T. C.

ORDU ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

UYUMLU KESİRLİ VE KATUGAMPOLA KESİRLİ İNTEGRALLER İÇEREN EŞİTSİZLİKLER

İLKER MUMCU

DOKTORA TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ORDU 2019

T.C.

ORDU ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

UYUMLU KESİRLİ VE KATUGAMPOLA KESİRLİ İNTEGRALLER İÇEREN EŞİTSİZLİKLER

İLKER MUMCU

DOKTORA TEZİ

ORDU 2019

TEZ ONAY

İlker MUMCU tarafından hazırlanan **"UYUMLU KESİRLİ VE KATUGAMPOLA KESİRLİ İNTEGRALLER İÇEREN EŞİTSİZLİKLER"** adlı tez çalışmasının savunma sınavı 21.06.2019 tarihinde yapılmış ve jüri tarafından oy birliği / ~~oy çokluğu~~ ile Ordu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü MATEMATİK ANABİLİM DALI DOKTORA TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman
Doç. Dr. Erhan SET

İkinci Danışman
Prof. Dr. Cenap DUYAR
Matematik Bölümü, Ondokuz Mayıs Üniversitesi

Jüri Üyeleri	İmza
Danışman Doç. Dr. Erhan SET Matematik Bölümü, Ordu Üniversitesi	....
Üye Prof. Dr. Selahattin MADEN Matematik Bölümü, Ordu Üniversitesi	....
Üye Doç. Dr. Cemal BELEN Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü, Ordu Üniversitesi	....
Üye Doç. Dr. Ahmet Ocak AKDEMİR Matematik Bölümü, Ağrı İbrahim Çeçen Üniversitesi	....
Üye Dr. Öğr. Üyesi Sercan TURHAN Matematik Bölümü, Giresun Üniversitesi	....

11./07/2019 tarihinde enstitüye teslim edilen bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulu'nun 12/07/2019 tarih ve 2019/347 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

T.C. ORDU ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ 1923

Enstitü Müdürü
Dr. Öğr. Üyesi Mehmet Sami GÜLER

TEZ BİLDİRİMİ

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan ve kullanılan intihal tespit programının sonuçlarına göre; bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

İLKER MUMCU

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

UYUMLU KESİRLİ VE KATUGAMPOLA KESİRLİ İNTEGRALLER İÇEREN EŞİTSİZLİKLER

İLKER MUMCU

ORDU ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DOKTORA TEZİ, 131 SAYFA

TEZ DANIŞMANI: Doç. Dr. Erhan SET

İKİNCİ TEZ DANIŞMANI: Prof. Dr. Cenap DUYAR

Eşitsizlikler teorisi, matematiğin önemli çalışma alanlarından biridir. Özellikle son 150 yıllık süreçte hem cebirsel olarak hem de klasik Riemann integrali yardımıyla, bir çok matematikçi kendi isimleri ile anılan eşitsizlikler ortaya koymuştur. Günümüzde kesirli integrallerin bu alanda kullanılmaya başlanması ve bir çok özel fonksiyonun tanımlanması sonucunda literatürde klasik Riemann integrali ile yapılan çalışmaların genelleştirmeleri ve yeni biçimleri elde edilmiştir. Bu çalışmada klasik integraller ve Riemann-Liouville kesirli integralleri yardımıyla elde edilen bir çok eşitsizlik uyumlu kesirli ve Katugampola kesirli integraller yardımıyla genelleştirilmiştir.

Dört ana bölümden oluşan bu tezde, ilk bölümde konvekslik, eşitsizlikler ve kesirli integrallerin tarihsel gelişimi hakkında bilgi verilmiştir.

İkinci bölüm ise bu çalışmada kullanılan temel kavramlar, özel fonksiyonlar, fonksiyon uzayları, konveks fonksiyonların özellikleri ve önemli eşitsizlikler ile ilgili bilgiler içermektedir.

Üçüncü bölümde Riemann-Liouville kesirli integralleri, uyumlu kesirli integraller ve Katugampola kesirli integraller ile ilgili temel bilgiler ve özellikler verilmiştir. Yine bu bölümde literatürdeki diğer kesirli integraller kısaca tanıtılmıştır. Ayrıca, Riemann-Liouville kesirli integralleri yardımıyla literatürde bulunan bazı sonuçlar da bu bölümde bulunmaktadır.

Dördüncü bölümde, ilk olarak, uyumlu kesirli integraller yardımıyla Hermite-Hadamard, Hermite-Hadamard-Fejer, Ostrowski, Chebyshev ve Grüss eşitsizlikleri ile ilgili yeni sonuçlar elde edilmiştir. Daha sonra, Katugampola kesirli integralleri yardımıyla Hermite-Hadamard ve Chebyshev eşitsizlikleri ile ilgili üçüncü bölümde verilen sonuçların yeni genelleştirmeleri verilmiştir. Ayrıca uyumlu kesirli ve Katugampola kesirli integraller için yeni sonuçlar elde edilmiştir.

Son bölümde bazı sonuç ve önerilerden bahsedilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Konveks fonksiyon, Hermite-Hadamard eşitsizliği, Chebyshev eşitsizliği, Riemann-Liouville kesirli integralleri, uyumlu kesirli integraller, Katugampola kesirli integralleri.

ABSTRACT

INEQUALITIES INVOLVING CONFORMABLE FRACTIONAL AND KATUGAMPOLA FRACTIONAL INTEGRALS

ILKER MUMCU

ORDU UNIVERSITY INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

MATHEMATICS

PHD THESIS, 131 PAGES

SUPERVISOR: Doç. Dr. Erhan SET

CO-SUPERVISOR : Prof. Dr. Cenap DUYAR

Inequality theory is one of the major areas of study of mathematics. Especially in the last 150 years, with the help of both the algebraic and the classical Riemann integral, many mathematicians have revealed the inequalities which are known by their names. Nowadays, as a result of the introduction of fractional integrals in this field and the definition of many special functions, generalizations and new forms of studies with classical Riemann integral are presented in the literature. In this study, many inequalities obtained by using classical integrals and Riemnn-Liouville fractional integrals are generalized with conformable fractional and Katugampola fractional integrals.

In the thesis, which consists of four main sections, the first chapter provides basic information about the concept of convexity, inequalities and historical developments on fractional integrals.

In the second chapter, basic concepts, special functions, function spaces, properties of convex functions and important inequalities are given.

The basic information and features related to Riemann-Liouville fractional integrals, comformable fractional integrals and Katugampola fractional integrals are given in the third chapter. Again, this section briefly introduces other fractional integrals in the literature. On the other hand, some results existing in the literature with the help of Riemann-Liouville fractional integrals are introduced in this chapter.

In the fourth chapter, firstly, new results about Hermite-Hadamard, Hermite-Hadamard-Fejer, Ostrowski, Chebyshev and Grüss inequalities are obtained with the help of conformable fractional integrals. Then, with the help of Katugampola fractional integrals, new generalizations of the results, which are given in the third chapter, related to Hermite-Hadamard and Chebyshev inequalities are presented. In addition, new results are obtained for conformable fractional and Katugampola fractional integrals.

In the last chapter, some results and recommendations are given.

Keywords: Convex function, Hermite-Hadamard inequality, Chebyshev inequality, Riemann-Liouville fractional integrals, conformable fractional integrals, Katugampola fractional integrals.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın gerçekleştirilmesinde, değerli bilgilerini sabırla ve ilgiyle paylaşan, güler yüzünü ve samimiyetini esirgemeyen, bu aşamalara gelmemde büyük pay sahibi olan, her zaman saygıyla hatırlayacağım çok kıymetli danışman hocam Doç. Dr. Erhan SET'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmalarım boyunca öneri ve desteklerini eksik etmeyen Ordu Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü ve Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği Bölümü öğretim üyelerine ve hiçbir zaman yardımını esirgemeyen değerli arkadaşım Barış ÇELİK'e teşekkür ederim.

Hiçbir zaman desteğini esirgemeyen ve her zaman yanımda olan aileme, ayrıca her türlü fedakârlığı ve sevgiyi gösteren sevgili eşim Hayal YAVUZ MUMCU'ya yürekten teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa
TEZ BİLDİRİMİ..I
ÖZET.. II
ABSTRACT..III
TEŞEKKÜR IV
İÇİNDEKİLER V
ŞEKİL LİSTESİ..VI
SİMGELER ve KISALTMALAR LİSTESİ..VII
1. GİRİŞ **1**
2. TEMEL KAVRAMLAR **7**
2.1 Konveks Fonksiyon.. 7
2.2 Bazı Konveks Fonksiyon Türleri 9
2.3 Özel Fonksiyonlar 11
2.4 Bazı Fonksiyon Uzayları.. 13
2.5 Bazı Önemli Eşitsizlikler 14
2.5.1 Hermite-Hadamard ve Hermite-Hadamard-Fejer Eşitsizlikleri....................... 14
2.5.2 Ostrowski Eşitsizliği 15
2.5.3 Chebyshev ve Grüss Eşitsizlikleri.. 18
3. MATERYAL VE YÖNTEM.. **23**
3.1 Riemann-Liouville Kesirli İntegrali.. 23
3.2. Erdelyi-Kober, Hadamard, Liouville ve Weyl Kesirli İntegralleri 35
3.3 Uyumlu (Conformable) Kesirli İntegralleri 38
3.4 Katugampola Kesirli İntegralleri... 42
3.4.1 Genelleştirilmiş Katugampola Kesirli İntegralleri 45
4. BULGULAR.. **48**
4.1 Uyumlu Kesirli İntegraller İçin Eşitsizlikler.. 48
4.1.1 Hermite-Hadamard Tipli Eşitsizlikler.. 48
4.1.2 Hermite-Hadamard-Fejer Tipli Eşitsizlikler 59
4.1.3 Ostrowski Tipli Eşitsizlikler 75
4.1.4 Chebyshev Tipli Eşitsizlikler 82
4.1.5 Grüss Tipli Eşitsizlikler.. 88
4.2 Katugampola Kesirli İntegraler İçin Eşitsizlikler 94
4.2.1 Hermite-Hadamard Tipli Eşitsizlikler…………………………………………..94
4.3 Genelleştirilmiş Katugampola Kesirli İntegraller İçin Eşitsizlikler.................. 109
4.3.1 Chebyshev Tipli Eşitsizlikler 109
5. SONUÇ VE ÖNERİLER... **123**
6. KAYNAKLAR....……………………………………………………….**124**
7. ÖZGEÇMİŞ... **130**

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil 3.1 Genelleştirilmiş Kesirli İntegraller 46

SİMGELER ve KISALTMALAR LİSTESİ

$\boldsymbol{B(a,b)}$	:	Beta fonksiyonu
$\boldsymbol{B_x(a,b)}$	:	Tamamlanmamış beta fonksiyonu
$\boldsymbol{\Gamma}$	:	Gama fonksiyonu
$\boldsymbol{f'}$	:	f Fonksiyonun Birinci Mertebeden Türevi
$\boldsymbol{f''}$		f Fonksiyonun İkinci Mertebeden Türevi
$\boldsymbol{I}$	:	Reel Sayılar Kümesinde Bir Aralık
$\boldsymbol{I^{\circ}}$	:	I' nın içi
$\mathbb{N}$		Doğal Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}$	:	Reel Sayılar Kümesi
$\mathbb{C}$	:	Kompleks Sayılar Kümesi
$\mathbf{J_{a^+}^{\alpha}}$	:	α Mertebeli Sol TaraflıRiemann-Liouville Kesirli İntegral
$\mathbf{J_{b^-}^{\alpha}}$	:	α Mertebeli Sağ TaraflıRiemann-Liouville Kesirli İntegral
$\boldsymbol{(I_{\alpha}^{a}f)(t)}$	:	α Mertebeli Sol Taraflı Uyumlu Kesirli İntegral
$\boldsymbol{({}^{b}I_{\alpha}f)(t)}$	:	α Mertebeli Sağ Taraflı Uyumlu Kesirli İntegral
$\boldsymbol{{}^{\rho}I_{a+}^{\alpha}f(x)}$	:	α Mertebeli Katugampola Sol Taraflı Kesirli İntegral
$\boldsymbol{{}^{\rho}I_{b-}^{\alpha}f(x)}$	:	α Mertebeli Katugampola Sağ Taraflı Kesirli İntegral
$\boldsymbol{{}^{\rho}I_{a+,\sigma,\tau}^{\alpha,\beta}f(x)}$	:	α Mertebeli Genelleştirilmiş Sol Taraflı Katugampola Kesirli İntegral
$\boldsymbol{{}^{\rho}I_{b-,\sigma,\tau}^{\alpha,\beta}f(x)}$	:	α Mertebeli Genelleştirilmiş Sağ Taraflı Katugampola Kesirli İntegral
$\boldsymbol{(H_{a+}^{\alpha}f)(t)}$	:	α Mertebeli Hadamard Sol Taraflı Kesirli İntegral
$\boldsymbol{(H_{b-}^{\alpha}f)(t)}$	:	α Mertebeli Hadamard Sağ Taraflı Kesirli İntegral
$\boldsymbol{(I_{a+,\sigma,\tau}^{\alpha}f)(t)}$	:	α Mertebeli Erdelyi-Kober Sağ Taraflı Kesirli İntegral
$\boldsymbol{(I_{b-,\sigma,\tau}^{\alpha}f)(t)}$	:	α Mertebeli Erdelyi-Kober Sol Taraflı Kesirli İntegral
$\boldsymbol{{}_{x}W_{\infty}^{\alpha}f(x)}$	:	α Mertebeli Weyl Sol Taraflı Kesirli İntegral
$\boldsymbol{{}_{\infty}W_{x}^{\alpha}f(x)}$	:	α Mertebeli Weyl SağTaraflı Kesirli İntegral
$\boldsymbol{Re(\alpha)}$	:	α' nın Reel Kısmı
$\mathbf{L[a,b]}$	:	$[a,b]$ Aralığında İntegrallenebilen Fonksiyonlar Kümesi

1. GİRİŞ

“Bir ahtapot gibi görünür, dokunaçları uzak ve geniş bir alana uzanır, bir bölgeden diğerine ulaşırken sürekli şekil değiştirir. Araştırmacılara oldukça fazla fırsat verdiği çok açık.” Gardner konvekslik kavramını 2002 yılında bu güzel sözlerle ifade etmiştir [24]. Geometrik bir kavram olan konvekslik kavramı tarihsel olarak eski çağlara kadar uzanır. Bu kavramdan Euclid’in “Elements” eserinde bahsedilmektedir. Ayrıca Archimedes π’nin yaklaşık değerinin hesaplanmasında konvesklikten faydalanmıştır. Bununla birlikte konvekslik kavramının tanınması 1905 ve 1906 yıllarında Jensen’in çalışmalarına dayanır [34]. Jensen konveksliğin önemini farketti ve konveks fonksiyonlar üzerine çalışmaya başladı. Sonraki yıllarda matematiğin bağımsız dallarından bir olan “Konveks Fonksiyonlar Teorisi” bu çalışmaların devamında ortaya çıkmıştır. Konvekslik kavramı ile ilgilenen tek matematikçi Jensen değildir. Hermite, Hölder ve Stolz konvekslikle Jensen’den önce ilgilenen diğer öncül matematikçilerdir [47]. 20. yüzyıl boyunca teorik ve uygulamalı matematikte konvekslik kavramı üzerine yoğun araştırmalar yapılmıştır. Geometrik fonksiyonel analiz, optimizasyon teorisi, ekonomi matematiği, konveks analiz gibi birçok matematik alanında konvekslik kavramı kullanılmaktadır.

Niculescu (2018), konveksliğin bu kadar yaygın kullanım alanının olmasını iki ana nedene bağlamaktadır. Bunlardan birincisi “maksimum değerin, sınır noktasında elde edilmesidir”. İkincisi ise “Her yerel minimum noktanın aslında mutlak minimum nokta olması ve ek olarak her konveks fonksiyonun en az bir minimum noktaya sahip olmasıdır” [47].

Konvekslik, tanımı gereği içerisinde eşitsizlik barındırır. Dolayısıyla konvekslik kavramı, eşitsizlikler teorisinde önemli bir yer tutar. Her ne kadar konveksliğin tanınması Jensen sayesinde olmuşsa da bu kavramın popüler hale gelmesinde Hardy, Polya ve Littlewood’un 1934’te yazdığı “Inequalities” kitabının da büyük rolü vardır [28, 47]. Dolayısıyla konvekslik, popülaritesini birazda eşitsizlik teorisine borçludur.

Herhangi bir matematik tarihi kitabında eşitsizliklerden çok fazla bahsedilmez veya bazen hiç bahsedilmez. Eşitsizliklerin bir matematik disiplini olarak anılması yenidir. Bunun sebebi son yıllarda bu alanda çok fazla çalışma yapılıyor olmasıdır. Eşitsizliklerle ilgili Newton’un yaşadığı zamana kadar kayda değer fazla bir çalışma yoktur. Eski Yunan döneminde üçgen eşitsizliği, aritmetik-geometrik ortalama eşitsizliği ve düzlemde isoperimetrik eşitsizliği gibi eşitsizlikler biliniyordu. Archimedes, π sayısını yaklaşık olarak $223/71 < \pi < 22/7$ olarak hesaplarken görüldüğü gibi eşitsizlik kullanmıştır. Ancak antik çağda eşitsizlikler ilgili herhangi bir notasyon kullanılmamıştır. "Fazla olmak" veya "yetersiz gelmek" gibi tabirler kullanılmıştır. 18. ve 19. asrın başlarında Newton, Cauchy, Maclaurin gibi isimler bu alanda çalışma yapmaya başlamıştır. Maclaurin, özellikle limit kavramı ile ilgili ispat çalışmalarına ε - δ tekniğini kullanmıştır ve bu da analizde eşitsizliğe dayanan ispat yöntemlerinin artmasını sağlamıştır. Eşitsizliklerle ilgili çalışmalarına rağmen Maclaurin, kendi ismiyle özdeşleşebilecek bir eşitsizlik sunmamıştır. Bu dönemde özgün olarak, kendi ismi ile anılan sadece Bernoulli ve Cauchy-Schwarz-Bunyakovsky eşitsizlikleri örnek verilebilir [23].

19. yüzyılın sonlarına doğru eşitsizlikler alanında özgün ürünler verilmeye başlanmıştır. Bunların öncülleri arasında Hölder [26] ve Minkovski [46] gösterilebilir. Ancak dönüm noktası olarak gösterilebilecek çalışma Chebyshev'in 1883 yılında yayınlanan çalışmasıdır. Han'kovshov Üniversitesinin onay verdiği makale 1883 sayısında basılması gerekirken çalışmayı heyecan verici bulan editör 1882'nin son sayısına bu makaleyi eklemiştir [23]. Bir çok eşitsizlik barındıran bu çalışmadaki ilk eşitsizlik integrallenebilen f, g ve p fonksiyonları için

$$\int_a^b p(x)dx \int_a^b p(x)f(x)g(x)dx \leq \int_a^b p(x)f(x)dx \int_a^b p(x)g(x)dx$$

şeklinde olup literatürde Chebyshev eşitsizliği olarak anılmaktadır [12]. Bu eşitsizlikte f ve g aynı monotonluğa sahiptir. Aynı çalışmada Chebyshev yine kendi adı ile anılan Chebyshev fonksiyoneli'ni tanımlamıştır. Grüss 1935 yılında bu fonksiyonel ile ilgili yine kendi adı ile anılacak olan "Grüss eşitsizliğini" elde etmiştir. Grüss eşitsizliği iki fonksiyonun çarpımının ortalaması ile ortalamalarının çarpımı arasındaki sapma ile ilgilidir.

Modern anlamda konvekslik tanımını ilk veren isim Jensen, 1905 yılında Jensen eşitsizliğini yayınlamıştır [34]. Ancak konvekslikle ilgili en önemli eşitsizliklerin başında gelen ve günümüzde üzerinde çok fazla sayıda çalışma yapılan eşitsizlik

$$(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \int_a^b f(x)dx \leq (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

şeklindeki Hermite-Hadamard eşitsizliğidir. Bu eşitsizlik uzun yıllar Hadamard eşitsizliği olarak bilinmiştir. Hermite'in bu eşitsizliği Hadamard'dan daha önce bulduğu Mitrinovic tarafından keşfedilmiştir ve artık literatürde Hermite-Hadamard eşitsizliği olarak anılmaktadır. Bu eşitsizliğin önemi belirli koşullar altında konvekslik tanımı ile denk olmasından kaynaklanır [28].

Ostrowski 1938 yılında Hermite-Hadamard eşitsizliğinin sol tarafındaki iki ifadenin yani fonksiyon ile fonksiyonun integral ortalaması arasındaki sapma ile ilgili olan ve literatürde Ostrowski eşitsizliği olarak bilinen

$$\left| f(x) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(u)du \right| \leq M(b-a) \left[\frac{1}{4} + \frac{(x - \frac{a+b}{2})^2}{(b-a)^2} \right]$$

eşitsizliği ortaya koymuştur [50]. Daha sonraki yıllarda Hilbert, Hardy, Gronwall, Steffensen, Young, Lypanov, Opial gibi matematikçiler kendi isimleri anılan eşitsizlikler vermiştir [23]. Günümüzde halen eşitsizlikler üzerine bir çok çalışma yapılmaktadır. Sadece klasik Riemann integrali ile ilgili değil artık kesirli integral gibi farklı integral türleri ile de çalışmalar yapılmaktadır.

"Kesirli Analiz (Fractional Calculus)" ismi kompleks sayılarıda içeren keyfi mertebeden türev ve integral hesaplamalarını içeren bir matematik dalıdır. "Genelleştirilmiş integral ve diferansiyel analizi" veya "Keyfi mertebeden analiz" gibi isimlerle de anılır [49]. Ancak literatürde "Kesirli Analiz" ismi daha çok kullanılır. Bunun nedeni iki ünlü matematikçi Leibniz ve L'Hopital arasındaki 30 Eylül 1695 tarihli bir mektuba dayanır. L'Hopital kendi çalışmasında kullanmış olduğu lineer bir fonksiyonun n. dereceden türevi ile ilgili olarak

$$f(x) = y, \quad \frac{d^n}{dx^n}y,$$

notasyonu hakkında Leibniz'e bir soru yöneltir ve "$n = \frac{1}{2}$ olarak alınırsa ne olur?" diye sorar. Leibniz "Bu açık bir paradokstur. Ancak, birgün , faydalı sonuçlar verecektir" şeklinde cevap verir. Böylece Kesirli Analiz'in temelleri atılmış oldu [59]. P. S. Laplace, L. Euler, J. B. F. Fourier, S. F. Lacroix, J. Liouville, N. H. Abel, G. F. B. Riemann, A. K. Grünwald, O. Heaviside, G. H. Hardy, and G. W. Scott Blair gibi birçok matematikçi bu alanda direkt veya dolaylı olarak katkı vermiştir [59]. Lacroix 1819 yılında

$$\frac{d^n}{dx^n}x^m = \frac{m!}{(m-n)!}x^{m-n}, \quad m \geq n$$

kesirli türev tanımını verdiği bir makale yayınlamıştır. Bu tanım günümüzdeki kesirli türev tanımları ile uyumlu sonuçlar vermektedir. Özel olarak $m = 1$ ve $n = 1/2$ seçilirse

$$\frac{d^{1/2}}{dx^{1/2}}x = 2\sqrt{\frac{x}{\pi}}$$

sonucu elde edilir ve böylece L'Hopital'in Leibniz'e sorduğu sorunun cevabı elde edilmiş olur [52].

Çoğu kesirli türev tanımı kesirli integraller yardımıyla verilmiştir [60]. Bu tanımların en önemlilerinin başında Riemann-Liouvile kesirli integrali gelir ve

$$(I^m f) = \frac{1}{\Gamma(m)} \int_0^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau) d\tau$$

şeklinde ifade edilir. Ne yazıkki Riemann'ın öğrencilik günlerinde ortaya koyduğu bu ifade ölümünden sonra 1876 yılında basılmıştır [52]. Riemann-Liouville kesirli integralinin dezavantajlarından biri, başlangıç veya sınır değer problemleri söz konusu olduğunda fiziksel başlangıç veya sınır koşulları ile tutarlı olmamasıdır. Bu güçlüğün üstesinden gelmek için M. Caputo, Riemann-Liouville kesirli integralinin modifiye edilmiş bir hali olan ve literatürde Caputo veya Dzherbashyan-Caputo kesirli türevi olarak bilinen

$$({}^cD^\alpha_{a+} f)(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^n(\tau) d\tau$$

tanımını vermiştir [36]. Literatürde Hadamard, Grunwald-Letnikov, Erdelyi-Kober, Riesz ve Marchaud gibi matematikçiler kendi isimleri ile anılan kesirli türev tanımları vermişlerdir [20, 36]. Ancak literatürdeki bu kesirli türevlerle ilgili bazı tutarsızlıklar mevcuttur. Bunlardan bazıları:

1. Caputo kesirli türev hariç diğer kesirli türevlerin çoğu α doğal sayı olmamak koşulu ile $D^\alpha_a(1) = 0$ özelliğini sağlamaz.

2. Kesirli türevlerin hiçbiri çarpımın türevi olan

$$D^\alpha_a(fg) = fD^\alpha_a(g) + D^\alpha_a(f)g$$

kuralını sağlamaz.

3. Kesirli türevlerin hiçbiri bölümün türevi olan

$$D^\alpha_a\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{fD^\alpha_a(g) - gD^\alpha_a(f)}{g^2}$$

kuralını sağlamaz.

4. Kesirli türevlerin hiçbiri

$$D^\alpha_a(f \circ g) = f^\alpha(g(t))g^\alpha(t)$$

zincir kuralına uymaz.

5. Kesirli türevler Rolle teoremine ve ortalama değer teoremine uymaz.

6. Kesirli integraller genel olarak $D_a^\alpha D_a^\beta(f) = D_a^{\alpha+\beta} f$ kuralına uymaz.

7. Caputo tanımı f fonksiyonunun türevlenebilir olmasını şart koşar [38].

Yine, içerisinde kesirli türev barındıran

$$y^{(\frac{1}{2})} + y = x^{(\frac{1}{2})} + \frac{2}{\Gamma(2.5)} x^{(\frac{3}{2})}, \quad y(0) = 0$$

gibi bir diferansiyel denkleminin çözümü Riemann-Liouville kesirli integralleri ile mümkün olmamaktadır.

2014 yılında Khalil, klasik türev tanımına benzeyen "Uyumlu kesirli türev" tanımını vermiştir [40]. Yukarıda bahsedilen uyumsuzluklar bu kesirli integral tanımında görülmemektedir ve yukarıdaki diferansiyel denklemin çözümü elde edilebilmektedir. Bu türev kavramı, Abdeljawad tarafından 2015 yılında yapılan çalışmada dahada geliştirilmiştir. Abdeljawad, $n = 0, 1, 2, ..$ olmak üzere $\alpha \in (n, n+1]$ için sağ ve sol uyumlu kesirli integral tanımları vermiş ve $\alpha = n + 1$ olarak seçildiğinde uyumlu kesirli integrallerin Riemann-Liouville kesirli integrallerine indirgendiğini göstermiştir. A. Yalçın (2016) yüksek lisans çalışmasında, A. Gözpınar (2018) doktara çalışmasında uyumlu kesirli integraller için yeni sonuçlar elde etmiştir [3, 25]. Son zamanlarda da E. Set, M.Z. Sarıkaya, A.O. Akdemir, D.R. Anderson, M.A. Khan, J.Choi gibi bazı matematikçiler uyumlu kesirli integraller ile ilgili çalışmalar yapmışlardır.

Katugampola 2014 yılında Riemann-Liouville ve Hadamard kesirli türevlerini tek bir formda genelleyen bir kesirli türev tanımı vermiştir [36]. Yine 2016 yılında Katugampola Riemann-Liouville, Hadamard, Erdelyi-Kober, Katugampola, Weyl ve Liouville kesirli integrallerini tek bir formda genelleyen "Genelleştirilmiş Katugampola kesirli integrali" tanımını vermiştir [39].

Kesirli analiz ile ilgili daha fazla bilgi için 1993'te basılan S. Samko, A. Kilbas ve O. Marichev'in "Fractional Integrals and Derivatives, Theory and Applications" eserine başvurulabilir [60] . Ayrıca, bu alanda yazılmış kitap, dergi ve yapılan konferanslar ile ilgili geniş literatür araştırmasını içeren ve J. T. Machado, V. Kiryakova ve F. Mainardi tarafından 2010 yılında yayınlanan "Recent History of Fractional Calculus" adlı bir makale mevcuttur [42].

Bu tez çalışmasında uyumlu kesirli integraller yardımıyla yeni Hermite-Hadamard, Hermite-Hadamard-Fejer, Ostrowski, Chebyshev ve Grüss eşitsizlikleri ile Katugampola kesirli integraller yardımıyla yeni Hermite-Hadamard ve Chebyshev eşitsizlikleri elde edilmiştir. Böylece daha önce klasik integraller ve Riemann-Liouville kesirli integralleri ile elde edilen bazı sonuçlar genelleştirilmiştir. Bu sonuçların ispat süreçlerinde integraller için mutlak değer eşitsizliği, Hölder eşitsizliği ve Power-mean eşitsizliği sıklıkla kullanılmıştır. Grüss tipli eşitsizliklerin elde edilmesinde Cauchy-Schwarz-Bunyakovsky eşitsizliğinden faydalanılmıştır. Tezin organizasyanu şu şekildedir:

İlk bölümde eşitsizlikler, konvekslik ve kesirli integrallerle ilgili tarihsel süreçle birlikte genel bilgilere yer verilmiş ve tezin hedefleri ortaya konulmuştur.

İkinci bölümde tez boyunca kullanılacak olan temel kavram ve özelliklere yer verilmiştir. Sırasıyla konvekslik kavramı, bazı konveks fonksiyon türleri, özel fonksiyonlar, fonksiyon uzayları ve bu tezde yeni sonuçları ortaya konulan Hermite-Hadamard, Hermite-Hadamard-Fejer, Ostrowski, Chebyshev ve Grüss eşitsizlikleri ile ilgili ayrıntılı bilgiler verilmiştir. Yine işlemlerde kullanılan yardımcı eşitsizlikler bu bölümün sonunda sunulmuştur.

Üçüncü bölümde öncelikle Riemann-Liouville kesirli integralleri ile ilgili genel bilgiler verilmiştir. Ardından bu kesirli integraller ile ilgili daha önce literatürde elde edilmiş sonuçlara yer verilmiştir. Daha sonra Hadamard, Erdelyi-Kober, Weyl ve Liouville kesirli integrallerinin tanımları verilmiştir. Sonrasında bu çalışmanın konusu olan "Uyumlu kesirli integraller" ve "Katugampola kesirli integraller" ile ilgili ayrıntılı bilgiler verilmiştir.

Dördüncü bölüm kendi içerisinde iki kısıma ayrılmıştır. İlk olarak uyumlu kesirli integraller yardımıyla elde edilen yeni bulgulara yer verilmiştir. Alt bölümlerde sırasıyla Hermite-Hadamard, Hermite-Hadamard-Fejer, Ostrowski, Chebyshev ve Grüss eşitsizlikleri ile ilgili yeni sonuçlar sunulmuştur. İkinci bölümde ise Katugampola kesirli integralleri ilgili yeni sonuçlar yer almıştır. Alt bölümlerde sırasıyla Hermite-Hadamard ve Chebyshev eşitsizlikleri ile ilgili yeni sonuçlara yer verilmiştir. Ayrıca bölüm boyunca elde edilen sonuçların hangi durumlarda hangi sonuçlara indirgendiğide ifade edilmiştir.

Beşinci bölümde sonuç ve önerilere yer verilmiştir.

Altıncı bölümde tezde kullanılan kaynaklara yer verilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, tez boyunca gerekli olan tanım, teorem ve bazı temel özellikler ile birlikte tezde kullanılacak bazı eşitsizliklere yer verilecektir.

2.1 Konveks Fonksiyon

Fonksiyonların sınıflandırılması süreklilik, konvekslik, monotonluk ve diferansiyellenebilme gibi çeşitli özelliklerle yapılabilmektedir. Konvekslik kavramının matematiğin çeşitli dallarının gelişiminde önemli bir rol oynadığı bilinmektedir. Özellikle eşitsizlik teorisinde Hermite-Hadamard eşitsizliği konvekslik kavramı ile ilişkilidir. Bu bölümde ilk olarak bu kavramın tanımı ile başlayıp süreklilik, diferansiyellenebilirlik ve monotonluk gibi özelliklerle ilişkisi verilecektir. Daha sonra bu tezde kullanılacak olan konvekslik türlerine yer verilecektir.

Tanım 2.1.1 (Konveks Fonksiyon): $I, \mathbb{R}$ de bir aralık ve $f : I \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. O halde her $x, y \in I$ ve $t \in [0, 1]$ için,

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) \tag{2.1.1}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonuna konveks fonksiyon denir. Eğer $t \in (0, 1)$ alınırsa

$$f(tx + (1-t)y) < tf(x) + (1-t)f(y) \tag{2.1.2}$$

olur. Bu fonksiyona kesin konveks fonksiyon denir. (2.1.1) eşitsizliğinde $'' \geq ''$ olması durumunda ise f fonksiyonuna konkav fonksiyon denir. Yine (2.1.2) ifadesinde $'' >''$ alınırsa f fonksiyonuna kesin konkav fonksiyon denir. [55].

Tanımın geometrik yorumuna gelince, fonksiyonun konveks olduğu $[x, y]$ aralığında seçilen $ty + (1-t)x$ noktasındaki değeri, uç noktalarının koordinatları $(x, f(x))$ ve $(y, f(y))$ olan kirişin temsil ettiği fonksiyonda aldığı değerden daima küçüktür. Diğer bir ifadeyle kiriş eğrinin üstünde ya da eğri kirişin altında kalır denir.

Önerme 2.1.1 Konveks fonksiyonlar aşağıdaki özelliklere sahiptir:

i. Herhangi konveks iki fonksiyonun toplamı yine konvekstir. Eğer fonksiyonlardan biri kesin konveks ise toplam fonksiyonu da kesin konvekstir.

ii. Herhangi bir konveks fonksiyonun skaler bir sayıyla çarpımı yine konvekstir.
iii. Bir fonksiyon bir aralıkta konveks ise bu aralığın bir alt aralığında da konvekstir [47].

Tanım 2.1.2 $I \subset \mathbb{R}$ ve f fonksiyonu I aralığında tanımlı reel değerli bir fonksiyon olsun. Her $x, y \in I$ için

$$(x-y)(f(x)-f(y)) > 0$$

şartı sağlanıyorsa f fonksiyonuna I aralığında artan fonksiyon denir. Aradaki işaret "$\geq$" olursa azalmayan fonksiyon denir.
Eğer

$$(x-y)(f(x)-f(y)) < 0$$

olursa f fonksiyonuna I aralığında azalan fonksiyon denir. Aradaki işaret "$\leq$" olursa artmayan fonksiyon denir [5].

Sonuç 2.1.1 f ve g fonksiyonları konveks ve aynı zamanda g fonksiyonu artan ise $g \circ f$ fonksiyonu da konvekstir [58].

Tanım 2.1.3 f ve g fonksiyonları $[a,b]$ kapalı aralığında sürekli iki fonksiyon olsun. Her $x, y \in [a,b]$ için

$$\{(f(x)-f(y))(g(x)-g(y))\} \geq 0 \tag{2.1.3}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa bu fonksiyonlara senkronize fonksiyonlar denir. Ayrıca (2.1.3) eşitsizliğinden

$$f(x)g(x)+f(y)g(y) \geq f(x)g(y)+f(y)g(x)$$

yazılabilir [43].

Tanım 2.1.4 $f(x)$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında tanımlı bir fonksiyon olsun. Her $x \in [a,b]$ için $|f(x)| \leq M$ olacak şekilde bir $M > 0$ sayısı varsa f fonksiyonuna $[a,b]$ aralığında sınırlı fonksiyon denir [7].

Tanım 2.1.5 I, $\mathbb{R}$ kümesinde bir aralık, $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $x_0 \in I$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık öyle bir $\delta > 0$ sayısı mevcut öyleki $|x - x_0| < \delta$ eşitsizliğini sağlayan her $x \in I$ için $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ ise f fonksiyonuna x_0 noktasında süreklidir denir. Eğer f her $x_0 \in I$ noktasında sürekli ise f'ye I üzerinde süreklidir denir [7].

Teorem 2.1.1 f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında konveks olsun. O halde
i. $f, (a,b)$ aralığında süreklidir,
ii. $f, [a,b]$ aralığında sınırlıdır [6].

Tanım 2.1.6 $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $x_0 \in I$ olsun.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

limiti mevcutsa f fonksiyonu x_0 noktasında diferansiyellenebilir (türevlenebilir) denir. Bu limit değeri f'nin x_0'daki türevi denir ve $f^{'}(x_0)$ ile gösterilir [7].

Teorem 2.1.2 f bir fonksiyon olmak üzere $f^{''}$, (a, b) aralığında mevcut olsun. O halde f fonksiyonunun konveks olması için gerek ve yeter şart her $x \in (a, b)$ için $f^{''}(x) \geq 0$ olmasıdır [55].

Teorem 2.1.3 f ve g, $[a, b]$ aralığında tanımlı ve g ile fg bu aralıkta integrallenebilir olsun. g, $[a, b]$ üzerinde her yerde aynı işaretli ve f sınırlı ise $[inf f, sup f]$ aralığında öyle bir k sabiti vardır ki

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = k \int_a^b g(x)dx$$

'dir. Eğer f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli ise $[a, b]$ aralığında en az bir x_0 noktası için

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(x_0) \int_a^b g(x)dx$$

olur.

Özel olarak her $x \in [a, b]$ için $g(x) = 1$ alınırsa

$$k = \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x)dx$$

bulunur ki bu değere f'nin $[a, b]$ aralığındaki ortalama değeri denir [7].

2.2 Bazı Konveks Fonksiyon Türleri

Tanım 2.2.1 (Quasi-Konveks Fonksiyon) $I \subset \mathbb{R}$ boştan farklı bir küme $I \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Her $x, y \in [a, b]$ ve $t \in [0, 1]$ için

$$f(tx + (1 - t)y) \leq \max\left\{f(x), f(y)\right\}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonuna quasi-konveks fonksiyon denir. Eğer

$$f(tx + (1 - t)y) \geq \min\left\{f(x), f(y)\right\}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonuna quasi-konkav fonksiyon denir [1].

Not 2.2.1 Quasi-konvekslik, konveksliğin daha genel halidir. Yani bir fonksiyon konveks ise quasi-konveks fonksiyondur. Fakat, bu ifadenin tersi doğru değildir.
Aşağıda konveks olmayan fakat quasi-konveks olan bir fonksiyon örneği verilmiştir.

Örnek 2.2.1 $g : [-2, 2] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$g(t) = \begin{cases} 1, & t \in [-2, -1], \\ t, & t \in (-1, 2] \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Burada $g(t)$ fonksiyonu $[-2, 2]$ aralığında quasi-konvekstir fakat konveks değildir [30].

Ayrıca quasi-konveks bir fonksiyon, konveks ve sürekli olmayabilir. Mesela $f(x) = [\![x]\!]$ tamdeğer fonksiyonu (x'den büyük olmayan en büyük tamsayı) quasi-konvekstir fakat ne konvekstir ne de süreklidir [58].

Tanım 2.2.2 (Harmonik Konveks Fonksiyon): $I \subseteq \mathbb{R} - \{0\}$ reel sayı aralığı olsun. $f : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu her $x, y \in I$ ve her $t \in [0, 1]$ için

$$f\left(\frac{xy}{tx + (1-t)y}\right) \leq tf(y) + (1-t)f(x) \tag{2.2.1}$$

şartını sağlıyorsa f fonksiyonuna harmonik konveks fonksiyon denir. (2.2.1) eşitsizliğinde $\geq$ kullanılırsa f fonksiyonuna harmonik konkav fonksiyon denir [31].

Örnek 2.2.2 $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$ fonksiyonu harmonik konveks, $g : (-\infty, 0) \to \mathbb{R}$ $g(x) = x$ fonksiyonu harmonik konkavdır.

Lemma 2.2.1 $I \subseteq \mathbb{R}/\{0\}$ aralığı her $x \in I$ için $\frac{1}{x} \in I$ şartını sağlasın. O halde $f : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun harmonik konveks olması için gerek ve yeter şart $f(\frac{1}{x})$ fonksiyonunun konveks olmasıdır [1].

Örnek 2.2.3 g fonksiyonu $(0, \infty)$ aralığında tanımlı reel değerli bir fonksiyon olsun.

$$g(t) = \begin{cases} t, & 0 < t < 3 \\ 9 - \dfrac{9}{t}, & t \geq 3 \end{cases}$$

fonksiyonu harmonik konvekstir çünkü $g(\frac{1}{t})$ fonksiyonu konvekstir.

Lemma 2.2.2 $f : I \subseteq \mathbb{R}/\{0\} \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun harmonik konveks olması için gerek ve yeter şart $xf(x)$ fonksiyonunun konveks olmasıdır [1].

Tanım 2.2.3 (İkinci anlamda s-Konveks Fonksiyon): $f : I \subset [0,\infty) \to \mathbb{R}$ ve $s \in (0,1]$ olsun. $\alpha, \beta \geq 0$ ve $\alpha + \beta = 1$ olmak üzere her $x, y \in [0,\infty)$ için

$$f(\alpha x + \beta y) \leq \alpha^s f(x) + \beta^s f(y)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonuna ikinci anlamda s-konveks fonksiyon denir. $[0,\infty)$ aralığında $s = 1$ alınırsa s-konvekslik klasik konveksliğe dönüşür [10].

2.3 Özel Fonksiyonlar

1720'li yıllarda Leonard Euler kesirli fonksiyonların genişletilmiş bir hali olan Gama fonksiyonunu şu şekilde tanımlamıştır.

Tanım 2.3.1 (Gama Fonksiyonu):
$z \in \mathbb{C}$ olsun.

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona Gama fonksiyonu veya Euler-Gama fonksiyonu denir. Bu fonksiyon $Re(z) > 0$ için yakınsaktır. Gama fonksiyonunun en temel özelliği

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$$

eşitliğidir. Ayrıca bu özellik yardımıyla $\Gamma(1) = 1$ elde edilir. Buradan

$$\Gamma(2) = 1\Gamma(1) = (2-1)! = 1,$$

$$\Gamma(3) = 2\Gamma(2) = (3-1)! = 2,$$

ve $n \in \mathbb{N}$ için tümevarım yöntemiyle

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n!$$

eşitliğine ulaşılır.
Yine Gama fonksiyonu için

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$$

eşitliği sağlanır. Bu eşitlikte $z = \frac{1}{2}$ alınırsa

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$$

elde edilir [35].

Tanım 2.3.2 (Beta Fonksiyonu):

$\Gamma(\alpha)$, Euler-Gama fonksiyonu ve $\mathbb{Z}_0^-$ pozitif olmayan tamsayılar kümesi olsun. O halde

$$B(\alpha,\,\beta)=\begin{cases}\displaystyle\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\,dt & (Re(\alpha)>0;\;Re(\beta)>0)\\[2ex] \dfrac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} & (\alpha,\,\beta\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}_0^-)\end{cases}$$

fonksiyonuna beta fonksiyonu denir. Ayrıca

$$B_x(\alpha,\,\beta):=\int_0^x t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\,dt \quad (Re(\alpha)>0)$$

fonksiyonuna da tamamlanmamış beta fonksiyonu denir. Tez boyunca, $B(\alpha,\,\beta)$ ve $B_x(\alpha,\,\beta)$ ifadelerinde α ile β reel sayı olarak kabul edilecektir.

$x=1$ için tamamlanmamış beta fonksiyonu beta fonksiyonuna dönüşür. Bu fonksiyonlarla ilgili

i. $B(a,b)=B_t(a,b)+B_{1-t}(b,a)$

ii $B(x+1,y)=\frac{x}{x+y}B(x,y)$

iii. $B(x+1,y)+B(x,y+1)=B(x,y)$

iv. $B(x,y)=B(y,x)$

özellikleri geçerlidir.

Ayrıca Newton-Leibnitz kuralı olarak bilinen

$$\frac{d}{dx}\int_{v(x)}^{u(x)} f(t)dt=u^{'}(x)f(u(x))-v^{'}(x)f(v(x))$$

özelliğinden

$$\frac{d}{dx}B_x(a,b)=x^{a-1}(1-x)^{b-1}$$

özelliği elde edilir [67].

Tanım 2.3.3 (Hipergeometrik Fonksiyon):

19. yüzyılda, Alman matematikçi Gauss, 1650'li yıllarda Wallis tarafından tanımlanan "hipergeometrik serileri" araştırmaya başlamış ve kendi adı ile anılan Gauss hipergeometrik fonksiyonu tanımlayıp ${}_2F_1$ notasyonu ile göstermiştir. Bu çalışmada kullanılacak olan Hipergeometrik fonksiyonların Euler integral gösterimi

$${}_2F_1(a,b;c;z)=\frac{1}{\beta(b,c-b)}\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-zt)^{-a}dt,\quad c>b>0,\;\; z<1$$

şeklinde tanımlanır.

Hipergeometrik fonksiyonlar aşağıdaki özelliklere sahiptir:

i. ${}_2F_1(a,b;c;z) ={}_2 F_1(b,a;c;z)$

ii. ${}_2F_1(a,b;c;0) ={}_2 F_1(0,b;c;z) = 1$

iii. ${}_2F_1(a,b;b;z) = (1-z)^{-a}$.

Ayrıca hipergeometrik fonksiyonlarla ilgili Euler dönüşüm formülü

$$ {}_2F_1(a,b;c;z) = (1-z)^{c-a-b}\,{}_2F_1(c-a,c-b;c;z) $$

şeklindedir [41].

2.4 Bazı Fonksiyon Uzayları

Tanım 2.4.1 ($L_p[a,b]$ uzayı): $[a,b]$ aralığında tanımlı ve $p \geq 1$ için

$$ \|f\|_p := \left[\int_a^b |f(s)|^p ds\right]^{\frac{1}{p}} < \infty $$

normuna sahip tüm reel değerli Lebesque anlamında ölçülebilir fonksiyonların kümesi $L_p[a,b]$ ile gösterilir. Burada

$$ \|f\|_\infty := \texttt{esssup}_{s\in[a,b]}|f(s)| < \infty $$

olarak tanımlanır.

Özel olarak $L_1[a,b]$ uzayı

$$ \|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|dx < \infty $$

normuna sahip fonksiyonlar uzayıdır. Tez boyunca $L_1[a,b]$ uzayı $L[a,b]$ ile gösterilecektir [5].

Tanım 2.4.2 (a,b) aralığındaki $\|\varphi\|_{X_c^p} < \infty$ şartını sağlayan kompleks değerli Lebesque ölçülebilir φ dönüşümlerinin uzayı $X_c^p(a,b)$ $(c \in \mathbb{R}\ 1 \leq p \leq \infty)$ olsun. Burada

$$ \|\varphi\|_{X_c^p} = \left(\int_a^b |x^c\varphi(x)|^p \frac{dx}{x}\right)^{1/p} \quad (1 \leq p < \infty) $$

ve

$$ \|\varphi\|_{X_c^p} = \texttt{esssup}_{x\in(a,b)}[x^c|\varphi(x)|]. $$

şeklinde tanımlıdır.

$c = 1/p \ (1 \leq p < \infty)$ için X_c^p uzayı

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(t)|^p dt \right)^{1/p} < \infty \quad (1 \leq p < \infty)$$

$$\|f\|_\infty = \texttt{esssup}_{a \leq t \leq b} |f(t)|$$

normları ile klasik $L_p(a, b)$ uzayına dönüşür [36].

2.5 Bazı Önemli Eşitsizlikler

2.5.1 Hermite-Hadamard ve Hermite-Hadamard-Fejér Eşitsizlikleri

Konveks bir f fonksiyonu için

$$(b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \int_a^b f(x)dx \leq (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

eşitsizliği literatürde Hadamard eşitsizliği olarak bilinir. Oysa bu eşitsizlik 22 Kasım 1881'de Hermite tarafından *Mathesis* isimli dergiye bir mektupla gönderilmiştir. Ve bu mektup 1883 'de *Mathesis* dergisinin 3. sayısının 82. sayfasında yayınlanmıştır [29, 45]. Kompleks fonksiyonlar teorisi ve tarihçesi üzerinde araştırmalar yapan ve Hermite'in mektubundan habersiz olan E.F. Beckenbach, bu eşitsizliğin 1893 yılında Hadamard tarafından kanıtlandığını belirtmiştir [8]. Fejér 1906 yılında bu eşitsizliği genelleştirdiğinde yine Hermite'in çalışmasından habersizdi. 1974 yılında Mitrinovic Hermite'in *Mathesis* 'deki mektubunu bulduktan sonra yukarıda geçen tarihsel gerekçelerle bu eşitsizlik günümüzde daha çok "Hermite-Hadamard Eşitsizliği" olarak adlandırılmaktadır.

Hermite-Hadamard eşitsizliğinin, konveks fonksiyonlar teorisi için önemi büyüktür. Hardy, Littlewood ve Polya'nın önemli eseri "Inequalities"'de belirtildiği gibi sürekli bir f fonksiyonunun (a, b) aralığında konveks olması için gerek ve yeter şart $a \leq x-h < x < x+h \leq b$ için

$$f(x) = \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(t)dt$$

şartının sağlanmasıdır. Bu sonuç f fonksiyonu (a, b) aralığında sürekli olduğunda (2.5.1) ile denktir [21].

Teorem 2.5.1 (Hermite-Hadamard Eşitsizliği) I, $\mathbb{R}$'de bir aralık, $f : I \to \mathbb{R}$ konveks bir fonksiyon, $a, b \in I$ ve $a < b$ olsun. Bu durumda

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{2.5.1}$$

eşitsizliği geçerlidir [53].

İspat. f fonksiyonu konveks olduğundan fonksiyon grafiği üzerinde alınan herhangi iki noktayı birleştiren doğru parçasının fonksiyon grafiğinin üzerinde olduğu bilinmektedir. Buna göre

$$f(x) \leq f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

eşitsizliği mevcuttur. Bu eşitsizlikte her iki taraf $[a, b]$ aralığı üzerinden x değişkenine göre integre edilirse

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &\leq \int_a^b f(a)dx + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \int_a^b (x - a)dx \\ &= \frac{f(a) + f(b)}{2} \end{aligned}$$

dir. Ayrıca sol tarafın ispatına gelindiğinde, sırasıyla $x = \frac{a+b-t(b-a)}{2}$ ve $x = \frac{a+b+t(b-a)}{2}$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$\begin{aligned} \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx &= \frac{1}{b-a} \int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)dx + \frac{1}{b-a} \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left[f\left(\frac{a+b-t(b-a)}{2} \right) + f\left(\frac{a+b+t(b-a)}{2} \right) \right] dt \\ &\geq f\left(\frac{a+b}{2} \right) \end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır [48].

Fejér 1906 yılında trigonometrik polinomlarla çalışırken Hermite-Hadamard eşitsizliğinin daha genel halini aşağıdaki gibi elde etmiştir [55].

Teorem 2.5.2 (Hermite-Hadamard-Fejér Eşitsizliği): $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ konveks bir fonksiyon, $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ negatif olmayan, integrallenebilen ve $(a + b)/2$ noktasına göre simetrik bir fonksiyon ise

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \int_a^b g(x)dx \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, g(x)dx \leq \frac{f(a) + f(b)}{2} \int_a^b g(x)dx \qquad (2.5.2)$$

eşitsizliği sağlanır.

2.5.2 Ostrowski Eşitsizliği

1938 yılında A.M. Ostrowski, bir fonksiyonun, kendi integral ortalamasından ne kadar sapma gösterdiği problemini ele aldı. Eğer $[a, b]$ kapalı aralığında tanımlı bir f fonksiyonu sürekli kabul edilirse, fonksiyonun $x \in [a, b]$ noktasındaki değeri ile $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ integral ortalaması arasındaki sapma fonksiyonun maksimum ve minimum değeri arasındaki farka yakın çıkmaktadır. Eğer f fonksiyonu (a, b) aralığında diferansiyellenebilir ve fonksiyonun türevi bu aralıkta sınırlı $(f^{'}(x) \leq M)$ ise maksimum ve minimum değer arasındaki fark $M(b-a)$ değerini aşmıyor. Dahası fonksiyon ve integral ortalaması arasındaki mutlak sapma $\frac{1}{2}M(b-a)$ değerini aşmıyor. Eğer x aralığın orta noktası yani $x = \frac{a+b}{2}$ ise mutlak sapma $\frac{1}{4}M(b-a)$ kadardır.

Yukarıda bahsedilen durumları formüle eden Ostrowski kendi adı ile anılan eşitsizliği aşağıdaki gibi ifade etmiştir.

Teorem 2.5.3 (Ostrowski Eşitsizliği):
$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu (a, b) aralığında diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve her $t \in (a, b)$ için $|f^{'}(x)| \leq M$ olsun. O halde

$$\left|f(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right| \leq M(b-a)\left[\frac{1}{4} + \frac{(x - \frac{a+b}{2})^2}{(b-a)^2}\right]$$

eşitsizliği sağlanır [50].

İspat. Hipotezden

$$(t-a)(f^{'}(t) + M) \geq 0$$

olduğu açıktır. Buradan

$$\int_a^x (t-a)(f^{'}(t) + M)dt \geq 0 \tag{2.5.3}$$

yazılır ve kısmi integrasyon yöntemi uygulanırsa

$$(x-a)f(x) - \int_a^x f(t)dt + \frac{M}{2}(x-a)^2 \geq 0 \tag{2.5.4}$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$(b-t)(M - f^{'}(t)) \geq 0,$$

ve devamında

$$\int_x^b (b-t)(M - f^{'}(t))dt \geq 0 \tag{2.5.5}$$

elde edilir. Kısmi integrasyon yöntemi uygulanırsa

$$(b-x)f(x) - \int_x^b f(t)dt + \frac{M}{2}(b-x)^2 \geq 0 \tag{2.5.6}$$

bulunur. (2.5.4) ve (2.5.6) taraf tarafa toplanırsa

$$f(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt \geq -\frac{M}{2(b-a)}[(x-a)^2 + (x-b)^2] \tag{2.5.7}$$

elde edilir. Diğer taraftan (2.5.3) ve (2.5.5) eşitsizliklerinden

$$\int_a^x (t-a)(f'(t)+M)dt + \int_x^b (b-t)(M-f'(t))dt \geq 0$$

ve buradan

$$f(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt \leq \frac{M}{2(b-a)}[(x-a)^2+(x-b)^2] \tag{2.5.8}$$

elde edilir. (2.5.7) ve (2.5.8) eşitsizliklerinden

$$\left| f(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt \right| \leq \frac{M}{2(b-a)}[(x-a)^2+(x-b)^2] \tag{2.5.9}$$

yazılabilir.

$$(x-a)^2+(x-b)^2 = 2(b-a)^2\left[\frac{1}{4}+\frac{\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2}{(b-a)^2}\right]$$

eşitsizliği (2.5.9) eşitsizliğinde yerine yazılırsa istenen sonuç elde edilir ve ispat tamamlanır [22].

Eşitsizliğin sağ tarafındaki $\frac{1}{4}$ sabiti elde edilebilecek en küçük sabit olup $x = \frac{a+b}{2}$ değeri için elde edilir. Anastassiou 1995 yılında bu eşitsizliğin alternatif bir ispatını vermiştir [4].

Literatürde Cauchy-Schwarz eşitsizliği veya Cauchy-Schwarz-Bunyakovsky eşitsizliği olarak bilinen eşitsizlik şu şekildedir:

Teorem 2.5.4 (Cauchy-Schwarz-Bunyakovsky Eşitsizliği): $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrallenebilen iki fonksiyon ve $\lambda \in \mathbb{R}$ olsun. Her $t \in [a,b]$ için

$$\int_a^t f(x)dx = \lambda \int_a^t g(x)dx$$

ilişkisi mevcut ise

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \leq \left(\int_a^b [f(x)]^2dx\right)\left(\int_a^b [g(x)]^2dx\right)$$

eşitsizliğine Cauchy-Schwarz-Bunyakovsky eşitsizliği denir [60].

Aslında, Cauchy 1821 yılında "Course d'Analyse Algébrique" isimli eserinde bu eşitsizliğin toplam versiyonunu vermiştir. Paris'te Cauchy ile çalışma fırsatını bulan ve Cauchy'nin çalışmalarına aşina olan Bunyakovsky 1859 yılında "Mémoire" isimli dergide bu eşitsizliğin yukarıda gösterilen integral formunu vermiştir. Minimal yüzeyler üzerine çalışmalar yapan Alman matematikçi Schwarz 1885 yılında bu eşitsizliğin iki katlı integral formunu vermiştir. Bunyakovsky'nin eseri fransızca basıldığı için çoğu Avrupa ülkesinde bilinmemesi ve Hardy ile Littlewood'un 1920 yılına ait bir çalışmasında bu eserin cebirsel versiyonu için Cauchy-Schwarz eşitsizliği tabirini kullanması eşitsizliğin ismi konusunda bir karmaşaya yol açmıştır [62] .

1889 yılında Alman matematikçi Otto Hölder kendi adı ile anılan aşağıdaki eşitsizliği elde etmiştir. Cauchy-Schwarz eşitsizliğinin genel bir hali olan bu eşitsizliğinin integral versiyonu şu şekildedir:

Teorem 2.5.5 (İntegraller için Hölder Eşitsizliği):
$p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. f ve g, $[a, b]$ aralığında tanımlı ve integrallenebilen iki fonksiyon olsun. $|f|^p$ ve $|g|^q$, $[a, b]$ aralığında integrallenebilen fonksiyonlar ise

$$\int_a^b |f(x)g(x)|dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği sağlanır [44].

Hölder eşitsizliğinin bir sonucu olan ve daha iyi sonuçlar elde etmek için kullanılan Power Mean eşitsizliği aşağıdaki gibidir.

Sonuç 2.5.1 f ve g, $[a, b]$ aralığında tanımlı ve integrallenebilen iki fonksiyon olsun. $q \geq 1$, $|f|$ ve $|g|^q$, $[a, b]$ aralığında integrallenebilen fonksiyonlar ise

$$\int_a^b |f(x)g(x)|dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|dx\right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_a^b |f(x)||g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir.

2.5.3 Chebyshev ve Grüss Eşitsizlikleri

Chebyshev'in 1883 yılında Han'kovshov Üniversitesi'ne gönderdiği çalışmada bir çok özgün eşitsizlik bulunmaktadır [23]. Üniversite komitesi bu çalışmadan çok etkilenmiş ve normalde 1883 basımında olması gereken bu çalışmayı 1882 yılının son sayısına eklemiştir. Bir dizi eşitsizlik ve ispatlarının bulunduğu bu çalışmadaki ilk eşitsizlik şu şekildedir:

Teorem 2.5.6 f, g ve p fonksiyonları $[a, b]$ aralığında integrallenebilir, f ve g senkronize fonksiyonlar ve p fonksiyonu pozitif değerli olsun. O halde

$$\int_a^b p(x)dx \int_a^b p(x)f(x)g(x)dx \leq \int_a^b p(x)f(x)dx \int_a^b p(x)g(x)dx$$

eşitsizliği geçerlidir [12].

Literatürde Chebyshev Eşitsizliği olarak bilinen eşitsizlik yukarıdaki eşitsizlikte $p(x) = 1$ alınmasıyla elde edilen eşitsizliktir ve aşağıdaki gibi ifade edilir:

Teorem 2.5.7 (Chebyshev Eşitsizliği): f ve g fonksiyonları integrallenebilir ve senkronize fonksiyonlar olsun. O halde

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx \geq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \int_a^b g(x)\,dx, \tag{2.5.10}$$

eşitsizliği geçerlidir. Eğer f ve g farklı monotonluğa sahip ise eşitsizlik yön değiştirir. f ve g fonksiyonları sabit ise eşitlik sağlanır [11].

İspat. f ve g, senkronize fonksiyonlar olduğundan

$$(f(x) - f(y))(g(x) - g(y)) \geq 0$$

yazılabilir. İki tarafın çift katlı integrali alınırsa

$$\int_a^b \int_a^b (f(x) - f(y))(g(x) - g(y))dxdy \geq 0$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} &\int_a^b \int_a^b f(x)g(x)dxdy + \int_a^b \int_a^b f(y)g(y)dxdy \\ \geq &\int_a^b \int_a^b f(x)g(y)dxdy + \int_a^b \int_a^b f(y)g(x)dxdy \end{aligned}$$

ve devamında

$$\begin{aligned} &\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)dx + \frac{1}{b-a}\int_a^b f(y)g(y)dy \\ \geq &\int_a^b f(x)\left(\int_a^b g(y)dy\right)dx + \int_a^b f(y)\left(\int_a^b g(x)dx\right)dy \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$\frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)dx \geq 2\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right)\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)dx\right)$$

bulunur. Son ifadeden istenen sonuç elde edilir ve ispat tamamlanır.

Bu eşitsizliğin sağ tarafı sol tarafa atılırsa, $T(f,g)$ ile gösterilen

$$T(f,g) := \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)g(t)\,dt - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt\frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)\,dt$$

ifadesi elde edilir. Bu eşitliğe Chebyshev fonksiyoneli denir.
Chebyshev eşitsizliğinden dolayı

$$T(f,g) \geq 0$$

olduğu açıktır.

1935 yılında Grüss, Chebyshev fonksiyoneline ait sınır değerleri için aşağıdaki eşitsizliği elde etmiştir. Bu eşitsizlik iki fonksiyonun çarpımının ortalaması ile ortalamalarının çarpımı arasındaki fark ile ilgilidir.

Teorem 2.5.8 (Grüss Eşitsizliği):
f ve g fonksiyonları $[a,b]$ aralığında integrallenebilen ve her $x \in [a,b]$ için $m \leq f \leq M$ ve $p \leq g \leq P$ şartlarını sağlayan iki fonksiyon olsun. O halde

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)g(t)\,dt - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt\frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)\,dt\right| \leq \frac{1}{4}(\Phi-\phi)(\Gamma-\gamma)$$

eşitsizliğini geçerlidir [27].

İspat.

$$H(x,y) := (f(x)-f(y))(g(x)-g(y))$$

fonksiyonu tanımlansın. Bu fonksiyonun $[a,b]$ aralığında x ve y değişkenleri için her iki tarafının çift katlı integrali alınır ve düzenlemeler yapılırsa

$$\int_a^b\int_a^b H(x,y)dxdy = 2(b-a)\int_a^b (fg)(t)dt - 2\int_a^b f(t)dt\int_a^b g(t)dt$$

olur. Cauchy-Schwarz-Bunyakovsky eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned} &\left((b-a)\int_a^b (fg)(t)dt - \int_a^b f(t)dt\int_a^b g(t)dt\right)^2 \qquad (2.5.11)\\ \leq\; &\left((b-a)\int_a^b f^2(t)dt - \left(\int_a^b f(t)dt\right)^2\right)\left((b-a)\int_a^b g^2(t)dt - \left(\int_a^b g(t)dt\right)^2\right)\end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca $(M-f(t))(f(t)-m) \geq 0$ ve $(P-g(t))(g(t)-p) \geq 0$ olduğundan

$$(b-a)\int_a^b (M-f(t))(f(t)-m)dt \geq 0$$

ve

$$(b-a)\int_a^b (P-g(t))(g(t)-p)dt \geq 0$$

olur. Diğer taraftan f fonksiyonu için

$$\begin{aligned}
& (M-f(x))(f(y)-m)+(M-f(y))(f(x)-m) \\
& -(M-f(x))(f(x)-m)-(M-f(y))(f(y)-m) \\
= \; & f^2(x)+f^2(y)-2f(x)f(y)
\end{aligned}$$

eşitliği sağlanır. Son eşitliğin her iki tarafının $[a,b]$ aralığında önce x için daha sonra y için integrali alınır düzenlenirse

$$\begin{aligned}
& (b-a)\int_a^b f^2(t)dt-\left(\int_a^b f(t)dt\right)^2 \\
= \; & \left((b-a)M-\int_a^b f(t)dt\right)\left(\int_a^b f(t)dt-m(b-a)\right) \\
& -(b-a)\int_a^b (M-f(t))(f(t)-m)dt
\end{aligned} \tag{2.5.12}$$

sonucu elde edilir. Benzer şekilde g fonksiyonu için

$$\begin{aligned}
& (b-a)\int_a^b g^2(t)dt-\left(\int_a^b g(t)dt\right)^2 \\
= \; & \left((b-a)P-\int_a^b g(t)dt\right)\left(\int_a^b g(t)dt-p(b-a)\right) \\
& -(b-a)\int_a^b (P-g(t))(g(t)-p)dt
\end{aligned} \tag{2.5.13}$$

bulunur. (2.5.11), (2.5.12) ve (2.5.13) kullanılırsa

$$\begin{aligned}
& \left((b-a)\int_a^b f(t)g^2(t)dt-\left(\int_a^b f(t)g(t)dt\right)^2\right) \qquad (2.5.14) \\
\leq \; & \left((b-a)M-\int_a^b f(t)dt\right)\left(\int_a^b f(t)dt-m\right) \\
& \times\left((b-a)P-\int_a^b g(t)dt\right)\left(\int_a^b g(t)dt-p\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. $r, s\mathbb{R}$ için $4rs \leq (r+s)^2$ eşitliği kullanılırsa

$$4\left((b-a)M-\int_a^b f(t)dt\right)\left(\int_a^b f(t)dt-m\right) \leq ((b-a)(M-m))^2 \tag{2.5.15}$$

ve

$$4\left((b-a)P-\int_a^b g(t)dt\right)\left(\int_a^b g(t)dt-p\right) \leq ((b-a)(P-p))^2 \tag{2.5.16}$$

bulunur. (2.5.14), (2.5.15) ve (2.5.16) kullanılırsa istenen sonuç elde edilir ve ispat tamamlanır.

Teorem 2.5.9 (Üçgen Eşitsizliği):
a ve b reel sayı olmak üzere

$$|a+b| \leq |a| + |b|,$$

ve tümevarım yoluyla

$$|a_1 + a_2 + ... + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + ... + |a_n|$$

eşitsizlikleri geçerlidir [44].

Teorem 2.5.10 (İntegraller için Üçgen Eşitsizliği):
f, $[a,b]$ aralığında sürekli reel değerli bir fonksiyon olsun. Bu takdirde,

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

eşitsizliği geçerlidir [44].

Lemma 2.5.1 $0 < \alpha \leq 1$ ve $0 \leq a < b$ için

$$|a^\alpha - b^\alpha| \leq (b-a)^\alpha$$

eşitsizliği sağlanır [57].

3. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölümde ilk olarak Riemann-Liouville kesirli integralleri ile ilgili temel bilgiler verilecektir. Daha sonra, bu kesirli integraller yardımıyla Hermite-Hadamard , Hermite-Hadamard-Fejer, Ostrowski, Chebyshev ve Grüss eşitsizlikleri için elde edilmiş teorem ve ispatlara yer verilmiştir. Son olarak çalışmalarımızda kullandığımız uyumlu kesirli integraller ve Katugampola kesirli integralleri hakkında tanım ve özellikler verilmiştir.

3.1 Riemann-Liouville Kesirli İntegralleri

Tanım 3.1.1 $f \in L[a,b]$ ve $\alpha > 0$ olsun. Bu durumda sırasıyla α mertebeden sol taraflı ve sağ taraflı Riemann-Liouville kesirli integralleri

$$J_{a+}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt, \qquad x > a \tag{3.1.1}$$

ve

$$J_{b-}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (t-x)^{\alpha-1} f(t) dt, \qquad x < b \tag{3.1.2}$$

şeklinde tanımlanır.

Eğer $\alpha = 1$ seçilirse Riemann-Liouville kesirli integrali klasik integrale dönüşür. Ayrıca $\alpha = 0$ için $J_{a+}^{0} f(x) = J_{b-}^{0} f(x) = f(x)$ dir [60].

Tez boyunca

$$J^{\alpha} f(x) = J_{0+}^{\alpha} f(x)$$

olarak kabul edilecektir.

Ayrıca, α mertebeden sol taraflı ve sağ taraflı Riemann-Liouville kesirli türevleri, $\alpha \in \mathbb{C}$ $(Re(\alpha) \geq 0)$ öyleki $[Re(\alpha)]$, $Re(\alpha)$' nın tam değeri olmak üzere

$$\begin{aligned} (D_{a^+}^{\alpha} f)(x) &= \left(\frac{d}{dx}\right)^n (J_{a^+}^{n-\alpha} f)(x) \qquad (3.1.3) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}} dt \ \ (n = [Re(\alpha)] + 1; \ x > a) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} (D_{b^-}^{\alpha} f)(x) &= \left(-\frac{d}{dx}\right)^n (J_{b^-}^{n-\alpha} f)(x) \qquad (3.1.4) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(-\frac{d}{dx}\right)^n \int_x^b \frac{f(t)}{(t-x)^{\alpha-n+1}} dt \ \ (n = [Re(\alpha)] + 1; \ x < b) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. Sarıkaya ve arkadaşları Riemann-Liouville kesirli integralleri yardımıyla konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliğini aşağıdaki gibi elde etmişlerdir.

Teorem 3.1.1 $a < b$ olmak üzere $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $f \in L[a,b]$ olsun. Bu takdirde f fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde konveks ise

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}}[J_{a^+}^{\alpha} f(b) + J_{b^-}^{\alpha} f(a)] \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{3.1.5}$$

eşitsizliği $\alpha > 0$ için geçerlidir [61]. Burada $\alpha = 1$ olarak seçildiğinde eşitsizliğin klasik integraller yardımı ile elde edilen Hermite-Hadamard eşitsizliğine dönüştüğü açıkça görülmektedir. Chen, Riemann-Liouvelle kesirli integrallerini kullanarak Hermite-Hadamard eşitsizliğinin daha genel bir sonucunu aşağıdaki gibi vermiştir.

Teorem 3.1.2 $a < b$ olmak üzere $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ikinci mertebeden diferansiyellenebilen pozitif fonksiyon ve $f \in L_1[a,b]$ olsun . Eğer f'', $[a,b]$ aralığında sınırlı, $m = \inf_{t\in[a,b]} f''(t)$, $M = \sup_{t\in[a,b]} f''(t)$ ve $\alpha > 0$ ise

$$\begin{aligned} & \frac{m\alpha}{2(b-a)^{\alpha}} \int_a^{\frac{a+b}{2}} \left(\frac{a+b}{2} - x\right)^2 [(x-a)^{\alpha-1} + (b-x)^{\alpha-1}]dx \\ \leq \; & \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}}[J_{a^+}^{\alpha} f(b) + J_{b^-}^{\alpha} f(a)] - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \\ \leq \; & \frac{M\alpha}{2(b-a)^{\alpha}} \int_a^{\frac{a+b}{2}} \left(\frac{a+b}{2} - x\right)^2 [(x-a)^{\alpha-1} + (b-x)^{\alpha-1}]dx \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} & \frac{-M\alpha}{2(b-a)^{\alpha}} \int_a^{\frac{a+b}{2}} (x-a)(b-x)[(x-a)^{\alpha-1} + (b-x)^{\alpha-1}]dx \\ \leq \; & \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}}[J_{a^+}^{\alpha} f(b) + J_{b^-}^{\alpha} f(a)] - \frac{f(a)+f(b)}{2} \\ \leq \; & \frac{-m\alpha}{2(b-a)^{\alpha}} \int_a^{\frac{a+b}{2}} (x-a)(b-x)[(x-a)^{\alpha-1} + (b-x)^{\alpha-1}]dx \end{aligned}$$

eşitsizlikleri geçerlidir [13].

Teorem 3.1.3 $a < b$ olmak üzere $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ diferansiyellenebilen pozitif bir fonksiyon, $\alpha > 0$ ve $f \in L_1[a,b]$ olsun. Eğer her $x \in [a, \frac{a+b}{2}]$ için $f'(a+b-x) \geq f'(x)$ ise

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}}[J_{a^+}^{\alpha} f(b) + J_{b^-}^{\alpha} f(a)] \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

eşitsizliği sağlanır [13] .

Hermite-Hadamard eşitsizliği ile ilgili aşağıdaki sonuçlar Xiang tarafından elde edilmiştir.

Lemma 3.1.1 $f : [a,b] \to R$ fonksiyonu konveks ve h fonksiyonu

$$h(t) = \frac{1}{2}\left[f\left(\frac{a+b}{2} - \frac{t}{2}\right) + f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{t}{2}\right)\right]$$

şeklinde tanımlanmış olsun. O halde $h(t)$ fonksiyonu konveks ve $[0, b-a]$ aralığında artan ise her $t \in [0, b-a]$ için

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq h(t) \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

eşitsizliği geçerlidir [68].

Teorem 3.1.4 $a < b$ olmak üzere $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ pozitif değerli bir fonksiyon ve $f \in L_1[a,b]$ olsun. Eğer f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında konveks, $\alpha > 0$ ve

$$WH(t) = \frac{\alpha}{2(b-a)^\alpha}\int_a^b f\left(tx + (1-t)\frac{a+b}{2}\right)\left((b-x)^{\alpha-1} + (x-a)^{\alpha-1}\right)dx$$

biçiminde tanımlanan WH fonksiyonu $[0,1]$ aralığında monoton artan ise

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a+b}{2}\right) &= WH(0) \leq WH(t) \leq WH(1) \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^\alpha}[J_{a^+}^\alpha f(b) + J_{b^-}^\alpha f(a)], \end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir [68].

Teorem 3.1.5 f fonksiyonu Teorem 3.1.4'deki gibi tanımlanan bir fonksiyon, $\alpha > 0$ ve WP, $[0,1]$ aralığında

$$\begin{aligned} & WP(t) \\ = \; & \frac{\alpha}{4(b-a)^\alpha}\int_a^b \left[f\left(\left(\frac{1+t}{2}\right)a + \left(\frac{1-t}{2}\right)x\right)\left(\left(\frac{2b-a-x}{2}\right)^{\alpha-1} + \left(\frac{x-a}{2}\right)^{\alpha-1}\right)\right. \\ & \left. + f\left(\left(\frac{1+t}{2}\right)b + \left(\frac{1-t}{2}\right)x\right)\left(\left(\frac{b-x}{2}\right)^{\alpha-1} + \left(\frac{x+b-2a}{2}\right)^{\alpha-1}\right)\right]dx \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan konveks, monoton artan ise

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^\alpha}[J_{a^+}^\alpha f(b) + J_{b^-}^\alpha f(a)] &= WP(0) \leq WP(t) \leq WP(1) \\ &= \frac{f(a)+f(b)}{2}, \end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir[68].

İşcan 2015 yılında Riemann-Liouville kesirli integralleri yardımıyla Hermite-Hadamard-Fejer eşitsizliği ile ilgili aşağıdaki eşitlik ve eşitsizlikleri elde etti.

Teorem 3.1.6 $a < b$ olmak üzere $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ konveks fonksiyon, $\alpha > 0$ ve $f \in L[a, b]$ olsun. Eğer $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ negatif olmayan integrallenebilen ve $(a + b)/2$ noktasına göre simetrik bir fonksiyon ise

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a+b}{2}\right)\left[J_{a+}^{\alpha}g(b) + J_{b-}^{\alpha}g(a)\right] &\leq \left[J_{a+}^{\alpha}(fg)(b) + J_{b-}^{\alpha}(fg)(a)\right] \\ &\leq \frac{f(a)+f(b)}{2}\left[J_{a+}^{\alpha}g(b) + J_{b-}^{\alpha}g(a)\right] \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir [33].

Lemma 3.1.2 $a < b$ olmak üzere $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu (a, b) aralığında diferansiyellenebilen bir fonksiyon, $\alpha > 0$ ve $f' \in L[a, b]$ olsun. Eğer $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrallenebilen ve $(a + b)/2$ noktasına göre simetrik bir fonksiyon ise

$$\begin{aligned} &\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}\right)\left[J_{a+}^{\alpha}g(b) + J_{b-}^{\alpha}g(a)\right] - \left[J_{a+}^{\alpha}(fg)(b) + J_{b-}^{\alpha}(fg)(a)\right] \\ = \ &\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b \left[\int_a^t (b-s)^{\alpha-1}g(s)ds - \int_t^b (s-a)^{\alpha-1}g(s)ds\right] f'(t)dt \end{aligned}$$

eşitliği geçerlidir [33].

Teorem 3.1.7 $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu I^o kümesinde diferansiyellenebilen bir fonksiyon, $a < b$, $\alpha > 0$ ve $f' \in L[a, b]$ olsun. $|f'|$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığınıda konveks ve $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli ve $(a + b)/2$ noktasına göre simetrik bir fonksiyon ise

$$\begin{aligned} &\left|\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}\right)\left[J_{a+}^{\alpha}g(b) + J_{b-}^{\alpha}g(a)\right] - \left[J_{a+}^{\alpha}(fg)(b) + J_{b-}^{\alpha}(fg)(a)\right]\right| \\ \leq \ &\frac{(b-a)^{\alpha+1}\|g\|_{\infty}}{(\alpha+1)\Gamma(\alpha+1)}\left(1 - \frac{1}{2^{\alpha}}\right)\left[|f'(a)| + |f'(b)|\right] \end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir [33].

Teorem 3.1.8 $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu I^o kümesinde diferansiyellenebilen bir fonksiyon, $a < b$, $\alpha > 0$ ve $f' \in L[a, b]$ olsun. $|f'|^q$, $q > 1$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığınıda konveks ve $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli ve $(a + b)/2$ noktasına göre simetrik bir fonksiyon ise

$$\begin{aligned} &\left|\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}\right)\left[J_{a+}^{\alpha}g(b) + J_{b-}^{\alpha}g(a)\right] - \left[J_{a+}^{\alpha}(fg)(b) + J_{b-}^{\alpha}(fg)(a)\right]\right| \\ \leq \ &\frac{2(b-a)^{\alpha+1}\|g\|_{\infty}}{(b-a)^{1/q}(\alpha+1)\Gamma(\alpha+1)}\left(1 - \frac{1}{2^{\alpha}}\right)\left(\frac{|f'(a)|^q + |f'(b)|^q}{2}\right)^{1/q} \end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir [33].

Teorem 3.1.9 $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu I^o kümesinde diferansiyellenebilen bir fonksiyon, $a < b$ ve $f' \in L[a,b]$ olsun. $|f'|^q$, $q > 1$, $1/p + 1/q = 1$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığınıda konveks ve $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli ve $(a+b)/2$ noktasına göre simetrik bir fonksiyon ise
(i) $\alpha > 0$ ise

$$\begin{aligned} &\left| \left(\frac{f(a)+f(b)}{2} \right) \left[J^{\alpha}_{a+} g(b) + J^{\alpha}_{b-} g(a) \right] - \left[J^{\alpha}_{a+} (fg)(b) + J^{\alpha}_{b-} (fg)(a) \right] \right| \\ \leq\ & \frac{2^{1/p}(b-a)^{\alpha+1} \|g\|_{\infty}}{(\alpha p + 1)^{1/p} \Gamma(\alpha+1)} \left(1 - \frac{1}{2^{\alpha}} \right)^{1/p} \left(\frac{|f'(a)|^q + |f'(b)|^q}{2} \right)^{1/q} \end{aligned}$$

ve
(ii) $0 < \alpha \leq 1$ ise

$$\begin{aligned} &\left| \left(\frac{f(a)+f(b)}{2} \right) \left[J^{\alpha}_{a+} g(b) + J^{\alpha}_{b-} g(a) \right] - \left[J^{\alpha}_{a+} (fg)(b) + J^{\alpha}_{b-} (fg)(a) \right] \right| \\ \leq\ & \frac{(b-a)^{\alpha+1} \|g\|_{\infty}}{(\alpha p + 1)^{1/p} \Gamma(\alpha+1)} \left(\frac{|f'(a)|^q + |f'(b)|^q}{2} \right)^{1/q} \end{aligned}$$

eşitsizlikleri elde edilir [33].

Set ve arkadaşları (2015) Hermite-Hadamard-Fejér eşitsizliği ile ilgili aşağıdaki sonuçları elde etmiştir.

Teorem 3.1.10 $f : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu I^o kümesinde tanımlı diferansiyellenebilen bir fonksiyon, $a < b$, $f' \in L[a,b]$, $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon, $\|g\|_{[a,b],\infty} = \sup_{x \in [a,b]} |g(x)|$ ve $\alpha > 0$ olsun. Eğer $|f'|$ $[a,b]$ aralığında konveks ise

$$\begin{aligned} &\left| f\left(\frac{a+b}{2} \right) \left[J^{\alpha}_{(\frac{a+b}{2})-} g(a) + J^{\alpha}_{(\frac{a+b}{2})+} g(b) \right] \right. \\ &\left. - \left[J^{\alpha}_{(\frac{a+b}{2})-} (fg)(a) + J^{\alpha}_{(\frac{a+b}{2})+} (fg)(b) \right] \right| \\ \leq\ & \frac{(b-a)^{\alpha+1} \|g\|_{[a,b],\infty}}{2^{\alpha+1}(\alpha+1)\Gamma(\alpha+1)} (|f'(a)| + |f'(b)|) \end{aligned} \tag{3.1.6}$$

eşitsizliği elde edilir [63].

Teorem 3.1.11 $f : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu I^o kümesinde tanımlı diferansiyellenebilen bir fonksiyon, $a < b$, $f' \in L[a,b]$, $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon, $\|g\|_{[a,b],\infty} = \sup_{x \in [a,b]} |g(x)|$

ve $\alpha > 0$ olsun. Eğer $|f'|^q$, $q > 1$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında konveks ise

$$\begin{aligned}&\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)\left[J^{\alpha}_{(\frac{a+b}{2})^-}g(a)+J^{\alpha}_{(\frac{a+b}{2})^+}g(b)\right]\right.\\&\left.-\left[J^{\alpha}_{(\frac{a+b}{2})^-}(fg)(a)+J^{\alpha}_{(\frac{a+b}{2})^+}(fg)(b)\right]\right|\\ \leq\ &\frac{(b-a)^{\alpha+1}\|g\|_{[a,b],\infty}}{2^{\alpha+1+\frac{1}{q}}(\alpha+1)(\alpha+2)^{1/q}\Gamma(\alpha+1)}\\&\times\left[((\alpha+1)|f'(a)|^q+|f'(b)|^q)^{1/q}+(|f'(a)|^q+(\alpha+1)|f'(b)|^q)^{1/q}\right] \qquad (3.1.7)\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir [63].

Teorem 3.1.12 $f : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu I^o kümesinde tanımlı diferansiyellenebilen bir fonksiyon, $a < b$, $f' \in L[a,b]$, $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ sürekli, bir fonksiyon, $\|g\|_{[a,b],\infty} = \sup_{x\in[a,b]}|g(x)|$ ve $\alpha > 0$ olsun. Eğer $|f'|^q$, $1/p + 1/q = 1$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında konveks ise

$$\begin{aligned}&\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)\left[J^{\alpha}_{(\frac{a+b}{2})^-}g(a)+J^{\alpha}_{(\frac{a+b}{2})^+}g(b)\right]\right.\\&\left.-\left[J^{\alpha}_{(\frac{a+b}{2})^-}(fg)(a)+J^{\alpha}_{(\frac{a+b}{2})^+}(fg)(b)\right]\right| \qquad (3.1.8)\\ \leq\ &\frac{(b-a)^{\alpha+1}\|g\|_{[a,b],\infty}}{2^{\alpha+1+\frac{2}{q}}(\alpha p+1)^{1/p}\Gamma(\alpha+1)}\left[(3|f'(a)|^q+|f'(b)|^q)^{1/q}+(|f'(a)|^q+3|f'(b)|^q)^{1/q}\right]\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir [63].

Set (2012), s-konveks fonksiyonlar için Riemann-Liouville kesirli integralleri yardımıyla aşağıdaki Ostrowski tipli eşitsizlikleri elde etmiştir.

Lemma 3.1.3 $a < b$ olmak üzere $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu (a,b) aralığında diferansiyellenebilen bir fonksiyon olsun. Eğer $f' \in L[a,b]$ ise her $x \in [a,b]$ ve $\alpha > 0$ için

$$\begin{aligned}&\left(\frac{(x-a)^{\alpha}+(b-x)^{\alpha}}{b-a}\right)f(x)-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)}[J^{\alpha}_{x-}f(a)+J^{\alpha}_{x+}f(b)] \qquad (3.1.9)\\ =\ &\frac{(x-a)^{\alpha+1}}{b-a}\int_0^1 t^{\alpha}f'(tx+(1-t)a)dt+\frac{(b-x)^{\alpha+1}}{b-a}\int_0^1 t^{\alpha}f'(tx+(1-t)b)dt\end{aligned}$$

eşitliği geçerlidir [64].

Teorem 3.1.13 $a < b$ olmak üzere $f : [a,b] \subseteq [0,\infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu (a,b) aralığında diferansiyellenebilen bir fonksiyon, $\alpha > 0$ ve $f' \in L[a,b]$ olsun. Eğer $|f'|$ fonksiyonu $s \in [0,1)$ için $[a,b]$ aralığında ikinci anlamda s-konveks ve her $x \in [a,b]$ için $|f'(x)| \leq M$ ise

$$\begin{aligned}&\left|\left(\frac{(x-a)^{\alpha}+(b-x)^{\alpha}}{b-a}\right)f(x)-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)}[J^{\alpha}_{x-}f(a)+J^{\alpha}_{x+}f(b)]\right|\\ \leq\ &\frac{M}{b-a}\left(1+\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(s+1)}{\Gamma(\alpha+s+1)}\right)\left[\frac{(x-a)^{\alpha+1}+(x-b)^{\alpha+1}}{\alpha+s+1}\right]\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir [64].

Teorem 3.1.14 $a < b$ olmak üzere $f : [a,b] \subseteq [0,\infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu (a,b) aralığında diferansiyellenebilen bir fonksiyon, $\alpha > 0$ ve $f' \in L[a,b]$ olsun. Eğer $|f'|^q$ fonksiyonu $s \in [0,1)$, $q > 1$, $1/p + 1/q = 1$ için $[a,b]$ aralığında ikinci anlamda s-konveks ve her $x \in [a,b]$ için $|f'(x)| \leq M$ ise

$$
\begin{aligned}
&\left|\left(\frac{(x-a)^{\alpha}+(b-x)^{\alpha}}{b-a}\right)f(x)-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)}[J^{\alpha}_{x-}f(a)+J^{\alpha}_{x+}f(b)]\right| \\
\leq\ & \frac{M}{(1+p\alpha)1/p}\left(\frac{2}{s+1}\right)^{1/q}\left[\frac{(x-a)^{\alpha+1}+(x-b)^{\alpha+1}}{b-a}\right]
\end{aligned}
$$

eşitsizliği geçerlidir [64].

Teorem 3.1.15 $a < b$ olmak üzere $f : [a,b] \subseteq [0,\infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu (a,b) aralığında diferansiyellenebilen bir fonksiyon, $\alpha > 0$ ve $f' \in L[a,b]$ olsun. Eğer $|f'|^q$ fonksiyonu $s \in [0,1)$, $q > 1$, için $[a,b]$ aralığında ikinci anlamda s-konveks ve her $x \in [a,b]$ için $|f'(x)| \leq M$ ise

$$
\begin{aligned}
&\left|\left(\frac{(x-a)^{\alpha}+(b-x)^{\alpha}}{b-a}\right)f(x)-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)}[J^{\alpha}_{x-}f(a)+J^{\alpha}_{x+}f(b)]\right| \\
\leq\ & M\left(\frac{1}{1+\alpha}\right)^{1-1/q}\left(\frac{1}{\alpha+s+1}\right)^{1/q} \\
&\times\left(1+\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(s+1)}{\Gamma(\alpha+s+1)}\right)^{1/q}\left[\frac{(x-a)^{\alpha+1}+(x-b)^{\alpha+1}}{b-a}\right]
\end{aligned}
$$

eşitsizliği geçerlidir [64].

Teorem 3.1.16 $a < b$ olmak üzere $f : [a,b] \subseteq [0,\infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu (a,b) aralığında diferansiyellenebilen bir fonksiyon, $\alpha > 0$ ve $f' \in L[a,b]$ olsun. Eğer $|f'|^q$ fonksiyonu $s \in [0,1)$, $q > 1$, $1/p + 1/q = 1$ için $[a,b]$ aralığında ikinci anlamda s-konveks ve her $x \in [a,b]$ için $|f'(x)| \leq M$ ise

$$
\begin{aligned}
&\left|\left(\frac{(x-a)^{\alpha}+(b-x)^{\alpha}}{b-a}\right)f(x)-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)}[J^{\alpha}_{x-}f(a)+J^{\alpha}_{x+}f(b)]\right| \\
\leq\ & \frac{2^{(s-1)/q}}{(1+p\alpha)1/p(b-a)}\left[(x-a)^{\alpha+1}\left|f'\left(\frac{x+a}{2}\right)\right|+(x-b)^{\alpha+1}\left|f'\left(\frac{b+x}{2}\right)\right|\right]
\end{aligned}
$$

eşitsizliği elde edilir [64].

Belarbi ve Dahmani (2009), Riemann-Liouville kesirli integrallerini kullanarak aynı monotonluğa sahip fonksiyonlar için aşağıdaki Chebyshev tipli eşitsizlikler elde etmişlerdir.

Teorem 3.1.17 f ve g, $[0,\infty)$ aralığında senkronize fonksiyonlar olsun. O halde her $t>0$ ve $\alpha>0$ için

$$J^{\alpha}(fg)(t) \geq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{t^{\alpha}} J^{\alpha}f(t) J^{\alpha}g(t) \tag{3.1.10}$$

eşitsizliği geçerlidir [9].

Teorem 3.1.18 f ve g, $[0,\infty)$ aralığında senkronize fonksiyonlar olsun. O halde her $t>0$, $\alpha>0$ ve $\beta>0$ için

$$\frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} J^{\beta}(fg)(t) + \frac{t^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)} J^{\alpha}(fg)(t) \geq J^{\alpha}f(t) J^{\beta}g(t) + J^{\beta}f(t) J^{\alpha}g(t) \tag{3.1.11}$$

eşitsizliği elde edilir [9].

Teorem 3.1.19 $i=1,2,...,n$ olmak üzere f_i fonksiyonları $[0,\infty)$ aralığında artan ve pozitif fonksiyonlar olsun. O halde her $t>0$ ve $\alpha>0$ için

$$J^{\alpha}\left(\prod_{i=1}^{n} f_i\right)(t) \geq (J^{\alpha}(1))^{1-n} \prod_{i=1}^{n} J^{\alpha} f_i(t) \tag{3.1.12}$$

eşitsizliği geçerlidir [9].

Teorem 3.1.20 f fonksiyonu $[0,\infty)$ aralığında tanımlı artan ve g fonksiyonu aynı aralıkta tanımlı diferansiyellenebilen iki fonksiyon olsun. Eğer $m := \inf_{t\geq 0} g^{'}(t)$ ise her $t>0$ ve $\alpha>0$ için

$$J^{\alpha}(fg)(t) \geq (J^{\alpha}(1))^{-1} J^{\alpha}f(t) J^{\alpha}g(t) - \frac{mt}{\alpha+1} J^{\alpha}f(t) + mJ^{\alpha}(tf(t)) \tag{3.1.13}$$

eşitsizliği geçerlidir [9].

Dahmani ve arkadaşları (2016) senkronize olmayan fonksiyonlar için aşağıdaki Chebyshev eşitsizliğini elde etmişlerdir.

Teorem 3.1.21 f ve g fonksiyonları $L_{\infty}[a,b]$ uzayında iki fonksiyon olsun. Her $\alpha>1$, $t,x\in(a,b]$ ve $t\leq x\leq b$ için

$$\left(f(t) - \frac{1}{t-a}\int_a^t f(s)ds\right)\left((x-t)^{\alpha-1}g(t) - \frac{1}{t-a}\int_a^t (x-s)^{\alpha-1}g(s)ds\right) \geq 0$$

eşitsizliği sağlansın. O halde

$$\frac{1}{x-a} J_a^{\alpha} f(x)g(x) \geq \left(\frac{1}{x-a}\int_a^x f(s)ds\right)\left(\frac{1}{x-a} J_a^{\alpha} g(x)\right) \tag{3.1.14}$$

eşitsizliği geçerlidir [19].

Dahmani ve arkadaşları (2010), Riemann-Liouville kesirli integralleri yardımıyla Grüss eşitsizliği ile ilgili ağaşıdaki sonuçları vermiştir.

Teorem 3.1.22 f ve g fonksiyonları $[0,\infty)$ aralığında

$$m \leq f(x) \leq M, \quad p \leq g(x) \leq P, \quad m, M, p, P \in \mathbb{R}, x \in [a,b] \tag{3.1.15}$$

şartını sağlayan iki integrallenebilen fonksiyon olsun. O halde her $t > 0,\ \alpha > 0$ için

$$\left|\frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}J^{\alpha}fg(t) - J^{\alpha}f(t)J^{\alpha}g(t)\right| \leq \left(\frac{t^{\alpha}}{2\Gamma(\alpha+1)}\right)^{2}(M-m)(P-p) \tag{3.1.16}$$

eşitsizliği geçerlidir [16].

Teorem 3.1.23 f ve g $[0,\infty)$ aralığında (3.1.15) şartını sağlayan iki fonksiyon olsun. O halde her $t > 0,\ \alpha > 0,\ \beta > 0$ için

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}J^{\beta}fg(t) + \frac{t^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)}J^{\alpha}fg(t) - J^{\alpha}f(t)J^{\beta}g(t) - J^{\beta}f(t)J^{\alpha}g(t)\right)^{2} \\
\leq\ & \left[\left(M\frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} - J^{\alpha}f(t)\right)\left(J^{\beta}f(t) - m\frac{t^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)}\right)\right. \\
&+ \left.\left(J^{\alpha}f(t) - m\frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\right)\left(M\frac{t^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)} - J^{\beta}f(t)\right)\right] \\
&\times\left[\left(P\frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} - J^{\alpha}f(t)\right)\left(J^{\beta}f(t) - p\frac{t^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)}\right)\right. \\
&+ \left.\left(J^{\alpha}f(t) - p\frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\right)\left(P\frac{t^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)} - J^{\beta}f(t)\right)\right]
\end{aligned} \tag{3.1.17}$$

eşitsizliği geçerlidir [16].

İşcan ve Wu (2014), Riemann-Liouville kesirli integralleri yardımıyla harmonik konveks fonksiyonlar için aşağıdaki Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikleri elde etmiştir. Bu sonuçlarda

$$I_f(g;\alpha,a,b) = \frac{ab(b-a)}{2}\int_0^1 \frac{[t^{\alpha} - (1-t)^{\alpha}]}{(ta+(1-t)b)^2}f'\left(\frac{ab}{ta+(1-t)b}\right)dt$$

gösterimi kullanılmıştır.

Teorem 3.1.24 $f : I \subset (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $a < b$ ve $a, b \in I$ $f \in L[a,b]$ şartını sağlayan bir fonksiyon olsun. Eğer f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında harmonik konveks fonksiyon ve $g(x) = 1/x$ ise

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{2ab}{a+b}\right) &\leq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2}\left(\frac{ab}{b-a}\right)^{\alpha}\left\{J^{\alpha}_{(1/a)-}(f\circ g)(1/b) + J^{\alpha}_{(1/b)+}(f\circ g)(1/a)\right\} \\
&\leq \frac{f(a)+f(b)}{2}
\end{aligned} \tag{3.1.18}$$

eşitsizliği elde edilir [32].

Teorem 3.1.25 $f : I \subseteq (0,\infty) \to \mathbb{R}$, I^o kümesinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon, $a,b \in I^o$, $a<b$, $f' \in L[a,b]$ olsun. Eğer $|f'|^q$, $q \geq 1$ $[a,b]$ aralığında harmonik konveks fonksiyon ise

$$\begin{aligned}
&|I_f(g;\alpha,a,b)| \\
\leq\ & \frac{ab(b-a)}{2} C_1^{1-1/q}(\alpha,a,b)\left(C_2(\alpha,a,b)|f'(b)|^q + C_3(\alpha,a,b)|f'(a)|^q\right)^{1/q}
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada

$$\begin{aligned}
C_1(\alpha,a,b) &= \frac{b^{-2}}{\alpha+1}\left[{}_2F_1(2,1;\alpha+2,1-\frac{a}{b}) + {}_2F_1(2,\alpha+1;\alpha+2,1-\frac{a}{b})\right], \\
C_2(\alpha,a,b) &= \frac{b^{-2}}{\alpha+2}\left[\frac{1}{\alpha+1}\,{}_2F_1(2,2;\alpha+3,1-\frac{a}{b}) + {}_2F_1(2,\alpha+2;\alpha+3,1-\frac{a}{b})\right], \\
C_3(\alpha,a,b) &= \frac{b^{-2}}{\alpha+1}\left[{}_2F_1(2,1;\alpha+3,1-\frac{a}{b}) + \frac{1}{\alpha+1}\,{}_2F_1(2,\alpha+1;\alpha+3,1-\frac{a}{b})\right],
\end{aligned}$$

şeklindedir [32].

Teorem 3.1.26 $f : I \subseteq (0,\infty) \to \mathbb{R}$, I^o kümesinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon, $a,b \in I^o$, $a<b$, $f' \in L[a,b]$ olsun. Eğer $|f'|^q$, $q \geq 1$ $[a,b]$ ve $0<\alpha\leq 1$ aralığında harmonik konveks fonksiyon ise

$$\begin{aligned}
&|I_f(g;\alpha,a,b)| \\
\leq\ & \frac{ab(b-a)}{2} C_1^{1-1/q}(\alpha,a,b)\left(C_2(\alpha,a,b)|f'(b)|^q + C_3(\alpha,a,b)|f'(a)|^q\right)^{1/q}
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada

$$\begin{aligned}
C_1(\alpha,a,b) &= \frac{b^{-2}}{\alpha+1}[\,{}_2F_1(2,\alpha+1;\alpha+2,1-\frac{a}{b}) + -\,{}_2F_1(2,1;\alpha+2,1-\frac{a}{b}) \\
&\quad + {}_2F_1(2,1;\alpha+2,\frac{1}{2}(1-\frac{a}{b}))] \\
C_2(\alpha,a,b) &= \frac{b^{-2}}{\alpha+2}[\frac{1}{\alpha+1}\,{}_2F_1(2,\alpha+2;\alpha+3,1-\frac{a}{b}) - \frac{1}{\alpha+1}\,{}_2F_1(2,2;\alpha+3,1-\frac{a}{b}) \\
&\quad + \frac{1}{2(\alpha+1)}\,{}_2F_1(2,2;\alpha+3,\frac{1}{2}(1-\frac{a}{b}))] \\
C_3(\alpha,a,b) &= \frac{b^{-2}}{\alpha+2}[\,{}_2F_1(2,\alpha+1;\alpha+3,1-\frac{a}{b}) - {}_2F_1(2,1;\alpha+3,1-\frac{a}{b})\Big] \\
&\quad + {}_2F_1(2,1;\alpha+3,\frac{1}{2}(1-\frac{a}{b}))]
\end{aligned}$$

şeklindedir [32].

Teorem 3.1.27 $f : I \subseteq (0,\infty) \to \mathbb{R}$, I^o kümesinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon, $a,b \in I^o$, $a<b$, $f' \in L[a,b]$ olsun. Eğer $|f'|^q$, $q \geq 1$, $1/p+1/q=1$ $[a,b]$ ve $0<\alpha\leq 1$

aralığında harmonik konveks fonksiyon ise

$$
\begin{aligned}
& |I_f(g;\alpha,a,b)| \\
\leq\ & \frac{a(b-a)}{2b}\left(\frac{1}{\alpha p+1}\right)^{1/p}\left(\frac{|f'(b)|^q+|f'(a)|^q}{2}\right)^{1/q} \\
& \times\left[{}_2F_1^{1/p}(2p,1;\alpha p+2,1-\frac{a}{b})+{}_2F_1^{1/p}(2p,\alpha p+1;\alpha p+2,1-\frac{a}{b})\right]
\end{aligned}
$$

eşitsizliği elde edilir [32].

Teorem 3.1.28 $f : I \subseteq (0,\infty) \to \mathbb{R}$, I^o kümesinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon, $a,b \in I^o$, $a<b$, $f' \in L[a,b]$ olsun. Eğer $|f'|^q$, $q \geq 1$, $1/p+1/q=1$ için $[a,b]$ aralığında harmonik konveks fonksiyon ise

$$
\begin{aligned}
& |I_f(g;\alpha,a,b)| \\
\leq\ & \frac{(b-a)}{2(ab)^{1-1/p}}L_{2p-2}^{2-2/p}(a,b)\left(\frac{1}{\alpha p+1}\right)^{1/p}\left(\frac{|f'(b)|^q+|f'(a)|^q}{2}\right)^{1/q}
\end{aligned}
$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $L_{2p-2}(a,b)=\left[\frac{b^{2p-1}-a^{2p-1}}{(2p-1)(b-a)}\right]^{1/(2p-2)}$ $(2p-2)$-logaritmik ortalamasıdır [32].

Teorem 3.1.29 $f : I \subseteq (0,\infty) \to \mathbb{R}$, I^o kümesinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon, $a,b \in I^o$, $a<b$, $f' \in L[a,b]$ olsun. Eğer $|f'|^q$, $q \geq 1$, $1/p+1/q=1$ $[a,b]$ ve $0<\alpha\leq 1$ aralığında harmonik konveks fonksiyon ise

$$
\begin{aligned}
& |I_f(g;\alpha,a,b)| \\
\leq\ & \frac{a(b-a)}{2b}\left(\frac{1}{\alpha p+1}\right)^{1/p} \\
& \times\left(\frac{{}_2F_1(2q,2;3,1-\frac{a}{b})|f'(b)|^q+{}_2F_1(2q,1;3,1-\frac{a}{b})|f'(a)|^q}{2}\right)^{1/q}
\end{aligned}
$$

eşitsizliği elde edilir [32].

Özdemir ve Yıldız (2013), quasi-konveks fonksiyonlar için aşağıdaki Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikleri elde etmişlerdir.

Teorem 3.1.30 $0 \leq a < b$ olmak üzere $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ pozitif değerli bir fonksiyon ve $f \in L_1[a,b]$ olsun. Eğer f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında *quasi*-konveks ve $\alpha>0$ ise

$$
\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^\alpha}[J_{a+}^\alpha f(b)+J_{b-}^\alpha f(a)] \leq \max\{f(a),f(b)\} \tag{3.1.19}
$$

eşitsizliği elde edilir [51].

Teorem 3.1.31 $a < b$ olmak üzere $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu (a,b) aralığında diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Eğer $|f'|$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında *quasi*-konveks ve $\alpha > 0$ ise

$$\begin{aligned} &\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^\alpha}[J^\alpha_{a+}f(b) + J^\alpha_{b-}f(a)]\right| \\ \leq\ & \frac{b-a}{\alpha+1}\left(1-\frac{1}{2^\alpha}\right)\max\{f'(a), f'(b)\} \qquad (3.1.20) \end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir [51].

Teorem 3.1.32 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu (a,b) aralığında diferansiyellenebilen bir fonksiyon ve $f' \in L_1[a,b]$ olsun. Eğer $|f'|^q$, $[a,b]$ aralığında *quasi*-konveks, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $\alpha \in [0,1]$ ve $p > 1$ ise

$$\begin{aligned} &\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^\alpha}[J^\alpha_{a+}f(b) + J^\alpha_{b-}f(a)]\right| \\ \leq\ & \frac{b-a}{2(\alpha p+1)^{1/p}}\left(1-\frac{1}{2^\alpha}\right)(\max\{|f'(a)|^q, |f'(b)|^q\})^{1/q} \qquad (3.1.21) \end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir [51].

Teorem 3.1.33 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu (a,b) aralığında diferansiyellenebilen bir fonksiyon ve $f' \in L_1[a,b]$ olsun. Eğer $|f'|^q$, $[a,b]$ aralığında *quasi*-konveks, $q \geq 1$ ve $\alpha \in [0,1]$ ise

$$\begin{aligned} &\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^\alpha}[J^\alpha_{a+}f(b) + J^\alpha_{b-}f(a)]\right| \\ \leq\ & \frac{b-a}{\alpha+1}\left(1-\frac{1}{2^\alpha}\right)(\max\{|f'(a)|^q, |f'(b)|^q\})^{1/q} \qquad (3.1.22) \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir [51].

Dahmani ve arkadaşları (2011) Riemann-Liouville kesirli integralleri yardımıyla türevleri L_p uzaylarına ait fonksiyonlar için aşağıdaki Chebyshev eşitsizliklerini elde etmişlerdir.

Teorem 3.1.34 p, $[0,\infty)$ aralığında tanımlı pozitif bir fonksiyon ve f ile g aynı aralıkta tanımlı iki diferansiyellenebilir fonksiyon olsun. Eğer $f' \in L_r[0,\infty)$ ve $g' \in L_s[0,\infty)$, $r > 1$ ve $r^{-1}+s^{-1}=1$ ise her $t > 0$ ve $\alpha > 0$ için

$$\begin{aligned} &2\,|J^\alpha p(t) J^\alpha pfg(t) - J^\alpha pf(t) J^\alpha pg(t)| \\ \leq\ & \frac{\|f'\|_r \|g'\|_s}{\Gamma^2(\alpha)} \int_0^t \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}(t-\rho)^{\alpha-1}|\tau-\rho| p(\tau)p(\rho)\,d\tau d\rho \\ \leq\ & \|f'\|_r \|g'\|_s t (J^\alpha p(t))^2 \end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir [18].

Teorem 3.1.35 p, $[0,\infty)$ aralığında tanımlı pozitif bir fonksiyon ve f ile g aynı aralıkta tanımlı iki diferansiyellenebilir fonksiyon olsun. Eğer $f^{'} \in L_r[0,\infty)$ ve $g^{'} \in L_s[0,\infty)$, $r > 1$ ve $r^{-1} + s^{-1} = 1$ ise her $t > 0$, $\alpha > 0$ ve $\beta > 0$ için

$$\begin{aligned}
& \left| J^{\alpha}p(t)J^{\beta}pfg(t) + J^{\beta}p(t)J^{\alpha}pfg(t) - J^{\alpha}pf(t)J^{\beta}pg(t) - J^{\beta}pf(t)J^{\alpha}pg(t) \right| \\
\leq & \frac{\|f^{'}\|_r\|g^{'}\|_s}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^t \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}(t-\rho)^{\beta-1}|\tau-\rho|p(\tau)p(\rho)d\tau d\rho \\
\leq & \|f^{'}\|_r\|g^{'}\|_s tJ^{\alpha}p(t)J^{\beta}p(t)
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir [17].

Dahmani (2011) Riemann-liouville kesirli integralleri yardımıyla türevleri L_∞ uzaylarına ait fonksiyonlar için aşağıdaki Chebyshev eşitsizliklerini elde etmişlerdir.

Teorem 3.1.36 p, $[0,\infty)$ aralığında tanımlı pozitif bir fonksiyon ve f ile g senkronize ve diferansiyellenebilir iki fonksiyon olsun. Eğer $f^{'}, g^{'} \in L_\infty[0,\infty)$ ise her $t > 0$ ve $\alpha > 0$ için

$$\begin{aligned}
0 \leq & J^{\alpha}p(t)J^{\alpha}pfg(t) - J^{\alpha}pf(t)J^{\alpha}pg(t) \\
\leq & \|f^{'}\|_\infty\|g^{'}\|_\infty \left[J^{\alpha}p(t)J^{\alpha}t^2p(t) - (J^{\alpha}tp(t))^2\right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir [18].

Teorem 3.1.37 p, $[0,\infty)$ aralığında tanımlı pozitif bir fonksiyon ve f ile g senkronize ve diferansiyellenebilir iki fonksiyon olsun. Eğer $f^{'}, g^{'} \in L_\infty[0,\infty)$ ise her $t > 0$, $\alpha > 0$ ve β için

$$\begin{aligned}
0 \leq & J^{\alpha}p(t)J^{\beta}pfg(t) + J^{\beta}p(t)J^{\alpha}pfg(t) - J^{\alpha}pf(t)J^{\beta}pg(t) - J^{\beta}pf(t)J^{\alpha}pg(t) \\
\leq & \|f^{'}\|_\infty\|g^{'}\|_\infty \left[J^{\alpha}p(t)J^{\beta}t^2p(t) - 2(J^{\alpha}tp(t))(J^{\beta}tp(t)) + J^{\beta}p(t)J^{\alpha}t^2p(t)\right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir[18].

3.2 Erdelyi-Kober, Hadamard, Liouville ve Weyl Kesirli İntegralleri

1892 yılında Hadamard tarafından tanımlanan kesirli integralleri şu şekildedir:

Tanım 3.2.1 (a,b) $(-\infty \leq a < b \leq \infty)$ aralığı $\mathbb{R}^+$ yarı ekseninde sınırlı veya sınırsız bir aralık olsun. Ayrıca $Re(\alpha) > 0$, $\sigma \in \mathbb{R}^+$, ve $\eta \in \mathbb{C}$ olsun. $\alpha \in \mathbb{C}$ ve $Re(\alpha) > 0$ için $f \in L(a,b)$ ise

$$\left(H_{a+}^{\alpha}f\right)(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \left(\log\frac{x}{t}\right)^{\alpha-1} \frac{f(t)}{t}\,dt \quad (a < x < b) \tag{3.2.1}$$

ve

$$\left(H_{b-}^{\alpha}f\right)(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^b \left(\log\frac{t}{x}\right)^{\alpha-1}\frac{f(t)}{t}\,dt \quad (a<x<b) \tag{3.2.2}$$

kesirli integraline sırasıyla sol taraflı ve sağ taraflı Hadamard kesirli integralleri denir [41, 54].

Chincane ve Pachpatte Hadamard kesirli integralleri için aşağıdaki Chebyshev integrallerini elde etmiştir.

Teorem 3.2.1 f ve g fonksiyonları $[0,\infty)$ aralığında senkronize fonksiyonlar olsun. O halde her $\alpha>0$ ve $t>0$ olmak üzere

$$_HD_{1,t}^{-\alpha}(fg)(t) \geq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(lnt)^{\alpha}}\left(_HD_{1,t}^{-\alpha}f(t)\right)\left(_HD_{1,t}^{-\alpha}g(t)\right) \tag{3.2.3}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada $_HD_{1,t}^{-\alpha}f(t)$, Hadamard kesirli integralidir [15].

Teorem 3.2.2 f ve g fonksiyonları $[0,\infty)$ aralığında senkronize fonksiyonlar olsun. O halde her $\alpha>0$, $\beta>0$ ve $t>0$ olmak üzere

$$\begin{aligned} &\frac{(lnt)^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)}\,{}_HD_{1,t}^{-\alpha}(fg)(t) + \frac{(lnt)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\,{}_HD_{1,t}^{-\beta}(fg)(t) \\ \leq\;& {}_HD_{1,t}^{-\alpha}f(t)\,{}_HD_{1,t}^{-\beta}g(t) + {}_HD_{1,t}^{-\alpha}g(t)\,{}_HD_{1,t}^{-\beta}f(t) \end{aligned} \tag{3.2.4}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada $_HD_{1,t}^{-\alpha}f(t)$, Hadamard kesirli integralidir [15].

Teorem 3.2.3 $(f_i)_{i=1,2,3,\ldots}$fonksiyonları $[0,\infty)$ aralığında pozitif değerli ve artan fonksiyonlar olsun. O halde her $\alpha>0$, $t>0$ için

$$_HD_{1,t}^{-\alpha}\left\{\prod_{i=1}^{n} f_i(t)\right\} \geq \left[{}_HD_{1,t}^{-\alpha}(1)\right]^{1-n}\prod_{i=1}^{n}{}_HD_{1,t}^{-\alpha}\{f_i(t)\} \tag{3.2.5}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada $_HD_{1,t}^{-\alpha}f(t)$, Hadamard kesirli integralidir [15].

1940 yılında Erdelyi ve Kober, Riemann-Liouville kesirli integralini genelleştirerek yeni bir kesirli integral tanımı sunmuştur [41].

Tanım 3.2.2 (a,b) $(-\infty\leq a<b\leq\infty)$ aralığı $\mathbb{R}^+$ yarı ekseninde sınırlı veya sınırsız bir aralık olsun. Ayrıca $\Re(\alpha)>0$, $\sigma\in\mathbb{R}^+$, ve $\eta\in\mathbb{C}$ olsun. $f\in L(a,b)$ ve $\alpha\in\mathbb{C}$ için

$$\left(I_{a+,\sigma,\eta}^{\alpha}f\right)(x) := \frac{\sigma x^{-\sigma(\alpha+\eta)}}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \frac{t^{\sigma(\eta+1)-1}}{(x^{\alpha}-t^{\alpha})^{1-\alpha}}f(t)\,dt \quad (0\leq a<x<b\leq\infty) \tag{3.2.6}$$

ve

$$\left(I^{\alpha}_{b-,\sigma,\eta}f\right)(x) := \frac{\sigma x^{\sigma\eta}}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \frac{t^{\sigma(1-\alpha-\eta)-1}}{(t^{\alpha}-x^{\alpha})^{1-\alpha}} f(t)\,dt \quad (0 \le a < x < b \le \infty) \tag{3.2.7}$$

kesirli integrallerine sırasıyla sol taraflı ve sağ taraflı Erdelyi-Kober kesirli integralleri denir [41].

Purohit ve Kalla Erdelyi-Kober kesirli integralleri için aşağıdaki Chebyshev tipi eşitsizlikleri elde etmiştir.

Teorem 3.2.4 f ve g fonksiyonları $[0,\infty)$ aralığında senkronize fonksiyonlar olsun. O halde her $\alpha > 0$, $t > 0$, $\beta > 0$ ve her $\eta \in \mathbb{R}$ için $\eta > -1$ olmak üzere

$$I_{\beta}^{\eta,\alpha}\{f(t), g(t)\} \ge \frac{\Gamma(1+\alpha+\eta)}{\Gamma(1+\eta)} I_{\beta}^{\eta,\alpha}\{f(t)\} I_{\beta}^{\eta,\alpha}\{g(t)\} \tag{3.2.8}$$

eşitsizliği geçerlidir [56].

Teorem 3.2.5 f ve g fonksiyonları $[0,\infty)$ aralığında senkronize fonksiyonlar olsun. O halde her $\alpha > 0$, $t > 0$, $\beta > 0$, $\delta > 0$ ve her $\eta, \zeta \in \mathbb{R}$ için $\eta > -1$ ve $\zeta > 0$ olmak üzere

$$\begin{aligned} & \frac{\Gamma(1+\alpha+\eta)}{\Gamma(1+\eta)} I_{\delta}^{\zeta,\gamma}\{f(t), g(t)\} + \frac{\Gamma(1+\delta+\zeta)}{\Gamma(1+\zeta)} I_{\beta}^{\eta,\alpha}\{f(t), g(t)\} \\ \ge\ & I_{\beta}^{\eta,\alpha}\{f(t)\} I_{\delta}^{\zeta,\gamma}\{g(t)\} + I_{\delta}^{\zeta,\gamma}\{f(t)\} I_{\beta}^{\eta,\alpha}\{g(t)\} \end{aligned} \tag{3.2.9}$$

eşitsizliği geçerlidir [56].

Teorem 3.2.6 $(f_i)_{i=1,2,3,...}$fonksiyonları $[0,\infty)$ aralığında pozitif değerli ve artan fonksiyonlar olsun. O halde her $\alpha > 0$, $t > 0$, $\beta > 0$ ve her $\eta \in \mathbb{R}$ için $\eta > -1$ olmak üzere

$$I_{\beta}^{\eta,\alpha}\left\{\prod_{i=1}^{n} f_i(t)\right\} \ge \left[\frac{\Gamma(1+\alpha+\eta)}{\Gamma(1+\eta)} I_{\beta}^{\eta,\alpha}\right]^{n-1} \prod_{i=1}^{n} I_{\beta}^{\eta,\alpha}\{f_i(t)\} \tag{3.2.10}$$

eşitsizliği geçerlidir [56].

Liouville kesirli integrallerinin tanımı aşağıdaki gibidir.

Tanım 3.2.3 $\alpha \in \mathbb{C}$, $\Re(\alpha) > 0$ ve reel değerli f fonksiyonu için sol taraflı ve sağ taraflı Liouville kesirli integrali

$$\left(I_{+}^{\alpha} f\right)(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}\,dt \quad \left(x \in \mathbb{R}^+\right) \tag{3.2.11}$$

ve

$$\left(I_{-}^{\alpha} f\right)(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^{\infty} \frac{f(t)}{(t-x)^{1-\alpha}}\,dt \quad \left(x \in \mathbb{R}^+\right)$$

şeklinde tanımlanır [41].

Weyl kesirli integrallerinin tanımı şu şekildedir.

Tanım 3.2.4 $\alpha \in \mathbb{C}$, $\Re(\alpha) > 0$ ve reel değerli f fonksiyonu için sol taraflı ve sağ taraflı Weyl kesirli integrali

$$\left({}_xW_\infty^\alpha f \right)(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^{x} \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}\, dt \quad \left(x \in \mathbb{R}^+\right) \tag{3.2.12}$$

ve

$$\left({}_\infty W_x^\alpha f \right)(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{x}^{\infty} \frac{f(t)}{(t-x)^{1-\alpha}}\, dt \quad \left(x \in \mathbb{R}^+\right)$$

şeklinde tanımlanır [65].

3.3 Uyumlu (conformable) Kesirli İntegralleri

Bu bölümde uyumlu kesirli türev ve integraller ile ilgili bazı temel kavram ve bilgiler verilecektir. Ayrıca uyumlu kesirli integraller yardımıyla elde edilen bazı sonuçlar da burada yer almaktadır. Khalil ve ark. (2014) tarafından tanımlanan uyumlu kesirli türev tanımı şu şekildedir:

Tanım 3.3.1 (**Uyumlu Kesirli Türev**): $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Her $t > 0$ ve $\alpha \in (0,1)$ için f fonksiyonunun α mertebeden "uyumlu kesirli türevi"

$$T_\alpha(f)(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(t + \varepsilon\, t^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon}$$

ile tanımlanır [40].

Eğer f fonksiyonu $a > 0$ olmak üzere bir $(0,a)$ aralığında α diferensiyellenebilir ve $\lim_{t\to 0^+} f^{(\alpha)}(t)$ limiti varsa bu takdirde,

$$f^{(\alpha)}(0) = \lim_{t \to 0^+} f^{(\alpha)}(t)$$

şeklinde tanımlanır. f nin α mertebeli uyumlu kesirli türevini göstermek için bazen $T_\alpha(f)(t)$ yerine $f^{(\alpha)}(t)$ yazılacaktır. Ayrıca, α mertebeden uyumlu kesirli türev mevcutsa bu durumda f fonksiyonuna kısaca α diferensiyellenebilirdir denir. Bu tanımın bir sonucu olarak aşağıdaki teorem yazılabilir.

Teorem 3.3.1 Bir $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $t_0 > 0$ noktasında $\alpha \in (0,1)$ olmak üzere α diferensiyellenebilir ise f fonksiyonu t_0 noktasında süreklidir [40].

Teorem 3.3.2 $\alpha \in (0,1]$ için f ve g fonksiyonları $t > 0$ noktasında α diferensiyellenebilir olsun. Bu durumda

i. $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$ için $T_\alpha(af + bg) = aT_\alpha(f) + bT_\alpha(g)$ dir.

ii. $\forall\, p \in \mathbb{R}$ için $T_\alpha(t^p) = pt^{p-\alpha}$

iii. Tüm $f(t) = \lambda$ biçimindeki sabit fonksiyonlar için $T_\alpha(\lambda) = 0$ dır.

iv. $T_\alpha(fg) = fT_\alpha(g) + gT_\alpha(f)$ dir.

v. $T_\alpha(f/g) = \frac{gT_\alpha(f) - fT_\alpha(g)}{g^2}$ dir.

vi. Ek olarak eğer f diferensiyellenebilirse $T_\alpha(f) = t^{1-\alpha}\frac{df}{dt}(t)$ dir [40].

Teorem 3.3.3 (**Rolle Teoremi**) $\alpha > 0$ olmak üzere $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için

i. $[a, b]$ aralığında sürekli,

ii. $\alpha \in (0, 1)$ için α diferensiyellenebilir,

iii. $f(a) = f(b)$

koşulları sağlandığı takdirde $f^{(\alpha)}(c) = 0$ olacak şekilde bir $c \in (a, b)$ vardır [40].

Teorem 3.3.4 (**Ortalama Değer Teoremi**) $\alpha > 0$ olmak üzere $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sürekli ve bazı $\alpha \in (0, 1)$ için α diferensiyellenebilir olsun. Bu takdirde

$$f^{(\alpha)}(c) = \frac{f(b) - f(a)}{\frac{1}{\alpha}b^\alpha - \frac{1}{\alpha}a^\alpha}$$

olacak şekilde bir $c \in (a, b)$ vardır [40].

Tanım 3.3.2 $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. $0 < \alpha \leq 1$ için f fonksiyonunun α mertebeden sol taraflı uyumlu kesirli türevi

$$T^a_\alpha(f)(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(t + \varepsilon\,(t-a)^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon}$$

olarak tanımlanır. Eğer (a, b) aralığında $(T^a_\alpha f)(t)$ mevcutsa $(T^a_\alpha f)(a) = \lim_{t \to a^+}(T^a_\alpha f)(t)$ olur [2].

Tanım 3.3.3 $f : (-\infty, b] \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. $0 < \alpha \leq 1$ için f fonksiyonunun α mertebeli sağ taraflı uyumlu kesirli türevi

$$({}^bT_\alpha f)(t) = -\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(t + \varepsilon\,(b-t)^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon}$$

olarak tanımlanır. Eğer (a, b) aralığında $({}^bT_\alpha f)(t)$ mevcutsa $({}^bT_\alpha f)(b) = \lim_{t \to b^-}({}^bT_\alpha f)(t)$ olur. Eğer f fonksiyonu diferansiyellenebilir ise
$T^a_\alpha(f)(t) = (t-a)^{1-\alpha}f'(t)$ ve $({}^b_\alpha Tf)(t) = -(b-t)^{1-\alpha}f'(t)$ dir. Burada sabit fonksiyonunun uyumlu kesirli türevinin sıfır olduğu açıktır [2].

Tanım 3.3.4 $\alpha \in (n, n+1]$ ve $\beta = \alpha - n$ olsun. $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonun α mertebeli sol taraflı uyumlu kesirli türevi

$$(\mathbf{T}_\alpha^a f)(t) = \left(T_\beta^a f^{(n)}\right)(t)$$

olarak tanımlanır [2]. Böylece α mertebeli sol taraflı uyumlu kesirli türevin var olabilmesi için f fonksiyonunun n kez türevlenebilir olması gerekir.

Benzer olarak $\alpha \in (n, n+1]$ ve $\beta = \alpha - n$ olsun. $f : (-\infty, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun α mertebeli sağ taraflı uyumlu kesirli türevi

$$({}_{\alpha}^{b}\mathbf{T} f)(t) = (-1)^{n+1} \left({}_{\beta}^{b}T f^{(n)}\right)(t)$$

olarak verilir. Burada $\alpha = n+1$ alınırsa $\beta = 1$ demektir, bu takdirde f'nin kesirli türevi $f^{(n+1)}(t)$ olur. Ayrıca $n = 0$ seçilirse $\alpha \in (0, 1]$ ve $\beta = \alpha$ demektir, bu takdirde verilen tanım önceki verilen tanıma dönüşür.

Tanım 3.3.5 $0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere α mertebeli sol taraflı uyumlu kesirli integral

$$(I_\alpha^a f)(t) = \int_a^t f(x) d_\alpha(x, a) = \int_a^t (x-a)^{\alpha-1} f(x) dx$$

olarak tanımlanır.

Benzer olarak $0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere α mertebeli sağ taraflı uyumlu kesirli integral,

$$({}^{b}I_\alpha f)(t) = \int_t^b f(x) d_\alpha(b, x) = \int_t^b (b-x)^{\alpha-1} f(x) dx$$

olarak tanımlanır [2].

Lemma 3.3.1 $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon ve $0 < \alpha \leq 1$ olsun. Bu takdirde bütün $t > a$ için

$$T_\alpha^a I_\alpha^a f(t) = f(t)$$

eşitliği geçerlidir [2].

Lemma 3.3.2 $f : (-\infty, b] \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon ve $0 < \alpha \leq 1$ olsun. Bu takdirde bütün $t < b$ için

$${}^{b}T_\alpha \, {}^{b}I_\alpha f(t) = f(t)$$

olur [2].

Tanım 3.3.6 $\alpha \in (n, n+1]$ ve $\beta = \alpha - n$ olsun. Bu takdirde $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun sırasıyla α mertebeli sol taraflı ve sağ taraflı uyumlu kesirli integralleri

$$(I_\alpha^a f)(t) = J_{a^+}^{n+1}\left[(t-a)^{\beta-1} f(t)\right] = \frac{1}{n!}\int_a^t (t-x)^n (x-a)^{\beta-1} f(x)dx,$$

$$({}^bI_\alpha f)(t) = J_{b^-}^{n+1}\left[(b-t)^{\beta-1} f(t)\right] = \frac{1}{n!}\int_t^b (x-t)^n (b-x)^{\beta-1} f(x)dx$$

şeklinde tanımlanır [2].

Burada eğer $\alpha = n+1$ olarak alınırsa, $\beta = \alpha - n = n+1-n = 1$ olur. Böylece

$$(I_\alpha^a f)(t) = \left(J_a^{n+1} f\right)(t) = \frac{1}{n!}\int_a^t (t-x)^n f(x)dx$$

olur. Bu ise

$$f^{-1}(x) = \int_a^x f(t)dt$$

olarak tanımlanan Cauchy formülü yardımıyla f fonksiyonunun $(a, t]$ aralığında $n+1$ kez tekrarlı integralidir [54].

$\alpha > 0$ mertebeli sol Riemann-Liouville kesirli integralinin

$$(J_{a^+}^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-x)^{\alpha-1} f(x)dx$$

olarak tanımlandığı göz önüne alınırsa $\alpha = n+1$, $n = 0, 1, 2...$ için

$$(I_\alpha^a f)(t) = J_{a^+}^{n+1} f(t)$$

Lemma 3.3.3 $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon, $f^{(n)}(t)$ sürekli ve $\alpha \in (n, n+1]$ olsun. Bu takdirde her $t > a$ için

$$T_\alpha^a I_\alpha^a f(t) = f(t)$$

olur [2].

Lemma 3.3.4 $f : (-\infty, b] \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon, $f^{(n)}(t)$ sürekli ve $\alpha \in (n, n+1]$ olsun. Bu takdirde her $t > a$ için

$${}^bT_\alpha \, {}^bI_\alpha f(t) = f(t)$$

olur [2].

Lemma 3.3.5 $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ diferensiyellenebilen bir fonksiyon, ve $0 < \alpha \leq 1$ olsun. Bu takdirde her $t > a$ için

$$I_\alpha^a T_\alpha^a f(t) = f(t) - f(a)$$

olur [2].

Teorem 3.3.5 (Zincir Kuralı) $\alpha \in (0,1]$ ve $f,g : [a,\infty) \to \mathbb{R}$ (sol) α diferensiyellenebilen fonksiyonlar olsun. $h(t) = f(g(t))$ olmak üzere bütün $t \neq a$ ve $g(t) \neq 0$ için $h(t)$, (sol) α diferensiyellenebilirdir ve

$$(T_\alpha^a h)(t) = (T_\alpha^a f)(g(t)).(T_\alpha^a g)(t).g(t)^{\alpha-1}$$

şeklindedir. Eğer $t = a$ ise

$$(T_\alpha^a h)(t) = \lim_{t\to a^+} (T_\alpha^a f)(g(t)).(T_\alpha^a g)(t).g(t)^{\alpha-1}$$

olur [2].

3.4 Katugampola Kesirli İntegralleri

Bu bölümde Katugampola ve Genelleştirilmiş Katugampola kesirli integrallerinin tanım ve özelliklerinden bahsedilecektir.

Katugampola 2010 yılında Riemann-Liouville ve Hadamard kesirli integrallerini aşağıdaki şekilde tek bir formda genelleştiren bir kesirli integral tanımı vermiştir.

Kesirli integral formülünü elde etmek için $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere reel ρ ve $a \geq 0$ alınırsa

$${}^\rho_a\mathcal{I}^\alpha_x f(x) = \int_a^x \tau_1^\rho d\tau_1 \int_a^{\tau_1} \tau_2^\rho d\tau_2 ... \int_a^{\tau_{n-1}} \tau_n^\rho d\tau_n$$

n-katlı integral formu yazılabilir. İki katlı integraller için

$$\begin{aligned}\int_a^x \tau_1^\rho d\tau_1 \int_a^{\tau_1} \tau^\rho f(\tau) d\tau &= \int_a^x \tau^\rho f(\tau) d\tau \int_\tau^x \tau_1^\rho d\tau_1 \\ &= \frac{1}{\rho+1} \int_a^x (x^{\rho+1} - \tau^{\rho+1}) \tau^\rho f(\tau) d\tau\end{aligned}$$

yazılabilir. Bu ifadeden faydalanarak üç katlı integraller için

$$\begin{aligned}\int_a^x \tau_1^\rho d\tau_1 \int_a^{\tau_1} \tau_2^\rho d\tau_2 \int_a^{\tau_2} \tau^\rho f(\tau) d\tau &= \int_a^x \tau^\rho f(\tau) d\tau \int_\tau^x \tau_1^\rho d\tau_1 \int_{\tau_1}^x \tau_2^\rho d\tau_2 \\ &= \frac{1}{2(\rho+1)^2} \int_a^x (x^{\rho+1} - \tau^{\rho+1}) \tau^\rho f(\tau) d\tau\end{aligned}$$

bulunur. Bu adım $n-1$ kez tekrar edilirse

$$\begin{aligned}&\int_a^x \tau_1^\rho d\tau_1 \int_a^{\tau_1} \tau_2^\rho d\tau_2 ... \int_a^{\tau_{n-1}} \tau_{n-1}^\rho f(\tau_n) d\tau_n \\ =\ &\frac{(\rho+1)^{1-n}}{(n-1)!} \int_a^x (x^{\rho+1} - \tau^{\rho+1})^{n-1} \tau^\rho f(\tau) d\tau\end{aligned}$$

yazılır. Buradan α ve $\rho \neq -1$ reel sayıları için

$$ {}^{\rho}_{a}\mathcal{I}^{\alpha}_{x} f(x) = \frac{(\rho!)^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x^{\rho+1} - \tau^{\rho+1})^{n-1} \tau^{\rho} f(\tau) d\tau $$

kesirli integrali elde edilir.

Bu eşitlikte $\rho = 0$ alınırsa Riemann-Liouville kesirli integrali elde edilir. L'hospital kuralı kullanılarak $\rho \to -1^+$ için limit alınırsa

$$ \begin{aligned} & \lim_{\rho \to -1^+} \frac{(\rho+1)^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x^{\rho+1} - \tau^{\rho+1})^{\alpha-1} \tau^{\rho} f(\tau) d\tau \\ = & \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \lim_{\rho \to -1^+} \left(\frac{x^{\rho+1} - \tau^{\rho+1}}{\rho+1}^{\alpha-1} \tau^{\rho} f(\tau) d\tau \right) \\ = & \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \left(\log \frac{x}{\tau} \right)^{\alpha-1} \frac{f(\tau)}{\tau} d\tau \end{aligned} $$

Hadamard kesirli integrali elde edilir [36].

Bu bilgiler özetlenirse şu tanım ve özellik verilebilir.

Tanım 3.4.1 $[a,b] \subset \mathbb{R}$ sınırlı bir aralık, $a < x < b$ ve $\rho > 0$ olsun. $(\alpha > 0)$ ve $f \in X^p_c(a,b)$ için sol ve sağ Katugampola kesirli integralleri

$$ {}^{\rho}\mathcal{I}^{\alpha}_{a+} f(x) = \frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{t^{\rho-1}}{(x^{\rho} - t^{\rho})^{1-\alpha}} f(t) dt $$

ve

$$ {}^{\rho}\mathcal{I}^{\alpha}_{b-} f(x) = \frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b \frac{t^{\rho-1}}{(t^{\rho} - x^{\rho})^{1-\alpha}} f(t) dt $$

şeklindedir [36].

Teorem 3.4.1 "$\alpha > 0$ ve $\rho > 0$ olsun. $x > a$ ise

1. $\lim_{\rho \to 1} {}^{\rho}\mathcal{I}^{\alpha}_{a+} f(x) = J^{\alpha}_{a+} f(x)$,
2. $\lim_{\rho \to 0^+} {}^{\rho}\mathcal{I}^{\alpha}_{a+} f(x) = H^{\alpha}_{a+} f(x)$

ifadeleri geçerlidir.Benzer sonuç sağ Katugampola integralleri içinde elde edilir [36].

Sonuç 3.4.1 Katugampola ve Erdelyi-Kober kesirli integral tanımları birbirlerine benzerlik göstermelerine rağmen aynı değildirler. Ayrıca, Hadamard kesirli integralleri Katugampola kesirli integralleri üzerinden elde edilebiliyor. Ancak Erdelyi-Kober integralleri için bu mümkün değildir. Örnek olarak $f(x) = x^{\rho}$ alındığında $\rho^{-\alpha}$ faktörü kadar bir fark elde edilir ki bu fark Hadamard kesirli integralinin elde edilmesi için gereklidir [36].

Katugampola, 2014 yılında yukarıda tanımlanan kesirli integral tanımından faydalanarak aşağıdaki Katugampola genelleştirilmiş kesirli türev tanımını vermiştir.

Tanım 3.4.2 $\alpha \in \mathbb{C}$, $Re(\alpha) \geq 0$ ve $\rho > 0$ olsun. $0 \leq a < x < b \leq \infty$ olmak üzere integrallerin tanımlı olması şartıyla

$$\begin{aligned}({}^{\rho}\mathcal{D}^{\alpha}_{a+}f)(x) &= \left(x^{1-\rho}\frac{d}{dx}\right)^{n}({}^{\rho}\mathcal{I}^{n-\alpha}_{a+}f)(x) \\ &= \frac{\rho^{\alpha-n+1}}{\Gamma(n-\alpha)}\left(x^{1-\rho}\frac{d}{dx}\right)^{n}\int_{a}^{x}\frac{\tau^{\rho-1}f(\tau)}{(x^{\rho}-\tau^{\rho})^{\alpha-n+1}}d\tau \end{aligned} \tag{3.4.1}$$

ve

$$\begin{aligned}({}^{\rho}\mathcal{D}^{\alpha}_{b-}f)(x) &= \left(-x^{1-\rho}\frac{d}{dx}\right)^{n}({}^{\rho}\mathcal{I}^{n-\alpha}_{b-}f)(x) \\ &= \frac{\rho^{\alpha-n+1}}{\Gamma(n-\alpha)}\left(-x^{1-\rho}\frac{d}{dx}\right)^{n}\int_{a}^{x}\frac{\tau^{\rho-1}f(\tau)}{(\tau^{\rho}-x^{\rho})^{\alpha-n+1}}d\tau \end{aligned} \tag{3.4.2}$$

ifadelerine genelleştirilmiş Katugampola kesirli türevleri denir [36].

Katugampola kesirli integralleri ve türevleri aşağıdaki özelliklere sahiptir.

Teorem 3.4.2 $0 < \alpha < 1$, $\rho > 0$ ve $f \in X^{\rho}_{c}(a,b)$ olsun. O halde

$$\left(\mathcal{D}^{\alpha}_{a+}\,\mathcal{I}^{\alpha}_{a+}\right)f(x) = f(x)$$

eşitliği geçerlidir [36].

Teorem 3.4.3 $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $0 < Re(\alpha) < 1$ ve $0 < Re(\beta) < 1$ olsun. Eğer $0 < a < b < \infty$ ve $1 \leq p \leq \infty$ ise $\rho > 0$ ve $f \in X^{\rho}_{c}(a,b)$ için

$$\mathcal{I}^{\alpha}_{a+}\,\mathcal{I}^{\beta}_{a+}f = \mathcal{I}^{\alpha+\beta}_{a+}f$$

ve

$$\mathcal{D}^{\alpha}_{a+}\,\mathcal{D}^{\beta}_{a+}f = \mathcal{D}^{\alpha+\beta}_{a+}f$$

eşitlikleri geçerlidir [36].

Teorem 3.4.4 $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ve $0 < Re(\alpha) < Re(\beta) < 1$ olsun. Eğer $0 < a < b < \infty$ ve $1 \leq p \leq \infty$ ise $\rho > 0$ ve $f \in X^{\rho}_{c}(a,b)$ için

$$\mathcal{D}^{\alpha}_{a+}\,\mathcal{I}^{\beta}_{a+}f = \mathcal{I}^{\beta-\alpha}_{a+}f$$

ve

$$\mathcal{D}^{\alpha}_{b-}\,\mathcal{I}^{\beta}_{b-}f = \mathcal{I}^{\beta-\alpha}_{b-}f$$

eşitlikleri geçerlidir [36].

Teorem 3.4.5 $\alpha \in \mathbb{C}$ ve $0 < Re(\alpha) < 1$ olsun. Eğer $0 < a < b < \infty$ ve $1 \leq p \leq \infty$ ise $\rho > 0$ ve $f, g \in X_c^\rho(a,b)$ için

$$\mathcal{I}_{a+}^{\alpha}(f+g) = \mathcal{I}_{a+}^{\alpha} f + \mathcal{I}_{a+}^{\alpha} g$$

ve

$$\mathcal{D}_{a+}^{\alpha}(f+g) = \mathcal{D}_{a+}^{\alpha} f + \mathcal{D}_{a+}^{\alpha} g$$

eşitlikleri geçerlidir [36].

Katugampola kesirli integrallerinin kompleks sayılar kümesine genişletilmiş tanımı şu şekildedir:

Tanım 3.4.3 $[a,b]$ $(-\infty < a < b < \infty)$ aralığı $\mathbb{R}$ reel ekseninde sınırlı bir aralık, $\alpha \in \mathbb{C}$ ve $Re(\alpha) > 0$ olsun. Sol ve sağ Katugampola kesirli integralleri

$${}^{\rho}\mathcal{I}_{a+}^{\alpha} f(x) = \frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{t^{\rho-1}}{(x^\rho - t^\rho)^{1-\alpha}} f(t)dt \quad (x < a)$$

ve

$${}^{\rho}\mathcal{I}_{b-}^{\alpha} f(x) = \frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b \frac{t^{\rho-1}}{(t^\rho - x^\rho)^{1-\alpha}} f(t)dt \quad (b < x)$$

şeklinde tanımlanır [36].

3.4.1 Genelleştirilmiş Katugampola Kesirli İntegralleri

2016 yılında Katugampola, literatürde iyi bilinen Riemann-Liouville, Liouville, Hadamard, Weyl ve Katugampola kesirli integrallerini tek bir formda genelleyen aşağıdaki tanımı vermiştir.

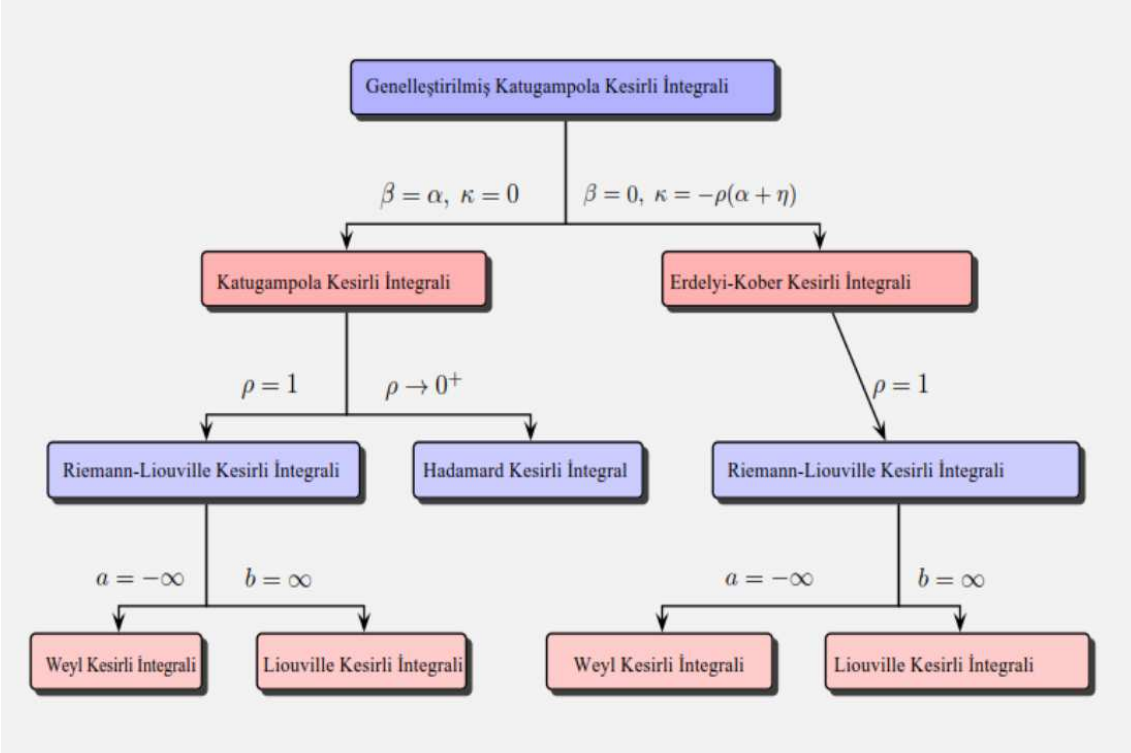
Tanım 3.4.4 $0 \leq a < x < b \leq \infty$, $\varphi \in X_c^p(a,b)$, $\alpha \in \mathbb{R}^+$, ve $\beta, \rho, \eta, \kappa \in \mathbb{R}$ olsun. genelleştirilmiş Katugampola kesirli integralleri (sol taraflı ve sağ taraflı)

$$\left({}^{\rho}I_{a+,\eta,\kappa}^{\alpha,\beta}\varphi\right)(x) := \frac{\rho^{1-\beta}x^{\kappa}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{\tau^{\rho(\eta+1)-1}}{(x^\rho - \tau^\rho)^{1-\alpha}} \varphi(\tau)\, d\tau \tag{3.4.3}$$

ve

$$\left({}^{\rho}I_{b-,\eta,\kappa}^{\alpha,\beta}\varphi\right)(x) := \frac{\rho^{1-\beta}x^{\rho\eta}}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b \frac{\tau^{\kappa+\rho-1}}{(x^\rho - \tau^\rho)^{1-\alpha}} \varphi(\tau)\, d\tau$$

şeklindedir [65].



Şekil 3.1: Genelleştirilmiş Kesirli İntegraller

Sonuç 3.4.2 Literatürde iyi bilinen altı kesirli integral, (3.4.3)'de tanımlanan genelleştirilmiş kesirli integrallerin özel durumlarıdır [37, 66]:

(i) (3.4.3)'de $(\tau/x)^\rho$ dönüşümü uygulanırsa

$$\left({}^\rho I^{\alpha,\beta}_{a+,\eta,\kappa}\varphi\right)(x) := \frac{x^{\kappa+\rho(\alpha+\eta)}}{\rho^\beta \Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-u)^{\alpha-1} u^\eta \varphi(xu^{1/\rho}) du \quad \rho \neq 0$$

Riemann-Liouville formu elde edilir. $\kappa = 0$, $\eta = 0$ yazılır ve $\rho \to 1$ için limit alınırsa (3.4.3) kesirli integrali Riemann-Liouville kesirli integraline indirgenir (3.1.1) [41, p. 69].

(ii) $\kappa = 0$, $\eta = 0$, $a = 0$ yazılır ve $\rho \to 1$ için limit alınırsa (3.4.3) kesirli integrali Liouville kesirli integraline indirgenir (3.2.11) [41, p.79].

(iii) $\kappa = 0$, $\eta = 0$, $a = -\infty$ yazılır ve $\rho \to 1$ için limit alınırsa (3.4.3) kesirli integrali Weyl kesirli integraline indirgenir (3.2.12) [65].

(iv) $\beta = \alpha$, $\kappa = 0$, $\eta = 0$ yazılır ve L'Hôspital kuralı ile $\rho \to 0^+$ için limit alınırsa (3.4.3) kesirli integrali Hadamard kesirli integraline indirgenir (3.2.1) [41, p. 110].

(v) $\beta = 0$ ve $\kappa = -\rho(\alpha + \eta)$ yazılırsa (3.4.3) kesirli integrali Erdélyi-Kober kesirli integraline indirgenir (3.2.6) [41, p. 105].

(vi) $\beta=\alpha$, $\kappa=0$ ve $\eta=0$ yazılırsa (3.4.3) kesirli integrali Katugampola kesirli intrgraline indirgenir (3.4.1) [36].

Teorem 3.4.6 Katugampola genelleştirilmiş kesirli integralleri ile ilgili olarak aşağıdaki özellikler geçerlidir [39]:

i.

$$ {}^{\rho}I^{\alpha,\beta}_{a+,\eta,\kappa}x^{\rho\gamma}f(x) = {}^{\rho}I^{\alpha,\beta}_{a+,\eta+\gamma,\kappa}f(x), $$

$$ {}^{\rho}I^{\alpha,\beta}_{b-,\eta,\kappa}x^{\gamma}f(x) = {}^{\rho}I^{\alpha,\beta}_{b-,\eta,\kappa+\gamma}f(x), $$

ii. $\alpha_2>0$, $\alpha_1+\alpha_2\geq 0$ veya $\alpha_2<0$, $\alpha_1>0$ veya $\alpha_1<0$, $\alpha_1+\alpha_2\leq 0$ olmak üzere

$$ {}^{\rho}I^{\alpha_1,\beta_1}_{a+,\eta_1,\kappa_1}\,{}^{\rho}I^{\alpha_2,\beta_2}_{a+,\eta_2,-\rho\eta_1}f(x) = {}^{\rho}I^{\alpha_1+\alpha_2,\beta_1+\beta_2}_{a+,\eta_2,\kappa_1}f(x), $$

$$ {}^{\rho}I^{\alpha_1,\beta_1}_{b-,\eta_1,-\eta_1}\,{}^{\rho}I^{\alpha_2,\beta_2}_{b-,\eta_2,\kappa_2}f(x) = {}^{\rho}I^{\alpha_1+\alpha_2,\beta_1+\beta_2}_{b-,\eta_1,\kappa_2}f(x), $$

iii.

$$ \int_a^b x^{\rho-1}f(x)\left({}^{\rho}I^{\alpha,\beta}_{a+,\eta,\kappa}g(x)\right)dx = \int_a^b x^{\rho-1}g(x)\left({}^{\rho}I^{\alpha,\beta}_{a+,\eta,\kappa}f(x)\right)dx. $$

4. BULGULAR

Bu bölüm kendi içerisinde iki alt bölüme ayrılmıştır. İlk bölümde uyumlu kesirli integrallerle ilgili yeni sonuçlar verilmiştir. İkinci bölümde Katugampola kesirli integralleri ile ilgili yeni sonuçlar verilmiştir.

4.1 Uyumlu Kesirli İntegraller İçin Eşitsizlikler

Bu bölümde sırasıyla uyumlu kesirli inegraller yardımıyla elde edilen yeni Hermite-Hadamard, Hermite-Hadamard-Fejer, Ostrowski, Chebyshev ve Grüss tipli eşitsizlikler sunulmuştur.

4.1.1 Hermite-Hadamard Tipli Eşitsizlikler

Aşağıda, uyumlu kesirli integraller için ilk önce Hermite-Hadamard eşitsizliği ve sonrasında Hermite-Hadamard eşitsizliğinin genişletilmişi verilmiştir.

Teorem 4.1.1 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon, $0 \le a < b$, $\alpha \in (n, n+1]$ ve $f \in L_1[a, b]$ olsun. Eğer f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında konveks bir fonksiyon ise

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \le \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}\Gamma(\alpha-n)}[(I^a_\alpha f)(b) + ({}^bI_\alpha f)(a)] \le \frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{4.1.1}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. $x, y \in [a, b]$ olsun. f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında konveks olduğundan,

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \le \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

yazılabilir. $x = ta + (1-t)b$ ve $y = (1-t)a + tb$ alınırsa,

$$2f\left(\frac{a+b}{2}\right) \le f(ta + (1-t)b) + f((1-t)a + tb) \tag{4.1.2}$$

elde edilir. (4.1.2) eşitsizliğinin her iki tarafı $\frac{1}{n!}t^n(1-t)^{\alpha-n-1}$ ile çarpılır, t parametresi için $[0, 1]$ aralığında integrali alınırsa ve Beta ile Gama fonksiyonları yardımıyla elde edilen

$$\int_0^1 t^n(1-t)^{\alpha-n-1}dt = B(n+1, \alpha-n) = \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha-n)}{\Gamma(\alpha+1)}$$

eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\frac{2}{n!}f(\frac{a+b}{2})\int_0^1 t^n(1-t)^{\alpha-n-1}dt &\leq \frac{1}{n!}\int_0^1 t^n(1-t)^{\alpha-n-1}f(ta+(1-t)b)dt \\
&+ \frac{1}{n!}\int_0^1 t^n(1-t)^{\alpha-n-1}f((1-t)a+tb)dt \\
&= \frac{1}{n!}\int_a^b (\frac{b-u}{b-a})^n(\frac{u-a}{b-a})^{\alpha-n-1}f(u)\frac{du}{a-b} \\
&+ \frac{1}{n!}\int_a^b (\frac{u-a}{b-a})^n(\frac{b-u}{b-a})^{\alpha-n-1}f(u)\frac{du}{b-a} \\
&= \frac{1}{(b-a)^\alpha}[I_\alpha^a f(b)+^b I_\alpha f(a)]
\end{aligned}$$

yazılır. Buradan da

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^\alpha\Gamma(\alpha-n)}[I_\alpha^a f(b)+^b I_\alpha f(a)]$$

elde edilir. Böylece (4.1.1) eşitsizliğinin sol tarafı ispatlanmış olur.

f fonksiyonu konveks olduğundan

$$\begin{aligned}
f(ta+(1-t)b) &\leq tf(a)+(1-t)f(b) \\
f((1-t)a+tb) &\leq (1-t)f(a)+tf(b)
\end{aligned}$$

eşitsizlikleri yazılabilir. Bu eşitsizlikler taraf tarafa toplanırsa

$$f(ta+(1-t)b)+f((1-t)a+tb)\leq f(a)+f(b)$$

elde edilir. Son eşitsizliğin her iki tarafı $\frac{1}{n!}t^n(1-t)^{\alpha-n-1}$ ile çarpılır ve $[0,1]$ aralığında t parametresine göre integrali alınırsa

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(b-a)^\alpha}[I_\alpha^a f(b)+^b I_\alpha f(a)] &\leq \frac{1}{n!}\int_0^1 t^n(1-t)^{\alpha-n-1}[f(a)+f(b)]dt \\
&\leq \frac{1}{n!}B(n+1,\alpha-n)[f(a)+f(b)] \\
&\leq \frac{\Gamma(\alpha-n)}{\Gamma(\alpha+1)}[f(a)+f(b)]
\end{aligned}$$

olur. Böylece

$$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^\alpha\Gamma(\alpha-n)}[(I_\alpha^a f)(b)+(^b I_\alpha f)(a)]\leq f(a)+f(b)$$

eşitsizliği elde edilir ve ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 4.1.1 Teorem 4.1.1'de, $\alpha=n+1$ alınırsa (4.1.1) eşitsizliği (3.1.5) eşitsizliğine indirgenir ve f fonksiyonunun Teorem 3.1.1'de olduğu gibi pozitif olarak alınması gerekmez.

Teorem 4.1.2 $a < b$ olmak üzere $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ iki kez diferansiyellenebilen bir fonksiyon, $\alpha \in (n, n+1]$ ve $f \in L_1[a,b]$ olsun. Eğer f'' fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sınırlı, $m = \inf_{t\in[a,b]} f''(t)$, $M = \sup_{t\in[a,b]} f''(t)$ ise

$$\begin{aligned}
& \frac{m\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}\Gamma(\alpha-n)n!}\int_a^{\frac{a+b}{2}}\left(\frac{a+b}{2}-x\right)^2 \\
& \times[(b-x)^n(x-a)^{\alpha-n-1}+(x-a)^n(b-x)^{\alpha-n-1}]dx \\
\leq\; & \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}\Gamma(\alpha-n)}[(I_{\alpha}^{a}f)(b)+({}^{b}I_{\alpha}f)(a)]-f\left(\frac{a+b}{2}\right) \\
\leq\; & \frac{M\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}\Gamma(\alpha-n)n!}\int_a^{\frac{a+b}{2}}\left(\frac{a+b}{2}-x\right)^2 \\
& \times[(b-x)^n(x-a)^{\alpha-n-1}+(x-a)^n(b-x)^{\alpha-n-1}]dx
\end{aligned} \tag{4.1.3}$$

ve

$$\begin{aligned}
& \frac{-M\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}\Gamma(\alpha-n)n!}\int_a^{\frac{a+b}{2}}(x-a)(b-x) \\
& \times[(b-x)^n(x-a)^{\alpha-n-1}+(x-a)^n(b-x)^{\alpha-n-1}]dx \\
\leq\; & \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}\Gamma(\alpha-n)}[(I_{\alpha}^{a}f)(b)+({}^{b}I_{\alpha}f)(a)]-\frac{f(a)+f(b)}{2} \\
\leq\; & \frac{-m\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}\Gamma(\alpha-n)n!}\int_a^{\frac{a+b}{2}}(x-a)(b-x) \\
& \times[(b-x)^n(x-a)^{\alpha-n-1}+(x-a)^n(b-x)^{\alpha-n-1}]dx
\end{aligned} \tag{4.1.4}$$

eşitsizlikleri geçerlidir.

İspat. İlk olarak (4.1.3) eşitsizliği kanıtlanacaktır. Uyumlu kesirli integralin tanımından

$$\begin{aligned}
& \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}\Gamma(\alpha-n)}[I_{\alpha}^{a}f(b)+{}^{b}I_{\alpha}f(a)] \\
=\; & \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}\Gamma(\alpha-n)}\Big[\frac{1}{n!}\int_a^b(b-x)^n(x-a)^{\alpha-n-1}f(x)dx \\
& +\frac{1}{n!}\int_a^b(x-a)^n(b-x)^{\alpha-n-1}f(x)dx\Big] \\
=\; & \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}\Gamma(\alpha-n)n!} \\
& \times\int_a^b f(x)[(b-x)^n(x-a)^{\alpha-n-1}+(x-a)^n(b-x)^{\alpha-n-1}]dx \\
=\; & \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}\Gamma(\alpha-n)n!} \\
& \times\int_a^b f(a+b-x)[(b-x)^n(x-a)^{\alpha-n-1}+(x-a)^n(b-x)^{\alpha-n-1}]dx
\end{aligned}$$

ve buradanda

$$\begin{aligned}
&\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}\Gamma(\alpha-n)}[I_{\alpha}^{a}f(b)+{}^{b}I_{\alpha}f(a)] \\
=\;& \frac{\Gamma(\alpha+1)}{4(b-a)^{\alpha}\Gamma(\alpha-n)n!}\int_{a}^{b}[f(x)+f(a+b-x)] \\
&\times[(b-x)^{n}(x-a)^{\alpha-n-1}+(x-a)^{n}(b-x)^{\alpha-n-1}]dx
\end{aligned} \tag{4.1.5}$$

yazılabilir. Böylece

$$\begin{aligned}
&\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}\Gamma(\alpha-n)}[(I_{\alpha}^{a}f)(b)+({}^{b}I_{\alpha}f)(a)]-f\left(\frac{a+b}{2}\right) \\
=\;& \frac{\Gamma(\alpha+1)}{4(b-a)^{\alpha}\Gamma(\alpha-n)n!}\int_{a}^{b}\left[f(x)+f(a+b-x)-2f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right] \\
&\times[(b-x)^{n}(x-a)^{\alpha-n-1}+(x-a)^{n}(b-x)^{\alpha-n-1}]dx
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\left[f(x)+f(a+b-x)-2f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right][(b-x)^{n}(x-a)^{\alpha-n-1}+(x-a)^{n}(b-x)^{\alpha-n-1}]$$

ifadesi $x=\frac{a+b}{2}$'e göre simetrik olduğundan

$$\begin{aligned}
&\frac{\Gamma(\alpha+1)}{4(b-a)^{\alpha}\Gamma(\alpha-n)n!}\int_{a}^{b}\left[f(x)+f(a+b-x)-2f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right] \\
&\times[(b-x)^{n}(x-a)^{\alpha-n-1}+(x-a)^{n}(b-x)^{\alpha-n-1}]dx \\
=\;& \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}\Gamma(\alpha-n)n!}\int_{a}^{\frac{a+b}{2}}\left[f(x)+f(a+b-x)-2f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right] \\
&\times[(b-x)^{n}(x-a)^{\alpha-n-1}+(x-a)^{n}(b-x)^{\alpha-n-1}]dx
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}
&\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}\Gamma(\alpha-n)}[(I_{\alpha}^{a}f)(b)+({}^{b}I_{\alpha}f)(a)]-f\left(\frac{a+b}{2}\right) \\
=\;& \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}\Gamma(\alpha-n)n!}\int_{a}^{\frac{a+b}{2}}\left[f(x)+f(a+b-x)-2f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right] \\
&\times[(b-x)^{n}(x-a)^{\alpha-n-1}+(x-a)^{n}(b-x)^{\alpha-n-1}]dx
\end{aligned} \tag{4.1.6}$$

yazılır.

$$f(a+b-x)-f\left(\frac{a+b}{2}\right)=\int_{\frac{a+b}{2}}^{a+b-x}f'(t)dt$$

ve

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)-f(x)=\int_{x}^{\frac{a+b}{2}}f'(t)dt,$$

olduğundan

$$\begin{aligned} f(x)+f(a+b-x)-2f\left(\frac{a+b}{2}\right) &= \int_{\frac{a+b}{2}}^{a+b-x} f^{'}(t)dt - \int_{x}^{\frac{a+b}{2}} f^{'}(t)dt \\ &= \int_{x}^{\frac{a+b}{2}} f^{'}(a+b-t)dt - \int_{x}^{\frac{a+b}{2}} f^{'}(t)dt \\ &= \int_{x}^{\frac{a+b}{2}} [f^{'}(a+b-t)-f^{'}(t)]dt \qquad (4.1.7) \end{aligned}$$

elde edilir.

$$f^{'}(a+b-t)-f^{'}(t)=\int_{t}^{a+b-t} f^{''}(y)dy,$$

$t\in\left[a,\frac{a+b}{2}\right]$ için

$$m(a+b-2t)\leq f^{'}(a+b-t)-f^{'}(t)\leq M(a+b-2t).$$

yazılıbilir. Böylece

$$\begin{aligned} \int_{x}^{\frac{a+b}{2}} m(a+b-2t)dt &\leq f(x)+f(a+b-x)-2f(\frac{a+b}{2}) \\ &\leq \int_{x}^{\frac{a+b}{2}} M(a+b-2t)dt \end{aligned}$$

olur ve buradan

$$\begin{aligned} m\left(\frac{a+b}{2}-x\right)^2 &\leq f(x)+f(a+b-x)-2f\left(\frac{a+b}{2}\right) \\ &\leq M\left(\frac{a+b}{2}-x\right)^2 \end{aligned}$$

yazılır. Böylece

$$\begin{aligned} & \frac{m\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}\Gamma(\alpha-n)n!}\int_{a}^{\frac{a+b}{2}}\left(\frac{a+b}{2}-x\right)^2 \\ & \times[(b-x)^n(x-a)^{\alpha-n-1}+(x-a)^n(b-x)^{\alpha-n-1}]dx \\ \leq\; & \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}\Gamma(\alpha-n)}[(I_{\alpha}^{a}f)(b)+\,({}^{b}I_{\alpha}f)(a)]-f\left(\frac{a+b}{2}\right) \\ \leq\; & \frac{M\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}\Gamma(\alpha-n)n!}\int_{a}^{\frac{a+b}{2}}\left(\frac{a+b}{2}-x\right)^2 \\ & \times[(b-x)^n(x-a)^{\alpha-n-1}+(x-a)^n(b-x)^{\alpha-n-1}]dx \end{aligned}$$

elde edilir ve (4.1.3) ifadesinin ispatı tamamlanır. İkinci eşitsizliğin ispatı için (4.1.5) ifadesinden

$$\begin{aligned} & \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}\Gamma(\alpha-n)n!}[(I_{\alpha}^{a}f)(b)+\,({}^{b}I_{\alpha}f)(a)]-\frac{f(a)+f(b)}{2} \\ =\; & \frac{\Gamma(\alpha+1)}{4(b-a)^{\alpha}\Gamma(\alpha-n)n!}\int_{a}^{b}[f(x)+f(a+b-x)-(f(a)+f(b))] \\ & \times[(b-x)^n(x-a)^{\alpha-n-1}+(x-a)^n(b-x)^{\alpha-n-1}]dx \end{aligned}$$

eşitliği yazılabilir.

$$[f(x)+f(a+b-x)-(f(a)+f(b))]\left[(b-x)^n(x-a)^{\alpha-n-1}+(x-a)^n(b-x)^{\alpha-n-1}\right]$$

ifadesinin $x=\frac{a+b}{2}$'e göre simetrik olmasından dolayı

$$\begin{aligned}
&\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^\alpha\Gamma(\alpha-n)n!}[(I_\alpha^a f)(b)+\ ({}^bI_\alpha f)(a)]-\frac{f(a)+f(b)}{2}\\
=\ &\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^\alpha\Gamma(\alpha-n)n!}\int_a^{\frac{a+b}{2}}[f(x)+f(a+b-x)-(f(a)+f(b))]\\
&\times[(b-x)^n(x-a)^{\alpha-n-1}+(x-a)^n(b-x)^{\alpha-n-1}]dx \qquad (4.1.8)
\end{aligned}$$

yazılabilir.

$$f(b)-f(a+b-x)=\int_{a+b-x}^{b}f^{'}(t)dt$$

ve

$$f(x)-f(a)=\int_a^x f^{'}(t)dt$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
&f(x)+f(a+b-x)-(f(a)+f(b))\\
=\ &\int_a^x f^{'}(t)dt-\int_{a+b-x}^{b}f^{'}(t)dt\\
=\ &\int_a^x f^{'}(t)dt-\int_a^x f^{'}(a+b-t)dt\\
=\ &-\int_a^x[f^{'}(a+b-t)-f^{'}(t)]dt \qquad (4.1.9)
\end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca $t\in[a,\frac{a+b}{2}]$ olduğundan

$$f^{'}(a+b-t)-f^{'}(t)=\int_t^{a+b-t}f^{''}(y)dy.$$

ve

$$m(a+b-2t)\leq f^{'}(a+b-t)-f^{'}(t)\leq M(a+b-2t)$$

yazılır. Buradan integral alınırsa

$$\begin{aligned}
-\int_a^x M(a+b-2t)dt\ &\leq\ f(x)+f(a+b-x)-(f(a)+f(b))\\
&\leq\ -\int_a^x m(a+b-2t)dt
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
-M(x-a)(b-x)\ &\leq\ f(x)+f(a+b-x)-(f(a)+f(b))\\
&\leq\ -m(x-a)(b-x)
\end{aligned}$$

olur ve buradan

$$\begin{aligned}
&\frac{-M\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}\Gamma(\alpha-n)n!}\int_{a}^{\frac{a+b}{2}}(x-a)(b-x) \\
&\times[(b-x)^{n}(x-a)^{\alpha-n-1}+(x-a)^{n}(b-x)^{\alpha-n-1}]dx \\
\leq\;& \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}\Gamma(\alpha-n)}[(I_{\alpha}^{a}f)(b)+\,({}^{b}I_{\alpha}f)(a)]-\frac{f(a)+f(b)}{2} \\
\leq\;& \frac{-m\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}\Gamma(\alpha-n)n!}\int_{a}^{\frac{a+b}{2}}(x-a)(b-x) \\
&\times[(b-x)^{n}(x-a)^{\alpha-n-1}+(x-a)^{n}(b-x)^{\alpha-n-1}]dx
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 4.1.2 Teorem 4.1.2'de $\alpha = n+1$ alınırsa Teorem 3.1.2 elde edilir.

Sonuç 4.1.3 Teorem 2.1.2'den faydalanarak Teorem 4.1.2'de $f'' \geq 0$ alınırsa (4.1.1) eşitsizliği elde edilir. Eğer Teorem 4.1.2'de $f'' \geq 0$, $\alpha = n+1$ ve $n = 0$ alınırsa (2.5.1) eşitsizliği elde edilir.

Açıktır ki $f'' \geq 0$ olması f''nün azalmayan olmasını gerektirir. Dolayısıyla $f'(a+b-x) \geq f'(x)$ eşitsizliği her $x \in [a, \frac{a+b}{2}]$ için sağlanır. Bu eşitsizlik yardımıyla aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 4.1.3 $a < b$ olmak üzere $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ pozitif değerli diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $f \in L_1[a,b]$ olsun. Eğer her $x \in [a, \frac{a+b}{2}]$ için $f'(a+b-x) \geq f'(x)$ ise

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}\Gamma(\alpha-n)}[(I_{\alpha}^{a}f)(b)+({}^{b}I_{\alpha}f)(a)] \leq \frac{f\,(a)+f\,(b)}{2}$$

eşitsizliği elde edilir.

İspat. (4.1.6) ve (4.1.7) ifadelerinden

$$\begin{aligned}
&\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}\Gamma(\alpha-n)}[I_{\alpha}^{a}f(b)+\,{}^{b}I_{\alpha}f(a)]-f\left(\frac{a+b}{2}\right) \\
=\;& \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}\Gamma(\alpha-n)n!}\int_{a}^{\frac{a+b}{2}}\left[f(x)+f(a+b-x)-2f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right] \\
&\times[(b-x)^{n}(x-a)^{\alpha-n-1}+(x-a)^{n}(b-x)^{\alpha-n-1}]dx \\
=\;& \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}\Gamma(\alpha-n)n!}\int_{a}^{\frac{a+b}{2}}\left[\int_{a}^{\frac{a+b}{2}}[f'(a+b-t)-f'(t)]dt\right] \\
&\times[(b-x)^{n}(x-a)^{\alpha-n-1}+(x-a)^{n}(b-x)^{\alpha-n-1}]dx \\
\geq\;& 0
\end{aligned}$$

yazılır. Benzer şekilde (4.1.8) ve (4.1.9)'den

$$
\begin{aligned}
& \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}\Gamma(\alpha-n)n!}[(I_{\alpha}^{a}f)(b)+({}^{b}I_{\alpha}f)(a)]-\frac{f(a)+f(b)}{2} \\
= & \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}\Gamma(\alpha-n)n!}\int_{a}^{\frac{a+b}{2}}\left[-\int_{a}^{x}[f^{'}(a+b-t)-f^{'}(t)]dt\right] \\
& \times[(b-x)^{n}(x-a)^{\alpha-n-1}+(x-a)^{n}(b-x)^{\alpha-n-1}]dx \\
\leq & \ 0
\end{aligned}
$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 4.1.4 Teorem 4.1.3'de $\alpha=n+1$ alınırsa Teorem 3.1.3 elde edilir.

Aşağıda uyumlu kesirli integraller yardımıyla elde edilen Hermite-Hadamard tipli iki eşitsizlik verilmiştir.

Teorem 4.1.4 $a<b$ olmak üzere $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ pozitif tanımlı bir fonksiyon, $n=0,1,2,...$ için $\alpha\in(n,n+1]$ ve $f\in L_1[a,b]$ olsun. O halde f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında konveks ve CWH fonksiyonu $[0,1]$ aralığında

$$
\begin{aligned}
CWH(t) = & \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha-n)} \\
& \times\int_{a}^{b}f(tx+(1-t)\frac{a+b}{2})((x-a)^{n}(b-x)^{\alpha-n-1}+(b-x)^{n}(x-a)^{\alpha-n-1})dx
\end{aligned}
$$

biçiminde tanımlanan konveks ve mononton artan bir fonksiyon ise

$$
f\left(\frac{a+b}{2}\right)=CWH(0)\leq CWH(t)\leq CWH(1)=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}\Gamma(\alpha-n)}[{}^{b}I_{\alpha}f(a)+I_{\alpha}^{a}f(b)]
$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. $t_1,t_2,\beta\in[0,1]$ olarak seçilirse

$$
\begin{aligned}
& CWH[(1-\beta)t_1+\beta t_2] \\
= & \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha-n)} \\
& \times\int_{a}^{b}f\left((1-\beta)\left[(x-\frac{a+b}{2})t_1+\frac{a+b}{2}\right]+\beta\left[(x-\frac{a+b}{2})t_2+\frac{a+b}{2}\right]\right) \\
& \times\big((x-a)^{n}(b-x)^{\alpha-n-1}+(b-x)^{n}(x-a)^{\alpha-n-1}\big)dx
\end{aligned}
$$

yazılabilir. f fonksiyonu konveks olduğundan

$$
\begin{aligned}
& f\left((1-\beta)\left[(x-\frac{a+b}{2})t_1+\frac{a+b}{2}\right]+\beta\left[(x-\frac{a+b}{2})t_2+\frac{a+b}{2}\right]\right) \\
\leq & (1-\beta)f\left((x-\frac{a+b}{2})t_1+\frac{a+b}{2}\right)+\beta f\left((x-\frac{a+b}{2})t_2+\frac{a+b}{2}\right)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}
& CWH[(1-\beta)t_1+\beta t_2] \\
\leq\ & \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha-n)}(1-\beta) \\
& \times\int_a^b f\left((x-\frac{a+b}{2})t_1+\frac{a+b}{2}\right)\big((x-a)^n(b-x)^{\alpha-n-1}+(b-x)^n(x-a)^{\alpha-n-1}\big)dx \\
& +\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha-n)}\beta\int_a^b f\left((x-\frac{a+b}{2})t_2+\frac{a+b}{2}\right) \\
& \times\big((x-a)^n(b-x)^{\alpha-n-1}+(b-x)^n(x-a)^{\alpha-n-1}\big)dx \\
=\ & (1-\beta)CWH(t_1)+\beta CWH(t_2)
\end{aligned}$$

sonucu çıkar. CWH fonksiyonu [0,1] aralığında konveks olduğundan

$$\begin{aligned}
& CWH(t) \\
=\ & \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha-n)} \\
& \times\int_a^b f\big(tx+(1-t)\frac{a+b}{2}\big)\big((x-a)^n(b-x)^{\alpha-n-1}+(b-x)^n(x-a)^{\alpha-n-1}\big)dx \\
=\ & \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha-n)} \\
& \times\int_a^{(a+b)/2} f\big(tx+(1-t)\frac{a+b}{2}\big)\big((x-a)^n(b-x)^{\alpha-n-1}+(b-x)^n(x-a)^{\alpha-n-1}\big)dx \\
& +\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha-n)} \\
& \times\int_{(a+b)/2}^b f\big(tx+(1-t)\frac{a+b}{2}\big)\big((x-a)^n(b-x)^{\alpha-n-1}+(b-x)^n(x-a)^{\alpha-n-1}\big)dx \\
=\ & \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha-n)}\bigg\{\int_0^{(b-a)/2} f\big(\frac{a+b}{2}-\frac{tx}{2}\big)\big[\big(\frac{b-a}{2}-\frac{x}{2}\big)^n\big(\frac{b-a}{2}+\frac{x}{2}\big)^{\alpha-n-1} \\
& +\big(\frac{b-a}{2}+\frac{x}{2}\big)^n\big(\frac{b-a}{2}-\frac{x}{2}\big)^{\alpha-n-1}\big]dx+\int_0^{(b-a)/2} f\big(\frac{a+b}{2} \\
& +\frac{tx}{2}\big)\big[\big(\frac{b-a}{2}-\frac{x}{2}\big)^n\big(\frac{b-a}{2}+\frac{x}{2}\big)^{\alpha-n-1} \\
& +\big(\frac{b-a}{2}+\frac{x}{2}\big)^n\big(\frac{b-a}{2}-\frac{x}{2}\big)^{\alpha-n-1}\big]dx\bigg\} \\
=\ & \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha-n)} \\
& \times\int_0^{(b-a)/2}\left[f(\frac{a+b}{2}-\frac{tx}{2})+f(\frac{a+b}{2}+\frac{tx}{2})\right] \\
& \times\big[\big(\frac{b-a}{2}-\frac{x}{2}\big)^n\big(\frac{b-a}{2}+\frac{x}{2}\big)^{\alpha-n-1}+\big(\frac{b-a}{2}+\frac{x}{2}\big)^n\big(\frac{b-a}{2}-\frac{x}{2}\big)^{\alpha-n-1}\big]dx
\end{aligned}$$

elde edilir. f fonksiyonunun pozitif değerli olmasından ve Lemma 3.1.1'den

$$h(x)=\frac{1}{2}[f(\frac{a+b}{2}-\frac{x}{2})+f(\frac{a+b}{2}+\frac{x}{2})]$$

fonksiyonu $[0, b-a]$ aralığında pozitif değerli ve monoton artandır. Bundan dolayı

$$(\frac{b-a}{2}-\frac{x}{2})^n(\frac{b-a}{2}+\frac{x}{2})^{\alpha-n-1}+(\frac{b-a}{2}+\frac{x}{2})^n(\frac{b-a}{2}-\frac{x}{2})^{\alpha-n-1}$$

negatif değerli değildir ve dolayısıyla $CWH(t)$ fonksiyonu $[0,1]$ aralığında artandır. Sonuç olarak

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=CWH(0) \quad ve \quad CWH(1)=\frac{n!}{2(b-a)^\alpha}[{}^bI_\alpha f(a)+I_\alpha^a f(b)]$$

yazılır ve ispat tamamlanır.

Sonuç 4.1.5 Teorem 4.1.4'de $\alpha = n+1$ alınırsa Teorem 3.1.4 elde edilir.

Teorem 4.1.5 f fonksiyonu Teorem 4.1.4'deki gibi tanımlansın. $n = 0, 1, 2, ...$ olmak üzere $\alpha \in (n, n+1]$ ve CWP fonksiyonu $[0,1]$ aralığında

$$\begin{aligned} CWP(t) \quad = \quad & \frac{\Gamma(\alpha+1)}{4(b-a)^\alpha\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha-n)}\int_a^b \left[f\left((\frac{1+t}{2})a+(\frac{1-t}{2})x\right)\right. \\ & \times\left((\frac{2b-x-a}{2})^n(\frac{x-a}{2})^{\alpha-n-1}+(\frac{x-a}{2})^n(\frac{2b-x-a}{2})^{\alpha-n-1}\right) \\ & +f\left((\frac{1+t}{2})b+(\frac{1-t}{2})x\right)\left((\frac{b-x}{2})^n(\frac{x+b-2a}{2})^{\alpha-n-1}\right. \\ & \left.\left.+\left((\frac{x+b-2a}{2})^n(\frac{b-x}{2})^{\alpha-n-1}\right)\right]dx \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan konveks ve monoton artan bir fonksiyon ise

$$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^\alpha\Gamma(\alpha-n)}[{}^bI_\alpha f(a)+I_\alpha^a f(b)] \quad = \quad CWP(0)\le CWP(t)\le CWP(1)=\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. Öncelikle ispata başlamadan önce, konveks bir f fonksiyonu ile lineer bir g fonksiyonunun bileşkesi fog fonksiyonunun konveks olduğu bilgisini verelim. Dolayısıyla

$$f\left((\frac{1+t}{2})a+(\frac{1-t}{2})x\right)\left[(\frac{2b-x-a}{2})^n(\frac{x-a}{2})^{\alpha-n-1}+(\frac{x-a}{2})^n(\frac{2b-x-a}{2})^{\alpha-n-1}\right]$$

ve

$$f\left((\frac{1+t}{2})a+(\frac{1-t}{2})x\right)\left[(\frac{b-x}{2})^n(\frac{x+b-2a}{2})^{\alpha-n-1}+(\frac{x+b-2a}{2})^n(\frac{b-x}{2})^{\alpha-n-1}\right]$$

konvekstir. Buradan $CWP(t)$ fonksiyonunun konveks olduğu sonucu çıkar. Temel analiz işlemleri ile

$$
\begin{aligned}
& CWP(t) \\
= & \frac{\Gamma(\alpha+1)}{4(b-a)^{\alpha}\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha-n-1)} \int_a^b \Bigg[f((\frac{1+t}{2})a + (\frac{1-t}{2})x) \\
& \times \Bigg((\frac{2b-x-a}{2})^n (\frac{x-a}{2})^{\alpha-n-1} \Bigg) + \Bigg((\frac{x-a}{2})^n (\frac{2b-x-a}{2})^{\alpha-n-1} \Bigg) \\
& + f((\frac{1+t}{2})a + (\frac{1-t}{2})x) \Bigg((\frac{b-x}{2})^n (\frac{x+b-2a}{2})^{\alpha-n-1} \Bigg) \\
& + \Bigg((\frac{x+b-2a}{2})^n (\frac{b-x}{2})^{\alpha-n-1} \Bigg) \Bigg] dx \\
= & \frac{\Gamma(\alpha+1)}{4(b-a)^{\alpha}\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha-n-1)} \\
& \times \int_0^{(b-a)/2} \Bigg[f\Bigg(a + (\frac{1-t}{2})x \Bigg) \Bigg((\frac{2b-2a-x}{2})^n (\frac{x}{2})^{\alpha-n-1} \Bigg) \\
& + \Bigg((\frac{x}{2})^n (\frac{2b-2a-x}{2})^{\alpha-n-1} \Bigg) + f\Bigg(b - (\frac{1-t}{2})x \Bigg) \Bigg((\frac{x}{2})^n (\frac{2b-2a-x}{2})^{\alpha-n-1} \Bigg) \\
& + \Bigg((\frac{2b-2a-x}{2})^n (\frac{x}{2})^{\alpha-n-1} \Bigg) \Bigg] dx \\
= & \frac{\Gamma(\alpha+1)}{4(b-a)^{\alpha}\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha-n-1)} \int_0^{(b-a)/2} \Bigg[f\Bigg(a + (\frac{1-t}{2})x \Bigg) + f\Bigg(b - (\frac{1-t}{2})x \Bigg) \Bigg] \\
& \times \Bigg((\frac{x}{2})^n (\frac{2b-2a-x}{2})^{\alpha-n-1} \Bigg) + \Bigg((\frac{2b-2a-x}{2})^n (\frac{x}{2})^{\alpha-n-1} \Bigg) dx
\end{aligned}
$$

elde edilir. f fonksiyonu $[a, b]$'de pozitif olduğundan Lemma 3.1.1 yardımıyla

$$
h(t) = \frac{1}{2} \Bigg[f\Bigg((\frac{a+b}{2}) - \frac{t}{2} \Bigg) + f\Bigg((\frac{a+b}{2}) + \frac{t}{2} \Bigg) \Bigg]
$$

fonksiyonu $[0, b-a]$ aralığında ve $k(t) = b - a - (1-t)x$ fonksiyonu $[0, 1]$ aralığında pozitif ve monoton artan olduğundan

$$
h(k(t)) = \frac{1}{2} \Bigg[f\Bigg(a + (\frac{1-t}{2})x \Bigg) + f\Bigg((b - \frac{1-t}{2})x \Bigg) \Bigg]
$$

fonksiyonu $[0, 1]$ aralığında artandır.

$$
\Bigg((\frac{x}{2})^n (\frac{2b-2a-x}{2})^{\alpha-n-1} \Bigg) + \Bigg((\frac{2b-2a-x}{2})^n (\frac{x}{2})^{\alpha-n-1} \Bigg)
$$

negatif olmadığından CWP, $[0, 1]$ aralığında monoton artandır. Sonuç olarak

$$
CWP(0) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}\Gamma(\alpha-n-1)} [{}^{b}I_{\alpha} f(a) + I_{\alpha}^{a} f(b)] \quad and \quad CWP(1) = \frac{f(a)+f(b)}{2}
$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

Sonuç 4.1.6 Teorem 4.1.5'de $\alpha = n + 1$ alınırsa Teorem 3.1.5 elde edilir.

Sonuç 4.1.1 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu pozitif değerli konveks bir fonksiyon, $a < b$ ve $f \in L_1[a,b]$ ise

$$CWH(0) \leq CWH(t) \leq CWH(1) = CWP(0) \leq CWP(t) \leq CWP(1)$$

eşitsizliği sağlanır.

4.1.2 Hermite-Hadamard-Fejer Tipli Eşitsizlikler

Bu bölüm boyunca $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonu için $\|g\|_\infty = \sup_{t\in[a,b]} |g(x)|$ kabul edilecektir.

Lemma 4.1.1 $a < b$ olmak üzere $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu integrallenebilen ve $(a+b)/2$ noktasına göre simetrik bir fonksiyon olsun Eğer $n \in \mathbb{N}$ için $\alpha \in (n, n+1]$ ise

$$I_\alpha^a g(b) = {}^b I_\alpha g(a) = \frac{1}{2}[I_\alpha^a g(b) + {}^b I_\alpha g(a)]$$

eşitlikleri geçerlidir.

İspat. g fonksiyonu $(a+b)/2$ noktasına göre simetrik olduğundan her $g(x)$ fonksiyonu ve her $x \in [a,b]$ için $g(a+b-x) = g(x)$ yazılabilir. Buradan $x = a+b-t$ ve $dx = -dt$ yazılırsa

$$\begin{aligned} I_\alpha^a g(b) &= \frac{1}{n!}\int_a^b (b-x)^n (x-a)^{\alpha-n-1} g(x)dx \\ &= \frac{1}{n!}\int_a^b (t-a)^n (b-t)^{\alpha-n-1} g(a+b-t)dt \\ &= \frac{1}{n!}\int_a^b (t-a)^n (b-t)^{\alpha-n-1} g(t)dt \\ &= {}^b I_\alpha g(a) \end{aligned}$$

ifadesi elde edilir ve ispat tamamlanır.

Teorem 4.1.6 $a < b$ olmak üzere $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ konveks bir fonksiyon,, $\alpha \in (n, n+1]$ ve $f \in L[a,b]$ olsun. Eğer $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu negatif olmayan, integrallenebilen ve $(a+b)/2$ noktasına göre simetrik ise

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a+b}{2}\right)[I_\alpha^a g(b) + {}^b I_\alpha g(a)] &\leq [I_\alpha^a (fg)(b) + {}^b I_\alpha (fg)(a)] \\ &\leq \left(\frac{f(a)+f(b)}{2}\right)[I_\alpha^a g(b) + {}^b I_\alpha g(a)] \qquad (4.1.10) \end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. f fonksiyonu her $t \in [0,1]$ için $[a,b]$ aralığında konveks olduğundan

$$2f\left(\frac{a+b}{2}\right) = 2f\left(\frac{ta+(1-t)b+tb+(1-t)a}{2}\right) \leq \frac{f(ta+(1-t)b)+f(tb+(1-t)b)}{2} \quad (4.1.11)$$

yazılabilir. (4.1.11) eşitsizliğinin her iki tarafı $2t^{\alpha}(1-t)^{\alpha-n-1}g(tb+(1-t)a)$ ile çarpılır ve çıkan sonucun t parametresi için $[0,1]$ aralığında integrali alınırsa

$$\begin{aligned}
& 2f\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_0^1 t^n(1-t)^{\alpha-n-1}g(tb+(1-t)a)dt \\
\leq & \int_0^1 t^n(1-t)^{\alpha-n-1}[f(ta+(1-t)b)+f(tb+(1-t)b)]g(tb+(1-t)a)dt \\
= & \int_0^1 t^n(1-t)^{\alpha-n-1}f(ta+(1-t)b)g(tb+(1-t)a)dt \\
& +\int_0^1 t^n(1-t)^{\alpha-n-1}f(tb+(1-t)a)g(tb+(1-t)a)dt
\end{aligned}$$

bulunur. $x = tb+(1-t)a$ yazılırsa

$$\begin{aligned}
& \frac{2}{(b-a)^{\alpha}}f\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b (x-a)^n(b-x)^{\alpha-n-1}g(x)dx \\
\leq & \frac{1}{(b-a)^{\alpha}}\left\{\int_a^b (x-a)^n(b-x)^{\alpha-n-1}f(a+b-x)g(x)dx\right. \\
& \left.+\int_a^b (x-a)^n(b-x)^{\alpha-n-1}f(x)g(x)dx\right\} \\
= & \frac{1}{(b-a)^{\alpha}}\left\{\int_a^b (b-x)^n(x-a)^{\alpha-n-1}f(x)g(a+b-x)dx\right. \\
& \left.+\int_a^b (x-a)^n(b-x)^{\alpha-n-1}f(x)g(x)dx\right\} \\
= & \frac{1}{(b-a)^{\alpha}}\left\{\int_a^b (b-x)^n(x-a)^{\alpha-n-1}f(x)g(x)dx\right. \\
& \left.+\int_a^b (x-a)^n(b-x)^{\alpha-n-1}f(x)g(x)dx\right\}
\end{aligned}$$

elde edilir. Lemma 4.1.1 yardımıyla

$$\frac{n!}{(b-a)^{\alpha}}f\left(\frac{a+b}{2}\right)[I_{\alpha}^{a}g(b)+{}^{b}I_{\alpha}g(a)] \leq \frac{n!}{(b-a)^{\alpha}}[I_{\alpha}^{a}(fg)(b)+{}^{b}I_{\alpha}(fg)(a)]$$

sonucu çıkar ve böylece eşitsizliğin ilk tarafı ispatlanmış olur. f fonksiyonu konveks olduğundan her $t \in [0,1]$ için

$$f(ta+(1-t)b)+f(tb+(1-t)a) \leq f(a)+f(b) \quad (4.1.12)$$

yazılabilir. (4.1.15)'in her iki tarafı $2t^{\alpha}(1-t)^{\alpha-n-1}g(tb+(1-t)a)$ ile çarpılır ve t parametresine göre $[0,1]$ aralığında integrali alınırsa

$$\begin{aligned} & \int_0^1 t^n(1-t)^{\alpha-n-1}f(ta+(1-t)b)g(tb+(1-t)a)dt \\ & + \int_0^1 t^n(1-t)^{\alpha-n-1}f(tb+(1-t)a)g(tb+(1-t)a)dt. \\ \leq \;& [f(a)+f(b)]\int_0^1 t^n(1-t)^{\alpha-n-1}g(tb+(1-t)a)dt \end{aligned}$$

olur ve buradan

$$\frac{n!}{(b-a)^{\alpha}}[I_{\alpha}^{a}(fg)(b)+{}^{b}I_{\alpha}(fg)(a)] \leq \frac{n!}{(b-a)^{\alpha}}\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}\right)[I_{\alpha}^{a}g(b)+{}^{b}I_{\alpha}g(a)]$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

Sonuç 4.1.7 Teorem 4.1.10'de $\alpha = n+1$ alınırsa Teorem 3.1.6 elde edilir.

Lemma 4.1.2 $a < b$ olmak üzere $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, (a,b) aralığında diferansiyellenebilir bir fonksiyon, $\alpha \in (n, n+1]$, $f' \in L[a,b]$ ve $k(t)$ fonksiyonu

$$k(t) = \left[\int_0^t s^n(1-s)^{\alpha-n-1}g((1-s)a+sb)ds + \int_1^t (1-s)^n s^{\alpha-n-1}g((1-s)a+sb)ds\right]$$

şeklinde tanımlansın. Eğer $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu integrallenebilir ve $(a+b)/2$ noktasına göre simetrik ise

$$\begin{aligned} & \left(\frac{f(a)+f(b)}{2}\right)[I_{\alpha}^{a}g(b)+{}^{b}I_{\alpha}g(a)] - [I_{\alpha}^{a}(fg)(b)+{}^{b}I_{\alpha}(fg)(a)] \\ = \;& \frac{(b-a)^{\alpha+1}}{n!}\int_0^1 k(t)f'((1-t)a+tb)dt \end{aligned} \tag{4.1.13}$$

eşitsizliği elde edilir.

İspat.

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 k(t)f'(t)dt \\ &= \int_0^1 \Bigg[\int_0^t s^n(1-s)^{\alpha-n-1}g((1-s)a+sb)ds + \\ & \quad \int_1^t (1-s)^n s^{\alpha-n-1}g((1-s)a+sb)ds\Bigg] f'((1-t)a+tb)dt \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^t s^n(1-s)^{\alpha-n-1}g((1-s)a+sb)ds\right) f'((1-t)a+tb)dt \\ & \quad + \int_0^1 \left(\int_1^t (1-s)^n s^{\alpha-n-1}g((1-s)a+sb)ds\right) f'((1-t)a+tb)dt \\ &= I_1 + I_2 \end{aligned}$$

yazılırsa kısmi integrasyon yönteminden ve Lemma 4.1.1'den faydalanılarak

$$\begin{aligned}
I_1 &= \left(\int_0^t s^n(1-s)^{\alpha-n-1}g((1-s)a+sb)ds\right)\frac{f((1-t)a+tb)}{b-a}\Bigg|_0^1 \\
&\quad -\int_0^1 t^n(1-t)^{\alpha-n-1}g((1-t)a+tb)f((1-t)a+tb)dt \\
&= \left(\int_0^1 s^n(1-s)^{\alpha-n-1}g((1-s)a+sb)ds\right)\frac{f(b)}{b-a} \\
&\quad -\int_0^1 t^n(1-t)^{\alpha-n-1}(fg)((1-t)a+tb)dt \\
&= \left(\int_a^b (x-a)^n(b-x)^{\alpha-n-1}g(x)dx\right)\frac{f(b)}{(b-a)^{\alpha+1}} \\
&\quad -\frac{1}{(b-a)^{\alpha+1}}\int_a^b (x-a)^n(b-x)^{\alpha-n-1}(fg)(x)dx \\
&= \frac{n!}{(b-a)^{\alpha+1}}[I_\alpha^a g(b)+{}^bI_\alpha g(a)]\frac{f(b)}{2}-\frac{n!}{(b-a)^{\alpha+1}}{}^bI_\alpha(fg)(a)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
I_2 &= \left(\int_1^t (1-s)^n s^{\alpha-n-1}g((1-s)a+sb)ds\right)\frac{f((1-t)a+tb)}{b-a}\Bigg|_0^1 \\
&\quad -\int_0^1 (1-t)^n t^{\alpha-n-1}g((1-t)a+tb)f((1-t)a+tb)dt \\
&= \left(\int_0^1 (1-s)^n s^{\alpha-n-1}g((1-s)a+sb)ds\right)\frac{f(a)}{b-a} \\
&\quad -\int_0^1 (1-t)^n t^{\alpha-n-1}(fg)((1-t)a+tb)dt \\
&= \left(\int_a^b (b-x)^n(x-a)^{\alpha-n-1}g(x)dx\right)\frac{f(a)}{(b-a)^{\alpha+1}} \\
&\quad -\frac{1}{(b-a)^{\alpha+1}}\int_a^b (b-x)^n(x-a)^{\alpha-n-1}(fg)(x)dx \\
&= \frac{n!}{(b-a)^{\alpha+1}}[I_\alpha^a g(b)+{}^bI_\alpha g(a)]\frac{f(a)}{2}-\frac{n!}{(b-a)^{\alpha+1}}I_\alpha^a(fg)(b)
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned}
I &= I_1+I_2 \\
&= \frac{n!}{(b-a)^{\alpha+1}} \\
&\quad \times\left\{\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}\right)[I_\alpha^a g(b)+{}^bI_\alpha g(a)]-[I_\alpha^a(fg)(b)+{}^bI_\alpha(fg)(a)]\right\}
\end{aligned}$$

yazılabilir. Son ifadenin her iki taraf $\frac{(b-a)^{\alpha+1}}{n!}$ ile çarpılırsa (4.1.13) elde edilir ve ispat tamamlanır.

Sonuç 4.1.8 Lemma 4.1.2'de $\alpha=n+1$ alınırsa Lemma 3.1.2 elde edilir.

Teorem 4.1.7 $a < b$, $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I^o'da diferansiyellenebilir fonksiyon, $f^{'} \in L[a,b]$,, $a, b \in I^\circ$ ve $\alpha \in (n, n+1]$ olsun. Eğer $|f^{'}|$, $[a,b]$ aralığında konveks ve $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli ve $(a+b)/2$ noktasına göre simetrik ise

$$\begin{aligned} & \left| \left(\frac{f(a)+f(b)}{2}\right) [I_\alpha^a g(b) + {}^bI_\alpha g(a)] - [I_\alpha^a (fg)(b) + {}^bI_\alpha (fg)(a)] \right| \\ \leq & \ \frac{(b-a)^{\alpha+1}\|g\|_\infty}{n!} \left(|f^{'}(a)| + |f^{'}(b)|\right) \\ & \times [\frac{1}{2} B(n+1, \alpha-n) + B_{1/2}(\alpha-n+1, n+1) + B_{1/2}(n+2, \alpha-n)] \end{aligned} \tag{4.1.14}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. Lemma 4.1.2 ve $|f^{'}|$ fonksiyonunun konveks olmasından dolayı

$$\begin{aligned} & \left| \left(\frac{f(a)+f(b)}{2}\right) [I_\alpha^a g(b) + {}^bI_\alpha g(a)] - [I_\alpha^a (fg)(b) + {}^bI_\alpha (fg)(a)] \right| \\ \leq & \ \frac{(b-a)^{\alpha+1}}{n!} \int_0^1 |k(t)||f^{'}((1-t)a+tb)|dt \\ \leq & \ \frac{(b-a)^{\alpha+1}}{n!} \int_0^1 |k(t)| \left[(1-t)|f^{'}(a)| + t|f^{'}(b)|\right] dt \end{aligned} \tag{4.1.15}$$

yazılabilir. $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $(a+b)/2$ noktasına göre simetrik olduğundan

$$\begin{aligned} & \int_1^t (1-s)^n s^{\alpha-n-1} g((1-s)a+sb)ds \\ = & \int_0^{1-t} s^n (1-s)^{\alpha-n-1} g(sa+(1-s)b)ds \\ = & \int_0^{1-t} s^n (1-s)^{\alpha-n-1} g((1-s)a+sb)ds \end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$\begin{aligned} |k(t)| &= \left| \int_0^t s^n (1-s)^{\alpha-n-1} g((1-s)a+sb)ds \right. \\ & \quad \left. + \int_1^t (1-s)^n s^{\alpha-n-1} g((1-s)a+sb)ds \right| \\ &= \left| \int_{1-t}^t s^n (1-s)^{\alpha-n-1} g((1-s)a+sb)ds \right| \end{aligned}$$

ve sonuç olarak

$$|k(t)| \leq \begin{cases} \int_t^{1-t} s^n (1-s)^{\alpha-n-1} ds, & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \int_{1-t}^t s^n (1-s)^{\alpha-n-1} ds, & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} \tag{4.1.16}$$

yazılabilir. (4.1.15) ve (4.1.16) ifadelerinden

$$\begin{aligned}
&\left|\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}\right)\left[I_\alpha^a g(b)+{}^bI_\alpha g(a)\right]-\left[I_\alpha^a (fg)(b)+{}^bI_\alpha (fg)(a)\right]\right| \\
\le\ & \frac{(b-a)^{\alpha+1}}{n!}\int_0^{1/2}\left(\int_t^{1-t}|s^n(1-s)^{\alpha-n-1}g((1-s)a+sb)|ds\right) \\
&\times\left((1-t)|f'(a)|+t|f'(b)|\right)dt \\
&+\frac{(b-a)^{\alpha+1}}{n!}\int_{1/2}^{1}\left(\int_{1-t}^{t}|s^n(1-s)^{\alpha-n-1}g((1-s)a+sb)|ds\right) \\
&\times\left((1-t)|f'(a)|+t|f'(b)|\right)dt \\
\le\ & \frac{(b-a)^{\alpha+1}\|g\|_\infty|f'(a)|}{n!}\left[\int_0^{1/2}\left(\int_t^{1-t}s^n(1-s)^{\alpha-n-1}ds\right)(1-t)dt\right. \\
&\left.+\int_{1/2}^{1}\left(\int_{1-t}^{t}s^n(1-s)^{\alpha-n-1}ds\right)(1-t)dt\right] \\
&+\frac{(b-a)^{\alpha+1}\|g\|_\infty|f'(b)|}{n!}\left[\int_0^{1/2}\left(\int_t^{1-t}s^n(1-s)^{\alpha-n-1}ds\right)tdt\right. \\
&\left.+\int_{1/2}^{1}\left(\int_{1-t}^{t}s^n(1-s)^{\alpha-n-1}ds\right)tdt\right] \qquad (4.1.17)
\end{aligned}$$

elde edilir. Kısmi integrasyon yöntemi, Newton-Leibniz formülü ve Beta fonksiyonun özellikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}
&\int_0^{1/2}\left(\int_t^{1-t}s^n(1-s)^{\alpha-n-1}ds\right)(1-t)dt \\
=\ & \left(\int_t^{1-t}s^n(1-s)^{\alpha-n-1}ds\right)\left(t-\frac{t^2}{2}\right)\Bigg|_0^{1/2} \\
&-\int_0^{1/2}\left[-(1-t)^n t^{\alpha-n-1}-t^n(1-t)^{\alpha-n-1}\right]\left(t-\frac{t^2}{2}\right)dt \\
=\ & B_{1/2}(\alpha-n+1,n+1)+\frac{1}{2}B_{1/2}(\alpha-n+2,n+1) \\
&+B_{1/2}(n+2,\alpha-n)+\frac{1}{2}B_{1/2}(n+3,\alpha-n) \qquad (4.1.18) \\
&\int_0^{1/2}\left(\int_t^{1-t}s^n(1-s)^{\alpha-n-1}ds\right)tdt \\
=\ & \left(\int_t^{1-t}s^n(1-s)^{\alpha-n-1}ds\right)\frac{t^2}{2}\Bigg|_0^{1/2} \\
&-\int_0^{1/2}\left[-(1-t)^n t^{\alpha-n-1}-t^n(1-t)^{\alpha-n-1}\right]\frac{t^2}{2}dt \\
=\ & \frac{1}{2}B_{1/2}(\alpha-n+2,n+1)+\frac{1}{2}B_{1/2}(n+3,\alpha-n)
\end{aligned}$$

,

$$
\begin{aligned}
&\int_{1/2}^{1}\left(\int_{1-t}^{t} s^n(1-s)^{\alpha-n-1}ds\right)(1-t)dt \\
= &\left(\int_{1-t}^{t} s^n(1-s)^{\alpha-n-1}ds\right)\left(t-\frac{t^2}{2}\right)\Big|_{1/2}^{1} \\
&-\int_{1/2}^{1}\left[t^n(1-t)^{\alpha-n-1}+(1-t)^n t^{\alpha-n-1}\right]\left(t-\frac{t^2}{2}\right)dt \\
= &\left(\int_{1-t}^{t} s^n(1-s)^{\alpha-n-1}ds\right)\left(t-\frac{t^2}{2}\right)\Big|_{1/2}^{1} \\
&-\int_{0}^{1/2}\left[t^n(1-t)^{\alpha-n-1}+(1-t)^n t^{\alpha-n-1}\right]\left(\frac{1}{2}-\frac{t^2}{2}\right)dt \\
= &B(n+1,\alpha-n)-\frac{1}{2}B(n+1,\alpha-n)-B_{1/2}(\alpha-n,n+1) \\
&-\frac{1}{2}B_{1/2}(n+3,\alpha-n)-\frac{1}{2}B_{1/2}(\alpha-n+2,n+1) \qquad (4.1.19)\\
= &\frac{1}{2}B(n+1,\alpha-n)-\frac{1}{2}B_{1/2}(n+3,\alpha-n)-\frac{1}{2}B_{1/2}(\alpha-n+2,n+1)
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
&\int_{1/2}^{1}\left(\int_{1-t}^{t} s^n(1-s)^{\alpha-n-1}ds\right)tdt \\
= &\left(\int_{1-t}^{t} s^n(1-s)^{\alpha-n-1}ds\right)\frac{t^2}{2}\Big|_{1/2}^{1} \\
&-\int_{1/2}^{1}\left[t^n(1-t)^{\alpha-n-1}+(1-t)^n t^{\alpha-n-1}\right]\frac{t^2}{2}dt \\
= &\left(\int_{1-t}^{t} s^n(1-s)^{\alpha-n-1}ds\right)\frac{t^2}{2}\Big|_{1/2}^{1} \\
&-\int_{0}^{1/2}\left[t^n(1-t)^{\alpha-n-1}+(1-t)^n t^{\alpha-n-1}\right]\frac{(1-t)^2}{2}dt \\
= &\left(\int_{1-t}^{t} s^n(1-s)^{\alpha-n-1}ds\right)\frac{t^2}{2}\Big|_{1/2}^{1} - \\
&\int_{0}^{1/2}\left[t^n(1-t)^{\alpha-n-1}+(1-t)^n t^{\alpha-n-1}\right]\left(\frac{1}{2}-t+\frac{t^2}{2}\right)dt \\
= &B(n+1,\alpha-n)-\frac{1}{2}B_{1/2}(n+1,\alpha-n)-\frac{1}{2}B_{1/2}(\alpha-n,n+1) \\
&+B_{1/2}(\alpha-n+1,n+1)+B_{1/2}(n+2,\alpha-n) \\
&-\frac{1}{2}B_{1/2}(n+3,\alpha-n)-\frac{1}{2}B_{1/2}(\alpha-n+2,n+1) \\
= &\frac{1}{2}B(n+1,\alpha-n)+B_{1/2}(n+2,\alpha-n)+B_{1/2}(\alpha-n+1,n+1) \\
&-\frac{1}{2}B_{1/2}(n+3,\alpha-n)-\frac{1}{2}B_{1/2}(\alpha-n+2,n+1) \qquad (4.1.20)
\end{aligned}
$$

elde edilir. (4.1.18), (4.1.19), (4.1.19) ve (4.1.20) ifadeleri (4.1.17)'de kullanılırsa

$$\begin{aligned}
&\left|\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}\right)\left[I_\alpha^a g(b)+{}^bI_\alpha g(a)\right]-\left[I_\alpha^a(fg)(b)+{}^bI_\alpha(fg)(a)\right]\right| \\
\leq\ & \frac{(b-a)^{\alpha+1}\|g\|_\infty|f'(a)|}{n!}[B_{1/2}(\alpha-n+1,n+1)+\frac{1}{2}B_{1/2}(\alpha-n+2,n+1) \\
&+B_{1/2}(n+2,\alpha-n)+\frac{1}{2}B_{1/2}(n+3,\alpha-n) \\
&-\frac{1}{2}B_{1/2}(n+3,\alpha-n)-\frac{1}{2}B_{1/2}(\alpha-n+2,n+1)] \\
&+\frac{(b-a)^{\alpha+1}\|g\|_\infty|f'(b)|}{n!}[B_{1/2}(\alpha-n+2,n+1)+B_{1/2}(n+3,\alpha-n) \\
&-\frac{1}{2}B_{1/2}(n+3,\alpha-n)+B_{1/2}(n+2,\alpha-n)+B_{1/2}(\alpha-n+1,n+1) \\
&-\frac{1}{2}B_{1/2}(n+3,\alpha-n)-\frac{1}{2}B_{1/2}(\alpha-n+2,n+1)] \\
=\ & \frac{(b-a)^{\alpha+1}\|g\|_\infty}{n!}\left(|f'(a)|+|f'(b)|\right) \\
&\times[\frac{1}{2}B(n+1,\alpha-n)+B_{1/2}(\alpha-n+1,n+1)+B_{1/2}(n+2,\alpha-n)
\end{aligned}$$

bulunur ve ispat tamamlanır.

Sonuç 4.1.9 Teorem 4.1.7'de $\alpha=n+1$ alınırsa Teorem 3.1.7 elde edilir .

Teorem 4.1.8 $f:I\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, I^o'da diferansiyellenebilir fonksiyon, $f'\in L[a,b]$, $a<b$, $a,b\in I^\circ$ ve $\alpha\in(n,n+1]$ olsun. Eğer $|f'|^q$, $q>1$, $1/p+1/q=1$, fonksiyonu $[a,b]$ aralığında konveks ve $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli ve $(a+b)/2$ noktasına göre simetrik ise

$$\begin{aligned}
&\left|\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}\right)\left[I_\alpha^a g(b)+{}^bI_\alpha g(a)\right]-\left[I_\alpha^a(fg)(b)+{}^bI_\alpha(fg)(a)\right]\right| \\
\leq\ & \frac{(b-a)^{\alpha+1}\|g\|_\infty 2^{1/p}}{n!} \\
&\times\left(\int_0^{1/2}[B_t(n+1,\alpha-n)^p-B_{1-t}(n+1,\alpha-n)^p]dt\right)^{1/p} \\
&\times\left(\frac{|f'(a)|^q+|f'(b)|^q}{2}\right)^{1/q}
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

İspat. Lemma 4.1.2, Hölder eşitsizliği, (4.1.16) ifadesi ve $|f'|^q$ fonksiyonunun konveksliği kullanılırsa ve her $A\geq B\geq 0$ and $q\geq 1$ için

$$(A-B)^q\leq A^q-B^q$$

eşitsizliği

$$
\begin{aligned}
&\left|\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}\right)\left[I_{\alpha}^{a}g(b)+{}^{b}I_{\alpha}g(a)\right]-\left[I_{\alpha}^{a}(fg)(b)+{}^{b}I_{\alpha}(fg)(a)\right]\right| \\
\leq\ & \frac{(b-a)^{\alpha+1}}{n!}\left(\int_0^{1/2}\left(\int_t^{1-t}|s^n(1-s)^{\alpha-n-1}g((1-s)a+sb)|ds\right)^p dt\right)^{1/p} \\
&\times\left(\int_0^{1/2}|f^{'}(1-t)a+tb|^q dt\right)^{1/q} \\
&+\frac{(b-a)^{\alpha+1}}{n!}\left(\int_{1/2}^{1}\left(\int_{1-t}^{t}|s^n(1-s)^{\alpha-n-1}g((1-s)a+sb)|ds\right)^p dt\right)^{1/p} \\
&\times\left(\int_{1/2}^{1}|f^{'}(1-t)a+tb|^q dt\right)^{1/q} \\
\leq\ & \frac{(b-a)^{\alpha+1}\|g\|_{\infty}}{n!}\left(\int_0^{1/2}\left(\int_t^{1-t}s^n(1-s)^{\alpha-n-1})ds\right)^p dt\right)^{1/p} \\
&\times\left(\int_0^{1/2}[(1-t)|f^{'}(a)|^q+t|f^{'}(a)|^q]dt\right)^{1/q} \\
&+\frac{(b-a)^{\alpha+1}\|g\|_{\infty}}{n!}\left(\int_0^{1/2}\left(\int_{1-t}^{t}s^n(1-s)^{\alpha-n-1})ds\right)^p dt\right)^{1/p} \\
&\times\left(\int_{1/2}^{1}[(1-t)|f^{'}(a)|^q+t|f^{'}(a)|^q]dt\right)^{1/q} \\
=\ & \frac{(b-a)^{\alpha+1}\|g\|_{\infty}}{n!}\left[\left(\int_0^{1/2}[B_{1-t}(n+1,\alpha-n)^p-B_t(n+1,\alpha-n)^p]dt\right)^{1/p}\right. \\
&\left.+\left(\int_{1/2}^{1}[B_t(n+1,\alpha-n)^p-B_{1-t}(n+1,\alpha-n)^p]dt\right)^{1/p}\right] \\
&\times\left(\frac{|f^{'}(a)|^q+|f^{'}(b)|^q}{2}\right)^{1/q} \\
=\ & \frac{(b-a)^{\alpha+1}\|g\|_{\infty}2^{1/p}}{n!}\left(\int_0^{1/2}[B_t(n+1,\alpha-n)^p-B_{1-t}(n+1,\alpha-n)^p]dt\right)^{1/p} \\
&\times\left(\frac{|f^{'}(a)|^q+|f^{'}(b)|^q}{2}\right)^{1/q}
\end{aligned}
$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

Sonuç 4.1.10 Teorem 4.1.8'de $\alpha = n+1$ alınırsa Teorem 3.1.9 (i) elde edilir.

Teorem 4.1.9 $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I^{o}'da diferansiyellenebilir fonksiyon, $f^{'} \in L[a,b]$, $a < b$, $a, b \in I^{\circ}$ ve $\alpha \in (n, n+1]$ olsun. Eğer $|f^{'}|^q$, $q > 1$, $1/p+1/q = 1$, fonksiyonu $[a,b]$ aralığında konveks ve $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli ve $(a+b)/2$ noktasına göre simetrik ise

$$\begin{aligned}
&\left|\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}\right)\left[I_\alpha^a g(b)+{}^bI_\alpha g(a)\right]-\left[I_\alpha^a(fg)(b)+{}^bI_\alpha(fg)(a)\right]\right|\\
\leq\ &\frac{2(b-a)^{\alpha+1}\|g\|_\infty}{n!}\left(\int_0^1\left(\left|B_t(n+1,\alpha-n)-B_{1-t}(n+1,\alpha-n)\right|\right)dt\right)^{1-1/q}\\
&\times\left(\left[\frac{1}{2}B(n+1,\alpha-n)+B_{1/2}(\alpha-n+1,n+1)+B_{1/2}(n+2,\alpha-n)\right]\right)^{1/q}\\
&\times\left(\frac{|f'(a)|^q+|f'(b)|^q}{2}\right)^{1/q}
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. Lemma 4.1.2, Power-mean eşitsizliği, (4.1.16) ifadesi ve $|f'|^q$ fonksiyonunun konveksliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
&\left|\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}\right)\left[I_\alpha^a g(b)+{}^bI_\alpha g(a)\right]-\left[I_\alpha^a(fg)(b)+{}^bI_\alpha(fg)(a)\right]\right|\\
\leq\ &\frac{1}{n!}\left(\int_0^1\left(\left|\int_{1-t}^t s^n(1-s)^{\alpha-n-1}g((1-s)a+sb)ds\right|\right)dt\right)^{1-1/q}\\
&\times\Bigg((b-a)^{\alpha+1}\int_0^1\left(\left|\int_{1-t}^t s^n(1-s)^{\alpha-n-1}g((1-s)a+sb)ds\right|\right)\\
&\times|f'((1-t)a+tb)|^q dt\Bigg)^{1/q}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\leq\ &\frac{(b-a)^{\alpha+1}\|g\|_\infty}{(b-a)^{1/q}n!}\left(\int_0^1\left(\left|\int_{1-t}^t s^n(1-s)^{\alpha-n-1}ds\right|\right)dt\right)^{1-1/q}\\
&\times\left(\int_0^1\left(\left|\int_{1-t}^t s^n(1-s)^{\alpha-n-1}ds\right|\right)[(1-t)|f'(a)|^q+t|f'(b)|^q dt\right)^{1/q} \qquad (4.1.21)
\end{aligned}$$

yazılabilir. Buradan

$$\begin{aligned}
&\int_0^1\left(\left|\int_{1-t}^t s^n(1-s)^{\alpha-n-1}ds\right|\right)dt\\
=\ &\int_0^1\left(\left|\int_0^t s^n(1-s)^{\alpha-n-1}ds-\int_0^{1-t}s^n(1-s)^{\alpha-n-1}ds\right|\right)dt \qquad (4.1.22)\\
=\ &\int_0^1\left(\left|B_t(n+1,\alpha-n)-B_{1-t}(n+1,\alpha-n)\right|\right)dt \qquad (4.1.23)
\end{aligned}$$

elde edilir ve Teorem 4.1.7 ispatına benzer şekilde işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned}
&\int_0^1\left(\left|\int_{1-t}^t s^n(1-s)^{\alpha-n-1}ds\right|\right)[(1-t)|f'(a)|^q+t|f'(b)|^q dt\\
\leq\ &\left(|f'(a)|^q+|f'(b)|^q\right)\left[\frac{1}{2}B(n+1,\alpha-n)\right.\\
&\left.+B_{1/2}(\alpha-n+1,n+1)+B_{1/2}(n+2,\alpha-n)\right] \qquad (4.1.24)
\end{aligned}$$

sonucu çıkar. (4.1.23) ve (4.1.24) ifadeleri (4.1.21)'de yerine yazılırsa istenen sonuç elde edilir ve ispat tamamlanır.

Sonuç 4.1.11 Teorem 4.1.9'de $\alpha = n+1$ alınırsa Teorem 3.1.8 elde edilir.

Lemma 4.1.3 $a < b$ olmak üzere $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu (a,b) aralığında tanımlı bir fonksiyon, $f' \in L[a,b]$ ve $k(t)$ fonksiyonu

$$k(t) = \begin{cases} \int_0^t s^n(\frac{1}{2}-s)^{\alpha-n-1} g((1-s)a+sb)ds, & t \in [0,\frac{1}{2}] \\ \int_1^t (1-s)^n(s-\frac{1}{2})^{\alpha-n-1} g((1-s)a+sb)ds, & t \in [\frac{1}{2},1] \end{cases}$$

şeklinde tanımlanmış olsun. O halde $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $(a+b)/2$ noktasına göre simetrik, $\alpha \in (n, n+1]$, $n = 0,1,2,...$ ise

$$\begin{aligned} & f\left(\frac{a+b}{2}\right)[I_\alpha^{\frac{a+b}{2}} g(b) + {}^{\frac{a+b}{2}}I_\alpha g(a)] - [I_\alpha^{\frac{a+b}{2}}(fg)(b) + {}^{\frac{a+b}{2}}I_\alpha (fg)(a)] \\ = & \frac{(b-a)^{\alpha+1}}{n!}\int_0^1 k(t)f'((1-t)a+tb)dt \end{aligned} \tag{4.1.25}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat.

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 k(t)f'((1-t)a+tb)dt \\ &= \int_0^{1/2}\left(\int_0^t s^n(\frac{1}{2}-s)^{\alpha-n-1}g((1-s)a+sb)ds\right)f'((1-t)a+tb)dt \\ &\quad + \int_{1/2}^1\left(\int_1^t (1-s)^n(s-\frac{1}{2})^{\alpha-n-1}g((1-s)a+sb)ds\right)f'((1-t)a+tb)dt \\ &= I_1 + I_2. \end{aligned}$$

eşitliği yazılır ve kısmi integrasyon yöntemi kullanılırsa

$$\begin{aligned} I_1 &= \left(\int_0^t s^n(\frac{1}{2}-s)^{\alpha-n-1}g((1-s)a+sb)ds\right)\frac{f((1-t)a+tb)}{b-a}\Bigg|_0^{1/2} \\ &\quad -\frac{1}{b-a}\int_0^{1/2} t^n(\frac{1}{2}-t)^{\alpha-n-1}g((1-t)a+tb)f((1-t)a+tb)dt \\ &= \left(\int_0^{1/2} s^n(\frac{1}{2}-s)^{\alpha-n-1}g((1-s)a+sb)ds\right)\frac{f(\frac{a+b}{2})}{b-a} \\ &\quad -\frac{1}{b-a}\int_0^{1/2} t^n(\frac{1}{2}-t)^{\alpha-n-1}(fg)((1-t)a+tb)dt \\ &= \left(\int_a^{(a+b)/2}(x-a)^n(\frac{a+b}{2}-x)^{\alpha-n-1}g(x)dx\right)\frac{f(\frac{a+b}{2})}{(b-a)^{\alpha+1}} \\ &\quad -\frac{1}{(b-a)^{\alpha+1}}\int_a^{(a+b)/2}(x-a)^n(\frac{a+b}{2}-x)^{\alpha-n-1}(fg)(x)dx \\ &= \frac{n!}{(b-a)^{\alpha+1}}\,{}^{\frac{a+b}{2}}I_\alpha g(a) f(\frac{a+b}{2}) - \frac{n!}{(b-a)^{\alpha+1}}\,{}^{\frac{a+b}{2}}I_\alpha (fg)(a) \end{aligned}$$

ve benzer şekilde

$$\begin{aligned}
I_2 &= \left(\int_1^t (1-s)^n (s-\frac{1}{2})^{\alpha-n-1} g((1-s)a+sb)ds\right) \frac{f((1-t)a+tb)}{b-a}\Bigg|_{\frac{1}{2}}^1 \\
&- \frac{1}{b-a}\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)^n (t-\frac{1}{2})^{\alpha-n-1} g((1-t)a+tb) f((1-t)a+tb)dt \\
&= \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-s)^n (s-\frac{1}{2})^{\alpha-n-1} g((1-s)a+sb)ds\right) \frac{f(\frac{a+b}{2})}{b-a} \\
&- \frac{1}{b-a}\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)^n (t-\frac{1}{2})^{\alpha-n-1} (fg)((1-t)a+tb)dt \\
&= \left(\int_a^{(a+b)/2} (b-x)^n (x-\frac{a+b}{2})^{\alpha-n-1} g(x)dx\right) \frac{f(\frac{a+b}{2})}{(b-a)^{\alpha+1}} \\
&- \frac{1}{(b-a)^{\alpha+1}}\int_a^{(a+b)/2} (b-x)^n (x-\frac{a+b}{2})^{\alpha-n-1} (fg)(x)dx \\
&= \frac{n!}{(b-a)^{\alpha+1}} I_\alpha^{\frac{a+b}{2}} g(b) f(\frac{a+b}{2}) - \frac{n!}{(b-a)^{\alpha+1}} I_\alpha^{\frac{a+b}{2}} (fg)(b).
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}
I &= I_1 + I_2 \\
&= \frac{n!}{(b-a)^{\alpha+1}} \left\{ f\left(\frac{a+b}{2}\right) [I_\alpha^{\frac{a+b}{2}} g(b) + {}^{\frac{a+b}{2}}I_\alpha g(a)] - [I_\alpha^{\frac{a+b}{2}} (fg)(b) + {}^{\frac{a+b}{2}}I_\alpha (fg)(a)] \right\}
\end{aligned}$$

sonucu çıkar. Son eşitliğin her iki tarafı $\frac{(b-a)^{\alpha+1}}{n!}$ ile çarpılırsa istenen sonuç elde edilir ve ispat tamamlanır.

Teorem 4.1.10 $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu I^o'da diferansiyellenebilir bir fonksiyon, $a < b$, $a, b \in I^\circ$, $f' \in L[a,b]$, $\|g\|_{[a,b],\infty} = \sup_{x\in[a,b]} |g(x)|$ ve $\alpha \in (n, n+1]$, $n = 0, 1, 2, ...$ olsun. Eğer $|f'|$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında konveks ve $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli ve $(a+b)/2$ noktasına göre sürekli ise

$$\begin{aligned}
&\left| f\left(\frac{a+b}{2}\right) [I_\alpha^{\frac{a+b}{2}} g(b) + {}^{\frac{a+b}{2}}I_\alpha g(a)] - [I_\alpha^{\frac{a+b}{2}} (fg)(b) + {}^{\frac{a+b}{2}}I_\alpha (fg)(a) \right| \\
&\le \frac{(b-a)^{\alpha+1}\|g\|_\infty}{n!} \left(\frac{|f'(a)| + |f'(b)|}{2^{\alpha+1}}\right) [B(n+1, \alpha-n) - B(n+2, \alpha-n)]
\end{aligned} \tag{4.1.26}$$

eşitsizliği elde edilir.

İspat. Lemma 4.1.3 ve $|f'|$ fonksiyonunun konveksliğinden faydalanılarak

$$\begin{aligned}
&\left| f\left(\frac{a+b}{2}\right)[I_{\alpha}^{\frac{a+b}{2}}g(b) + {}^{\frac{a+b}{2}}I_{\alpha}g(a)] - [I_{\alpha}^{\frac{a+b}{2}}(fg)(b) + {}^{\frac{a+b}{2}}I_{\alpha}(fg)(a) \right| \\
\leq\;& \frac{(b-a)^{\alpha+1}}{n!}\int_0^1 |k(t)||f'((1-t)a+tb)|dt \\
\leq\;& \frac{(b-a)^{\alpha+1}}{n!}\int_0^1 |k(t)|\left[(1-t)|f'(a)|+t|f'(b)|\right]dt \\
=\;& \frac{(b-a)^{\alpha+1}}{n!}\left\{\int_0^{1/2}\left|\int_0^t s^n(\frac{1}{2}-s)^{\alpha-n-1}g((1-s)a+sb)ds\right|\left[(1-t)|f'(a)|+t|f'(b)|\right]dt\right. \\
&\left. + \int_{1/2}^1\left|\int_1^t (1-s)^n(s-\frac{1}{2})^{\alpha-n-1}g((1-s)a+sb)ds\right|\left[(1-t)|f'(a)|+t|f'(b)|\right]dt\right\} \\
\leq\;& \frac{(b-a)^{\alpha+1}\|g\|_{[a,\frac{a+b}{2}],\infty}}{n!}\int_0^{1/2}\left(\int_0^t s^n(\frac{1}{2}-s)^{\alpha-n-1}ds\right)\left[(1-t)|f'(a)|+t|f'(b)|\right]dt \\
&+\frac{(b-a)^{\alpha+1}\|g\|_{[\frac{a+b}{2},b],\infty}}{n!}\int_{1/2}^1\left(\int_1^t (1-s)^n(s-\frac{1}{2})^{\alpha-n-1}ds\right)\left[(1-t)|f'(a)|+t|f'(b)|\right]dt \\
\leq\;& \frac{(b-a)^{\alpha+1}\|g\|_{\infty}}{n!}\left\{\int_0^{1/2}\left(\int_0^t s^n(\frac{1}{2}-s)^{\alpha-n-1}ds\right)(1-t)|f'(a)|dt\right. \\
&+\int_0^{1/2}\left(\int_0^t s^n(\frac{1}{2}-s)^{\alpha-n-1}ds\right)t|f'(b)|dt \\
&+\int_{1/2}^1\left(\int_1^t (1-s)^n(s-\frac{1}{2})^{\alpha-n-1}ds\right)(1-t)|f'(a)|dt \\
&+\int_{1/2}^1\left(\int_1^t (1-s)^n(s-\frac{1}{2})^{\alpha-n-1}ds\right)t|f'(b)|dt \\
=\;& \frac{(b-a)^{\alpha+1}\|g\|_{\infty}}{n!}\{\Phi_1+\Phi_2+\Phi_3+\Phi_4\}. \qquad (4.1.27)
\end{aligned}$$

elde edilir. Kısmi integrasyon yöntemi ve Newton-Leibniz formulü kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\Phi_1 &= \int_0^{1/2}\left(\int_0^t s^n(\frac{1}{2}-s)^{\alpha-n-1}ds\right)(1-t)|f'(a)|dt \\
&= |f'(a)|\left\{\left(\int_0^t s^n(\frac{1}{2}-s)^{\alpha-n-1}ds\right)(t-\frac{t^2}{2})\Big|_0^{1/2} - \int_0^{1/2} t^n(\frac{1}{2}-t)^{\alpha-n-1}(t-\frac{t^2}{2})dt\right\} \\
&= |f'(a)|\left\{\frac{3}{2^{\alpha+3}}\int_0^1 u^n(1-u)^{\alpha-n-1}du - \frac{1}{2^{\alpha+1}}\int_0^1 u^n(1-u)^{\alpha-n-1}(u-\frac{u^2}{4})du\right\} \\
&= \frac{|f'(a)|}{2^{\alpha+1}}\left[\frac{3}{4}B(n+1,\alpha-n) - B(n+2,\alpha-n) + \frac{1}{4}B(n+3,\alpha-n)\right], \qquad (4.1.28) \\
\Phi_2 &= \int_0^{1/2}\left(\int_0^t s^n(\frac{1}{2}-s)^{\alpha-n-1}ds\right)t|f'(b)|dt \\
&= |f'(b)|\left\{\left(\int_0^t s^n(\frac{1}{2}-s)^{\alpha-n-1}ds\right)\frac{t^2}{2}\Big|_0^{1/2} - \int_0^{1/2} t^n(\frac{1}{2}-t)^{\alpha-n-1}\frac{t^2}{2}dt\right\}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= |f'(b)|\Big\{\frac{1}{2^{\alpha+3}}\int_0^1 u^n(1-u)^{\alpha-n-1}du - \frac{1}{2^{\alpha+3}}\int_0^1 u^n(1-u)^{\alpha-n-1}u^2du\Big\}\\
&= \frac{|f'(b)|}{2^{\alpha+3}}\big[B(n+1,\alpha-n)-B(n+3,\alpha-n)\big], \qquad (4.1.29)\\
\Phi_3 &= \int_{1/2}^1\Big(\int_1^t(1-s)^n(s-\frac{1}{2})^{\alpha-n-1}ds\Big)(1-t)|f'(a)|dt\\
&= |f'(a)|\Big\{\Big(\int_1^t(1-s)^n(s-\frac{1}{2})^{\alpha-n-1}ds\Big)\Big(t-\frac{t^2}{2}\Big)\Big|_{1/2}^1\\
&\quad+\int_{1/2}^1(1-t)^n(t-\frac{1}{2})^{\alpha-n-1}(t-\frac{t^2}{2})dt\Big\}\\
&= |f'(a)|\Big\{-\frac{3}{2^{\alpha+3}}\int_0^1 u^n(1-u)^{\alpha-n-1}du+\frac{1}{2^{\alpha+1}}\int_0^1 u^n(1-u)^{\alpha-n-1}(1-\frac{u^2}{4})du\Big\}\\
&= \frac{|f'(a)|}{2^{\alpha+1}}\big[-\frac{3}{4}B(n+1,\alpha-n)+B(n+1,\alpha-n)-\frac{1}{4}B(n+3,\alpha-n)\big] \qquad (4.1.30)
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
\Phi_4 &= \int_{1/2}^1\Big(\int_1^t(1-s)^n(s-\frac{1}{2})^{\alpha-n-1}ds\Big)t|f'(b)|dt\\
&= |f'(b)|\Big\{\Big(\int_1^t(1-s)^n(s-\frac{1}{2})^{\alpha-n-1}ds\Big)\frac{t^2}{2}\Big|_{1/2}^1+\int_{1/2}^1(1-t)^n(t-\frac{1}{2})^{\alpha-n-1}\frac{t^2}{2}dt\Big\}\\
&= |f'(b)|\Big\{-\frac{1}{2^{\alpha+3}}\int_0^1 u^n(1-u)^{\alpha-n-1}du+\frac{1}{2^{\alpha+1}}\int_0^1 u^n(1-u)^{\alpha-n-1}(1-u+\frac{u^2}{4})du\Big\}\\
&= \frac{|f'(b)|}{2^{\alpha+1}}\big[-\frac{1}{4}B(n+1,\alpha-n)+B(n+1,\alpha-n)\\
&\quad-B(n+2,\alpha-n)+\frac{1}{4}B(n+3,\alpha-n)\big] \qquad (4.1.31)
\end{aligned}
$$

bulunur. (4.1.28), (4.1.29), (4.1.30) ve (4.1.31) ifadeleri (4.1.27)'de yerine yazılırsa istenen sonuç elde edilir ve ispat tamamlanır.

Sonuç 4.1.12 Teorem 4.1.10'de $\alpha = n+1$ alınırsa (4.1.26) eşitsizliği (3.1.6) eşitsizliğine indirgenir.

Teorem 4.1.11 $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu I^o'da diferansiyellenebilir bir fonksiyon, $a < b$, $a, b \in I^\circ$, $f' \in L[a,b]$, $\|g\|_{[a,b],\infty} = \sup_{x\in[a,b]}|g(x)|$ ve $\alpha \in (n, n+1]$, $n = 0,1,2,...$ olsun. Eğer $|f'|^q$, $q > 1$, $1/p+1/q = 1$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında konveks ve $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli ve $(a+b)/2$ noktasına göre sürekli ise

$$
\begin{aligned}
&\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)[I_\alpha^{\frac{a+b}{2}}g(b)+{}^{\frac{a+b}{2}}I_\alpha g(a)]-[I_\alpha^{\frac{a+b}{2}}(fg)(b)+{}^{\frac{a+b}{2}}I_\alpha(fg)(a)\right|\\
\le\;& \frac{(b-a)^{\alpha+1}\|g\|_\infty}{2^{\alpha+3}n!}\Bigg[\left(\int_0^{1/2}[B_{2t}(n+1,\alpha-n)]^pdt\right)^{1/p}\left(\frac{3|f'(a)|^q+|f'(b)|^q}{8}\right)^{1/q}\\
&+\left(\int_{1/2}^1[B_{2-2t}(n+1,\alpha-n)]^pdt\right)^{1/p}\left(\frac{|f'(a)|^q+3|f'(b)|^q}{8}\right)^{1/q}\Bigg] \qquad (4.1.32)
\end{aligned}
$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. Lemma 4.1.3, Hölder eşitsizliği ve $|f^{'}|^q$ fonksiyonunun konveksliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
&\left| f\left(\frac{a+b}{2}\right)[I_{\alpha}^{\frac{a+b}{2}}g(b)+{}^{\frac{a+b}{2}}I_{\alpha}g(a)]-[I_{\alpha}^{\frac{a+b}{2}}(fg)(b)+{}^{\frac{a+b}{2}}I_{\alpha}(fg)(a)\right| \\
\leq\ & \frac{(b-a)^{\alpha+1}}{n!}\int_0^1 |k(t)||f^{'}((1-t)a+tb)|dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\leq\ & \frac{(b-a)^{\alpha+1}}{n!}\left(\int_0^{1/2}\left(\int_0^t |s^n(\frac{1}{2}-s)^{\alpha-n-1}g((1-s)a+sb)|ds\right)^p dt\right)^{1/p} \\
& \times\left(\int_0^{1/2}|f^{'}(1-t)a+tb|^q dt\right)^{1/q} \\
& +\frac{(b-a)^{\alpha+1}}{n!}\left(\int_{1/2}^1\left(\int_1^t |(1-s)^n(s-\frac{1}{2})^{\alpha-n-1}g((1-s)a+sb)|ds\right)^p dt\right)^{1/p} \\
& \times\left(\int_{1/2}^1|f^{'}(1-t)a+tb|^q dt\right)^{1/q} \\
\leq\ & \frac{(b-a)^{\alpha+1}\|g\|_{[a,\frac{a+b}{2}],\infty}}{n!} \\
& \times\left(\int_0^{1/2}\left(\int_0^t s^n(\frac{1}{2}-s)^{\alpha-n-1})ds\right)^p dt\right)^{1/p}\left(\frac{3|f^{'}(a)|^q+|f^{'}(b)|^q}{8}\right)^{1/q} \\
& +\frac{(b-a)^{\alpha+1}\|g\|_{[\frac{a+b}{2},b],\infty}}{n!} \\
& \times\left(\int_0^{1/2}\left(\int_1^t (1-s)^n(s-\frac{1}{2})^{\alpha-n-1})ds\right)^p dt\right)^{1/p}\left(\frac{|f^{'}(a)|^q+3|f^{'}(b)|^q}{8}\right)^{1/q} \\
=\ & \frac{(b-a)^{\alpha+1}\|g\|_{\infty}}{2^{\alpha+3}n!}\left[\left(\int_0^{1/2}[B_{2t}(n+1,\alpha-n)]^p dt\right)^{1/p}\left(\frac{3|f^{'}(a)|^q+|f^{'}(b)|^q}{8}\right)^{1/q}\right. \\
& \left.+\left(\int_{1/2}^1[B_{2-2t}(n+1,\alpha-n)]^p dt\right)^{1/p}\left(\frac{|f^{'}(a)|^q+3|f^{'}(b)|^q}{8}\right)^{1/q}\right] \qquad (4.1.33)
\end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

Sonuç 4.1.13 Teorem 4.1.11'de $\alpha=n+1$ alınırsa (4.1.32) eşitsizliği (3.1.8) eşitsizliğine indirgenir.

Teorem 4.1.12 $f: I\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu I^o'da diferansiyellenebilir bir fonksiyon, $a<b$, $a,b\in I^\circ$, $f^{'}\in L[a,b]$, $\|g\|_{[a,b],\infty}=\sup_{x\in[a,b]}|g(x)|$ ve $\alpha\in(n,n+1]$, $n=0,1,2,...$ olsun. Eğer $|f^{'}|^q$, $q>1$, fonksiyonu $[a,b]$ aralığında konveks ve $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli ve $(a+b)/2$ noktasına göre sürekli ise

$$\begin{aligned}
&\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)[I_{\alpha}^{\frac{a+b}{2}}g(b)+{}^{\frac{a+b}{2}}I_{\alpha}g(a)]-[I_{\alpha}^{\frac{a+b}{2}}(fg)(b)+{}^{\frac{a+b}{2}}I_{\alpha}(fg)(a)\right| \\
\leq\; & \frac{(b-a)^{\alpha+1}\|g\|_{\infty}}{n!}\Bigg[\left(\int_0^{1/2}B_{2t}(n+1,\alpha-n)dt\right)^{1-1/q} \\
& \times\Bigg(\frac{|f^{'}(a)|}{2^{\alpha+1}}\big[\frac{3}{4}B(n+1,\alpha-n)-B(n+2,\alpha-n)+\frac{1}{4}B(n+3,\alpha-n)\big] \\
& +\frac{|f^{'}(b)|}{2^{\alpha+3}}\big[B(n+1,\alpha-n)-B(n+3,\alpha-n)\big]\Bigg)^{1/q} \\
& +\left(\int_{1/2}^{1}B_{2-2t}(n+1,\alpha-n)dt\right)^{1-1/q} \\
& \times\Bigg(\frac{|f^{'}(a)|}{2^{\alpha+1}}\big[-\frac{3}{4}B(n+1,\alpha-n)+B(n+1,\alpha-n)-\frac{1}{4}B(n+3,\alpha-n)\big] \\
& +\frac{|f^{'}(b)|}{2^{\alpha+1}}\big[-\frac{1}{4}B(n+1,\alpha-n)+B(n+1,\alpha-n) \\
& -B(n+2,\alpha-n)+\frac{1}{4}B(n+3,\alpha-n)\big]\Bigg)^{1/q}\Bigg] \qquad (4.1.34)
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

İspat. Lemma 4.1.3, Power-Mean eşitsizliği ve $|f^{'}|^{q}$ fonksiyonunun konveksliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
&\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)[I_{\alpha}^{\frac{a+b}{2}}g(b)+{}^{\frac{a+b}{2}}I_{\alpha}g(a)]-[I_{\alpha}^{\frac{a+b}{2}}(fg)(b)+{}^{\frac{a+b}{2}}I_{\alpha}(fg)(a)\right| \\
\leq\; & \frac{(b-a)^{\alpha+1}}{n!}\int_0^1|k(t)||f^{'}((1-t)a+tb)|dt \\
\leq\; & \frac{(b-a)^{\alpha+1}}{n!}\Bigg[\left(\int_0^{1/2}\left|\int_0^t s^n(\frac{1}{2}-s)^{\alpha-n-1}g((1-s)a+sb)ds\right|dt\right)^{1-1/q} \\
& \times\left(\int_0^{1/2}\left|\int_0^t s^n(\frac{1}{2}-s)^{\alpha-n-1}g((1-s)a+sb)ds\right||f^{'}((1-t)a+tb)|^{q}dt\right)^{1/q} \\
& +\left(\int_{1/2}^{1}\left|\int_1^t(1-s)^n(s-\frac{1}{2})^{\alpha-n-1}g((1-s)a+sb)ds\right|dt\right)^{1-1/q} \\
& \times\left(\int_{1/2}^{1}\left(\left|\int_1^t(1-s)^n(s-\frac{1}{2})^{\alpha-n-1}g((1-s)a+sb)ds\right|\right)|f^{'}((1-t)a+tb)|^{q}dt\right)^{1/q}\Bigg] \\
\leq\; & \frac{(b-a)^{\alpha+1}}{n!}\Bigg[\|g\|_{[a,\frac{a+b}{2}],\infty}\left(\int_0^{1/2}\left(\int_0^t s^n(\frac{1}{2}-s)^{\alpha-n-1}ds\right)dt\right)^{1-1/q} \\
& \times\left(\int_0^{1/2}\left(\int_0^t s^n(\frac{1}{2}-s)^{\alpha-n-1}ds\right)[(1-t)|f^{'}(a)|^{q}+t|f^{'}(b)|^{q}]dt\right)^{1/q} \\
& +\|g\|_{[\frac{a+b}{2},b],\infty}\left(\int_{1/2}^{1}\left(\int_t^1(1-s)^n(s-\frac{1}{2})^{\alpha-n-1}ds\right)dt\right)^{1-1/q}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\times\Big(\int_{1/2}^{1}\Big(\int_{t}^{1}(1-s)^n(s-\frac{1}{2})^{\alpha-n-1}ds\Big)[(1-t)|f^{'}(a)|^q+t|f^{'}(b)|^q]dt\Big)^{1/q}\Big]\\
\leq\ &\frac{(b-a)^{\alpha+1}\|g\|_\infty}{n!}\Big[\Big(\int_0^{1/2}B_{2t}(n+1,\alpha-n)dt\Big)^{1-1/q}\\
&\times\Big(\int_0^{1/2}\Big(\int_0^t s^n(\frac{1}{2}-s)^{\alpha-n-1}ds\Big)[(1-t)|f^{'}(a)|^q+t|f^{'}(b)|^q]dt\Big)^{1/q}\\
&+\Big(\int_{1/2}^{1}B_{2-2t}(n+1,\alpha-n)dt\Big)^{1-1/q} \qquad (4.1.35)\\
&\times\Big(\int_{1/2}^{1}\Big(\int_{t}^{1}(1-s)^n(s-\frac{1}{2})^{\alpha-n-1}ds\Big)[(1-t)|f^{'}(a)|^q+t|f^{'}(b)|^q]dt\Big)^{1/q}\Big]
\end{aligned}
$$

elde edilir. (4.1.28) ve (4.1.29) kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{1/2}\Big(\int_0^t s^n(\frac{1}{2}-s)^{\alpha-n-1}ds\Big)[(1-t)|f^{'}(a)|^q+t|f^{'}(b)|^q]dt\\
\leq\ &\frac{|f^{'}(a)|}{2^{\alpha+1}}\big[\frac{3}{4}B(n+1,\alpha-n)-B(n+2,\alpha-n)+\frac{1}{4}B(n+3,\alpha-n)\big]\\
&+\frac{|f^{'}(b)|}{2^{\alpha+3}}\big[B(n+1,\alpha-n)-B(n+3,\alpha-n)\big] \qquad (4.1.36)
\end{aligned}
$$

ve ayrıca (4.1.30) ile (4.1.31) kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
&\int_{1/2}^{1}\Big(\int_t^1(1-s)^n(s-\frac{1}{2})^{\alpha-n-1}ds\Big)[(1-t)|f^{'}(a)|^q+t|f^{'}(b)|^q]dt\\
\leq\ &\frac{|f^{'}(a)|}{2^{\alpha+1}}\big[-\frac{3}{4}B(n+1,\alpha-n)+B(n+1,\alpha-n)-\frac{1}{4}B(n+3,\alpha-n)]\\
&+\frac{|f^{'}(b)|}{2^{\alpha+1}}\big[-\frac{1}{4}B(n+1,\alpha-n)+B(n+1,\alpha-n) \qquad (4.1.37)\\
&-B(n+2,\alpha-n)+\frac{1}{4}B(n+3,\alpha-n)]
\end{aligned}
$$

elde edilir. (4.1.36) ve (4.1.37) ifadeleri (4.1.35)'de kullanılırsa istenen sonuç elde edilir ve ispat tamamlanır.

Sonuç 4.1.14 Teorem 4.1.12'de $\alpha=n+1$ alınırsa (4.1.34) eşitsizliği (3.1.7) eşitsizliğine indirgenir.

4.1.3 Ostrowski Tipli Eşitsizlikler

Lemma 4.1.4 $a<b$ olmak üzere $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu (a,b) aralığında diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Eğer $f^{'}\in L[a,b]$ ise her $x\in[a,b]$ ve $\alpha\in[n,n+1)$ için

$$
\begin{aligned}
&\frac{(x-a)^{\alpha+1}}{n!(b-a)}\int_0^1 B_t(n+1,\alpha-n)f^{'}(tx+(1-t)a)dt \\
&-\frac{(b-x)^{\alpha+1}}{n!(b-a)}\int_0^1 B_t(n+1,\alpha-n)f^{'}(tx+(1-t)b)dt \qquad (4.1.38)\\
=\ &\frac{\Gamma(\alpha-n)[(x-a)^{\alpha}+(b-x)^{\alpha}]}{\Gamma(\alpha+1)(b-a)}f(x)-\frac{1}{b-a}[\,{}^{x}I_{\alpha}f(a)+I_{\alpha}^{x}f(b)]
\end{aligned}
$$

eşitliği geçerlidir.

İspat. Kısmi integrasyon yöntemi ile

$$
\begin{aligned}
&\int_0^1 B_t(n+1,\alpha-n)f^{'}(tx+(1-t)a)dt \\
=\ &B_t(n+1,\alpha-n)\frac{f(tx+(1-t)a)}{x-a}\bigg|_0^1-\int_0^1 t^n(1-t)^{\alpha-n-1}\frac{f(tx+(1-t)a)}{x-a}dt \\
=\ &\frac{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha-n)}{\Gamma(\alpha+1)}\frac{f(x)}{x-a}-\frac{1}{x-a}\int_a^x\left(\frac{u-a}{x-a}\right)^n\left(\frac{x-u}{x-a}\right)^{\alpha-n-1}\frac{f(u)}{x-a}du \\
=\ &\frac{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha-n)}{\Gamma(\alpha+1)}\frac{f(x)}{x-a}-\frac{1}{(x-a)^{\alpha}}\int_a^x (u-a)^n(x-u)^{\alpha-n-1}f(u)du \\
=\ &\frac{n!\Gamma(\alpha-n)}{\Gamma(\alpha+1)}\frac{f(x)}{x-a}-\frac{n!}{(x-a)^{\alpha+1}}\,{}^{x}I_{\alpha}f(a) \qquad (4.1.39)
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
&\int_0^1 B_t(n+1,\alpha-n)f^{'}(tx+(1-t)b)dt \\
=\ &B_t(n+1,\alpha-n)\frac{f(tx+(1-t)b)}{x-b}\bigg|_0^1-\int_0^1 t^n(1-t)^{\alpha-n-1}\frac{f(tx+(1-t)b)}{x-b}dt \\
=\ &\frac{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha-n)}{\Gamma(\alpha+1)}\frac{f(x)}{x-b}-\frac{1}{b-x}\int_x^b\left(\frac{u-b}{x-b}\right)^n\left(\frac{x-u}{x-b}\right)^{\alpha-n-1}\frac{f(u)}{x-b}du \\
=\ &\frac{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha-n)}{\Gamma(\alpha+1)}\frac{f(x)}{x-b}+\frac{1}{(b-x)^{\alpha+1}}\int_x^b (b-u)^n(u-x)^{\alpha-n-1}f(u)du \\
=\ &-\frac{n!\Gamma(\alpha-n)}{\Gamma(\alpha+1)}\frac{f(x)}{b-x}+\frac{n!}{(b-x)^{\alpha+1}}I_{\alpha}^{x}f(b) \qquad (4.1.40)
\end{aligned}
$$

elde edilir. (4.1.39) ve (4.1.40) ifadelerinin her iki tarafı sırasıyla $\frac{(x-a)^{\alpha+1}}{(b-a)n!}$ ve $-\frac{(b-x)^{\alpha+1}}{(b-a)n!}$ ile çarpılır ve taraf tarafa toplanırsa

$$
\begin{aligned}
&\frac{(x-a)^{\alpha+1}}{n!(b-a)}\int_0^1 B_t(n+1,\alpha-n)f^{'}(tx+(1-t)a)dt \\
&-\frac{(b-x)^{\alpha+1}}{n!(b-a)}\int_0^1 B_t(n+1,\alpha-n)f^{'}(tx+(1-t)b)dt \\
=\ &\frac{\Gamma(\alpha-n)[(x-a)^{\alpha}+(b-x)^{\alpha}]}{\Gamma(\alpha+1)(b-a)}f(x)-\frac{1}{b-a}[\,{}^{b}I_{\alpha}f(a)+I_{\alpha}^{a[\,{}^{x}I_{\alpha}f(a)+I_{\alpha}^{x}f(b)]}f(b)]
\end{aligned}
$$

bulunur ve ispat tamamlanır.

Sonuç 4.1.15 Lemma 4.1.4'da $\alpha = n+1$ alınırsa (4.1.38) eşitliği (3.1.9) eşitliğine indirgenir.

Teorem 4.1.13 $a < b$ olmak üzere $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu (a,b) aralığında diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $f' \in L[a,b]$ olsun. Eğer $|f'|$ konveks, $|f'(x)| \le M$ ve $x \in [a,b]$ ise $\alpha \in [n, n+1)$ için

$$\begin{aligned} &\left| \frac{\Gamma(\alpha-n)[(x-a)^\alpha + (b-x)^\alpha]}{\Gamma(\alpha+1)(b-a)} f(x) - \frac{1}{b-a}[\,{}^{x}I_\alpha f(a) + I_\alpha^x f(b)] \right| \\ \le\ & \frac{M\Gamma(\alpha-n+1)}{\Gamma(\alpha+2)(b-a)}[(x-a)^{\alpha+1} + (b-x)^{\alpha+1}] \qquad (4.1.41) \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

İspat. (4.1.38) ve $|f'|$'in $[a,b]$ aralığında konveks olmasından dolayı

$$\begin{aligned} &\left| \frac{\Gamma(\alpha-n)[(x-a)^\alpha + (b-x)^\alpha]}{\Gamma(\alpha+1)(b-a)} f(x) - \frac{1}{b-a}[\,{}^{x}I_\alpha f(a) + I_\alpha^x f(b)] \right| \\ \le\ & \frac{(x-a)^{\alpha+1}}{n!(b-a)} \int_0^1 B_t(n+1, \alpha-n)|f'(tx+(1-t)a)|dt \\ & + \frac{(b-x)^{\alpha+1}}{n!(b-a)} \int_0^1 B_t(n+1, \alpha-n)|f'(tx+(1-t)b)|dt \\ \le\ & \frac{(x-a)^{\alpha+1}}{n!(b-a)} \int_0^1 B_t(n+1, \alpha-n)\left[t|f'(x)| + (1-t)|f'(a)|\right] dt \\ & + \frac{(b-x)^{\alpha+1}}{n!(b-a)} \int_0^1 B_t(n+1, \alpha-n)\left[t|f'(x)| + (1-t)|f'(b)|\right] dt \\ \le\ & \frac{(x-a)^{\alpha+1}}{n!(b-a)} M \int_0^1 B_t(n+1, \alpha-n)dt + \frac{(b-x)^{\alpha+1}}{n!(b-a)} M \int_0^1 B_x(n+1, \alpha-n) \\ =\ & \frac{M\Gamma(\alpha-n+1)}{\Gamma(\alpha+2)(b-a)}[(x-a)^{\alpha+1} + (b-x)^{\alpha+1}] \end{aligned}$$

elde edilir. Burada Euler fonksiyonunun $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$ $(n > 0)$ özelliği yardımıyla

$$\begin{aligned} \int_0^1 B_t(n+1, \alpha-n)dt &= \int_0^1 1B_t(n+1, \alpha-n)dt \\ &= B_t(n+1, \alpha-n)t\Big|_0^1 - \int_0^1 t^n(1-t)^{\alpha-n-1}dt \\ &= B(n+1, \alpha-n) - B(n+2, \alpha-n) \\ &= \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha-n)}{\Gamma(\alpha+1)} - \frac{\Gamma(n+2)\Gamma(\alpha-n)}{\Gamma(\alpha+2)} \\ &= \frac{n!\Gamma(\alpha-n)}{\Gamma(\alpha+1)} - \frac{(n+1)!\Gamma(\alpha-n)}{(\alpha+1)\Gamma(\alpha+1)} \\ &= \frac{n!\Gamma(\alpha-n+1)}{\Gamma(\alpha+2)} \qquad (4.1.42) \end{aligned}$$

eşitliği kullanılmıştır.

Sonuç 4.1.2 Teorem 4.1.13'te $\alpha = n+1$ alınırsa

$$\left|\frac{[(x-a)^{\alpha}+(b-x)^{\alpha}]}{(b-a)}f(x)-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{b-a}[J^{\alpha}_{x-}f(a)+J^{\alpha}_{x+}f(b)]\right|$$
$$\leq \frac{M}{(n+2)(b-a)}[(x-a)^{\alpha+1}+(b-x)^{\alpha+1}]$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlik Teorem 3.1.13'in $s=1$ özel durumudur.

Teorem 4.1.14 $a<b$ olmak üzere $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu (a,b) aralığında diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $f^{'}\in L[a,b]$ olsun. Eğer $|f^{'}|^q$ konveks, $p,q>1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ ve $|f^{'}(x)|\leq M$ ise her $x\in[a,b]$, $\alpha\in[n,n+1)$ için

$$\left|\frac{\Gamma(\alpha-n)[(x-a)^{\alpha}+(b-x)^{\alpha}]}{\Gamma(\alpha+1)(b-a)}f(x)-\frac{1}{b-a}[{}^{x}I_{\alpha}f(a)+I^{x}_{\alpha}f(b)]\right|$$
$$\leq \frac{M}{n!(b-a)}[(x-a)^{\alpha+1}+(b-x)^{\alpha+1}]\left(\int_0^1 B_t(n+1,\alpha-n)^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. Lemma 4.1.4 ve Hölder eşitsizliğinden

$$\left|\frac{\Gamma(\alpha-n)[(x-a)^{\alpha}+(b-x)^{\alpha}]}{\Gamma(\alpha+1)(b-a)}f(x)-\frac{1}{b-a}[{}^{x}I_{\alpha}f(a)+I^{x}_{\alpha}f(b)]\right|$$
$$\leq \frac{(x-a)^{\alpha+1}}{n!(b-a)}\int_0^1 B_t(n+1,\alpha-n)\left|f^{'}(tx+(1-t)a)\right|dt$$
$$+\frac{(b-x)^{\alpha+1}}{n!(b-a)}\int_0^1 B_t(n+1,\alpha-n)\left|f^{'}(tx+(1-t)b)\right|dt$$
$$\leq \frac{(x-a)^{\alpha+1}}{n!(b-a)}\left(\int_0^1 B_t(n+1,\alpha-n)^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1\left|f^{'}(tx+(1-t)a)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$$
$$+\frac{(b-x)^{\alpha+1}}{n!(b-a)}\left(\int_0^1 B_t(n+1,\alpha-n)^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1\left|f^{'}(tx+(1-t)a)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

bulunur. $|f^{'}|^q$'nin konveks ve $|f^{'}(x)|\leq M$ olmasından

$$\int_0^1|f^{'}(tx+(1-t)a)|^q dt\leq\int_0^1 t|f^{'}(x)|^q+(1-t)|f^{'}(a)|^q\leq M^q$$

ve benzer şekilde

$$\int_0^1|f^{'}(tx+(1-t)b)|^q dt\leq\int_0^1 t|f^{'}(x)|^q+(1-t)|f^{'}(b)|^q\leq M^q$$

elde edilir. Böylece

$$\left|\frac{\Gamma(\alpha-n)[(x-a)^{\alpha}+(b-x)^{\alpha}]}{\Gamma(\alpha+1)(b-a)}f(x)-\frac{1}{b-a}[{}^{x}I_{\alpha}f(a)+I^{x}_{\alpha}f(b)]\right|$$
$$\leq \frac{M}{n!(b-a)}[(x-a)^{\alpha+1}+(b-x)^{\alpha+1}]\left(\int_0^1 B_t(n+1,\alpha-n)^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

Sonuç 4.1.3 Teorem 4.1.14'de $\alpha = n+1$, alınırsa

$$\begin{aligned} & \left| \frac{[(x-a)^{\alpha} + (b-x)^{\alpha}]}{(b-a)} f(x) - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{b-a} [J^{\alpha}_{x-} f(a) + J^{\alpha}_{x+} f(b)] \right| \\ \leq \; & \frac{M}{(b-a)[p(n+1)+1]^{\frac{1}{p}}} [(x-a)^{\alpha+1} + (b-x)^{\alpha+1}] \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlik Teorem 3.1.14'in $s = 1$ özel durumudur.

Teorem 4.1.15 $a < b$ olmak üzere $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu (a,b) aralığında diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $f' \in L[a,b]$ olsun. Eğer $|f'|^q$ konveks, $p, q > 1$ ve $|f'(x)| \leq M$ ise her $x \in [a,b]$, $\alpha \in [n, n+1)$ için

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\Gamma(\alpha-n)[(x-a)^{\alpha} + (b-x)^{\alpha}]}{\Gamma(\alpha+1)(b-a)} f(x) - \frac{1}{b-a} [{}^{x}I_{\alpha} f(a) + I^{x}_{\alpha} f(b)] \right| \\ \leq \; & M \frac{\Gamma(\alpha-n+1)}{\Gamma(\alpha+2)(b-a)} \left[(x-a)^{\alpha+1} + (b-x)^{\alpha+1} \right] \end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. Lemma 4.1.4 ve power mean eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\Gamma(\alpha-n)[(x-a)^{\alpha} + (b-x)^{\alpha}]}{\Gamma(\alpha+1)(b-a)} f(x) - \frac{1}{b-a} [{}^{x}I_{\alpha} f(a) + I^{x}_{\alpha} f(b)] \right| \\ \leq \; & \frac{(x-a)^{\alpha+1}}{n!(b-a)} \int_0^1 B_x(n+1, \alpha-n) \left| f'(tx + (1-t)a) \right| dt \\ & + \frac{(b-x)^{\alpha+1}}{n!(b-a)} \int_0^1 B_t(n+1, \alpha-n) \left| f'(tx + (1-t)b) \right| dt \\ \leq \; & \frac{(x-a)^{\alpha+1}}{n!(b-a)} \left(\int_0^1 B_t(n+1, \alpha-n) dt \right)^{1-\frac{1}{q}} \\ & \times \left(\int_0^1 B_t(n+1, \alpha-n) \left| f'(tx + (1-t)a) \right|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \\ & + \frac{(b-x)^{\alpha+1}}{n!(b-a)} \left(\int_0^1 B_t(n+1, \alpha-n) dt \right)^{1-\frac{1}{q}} \\ & \times \left(\int_0^1 B_t(n+1, \alpha-n) \left| f'(tx + (1-t)b) \right|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

yazılabilir. $|f'|^q$'nin konveksliği, $|f'| \leq M$ ve (4.1.42) eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} & \int_0^1 B_t(n+1, \alpha-n) \left| f'(tx + (1-t)a) \right|^q dt \\ \leq \; & \int_0^1 B_t(n+1, \alpha-n) \left[t|f(x)|^q + (1-t)|f(a)|^q \right] dt \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq M^q \int_0^1 B_t(n+1,\alpha-n)dt \\
&= M^q \frac{n!\Gamma(\alpha-n+1)}{\Gamma(\alpha+2)}
\end{aligned}
$$

ve benzer şekilde

$$\int_0^1 B_t(n+1,\alpha-n)\left|f^{'}(tx+(1-t)b)\right|^q dt \leq M^q \frac{n!\Gamma(\alpha-n+1)}{\Gamma(\alpha+2)}$$

elde edilir. Böylece

$$
\begin{aligned}
&\left|\frac{\Gamma(\alpha-n)[(x-a)^\alpha+(b-x)^\alpha]}{\Gamma(\alpha+1)(b-a)}f(x)-\frac{1}{b-a}[{}^xI_\alpha f(a)+I_\alpha^x f(b)]\right| \\
\leq\ & \frac{(x-a)^{\alpha+1}}{n!(b-a)}\left(\frac{n!\Gamma(\alpha-n+1)}{\Gamma(\alpha+2)}\right)^{1-\frac{1}{q}} M\left(\frac{n!\Gamma(\alpha-n+1)}{\Gamma(\alpha+2)}\right)^{\frac{1}{q}} \\
&+\frac{(b-x)^{\alpha+1}}{n!(b-a)}\left(\frac{n!\Gamma(\alpha-n+1)}{\Gamma(\alpha+2)}\right)^{1-\frac{1}{q}} M\left(\frac{n!\Gamma(\alpha-n+1)}{\Gamma(\alpha+2)}\right)^{\frac{1}{q}} \\
=\ & M\frac{\Gamma(\alpha-n+1)}{\Gamma(\alpha+2)(b-a)}\left[(x-a)^{\alpha+1}+(b-x)^{\alpha+1}\right]
\end{aligned}
$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

Sonuç 4.1.4 Teorem 4.1.15'de $\alpha=n+1$ alınırsa

$$
\begin{aligned}
&\left|\frac{[(x-a)^\alpha+(b-x)^\alpha]}{(b-a)}f(x)-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{b-a}[J_{x-}^\alpha f(a)+J_{x+}^\alpha f(b)]\right| \\
\leq\ & \frac{M\Gamma(\alpha+1)}{(n+2)(b-a)}\left[(x-a)^{\alpha+1}+(b-x)^{\alpha+1}\right]
\end{aligned}
$$

elde edilir. Bu eşitsizlik Teorem 3.1.15'in $s=1$ özel durumudur.

Teorem 4.1.16 $a<b$ olmak üzere $f:[a,b]\subset[0,\infty)\to\mathbb{R}$ fonksiyonu (a,b) aralığında diferansiyellenebilir bir fonksiyon, $f^{'}\in L[a,b]$ ve $\alpha\in[n,n+1)$ olsun. Eğer $|f^{'}|^q$ $[a,b]$'de konkav $p,q>1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ ise

$$
\begin{aligned}
&\left|\frac{\Gamma(\alpha-n)[(x-a)^\alpha+(b-x)^\alpha]}{\Gamma(\alpha+1)(b-a)}f(x)-\frac{1}{b-a}[{}^xI_\alpha f(a)+I_\alpha^x f(b)]\right| \\
\leq\ & \left(\int_0^1 B_t(n+1,\alpha-n)^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\times\left[\frac{(x-a)^{\alpha+1}}{n!(b-a)}\left|f^{'}\left(\frac{x+a}{2}\right)\right|+\frac{(b-x)^{\alpha+1}}{n!(b-a)}\left|f^{'}\left(\frac{b+x}{2}\right)\right|\right]
\end{aligned}
$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. Lemma 4.1.4 ve Hölder eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{\Gamma(\alpha-n)[(x-a)^{\alpha}+(b-x)^{\alpha}]}{\Gamma(\alpha+1)(b-a)}f(x)-\frac{1}{b-a}[\,^{x}I_{\alpha}f(a)+I_{\alpha}^{x}f(b)]\right| \\
\leq\ & \frac{(x-a)^{\alpha+1}}{n!(b-a)}\int_0^1 B_t(n+1,\alpha-n)\left|f^{'}(tx+(1-t)a)\right|dt \\
&+\frac{(b-x)^{\alpha+1}}{n!(b-a)}\int_0^1 B_t(n+1,\alpha-n)\left|f^{'}(tx+(1-t)b)\right|dt \\
\leq\ & \frac{(x-a)^{\alpha+1}}{n!(b-a)}\left(\int_0^1 B_t(n+1,\alpha-n)^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1\left|f^{'}(tx+(1-t)a)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \\
&+\frac{(b-x)^{\alpha+1}}{n!(b-a)}\left(\int_0^1 B_t(n+1,\alpha-n)^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1\left|f^{'}(tx+(1-t)a)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned} \tag{4.1.43}$$

yazılabilir. $|f^{'}|^q$ fonksiyonunun konkav olmasından ve Hermite-Hadamard eşitsizliğinden

$$\int_0^1|f^{'}(tx+(1-t)a)|^q dt\leq\left|f^{'}\left(\frac{x+a}{2}\right)\right|^q \tag{4.1.44}$$

ve

$$\int_0^1|f^{'}(tx+(1-t)b)|^q dt\leq\left|f^{'}\left(\frac{b+x}{2}\right)\right|^q \tag{4.1.45}$$

elde edilir. (4.1.44) ve (4.1.45) ifadeleri (4.1.43)'te yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{\Gamma(\alpha-n)[(x-a)^{\alpha}+(b-x)^{\alpha}]}{\Gamma(\alpha+1)(b-a)}f(x)-\frac{1}{b-a}[\,^{x}I_{\alpha}f(a)+I_{\alpha}^{x}f(b)]\right| \\
\leq\ & \left(\int_0^1 B_t(n+1,\alpha-n)^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\times\left[\frac{(x-a)^{\alpha+1}}{n!(b-a)}\left|f^{'}\left(\frac{x+a}{2}\right)\right|+\frac{(b-x)^{\alpha+1}}{n!(b-a)}\left|f^{'}\left(\frac{b+x}{2}\right)\right|\right]
\end{aligned}$$

sonucu çıkar ve ispat tamamlanır.

Sonuç 4.1.5 Teorem 4.1.16'te $\alpha=n+1$ alınırsa

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{[(x-a)^{\alpha}+(b-x)^{\alpha}]}{(b-a)}f(x)-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{b-a}[J_{x-}^{\alpha}f(a)+J_{x+}^{\alpha}f(b)]\right| \\
\leq\ & \frac{1}{[p(n+1)+1]^{\frac{1}{p}}(b-a)} \\
&\times\left[(x-a)^{\alpha+1}\left|f^{'}\left(\frac{x+a}{2}\right)\right|+(b-x)^{\alpha+1}\left|f^{'}\left(\frac{b+x}{2}\right)\right|\right]
\end{aligned}$$

elde edilir Bu eşitsizlik Teorem 3.1.16'in $s=1$ özel durumudur.

4.1.4 Chebyshev Tipli Eşitsizlikler

Lemma 4.1.5 $0 \leq a < b$ olmak üzere $f : [a,b] \to \mathbb{R}_+$ konveks fonksiyon ve $n = 0,1,2,...$ için $\alpha \in (n, n+1]$ olsun. Eğer $f \in L[a,b]$ ise

$$\begin{aligned} & \int_0^1 t^n(1-t)^{\alpha-n-1} f(ta+(1-t)b)dt + \int_0^1 t^n(1-t)^{\alpha-n-1} f((1-t)a+tb)dt \\ = \; & \frac{n!}{(b-a)^\alpha}[\,^bI_\alpha f(a) + I_\alpha^a f(b)] \end{aligned}$$

eşitliği geçerlidir.

İspat. Kısmi integrasyon yöntemi ile

$$\begin{aligned} \int_0^1 t^n(1-t)^{\alpha-n-1} f(ta+(1-t)b)dt &= \frac{1}{b-a}\int_a^b \left(\frac{b-x}{b-a}\right)^n \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{\alpha-n-1} f(x)dx \\ &= \frac{1}{(b-a)^\alpha}\int_a^b (b-x)^n (x-a)^{\alpha-n-1} f(x)dx \\ &= \frac{n!}{(b-a)^\alpha}(I_\alpha^a f)(b) \end{aligned} \tag{4.1.46}$$

ve

$$\begin{aligned} \int_0^1 t^n(1-t)^{\alpha-n-1} f((1-t)a+tb)dt &= \frac{1}{b-a}\int_a^b \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^n \left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{\alpha-n-1} f(x)dx \\ &= \frac{1}{(b-a)^\alpha}\int_a^b (x-a)^n (b-x)^{\alpha-n-1} f(x)dx \\ &= \frac{n!}{(b-a)^\alpha}(\,^bI_\alpha f)(a) \end{aligned} \tag{4.1.47}$$

bulunur. (4.1.46) ve (4.1.47) toplanırsa istenen sonuç elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.1.17 $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ senkronize iki fonksiyon, $f, g \in L[a,b]$ ve $n = 0,1,2,...$ için $\alpha \in (n, n+1]$ olsun. O halde

$$\begin{aligned} & \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha-n)}{2(b-a)^\alpha})[\,^bI_\alpha(fg)(a) + I_\alpha^a(fg)(b)] \\ \geq \; & \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^\alpha}[\,^bI_\alpha f(a) + I_\alpha^a f(b)]\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^\alpha}[\,^bI_\alpha g(a) + I_\alpha^a g(b)] \end{aligned} \tag{4.1.48}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. Bu teoremin ispatında integralin pozitifliği özelliğini kullanışacaktır. f ve g senkronize fonksiyonlar olduğundan her $x, y \in [a,b]$ için

$$(f(x) - f(y))(g(x) - g(y)) \geq 0$$

yazılabilir. $t \in [0,1]$ için $x = ta + (1-t)b$ yazılırsa

$$(f(ta+(1-t)b) - f(y))\,(g(ta+(1-t)b) - g(y)) \geq 0 \tag{4.1.49}$$

ve benzer şekilde $t \in [0,1]$ için $x = (1-t)a + tb$ yazılırsa

$$(f((1-t)a+tb) - f(y))\,(g((1-t)a+tb) - g(y)) \geq 0 \tag{4.1.50}$$

elde edilir. (4.1.49) ve (4.1.50) taraf tarafa toplanır ve her iki taraf $t^n(1-t)^{\alpha-n-1}$ ile çarpılır ve t için $[0,1]$ aralığında integral alınırsa

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 t^n(1-t)^{\alpha-n-1}(fg)(ta+(1-t)b)dt \\
&+\int_0^1 t^n(1-t)^{\alpha-n-1}(fg)((1-t)a+tb)dt + 2B(n+1,\alpha-n)f(y)g(y) \\
\geq\ & g(y)\bigg(\int_0^1 t^n(1-t)^{\alpha-n-1}f(ta+(1-t)b)dt \\
&+\int_0^1 t^n(1-t)^{\alpha-n-1}f((1-t)a+tb)dt\bigg) \\
&+f(y)\bigg(\int_0^1 t^n(1-t)^{\alpha-n-1}g(ta+(1-t)b)dt \\
&+\int_0^1 t^n(1-t)^{\alpha-n-1}g((1-t)a+tb)dt\bigg)
\end{aligned} \tag{4.1.51}$$

bulunur. Lemma 4.1.5 uygulanır ve her iki taraf $\frac{1}{n!}$ ile çarpılırsa

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(b-a)^\alpha}[\,^bI_\alpha(fg)(a) + I_\alpha^a(fg)(b)] + \frac{2}{n!}B(n+1,\alpha-n-1)f(y)g(y) \\
\geq\ & \frac{g(y)}{(b-a)^\alpha}[\,^bI_\alpha f(a) + I_\alpha^a f(b)] + \frac{f(y)}{(b-a)^\alpha}[\,^bI_\alpha g(a) + I_\alpha^a g(b)]
\end{aligned} \tag{4.1.52}$$

olur. (4.1.52)'de her $t \in [0,1]$ için $y = ta + (1-t)b$ yazılırsa

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(b-a)^\alpha}[\,^bI_\alpha(fg)(a) + I_\alpha^a(fg)(b)] + \frac{2}{n!}B(n+1,\alpha-n-1)(fg)(ta+(1-t)b) \\
\geq\ & \frac{g(ta+(1-t)b)}{(b-a)^\alpha}[\,^bI_\alpha f(a) + I_\alpha^a f(b)] + \frac{f(ta+(1-t)b)}{(b-a)^\alpha}[\,^bI_\alpha g(a) + I_\alpha^a g(b)]
\end{aligned} \tag{4.1.53}$$

ve benzer şekilde (4.1.52)'de her $t \in [0,1]$ için$y = (1-t)a + tb$ yazılırsa

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(b-a)^\alpha}[\,^bI_\alpha(fg)(a) + I_\alpha^a(fg)(b)] + \frac{2}{n!}B(n+1,\alpha-n-1)(fg)((1-t)a+tb) \\
\geq\ & \frac{g((1-t)a+tb)}{(b-a)^\alpha}[\,^bI_\alpha f(a) + I_\alpha^a f(b)] + \frac{f((1-t)a+tb}{(b-a)^\alpha}[\,^bI_\alpha g(a) + I_\alpha^a g(b)]
\end{aligned} \tag{4.1.54}$$

elde edilir. (4.1.53) ve (4.1.54) taraf taraf toplanırsa her iki taraf $t^n(1-t)^{\alpha-n-1}$ ile çarpılır ve t için $[0,1]$ arağında integral alınırsa

$$\begin{aligned}
&\frac{2}{(b-a)^{\alpha}}B(n+1,\alpha-n)[\,{}^{b}I_{\alpha}(fg)(a)+I_{\alpha}^{a}(fg)(b)] \qquad (4.1.55)\\
&+\frac{2}{n!}B(n+1,\alpha-n)\bigg(\int_0^1 t^n(1-t)^{\alpha-n-1}(fg)(ta+(1-t)b)\\
&+\int_0^1 t^n(1-t)^{\alpha-n-1}(fg)((1-t)a+tb)\bigg)\\
\geq\ &\frac{1}{(b-a)^{\alpha}}[\,{}^{b}I_{\alpha}f(a)+I_{\alpha}^{a}f(b)]\\
&\times\bigg(\int_0^1 t^n(1-t)^{\alpha-n-1}g(ta+(1-t)b)\int_0^1 t^n(1-t)^{\alpha-n-1}g((1-t)a+tb)\bigg)\\
&+\frac{1}{(b-a)^{\alpha}}[\,{}^{b}I_{\alpha}g(a)+I_{\alpha}^{a}g(b)]\\
&\times\bigg(\int_0^1 t^n(1-t)^{\alpha-n-1}f(ta+(1-t)b)\int_0^1 t^n(1-t)^{\alpha-n-1}f((1-t)a+tb)\bigg)
\end{aligned}$$

bulunur. Lemma 4.1.5 uygulanırsa

$$\begin{aligned}
&\frac{4}{(b-a)^{\alpha}}B(n+1,\alpha-n)[\,{}^{b}I_{\alpha}(fg)(a)+I_{\alpha}^{a}(fg)(b)]\\
\geq\ &\frac{2n!}{(b-a)^{2\alpha}}[\,{}^{b}I_{\alpha}f(a)+I_{\alpha}^{a}f(b)][\,{}^{b}I_{\alpha}g(a)+I_{\alpha}^{a}g(b)]
\end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitsizliğin her iki yanı $\frac{(\Gamma(\alpha+1))^2}{8}$ ile çarpılır ve Beta fonksiyonunun özellikleri kullanılırsa istenen sonuç elde edilir.

Sonuç 4.1.16 Teorem 4.1.17'de $\alpha=n+1$ alınırsa (4.1.48) eşitsizliği

$$\begin{aligned}
&\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}})[J_{a+}^{\alpha}(fg)(b)+J_{b-}^{\alpha}(fg)(a)]\\
\geq\ &\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}}[J_{a+}^{\alpha}f(b)+J_{b-}^{\alpha}f(a)]\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}}[J_{a+}^{\alpha}g(b)+J_{b-}^{\alpha}g(a)] \qquad (4.1.56)
\end{aligned}$$

eşitsizliğine dönüşür.

Sonuç 4.1.17 Teorem 4.1.17'de $\alpha=n+1$, $b=t$, $a=0$ ve f, g fonksiyonları $(a+b)/2$ noktasına göre simetrik alınırsa ve Lemma 4.1.1 kullanılırsa (4.1.48) eşitsizliği (3.1.10) eşitsizliğine indirgenir.

Teorem 4.1.18 $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ senkronize iki fonksiyon olsun. $f,g\in L[a,b]$ ve $n,k=$

$0, 1, 2, ...$ için $\alpha \in [n, n+1]$ ve $\beta \in (k, k+1]$ ise

$$\begin{aligned} & \frac{2}{(b-a)^{\beta}} B(k+1, \beta-k)[{}^{b}I_{\alpha}(fg)(a) + I_{\alpha}^{a}(fg)(b)] \\ & + \frac{2}{(b-a)^{\alpha}} B(n+1, \alpha-n)[{}^{b}I_{\beta}(fg)(a) + I_{\beta}^{a}(fg)(b)] \\ \geq \; & \frac{1}{(b-a)^{\alpha+\beta}} [{}^{b}I_{\alpha}f(a) + I_{\alpha}^{a}f(b)][{}^{b}I_{\beta}g(a) + I_{\beta}^{a}g(b)] \\ & + \frac{1}{(b-a)^{\alpha+\beta}} [{}^{b}I_{\alpha}g(a) + I_{\alpha}^{a}g(b)][{}^{b}I_{\beta}f(a) + I_{\beta}^{a}f(b)] \end{aligned} \tag{4.1.57}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. (4.1.53) ve (4.1.54) eşitsizlikleri taraf tarafa toplanır ve ardından elde edilen eşitsizliğin her iki tarafı $t^k(1-t)^{\beta-k-1}$ ile çarpılır ve t parametresi için $[0, 1]$ aralığında integrali alınırsa

$$\begin{aligned} & \frac{2}{(b-a)^{\beta}} B(n+1, \beta-n-1)[{}^{b}I_{\alpha}(fg)(a) + I_{\alpha}^{a}(fg)(b)] \\ & + \frac{2}{n!} B(n+1, \alpha-n-1)\Bigg(\int_0^1 t^k(1-t)^{\beta-k-1}(fg)(ta+(1-t)b) \\ & + \int_0^1 t^k(1-t)^{\beta-k-1}(fg)((1-t)a+tb) \Bigg) \\ \geq \; & \frac{1}{(b-a)^{\alpha}} [{}^{b}I_{\alpha}f(a) + I_{\alpha}^{a}f(b)] \\ & \times \Bigg(\int_0^1 t^k(1-t)^{\beta-k-1}g(ta+(1-t)b) \int_0^1 t^k(1-t)^{\beta-k-1}g((1-t)a+tb) \Bigg) \\ & + \frac{1}{(b-a)^{\alpha}} [{}^{b}I_{\alpha}g(a) + I_{\alpha}^{a}g(b)] \\ & \times \Bigg(\int_0^1 t^k(1-t)^{\beta-k-1}f(ta+(1-t)b) \int_0^1 t^k(1-t)^{\beta-k-1}f((1-t)a+tb) \Bigg) \end{aligned} \tag{4.1.58}$$

bulunur. Son olarak Lemma 4.1.5 kullanılırsa istenen sonuç elde edilir ve ispat tamamlanır.

Sonuç 4.1.18 Teorem 4.1.18'de $\alpha = \beta$ alınırsa Teorem 4.1.17 elde edilir.

Sonuç 4.1.19 Teorem 4.1.18'de $\alpha = n+1$ ve $\beta = k+1$ alınırsa (4.1.57) eşitsizliği

$$\begin{aligned} & \frac{2}{(b-a)^{k+1}(k+1)} [J_{a+}^{\alpha} fg(b) + J_{b-}^{\alpha} fg(a)] \\ & + \frac{2}{(b-a)^{n+1}(n+1)} [J_{a+}^{\beta} fg(b) + J_{b-}^{\beta} fg(a)] \\ \geq \; & \frac{1}{(b-a)^{n+k+2}} [J_{a+}^{\alpha} f(b) + J_{b-}^{\alpha} f(a)][J_{a+}^{\beta} g(b) + J_{b-}^{\beta} g(a)] \\ & + \frac{1}{(b-a)^{n+k+2}} [J_{a+}^{\alpha} g(b) + J_{b-}^{\alpha} g(a)][J_{a+}^{\beta} f(b) + J_{b-}^{\beta} f(a)] \end{aligned}$$

eşitsizliğine dönüşür.

Sonuç 4.1.20 Teorem 4.1.18'de $\alpha = n+1$, $b = t$, $a = 0$, ve f, g fonksiyonları $(a+b)/2$ noktasına göre simetrik alınırsa ve Lemma 4.1.1 kullanılırsa (4.1.57) eşitsizliği (3.1.11) eşitsizliğine indirgenir.

Teorem 4.1.19 $i = 1, ..., n$ olmak üzere f_i fonksiyonları $[a, b]$ aralığında artan ve pozitif fonksiyonlar olsun. $n = 0, 1, 2, ...$ için $\alpha \in (n, n+1]$ ise

$$\begin{aligned} &\left[{}^{b}I_{\alpha} \left(\prod_{i=1}^{n} f_i \right)(a) + I_{\alpha}^{a} \left(\prod_{i=1}^{n} f_i \right)(b) \right] \\ \geq\ &\left[\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}\Gamma(\alpha-n)} \right]^{n-1} \prod_{i=1}^{n} [\,{}^{b}I_{\alpha}(f_i)(a) + I_{\alpha}^{a}(f_i)(b)] \end{aligned} \tag{4.1.59}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. Bu teoremin ispatı tümevarım yöntemi ile yapılacaktır. $n = 1$ için

$$[{}^{b}I_{\alpha}f_1(a) + I_{\alpha}^{a}f_1(b)] \geq [{}^{b}I_{\alpha}f_1(a) + I_{\alpha}^{a}f_1(b)]$$

elde edilir. $n = 2$ için Teorem 4.1.17 uygulanırsa

$$\begin{aligned} &[\,{}^{b}I_{\alpha}(f_1f_2)(a) + I_{\alpha}^{a}(f_1f_2)(b)] \\ \geq\ &\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}\Gamma(\alpha-n)} [\,{}^{b}I_{\alpha}(f_1)(a) + I_{\alpha}^{a}(f_1)(b)][\,{}^{b}I_{\alpha}f_2)(a) + I_{\alpha}^{a}(f_2)(b)] \end{aligned}$$

bulunur. Varsayalımki

$$\begin{aligned} &\left[{}^{b}I_{\alpha} \left(\prod_{i=1}^{n-1} f_i \right)(a) + I_{\alpha}^{a} \left(\prod_{i=1}^{n-1} f_i \right)(b) \right] \\ \geq\ &\left[\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}\Gamma(\alpha-n)} \right]^{n-2} \prod_{i=1}^{n-1} [\,{}^{b}I_{\alpha}(f_i)(a) + I_{\alpha}^{a}(f_i)(b)] \end{aligned} \tag{4.1.60}$$

ifadesi sağlansın. $(f_i)_{i=1,...,n}$ fonksiyonları pozitif değerli ve artan olduğundan $\left(\prod_{i=1}^{n-1} f_i\right)(t)$ fonksiyonuda artandır. Dolayısıyla Teorem 4.1.17 $\prod_{i=1}^{n-1} f_i = g, f_n = f$ fonksiyonları için uygulanırsa

$$\begin{aligned} &\left[{}^{b}I_{\alpha} \left(\prod_{i=1}^{n} f_i \right)(a) + I_{\alpha}^{a} \left(\prod_{i=1}^{n} f_i \right)(b) \right] \\ \geq\ &\left[\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}\Gamma(\alpha-n)} \right] \\ &\times \left[{}^{b}I_{\alpha} \left(\prod_{i=1}^{n-1} f_i \right)(a) + I_{\alpha}^{a} \left(\prod_{i=1}^{n-1} f_i \right)(b) \right] [\,{}^{b}I_{\alpha}(f_n)(a) + I_{\alpha}^{a}(f_n)(b)] \end{aligned}$$

bulunur. (4.1.60) kullanılırsa istenen sonuç bulunur ve ispat tamamlanır.

Sonuç 4.1.21 Teorem 4.1.19'de $\alpha = n+1$ alınırsa (4.1.59) eşitsizliği

$$\begin{aligned} & \left[J^{\alpha}_{b-}\left(\prod_{i=1}^{n} f_i\right)(a) + J^{\alpha}_{a+}\left(\prod_{i=1}^{n} f_i\right)(b)\right] \\ \geq & \left[\frac{(n+1)!}{2(b-a)^{\alpha}}\right]^{n-1} \prod_{i=1}^{n} [J^{\alpha}_{a+} f_i(b) + J^{\alpha}_{b-} f_i(a)] \end{aligned} \tag{4.1.61}$$

elde edilir.

Sonuç 4.1.22 Teorem 4.1.19'de $\alpha = n+1$, $b = t$, $a = 0$ ve $f_i; i = 1, ..., n$ fonksiyonları $(a+b)/2$ noktasına göre simetrik alınırsa ve Lemma 4.1.1 kullanılırsa (4.1.59) eşitsizliği (3.1.12) eşitsizliğine indirgenir.

Teorem 4.1.20 f fonksiyonu $[0, \infty)$ aralığında tanımlı artan bir fonksiyon, g fonksiyonu aynı aralıkta tanımlı diferansiyellenebilen bir fonksiyon ve $m := \inf_{t\geq 0} g^{'}(t)$ ise her $t > 0$, $\alpha \in (n, n+1], n = 0, 1, 2, ...$ için

$$\begin{aligned} & \Gamma(\alpha - n)[\,^{b}I_{\alpha}(fg)(a) + I^{a}_{\alpha}(fg)(b)] \\ \geq & \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}}[\,^{b}I_{\alpha}f(a) + I^{a}_{\alpha}f(b)][\,^{b}I_{\alpha}g(a) + I^{a}_{\alpha}g(b)] \\ & -\frac{\Gamma(n+2)\Gamma(\beta-n)}{2(b-a)^{\alpha}(\alpha+1)}[\,^{b}I_{\alpha}f(a) + I^{a}_{\alpha}f(b)] + m[\,^{b}I_{\alpha}(tf)(a) + I^{a}_{\alpha}(tf)(b)] \end{aligned} \tag{4.1.62}$$

eşitsizliği elde edilir.

İspat. $h(t) := g(t) - mt$ şeklinde bir h fonksiyonu tanımlanırsa bu fonksiyonun diferansiyellenebilldiği ve $[0, \infty)$ aralığında artan olduğu açıktır. Teorem 4.1.17 kullanılırsa

$$\begin{aligned} & \Gamma(\alpha - n)[\,^{b}I_{\alpha}((g-mt)f)(a) + I^{a}_{\alpha}((g-mt)f)(b)] \\ \geq & \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}}[\,^{b}I_{\alpha}f(a) + I^{a}_{\alpha}f(b)][\,^{b}I_{\alpha}g(a) + I^{a}_{\alpha}g(b) - m\,^{b}I_{\alpha}t(a) - mI^{a}_{\alpha}t(b)] \\ \geq & \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}}[\,^{b}I_{\alpha}f(a) + I^{a}_{\alpha}f(b)][\,^{b}I_{\alpha}g(a) + I^{a}_{\alpha}g(b)] \\ & -mB(n+2, \alpha-n)\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}}[\,^{b}I_{\alpha}f(a) + I^{a}_{\alpha}f(b)] \\ \geq & \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}}[\,^{b}I_{\alpha}f(a) + I^{a}_{\alpha}f(b)][\,^{b}I_{\alpha}g(a) + I^{a}_{\alpha}g(b)] \\ & -\frac{\Gamma(n+2)\Gamma(\beta-n)}{2(b-a)^{\alpha}(\alpha+1)}[\,^{b}I_{\alpha}f(a) + I^{a}_{\alpha}f(b)] \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} & \Gamma(\alpha - n)[\,^{b}I_{\alpha}(fg)(a) + I^{a}_{\alpha}(fg)(b)] \\ \geq & \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}}[\,^{b}I_{\alpha}f(a) + I^{a}_{\alpha}f(b)][\,^{b}I_{\alpha}g(a) + I^{a}_{\alpha}g(b)] \\ & -\frac{\Gamma(n+2)\Gamma(\beta-n)}{2(b-a)^{\alpha}(\alpha+1)}[\,^{b}I_{\alpha}f(a) + I^{a}_{\alpha}f(b)] + m[\,^{b}I_{\alpha}(tf)(a) + I^{a}_{\alpha}(tf)(b)] \end{aligned}$$

bulunur ve ispat tamamlanır.

Sonuç 4.1.23 Teorem 4.1.20'de $\alpha = n+1$ ve $\beta = k+1$ alınırsa (4.1.63)eşitsizliği

$$\begin{aligned} & [J^{\beta}_{a+}(fg)(b) + J^{\beta}_{b-}fg)(a)] \\ \geq \; & \frac{(n+2)!}{2(b-a)^{\alpha}}[J^{\beta}_{a+}f(b) + J^{\beta}_{b-}f(a)][J^{\beta}_{a+}g(b) + J^{\beta}_{b-}g(a)] \\ & -\frac{\Gamma(n+2)\Gamma(\beta-n)}{2(b-a)^{\alpha}(\alpha+1)}[J^{\beta}_{a+}f(b) + J^{\beta}_{b-}f(a)] + m[J^{\beta}_{a+}f(b) + J^{\beta}_{b-}g(a)] \end{aligned} \tag{4.1.63}$$

eşitsizliğine dönüşür.

Sonuç 4.1.24 Teorem 4.1.20'de $\alpha = n+1$ ve f, g fonksiyonları $(a+b)/2$ noktasına göre simetrik alınırsa ve Lemma 4.1.1 kullanlırsa (4.1.63) eşitsizliği (3.1.13) eşitsizliğine indirgenir.

4.1.5 Grüss Tipli Eşitsizlikler

Lemma 4.1.6 f, $[0,\infty)$ aralığında integrallenebilen ve (3.1.15) şartını sağlayan bir fonksiyon olsun. O halde her $t>0$, $\alpha \in (n, n+1]$, n=0,1,2,... için

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n!}t^{\alpha}B(n+1,\alpha-n)I_{\alpha}(f^2)(t) - \left(I_{\alpha}(f)\right)^2(t) \\ = \; & \left(\frac{1}{n!}Mt^{\alpha}B(n+1,\alpha-n) - (I_{\alpha}f)(t)\right)\left(I_{\alpha}(f)(t) - \frac{1}{n!}mt^{\alpha}B(n+1,\alpha-n)\right) \\ & -\frac{1}{n!}t^{\alpha}B(n+1,\alpha-n)I_{\alpha}(M-f(t))(f(t)-m) \end{aligned} \tag{4.1.64}$$

eşitliği geçerlidir.

İspat. Her $x, y \in [0,\infty)$ için

$$\begin{aligned} & (M-f(y))(f(x)-m) + (M-f(x))(f(y)-m) \\ & -(M-f(x))(f(x)-m) - (M-f(y))(f(y)-m) \\ = \; & f^2(x) + f^2(y) - 2f(x)f(y) \end{aligned} \tag{4.1.65}$$

yazılabilir. (4.1.65) ifadesinin her iki tarafı $\frac{1}{n!}(t-x)^n x^{\alpha-n-1}$ ile çarpılır ve elde edilen sonucun $[0,t]$ aralığında x için integrali alınırsa

$$\begin{aligned}
& (M-f(y))\left(I_\alpha(f)(t)-\frac{m}{n!}t^\alpha B(n+1,\alpha-n)\right) \\
& +\left(\frac{M}{n!}t^\alpha B(n+1,\alpha-n)-I_\alpha(f)(t)\right)(f(y)-m) \\
& -I_\alpha(M-f(t))(f(t)-m)-\frac{1}{n!}t^\alpha B(n+1,\alpha-n)(M-f(y))(f(y)-m) \\
= \;& I_\alpha(f^2)(t)+\frac{1}{n!}t^\alpha B(n+1,\alpha-n)f^2(y)-2I_\alpha(f)(t)f(y) \qquad (4.1.66)
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$\begin{aligned}
\int_0^t (t-x)^n x^{\alpha-n-1}dx &= \int_0^1 (t-tu)^n (ut)^{\alpha-n-1}du \\
&= t^\alpha B(n+1,\alpha-n)
\end{aligned}$$

integrali kullanılmıştır. Ardından (4.1.66) ifadesi $\frac{1}{n!}(t-y)^n y^{\alpha-n-1}$ ile çarpılır ve çıkan sonucun y için $[0,t]$ aralığında integrali alınırsa

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{M}{n!}t^\alpha B(n+1,\alpha-n)-(I_\alpha f)(t)\right)\left(I_\alpha(f)(t)-\frac{m}{n!}t^\alpha B(n+1,\alpha-n)\right) \\
& +\left(\frac{M}{n!}t^\alpha B(n+1,\alpha-n)-I_\alpha(f)(t)\right)\left((I_\alpha f)(t)-\frac{m}{n!}t^\alpha B(n+1,\alpha-n)\right) \\
& -\frac{1}{n!}t^\alpha B(n+1,\alpha-n)I_\alpha(M-f(t))(f(t)-m) \\
& -\frac{1}{n!}t^\alpha B(n+1,\alpha-n)I_\alpha(M-f(t))(f(t)-m) \\
= \;& \frac{1}{n!}t^\alpha B(n+1,\alpha-n)I_\alpha(f^2)(t)+\frac{1}{n!}t^\alpha B(n+1,\alpha-n)I_\alpha(f^2)(t)-2I_\alpha(f)(t)I_\alpha(f)(t)
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece (4.1.64) elde edilir ve ispat tamamlanır.

Teorem 4.1.21 f ve g, $[0,\infty)$ aralığında integrallenebilen ve (3.1.15) şartını sağlayan iki fonksiyon olsun. O halde her $t>0$, $\alpha\in(n,n+1]$, n=0,1,2,..., için

$$\begin{aligned}
& \left|\frac{t^\alpha}{n!}B(n+1,\alpha-n)I_\alpha(fg)(t)-(I_\alpha f(t))(I_\alpha g(t))\right| \\
\leq \;& \left(\frac{t^\alpha}{2n!}B(n+1,\alpha-n)\right)^2(M-m)(P-p) \qquad (4.1.67)
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. Öncelikle

$$H(x,y):=(f(x)-f(y))(g(x)-g(y)); \qquad x,y\in[a,b] \qquad (4.1.68)$$

fonksiyonu tanımlansın. Bu eşitliğin her iki tarafı $\frac{1}{(n!)^2}(t-x)^n t^{\alpha-n-1}(t-y)^n t^{\alpha-n-1}$ ile çarpılır ve çıkan sonucun $[0,t]$ aralığında integrali alınırsa

$$\begin{aligned}&\frac{1}{(n!)^2}\int_0^t\int_0^t (t-x)^n t^{\alpha-n-1}(t-y)^n t^{\alpha-n-1}H(x,y)dxdy \\ = \;& \frac{2}{n!}t^\alpha B(n+1,\alpha-n)I_\alpha(fg)(t)-2(I_\alpha f(t))(I_\alpha g(t)).\end{aligned} \tag{4.1.69}$$

elde edilir. Cauchy-Schwarz eşitsizliği $\left(\int fgh=\int f^{1/2}gf^{1/2}h\leq\left(\int fg^2\right)^{1/2}\left(\int fh^2\right)^{1/2}\right)$ kullanılırsa

$$\begin{aligned}&\frac{1}{(n!)^2}\int_0^t\int_0^t (t-x)^n t^{\alpha-n-1}(t-y)^n t^{\alpha-n-1}H(x,y)dxdy \\ =\;& \frac{1}{(n!)^2}\int_0^t\int_0^t (t-x)^n t^{\alpha-n-1}(t-y)^n t^{\alpha-n-1}(f(x)-f(y))(g(x)-g(y))dxdy \\ \leq\;& \frac{1}{(n!)^2}\left(\int_0^t\int_0^t (t-x)^n t^{\alpha-n-1}(t-y)^n t^{\alpha-n-1}(f(x)-f(y))^2dxdy\right)^{1/2} \\ &\times\left(\int_0^t\int_0^t (t-x)^n t^{\alpha-n-1}(t-y)^n t^{\alpha-n-1}(g(x)-g(y))^2dxdy\right)^{1/2} \\ =\;& \frac{1}{n!}\left[\int_0^t\left(\int_0^t (t-x)^n t^{\alpha-n-1}f^2(x)dx-2\int_0^t (t-x)^n t^{\alpha-n-1}f(x)f(y)dx\right.\right. \\ &\left.\left.+\int_0^t (t-x)^n t^{\alpha-n-1}f^2(y)dx\right)(t-y)^n t^{\alpha-n-1}dy\right]^{1/2} \\ &\times\frac{1}{n!}\left[\int_0^t\left(\int_0^t (t-x)^n t^{\alpha-n-1}g^2(x)dx-2\int_0^t (t-x)^n t^{\alpha-n-1}g(x)g(y)dx\right.\right. \\ &\left.\left.+\int_0^t (t-x)^n t^{\alpha-n-1}g^2(y)dx\right)(t-y)^n t^{\alpha-n-1}dy\right]^{1/2} \\ =\;& \left(\frac{1}{n!}(I_\alpha f^2)(t)\int_0^t (t-y)^n t^{\alpha-n-1}dy-\frac{2}{n!}(I_\alpha f)(t)\int_0^t (t-y)^n t^{\alpha-n-1}f(y)dy\right. \\ &\left.+\frac{1}{n!}t^\alpha B(n+1,\alpha-n)\int_0^t (t-y)^n t^{\alpha-n-1}f^2(y)\right)^{1/2} \\ &\times\left(\frac{1}{n!}(I_\alpha g^2)(t)\int_0^t (t-y)^n t^{\alpha-n-1}dy-\frac{2}{n!}(I_\alpha g)(t)\int_0^t (t-y)^n t^{\alpha-n-1}g(y)dy\right. \\ &\left.+\frac{1}{n!}t^\alpha B(n+1,\alpha-n)\int_0^t (t-y)^n t^{\alpha-n-1}g^2(y)\right)^{1/2} \\ =\;& \left(\frac{2t^\alpha}{n!}B(n+1,\alpha-n)(I_\alpha f^2)(t)-2(I_\alpha f)^2\right)\left(\frac{2t^\alpha}{n!}B(n+1,\alpha-n)(I_\alpha g^2)(t)-2(I_\alpha g)^2\right)\end{aligned}$$

sonucu çıkar. Buradan

$$\begin{aligned}&\left(\frac{1}{n!}t^\alpha B(n+1,\alpha-n)I_\alpha(fg)(t)-(I_\alpha f(t))(I_\alpha g(t))\right)^2 \\ \leq\;& \left(\frac{1}{n!}t^\alpha B(n+1,\alpha-n)(I_\alpha f^2)(t)-(I_\alpha f(t))^2\right) \\ &\times\left(\frac{1}{n!}t^\alpha B(n+1,\alpha-n)(I_\alpha g^2)(t)-(I_\alpha g(t))^2\right)\end{aligned} \tag{4.1.70}$$

elde edilir. $(M-f(x))(f(x)-m)\geq 0$ ve $(P-g(x))(g(x)-p)\geq 0$ ifadelerinden

$$\frac{1}{n!}t^{\alpha}B(n+1,\alpha-n)I_{\alpha}(M-f(t))(f(t)-m)\geq 0$$

ve

$$\frac{1}{n!}t^{\alpha}B(n+1,\alpha-n)I_{\alpha}(P-g(t))(g(t)-P)\geq 0$$

yazılabilir. Dolayısıyla Lemma 4.1.6'den

$$\begin{aligned}&\frac{1}{n!}t^{\alpha}B(n+1,\alpha-n)(I_{\alpha}f^2)(t)-(I_{\alpha}f(t))^2 \qquad (4.1.71)\\ \leq\ &\left(\frac{M}{n!}t^{\alpha}B(n+1,\alpha-n)-(I_{\alpha}f)(t)\right)\left((I_{\alpha}f)(t)-\frac{m}{n!}t^{\alpha}B(n+1,\alpha-n)\right)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}&\frac{1}{n!}t^{\alpha}B(n+1,\alpha-n)(I_{\alpha}g^2)(t)-(I_{\alpha}g(t))^2 \qquad (4.1.72)\\ \leq\ &\left(\frac{P}{n!}t^{\alpha}B(n+1,\alpha-n)-(I_{\alpha}g)(t)\right)\left((I_{\alpha}g)(t)-\frac{p}{n!}t^{\alpha}B(n+1,\alpha-n)\right)\end{aligned}$$

elde edilir. (4.1.71), (4.1.72) ve (4.1.70) eşitsizlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}&\left(\frac{1}{n!}t^{\alpha}B(n+1,\alpha-n)I_{\alpha}(fg)(t)-(I_{\alpha}f(t))(I_{\alpha}g(t))\right)^2\\ \leq\ &\left(\frac{M}{n!}t^{\alpha}B(n+1,\alpha-n)-(I_{\alpha}f)(t)\right)\left((I_{\alpha}f)(t)-\frac{m}{n!}t^{\alpha}B(n+1,\alpha-n)\right)\\ &\times\left(\frac{P}{n!}t^{\alpha}B(n+1,\alpha-n)-(I_{\alpha}g)(t)\right)\left((I_{\alpha}g)(t)-\frac{p}{n!}t^{\alpha}B(n+1,\alpha-n)\right) \qquad (4.1.73)\end{aligned}$$

bulunur. Ardından $4rs\leq(r+s)^2$ $r,s\in\mathbb{R}$ eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}&4\left(\frac{M}{n!}t^{\alpha}B(n+1,\alpha-n)-(I_{\alpha}f)(t)\right)\left((I_{\alpha}f)(t)-\frac{m}{n!}t^{\alpha}B(n+1,\alpha-n)\right)\\ \leq\ &\left(\frac{1}{n!}t^{\alpha}B(n+1,\alpha-n)(M-m)\right)^2 \qquad (4.1.74)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}&4\left(\frac{P}{n!}t^{\alpha}B(n+1,\alpha-n)-(I_{\alpha}f)(t)\right)\left((I_{\alpha}f)(t)-\frac{p}{n!}t^{\alpha}B(n+1,\alpha-n)\right)\\ \leq\ &\left(\frac{1}{n!}t^{\alpha}B(n+1,\alpha-n)(P-p)\right)^2 \qquad (4.1.75)\end{aligned}$$

elde edilir. (4.1.73), (4.1.74) ve (4.1.75) ifadelerinden istenen sonuç elde edilir.

Sonuç 4.1.25 Teorem 4.1.21'de $\alpha=n+1$ alınırsa (4.1.67) eşitsizliği (3.1.16) eşitsizliğine indirgenir.

Teorem 4.1.22 f ve g, $[0,\infty)$ aralığında integrallenebilen iki fonksyion olsun. O halde $t>0$, $\alpha\in[n,n+1)$ ve $\beta\in[k,k+1)$, n,k=0,1,2,..., için

$$\begin{aligned}&\Bigg(\frac{t^{\alpha}}{n!}B(n+1,\alpha-n)(I_{\beta}fg)(t)+\frac{t^{\beta}}{k!}B(k+1,\beta-k)(I_{\alpha}fg)(t)\\&-(I_{\alpha}f)(t)(I_{\beta}g)(t)-(I_{\beta}f)(t)(I^{\alpha}g)(t)\Bigg)^{2}\\&\leq\left(\frac{t^{\alpha}}{n!}B(n+1,\alpha-n)(I_{\beta}f^{2})(t)+\frac{t^{\beta}}{k!}B(k+1,\beta-k)(I_{\alpha}f^{2})(t)-2(I_{\alpha}f)(t)(I_{\beta}f)(t)\right)\\&\times\left(\frac{t^{\alpha}}{n!}B(n+1,\alpha-n)(I_{\beta}g^{2})(t)+\frac{t^{\beta}}{k!}B(k+1,\beta-k)(I_{\alpha}g^{2})(t)-2(I_{\alpha}g)(t)(I_{\beta}g)(t)\right)\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

İspat. (4.1.68) ifadesinin her iki tarafı $\frac{1}{n!k!}(t-x)^{n}t^{\alpha-n-1}(t-y)^{k}t^{\beta-k-1}$ ile çarpılıtr ve çıkan sonucun x ve y değişkenleri için $(0,t)^2$ bölgesinde integrali alınırsa

$$\begin{aligned}&\frac{1}{n!k!}\int_0^t\int_0^t(t-x)^{n}t^{\alpha-n-1}(t-y)^{k}t^{\beta-k-1}H(x,y)dxdy\\=\;&\frac{t^{\alpha}}{n!}B(n+1,\alpha-n)(I_{\beta}fg)(t)+\frac{t^{\beta}}{k!}B(k+1,\beta-k)(I_{\alpha}fg)(t)\\&-(I_{\alpha}f)(t)(I_{\beta}g)(t)-(I_{\beta}f)(t)(I^{\alpha}g)(t)\end{aligned}$$

elde edilir. Ardından Teorem 4.1.21'in ispatında olduğu gibi çift katlı integraler için Cauchy-Schwarz-Bunyakovsy eşitsizliği uygulanırsa istenen sonuç elde edilir ve böylece ispat tamamlanır.

Lemma 4.1.7 f, $[0,\infty)$ aralığında integrallenebilen ve (3.1.15) şartını sağlayan bir fonksiyon olsun. O halde her $t>0$, $\alpha\in(n,n+1]$ ve $\beta\in[k,k+1)$,n,k=0,1,2,..., için

$$\begin{aligned}&\frac{t^{\alpha}}{n!}(I_{\beta}f^{2})(t)+\frac{t^{\beta}}{k!}(I_{\alpha}f^{2})(t)-2(I^{\alpha}f)(t)(I_{\beta}f)(t)\\=\;&\left(\frac{Mt^{\alpha}}{n!}B(n+1,\alpha-n)-(I_{\alpha}f)(t)\right)\left((I_{\beta}f)(t)-\frac{mt^{\beta}}{k!}B(k+1,\beta-k)\right)\\&+\left(\frac{Mt^{\beta}}{n!}B(k+1,\beta-n)-(I_{\beta}f)(t)\right)\left((I_{\alpha}f)(t)-\frac{mt^{\alpha}}{n!}B(n+1,\alpha-n)\right)\\&-\frac{t^{\alpha}}{n!}B(n+1,\alpha-n)(I_{\beta})(M-f(t))(f(t)-m)\\&-\frac{t^{\beta}}{k!}B(k+1,\alpha-k)(I_{\alpha})(M-f(t))(f(t)-m)\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

İspat. (4.1.66) ifadesi $\frac{1}{k!}(t-y)^k t^{\beta-k-1}$ ile çarpılır ve çıkan sonucun y için 0'dan t'ye integrali alınırsa

$$\begin{aligned}
&\left(I_\alpha f(t) - \frac{mt^\alpha}{n!}B(n+1,\alpha-n)\right)\frac{1}{k!}\int_0^t (t-y)^k t^{\beta-n-1}(M-f(y))dy \\
&+\left(\frac{Mt^\alpha}{!n}B(n+1,\alpha-n) - I_\alpha f(t)\right)\frac{1}{k!}\int_0^t (t-y)^k t^{\beta-n-1}(f(y)-m)dy \\
&-I_\alpha\left((M-f(t))(f(t)-m)\right)\frac{1}{k!}\int_0^t (t-y)kt^{\beta-n-1}dy \\
&-\frac{t^\alpha}{k!}B(n+1,\alpha-n)\int_0^t (t-y)^k t^{\beta-n-1}(M-f(y))(f(y)-m)dy \\
= \;& \frac{t^\alpha}{n!}B(n+1,\alpha-n)(I_\beta f^2)(t) + \frac{t^\beta}{k!}B(k+1,\beta-k)(I_\alpha f^2)(t) - 2(I_\alpha f)(t)(I_\beta f)(t)
\end{aligned}$$

elde edilir ve böylece istenen sonuca ulaşılır. İspat tamamlanır.

Teorem 4.1.23 f ve g, $[0,\infty)$ aralığında iki integrallenebilen ve (3.1.15) şartını sağlayan fonksiyon olsun. O halde her $t>0$, $\alpha\in[n,n+1)$, $\beta\in[k,k+1)]$, n,k=0,1,2,..., için

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{t^\alpha}{n!}B(n+1,\alpha-n)(I_\beta fg)(t) + \frac{t^\beta}{k!}B(k+1,\alpha-k)(I_\alpha fg)(t)\right. \\
&\left.-(I_\alpha f)(t)(I_\beta g)(t) - (I_\beta f)(t)(I_\alpha g)(t)\right)^2 \\
&\le \left[\left(\frac{Mt^\alpha}{n!}B(n+1,\alpha-n) - (I_\alpha f)(t)\right)\left((I_\beta f)(t) - \frac{mt^\beta}{k!}B(k+1,\beta-k)\right)\right. \\
&\left.+\left((I_\alpha f)(t) - \frac{mt^\alpha}{n!}B(n+1,\alpha-n)\right)\left(\frac{Mt^\beta}{k!}B(k+1,\beta-k) - (I_\beta f)(t)\right)\right] \\
&\left[\left(\frac{Pt^\alpha}{n!}B(n+1,\alpha-n) - (I_\alpha g)(t)\right)\left((I_\beta g)(t) - \frac{pt^\beta}{k!}B(k+1,\beta-k)\right)\right. \\
&\left.+\left((I_\alpha g)(t) - \frac{pt^\alpha}{n!}B(n+1,\alpha-n)\right)\left(\frac{Pt^\beta}{k!}B(k+1,\beta-k) - (I_\beta g)(t)\right)\right]
\end{aligned} \tag{4.1.76}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. $(M-f(x))(f(x)-m)\ge 0$ ve $(P-g(x))(g(x)-p)$ olduğundan

$$-\frac{t^\alpha}{n!}B(n+1,\alpha-n)(I_\beta(M-f(t))(f(t)-m)) - \frac{t^\beta}{k!}B(k+1,\beta-k)(I_\alpha(M-f(t))(f(t)-m)) \le 0 \tag{4.1.77}$$

ve

$$-\frac{t^\alpha}{n!}B(n+1,\alpha-n)(I_\beta(P-g(t))(g(t)-p)) - \frac{t^\beta}{k!}B(k+1,\beta-k)(I_\alpha(P-g(t))(g(t)-p)) \le 0 \tag{4.1.78}$$

yazılır. Lemma 4.1.7 f ve g fonksiyonlarına uygulanır ve ardından Teorem 4.1.22, (4.1.77) ve (4.1.78) kullanılırsa istenen sonuç elde edilir.

Sonuç 4.1.26 Teorem 4.1.23'de $\alpha = \beta$ alınırsa Teorem 4.1.21 elde edilir.

Sonuç 4.1.27 Teorem 4.1.23'de $\alpha = n + 1$ alınırsa (3.1.17) eşitsizliği elde edilir.

4.2 Katugampola Kesirli İntegralleri İçin Eşitsizlikler

Bu bölümde Katugampola kesirli integralleri ile elde edilen yeni Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler verilmiştir.

4.2.1 Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler

Harmonik konveks fonksiyonlar için Katugampola kesirli integraller yardımıyla elde edilen Hermite-Hadamard eşitsizliği şu şekildedir:

Teorem 4.2.1 $\alpha > 0$ ve $\rho > 0$ olsun. $f : I \subset (0, \infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $a < b$ ve $a^\rho, b^\rho \in I$ için $f \in X_c^p(a^\rho, b^\rho)$ şartını sağlasın. Eğer f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında harmonik konveks fonksiyon ve $g(x) = 1/x^\rho$ ise

$$\begin{aligned} & f\left(\frac{2a^\rho b^\rho}{a^\rho + b^\rho}\right) \\ \leq\ & \frac{\rho^\alpha \Gamma(\alpha+1)}{2} \left(\frac{a^\rho b^\rho}{b^\rho - a^\rho}\right)^\alpha \left\{ {}^\rho\mathcal{I}^\alpha_{(1/a)-}(f \circ g)(1/b) + {}^\rho\mathcal{I}^\alpha_{(1/b)+}(f \circ g)(1/a) \right\} \\ \leq\ & \frac{f(a^\rho) + f(b^\rho)}{2} \end{aligned} \tag{4.2.1}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. $t \in [0, 1]$ olsun. $x, y \in [a, b]$, $a \geq 0$ için $x^\rho = \frac{a^\rho b^\rho}{t^\rho b^\rho + (1-t^\rho)a^\rho}$ ve $y^\rho = \frac{a^\rho b^\rho}{t^\rho a^\rho + (1-t^\rho)b^\rho}$ seçilirse f fonksiyonu harmonik konveks fonksiyon olduğundan

$$f\left(\frac{2x^\rho y^\rho}{x^\rho + y^\rho}\right) \leq \frac{f(x^\rho) + f(y^\rho)}{2}.$$

yazılabilir. Buradan

$$f\left(\frac{2a^\rho b^\rho}{a^\rho + b^\rho}\right) \leq \frac{f\left(\frac{a^\rho b^\rho}{t^\rho b^\rho + (1-t^\rho)a^\rho}\right) + f\left(\frac{a^\rho b^\rho}{t^\rho a^\rho + (1-t^\rho)b^\rho}\right)}{2}. \tag{4.2.2}$$

(4.2.2) ifadesinin her iki tarafı $t^{\rho\alpha-1}$ ile çarpılır ve daha sonra çıkan sonucun t için $[0,1]$ aralığında integrali alınırsa $g(x)=1/x^{\rho}$ için

$$\begin{aligned}
& f\left(\frac{2a^{\rho}b^{\rho}}{a^{\rho}+b^{\rho}}\right) \\
\leq\ & \frac{\rho\alpha}{2}\left\{\int_0^1 t^{\rho\alpha-1} f\left(\frac{a^{\rho}b^{\rho}}{t^{\rho}b^{\rho}+(1-t^{\rho})a^{\rho}}\right)dt\right. \\
& \left.+\int_0^1 t^{\rho\alpha-1} f\left(\frac{a^{\rho}a^{\rho}}{t^{\rho}b^{\rho}+(1-t^{\rho})b^{\rho}}\right)dt\right\} \\
=\ & \frac{\rho\alpha}{2}\left(\frac{a^{\rho}b^{\rho}}{b^{\rho}-a^{\rho}}\right)^{\alpha}\left\{\int_{1/b}^{1/a} \frac{x^{\rho-1}}{\left(x^{\rho}-\frac{1}{b^{\rho}}\right)^{1-\alpha}} f\left(\frac{1}{x^{\rho}}\right)dx\right. \\
& \left.+\int_{1/a}^{1/b} \frac{x^{\rho-1}}{\left(\frac{1}{a^{\rho}}-x^{\rho}\right)^{1-\alpha}} f\left(\frac{1}{x^{\rho}}\right)dx\right\} \\
=\ & \frac{\rho^{\alpha}\Gamma(\alpha+1)}{2}\left(\frac{a^{\rho}b^{\rho}}{b^{\rho}-a^{\rho}}\right)^{\alpha}\left\{{}^{\rho}\mathcal{I}^{\alpha}_{(1/a)-}(f\circ g)(1/b)+{}^{\rho}\mathcal{I}^{\alpha}_{(1/b)+}(f\circ g)(1/a)\right\}
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ilk eşitsizlik ispat edilmiş olur.

(4.2.1) eşitsizliğin ikinci tarafının ispatı için ilk olarak f fonksiyonunun harmonik konveks olması kullanılırsa

$$f\left(\frac{a^{\rho}b^{\rho}}{t^{\rho}b^{\rho}+(1-t^{\rho})a^{\rho}}\right)\leq t^{\rho}f(a^{\rho})+(1-t^{\rho})b^{\rho}$$

ve

$$f\left(\frac{a^{\rho}b^{\rho}}{t^{\rho}a^{\rho}+(1-t^{\rho})b^{\rho}}\right)\leq t^{\rho}f(b^{\rho})+(1-t^{\rho})a^{\rho}$$

yazılır ve bu eşitsizlikler taraf tarafa toplanırsa

$$f\left(\frac{a^{\rho}b^{\rho}}{t^{\rho}b^{\rho}+(1-t^{\rho})a^{\rho}}\right)+f\left(\frac{a^{\rho}b^{\rho}}{t^{\rho}a^{\rho}+(1-t^{\rho})b^{\rho}}\right)\leq f(a^{\rho})+f(b^{\rho}) \tag{4.2.3}$$

bulunur. (4.2.3)'un her iki tarafı $t^{\rho\alpha-1}$ ile çarpılır ve t içiin $[0,1]$ aralığında integrali alınırsa

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 f\left(\frac{a^{\rho}b^{\rho}}{t^{\rho}b^{\rho}+(1-t^{\rho})a^{\rho}}\right)t^{\rho\alpha-1}dt+\int_0^1 f\left(\frac{a^{\rho}b^{\rho}}{t^{\rho}a^{\rho}+(1-t^{\rho})b^{\rho}}\right)t^{\rho\alpha-1}dt \\
\leq\ & [f(a)+f(b)]\int_0^1 t^{\rho\alpha-1}dt
\end{aligned}$$

ve buradan

$$\begin{aligned}
& \frac{\rho^{\alpha}\Gamma(\alpha+1)}{2}\left(\frac{a^{\rho}b^{\rho}}{b^{\rho}-a^{\rho}}\right)^{\alpha}\left\{{}^{\rho}\mathcal{I}^{\alpha}_{(1/a)-}(f\circ g)(1/b)+{}^{\rho}\mathcal{I}^{\alpha}_{(1/b)+}(f\circ g)(1/a)\right\} \\
\leq\ & \frac{f(a^{\rho})+f(b^{\rho})}{2}
\end{aligned}$$

elde edilir. İspat tamamlanmış olur.

Sonuç 4.2.1 Teorem 4.2.1'de $\rho\to 1$ için limit alınırsa (3.1.18) eşitsizliği elde edilir.

$$
\begin{aligned}
& I_f(g;\alpha,a,b) \\
= \; & \frac{f(a^\rho)+b^\rho}{2} - \frac{\rho^\alpha\Gamma(\alpha+1)}{2}\left(\frac{a^\rho b^\rho}{b^\rho-a^\rho}\right)^\alpha \\
& \times \left\{ {}^\rho\mathcal{I}^\alpha_{(1/a)-}(f\circ g)(1/b) + {}^\rho\mathcal{I}^\alpha_{(1/b)+}(f\circ g)(1/a) \right\}
\end{aligned}
$$

tanımı kullanılacaktır. Burada $f : I \subset (0,\infty) \to \mathbb{R}$, I°'de diferansiyellenebilir bir fonksiyon, $a<b$, $a^\rho, b^\rho \in I$, $g(x)=1/x^\rho$ ve Γ Euler Gama fonksiyonudur.

Lemma 4.2.1 $\alpha>0$ ve $\rho>0$ olsun. Ayrıca $f : I \subset (0,\infty)\to\mathbb{R}$ diferansiyellenebilir bir fonksiyon, $a<b$ ve $a^\rho, b^\rho \in I$ için $f \in X^p_c(a^\rho, b^\rho)$ olsun. O halde

$$
\begin{aligned}
& I_f(g;\alpha,a,b) \\
= \; & \frac{\rho a^\rho b^\rho(b^\rho-a^\rho)}{2}\int_0^1 \frac{[t^{\rho\alpha}-(1-t^\rho)^\alpha]t^{\rho-1}}{[t^\rho a^\rho+(1-t^\rho)b^\rho]^2} f'\left(\frac{a^\rho b^\rho}{t^\rho a^\rho+(1-t^\rho)b^\rho}\right)dt
\end{aligned}
\tag{4.2.4}
$$

eşitliği geçerlidir.

İspat. $A_t = t^\rho a^\rho + (1-t^\rho)b^\rho$ ve $B_t = t^\rho b^\rho + (1-t^\rho)a^\rho$ olsun.

$$
\begin{aligned}
& I_f(g;\alpha,a,b) \\
= \; & \frac{\rho a^\rho b^\rho(b^\rho-a^\rho)}{2}\int_0^1 \frac{[t^{\rho\alpha}-(1-t^\rho)^\alpha]t^{\rho-1}}{[t^\rho a^\rho+(1-t^\rho)b^\rho]^2} f'\left(\frac{a^\rho b^\rho}{t^\rho a^\rho+(1-t^\rho)b^\rho}\right)dt \\
= \; & \frac{\rho a^\rho b^\rho(b^\rho-a^\rho)}{2}\int_0^1 \frac{t^{\rho\alpha}t^{\rho-1}}{A_t^2} f'\left(\frac{a^\rho b^\rho}{A_t}\right)dt \\
& -\frac{\rho a^\rho b^\rho(b^\rho-a^\rho)}{2}\int_0^1 \frac{(1-t^\rho)^\alpha t^{\rho-1}}{A_t^2} f'\left(\frac{a^\rho b^\rho}{A_t}\right)dt \\
= \; & I_1 + I_2.
\end{aligned}
\tag{4.2.5}
$$

yazılır. Kısmi integrasyon yöntemiyle

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \frac{1}{2}\left[t^{\rho\alpha} f\left(\frac{a^\rho b^\rho}{A_t}\right)\Bigg|_0^1 - \rho\alpha\int_0^1 t^{\rho\alpha-1} f\left(\frac{a^\rho b^\rho}{A_t}\right)dt \right] \\
&= \frac{1}{2}\left[f(b^\rho) - \rho\alpha\left(\frac{a^\rho b^\rho}{b^\rho-a^\rho}\right)^\alpha \int_{1/b}^{1/a} \frac{x^{\rho-1}}{\left(x^\rho-\frac{1}{b^\rho}\right)^{1-\alpha}} f\left(\frac{1}{x^\rho}\right)dx \right] \\
&= \frac{1}{2}\left[f(b^\rho) - \rho^\alpha\Gamma(\alpha+1)\left(\frac{a^\rho b^\rho}{b^\rho-a^\rho}\right)^\alpha {}^\rho\mathcal{I}^\alpha_{(1/a)-}(f\circ g)(1/b) \right]
\end{aligned}
\tag{4.2.6}
$$

ve benzer şekilde

$$
\begin{aligned}
I_2 &= -\frac{1}{2}\left[(1-t^\rho)^\alpha f\left(\frac{a^\rho b^\rho}{A_t}\right)\Big|_0^1 + \rho\alpha\int_0^1 (1-t^\rho)^{\alpha-1}t^{\rho-1} f\left(\frac{a^\rho b^\rho}{A_t}\right)dt\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[f(a^\rho) - \rho\alpha\int_0^1 u^{\rho\alpha-1} f\left(\frac{a^\rho b^\rho}{B_t}\right)du\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[f(a^\rho) - \rho\alpha\left(\frac{a^\rho b^\rho}{b^\rho-a^\rho}\right)^\alpha \int_{1/a}^{1/b} \frac{x^{\rho-1}}{\left(\frac{1}{a^\rho}-x^\rho\right)^{1-\alpha}} f\left(\frac{1}{x^\rho}\right)dx\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[f(a^\rho) - \rho^\alpha\Gamma(\alpha+1)\left(\frac{a^\rho b^\rho}{b^\rho-a^\rho}\right)^\alpha {}^\rho\mathcal{I}^\alpha_{(1/b)+}(f\circ g)(1/a)\right] \qquad (4.2.7)
\end{aligned}
$$

bulunur. (4.2.6) ve (4.2.7) ifadeleri (4.2.5)'de yazılırsa (4.2.4) eşitliği elde edilir. İspat tamamlanır.

Teorem 4.2.2 $\alpha > 0$ ve $\rho > 0$ olsun. Ayrıca $f : I \subset (0,\infty) \to \mathbb{R}$ diferansiyellenebilen bir fonksiyon, $a < b$, $a^\rho, b^\rho \in I$ ve $f \in X_c^p(a^\rho, b^\rho)$ olsun. Eğer $|f'|^l$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında $l \geq 1$ için harmonik konveks bir fonksiyon ise

$$
\begin{aligned}
&|I_f(g;\alpha,a,b)| \qquad (4.2.8) \\
\leq\ & \frac{\rho a^\rho b^\rho(b^\rho-a^\rho)}{2}\Lambda_1^{1-1/l}(\alpha;a,b)\left(\Lambda_2(\alpha;a,b)|f^{'}(b)|^l + \Lambda_3(\alpha;a,b)|f^{'}(a)|^l\right)^{1/l}
\end{aligned}
$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada

$$
\begin{aligned}
&\Lambda_1(\alpha;a,b) \\
=\ & \frac{b^{-2\rho}}{\rho(\alpha+1)}\left[{}_2F_1\left(2,\alpha+1;\alpha+2;1-\frac{a^\rho}{b^\rho}\right) + {}_2F_1\left(2,1;\alpha+2;1-\frac{a^\rho}{b^\rho}\right)\right],
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\Lambda_2(\alpha;a,b) \\
=\ & \frac{b^{-2\rho}}{\rho(\alpha+2)}\left[{}_2F_1\left(2,\alpha+2;\alpha+3;1-\frac{a^\rho}{b^\rho}\right) + \frac{1}{\alpha+1}\,{}_2F_1\left(2,2;\alpha+3;1-\frac{a^\rho}{b^\rho}\right)\right],
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\Lambda_3(\alpha;a,b) \\
=\ & \frac{b^{-2\rho}}{\rho(\alpha+2)}\left[\frac{1}{\alpha+1}\,{}_2F_1\left(2,\alpha+1;\alpha+3;1-\frac{a^\rho}{b^\rho}\right) + {}_2F_1\left(2,1;\alpha+3;1-\frac{a^\rho}{b^\rho}\right)\right]
\end{aligned}
$$

'dir.

İspat. $A_t = t^\rho a^\rho + (1-t^\rho)b^\rho$ olsun. Lemma 4.2.1, mutlak değer özellikleri, power mean eşittsizliği ve $|f'|^l$ fonksiyonunun harmonik konveksliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
& |I_f(g;\alpha,a,b)| \\
\leq\ & \frac{\rho a^\rho b^\rho (b^\rho - a^\rho)}{2} \int_0^1 \frac{|t^{\rho\alpha} - (1-t^\rho)^\alpha||t^{\rho-1}|}{A_t^2} \left| f'\left(\frac{a^\rho b^\rho}{A_t}\right)\right| dt \\
\leq\ & \frac{\rho a^\rho b^\rho (b^\rho - a^\rho)}{2} \left(\int_0^1 \frac{|t^{\rho\alpha} - (1-t^\rho)^\alpha||t^{\rho-1}|}{A_t^2} dt\right)^{1-1/l} \\
& \times \left(\int_0^1 \frac{|t^{\rho\alpha} - (1-t^\rho)^\alpha||t^{\rho-1}|}{A_t^2} \left| f'\left(\frac{a^\rho b^\rho}{A_t}\right)\right|^l dt\right)^{1/l} \\
\leq\ & \frac{\rho a^\rho b^\rho (b^\rho - a^\rho)}{2} \left(\int_0^1 \frac{|t^{\rho\alpha} + (1-t^\rho)^\alpha||t^{\rho-1}|}{A_t^2} dt\right)^{1-1/l} \\
& \times \left(\int_0^1 \frac{|t^{\rho\alpha} + (1-t^\rho)^\alpha||t^{\rho-1}|}{A_t^2} \left(t^\rho |f'(b^\rho)|^l + (1-t^\rho)|f'(a^\rho)|^l\right) dt\right)^{1/l} \\
=\ & \frac{\rho a^\rho b^\rho (b^\rho - a^\rho)}{2} \Lambda_1^{1-1/l}(\alpha;a,b) \left(\Lambda_2(\alpha;a,b)|f'(b)|^l + \Lambda_3(\alpha;a,b)|f'(a)|^l\right)^{1/l}
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $\Lambda_1(\alpha;a,b)$, $\Lambda_2(\alpha;a,b)$ and $\Lambda_3(\alpha;a,b)$

$$\begin{aligned}
& \Lambda_1(\alpha;a,b) \\
=\ & \int_0^1 \frac{[t^{\rho\alpha} + (1-t^\rho)^\alpha] t^{\rho-1}}{A_t^2} dt \qquad (4.2.9) \\
=\ & b^{-2\rho} \int_0^1 (u^\alpha + (1-u)^\alpha) \left(1 - \left(1 - \frac{a^\rho}{b^\rho}\right) u\right)^{-2} dt \\
=\ & \frac{b^{-2\rho}}{\rho(\alpha+1)} \left[{}_2F_1\left(2, \alpha+1; \alpha+2; 1 - \frac{a^\rho}{b^\rho}\right) + {}_2F_1\left(2, 1; \alpha+2; 1 - \frac{a^\rho}{b^\rho}\right)\right]
\end{aligned}$$

ve benzer şekilde

$$\begin{aligned}
& \Lambda_2(\alpha;a,b) \\
=\ & \int_0^1 \frac{[t^{\rho\alpha} + (1-t^\rho)^\alpha] t^{\rho-1}}{A_t^2} t^\rho dt \qquad (4.2.10) \\
=\ & \frac{b^{-2\rho}}{\rho(\alpha+2)} \left[{}_2F_1\left(2, \alpha+2; \alpha+3; 1 - \frac{a^\rho}{b^\rho}\right) + \frac{1}{\alpha+1} {}_2F_1\left(2, 2; \alpha+3; 1 - \frac{a^\rho}{b^\rho}\right)\right]
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
& \Lambda_3(\alpha;a,b) \\
=\ & \int_0^1 \frac{[t^{\rho\alpha} + (1-t^\rho)^\alpha] t^{\rho-1}}{A_t^2} t^\rho dt \qquad (4.2.11) \\
=\ & \frac{b^{-2\rho}}{\rho(\alpha+2)} \left[\frac{1}{\alpha+1} {}_2F_1\left(2, \alpha+1; \alpha+3; 1 - \frac{a^\rho}{b^\rho}\right) + {}_2F_1\left(2, 1; \alpha+3; 1 - \frac{a^\rho}{b^\rho}\right)\right]
\end{aligned}$$

olarak hesaplanır. Böylece (4.2.9)-(4.2.11) ifadeleri (4.2.9)'da yerine yazılırsa (4.2.8) eşitsiziği elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 4.2.2 Teorem 4.2.2'de $\rho \to 1$ için limit alınırsa 3.1.25 elde edilir.

Teorem 4.2.3 $\alpha > 0$ ve $\rho > 0$ olsun. Ayrıca $f : I \subset (0, \infty) \to \mathbb{R}$ diferansiyellenebilen bir fonksiyon, $a < b$, $a^\rho, b^\rho \in I$ ve $f \in X_c^p(a^\rho, b^\rho)$ olsun. Eğer $|f'|^l$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında $l \geq 1$ için harmonik konveks bir fonksiyon ise

$$\begin{aligned} & |I_f(g; \alpha, a, b)| \\ \leq \; & \frac{\rho a^\rho b^\rho (b^\rho - a^\rho)}{2} \Lambda_4^{1-1/l}(\alpha; a, b) \left(\Lambda_5(\alpha; a, b) |f^{'}(b)|^l + \Lambda_6(\alpha; a, b) |f^{'}(a)|^l \right)^{1/l} \end{aligned} \tag{4.2.12}$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada

$$\begin{aligned} & \Lambda_4 \\ = \; & \frac{b^{-2\rho}}{\rho(\alpha+1)} \Bigg[{}_2F_1 \left(2, \alpha+1; \alpha+2; 1 - \frac{a^\rho}{b^\rho} \right) - {}_2F_1 \left(2, 1; \alpha+2; 1 - \frac{a^\rho}{b^\rho} \right) \\ & + {}_2F_1 \left(2, 1; \alpha+2; \frac{1}{2} \left(1 - \frac{a^\rho}{b^\rho} \right) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \Lambda_5 \\ = \; & \frac{b^{-2\rho}}{\rho(\alpha+2)} \Bigg[{}_2F_1 \left(2, \alpha+2; \alpha+3; 1 - \frac{a^\rho}{b^\rho} \right) - \frac{1}{\alpha+1} {}_2F_1 \left(2, 2; \alpha+3; 1 - \frac{a^\rho}{b^\rho} \right) \\ & + \frac{1}{2(\alpha+1)} {}_2F_1 \left(2, 2; \alpha+3; \frac{1}{2} \left(1 - \frac{a^\rho}{b^\rho} \right) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \Lambda_6 \\ = \; & \frac{b^{-2\rho}}{\rho(\alpha+2)} \Bigg[\frac{1}{\alpha+1} {}_2F_1 \left(2, \alpha+1; \alpha+3; 1 - \frac{a^\rho}{b^\rho} \right) - {}_2F_1 \left(2, 1; \alpha+3; 1 - \frac{a^\rho}{b^\rho} \right) \\ & + {}_2F_1 \left(2, 1; \alpha+3; \frac{1}{2} \left(1 - \frac{a^\rho}{b^\rho} \right) \right) \end{aligned}$$

şeklindedir.

İspat. $A_t = t^\rho a^\rho + (1 - t^\rho) b^\rho$ olsun. Lemma 4.2.1, mutlak değer özellikleri, power mean eşittsizliği ve $|f'|^l$ fonksiyonunun harmonik konveksliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} & |I_f(g; \alpha, a, b)| \\ \leq \; & \frac{\rho a^\rho b^\rho (b^\rho - a^\rho)}{2} \int_0^1 \frac{|t^{\rho\alpha} - (1 - t^\rho)^\alpha| |t^{\rho-1}|}{A_t^2} \left| f^{'} \left(\frac{a^\rho b^\rho}{A_t} \right) \right| dt \\ \leq \; & \frac{\rho a^\rho b^\rho (b^\rho - a^\rho)}{2} \left(\int_0^1 \frac{|t^{\rho\alpha} - (1 - t^\rho)^\alpha| |t^{\rho-1}|}{A_t^2} dt \right)^{1-1/l} \\ & \times \left(\int_0^1 \frac{|t^{\rho\alpha} - (1 - t^\rho)^\alpha| |t^{\rho-1}|}{A_t^2} \left| f^{'} \left(\frac{a^\rho b^\rho}{A_t} \right) \right|^l dt \right)^{1/l} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \frac{\rho a^\rho b^\rho (b^\rho - a^\rho)}{2}\left(\int_0^1 \frac{|t^{\rho\alpha}-(1-t^\rho)^\alpha||t^{\rho-1}|}{A_t^2}dt\right)^{1-1/l} \\
&\quad \times\left(\int_0^1 \frac{|t^{\rho\alpha}-(1-t^\rho)^\alpha||t^{\rho-1}|}{A_t^2}\left(t^\rho|f^{'}(b^\rho)|^l+(1-t^\rho)|f^{'}(a^\rho)|^l\right)dt\right)^{1/l} \\
&= \frac{\rho a^\rho b^\rho (b^\rho - a^\rho)}{2}K_1^{1-1/l}(\alpha;a,b)\left(K_2(\alpha;a,b)|f^{'}(b)|^l+K_3(\alpha;a,b)|f^{'}(a)|^l\right)^{1/l}
\end{aligned} \tag{4.2.13}
$$

elde edilir. K_1, K_2 ve K_3, Lemma 2.5.1 kullanılarak

$$
\begin{aligned}
K_1 &= \int_0^1 \frac{|t^{\rho\alpha}-(1-t^\rho)^\alpha||t^{\rho-1}|}{A_t^2}dt \\
&= \int_0^{1/2} \frac{((1-t^\rho)^\alpha-t^{\rho\alpha})t^{\rho-1}}{A_t^2}dt+\int_{1/2}^1 \frac{(t^{\rho\alpha}-(1-t^\rho)^\alpha)t^{\rho-1}}{A_t^2}dt \\
&= \int_0^1 \frac{(t^{\rho\alpha}-(1-t^\rho)^\alpha)t^{\rho-1}}{A_t^2}dt+2\int_0^{1/2} \frac{((1-t^\rho)^\alpha-t^{\rho\alpha})t^{\rho-1}}{A_t^2}dt \\
&\leq \int_0^1 u^\alpha A_u^{-2}du-\int_0^1(1-u)^\alpha A_u^{-2}du+2\int_0^{1/2}(1-2u)^\alpha A_u^{-2}du \\
&= \frac{b^{-2\rho}}{\rho(\alpha+1)}\left[{}_2F_1\left(2,\alpha+1;\alpha+2;1-\frac{a^\rho}{b^\rho}\right)-{}_2F_1\left(2,1;\alpha+2;1-\frac{a^\rho}{b^\rho}\right)\right. \\
&\quad \left.+{}_2F_1\left(2,1;\alpha+2;\frac{1}{2}\left(1-\frac{a^\rho}{b^\rho}\right)\right)\right]
\end{aligned} \tag{4.2.14}
$$

,

$$
\begin{aligned}
K_2 &= \int_0^1 \frac{|t^{\rho\alpha}-(1-t^\rho)^\alpha||t^{\rho-1}|}{A_t^2}t^\rho dt \\
&\leq \int_0^1 u^{\alpha+1}A_u^{-2}du-\int_0^1(1-u)^\alpha uA_u^{-2}du+2\int_0^{1/2}(1-2u)^\alpha uA_u^{-2}du \\
&= \frac{b^{-2\rho}}{\rho(\alpha+2)}\left[{}_2F_1\left(2,\alpha+2;\alpha+3;1-\frac{a^\rho}{b^\rho}\right)-\frac{1}{\alpha+1}\,{}_2F_1\left(2,2;\alpha+3;1-\frac{a^\rho}{b^\rho}\right)\right. \\
&\quad \left.+\frac{1}{2(\alpha+1)}\,{}_2F_1\left(2,2;\alpha+3;\frac{1}{2}\left(1-\frac{a^\rho}{b^\rho}\right)\right)\right],
\end{aligned} \tag{4.2.15}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
K_3 &= \int_0^1 \frac{|t^{\rho\alpha}-(1-t^\rho)^\alpha||t^{\rho-1}|}{A_t^2}(1-t)^\rho dt \\
&\leq \int_0^1 t^\alpha(1-u)A_u^{-2}du-\int_0^1(1-u)^{\alpha+1}A_u^{-2}du+2\int_0^{1/2}(1-2u)^\alpha(1-u)A_u^{-2}du \\
&= \frac{b^{-2\rho}}{\rho(\alpha+2)}\left[\frac{1}{\alpha+1}\,{}_2F_1\left(2,\alpha+1;\alpha+3;1-\frac{a^\rho}{b^\rho}\right)-{}_2F_1\left(2,1;\alpha+3;1-\frac{a^\rho}{b^\rho}\right)\right. \\
&\quad \left.+{}_2F_1\left(2,1;\alpha+3;\frac{1}{2}\left(1-\frac{a^\rho}{b^\rho}\right)\right)\right]
\end{aligned} \tag{4.2.16}
$$

olarak hesaplanır. Böylece (4.2.14) - (4.2.16) ifadeleri (4.2.13) ’da kullanılırsa (4.2.12) elde edilir.

Sonuç 4.2.3 Teorem 4.2.3'da $\rho \to 1$ için limit alınırsa Teorem 3.1.26 elde edilir.

Teorem 4.2.4 $\alpha > 0$ ve $\rho > 0$ olsun. Ayrıca $f : I \subset (0, \infty) \to \mathbb{R}$ diferansiyellenebilen bir fonksiyon, $a < b$, $a^\rho, b^\rho \in I$ ve $f \in X_c^p(a^\rho, b^\rho)$ olsun. Eğer $|f'|^l$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında $l \geq 1$ ve $l > 1$,$1/k + 1/l = 1$için harmonik konveks bir fonksiyon ise

$$|I_f(g; \alpha, a, b)| \leq \frac{a^\rho(b^\rho - a^\rho)}{2b^\rho} \left(\Lambda_7^{1/k} + \Lambda_8^{1/k}\right) \left(\frac{|f'(a^\rho)|^l + |f'(b^\rho)|^l}{\rho + 1}\right)^{1/l} \tag{4.2.17}$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada

$$\begin{aligned} &\Lambda_7 \\ = \;& B\left(\frac{\rho k - k + 1}{p}, \alpha k + 1\right) {}_2F_1\left(2k, \frac{\rho k - k + 1}{\rho}; \alpha k + k + 1 + \frac{1-k}{\rho}; 1 - \frac{a^\rho}{b^\rho}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Lambda_8 \\ = \;& \frac{1}{\left(\alpha k + k + \frac{1-k}{\rho}\right)} {}_2F_1\left(2k, \alpha k + k + \frac{1-k}{\rho}; \alpha k + k + 1 + \frac{1-k}{\rho}; 1 - \frac{a^\rho}{b^\rho}\right). \end{aligned}$$

İspat. $A_t = t^\rho a^\rho + (1 - t^\rho)b^\rho$ olsun. Lemma 4.2.1, mutlak değer özellikleri, Hölder eşittsizliği ve $|f'|^l$ fonksiyonunun harmonik konveksliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} &|I_f(g; \alpha, a, b)| \\ \leq \;& \frac{a^\rho b^\rho(b^\rho - a^\rho)}{2} \\ &\times \left[\int_0^1 \frac{t^{\rho\alpha} t^{\rho-1}}{A_t^2} \left|f'\left(\frac{a^\rho b^\rho}{A_t}\right)\right| dt + \int_0^1 \frac{(1-t^\rho)^\alpha t^{\rho-1}}{A_t^2} \left|f'\left(\frac{a^\rho b^\rho}{A_t}\right)\right| dt\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \leq \;& \frac{a^\rho b^\rho(b^\rho - a^\rho)}{2} \left\{ \left(\int_0^1 \frac{t^{\rho\alpha k} t^{k(\rho-1)}}{A_t^{2k}} dt\right)^{1/k} \left(\int_0^1 \left|f'\left(\frac{a^\rho b^\rho}{A_t^{2k}}\right)\right|^l\right)^{1/l} \right. \\ &\left. + \left(\int_0^1 \frac{(1-t^\rho)^{\alpha k} t^{k(\rho-1)}}{A_t^{2k}} dt\right)^{1/k} \left(\int_0^1 \left|f'\left(\frac{a^\rho b^\rho}{A_t^{2k}}\right)\right|^l\right)^{1/l} \right\} \\ \leq \;& \frac{a^\rho b^\rho(b^\rho - a^\rho)}{2} \left(K_4^{1/k} + K_5^{1/k}\right) \left(\int_0^1 \left[t^\rho |f'(b^\rho)|^l + (1-t^\rho)|f'(a^\rho)|^l\right] dt\right)^{1/l} \\ = \;& \frac{a^\rho b^\rho(b^\rho - a^\rho)}{2} \left(K_4^{1/k} + K_5^{1/k}\right) \left(\frac{|f'(a^\rho)|^l + |f'(b^\rho)|^l}{\rho + 1}\right)^{1/l} \end{aligned} \tag{4.2.18}$$

elde edilir. Λ_7 and Λ_8 ifadeleri

$$\begin{aligned} &\Lambda_7 \\ =& \int_0^1 \frac{(1-t^\rho)^{\alpha k} t^{k(\rho-1)}}{A_t^{2k}} dt \\ =& \frac{b^{-2\rho k}}{B(\frac{\rho k-k+1}{p}, \alpha k+1)} {}_2F_1\left(2k, \frac{\rho k-k+1}{\rho}; \alpha k+k+1+\frac{1-k}{\rho}; 1-\frac{a^\rho}{b^\rho}\right) \end{aligned} \tag{4.2.19}$$

$$\begin{aligned} &\Lambda_8 \\ =& \int_0^1 \frac{t^{\rho\alpha k} t^{k(\rho-1)}}{A_t^{2k}} dt \\ =& \left(\alpha k+k+\frac{1-k}{\rho}\right) b^{-2\rho k} {}_2F_1\left(2k, \alpha k+k+\frac{1-k}{\rho}; \alpha k+k+1+\frac{1-k}{\rho}; 1-\frac{a^\rho}{b^\rho}\right) \end{aligned} \tag{4.2.20}$$

şeklinde hesaplanır. Böylece (4.2.19) ve (4.2.20) ifadeleri (4.2.18) yerine hesaplanırsa (4.2.17) eşitsizliği elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 4.2.4 Teorem 4.2.4 $\rho \to 1$ için limit alınırsa Teorem 3.1.27 elde edilir.

Teorem 4.2.5 $\alpha > 0$ ve $\rho > 0$ olsun. Ayrıca $f : I \subset (0,\infty) \to \mathbb{R}$ diferansiyellenebilen bir fonksiyon, $a < b$, $a^\rho, b^\rho \in I$ ve $f \in X_c^p(a^\rho, b^\rho)$ olsun. Eğer $|f'|^l$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında $l \geq 1$ ve $l > 1$,$1/k + 1/l = 1$için harmonik konveks bir fonksiyon ise

$$|I_f(g;\alpha,a,b)| \leq \frac{\rho a^\rho b^\rho (b^\rho - a^\rho)}{2} \Lambda_9^{1/k} \left(\Lambda_{10}|f^{'}(b^\rho)|^l + \Lambda_{11}|f^{'}(a^\rho)|^l\right)^{1/l} \tag{4.2.21}$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada

$$\begin{aligned} \Lambda_9 &= b^{-2\rho k} {}_2F_1\left(2k, \frac{1}{\rho}; \frac{\rho+1}{\rho}; 1-\frac{a^\rho}{b^\rho}\right) \\ \Lambda_{10} &= \frac{1}{\rho 2^{\frac{\rho+1}{\rho}}} B\left(\frac{\rho+1}{\rho}, \alpha l+1\right) + \frac{\alpha l+1}{2\rho} {}_2F_1\left(\frac{-1}{\rho}, 1; \alpha l+2; \frac{1}{2}\right) \\ \Lambda_{11} &= \frac{1}{\rho 2^{\frac{1}{\rho}}} B\left(\frac{1}{\rho}, \alpha l+1\right) {}_2F_1\left(-1, \frac{1}{\rho}; \alpha l+\frac{1}{\rho}+1; \frac{1}{2}\right) \\ &\quad + \frac{(\alpha l+1)(\alpha l+2)}{\rho 2^{\frac{2-\rho}{\rho}}} {}_2F_1\left(\frac{1-\rho}{\rho}, 2; \alpha l+3; \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

şeklindedir.

İspat. $A_t = t^\rho a^\rho + (1-t^\rho) b^\rho$ olsun. Lemma 2.5.1, Lemma 4.2.1, Hölder eşitsizliği ve $|f'|^l$

fonksiyonunun harmonik konveksliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
|I_f(g;\alpha,a,b)| &\leq \frac{\rho a^\rho b^\rho(b^\rho-a^\rho)}{2}\int_0^1 \frac{|t^{\rho\alpha}-(1-t^\rho)^\alpha||t^{\rho-1}|}{A_t^2}\left|f'\left(\frac{a^\rho b^\rho}{A_t}\right)\right|dt \\
&\leq \frac{\rho a^\rho b^\rho(b^\rho-a^\rho)}{2}\left(\int_0^1 \frac{1}{A_t^{2k}}dt\right)^{1/k} \\
&\quad\times\left(\int_0^1 |t^{\rho\alpha}-(1-t^\rho)^\alpha|^l|t^{\rho-1}|^l\left|f'\left(\frac{a^\rho b^\rho}{A_t}\right)\right|^l dt\right)^{1/l} \\
&\leq \frac{\rho a^\rho b^\rho(b^\rho-a^\rho)}{2}\left(\int_0^1 \frac{1}{A_t^{2k}}dt\right)^{1/k} \\
&\quad\times\left(\int_0^1 |1-2t^\rho|^{\alpha l}\left[t^\rho|f'(b^\rho)|^l+(1-t^\rho)|f'(a^\rho)|^l\right]dt\right)^{1/l} \\
&= \frac{\rho a^\rho b^\rho(b^\rho-a^\rho)}{2}\Lambda_9^{1/k}\left(\Lambda_{10}|f'(b^\rho)|^l+\Lambda_{11}|f'(a^\rho)|^l\right)^{1/l} \qquad (4.2.22)
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$\begin{aligned}
\Lambda_9 &= \int_0^1 \frac{1}{A_t^{2k}}dt = b^{-2\rho k}\,{}_2F_1\left(2k,\frac{1}{\rho};\frac{\rho+1}{\rho};1-\frac{a^\rho}{b^\rho}\right) \qquad (4.2.23) \\
\Lambda_{10} &= \int_0^1 |1-2t^\rho|^{\alpha l}t^\rho dt \\
&= \int_0^{1/2^{1/\rho}}(1-2t^\rho)^{\alpha l}t^\rho dt+\int_{1/2^{1/\rho}}^1(2t^\rho-1)^{\alpha l}t^\rho dt \\
&= \frac{1}{\rho 2^{\frac{\rho+1}{\rho}}}B\left(\frac{\rho+1}{\rho},\alpha l+1\right)+\frac{\alpha l+1}{2\rho}\,{}_2F_1\left(\frac{-1}{\rho},1;\alpha l+2;\frac{1}{2}\right) \qquad (4.2.24) \\
\Lambda_{11} &= \int_0^1 |1-2t^\rho|^{\alpha l}(1-t^\rho)dt \\
&= \int_0^{1/2^{1/\rho}}(1-2t^\rho)^{\alpha l}(1-t^\rho)dt+\int_{1/2^{1/\rho}}^1(2t^\rho-1)^{\alpha l}(1-t^\rho)dt \\
&= \frac{1}{\rho 2^{\frac{1}{\rho}}}B\left(\frac{1}{\rho},\alpha l+1\right)\,{}_2F_1\left(-1,\frac{1}{\rho};\alpha l+\frac{1}{\rho}+1;\frac{1}{2}\right) \\
&\quad+\frac{(\alpha l+1)(\alpha l+2)}{\rho 2^{\frac{2-\rho}{\rho}}}\,{}_2F_1\left(\frac{1-\rho}{\rho},2;\alpha l+3;\frac{1}{2}\right) \qquad (4.2.25)
\end{aligned}$$

olarak hesaplanır. (4.2.23)-(4.2.25) ifadeleri (4.2.22)'de yerine yazılırsa istenen sonuç elde edilir ve ispat tamamlanır.

Sonuç 4.2.5 Teorem 4.2.5'da $\rho \to 1$ için limit alınırsa Teorem 3.1.28 elde edilir.

Teorem 4.2.6 $\alpha > 0$ ve $\rho > 0$ olsun. Ayrıca $f : I \subset (0,\infty) \to \mathbb{R}$ diferansiyellenebilen bir fonksiyon, $a < b$, $a^\rho, b^\rho \in I$ ve $f \in X_c^p(a^\rho, b^\rho)$ olsun. Eğer $|f'|^l$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında $l \geq 1$ ve $l > 1, 1/k + 1/l = 1$için harmonik konveks bir fonksiyon ise

$$|I_f(g;\alpha,a,b)| \leq \frac{\rho a^\rho b^\rho(b^\rho-a^\rho)}{2}\Lambda_{12}^{1/k}\left(\Lambda_{13}|f'(b^\rho)|^l+\Lambda_{14}|f'(a^\rho)|^l\right)^{1/l} \qquad (4.2.26)$$

eşitsizliği elde edilir. Burada

$$\begin{aligned}
\Lambda_{12} &= \frac{1}{\rho 2^{(k\rho-k+1)/\rho}} B\left(\frac{k\rho-k+1}{\rho}, \alpha k+1\right) \\
&\quad + \frac{1}{\rho 2^{\rho}}\, {}_2F_1\left(\frac{k+\rho-k\rho-1}{\rho}, 1; \alpha k+2; \frac{1}{2}\right) \\
\Lambda_{13} &= \frac{1}{(\rho+1)b^{2\rho l}}\, {}_2F_1\left(2l, \frac{\rho+1}{\rho}; \frac{2\rho+1}{\rho}; 1-\frac{a^{\rho}}{b^{\rho}}\right) \\
\Lambda_{14} &= \frac{\rho}{(\rho+1)b^{2\rho l}}\, {}_2F_1\left(2l, \frac{1}{\rho}; \frac{2\rho+1}{\rho}; 1-\frac{a^{\rho}}{b^{\rho}}\right)
\end{aligned}$$

şeklindedir.

İspat. $A_t = t^{\rho}a^{\rho} + (1-t^{\rho})b^{\rho}$ olsun. Lemma 2.5.1, Lemma 4.2.1, Hölder eşitsizliği ve $|f'|^l$ fonksiyonunun harmonik konveksliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
|I_f(g;\alpha,a,b)| &\leq \frac{\rho a^{\rho}b^{\rho}(b^{\rho}-a^{\rho})}{2}\int_0^1 \frac{|t^{\rho\alpha}-(1-t^{\rho})^{\alpha}||t^{\rho-1}|}{A_t^2}\left|f'\left(\frac{a^{\rho}b^{\rho}}{A_t}\right)\right| dt \\
&\leq \frac{\rho a^{\rho}b^{\rho}(b^{\rho}-a^{\rho})}{2}\left(\int_0^1 |t^{\rho\alpha}-(1-t^{\rho})^{\alpha}|^k |t^{\rho-1}|^k dt\right)^{1/k} \\
&\quad \times \left(\int_0^1 \frac{1}{A_t^{2l}}\left|f'\left(\frac{a^{\rho}b^{\rho}}{A_t}\right)\right|^l dt\right)^{1/l} \\
&\leq \frac{\rho a^{\rho}b^{\rho}(b^{\rho}-a^{\rho})}{2}\left(\int_0^1 |(2t^{\rho}-1)|^{\alpha k} t^{k(\rho-1)} dt\right)^{1/k} \\
&\quad \times \left(\int_0^1 \frac{1}{A_t^{2l}}\left[t^{\rho}|f'(b^{\rho})|^l + (1-t^{\rho})|f'(a^{\rho})|^l\right] dt\right)^{1/l} \\
&= \frac{\rho a^{\rho}b^{\rho}(b^{\rho}-a^{\rho})}{2}\Lambda_{12}^{1/k}\left(\Lambda_{13}|f'(b^{\rho})|^l + \Lambda_{14}|f'(a^{\rho})|^l\right)^{1/l} \qquad (4.2.27)
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Burada

$$\begin{aligned}
\Lambda_{12} &= \int_0^1 |(2t^{\rho}-1)|^{\alpha k} t^{k(\rho-1)} dt \\
&= \int_0^{1/2^{1/\rho}} (1-2t^{\rho})^{\alpha k} t^{k(\rho-1)} dt + \int_{1/2^{1/\rho}}^1 (2t^{\rho}-1)^{\alpha k} t^{k(\rho-1)} dt \\
&= \frac{1}{\rho 2^{(k\rho-k+1)/\rho}} B\left(\frac{k\rho-k+1}{\rho}, \alpha k+1\right) \\
&\quad + \frac{1}{\rho 2^{\rho}}\, {}_2F_1\left(\frac{k+\rho-k\rho-1}{\rho}, 1; \alpha k+2; \frac{1}{2}\right), \qquad (4.2.28)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\Lambda_{13} &= \int_0^1 t^{\rho} A_t^{-2l} dt \\
&= \frac{1}{(\rho+1)b^{2\rho l}} \, {}_2F_1\left(2l, \frac{\rho+1}{\rho}; \frac{2\rho+1}{\rho}; 1-\frac{a^{\rho}}{b^{\rho}}\right), \qquad (4.2.29) \\
\Lambda_{14} &= \int_0^1 (1-t^{\rho}) A_t^{-2l} dt \\
&= \frac{\rho}{(\rho+1)b^{2\rho l}} \, {}_2F_1\left(2l, \frac{1}{\rho}; \frac{2\rho+1}{\rho}; 1-\frac{a^{\rho}}{b^{\rho}}\right) \qquad (4.2.30)
\end{aligned}
$$

olarak bulunur. (4.2.28)-(4.2.30) ifadeleri (4.2.27)'da yerine yazılırsa istenene sonuç elde edilir ve ispat tamamlanır.

Sonuç 4.2.6 Teorem 4.2.6'de $\rho \to 1$ için limit alınırsa Teorem 3.1.29 elde edilir.

Aşağıda Katugampola kesirli integralleri yardımıyla quasi-konveks fonksiyonlar için elde edilen yeni Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler sunulmuştur. Bu eşitsizliklerin elde edilmesinde Chen ve Katugampola tarafından aşağıda verilen lemmadan faydalanılmıştır.

Lemma 4.2.2 $f : [a^{\rho}, b^{\rho}] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu (a^{ρ}, b^{ρ}) aralığında diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $0 \leq a < b$ olsun. O halde $g(x) = x^{\rho}$ için

$$
\begin{aligned}
&\frac{f(a^{\rho}) + f(b^{\rho})}{2} - \frac{\alpha \rho^{\alpha} \Gamma(\alpha+1)}{2(b^{\rho}-a^{\rho})^{\alpha}} \left[{}^{\rho}\mathcal{I}_{a+}^{\alpha} (f \circ g)(b) + {}^{\rho}\mathcal{I}_{b-}^{\alpha} (f \circ g)(a) \right] \\
= \; &\frac{b^{\rho}-a^{\rho}}{2} \int_0^1 [(1-t^{\rho})^{\alpha} - t^{\rho\alpha}] t^{\rho-1} f'(t^{\rho}a^{\rho} + (1-t^{\rho})b^{\rho}) dt \qquad (4.2.31)
\end{aligned}
$$

eşitliği geçerlidir [14].

Teorem 4.2.7 $\alpha > 0$ ve $\rho > 0$ olsun. $f : [a^{\rho}, b^{\rho}] \to \mathbb{R}$ pozitif değerli bir fonksiyon, $0 \leq a < b$ ve $f \in X_c^p(a^{\rho}, b^{\rho})$ olsun. Eğer f fonksiyonu $[a^{\rho}, b^{\rho}]$ aralığında *quasi*-konveks bir fonksiyon ve $g(x) = x^{\rho}$ise

$$
\frac{\rho^{\alpha}\Gamma(\alpha+1)}{2(b^{\rho}-a^{\rho})^{\alpha}} \left[{}^{\rho}\mathcal{I}_{a+}^{\alpha} (f \circ g)(b) + {}^{\rho}\mathcal{I}_{b-}^{\alpha} (f \circ g)(a) \right] \leq max\{f(a^{\rho}), f(b^{\rho})\} \qquad (4.2.32)
$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. f fonksiyonu $[a^{\rho}, b^{\rho}]$'de *quasi*-konveks olduğundan

$$
f(t^{\rho}a^{\rho} + (1-t^{\rho})b^{\rho}) \leq max\{f(a^{\rho}), f(b^{\rho})\}
$$

ve

$$
f((1-t^{\rho})a^{\rho} + t^{\rho}b^{\rho}) \leq max\{f(a^{\rho}), f(b^{\rho})\}
$$

yazılabilir. Bu eşitsizlikler taraf taraf toplanırsa

$$\frac{1}{2}\left[f(t^{\rho}a^{\rho}+(1-t^{\rho})b^{\rho})+f((1-t^{\rho})a^{\rho}+t^{\rho}b^{\rho})\right]\leq max\{f(a^{\rho}),f(b^{\rho})\} \tag{4.2.33}$$

bulunur. (4.2.33) ifadesinin her iki tarafı $t^{\alpha\rho-1}$ ile çarpılır ve bulunan sonucun t değişkenine göre $[a^{\rho},b^{\rho}]$ aralığında integrali alınırsa

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 t^{\alpha\rho-1}f(t^{\rho}a^{\rho}+(1-t^{\rho})b^{\rho})dt+\int_0^1 t^{\alpha\rho-1}f((1-t^{\rho})a^{\rho}+t^{\rho}b^{\rho})dt\\
=\;&\int_a^b\left(\frac{b^{\rho}-x^{\rho}}{b^{\rho}-a^{\rho}}\right)^{\alpha-1}f(x^{\rho})\frac{x^{\rho-1}}{b^{\rho}-a^{\rho}}dx+\int_a^b\left(\frac{x^{\rho}-a^{\rho}}{b^{\rho}-a^{\rho}}\right)^{\alpha-1}f(x^{\rho})\frac{x^{\rho-1}}{b^{\rho}-a^{\rho}}dx\\
=\;&\frac{1}{(b^{\rho}-a^{\rho})^{\alpha}}\int_a^b\frac{x^{\rho-1}}{(b^{\rho}-x^{\rho})^{1-\alpha}}f(x^{\rho})dx+\frac{1}{(b^{\rho}-a^{\rho})^{\alpha}}\int_a^b\frac{x^{\rho-1}}{(x^{\rho}-a^{\rho})^{1-\alpha}}f(x^{\rho})dx\\
=\;&\frac{\Gamma(\alpha)}{\rho^{1-\alpha}(b^{\rho}-a^{\rho})^{\alpha}}\left[{}^{\rho}\mathcal{I}^{\alpha}_{a+}(f\circ g)(b)+{}^{\rho}\mathcal{I}^{\alpha}_{b-}(f\circ g)(a)\right]\\
\leq\;&\frac{2}{\rho\alpha}max\{f(a^{\rho}),f(b^{\rho})\}
\end{aligned}$$

elde edilir ve böylece istenen sonuç elde edilir. İspat tamamlanır.

Sonuç 4.2.7 (4.2.32) eşitsizliğinde $\rho\to 1$ için limit alınırsa (3.1.19) eşitsizliği elde edilir.

Teorem 4.2.8 $\alpha>0$ ve $\rho>0$ olsun. Ayrıca $f:[a^{\rho},b^{\rho}]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $[a^{\rho},b^{\rho}]$ aralığında diferansiyellenebilen bir fonksiyon ve $0\leq a<b$ olsun. Eğer $|f'|$ fonksiyonu $[a^{\rho},b^{\rho}]$ aralığında *quasi*-konveks ise ve $g(x)=x^{\rho}$ ise

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{f(a^{\rho})+f(b^{\rho})}{2}-\frac{\alpha\rho^{\alpha}\Gamma(\alpha+1)}{2(b^{\rho}-a^{\rho})^{\alpha}}\left[{}^{\rho}\mathcal{I}^{\alpha}_{a+}(f\circ g)(b)+{}^{\rho}\mathcal{I}^{\alpha}_{b-}(f\circ g)(a)\right]\right|\\
=\;&\frac{b^{\rho}-a^{\rho}}{\rho(\alpha+1)}\left(1-\frac{1}{2^{\rho(\alpha+1)}}\right)max\{|f'(a^{\rho})|\,|f'(b^{\rho})|\} \qquad (4.2.34)
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. Lemma 4.2.2 ve $|f'|$'nin *quasi*-konveksliği mutlak değer özellikleri ile kullanılırsa

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{f(a^{\rho})+f(b^{\rho})}{2}-\frac{\alpha\rho^{\alpha}\Gamma(\alpha+1)}{2(b^{\rho}-a^{\rho})^{\alpha}}\left[{}^{\rho}\mathcal{I}^{\alpha}_{a+}(f\circ g)(b)+{}^{\rho}\mathcal{I}^{\alpha}_{b-}(f\circ g)(a)\right]\right|\\
\leq\;&\frac{b^{\rho}-a^{\rho}}{2}\int_0^1|(1-t^{\rho})^{\alpha}-t^{\rho\alpha}|t^{\rho-1}|f'(t^{\rho}a^{\rho}+(1-t^{\rho})b^{\rho})|dt\\
\leq\;&\frac{b^{\rho}-a^{\rho}}{2}\int_0^1|(1-t^{\rho})^{\alpha}-t^{\rho\alpha}|t^{\rho-1}max\{|f'(a^{\rho})|\,|f'(b^{\rho})|\}dt\\
=\;&\frac{b^{\rho}-a^{\rho}}{2}max\{|f'(a^{\rho})|\,|f'(b^{\rho})|\}\\
&\times\left\{\int_0^{1/2^{1/\rho}}[(1-t^{\rho})^{\alpha}-t^{\rho\alpha}]t^{\rho-1}dt+\int_{1/2^{1/\rho}}^1[t^{\rho\alpha}+(1-t^{\rho})^{\alpha}]t^{\rho-1}dt\right\}\\
=\;&\frac{b^{\rho}-a^{\rho}}{\rho(\alpha+1)}\left(1-\frac{1}{2^{\alpha}}\right)max\{|f'(a^{\rho})|\,|f'(b^{\rho})|\}
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{1/2^{1/\rho}} [(1-t^\rho)^\alpha - t^{\rho\alpha}]t^{\rho-1}dt + \int_{1/2^{1/\rho}}^1 [t^{\rho\alpha} + (1-t^\rho)^\alpha]t^{\rho-1}dt \\
= \; & \frac{1}{\rho}\left\{ \int_0^{1/2} [(1-u)^\alpha - u^\alpha]\, du + \int_{1/2}^1 [u^\alpha - (1-u)^\alpha]\, du \right\} \\
= \; & \frac{2}{\rho(\alpha+1)}\left(1 - \frac{1}{2^\alpha}\right) \qquad (4.2.35)
\end{aligned}
$$

olarak hesaplanmıştır. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 4.2.8 (4.2.34) eşitsizliğinde $\rho \to 1$ için limit alınırsa (3.1.20) eşitsizliği elde edilir.

Teorem 4.2.9 $\alpha > 0$ ve $\rho > 0$ olsun. Ayrıca $f : [a^\rho, b^\rho] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $[a^\rho, b^\rho]$ aralığında diferansiyellenebilir ve $0 \leq a < b$ olsun. Eğer $|f'|^q$ fonksiyonu $[a^\rho, b^\rho]$'de *quasi*-konveks, $\frac{1}{s} + \frac{1}{q} = 1$, $g(x) = x^\rho$ ve $s > 1$ ise

$$
\begin{aligned}
&\left| \frac{f(a^\rho) + f(b^\rho)}{2} - \frac{\alpha\rho^\alpha\Gamma(\alpha+1)}{2(b^\rho - a^\rho)^\alpha} \left[{}^\rho\mathcal{I}^\alpha_{a+}(f\circ g)(b) + {}^\rho\mathcal{I}^\alpha_{b-}(f\circ g)(a) \right] \right| \\
= \; & \frac{b^\rho - a^\rho}{2} \left(max\{|f'(a^\rho)|^q, |f'(b^\rho)|^q\} \right)^{1/q} (K_1 + K_2)^{1/s} \qquad (4.2.36)
\end{aligned}
$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada

$$
\begin{aligned}
K_1 &= \frac{1}{\rho 2^{s+\frac{1-s}{\rho}}} B(s + \frac{1-s}{\rho}, \alpha s + 1), \\
K_2 &= \frac{\alpha s + 1}{2\rho} \, {}_2F_1\left(1 - s + \frac{s-1}{\rho}, 1; \alpha s + 2; \frac{1}{2}\right),
\end{aligned}
$$

şeklindedir.

İspat. Lemma 2.5.1, Lemma 4.2.2, Hölder eşitsizliği ve $|f'|$'nin *quasi*-konveksliği mutlak değer özellikleri ile kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
&\left| \frac{f(a^\rho) + f(b^\rho)}{2} - \frac{\alpha\rho^\alpha\Gamma(\alpha+1)}{2(b^\rho - a^\rho)^\alpha} \left[{}^\rho\mathcal{I}^\alpha_{a+}(f\circ g)(b) + {}^\rho\mathcal{I}^\alpha_{b-}(f\circ g)(a) \right] \right| \\
\leq \; & \frac{b^\rho - a^\rho}{2} \int_0^1 |(1-t^\rho)^\alpha - t^{\rho\alpha}| t^{\rho-1} |f'(t^\rho a^\rho + (1-t^\rho)b^\rho)| dt \\
\leq \; & \frac{b^\rho - a^\rho}{2} \left(\int_0^1 |(1-t^\rho)^\alpha - t^{\rho\alpha}|^s t^{s(\rho-1)} dt \right)^{1/s} \left(\int_0^1 |f'(t^\rho a^\rho + (1-t^\rho)b^\rho)|^q dt \right)^{1/q} \\
\leq \; & \frac{b^\rho - a^\rho}{2} \left(\int_0^1 |1 - 2t^\rho|^{\alpha s} t^{s(\rho-1)} dt \right)^{1/s} \left(max\{|f'(a^\rho)|^q, |f'(b^\rho)|^q\} \right)^{1/q} \\
= \; & \frac{b^\rho - a^\rho}{2} \left(max\{|f'(a^\rho)|^q, |f'(b^\rho)|^q\} \right)^{1/q} \\
& \times \left\{ \int_0^{1/2^{1/\rho}} (1 - 2t^\rho)^{\alpha s} t^{s(\rho-1)} dt + \int_{1/2^{1/\rho}}^1 (2t^\rho - 1)^{\alpha s} t^{s(\rho-1)} dt \right\}^{1/s} \\
= \; & \frac{b^\rho - a^\rho}{2} \left(max\{|f'(a^\rho)|^q, |f'(b^\rho)|^q\} \right)^{1/q} (K_1 + K_2)^{1/s} \qquad (4.2.37)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Burada

$$K_1 = \int_0^{1/2^{1/\rho}} (1-2t^\rho)^{\alpha s} t^{s(\rho-1)} dt = \frac{1}{\rho 2^{s+\frac{1-s}{\rho}}} \int_0^1 u^{s-1+\frac{1-s}{\rho}} (1-u)^{\alpha s} du \tag{4.2.38}$$

$$= \frac{1}{\rho 2^{s+\frac{1-s}{\rho}}} B\left(s + \frac{1-s}{\rho}, \alpha s + 1\right)$$

$$K_2 = \int_{1/2^{1/\rho}}^1 (2t^\rho - 1)^{\alpha s} t^{s(\rho-1)} dt = \frac{1}{2^{s+\frac{1-s}{\rho}} \rho} \int_0^1 u^{\alpha s} (1+u)^{s-1+\frac{1-s}{\rho}} du \tag{4.2.39}$$

$$= \frac{\alpha s + 1}{2\rho} {}_2F_1\left(1 - s + \frac{s-1}{\rho}, 1; \alpha s + 2; \frac{1}{2}\right)$$

olarak bulunur. Böylece (4.2.38) ve (4.2.39) ifadeleri (4.2.37)'de kullanılırsa istenen sonuç elde edilir. İspat tamamlanır.

Sonuç 4.2.9 (4.2.36) eşitsizliğinde $\rho \to 1$ için limit alınırsa (3.1.21) eşitsizliği elde edilir.

Teorem 4.2.10 $\alpha > 0$ ve $\rho > 0$ olsun. Ayrıca $f : [a^\rho, b^\rho] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $[a^\rho, b^\rho]$ aralığında diferansiyellenebilir ve $0 \leq a < b$ olsun. Eğer $|f'|^q$ fonksiyonu $[a^\rho, b^\rho]$'de *quasi*-konveks, $q \geq 1$ ve $g(x) = x^\rho$ ise

$$\left| \frac{f(a^\rho) + f(b^\rho)}{2} - \frac{\alpha \rho^\alpha \Gamma(\alpha+1)}{2(b^\rho - a^\rho)^\alpha} \left[{}^\rho\mathcal{I}^\alpha_{a+}(f \circ g)(b) + {}^\rho\mathcal{I}^\alpha_{b-}(f \circ g)(a) \right] \right|$$

$$\leq \frac{b^\rho - a^\rho}{\rho(\alpha+1)} \left(1 - \frac{1}{2^\alpha}\right) \left(max\{|f'(a^\rho)|^q, |f'(b^\rho)|^q\}\right)^{1/q} \tag{4.2.40}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. Lemma 4.2.2, $|f'|$'nin *quasi*-konveksliği ve power-mean eşitsizliği mutlak değer özellikleri ile beraber kullanılırsa

$$\left| \frac{f(a^\rho) + f(b^\rho)}{2} - \frac{\alpha \rho^\alpha \Gamma(\alpha+1)}{2(b^\rho - a^\rho)^\alpha} \left[{}^\rho\mathcal{I}^\alpha_{a+}(f \circ g)(b) + {}^\rho\mathcal{I}^\alpha_{b-}(f \circ g)(a) \right] \right|$$

$$\leq \frac{b^\rho - a^\rho}{2} \int_0^1 |(1-t^\rho)^\alpha - t^{\rho\alpha}| t^{\rho-1} |f'(t^\rho a^\rho + (1-t^\rho) b^\rho)| dt$$

$$\leq \frac{b^\rho - a^\rho}{2} \left(\int_0^1 |(1-t^\rho)^\alpha - t^{\rho\alpha}| t^{\rho-1} dt \right)^{1-1/q}$$

$$\times \left(\int_0^1 |(1-t^\rho)^\alpha - t^{\rho\alpha}| t^{\rho-1} |f'(t^\rho a^\rho + (1-t^\rho) b^\rho)|^q dt \right)^{1/q}$$

$$\leq \frac{b^\rho - a^\rho}{2} \left(\int_0^1 |(1-t^\rho)^\alpha - t^{\rho\alpha}| t^{\rho-1} dt \right)^{1-1/q}$$

$$\times \left(max\{|f'(a^\rho)|^q, |f'(b^\rho)|^q\}\right)^{1/q} \left(\int_0^1 |(1-t^\rho)^\alpha - t^{\rho\alpha}| t^{\rho-1} dt \right)^{1/q}$$

$$= \frac{b^\rho - a^\rho}{2} \left(\int_0^1 |(1-t^\rho)^\alpha - t^{\rho\alpha}| t^{\rho-1} dt \right) \left(max\{|f'(a^\rho)|^q, |f'(b^\rho)|^q\}\right)^{1/q}$$

elde edilir. (4.2.35) kullanılırsa istenen sonuç elde edilir.

Sonuç 4.2.10 (4.2.40) eşitsizliğinde $\rho \to 1$ için limit alınırsa (3.1.22) eşitsizliği elde edilir.

4.3 Genelleştirilmiş Katugampola Kesirli İntegralleri İçin Eşitsizlikler

Bu bölümde Genelleştirlmiş Katugampola kesirli integralleri ile elde edilen yeni Chebyshev tipli eşitsizlikler sunulmuştur.

Bu bölümde işlemlerin daha kısa tutulması için

$$\frac{\rho^{1-\beta}x^{\kappa}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x \frac{\tau^{\rho(\eta+1)-1}}{(x^\rho-\tau^\rho)^{1-\alpha}}d\tau = \frac{x^{\kappa+\rho(\eta+\alpha)}\,\Gamma(\eta+1)}{\rho^\beta\,\Gamma(\alpha+\eta+1)} := \Lambda_{x,\kappa}^{\rho,\beta}(\alpha,\eta) \tag{4.3.1}$$

$$\left(\alpha,\, x\in\mathbb{R}^+;\ \beta,\, \rho,\, \eta,\, \kappa\in\mathbb{R}\right)$$

ve

$$\left({}^\rho I_{0+,\eta,\kappa}^{\alpha,\beta}\varphi\right)(x) := \left({}^\rho I_{\eta,\kappa}^{\alpha,\beta}\varphi\right)(x) \tag{4.3.2}$$

tanımlamaları yapılmışır.

4.3.1 Chebyshev Tipli Eşitsizlikler

Teorem 4.3.1 $\beta,\kappa\in\mathbb{R}$, $x,\ \alpha,\ \rho\in\mathbb{R}^+$, ve $\eta\in\mathbb{R}_0^+$ olsun. Ayrıca f ve g $[0,\infty)$ aralığında aynı monotonluk derecesine sahip (senkronize) iki fonksiyon ve integrallenebilen olsun. O halde

$$\left({}^\rho I_{\eta,\kappa}^{\alpha,\beta}fg\right)(x) \geq \frac{1}{\Lambda_{x,\kappa}^{\rho,\beta}(\alpha,\eta)}\left({}^\rho I_{\eta,\kappa}^{\alpha,\beta}f\right)(x)\left({}^\rho I_{\eta,\kappa}^{\alpha,\beta}g\right)(x) \tag{4.3.3}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. f ve g fonksiyonları $[0,\infty)$ aralığında aynı monotonluğa sahip olduğundan

$$(f(\tau)-f(\xi))(g(\tau)-g(\xi))\geq 0 \quad \left(\tau,\,\xi\in\mathbb{R}_0^+\right),$$

ve devamında

$$f(\tau)g(\tau)+f(\xi)g(\xi)\geq f(\tau)g(\xi)+f(\xi)g(\tau) \quad \left(\tau,\,\xi\in\mathbb{R}_0^+\right) \tag{4.3.4}$$

yazılır. (4.3.4) eşitsizliğinin her iki yanı

$$\frac{\rho^{1-\beta}x^{\kappa}}{\Gamma(\alpha)}\frac{\tau^{\rho(\eta+1)-1}}{(x^\rho-\tau^\rho)^{1-\alpha}} \quad \left(x\in\mathbb{R}^+,\ 0<\tau<x\right)$$

ile çarpılır ve çıkan sonucun τ değişkeni için 0'dan and x'e integrali alınırsa

$$\begin{aligned}&\left({}^{\rho}I_{\eta,\kappa}^{\alpha,\beta}fg\right)(x)+f(\xi)g(\xi)\frac{\rho^{1-\beta}x^{\kappa}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x\frac{\tau^{\rho(\eta+1)-1}}{(x^\rho-\tau^\rho)^{1-\alpha}}d\tau\\ \geq\ & g(\xi)\frac{\rho^{1-\beta}x^{\kappa}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x\frac{\tau^{\rho(\eta+1)-1}}{(x^\rho-\tau^\rho)^{1-\alpha}}f(\tau)d\tau+f(\xi)\frac{\rho^{1-\beta}x^{\kappa}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x\frac{\tau^{\rho(\eta+1)-1}}{(x^\rho-\tau^\rho)^{1-\alpha}}g(\tau)d\tau\end{aligned}$$

elde edilir. (3.4.3), (4.3.1) ve (4.3.2) kullanılırsa

$$\left({}^{\rho}I_{\eta,\kappa}^{\alpha,\beta}fg\right)(x)+f(\xi)g(\xi)\ \Lambda_{x,\kappa}^{\rho,\beta}(\alpha,\eta)\geq g(\xi)\ \left({}^{\rho}I_{\eta,\kappa}^{\alpha,\beta}f\right)(x)+f(\xi)\ \left({}^{\rho}I_{\eta,\kappa}^{\alpha,\beta}g\right)(x) \tag{4.3.5}$$

elde edilir. (4.3.5) ifadesinin her iki yanı

$$\frac{\rho^{1-\beta}x^{\kappa}}{\Gamma(\alpha)}\frac{\xi^{\rho(\eta+1)-1}}{(x^\rho-\xi^\rho)^{1-\alpha}}\qquad\left(x\in\mathbb{R}^+,\ 0<\tau<x\right)$$

ile çarpılır ve çıkan sonucun her iki yanının ξ değişkeni için 0'dan x'e integrali alınırsa

$$\begin{aligned}&\left({}^{\rho}I_{\eta,\kappa}^{\alpha,\beta}fg\right)(x)\Lambda_{x,\kappa}^{\rho,\beta}(\alpha,\eta)+\Lambda_{x,\kappa}^{\rho,\beta}(\alpha,\eta)\ \left({}^{\rho}I_{\eta,\kappa}^{\alpha,\beta}fg\right)(x)\\ &\geq\left({}^{\rho}I_{\eta,\kappa}^{\alpha,\beta}f\right)(x)\ \left({}^{\rho}I_{\eta,\kappa}^{\alpha,\beta}g\right)(x)+\left({}^{\rho}I_{\eta,\kappa}^{\alpha,\beta}g\right)(x)\ \left({}^{\rho}I_{\eta,\kappa}^{\alpha,\beta}f\right)(x)\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan istenen sonuc elde edilir. İspat tamamlanır.

Sonuç 4.3.1 Teorem 4.3.1 için aşağıdaki özel durumlar elde edilir.

(i) $\kappa=0$, $\eta=0$ seçilir ve $\rho\to1$ için limit alınırsa (4.3.3) eşitsizliği (3.1.10) eşitsizliğine indirgenir.

(ii) $\beta=\alpha$, $\kappa=0$, $\eta=0$ seçilir ve $\rho\to0^+$ için limit alınırsa (4.3.3) eşitsizliği (3.2.3) eşitsizliğine indirgenir.

(iii) $\beta=0$ ve $\kappa=-\rho(\alpha+\eta)$ seçilirse (4.3.3) eşitsizliği (3.2.8) eşitsizliğine indirgenir.

(iv) $\beta=\alpha$, $\kappa=0$ ve $\eta=0$ alınırsa (4.3.3) eşitsizliği Katugampola kesirli integrali için

$$\left({}^{\rho}I_{0+}^{\alpha}fg\right)(x)\geq\frac{\rho^\alpha\Gamma(\alpha+1)}{x^{\rho\alpha}}\ \left({}^{\rho}I_{0+}^{\alpha}f\right)(x)\ \left({}^{\rho}I_{0+}^{\alpha}g\right)(x) \tag{4.3.6}$$

eşitsizliğine dönüşür.

Teorem 4.3.2 $\beta,\kappa\in\mathbb{R}$, x, α, ρ, $\sigma\in\mathbb{R}^+$ ve $\eta\in\mathbb{R}_0^+$ olsun. Ayrıca f ve g fonksiyonları $[0,\infty)$ aralığında aynı monotonluğa sahip ve integrallenebilen iki fonksiyon olsun. O halde

$$\begin{aligned}&\Lambda_{x,\kappa}^{\rho,\beta}(\sigma,\eta)\ \left({}^{\rho}I_{\eta,\kappa}^{\alpha,\beta}fg\right)(x)+\Lambda_{x,\kappa}^{\rho,\beta}(\alpha,\eta)\ \left({}^{\rho}I_{\eta,\kappa}^{\sigma,\beta}fg\right)(x)\\ \geq\ &\left({}^{\rho}I_{\eta,\kappa}^{\alpha,\beta}f\right)(x)\ \left({}^{\rho}I_{\eta,\kappa}^{\sigma,\beta}g\right)(x)+\left({}^{\rho}I_{\eta,\kappa}^{\sigma,\beta}f\right)(x)\ \left({}^{\rho}I_{\eta,\kappa}^{\alpha,\beta}g\right)(x)\end{aligned} \tag{4.3.7}$$

eşitsizliği elde edilir.

İspat. (4.3.5) ifadesinin her iki yanı

$$\frac{\rho^{1-\beta}x^{\kappa}}{\Gamma(\sigma)}\frac{\xi^{\rho(n+1)-1}}{(x^{\rho}-\xi^{\rho})^{1-\sigma}} \qquad \left(x\in\mathbb{R}^{+},\, 0<\xi<x\right)$$

ile çarpılır ve çıkan sonucun ξ değişkeni için 0'dan x'a integrali alınırsa ve Teorem 4.3.1'in ispatına benzer şekilde işlemler yapılırsa istenen sonuç elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 4.3.2 Teorem 4.3.2 için aşağıdaki özel durumlar elde edilir.

(i) $\kappa=0$, $\eta=0$ seçilir ve $\rho\to 1$ için limit alınırsa (4.3.7) eşitsizliği (3.1.11)

(ii) $\beta=\alpha$, $\kappa=0$, $\eta=0$ seçilir ve $\rho\to 0^{+}$ için limit alınırsa (4.3.7) eşitsizliği (3.2.4) eşitsizliğine indirgenir.

(iii) $\beta=0$ ve $\kappa=-\rho(\alpha+\eta)$ seçilirse (4.3.7) eşitsizliği (3.2.9) eşitsizliğine indirgenir.

(iv) $\beta=\alpha$, $\kappa=0$ ve $\eta=0$ alınırsa (4.3.3) eşitsizliği Katugampola kesirli integrali için

$$\begin{aligned}&\frac{\rho^{\alpha}\Gamma(\sigma+1)}{x^{\rho\sigma}}\left({}^{\rho}I^{\alpha}_{0+}fg\right)(x)+\frac{\rho^{\alpha}\Gamma(\alpha+1)}{x^{\rho\alpha}}\left({}^{\rho}I^{\sigma}_{0+}fg\right)(x)\\&\geq\left({}^{\rho}I^{\alpha}_{0+}f\right)(x)\left({}^{\rho}I^{\sigma}_{0+}g\right)(x)+\left({}^{\rho}I^{\sigma}_{0+}f\right)(x)\left({}^{\rho}I^{\alpha}_{0+}g\right)(x)\end{aligned}\tag{4.3.8}$$

eşitsizliğine dönüşür.

Teorem 4.3.3 $\beta,\kappa\in\mathbb{R}$, $x,\,\alpha,\,\rho\in\mathbb{R}^{+}$ ve $\eta\in\mathbb{R}^{+}_{0}$ olsun. Ayrıca

$$f_j:\mathbb{R}^{+}_{0}\to\mathbb{R}\quad(j=1,\ldots,n;\ n\in\mathbb{N})$$

artan fonksiyonlar olsun. O halde

$$\left({}^{\rho}I^{\alpha,\beta}_{\eta,\kappa}\prod_{j=1}^{n}f_j\right)(x)\geq\frac{1}{\left\{\Lambda^{\rho,\beta}_{x,\kappa}(\alpha,\eta)\right\}^{n-1}}\prod_{j=1}^{n}\left({}^{\rho}I^{\alpha,\beta}_{\eta,\kappa}f_j\right)(x)\quad(n\in\mathbb{N})\tag{4.3.9}$$

eşitsizliği elde edilir.

İspat. Bu teoremin ispatı $n\in\mathbb{N}$ için tümevarımla yapılacaktır. $n=1$ için (4.3.9) ifadesinin sağlandığı açıktır.

$n=2$ seçilirse $\mathbb{R}^{+}_{0}$'de artan f_1 ve f_2 fonksiyonları için

$$\left(f_1(\tau)-f_2(\xi)\right)\left(f_2(\tau)-f_2(\xi)\right)\geq 0\quad\left(\tau,\,\xi\in\mathbb{R}^{+}_{0}\right)$$

elde edilir. Teorem 4.3.1'den faydalanılarak $n = 2$ için ispat yapılır.

Varsayalımki (4.3.9) $n \in \mathbb{N}$ için doğru olsun. $f := \prod_{j=1}^{n} f_j$ fonksiyonu her artan f_j fonksiyonu için$\mathbb{R}_0^+$'de artan olur. $g := f_{n+1}$ alınır ve ardından f and g seçilirse Teorem 4.3.1'den

$$\left({}^{\rho}I_{\eta,\kappa}^{\alpha,\beta}\prod_{j=1}^{n} f_j \cdot f_{n+1}\right)(x) \geq \frac{1}{\Lambda_{x,\kappa}^{\rho,\beta}(\alpha,\eta)}\left({}^{\rho}I_{\eta,\kappa}^{\alpha,\beta}\prod_{j=1}^{n} f_j\right)(x)\cdot\left({}^{\rho}I_{\eta,\kappa}^{\alpha,\beta} f_{n+1}\right)(x)$$
$$\geq \frac{1}{\left\{\Lambda_{x,\kappa}^{\rho,\beta}(\alpha,\eta)\right\}^{n}}\prod_{j=1}^{n+1}\left({}^{\rho}I_{\eta,\kappa}^{\alpha,\beta} f_j\right)(x)$$

elde edilir. Buradan istenen sonuç elde edilir. İspat tamamlanır.

Sonuç 4.3.3 Teorem 4.3.3 için aşağıdaki özel durumlar elde edilir.

(i) $\kappa = 0$, $\eta = 0$ seçilir ve $\rho \to 1$ için limit alınırsa (4.3.9) eşitsizliği (3.1.12) eşitsizliğine indirgenir.

(ii) $\beta = \alpha$, $\kappa = 0$, $\eta = 0$ seçilir ve $\rho \to 0^+$ için limit alınırsa (4.3.9) eşitsizliği (3.2.5) eşitsizliğine indirgenir.

(iii) $\beta = 0$ ve $\kappa = -\rho(\alpha+\eta)$ seçilirse (4.3.9) eşitsizliği (3.2.10) eşitsizliğine indirgenir.

(iv) $\beta = \alpha$, $\kappa = 0$ ve $\eta = 0$ alınırsa (4.3.9) eşitsizliği Katugampola kesirli integrali için

$$\left({}^{\rho}I_{a+}^{\alpha}\prod_{j=1}^{n} f_j\right)(x) \geq \left(\frac{\rho^{\alpha}\Gamma(\alpha+1)}{x^{\rho\alpha}}\right)^{n-1}\prod_{j=1}^{n}\left({}^{\rho}I_{a+}^{\alpha} f_j\right)(x) \quad (n \in \mathbb{N}) \tag{4.3.10}$$

eşitsizliğine dönüşür.

Teorem 4.3.4 $\beta, \kappa \in \mathbb{R}$, x, α, $\rho \in \mathbb{R}^+$ ve $\eta \in \mathbb{R}_0^+$ olsun. Ayrıca f, $g : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ olmak üzere f fonksiyonu artan, g fonksiyonu diferansiyellenebilir ve g' alttan sınırlı olsun . O halde $m := \inf_{t\in\mathbb{R}_0^+} g'(t)$ ve $i(x) = x$ birim fonksiyonu için

$$\left({}^{\rho}I_{\eta,\kappa}^{\alpha,\beta} fg\right)(x) \geq \frac{1}{\Lambda_{x,\kappa}^{\rho,\beta}(\alpha,\eta)}\left({}^{\rho}I_{\eta,\kappa}^{\alpha,\beta} f\right)(x)\left({}^{\rho}I_{\eta,\kappa}^{\alpha,\beta} g\right)(x)$$
$$- \frac{mx\,\Gamma(\eta+1+\frac{1}{\rho})\Gamma(\eta+\alpha+1)}{\Gamma(\eta+\alpha+1+\frac{1}{\rho})\Gamma(\eta+1)}\left({}^{\rho}I_{\eta,\kappa}^{\alpha,\beta} f\right)(x) + m\left({}^{\rho}I_{\eta,\kappa}^{\alpha,\beta}\, i\cdot f\right)(x) \tag{4.3.11}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. $h(x) := g(x) - mx\ \left(x \in \mathbb{R}_0^+\right)$ fonksiyunu tanımlansın. h fonksiyonu $\mathbb{R}_0^+$'de diferansiyellenebilir ve artandır. Teorem 4.3.3'in ispatına benzer bir süreçte $p(x) := mx$ alınırsa

$$\begin{aligned}\left({}^\rho I_{\eta,\kappa}^{\alpha,\beta} f(g-p)\right)(x) &\geq \frac{1}{\Lambda_{x,\kappa}^{\rho,\beta}(\alpha,\eta)}\left({}^\rho I_{\eta,\kappa}^{\alpha,\beta} f\right)(x)\ \left({}^\rho I_{\eta,\kappa}^{\alpha,\beta}(g-p)\right)(x) \\ &= \frac{1}{\Lambda_{x,\kappa}^{\rho,\beta}(\alpha,\eta)}\left({}^\rho I_{\eta,\kappa}^{\alpha,\beta} f\right)(x)\ \left({}^\rho I_{\eta,\kappa}^{\alpha,\beta} g\right)(x) - \frac{1}{\Lambda_{x,\kappa}^{\rho,\beta}(\alpha,\eta)}\left({}^\rho I_{\eta,\kappa}^{\alpha,\beta} f\right)(x)\ \left({}^\rho I_{\eta,\kappa}^{\alpha,\beta} p\right)(x)\end{aligned} \tag{4.3.12}$$

bulunur. Beta fonksiyonunun tanımından

$$\left({}^\rho I_{\eta,\kappa}^{\alpha,\beta} p\right)(x) = \frac{m\, x^{\kappa+\rho(\alpha+\eta)+1}\, \Gamma\left(\eta + \frac{1}{\rho} + 1\right)}{\rho^\beta\, \Gamma\left(\alpha + \eta + \frac{1}{\rho} + 1\right)} \tag{4.3.13}$$

sonucu çıkar ve böylece

$$\left({}^\rho I_{\eta,\kappa}^{\alpha,\beta} f(g-p)\right)(x) = \left({}^\rho I_{\eta,\kappa}^{\alpha,\beta} fg\right)(x) - m\ \left({}^\rho I_{\eta,\kappa}^{\alpha,\beta} i \cdot f\right)(x) \tag{4.3.14}$$

elde edilir. Son olarak (4.3.13) ve (4.3.14) (4.3.12)'de kullanılırsa (4.3.11) elde edilir ve ispat tamamlanır.

Sonuç 4.3.4 Teorem 4.3.4 için aşağıdaki özel durumlar elde edilir.

(i) $\kappa = 0, \eta = 0$ seçilir ve $\rho \to 1$ için limit alınırsa (4.3.11) eşitsizliği (3.1.13) eşitsizliğine indirgenir.

(ii) $\beta = \alpha$, $\kappa = 0$ ve $\eta = 0$ alınırsa 4.3.11 eşitsizliği Katugampola kesirli integrali için

$$\begin{aligned}\left({}^\rho I_{a+}^\alpha fg\right)(x) \geq &\frac{\rho^\alpha \Gamma(\alpha+1)}{x^{\rho\alpha}}\left({}^\rho I_{a+}^\alpha f\right)(x)\ \left({}^\rho I_{a+}^\alpha g\right)(x) \\ &- \frac{mx\,\Gamma(1+\frac{1}{\rho})\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1+\frac{1}{\rho})}\left({}^\rho I_{a+}^\alpha f\right)(x) + m\ \left({}^\rho I_{a+}^\alpha i \cdot f\right)(x)\end{aligned} \tag{4.3.15}$$

eşitsizliğine dönüşür.

Aşağıda senkronize olmayan fonksiyonlar için bir lemma ve bir teorem verilmiştir.

Lemma 4.3.1 $\beta, \kappa \in \mathbb{R}$, $\alpha \geq 1$, $\rho \in \mathbb{R}^+$ ve $\eta \in \mathbb{R}_0^+$ olsun. Ayrıca $f,\ g : [a,b] \to \mathbb{R}$ için f fonksiyonu diferansiyellenebilir ve g integrallenebilir iki fonksiyon olsun., O halde

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{\alpha,\eta,\rho}^{a,x}(\tau) := &\left\{f(\tau) - \frac{1}{\tau-a}\int_a^\tau f(s)\,ds\right\} \\ &\times\left\{\frac{\tau^{\rho(\eta+1)-1}}{(x^\rho-\tau^\rho)^{1-\alpha}} g(\tau) - \frac{1}{\tau-a}\int_a^\tau \frac{s^{\rho(\eta+1)-1}}{(x^\rho-s^\rho)^{1-\alpha}}\, g(s)\,ds\right\}\end{aligned} \tag{4.3.16}$$

olmak üzere

$$\left({}^{\rho}I_{\eta,\kappa}^{\alpha,\beta}fg\right)(x) = \frac{1}{x-a}\int_a^x f(s)\,ds \cdot \left({}^{\rho}I_{\eta,\kappa}^{\alpha,\beta}g\right)(x) + \frac{\rho^{1-\beta}x^{\kappa}}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \mathcal{H}_{\alpha,\eta,\rho}^{a,x}(\tau)\,d\tau, \tag{4.3.17}$$

eşitliği geçerlidir.

İspat. Kısmi integrasyon yöntemiyle

$$\begin{aligned}
&\int_a^x f(\tau)\frac{\tau^{\rho(\eta+1)-1}}{(x^\rho-\tau^\rho)^{1-\alpha}}g(\tau)\,d\tau \\
&= \left(f(\tau)\int_a^\tau \frac{s^{\rho(\eta+1)-1}}{(x^\rho-s^\rho)^{1-\alpha}}g(s)\,ds\right)\Bigg|_a^x - \int_a^x \left(f^{'}(\tau)\int_a^\tau \frac{s^{\rho(\eta+1)-1}}{(x^\rho-s^\rho)^{1-\alpha}}g(s)\,ds\right)d\tau \qquad (4.3.18)\\
&= f(x)\int_a^x \frac{s^{\rho(\eta+1)-1}}{(x^\rho-s^\rho)^{1-\alpha}}g(s)\,ds - \int_a^x u(\tau)\,v'(\tau)\,d\tau
\end{aligned}$$

yazılabilir. Burada

$$u(\tau) := \frac{1}{\tau-a}\int_a^\tau \frac{s^{\rho(\eta+1)-1}}{(x^\rho-s^\rho)^{1-\alpha}}g(s)\,ds \quad \text{and} \quad v'(\tau) := (\tau-a)f^{'}(\tau) \tag{4.3.19}$$

seçilirse

$$u^{'}(\tau) = -\frac{1}{(\tau-a)^2}\int_a^\tau \frac{s^{\rho(\eta+1)-1}}{(x^\rho-s^\rho)^{1-\alpha}}g(s)\,ds + \frac{\tau^{\rho(\eta+1)-1}}{(\tau-a)(x^\rho-\tau^\rho)^{1-\alpha}}g(\tau) \tag{4.3.20}$$

bulunur

$$v(\tau) = \int_a^\tau (s-a)\,f^{'}(s)\,ds = (\tau-a)\,f(\tau) - \int_a^\tau f(s)\,ds \tag{4.3.21}$$

ve buradan

$$\int_a^x u(\tau)\,v'(\tau)\,d\tau = u(\tau)\,v(\tau)\Big|_a^x - \int_a^x u'(\tau)\,v(\tau)\,d\tau \tag{4.3.22}$$

elde edilir. (4.3.19), (4.3.20) ve (4.3.21) ifadeleri (4.3.22)'de yazılırsa

$$\begin{aligned}
\int_a^x u(\tau)\,v'(\tau)\,d\tau &= \int_a^x \frac{s^{\rho(\eta+1)-1}}{(x^\rho-s^\rho)^{1-\alpha}}g(s)\,ds\left\{f(x) - \frac{1}{x-a}\int_a^x f(s)\,ds\right\}\\
&\quad + \int_a^x \left\{\frac{1}{\tau-a}\int_a^\tau \frac{s^{\rho(\eta+1)-1}}{(x^\rho-s^\rho)^{1-\alpha}}g(s)\,ds - \frac{\tau^{\rho(\eta+1)-1}}{(x^\rho-\tau^\rho)^{1-\alpha}}\,g(\tau)\right\} \qquad (4.3.23)\\
&\quad\quad \times\left\{f(\tau) - \frac{1}{\tau-a}\int_a^\tau f(s)\,ds\right\}d\tau
\end{aligned}$$

elde edilir. (4.3.23), (4.3.18)'de yerine yazılır ve çıkan sonucun her iki tarafı $\frac{\rho^{1-\beta}x^{\kappa}}{\Gamma(\alpha)}$ ile çarpılır ise istenen sonuç elde edilir.

Teorem 4.3.5 $\beta, \kappa \in \mathbb{R}$, $\alpha \geq 1$, $\rho \in \mathbb{R}^+$ ve $\eta \in \mathbb{R}_0^+$ olsun. Ayrıca f, $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ için f diferansiyellenebilir ve g integrallenebilir iki fonksiyon olsun. Eğer $\mathcal{H}^{a,x}_{\alpha,\eta,\rho}(\tau) \geq 0$ $(\tau \in (a,b])$ ve $x \in (a,b]$ alınırsa

$$\frac{1}{x-a}\left({}^{\rho}I^{\alpha,\beta}_{\eta,\kappa} fg\right)(x) \geq \left\{\frac{1}{x-a}\int_a^x f(s)\,ds\right\}\left\{\frac{1}{x-a}\left({}^{\rho}I^{\alpha,\beta}_{\eta,\kappa} g\right)(x)\right\} \tag{4.3.24}$$

eşitsizliği elde edilir.

İspat. Lemma 4.3.1'den açık bir şekilde elde edilir.

Sonuç 4.3.5 Teorem 4.3.5 için aşağıdaki özel durumlar elde edilir.

(i) $\kappa = 0$, $\eta = 0$ seçilir ve $\rho \to 1$ için limit alınırsa 4.3.24 eşitsizliği 3.1.14 eşitsizliğine indirgenir.

(ii) $\beta = 0$ ve $\kappa = -\rho(\alpha + \eta)$ seçilirse

$$\frac{1}{x-a}\left(I^{\alpha}_{a+,\sigma,\eta} fg\right)(x) \geq \left\{\frac{1}{x-a}\int_a^x f(s)\,ds\right\}\left\{\frac{1}{x-a}\left(I^{\alpha}_{a+\sigma,\eta} g\right)(x)\right\} \tag{4.3.25}$$

elde edilir.

(iii) Teorem 4.3.5'de $\beta = \alpha$, $\kappa = 0$, $\eta = 0$ seçilir ve $\rho \to 0+$ için L'Hôpital kuralı yardımıyla limit alınırsa

$$\frac{1}{x-a}\left(H^{\alpha}_{a+} fg\right)(x) \geq \left\{\frac{1}{x-a}\int_a^x f(s)\,ds\right\}\left\{\frac{1}{x-a}\left(H^{\alpha}_{a+} g\right)(x)\right\} \tag{4.3.26}$$

elde edilir.

(iv) Teorem 4.3.5'de $\beta = \alpha$, $\kappa = 0$ $\eta = 0$ seçilirse

$$\frac{1}{x-a}\left({}^{\rho}I^{\alpha}_{a+} fg\right)(x) \geq \left\{\frac{1}{x-a}\int_a^x f(s)\,ds\right\}\left\{\frac{1}{x-a}\left({}^{\rho}I^{\alpha}_{a+} g\right)(x)\right\} \tag{4.3.27}$$

elde edilir.

Teorem 4.3.6 $\beta, \gamma, \kappa, \lambda \in \mathbb{R}$, x, α, σ, $\rho \in \mathbb{R}^+$ ve $\eta, \nu \in \mathbb{R}_0^+$ olsun. p ve q $[0,\infty)$ aralığında pozitif fonksiyonlar, f ve g aynı aralıkta iki diferansiyellenebilir fonksiyon olsun. Eğer

$f' \in L_r[0,\infty)$, $g' \in L_s[0,\infty)$, $\frac{1}{r}+\frac{1}{s}=1$, $r>1$ ise

$$\begin{aligned}
&\Big| \left({}^{\rho}I^{\alpha,\beta}_{\eta,\kappa}p\right)(x)\ \left({}^{\rho}I^{\sigma,\gamma}_{\nu,\lambda}qfg\right)(x) + \left({}^{\rho}I^{\sigma,\gamma}_{\nu,\lambda}q\right)(x)\ \left({}^{\rho}I^{\alpha,\beta}_{\eta,\kappa}pfg\right)(x) \\
&\qquad - \left({}^{\rho}I^{\alpha,\beta}_{\eta,\kappa}pf\right)(x)\left({}^{\rho}I^{\sigma,\gamma}_{\nu,\lambda}qg\right)(x) - \left({}^{\rho}I^{\alpha,\beta}_{\eta,\kappa}pg\right)(x)\left({}^{\rho}I^{\sigma,\gamma}_{\nu,\lambda}qf\right)(x)\Big| \\
&\leq \frac{\rho^{2-\beta-\gamma}x^{\kappa+\lambda}\|f'\|_r\|g'\|_s}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\sigma)} \\
&\quad \times\left[\int_0^x\int_0^x \frac{\tau^{\rho(\eta+1)-1}}{(x^\rho-\tau^\rho)^{1-\alpha}}\frac{\xi^{\rho(\nu+1)-1}}{(x^\rho-\xi^\rho)^{1-\sigma}}p(\tau)q(\xi)|\tau-\xi|d\tau d\xi\right] \\
&\leq \|f'\|_r\|g'\|_s x\left({}^{\rho}I^{\alpha,\beta}_{\eta,\kappa}p\right)(x)\left({}^{\rho}I^{\sigma,\gamma}_{\nu,\lambda}q\right)(x). \qquad (4.3.28)
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat.

$$H(\tau,\xi) := (f(\tau)-f(\xi))\,(g(\tau)-g(\xi)) \qquad \tau,\xi\in(0,t),\ t>0 \qquad (4.3.29)$$

fonksiyonu tanımlansın. (4.3.29) ifadesinin her iki tarafı

$$\frac{\rho^{1-\beta}x^\kappa}{\Gamma(\alpha)}\frac{\tau^{\rho(\eta+1)-1}}{(x^\rho-\tau^\rho)^{1-\alpha}}p(\tau) \quad \left(x\in\mathbb{R}^+,\ 0<\tau<x\right)$$

ile çarpılır ve çıkan sonucun her iki tarafının τ değişkenine göre 0'dan x'e integrali alınırsa

$$\begin{aligned}
&\frac{\rho^{1-\beta}x^\kappa}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x \frac{\tau^{\rho(\eta+1)-1}}{(x^\rho-\tau^\rho)^{1-\alpha}}p(\tau)H(\tau,\xi)d\tau \\
=\ &\left({}^{\rho}I^{\alpha,\beta}_{\eta,\kappa}pfg\right)(x) - g(\xi)\ \left({}^{\rho}I^{\alpha,\beta}_{\eta,\kappa}pf\right)(x) \\
&-f(\xi)\ \left({}^{\rho}I^{\alpha,\beta}_{\eta,\kappa}pg\right)(x) + f(\xi)g(\xi)\ \left({}^{\rho}I^{\alpha,\beta}_{\eta,\kappa}p\right)(x) \qquad (4.3.30)
\end{aligned}$$

elde edilir. (4.3.30) eşitliğinin her iki tarafı

$$\frac{\rho^{1-\gamma}x^\lambda}{\Gamma(\sigma)}\frac{\xi^{\rho(\nu+1)-1}}{(x^\rho-\xi^\rho)^{1-\sigma}}q(\xi) \quad \left(x\in\mathbb{R}^+,\ 0<\xi<x\right)$$

ile çarpılır ve çıkan sonucun ξ değişkenine göre 0'dan x'e göre integrali alınırsa

$$\begin{aligned}
&\frac{\rho^{2-\beta-\gamma}x^{\kappa+\lambda}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\sigma)}\int_0^x\int_0^x \frac{\tau^{\rho(\eta+1)-1}}{(x^\rho-\tau^\rho)^{1-\alpha}}\frac{\xi^{\rho(\nu+1)-1}}{(x^\rho-\xi^\rho)^{1-\sigma}}p(\tau)q(\xi)H(\tau,\xi)d\tau d\xi \\
=\ &\left({}^{\rho}I^{\alpha,\beta}_{\eta,\kappa}p\right)(x)\ \left({}^{\rho}I^{\sigma,\gamma}_{\nu,\lambda}qfg\right)(x) + \left({}^{\rho}I^{\sigma,\gamma}_{\nu,\lambda}q\right)(x)\ \left({}^{\rho}I^{\alpha,\beta}_{\eta,\kappa}pfg\right)(x) \\
&-\left({}^{\rho}I^{\sigma,\gamma}_{\nu,\lambda}qg\right)(x)\ \left({}^{\rho}I^{\alpha,\beta}_{\eta,\kappa}pf\right)(x) - \left({}^{\rho}I^{\sigma,\gamma}_{\nu,\lambda}qf\right)(x)\ \left({}^{\rho}I^{\alpha,\beta}_{\eta,\kappa}pg\right)(x) \qquad (4.3.31)
\end{aligned}$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$H(\tau,\xi) = \int_\xi^\tau\int_\xi^\tau f'(y)g'(z)dydz$$

yazılabilir ve iki katlı integraller için Hölder eşitsizliği kullanılarak

$$|H(\tau,\xi)| \le \left|\int_\xi^\tau\int_\xi^\tau |f'(y)|^r dydz\right|^{r^{-1}} \left|\int_\xi^\tau\int_\xi^\tau |g'(z)|^s dydz\right|^{s^{-1}}$$

elde edilir.

$$\left|\int_\xi^\tau\int_\xi^\tau |f'(y)|^r dydz\right|^{r^{-1}} = |\tau-\xi|^{r^{-1}}\left|\int_\xi^\tau |f'(y)|^r dy\right|^{r^{-1}}$$

ve

$$\left|\int_\xi^\tau\int_\xi^\tau |g'(z)|^s dydz\right|^{s^{-1}} = |\tau-\xi|^{s^{-1}}\left|\int_\xi^\tau |g'(z)|^s dz\right|^{s^{-1}}$$

olduğundan

$$|H(\tau,\xi)| \le |\tau-\xi|\left|\int_\xi^\tau |f'(y)|^r dy\right|^{r^{-1}} \left|\int_\xi^\tau |g'(z)|^s dz\right|^{s^{-1}} \tag{4.3.32}$$

yazılabilir. (4.3.32) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
&\frac{\rho^{2-\beta-\gamma}x^{\kappa+\lambda}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\sigma)}\int_0^x\int_0^x \frac{\tau^{\rho(\eta+1)-1}}{(x^\rho-\tau^\rho)^{1-\alpha}}\frac{\xi^{\rho(\nu+1)-1}}{(x^\rho-\xi^\rho)^{1-\sigma}}p(\tau)q(\xi)|H(\tau,\xi)|d\tau d\xi \\
&\qquad\le \frac{\rho^{2-\beta-\gamma}x^{\kappa+\lambda}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\sigma)}\int_0^x\int_0^x \frac{\tau^{\rho(\eta+1)-1}}{(x^\rho-\tau^\rho)^{1-\alpha}}\frac{\xi^{\rho(\nu+1)-1}}{(x^\rho-\xi^\rho)^{1-\sigma}}p(\tau)q(\xi) \\
&\qquad\quad \times|\tau-\xi|\left|\int_\xi^\tau |f'(y)|^r dy\right|^{r^{-1}} \left|\int_\xi^\tau |g'(z)|^s dz\right|^{s^{-1}} d\tau d\xi
\end{aligned} \tag{4.3.33}$$

bulunur. Diğer taraftan

$$\left|\int_\xi^\tau |f'(y)|^r dy\right| \le \|f'\|_r$$

ve

$$\left|\int_\xi^\tau |g'(z)|^s dz\right| \le \|g'\|_s,$$

kullanılırsa

$$\begin{aligned}
&\frac{\rho^{2-\beta-\gamma}x^{\kappa+\lambda}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\sigma)}\int_0^x\int_0^x \frac{\tau^{\rho(\eta+1)-1}}{(x^\rho-\tau^\rho)^{1-\alpha}}\frac{\xi^{\rho(\nu+1)-1}}{(x^\rho-\xi^\rho)^{1-\sigma}}p(\tau)q(\xi)|H(\tau,\xi)|d\tau d\xi \\
\le\ &\frac{\rho^{2-\beta-\gamma}x^{\kappa+\lambda}\|f'\|_r\|g'\|_s}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\sigma)} \\
&\times\left[\int_0^x\int_0^x \frac{\tau^{\rho(\eta+1)-1}}{(x^\rho-\tau^\rho)^{1-\alpha}}\frac{\xi^{\rho(\nu+1)-1}}{(x^\rho-\xi^\rho)^{1-\sigma}}p(\tau)q(\xi)|\tau-\xi|d\tau d\xi\right]
\end{aligned} \tag{4.3.34}$$

elde edilir. (4.3.31) ve (4.3.34) ile mutlak değer özellikleri kullanılırsa ilk eşitsizlik olan (4.3.28) ispatlanmış olur. Öte yandan

$$0 \le \tau \le x, \quad 0 \le \xi \le x$$

olduğundan

$$0 \le |\tau-\xi| \le x$$

yazılabilir. Böylece (4.3.34)'den

$$\begin{aligned}
&\frac{\rho^{2-\beta-\gamma}x^{\kappa+\lambda}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\sigma)}\int_0^x\int_0^x\frac{\tau^{\rho(\eta+1)-1}}{(x^\rho-\tau^\rho)^{1-\alpha}}\frac{\xi^{\rho(\nu+1)-1}}{(x^\rho-\xi^\rho)^{1-\sigma}}p(\tau)q(\xi)|H(\tau,\xi)|d\tau d\xi\\
\leq\;& \frac{\rho^{2-\beta-\gamma}x^{\kappa+\lambda}\|f'\|_r\|g'\|_s}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\sigma)}\\
&\times\left[\int_0^x\int_0^x\frac{\tau^{\rho(\eta+1)-1}}{(x^\rho-\tau^\rho)^{1-\alpha}}\frac{\xi^{\rho(\nu+1)-1}}{(x^\rho-\xi^\rho)^{1-\sigma}}p(\tau)q(\xi)d\tau d\xi\right]\\
\leq\;& \|f'\|_r\|g'\|_s x\left({}^\rho I_{\eta,\kappa}^{\alpha,\beta}p\right)(x)\left({}^\rho I_{\nu,\lambda}^{\sigma,\gamma}q\right)(x)
\end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

Sonuç 4.3.1 Teorem 4.3.6'de $p(x)=q(x)$ alınırsa

$$\begin{aligned}
&\Big|\left({}^\rho I_{\eta,\kappa}^{\alpha,\beta}p\right)(x)\left({}^\rho I_{\nu,\lambda}^{\sigma,\gamma}pfg\right)(x)+\left({}^\rho I_{\nu,\lambda}^{\sigma,\gamma}p\right)(x)\left({}^\rho I_{\eta,\kappa}^{\alpha,\beta}pfg\right)(x)\\
&\qquad-\left({}^\rho I_{\eta,\kappa}^{\alpha,\beta}pf\right)(x)\left({}^\rho I_{\nu,\lambda}^{\sigma,\gamma}pg\right)(x)-\left({}^\rho I_{\eta,\kappa}^{\alpha,\beta}pg\right)(x)\left({}^\rho I_{\nu,\lambda}^{\sigma,\gamma}pf\right)(x)\Big|\\
&\leq\frac{\rho^{2-\beta-\gamma}x^{\kappa+\lambda}\|f'\|_r\|g'\|_s}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\sigma)}\\
&\quad\times\left[\int_0^x\int_0^x\frac{\tau^{\rho(\eta+1)-1}}{(x^\rho-\tau^\rho)^{1-\alpha}}\frac{\xi^{\rho(\nu+1)-1}}{(x^\rho-\xi^\rho)^{1-\sigma}}p(\tau)p(\xi)|\tau-\xi|d\tau d\xi\right]\\
&\leq\|f'\|_r\|g'\|_s x\left({}^\rho I_{\eta,\kappa}^{\alpha,\beta}p\right)(x)\left({}^\rho I_{\nu,\lambda}^{\sigma,\gamma}p\right)(x).
\end{aligned}$$

elde edilir.

Sonuç 4.3.2 Sonuç 4.3.1'de $\alpha=\sigma$, $\eta=\nu$, $\kappa=\lambda$ ve $\beta=\gamma$ alınırsa (4.3.28) eşitsizliği

$$\begin{aligned}
&2\left|\left({}^\rho I_{\eta,\kappa}^{\alpha,\beta}p\right)(x)\left({}^\rho I_{\eta,\kappa}^{\alpha,\beta}pfg\right)(x)-\left({}^\rho I_{\eta,\kappa}^{\alpha,\beta}pf\right)(x)\left({}^\rho I_{\eta,\kappa}^{\alpha,\beta}pg\right)(x)\right|\\
\leq\;&\frac{\rho^{1-\beta}x^{\kappa}\|f'\|_r\|g'\|_s}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\sigma)}\\
&\times\left[\int_0^x\int_0^x\frac{\tau^{\rho(\eta+1)-1}}{(x^\rho-\tau^\rho)^{1-\alpha}}\frac{\xi^{\rho(\eta+1)-1}}{(x^\rho-\xi^\rho)^{1-\sigma}}p(\tau)p(\xi)|\tau-\xi|d\tau d\xi\right]\\
\leq\;&\|f'\|_r\|g'\|_s x\left(\left({}^\rho I_{\eta,\kappa}^{\alpha,\beta}p\right)(x)\right)^2
\end{aligned}$$

elde edilir.

Sonuç 4.3.6 Sonuç 4.3.1'de $\kappa=\lambda=0$, $\eta=\nu=0$, $\beta=\gamma$ ve $\rho=1$ alınırsa (3.1.35) eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 4.3.7 Sonuç 4.3.2'de $\kappa=0$, $\eta=0$ ve $\rho=1$ alınırsa (3.1.34) eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 4.3.3 Teorem 4.3.6'de $\alpha = \beta$, $\sigma = \gamma$, $\kappa = \lambda = 0$ ve $\eta = \nu = 0$ alınırsa

$$\begin{aligned}
& \left({}^\rho I^\alpha_{0+} p\right)(x) \ \left({}^\rho I^\sigma_{0+} qfg\right)(x) + \left({}^\rho I^\sigma_{0+} q\right)(x) \ \left({}^\rho I^\alpha_{0+} pfg\right)(x) \\
& - \left({}^\rho I^\alpha_{0+} pf\right)(x) \ \left({}^\rho I^\sigma_{0+} qg\right)(x) - \left({}^\rho I^\alpha_{0+} pg\right)(x) \ \left({}^\rho I^\sigma_{0+} qf\right)(x) \\
\leq \ & \frac{\rho^{1-\beta-\gamma} x^{\kappa+\gamma} \|f'\|_r \|g'\|_s}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\sigma)} \\
& \times \left[\int_0^x \int_0^x \frac{\tau^{\rho-1}}{(x^\rho - \tau^\rho)^{1-\alpha}} \frac{\xi^{\rho-1}}{(x^\rho - \xi^\rho)^{1-\sigma}} p(\tau) q(\xi) |\tau - \xi| d\tau d\xi \right] \\
\leq \ & \|f'\|_r \|g'\|_s x \left({}^\rho I^\alpha_{0+} p\right)(x) \left({}^\rho I^\sigma_{0+} q\right)(x)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Sonuç 4.3.4 Teorem 4.3.6'de $\beta = \gamma = 0$, $\kappa = -\rho(\alpha + \eta)$ ve $\lambda = -\rho(\sigma + \nu)$ alınırsa

$$\begin{aligned}
& \left(I^\alpha_{0+,\rho,\eta} p\right)(x) \ \left(I^\sigma_{0+,\rho,\eta} qfg\right)(x) + \left(I^\sigma_{0+,\rho,\eta} q\right)(x) \ \left(I^\alpha_{0+,\rho,\eta,} pfg\right)(x) \\
& - \left(I^\alpha_{0+,\rho,\eta} pf\right)(x) \ \left(I^\sigma_{0+,\rho,\eta} qg\right)(x) - \left(I^\alpha_{0+,\rho,\eta} pg\right)(x) \ \left(I^\sigma_{0+,\rho,\eta} qf\right)(x) \\
\leq \ & \frac{\rho x^{-\rho(\alpha+\eta)} \|f'\|_r \|g'\|_s}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\sigma)} \\
& \times \left[\int_0^x \int_0^x \frac{\tau^{\rho(\eta+1)-1}}{(x^\rho - \tau^\rho)^{1-\alpha}} \frac{\xi^{\rho(\eta+1)-1}}{(x^\rho - \xi^\rho)^{1-\sigma}} p(\tau) q(\xi) |\tau - \xi| d\tau d\xi \right] \\
\leq \ & \|f'\|_r \|g'\|_s x \left(I^\alpha_{0+,\rho,\eta} p\right)(x) \left(I^\sigma_{0+,\rho,\eta,} q\right)(x)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Katugampola kesirli integralinin klasik Erdélyi-Kober kesirli integrali ile karşılaştırıldığında en önemli sonuçlarından biride basit bir $\rho \to 0^+$ hesabıyla Hadamard kesirli integraline indirgenmesidir. Sonuç olarak $\alpha = \beta$, $\sigma = \gamma$ ve $\eta = \nu = 0$ alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.3.5 α, σ ve $x \in \mathbb{R}^+$, p ve q, $[0, \infty)$ aralığında pozitif birer fonksiyon ve f ile g aynı aralıkta diferansiyellenebilir iki fonksiyon olsun. Eğer $f' \in L_r[0, \infty)$, $g' \in L_s[0, \infty)$, $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$ ve $r > 1$ ise Hadamard kesirli integralleri için

$$\begin{aligned}
& \Big| \left(H^\alpha_{0+} p\right)(x) \left(H^\sigma_{0+} qfg\right)(x) + \left(H^\sigma_{0+} q\right)(x) \left(H^\alpha_{0+} pfg\right)(x) \\
& \qquad - \left(H^\alpha_{0+} pf\right)(x) \left(H^\sigma_{0+} qg\right)(x) - \left(H^\alpha_{0+} pg\right)(x) \left(H^\sigma_{0+} qf\right)(x) \Big| \\
& \leq \frac{\|f'\|_r \|g'\|_s}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\sigma)} \int_0^x \int_0^x \left(\log \frac{x}{\tau}\right)^{\alpha-1} \left(\log \frac{x}{\xi}\right)^{\sigma-1} \frac{p(\tau)}{\tau} \frac{q(\xi)}{\xi} |\tau - \xi| d\tau d\xi \\
& \leq \|f'\|_r \|g'\|_s x \left(H^\alpha_{0+} p\right)(x) \left(H^\sigma_{0+} q\right)(x), \qquad (4.3.35)
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

Teorem 4.3.7 $\beta,\gamma,\kappa,\lambda\in\mathbb{R}$, $x,\alpha,\sigma,\rho\in\mathbb{R}^+$ ve $\eta,\nu\in\mathbb{R}_0^+$ olsun. p ve q, $[0,\infty)$ aralığında tanımlı pozitif değerli iki fonksiyon, f ve g aynı aralıkta tanımlı aynı monotonluğa sahip diferansiyellenebilir iki fonksiyon olsun. Eğer $f',g'\in L_\infty[0,\infty)$ ise

$$\begin{aligned}
0 \leq\ & \left({}^\rho I_{\eta,\kappa}^{\alpha,\beta}p\right)(x)\ \left({}^\rho I_{\nu,\lambda}^{\sigma,\gamma}qfg\right)(x)+\left({}^\rho I_{\nu,\lambda}^{\sigma,\gamma}q\right)(x)\ \left({}^\rho I_{\eta,\kappa}^{\alpha,\beta}pfg\right)(x) \\
& -\left({}^\rho I_{\eta,\kappa}^{\alpha,\beta}pf\right)(x)\ \left({}^\rho I_{\nu,\lambda}^{\sigma,\gamma}qg\right)(x)-\left({}^\rho I_{\eta,\kappa}^{\alpha,\beta}pg\right)(x)\ \left({}^\rho I_{\nu,\lambda}^{\sigma,\gamma}qf\right)(x) \\
\leq\ & \|f'\|_\infty\|g'\|_\infty\Bigg[\left({}^\rho I_{\eta,\kappa}^{\alpha,\beta}x^2p\right)(x)\left({}^\rho I_{\nu,\lambda}^{\sigma,\gamma}q\right)(x)-2\left({}^\rho I_{\eta,\kappa}^{\alpha,\beta}xp\right)\left({}^\rho I_{\nu,\lambda}^{\sigma,\gamma}xq\right)(x) \\
& +\left({}^\rho I_{\nu,\lambda}^{\sigma,\gamma}x^2q\right)(x)\left({}^\rho I_{\eta,\kappa}^{\alpha,\beta}p\right)(x)\Bigg] \qquad (4.3.36)
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat.

$$H(\tau,\xi):=\left(f(\tau)-f(\xi)\right)\left(g(\tau)-g(\xi)\right) \qquad \tau,\xi\in(0,t),\ t>0 \qquad (4.3.37)$$

fonksiyonu tanımlansın. Buradan

$$H(\tau,\xi)\geq 0$$

olduğu açıktır.
(4.3.31)'den

$$\begin{aligned}
& \frac{\rho^{2-\beta-\gamma}x^{\kappa+\lambda}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\sigma)}\int_0^x\int_0^x\frac{\tau^{\rho(\eta+1)-1}}{(x^\rho-\tau^\rho)^{1-\alpha}}\frac{\xi^{\rho(\nu+1)-1}}{(x^\rho-\xi^\rho)^{1-\sigma}}p(\tau)q(\xi)H(\tau,\xi)d\tau d\xi \\
=\ & \left({}^\rho I_{\eta,\kappa}^{\alpha,\beta}p\right)(x)\ \left({}^\rho I_{\nu,\lambda}^{\sigma,\gamma}qfg\right)(x)+\left({}^\rho I_{\nu,\lambda}^{\sigma,\gamma}q\right)(x)\ \left({}^\rho I_{\eta,\kappa}^{\alpha,\beta}pfg\right)(x) \\
& -\left({}^\rho I_{\nu,\lambda}^{\sigma,\gamma}qg\right)(x)\ \left({}^\rho I_{\eta,\kappa}^{\alpha,\beta}pf\right)(x)-\left({}^\rho I_{\nu,\lambda}^{\sigma,\gamma}qf\right)(x)\ \left({}^\rho I_{\eta,\kappa}^{\alpha,\beta}pg\right)(x) \\
\geq\ & 0 \qquad (4.3.38)
\end{aligned}$$

bulunur.

Diğer taraftan

$$H(\tau,\xi)=\int_\xi^\tau\int_\xi^\tau f'(y)g'(z)dydz.$$

ve böylece

$$H(\tau,\xi)\leq\left|\int_\xi^\tau f'(y)dy\right|\left|\int_\xi^\tau g'(z)dz\right|\leq\|f'\|_\infty\|g'\|_\infty(\tau-\xi)^2$$

yazılabilir. Dolayısıyla

$$
\begin{aligned}
& \frac{\rho^{2-\beta-\gamma}x^{\kappa+\lambda}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\sigma)}\int_0^x\int_0^x \frac{\tau^{\rho(\eta+1)-1}}{(x^\rho-\tau^\rho)^{1-\alpha}}\frac{\xi^{\rho(\nu+1)-1}}{(x^\rho-\xi^\rho)^{1-\sigma}}p(\tau)q(\xi)H(\tau,\xi)d\tau d\xi \\
\leq\ & \frac{\rho^{2-\beta-\gamma}x^{\kappa+\lambda}\|f'\|_\infty\|g'\|_\infty}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\sigma)} \\
& \times\left[\int_0^x\int_0^x \frac{\tau^{\rho(\eta+1)-1}}{(x^\rho-\tau^\rho)^{1-\alpha}}\frac{\xi^{\rho(\nu+1)-1}}{(x^\rho-\xi^\rho)^{1-\sigma}}p(\tau)q(\xi)(\tau^2-2\tau\xi+\xi^2)d\tau d\xi\right] \\
=\ & \|f'\|_\infty\|g'\|_\infty\Big[\left({}^\rho I^{\alpha,\beta}_{\eta,\kappa}x^2p\right)(x)\left({}^\rho I^{\sigma,\gamma}_{\nu,\lambda}q\right)(x)-2\left({}^\rho I^{\alpha,\beta}_{\eta,\kappa}xp\right)\left({}^\rho I^{\sigma,\gamma}_{\nu,\lambda}xq\right)(x) \\
& +\left({}^\rho I^{\sigma,\gamma}_{\nu,\lambda}x^2q\right)(x)\left({}^\rho I^{\alpha,\beta}_{\eta,\kappa}p\right)(x)\Big] \qquad (4.3.39)
\end{aligned}
$$

elde edilir. (4.3.38) ve (4.3.39) kullanılırsa istenen sonuç elde edilir.

Sonuç 4.3.6 Teorem 4.3.7'de $p(x)=q(x)$ alınırsa

$$
\begin{aligned}
0\ \leq\ & \left({}^\rho I^{\alpha,\beta}_{\eta,\kappa}p\right)(x)\ \left({}^\rho I^{\sigma,\gamma}_{\nu,\lambda}pfg\right)(x)+\left({}^\rho I^{\sigma,\gamma}_{\nu,\lambda}p\right)(x)\ \left({}^\rho I^{\alpha,\beta}_{\eta,\kappa}pfg\right)(x) \\
& -\left({}^\rho I^{\alpha,\beta}_{\eta,\kappa}pf\right)(x)\ \left({}^\rho I^{\sigma,\gamma}_{\nu,\lambda}pg\right)(x)-\left({}^\rho I^{\alpha,\beta}_{\eta,\kappa}pg\right)(x)\ \left({}^\rho I^{\sigma,\gamma}_{\nu,\lambda}pf\right)(x) \\
\leq\ & \|f'\|_\infty\|g'\|_\infty\Big[\left({}^\rho I^{\alpha,\beta}_{\eta,\kappa}x^2p\right)(x)\left({}^\rho I^{\sigma,\gamma}_{\nu,\lambda}p\right)(x)-2\left({}^\rho I^{\alpha,\beta}_{\eta,\kappa}xp\right)\left({}^\rho I^{\sigma,\gamma}_{\nu,\lambda}xp\right)(x) \\
& +\left({}^\rho I^{\sigma,\gamma}_{\nu,\lambda}x^2p\right)(x)\left({}^\rho I^{\alpha,\beta}_{\eta,\kappa}p\right)(x)\Big] \qquad (4.3.40)
\end{aligned}
$$

elde edilir.

Sonuç 4.3.7 Sonuç 4.3.6'de $\alpha=\sigma$, $\eta=\nu$, $\kappa=\lambda$ ve $\beta=\gamma$ alınırsa (4.3.36) eşitsizliği

$$
\begin{aligned}
0\ \leq\ & \left({}^\rho I^{\alpha,\beta}_{\eta,\kappa}p\right)(x)\ \left({}^\rho I^{\alpha,\beta}_{\eta,\kappa}pfg\right)(x)-\left({}^\rho I^{\alpha,\beta}_{\eta,\kappa}pf\right)(x)\ \left({}^\rho I^{\alpha,\beta}_{\eta,\kappa}g\right)(x) \\
\leq\ & \|f'\|_\infty\|g'\|_\infty\left[\left({}^\rho I^{\alpha,\beta}_{\eta,\kappa}x^2p\right)(x)\left({}^\rho I^{\alpha,\beta}_{\eta,\kappa}p\right)(x)-\left(\left({}^\rho I^{\alpha,\beta}_{\eta,\kappa}xp\right)(x)\right)^2\right]
\end{aligned}
$$

eşitsizliğine dönüşür.

Sonuç 4.3.8 Sonuç 4.3.6'de $\kappa=\lambda=0$, $\eta=\nu=0$, $\beta=\gamma$ ve $\rho=1$ alınırsa (3.1.37) eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 4.3.9 Sonuç 4.3.7'de $\kappa=0$, $\eta=0$ $\rho=1$ alınırsa (3.1.36) eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 4.3.8 Teorem 4.3.7'de $\alpha=\beta$, $\sigma=\gamma$, $\kappa=\lambda=0$ ve $\eta=\nu=0$ alınırsa

$$
\begin{aligned}
0\ \leq\ & \left({}^\rho I^{\alpha}_{0+}p\right)(x)\ \left({}^\rho I^{\sigma}_{0+}qfg\right)(x)+\left({}^\rho I^{\sigma}_{0+}q\right)(x)\ \left({}^\rho I^{\alpha}_{0+}pfg\right)(x) \\
& -\left({}^\rho I^{\alpha}_{0+}pf\right)(x)\ \left({}^\rho I^{\sigma}_{0+}qg\right)(x)-\left({}^\rho I^{\alpha}_{0+}pg\right)(x)\ \left({}^\rho I^{\sigma}_{0+}qf\right)(x) \\
\leq\ & \|f'\|_\infty\|g'\|_\infty\Big[\left({}^\rho I^{\alpha}_{0+}x^2p\right)(x)\left({}^\rho I^{\sigma}_{0+}q\right)(x)-2\left({}^\rho I^{\alpha}_{0+}xp\right)(\left({}^\rho I^{\sigma}_{0+}xq\right)(x)) \\
& +\left({}^\rho I^{\sigma}_{0+}x^2q\right)(x)\left({}^\rho I^{\alpha}_{0+}p\right)(x)\Big]
\end{aligned}
$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 4.3.9 Teorem 4.3.7'de $\beta=\gamma=0$, $\kappa=-\rho(\alpha+\eta)$ ve $\lambda=-\rho(\sigma+\nu)$ alınırsa

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left(I^{\alpha}_{0+,\rho,\eta}p\right)(x)\ \left(I^{\sigma}_{0+,\rho,\eta}qfg\right)(x)+\left(I^{\sigma}_{0+,\rho,\eta}q\right)(x)\ \left(I^{\alpha}_{0+,\rho,\eta}pfg\right)(x) \\ &\quad -\left(I^{\alpha}_{0+,\rho,\eta}pf\right)(x)\ \left(I^{\sigma}_{0+,\rho,\eta}qg\right)(x)-\left(I^{\alpha}_{0+,\rho,\eta}pg\right)(x)\ \left(I^{\sigma}_{0+,\rho,\eta}qf\right)(x) \\ &\leq \|f'\|_\infty\|g'\|_\infty\Big[\left(I^{\alpha}_{0+,\rho,\eta}x^2p\right)(x)\left(I^{\sigma}_{0+,\rho,\eta}q\right)(x)-2\left(I^{\alpha}_{0+,\rho,\eta}xp\right)\left(\left(I^{\sigma}_{0+,\rho,\eta}xq\right)(x)\right) \\ &\quad +\left(I^{\sigma}_{0+,\rho,\eta}x^2p\right)(x)\left(I^{\alpha}_{0+,\rho,\eta}q\right)(x)\Big] \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 4.3.10 Teorem 4.3.7'de $\alpha=\beta$, $\sigma=\gamma$, $\eta=\nu=0$ yazılır ve $\rho\to 0^+$ için limit alınırsa

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left(H^{\alpha}_{0+}p\right)(x)\ \left(H^{\sigma}_{0+}qfg\right)(x)+\left(H^{\sigma}_{0+}q\right)(x)\ \left(H^{\alpha}_{0+}pfg\right)(x) \\ &\quad -\left(H^{\alpha}_{0+}pf\right)(x)\ \left(H^{\sigma}_{0+}qg\right)(x)-\left(H^{\alpha}_{0+}pg\right)(x)\ \left(H^{\sigma}_{0+}qf\right)(x) \\ &\leq \|f'\|_\infty\|g'\|_\infty\Big[\left(H^{\alpha}_{0+}x^2p\right)(x)\left(H^{\sigma}_{0+}q\right)(x)-2\left(I^{\alpha}_{0+,\rho,\eta}xp\right)\left(\left(H^{\sigma}_{0+}xq\right)(x)\right) \\ &\quad +\left(H^{\sigma}_{0+}x^2p\right)(x)\left(H^{\alpha}_{0+}q\right)(x)\Big] \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 4.3.11 Theorem 4.3.7'de $g\in L_1[0,\infty])$, $f\in L_\infty[0,\infty])$, $\alpha=\sigma$, $\beta=\gamma$, $\nu=\lambda$, $\kappa=\lambda$ ve $p(t)=q(t)=1$ alınırsa (4.3.36) eşitsizliği

$$\begin{aligned} 0 &\leq \Lambda^{\rho,\beta}_{x,\kappa}(\alpha,\eta)\ \left({}^\rho I^{\alpha,\beta}_{\eta,\kappa}fg\right)(x)-\left({}^\rho I^{\alpha,\beta}_{\eta,\kappa}f\right)(x)\ \left({}^\rho I^{\alpha,\beta}_{\eta,\kappa}g\right)(x) \\ &\leq \|f'\|_\infty\|g'\|_1\left[\Lambda^{\rho,\beta}_{x,\kappa}(\alpha,\rho\eta+2)\ \Lambda^{\rho,\beta}_{x,\kappa}(\alpha,\rho\eta+1)-\left(\Lambda^{\rho,\beta}_{x,\kappa}(\alpha,\rho\eta+1)\right)^2\right] \end{aligned}$$

eşitsizliğine dönüşür. Burada Beta fonksiyonunun özellikleri kullanılarak

$$\left(\alpha,\ x\in\mathbb{R}^+;\ \beta,\ \rho,\ \eta,\ \kappa\in\mathbb{R}\right)$$

için

$$\frac{\rho^{1-\beta}x^\kappa}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x\frac{\tau^{\rho(\eta+1)-1}}{(x^\rho-\tau^\rho)^{1-\alpha}}d\tau=\frac{x^{\kappa+\rho(\eta+\alpha)}\,\Gamma(\eta+1)}{\rho^\beta\,\Gamma(\alpha+\eta+1)}:=\Lambda^{\rho,\beta}_{x,\kappa}(\alpha,\eta) \tag{4.3.41}$$

eşitliği kullanılmıştır.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, uyumlu kesirli ve Katugampola kesirli integraller yardımıyla Hermite-Hadamard, Hermite-Hadamard-Fejer, Ostrowski, Chebyshev ve Grüss eşitsizlikleri ile ilgili yeni eşitsizlikler elde edilmiştir. Bu eşitsizlilerin üçüncü bölümde belirtilen sonuçları genelleştirdiği görülmüştür. Farklı kesirli integraller, farklı konvekslik türleri ve özel fonksiyonlar yardımıyla bu tezde elde edilen Hermite-Hadamard, Hermite-Hadamard-Fejer ve Ostrowski eşitsizlikleri üzerine yeni sonuçlar veya genelleştirmeler elde edilebilir. Dolayısıyla bu tez çalışması bu konu üzerine yeni sonuçlar ve genelleştirmeler elde etmek isteyen araştırmacılar için oldukça faydalı olacaktır. Bulgular kısmında elde edilen bazı sonuçlar makale formatına getirilerek çeşitli dergilerde yayınlanmıştır. Yayınlanan makaleler şunlardır:
"Hadamard's inequality and its extensions for conformable fractional integrals of any order α" başlıklı çalışma **"Creative Mathematics and Informatics**" isimli dergide yayımlanmış, "On the more general Hermite-Hadamard type inequalities for convex functions via conformable fractional integrals" başlıklı çalışma **"Topological Algebra and Its Application"** isimli dergide yayımlanmış, "Some new fractional Fejer type inequalities for convex functions" adlı çalışma **"Fasciculi Mathematici"** isimli dergide yayımlanmış, "Ostrowski type inequalities involving special functions via conformable fractional integrals" başlıklı çalışma **"Journal of Advanced Mathematical Studies"** adlı dergide yayımlanmış, "Hermite–Hadamard type inequalities for quasi–convex functions via Katugampola fractional integrals" başlıklı çalışma **"International Journal of Analysis and Applications"** adlı dergide yayınlanmıştır. Son olarak "Hermite-Hadamard type inequalities for harmonically convex functions via Katugampola fractional integrals" ve "Hermite-Hadamard-Fejer type inequalities for conformable fractional integrals" başlıklı çalışmalar ise **Miskolc Mathematical Notes** isimli dergide yayınlanmıştır.

KAYNAKLAR

[1] Abbas, I. (2013) . Harmonically (s,m)-convex function their related inequalities, GC University Lahore, Pakistan.

[2] Abdeljawad, T. (2015). On conformable fractional calculus. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 729, 57-66.

[3] Yalçın, A. (2016). Farklı Türden Konveks Fonksiyonlar için Uyumlu Kesirli İntegraller İçeren Eşitsizlikler. Yüksek Lisans Tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ağrı İbrahim Çeçen Üniversitesi, Ağrı.

[4] Anastassiou, G. A. (1995). Ostrowski type inequalities, *Proceedings American Mathematical Society*, 123(12), 3775-3781.

[5] Awan, K. M. (2016). On the Stefensen's generalization of the Chebyshev functional with applications. University of Sargodha, Pakistan.

[6] Azpeitia, A. G. (1994). Convex functions and the Hadamard inequality. *Revista Colombiana de Matemáticas*, 28(1), 7-12.

[7] Bayraktar, M. (2010). Analiz, Nobel Yayın Dağıtım, Türkiye, 582s.

[8] Beckenbach, E. F. (1948). Convex functions, *Bulletin of American Mathematical Society*, 54, 439-460.

[9] Belarbi, S., & Dahmani, Z. (2009). On some new fractional integral inequalities, *Journal of Inequalities Pure and Applied Mathematics*, 10(3), 86, 5 pp.

[10] Breckner, W. W. (1978). Stetigkeitsaussagenf ureine Klass ever all gemeinerter konvexer funktionen in topologisc henlinearen Raumen, *Publications de l'Institut Mathématique*, 23, 13-20.

[11] Chebyshev, P. L. (1882) Sur les expressions approximatives des integrales definies par les autres prises entre les mmes limites, *Proceedings Mathematical Society Kharkov* , 2, 93-98.

[12] Chebyshev, P. L. (1883). Ob odnom rjade, dostavljajuscem predelnye velicny integralov pri razlo zenii podintegralnoi funkcii na mnozeteli, *Priloz. Zapisok Imp. Akad. Nauk.*, 4.

[13] Chen, F. (2016). Extensions of the Hermite-Hadamard Inequality for convex functions via fractional integrals, *Journal of Mathematical Inequalities*, 10(1), 75-81.

[14] Chen, H., & Katugampola U.N. (2017) Hermite-Hadamard and Hermite-Hadamard-Fejer type inequalities for generalized fractional integrals, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 446, 1274-1291.

[15] Chincane, L., & Pachpatte, B. (2013). A note on some fractional integral inequalities via hadamard integral, *Journal of Fractional Calculus and Applications*, 4(1) , 125-129.

[16] Dahmani, Z., Tabharit, L., & Taf, S. (2010). New Generalization of Grüss inequality using Riemann-Liouville fractional integrals, *Bulletin of Mathematical Analysis and Applications*, 2(3), 93-99.

[17] Dahmani, Z., Mechouar, O., & Brahimi, S. (2011). Certain inequalities related to the Chebyshev's functional involving a Riemann-Liouville operator, *Bulletin of Mathematical Analysis and Applications*, 3(4) , 38-44.

[18] Dahmani, Z. (2011). The Riemann-Liouville Operator to Generate Some New Inequalities, *International Journal of Nonlinear Science*, 12(4), 452-455.

[19] Dahmani, Z., Khameli A., & Freha, K. (2016). Fractional integral Chebyshev inequality without synchronous functions condition, *Malaya Journal of Mathematik*, 4(3), 448-452.

[20] Diethelm, K. (2010). The Analysis of Fractional Differential Equations: An Application-Oriented Exposition Using Differential Operators of Caputo Type. Springer, Heidelberg, Germany, 262pp. .

[21] Dragomir, S. S., & Pearce, C. E. M. (2000). Selected Topics on Hermite-Hadamard In- equalities and Applications, RGMIA Monographs, Victoria University, 357pp.

[22] Farid, G. (2016). Straightforward proofs of Ostrowski inequality and some related results. *International journal of analysis*, Article ID D 391848.

[23] Fink, A. M. (2000). An essay on the history of inequalities. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 249(1), 118-134.

[24] Gardner, R. J. (2002). The Brunn-Minkowski inequality, *Bulletin of American Mathematical Society*, 39(3), 355-405.

[25] Gözpınar, A. (2018), Konveks fonksiyon sınıfları için kesirli integraller içeren eşitsizlikler. Doktora Tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ordu Üniversitesi, Ordu.

[26] Hölder, O. (1889) . Uber einen Mittelwertsatz Göttinger Nachrichten, 38-47.

[27] Grüss, D. (1935). Uber das maximum des absoluten Betrages von $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)dx - \frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b f(x)dx \int_a^b g(x)dx$, Mathematische Zeitschrift, 39, 215-226.

[28] Hardy, G. H., Littlewood, J. E., & Polya, G. (1952). Inequalities. Cambridge University Press, UK, 310pp.

[29] Hermite, C., (1883). Sur deux limites d'une integrale definie. *Mathesis*, 3, 82.

[30] Ion, D. A. (2007). Some estimates on the Hermite-Hadamard inequality through quasi-convex functions. *Annals of the University of Craiova-Mathematics and Computer Science Series*, 34, 82-87.

[31] İşcan, İ. (2014). Hermite-Hadamard type inequalities for harmonically conveks functions. *Hacettepe Journal of Mathematics and statistics*, 43(6), 935-942.

[32] İşcan, İ., & Wu, S. (2014). Hermite-Hadamard type inequalities for harmonically convex functions via fractional integrals, *Applied Mathematics and Computation*, 238, 237-244.

[33] İşcan, İ. (2015). Hermite-Hadamard-Fejer type inequalities for conveks functions via fractional integrals. *Studia Universitatis Babes-Bolyai Mathematica*, 60(3), 355-366.

[34] Jensen, J. L. W. V. (1905). Om konvexe Funktioner og Uligheder mellem Middelvaerdier, *Nyt. Tidsskr. Math.*, 16B , 49-69.

[35] Kannapan, P. (2009). Functional Equations and Inequalities with Applications. Springer,New York, USA, 803pp.

[36] Katugampola, U. N. (2014). New approach to generalized fractional derivatives, *Bulletin of Mathematical Analysis and Applications*, 6(4), 1-15.

[37] Katugampola, U. N. (2011). New approach to a generalized fractional integrals. *Applied Mathematics and Computation*, 218(4), 860-865.

[38] Katugampola, U. N. (2014). A new fractional derivative with classical properties, arXiv:1410.653.

[39] Katugampola, U. N. (2016). A new fractional integral unifying six existing fractional integrals, arXiv:1612.08596.

[40] Khalil, R., Al Horani, M., Yousef, A., & Sababheh, M. (2014). A new definition of fractional derivative. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 264, 65-70.

[41] Kilbas, A.A., Srivastava, H.M., & Trujillo, J.J. (2006). Theory and Applications of Fractional Differential Equations. *Elsevier Science Limited*, 204, Amsterdam, 523pp.

[42] Machado, J.T, Virginia, K., & Francesco, M. (2011). Recent history of fractional calculus. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 16(3), 1140-1153.

[43] Marangozoğlu E. (2018). Genelleştirilmiş h, k-Riemann-Liouville kesirli integraller için Grüss tipli integral eşitsizlikler, Genelleştirilmiş h,k-Riemann-Liouville kesirli integraller için Grüss tipli integral eşitsizlikleri. Yüksek lisans tezi, Fen bilimleri enstitüsü, Kahramanmaraş Sütçü İmam Üniversitesi, Kahramanmaraş.

[44] Mitrinović, D.S, Pečarić, J.E., & Fink, A.M. (1993). Classical and New Inequalities in Analysis, Kluwer Academic Publishers, UK, 744pp.

[45] Mitrinović, D.S., & I. B. Lacković, I.B. (1985). Hermite and convexity, *Aequationes Mathematicae*, 28(3), 229-232.

[46] Minkowski, H. (1896). Geometrie der Zahlen, Leipzig, Berlin, Germany, 278pp.

[47] Niculescu C. P., & Persson L. (2018). Convex functions and their applications. Springer CMS books in mathematics, New York, USA, 255pp.

[48] Niculescu, C. P.,& Persson, L. E. (2004). Old and new on the Hermite-Hadamard inequality. *Real Analysis Exchange*, 29(2), 663-686.

[49] Oldham, K. B., & Spanier, J. (1974). The fractional calculus theory and applications of differentiation and integration to arbitrary order, Academic Press Inc., London, UK, 322pp.

[50] Ostrowski, A. (1938). Über die Absolutabweichung einer dierentiebaren Funktion von ihrem Inte-gralmittelwert, *Commentarii Mathematici Helvetici*, 10, 226-227.

[51] Özdemir, M. E.,& Yıldız, Ç. (2013). The Hadamard's inequality for quasi-convex functions via fractional integrals, *Mathematics and Computer Science Series*, 40(2), 167-173.

[52] Pandey, V. (2016). Physical and Geometrical Interpretation of Fractional Derivatives in Viscoelasticity, PHD thesis, Faculty of Mathematics and Natural Sciences, University of Oslo.

[53] Pearce, C. E. M., Pecaric, J. E., & Šimić, V. (1998). Stolarsky means and Hadamard's inequality. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 220(1), 99-109.

[54] Podlubny I. , (1999). Fractional Differential Equations. An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations, to Methods of their Solution and Some of their Applications, Academic Press, San Diego, CA.

[55] Pečarić, J. E., Proschan, F., & Tong, Y.L. (1992). Convex functions. Partial Orderings and Statistical Applications, Academic Press Inc.

[56] Purohit, S. D., & Kalla, S. L. (2014). Certain inequalities related to the Chebyshev's functional involving Erdélyi-Kober operators, *SCIENTIA* Series A: Mathematical Sciences, 25, 55-63.

[57] Prudnikov, A. P., Brychkov, Y. A., & Marichev, O. I. (1981). Integral and series, Moscow, 637pp.

[58] Roberts, A. W., & Varberg, D. E. (1973). Convex functions. Pure and Applied Mathematics, Academic Press, London, UK, 300.

[59] Ross, B. (1977). The development of fractional calculus 1695-1900, *Historia Mathematica*, 4, 75-89.

[60] Samko, S. G., Kilbas, A. A., & Marichev, O.I. (1993). Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications, Gordon and Breach Science Publishers, USA, 976pp.

[61] Sarıkaya, M. Z., Set, E., Yaldız H., & Başak, N. (2013). Hermite-Hadamard's inequalities for fractional integrals and related fractional inequalities. *Mathematical and Computer Modelling*, 57(9), 2403-2407.

[62] Steele, J. M. (2004). The Cauchy-Schwarz master class. Cambridge University Press, USA, 318pp.

[63] Set, E., İşcan, I., Sarıkaya, M. Z., & Özdemir, M. E. (2015) On new inequalities of Hermite-Hadamard-Fejér type for convex functions via fractional integrals, *Applied Mathematics and Computation*, 259, 875-881.

[64] Set, E. (2012). New inequalities of Ostrowski type for mappings whose derivatives are s-convex in the second sense via fractional integrals, *Computers and Mathematics eith Applications*, 63, 1147-1154

[65] Sousa, J., & De Oliviera, E. C. (2017). The Minkowski's inequality by means of a generalized fractional integral, arXiv:1705.07191.

[66] Sousa, J., Oliveira, D. S., & De Oliveira, E. C. (2017). Grüss-type inequality by mean of a fractional integral, arXiv:1705.00965 .

[67] Srivastava, H. M., & Choi, J. (2012). Zeta and q-Zeta Functions and Associated Series and Integrals, Elsevier Science Publishers, Amsterdam, London and New York.

[68] Xiang, R. (2015). Refinemets of Hermite-Hadamard ype inequalities for convex functions via fractional integrals *Journal of Applied Mathematics and Informatics*, 33, 119-125.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler	
Adı Soyadı	İlker MUMCU
Doğum Yeri	Akçaabat / TRABZON
Doğum Tarihi	21.02.1979
Uyruğu	☑ T.C. ❐ Diğer:
Telefon	5066613681
E-Posta Adresi	mumcuilker@msn.com

Eğitim Bilgileri	
Lisans	
Üniversite	Karadeniz Teknik Üniversitesi
Fakülte	Fatih Eğitim Fakültesi
Bölümü	Matematik Öğretmenliği
Mezuniyet Yılı	30.06.2000
Yüksek Lisans	
Üniversite	Ordu Üniversitesi
Enstitü Adı	Fen Bilimleri Enstitüsü
Anabilim Dalı	Matematik Anabilim Dalı
Mezuniyet Tarihi	01.01.2013
Yayınlar	

Set, E., Özdemir, M.E., Akdemir, A.O., Mumcu, İ., ``Ostrowski types inequalities involving special functions via conformable fractional integrals", Journal of Advanced Mathematical Studies, 10(3) 386-395, (2017).

Set, E. and Mumcu, İ., ``Some new fractional Fejer type inequalities for convex functions", Fasciculi Mathematici, 59, 145-157, (2017).

Set, E., Mumcu, İ. and Özdemir, M.E., ``On the more general Hermite-Hadamard type inequalities for convex functions via conformable fractional integrals” , Topological Algebra and its Applications 5 67-73, (2017).

Set, E., Akdemir, A.O. and Mumcu, İ., ``Hadamards inequality and its extensions for conformable fractional integrals of any order α", Creative Mathematics and Informatics, 27(2) (2018).

Set, E., Dahmani, Z. and Mumcu, İ., ``New extensions of Chebyshev type inequalities using generalized Katugampola integrals via Polya-Szegö inequality", International Journal of Optimization and Control: Theories and Applications, 8(2) 137-144, (2018).

Mumcu, İ., Set, E. and Akdemir, A. O., `` Hermite-Hadamard type inequalities for harmonically convex functions via Katugampola fractional integrals", Miskolc Mathematical Notes, 20(1) 409-424, (2018).

Set, E. and Mumcu, İ. ``Hermite-Hadamard-Fejer type inequalities for conformable fractional integrals", Miskolc Mathematical Notes, 20(1) 475-488, (2018).

Set, E. and Mumcu, İ., ``Hermite-Hadamard type inequalities for quasi-convex functions via Katugampola fractional integrals", International Journal of Analysis and Applications, 16(4) 605-613, (2018).