri çiftine ait Frenet çatısına göre Smarandache eğrileri. Yüksek Lisans Tezi, Ordu Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ordu.

Şenyurt, S., Altun, Y., Cevahir, C. 2016. Smarandache curves according to Sabban frame of fixed pole curve belonging to the Bertrand curves pair. AIP Conference Proceedings, 1726, 020045.

Şenyurt, S., Altun, Y., Cevahir, C. 2016. On the Darboux vector belonging to involute curve a different view. Mathematical Sciences and Applications E-notes, 4(2):131-138.

Taşköprü, K., 2013. 3- boyutlu Öklid uzayında Sabban çatısına göre Smarandache eğrileri. Yüksek Lisans Tezi, Sakarya Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Sakarya.

Taşköprü, K., Tosun, M., 2014. Smarandache curves according to Sabban frame on S^2. Boletim da Sociedade parananse de Mathematica 3 srie. 32(1):51-59.

Turgut, M., Yılmaz, S. 2008. Smarandache curves in Minkowski space-time. International Journal of Mathematical Combinatorics, 3:51-55.

DİZİN

ÖZGEÇMİŞ

Adı-Soyadı	**:**	Yasin ALTUN
Doğum Yeri	**:**	Ordu
Doğum Tarihi	**:**	05/02/1990
Yabancı Dili	**:**	İngilizce
E-mail	**:**	yasin_1990_28@hotmail.com yasinaltun2852@gmail.com
İletişim Bilgileri	**:**	Ordu Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü

Öğrenim Durumu:

Derece	Bölüm/Program	Üniversite	Yıl
Lisans	Matematik	Ordu Üniversitesi	2009-2013

Yayınlar

1. S. Şenyurt, C. Cevahir and Y. Altun, On Spatial Quaternionic Involute Curve A New View, Adv. Appl. Clifford Algebras, doi: 10.1007/s00006-016-0669-7, 2016.

2. S. Şenyurt, Y. Altun, C. Cevahir, Smarandache curves according to Sabban frame of fixed pole curve belonging to the Bertrand curves pair, AIP Conf. Proc. 1726, 020045 (2016).

3. S. Şenyurt, Y. Altun, C. Cevahir, On the Darboux vector belonging to Involute curve a different view, Mathematical Sciences and Applications E-Notes, vol.4, no.2, pp.131-138, 2016.

Katıldığım Konferanslar

1. Y.Altun, S.Şenyurt, C.Cevahir, ”Bertrand Eğri Çiftine Ait Küresel Gösterge Eğrilerinin Sabban Çatısına Göre Smarandache Eğrileri”, 28. Ulusal Matematik Sempozyumu, Akdeniz Üniversitesi, 07-09/09/2015, Antalya.

2. Y.Altun, S.Şenyurt, C.Cevahir, ”Involüt-Evolüt Eğrilerine Ait Küresel Gösterge Eğrileri-nin Sabban Çatısına Göre Smarandache Eğrileri”, 28. Ulusal Matematik Sempozyumu, Akdeniz Üniversitesi, 07-09/09/2015, Antalya.

3. C. Cevahir, S.Şenyurt, Y. Altun, ”Uzaysal Kuaterniyonik Bertrand Eğri Çiftinin Frenet Çatısına Göre Smarandache Eğrileri”, 28. Ulusal Matematik Sempozyumu, Akdeniz Üniversitesi, 07-09/09/2015, Antalya.

4. C. Cevahir, S.Şenyurt, Y. Altun, ”Uzaysal Kuaterniyonik İnvolüt-Evolüt Eğrilerinin Frenet Çatısına Göre Smarandache Eğrileri”, 28. Ulusal Matematik Sempozyumu, Akdeniz Üniversitesi, 07-09/09/2015, Antalya.

5. S. Şenyurt, Y. Altun, C. Cevahir, On the Darboux Vector Belonging to Involute Curve a Different View, 14^{th} International Geometry Symposium, 25-28/05/2016, Denizli/Turkey

6. S. Şenyurt, C. Cevahir, Y. Altun, On Spatial Quaternionic Involute Curve A New View, 14^{th} International Geometry Symposium, 25-28/05/2016, Denizli/Turkey