T.C.
ORDU ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SEZGİSEL BULANIK ESNEK TOPOLOJİK UZAYLARDA BAĞLANTILILIK

Mehmet Akif İŞLEYEN

Bu tez,
Matematik Anabilim Dalında
Yüksek Lisans
derecesi için hazırlanmıştır

ORDU 2015

TEZ ONAYI

Matematik Anabilim Dalı YÜKSEK LİSANS öğrencisi Mehmet Akif İŞLEYEN'nin YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak hazırladığı "**SEZGİSEL BULANIK ESNEK TOPOLOJİK UZAYLARDA BAĞLANTILILIK**" başlıklı bu çalışma jürimizce lisans üstü yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Serkan KARATAŞ

Yüksek Lisans Tez Savunma Jürisi:

Üye:	Doç. Dr. Erhan SET Ordu Üniv. Matematik Böl.	İmza:
Üye:	Yrd. Doç. Dr. Kerim BEKAR Giresun Üniv. Matematik Böl.	İmza:
Üye:	Yrd. Doç. Dr. Serkan KARATAŞ Ordu Üniv. Matematik Böl.	İmza:

Bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulu'nun 18/02/2015 tarih ve 2015/91 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

Prof. Dr. Mehmet Fikret BALTA

Enstitü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

İmza:

Mehmet Akif İŞLEYEN

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirimlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

SEZGİSEL BULANIK ESNEK TOPOLOJİK UZAYLARDA BAĞLANTILILIK

Mehmet Akif İŞLEYEN
Ordu Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı, 2015
Yüksek Lisans Tezi, 58 sayfa

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Serkan KARATAŞ

Bu çalışma altı bölümden oluşmaktadır. Giriş bölümünde sezgisel bulanık küme ve esnek küme kavramlarından yola çıkılarak elde edilmeye başlanan süreçten bahsedilmiştir. Sezgisel bulanık esnek küme kavramı tanıtıldıktan sonra sezgisel bulanık esnek fonksiyonlar üzerinde yapılan çalışmalarla, sezgisel bulanık esnek topolojik uzay kavramının tanımlanması sürecinden bahsedilmiştir.

Beşinci bölümde ise bu çalışmanın temel amacı olan sezgisel bulanık esnek bağlantılı topolojik uzay kavramı tanıtılmıştır. Altıncı bölümde bu kavramın ortaya çıkış nedenleri konu üzerine yapılabilecek çalışmalar tartışılmıştır. Konunun ele alınış amacı ve gelişim sürecinden bahsedilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Esnek küme, sezgisel bulanık esnek küme, sezgisel bulanık esnek topolojik uzay, sezgisel bulanık esnek bağlantılılık.

ABSTRACT

CONNECTEDNESS IN INTUITIONISTIC FUZZY SOFT TOPOLOGICAL SPACES

Mehmet Akif İŞLEYEN
Ordu University
Institute for Graduate Studies in Science and Technology
Department of Mathematics, 2015
MSc. Thesis, 58 page

Supervisor: Asst. Prof. Serkan KARATAŞ

This study is comprised of six sections. In the inroduction we have considered intuitionistic fuzzy set based of soft set understanding. Consideration has been given to intuitionistic fuzzy soft set after studying intuitionistic fuzzy soft sets. By studying intuitionistic fuzzy soft sets intuitionistic fuzzy soft function an expleration intuitionistic fuzzy soft topolocigal spaces has been developed.

In the fifth section which is the bases of this study connectedness intuitionistic fuzzy soft topological has been explained. In the sixt section we have considered how this subject could be developed further. The reason off the bases of study and development has been mantioned.

Keywords: Soft set, intuitionistic fuzzy soft set, intuitionistic fuzy soft topological space, intuitionistic fuzz soft connectedness.

TEŞEKKÜR

Tüm çalışmalarım boyunca her zaman bilgi ve deneyimleriyle yolumu açan değerli hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Serkan KARATAŞ' a en samimi duygularım ile teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca, çalışmalarım boyunca desteklerini esirgemeyen Matematik Bölüm Başkanı Sayın Prof. Dr. Cemil YAPAR ve tüm Matematik Bölümü öğretim üyelerine en içten şükranlarımı sunuyorum.

Çalışmam boyunca benden maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen babama, anneme, abime, kardeşime ve eşime teşekkürlerimi sunuyorum.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR

μ_A	:	A sezgisel bulanık kümesinin üyelik fonksiyonu
ν_A	:	A sezgisel bulanık kümesinin üye olmama fonksiyonu
$\mathcal{IF}(\mathcal{X})$	:	X kümesi üzerindeki tüm sezgisel bulanık kümeler ailesi
$\bigvee$	:	Supremum
$\bigwedge$	:	İnfimum
A^c	:	A sezgisel bulanık kümesinin tümleyeni
$A \cap B$	:	A ve B sezgisel bulanık kümelerinin kesişimi
$A \cup B$	:	A ve B sezgisel bulanık kümelerinin birleşimi
$\mathbb{S}$	:	U evrensel kümesi üzerindeki E parametre kümesi ile tanımlı tüm esnek kümelerin kümesi
(F, E)	:	Molodstov anlamında (F, E) esnek kümesi
F	:	Çağman anlamında F esnek kümesi
E	:	Parametre kümesi
U	:	Nesne Kümesi
$\mathcal{P}(U)$	:	U'nun kuvvet kümesi
Φ	:	Boş esnek küme
$\tilde{U}$	:	Evrensel esnek küme
$\tilde{\Phi}$	:	Maji anlamında sezgisel bulanık esnek boş küme
$\Box A$	:	A sezgisel bulanık kümesi üzerinde gereklilik işlemi
$\Diamond A$	:	A sezgisel bulanık kümesi üzerinde olanaklılık işlemi
$F \tilde{\subseteq} G$	:	G esnek kapsar F
$F \tilde{\cup} G$	:	F ile G'nin esnek birleşimi
$F \tilde{\cap} G$	:	F ile G'nin esnek kesişimi
$F^{\tilde{c}}$	:	F'nin esnek tümleyeni
f	:	f sezgisel bulanık esnek kümesi
$f \sqsubseteq g$	:	g sbe-kapsar f
$f \not\sqsubseteq g$	:	g,f'yi sbe-kapsamaz
$f \sqcup g$	:	sbe-kümelerde birleşim
$f \sqcap g$	:	sbe-kümelerde kesişim
$f^{\tilde{c}}$	:	f sbe-kümesinin tümleyeni
$\tilde{0}_E$	:	sbe-boş küme
$\tilde{1}_E$	:	sbe-evrensel küme

$\mathbb{IFS}_E^X$	:	E parametreleriyle X üzerinde tanımlanan tüm sbe-kümelerin kümesi
φ_ψ	:	Sezgisel bulanık esnek küme
e_f	:	sbe-nokta
$\tilde{\in}$	:	sbe-aitlik
Λ	:	indis kümesi
I	:	indis kümesi
τ	:	sbe-topoloji
f°	:	f'nin sbe-içi
$\overline{f}$	:	f'nin sbe-kapanışı
$f \vee g$	:	f veya g
$\pi_A(x)$	:	$x \in X$'in A'daki belirsizlik derecesi
$\tilde{\mathcal{N}}_\tau(e_f)$	:	e_f sbe-noktasının sbe-komşuluğu
$f\|g$	:	sbe-ayrılmış kümeler
$f \wedge g$	:	f ve g

1. GİRİŞ

Klasik küme teorisi, bulanık küme teorisi ve olasılık teorisi gibi bazı bilim dallarında karşılaşılan, her bilim dalının kendine özgü karmaşık sorunlarda klasik matematik yöntemleri ile cevap alınamamaktadır. Ekonomi, mühendislik ve çevre bilimi gibi bir çok saha, çalışmalarını sürdürebilmeleri için, dilbilimsel değerleri ve belirsizlikleri matematiksel olarak modellemeye ihtiyaç duyarlar. İlk kez 1967'de Zadeh [24] tarafından tanımlanan bulanık küme kavramı bu amaçla ortaya atılmıştır. Bir bulanık küme, evrensel kümedeki elemanlara $[0,1]$ aralığından üyelik derecesi atayan bir fonksiyondur.

Atanassov [3] 1986'da bulanık küme kavramından yola çıkarak sezgisel bulanık küme kavramını, bulanık kümenin bir genellemesi olarak tanımlamıştır. Her bulanık kümenin bir sezgisel bulanık küme olduğu açıktır. Buna karşın tersi doğru değildir.

Bulanık küme ve sezgisel bulanık küme teorilerinde fonksiyon inşa etme güçlüğü karşımıza çıkar. Buradan yola çıkarak Molodtsov [20], 1999 yılında, bazı belirsizlikleri gidermek için esnek küme kavramının tanımını ve esnek kümeler üzerinde bazı uygulamalar içeren çalışmasını yayımladı.

Ali ve diğerleri [1] 2009'da esnek kümelerde yeterince açık olmayan gösterim ve tanımları tekrar ele alarak, esnek kümeler üzerindeki kesişim ve birleşim işlemlerini, esnek boş küme ve esnek evrensel küme kavramlarını verip, De Morgan kurallarının esnek kümelerde tanımlamıştır.

2001 yılında, Maji [15], Biswas ve Roy; sezgisel bulanık esnek küme kavramını ilk kez vererek bazı sonuçlarını içeren çalışmasını yayınlamışlardır.

Maji [15] de esnek küme teorisi üzerinde çalışmış ve daha geniş bir kavram olan bulanık esnek küme kavramını tanıtmıştır. Bu kavram bulanık ve esnek kümelerin bir kombinasyonundan oluşmaktadır. Son yıllarda da Kong [13] karar verme problemlerinde esnek küme teorik yaklaşımını uyguladı. Majumdar ve Samanta [19]'da esnek küme ile bulanık esnek küme arasındaki benzerlikler üzerinde çalıştı. Aktaş ve Çağman [2] 2007 yılında daha çok cebirsel yapı içeren esnek grup kavramını tanıttı. Esnek gruplar çalışmasını takip eden bir çok araştırmacı esnek cebirsel yapılar üzerine çeşitli çalışmalar yapmışlardır $[1,2,23]$.

Bu çalışmanın ikinci bölümünde sezgisel bulanık küme ve esnek küme kavramları ele alınmış, üçüncü bölümde ise sezgisel bulanık esnek küme ve sezgisel bulanık esnek fonksiyonlar konusuna yer verilmiştir. Dördüncü bölümde sezgisel bulanık topolojik uzaylar kavramı ve son olarak beşinci bölümde sezgisel bulanık topolojik uzaylardaki bağlantılık kavramından yola çıkılarak sezgisel bulanık esnek topolojik uzaylarda bağlantılılık kavramı tartışılarak çalışma tamamlanmıştır.

Bu tez çalışmasının beşinci bölümü Journal of New Theory adlı uluslararası bir dergide yayımlanmıştır.

2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

2.1 Sezgisel Bulanık Kümeler

Tanım 2.1.1 [3] X bir evrensel küme olsun. X evrensel kümesi üzerindeki A sezgisel bulanık kümesi

$$A = \Big\{ \big\langle x, \mu_A(x), \nu_A(x) \big\rangle : x \in X \Big\}$$

şeklinde tanımlanır. Burada;

$$\mu_A : X \to [0,1] \ \text{ ve } \ \nu_A : X \to [0,1]$$

fonksiyonları her $x \in X$ için $0 \leq \mu_A(x) + \nu_A(x) \leq 1$ koşulunu sağlayıp, sırasıyla $x \in X$'in A'ya üye olma ve üye olmama derecelerini gösterir. X kümesi üzerindeki tüm sezgisel bulanık kümelerin ailesi $\mathcal{IF}(X)$ ile gösterilir. $\pi_A(x) = 1 - \mu_A(x) - \nu_A(x)$ değerine x elemanının sezgisel bulanık A kümesine aitliğinin belirsizlik derecesi denir. Buradaki değer, x elemanının A kümesine ait olup olmama belirsizliğinin değeridir. Açıkça görülmektedir ki $\pi_A(x)$, 0 ile 1 aralığında değişmektedir. Yani $0 \leq \pi_A(x) \leq 1$'dir.

Tanım 2.1.2 [3] $X \neq \emptyset$ ve $A, B \in \mathcal{IF}(X)$

$$\begin{aligned} A &= \big\{ \langle x, \mu_A(x), \nu_A(x) \rangle : x \in X \big\} \\ B &= \big\{ \langle x, \mu_B(x), \nu_B(x) \rangle : x \in X \big\} \end{aligned}$$

olarak verilsin. Temel sezgisel bulanık küme işlemleri

i. $A \subseteq B$ ancak ve ancak her $x \in X$ için $\mu_B(x) \geq \mu_A(x)$ ve $\nu_A(x) \geq \nu_B(x)$ (Kapsama)

ii. $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B$ ve $B \subseteq A$ (Eşitlik)

iii. $A \cup B = \Big\{ \big\langle x, \mu_A(x) \vee \mu_B(x), \nu_A(x) \wedge \nu_B(x) \big\rangle : x \in X \Big\}$ (Birleşim)

iv. $A \cap B = \Big\{ \big\langle x, \mu_A(x) \wedge \mu_B(x), \nu_A(x) \vee \nu_B(x) \big\rangle : x \in X \Big\}$ (Kesişim)

v. $A^c = \Big\{ \big\langle x, \nu_A(x), \mu_A(x) \big\rangle : x \in X \Big\}$ (Tümleyen)

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.1.3 [8] $\{A_i : i \in I\} \subseteq \mathcal{IF}(X)$ olsun. Bu takdirde;

$$\begin{aligned} \bigcap_{i \in I} A_i &= \Big\{ \big\langle x, \bigwedge \mu_{A_i}(x), \bigvee \nu_{A_i}(x) \big\rangle : x \in X \Big\} \\ \bigcup_{i \in I} A_i &= \Big\{ \big\langle x, \bigvee \mu_{A_i}(x), \bigwedge \nu_{A_i}(x) \big\rangle : x \in X \Big\} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.1.4 [3] $\overline{0} = \{\langle x, 0, 1\rangle : x \in X\}$ ve $\overline{1} = \{\langle x, 1, 0\rangle : x \in X\}$ şeklinde tanımlanır.

Teorem 2.1.1 [3] $A, B, C \in \mathcal{IF}(X)$ olsun. Bu durumda;

i. $A \subseteq B$ ve $C \subseteq D$ ise $(A \cup B) \subseteq (C \cup D)$ ve $(A \cap B) \subseteq (C \cap D)$ 'dir.

ii. $(A \subseteq B)$ ve $(A \subseteq C)$ ise $A \subseteq B \cap C$ 'dir.

iii. $(A \subseteq C)$ ve $(B \subseteq C)$ ise $A \cup B \subseteq C$ 'dir.

iv. $(A \subseteq B)$ ve $(B \subseteq C)$ ise $(A \subseteq C)$ 'dir.

v. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ ve $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ 'dir.

vi. $A \subseteq B$ ise $B^c \subseteq A^c$ 'dir.

vii. $(A^c)^c = A$ 'dır.

viii. $(\overline{1})^c = \overline{0}$ ve $(\overline{0})^c = \overline{1}$ 'dir.

Tanım 2.1.5 [3] $A \in \mathcal{IF}(X)$ sezgisel bulanık kümesi üzerinde gereklilik işlemi ve olanaklılık işlemi sırasıyla;

i. $\Box A = \Big\{\langle x, \mu_A(X), 1 - \mu_A(X)\rangle : x \in X\Big\}$

ii. $\Diamond A = \Big\{\langle x, 1 - \nu_A(X), \nu_A(X)\rangle : x \in X\Big\}$

şekilde tanımlanır.

Örnek 2.1.1 $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ evrensel kümesi üzerinde A ve B sezgisel bulanık kümeleri

$$\begin{aligned} A &= \Big\{\langle x_1, 0.8, 0.2\rangle, \langle x_2, 0.7, 0.1\rangle, \langle x_3, 0.4, 0.6\rangle\Big\} \\ B &= \Big\{\langle x_1, 0.2, 0.5\rangle, \langle x_2, 0.8, 0.1\rangle, \langle x_3, 0.5, 0.5\rangle\Big\} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlansın. Buradan

i. $A \cap B = \{\langle x_1, 0.2, 0.5\rangle, \langle x_2, 0.7, 0.1\rangle, \langle x_3, 0.4, 0.6\rangle\}$

ii. $A \cup B = \{\langle x_1, 0.8, 0.2\rangle, \langle x_2, 0.8, 0.1\rangle, \langle x_3, 0.5, 0.5\rangle\}$

iii. $A^c = \{\langle x_1, 0.2, 0.8\rangle, \langle x_2, 0.1, 0.7\rangle, \langle x_3, 0.6, 0.4\rangle\}$

iv. $\Box A = \{\langle x_1, 0.8, 0.2\rangle, \langle x_2, 0.7, 0.3\rangle, \langle x_3, 0.4, 0.6\rangle\}$

v. $\Diamond A = \{\langle x_1, 0.8, 0.2\rangle, \langle x_2, 0.9, 0.1\rangle, \langle x_3, 0.4, 0.6\rangle\}$

olarak bulunur.

Tanım 2.1.6 [3] $A \in \mathcal{IF}(X)$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} nA &= \Big\{\big\langle x, 1-(1-\mu_A(X))^n, (\nu_A(X))^n\big\rangle : x \in X\Big\} \\ A^n &= \Big\{\big\langle x, (\mu_A(X))^n, 1-(1-\nu_A(X))^n\big\rangle : x \in X\Big\} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanmıştır.

Teorem 2.1.2 [3] $A \in \mathcal{IF}(X)$ sezgisel bulanık kümesi için aşağıdaki iddialar doğrudur.

i. $(\Box A)^n = \Box A^n$

ii. $(\Diamond A)^n = \Diamond A^n$

iii. $n(\Box A)^n = \Box nA$

iv. $n(\Diamond A)^n = \Diamond nA^n$

2.2 Esnek Kümeler

Bu bölümde ilk önce Molodtsov [20] tarafından ortaya atılmış olan esnek küme tanımı verilcektir. Daha sonra Çağman [7] tarafından gözden geçirilmiş tanım verilecek ve tezin geri kalan kısmında Çağman [7]'ın tanımı kullanılacaktır.

Tanım 2.2.1 [20] U evrensel küme ve E parametreler kümesi olsun. Bu durumda; E parametreler kümesini tüm alt kümelerin kümesi olan U kümesine götüren F dönüşümü ile birlikte (F, E) ikilisine, U kümesi üzerinde bir esnek küme denir.

Tanım 2.2.2 [7] U evrensel küme ve E parametre kümesi olsun. $F : E \to \mathcal{P}(U)$ fonksiyonuna U üzerinde esnek küme denir. Yani, bir esnek küme

$$F = \Big\{\big(e, F(e)\big) : e \in E\Big\}$$

şeklinde sıralı ikililerin bir kümesi olarak görülebilir. Eğer $e \in E$ için $F(e) = \emptyset$ ise, $(e, \emptyset)$ ikilisi esnek kümede gösterilmez. U üzerindeki E parametre kümesi ile tanımlı tüm esnek kümelerin kümesi $\mathbb{S}$ ile gösterilir.

Örnek 2.2.1 F esnek kümesi, Ordu iline yeni tayin olmuş bir memur çiftin çocuklarını göndereceği okulların parametrelendirilmiş şekli olarak tanımlansın.

U : Göz önüne alınan tüm okulların kümesi
E : Parametre kümesi (Her bir parametre kelime veya cümle olabilir.)

olmak üzere $E =$ {pahalı, ucuz, spor kompleksi mevcut, üniversite sınavı yerleştirme başarısı var, ingilizce eğitimi var, eve yakın, hafta sonu kursları mevcut} şeklinde tanımlanıyor. Bu durumda esnek kümeyi tanımlamak pahalı okulları, ucuz okulları ve diğerlerini göstermek anlamına gelir. $(i = \overline{1,7})$ e_i ifadesi $i-$nci parametre olmak üzere $F(e_i)$ kümeleri keyfi olabilir.

Tanım 2.2.3 [7] $F, G \in \mathbb{S}$ olsun. Her $e \in E$ için $F(e) \subseteq G(e)$ oluyorsa G, F'yi esnek kapsar denir ve $F \tilde{\subseteq} G$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.2.4 [7] $F \in \mathbb{S}$ olsun. Her $e \in E$ için $F(e) = \emptyset$ oluyorsa F'ye esnek boş küme denir ve Φ ile gösterilir.

Tanım 2.2.5 [7] $F \in \mathbb{S}$ olsun. Her $e \in E$ için $F(e) = U$ oluyorsa F'ye esnek evrensel küme denir ve $\tilde{U}$ ile gösterilir.

Tanım 2.2.6 [7] $F, G \in \mathbb{S}$ olsun. F ile G esnek kümelerinin esnek birleşimi her $e \in E$ için $(F \tilde{\cup} G)(e) = F(e) \cup G(e)$ şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.2.7 [7] $F, G \in \mathbb{S}$ olsun. F ile G esnek kümelerinin esnek kesişimi her $e \in E$ için $(F \tilde{\cap} G)(e) = F(e) \cap G(e)$ şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.2.8 [7] $F \in \mathbb{S}$ olsun. F esnek kümesinin esnek tümleyeni $F^{\tilde{c}}$ ile gösterilir ve her $e \in E$ için $F^{\tilde{c}}(e) = U \setminus F(e)$ şeklinde tanımlanır.

Teorem 2.2.1 [5, 7] $F, G, H \in \mathbb{S}$ verilsin. Bu takdirde aşağıdaki iddialar doğrudur.

i. $(F) \tilde{\cap} (F) = F$

ii. $(F) \tilde{\cup} (F) = F$

iii. $(F^{\tilde{c}}) \tilde{\cap} (F) = \Phi$

iv. $(F^{\tilde{c}}) \tilde{\cup} (F) = \tilde{U}$

v. $(\Phi^{\tilde{c}}) = \tilde{U}$ ve $(\tilde{U}^{\tilde{c}}) = \Phi$

vi. $F \tilde{\cap} G = G \tilde{\cap} F$

vii. $F\tilde{\cup}G = G\tilde{\cup}F$

viii. $F\tilde{\cap}(G\tilde{\cup}H) = (F\tilde{\cap}G)\tilde{\cup}(F\tilde{\cap}H)$

ix. $F\tilde{\cup}(G\tilde{\cap}H) = (F\tilde{\cup}G)\tilde{\cap}(F\tilde{\cup}H)$

x. $F\tilde{\cap}G = (F^{\tilde{c}})\tilde{\cup}(G^{\tilde{c}})$

xi. $F\tilde{\cup}G = (F^{\tilde{c}})\tilde{\cap}(G^{\tilde{c}})$

xii. $F\tilde{\cap}\tilde{\Phi} = \Phi$ ve $F\tilde{\cup}\tilde{\Phi} = \Phi$

xiii. $F\tilde{\cup}\tilde{U} = \tilde{U}$ ve $F\tilde{\cap}\tilde{U} = F$

Örnek 2.2.2 $E = \{e_1, e_2, e_3\}$, $U = \{u_1, u_2, u_3\}$ olsun. $F, G, H \in \mathbb{S}$ esnek kümeleri

$$\begin{aligned} F &= \big\{(e_1, \{u_1, u_2\}), (e_2, U)\big\}, \\ G &= \big\{(e_2, \{u_2\}), (e_3, \{u_1, u_3\})\big\}, \\ H &= \big\{(e_1, \{u_2\}), (e_2, \{u_1, u_2\})\big\} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlansın. Bu takdirde:

i. $e_1 \in E$ için

$$H(e_1) = \{u_2\} \text{ ve } F(e_1) = \{u_1, u_2\}$$

olduğundan $H(e_1) \subseteq F(e_1)$ elde edilir. Ayrıca $e_2 \in E$ için

$$H(e_2) = \{u_1, u_2\} \text{ ve } F(e_2) = \{u_1, u_2, u_3\}$$

olduğundan $H(e_2) \subseteq F(e_2)$ bulunur. Dolayısıyla $H\tilde{\subseteq}F$ 'dir.

ii. $e_1, e_2, e_3 \in E$ için

$$\begin{aligned} (F\tilde{\cap}G)(e_1) &= F(e_1) \cap G(e_1) = \{u_1, u_2\} \cap \Phi = \Phi \\ (F\tilde{\cap}G)(e_2) &= F(e_2) \cap G(e_2) = U \cup \{u_2\} = \{u_2\} \\ (F\tilde{\cap}G)(e_3) &= F(e_3) \cap G(e_3) = \Phi \cap \{u_1, u_3\} = \Phi \end{aligned}$$

olduğundan

$$F\tilde{\cap}G = \big\{(e_2, \{u_2\})\big\}$$

elde edilir.

iii. $e_1, e_2, e_3 \in E$ için

$$\begin{aligned}(H\tilde{\cup}F)(e_1) &= H(e_1) \cup F(e_1) = \{u_1\} \cup \{u_1, u_2\} = \{u_1, u_2\} \\ (H\tilde{\cup}F)(e_2) &= H(e_2) \cup F(e_2) = \{u_1, u_2\} \cup \{u_1, u_2, u_3\} = \{u_1, u_2, u_3\} \\ (H\tilde{\cup}F)(e_3) &= \emptyset\end{aligned}$$

olduğundan

$$H\tilde{\cup}F = \big\{(e_1, \{u_2\}), (e_2, \{u_1, u_2\})\big\}$$

elde edilir

iv. $F = \big\{(e_1, \{u_1, u_2\}), (e_2, U)\big\}$ esnek kümesinin esnek tümleyenini bulalım.

$$F^{\tilde{c}}(e_1) = \{u_3\}, \;\; F^{\tilde{c}}(e_2) = \Phi \text{ ve } F^{\tilde{c}}(e_3) = U$$

olduğundan

$$F^{\tilde{c}} = \{(e_1, \{u_3\}), (e_3, U)\}$$

elde edilir.

3. SEZGİSEL BULANIK ESNEK KÜMELER

Bu bölümde sezgisel bulanık esnek kümelerin tanımı verilecek ve temel özellikleri incelenecektir. Maji [15] tarafından yapılan sezgisel bulanık küme tanımı, Çağman [7]'ın esnek küme tanımı ile yeniden yorumlanarak, bu bölümde ele alınmıştır.

3.1 Sezgisel Bulanık Esnek Küme

Tanım 3.1.1 [15] U bir evrensel küme, E parametreler kümesi ve $A \subseteq E$ olsun. $F : A \to \mathcal{IF}(U)$ olmak üzere, (F, A) ikilisine U üzerinde bir sezgisel bulanık esnek küme denir.

Tanım 3.1.2 [15] (F, A) ve (G, B), U üzerinde tanımlı iki sezgisel bulanık esnek küme olmak üzere; (F, A) sezgisel bulanık esnek kümesinin (G, B) sezgisel bulanık esnek kümesinin sezgisel bulanık esnek alt kümesidir ancak ve ancak

i. $A \subset B$

ii. Her $e \in A$ için $F(e) \subseteq G(e)$'dir.

şartlarını sağlaması gerekir. Bu durum $(F, A)\tilde{\subseteq}(G, B)$ şeklinde gösterilir. Eğer (G, B), (F, A)'nın sezgisel bulanık esnek alt kümesi ise, bu durumda (F, A)'ya (G, B)'nin sezgisel bulanık esnek süper kümesi denir ve $(F, A)\tilde{\supseteq}(G, B)$ ile gösterilir.

Tanım 3.1.3 [15] (F, A) ve (G, B), U evrensel kümesi üzerinde iki sezgisel bulanık esnek küme olsun. Bu durumda; (G, B) kümesi (F, A) 'nın sezgisel bulanık esnek alt kümesi ve (F, A) kümesi (G, B) kümesinin sezgisel bulanık esnek alt kümesi ise (G, B) ve (F, A) kümelerine sezgisel bulanık esnek eşit kümeler denir.

Tanım 3.1.4 [15] (F, A) sezgisel bulanık esnek kümesinin tümleyeni $(F, A)^c$ ile gösterilir. Burada $(F, A)^c = (F^c, \neg A)$ eşitliği mevcuttur ve F^c fonksiyonu $F^c : \neg A \to \mathcal{P}(U)$ şeklinde tanımlı bir fonksiyondur. $F^c(e)$ ifadesi her $e \in \neg A$ için $F(\neg e)$ ifadesinin sezgisel bulanık esnek tümleyenini göstermektedir. $((F, A)^c)^c = (F, A)$ olduğu açık bir şekilde görülmektedir.

Tanım 3.1.5 [15] (F, A), U kümesi üzerinde tanımlı bir esnek küme olsun. Her $e \in A$ için $F(e) = \overline{0}$ ise bu durumda (F, A) kümesine sezgisel bulanık esnek boş küme denir ve $\tilde{\Phi}$ ile gösterilir.

Tanım 3.1.6 [15] (F,A), U kümesi üzerinde tanımlı bir esnek küme olsun. Her $e \in A$ için $F(e) = \overline{0}$ ise bu durumda (F,A) kümesine sezgisel bulanık esnek evrensel küme denir ve $\tilde{A}$ ile gösterilir. Sezgisel bulanık esnek boş küme ve sezgisel esnek evrensel küme tanımları göz önüne alındığında $A^c = \Phi$ ve $\Phi^c = A$ eşitliği kolayca görülür.

Tanım 3.1.7 [15] U üzerinde tanımlı olan (F,A) ve (G,B) sezgisel bulanık esnek kümelerinin birleşimi de U üzerinde sezgisel bulanık esnek küme olan (H,C) kümesidir ve $C = A \cup B$'dir. Ayrıca H fonksiyonu

$$H(e) = \begin{cases} f(e), & e \in A \setminus B \\ g(e), & e \in B \setminus A \\ f(e) \cup g(e), & e \in A \cap B \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. Bu durumda $(F,A)\tilde{\cup}(G,B) = (H,C)$ ile gösterilir ve sezgisel bulanık esnek kümelerin birleşimi olarak adlandırılır.

Tanım 3.1.8 [15] U üzerinde tanımlı olan (F,A) ve (G,B) sezgisel bulanık esnek kümelerinin kesişimi de U üzerinde sezgisel bulanık esnek küme olan (H,C) kümesidir. Burada $C = A \cap B$'dir. Her $e \in C$ için $H(e) = F(e) \cap G(e)$ şeklinde tanımlanır. (H,C) kümesine (F,A) ve (G,B) sezgisel bulanık esnek kümelerinin kesişimi denir ve $(F,A)\tilde{\cap}(G,B) = (H,C)$ ile gösterilir.

Tanım 3.1.9 [15] Eğer (F,A) *VE* (G,B) iki sezgisel bulanık esnek küme ise bu durumda "(F,A) *VE* (G,B)" ifadesi de sezgisel bulanık esnek kümedir ve $(F,A) \wedge (G,B)$ ile gösterilir. Her $e \in A$ ve $e' \in B$ için $H(e,e') = F(e)\tilde{\cap}G(e')$ olmak üzere $(F,A) \wedge (G,B) = (H, A \times B)$ şeklinde tanımlanır.

Tanım 3.1.10 [15] Eğer (F,A) ve (G,B) iki sezgisel bulanık esnek küme ise bu durumda "(F,A) *VEYA* (G,B)" ifadesi de sezgisel bulanık esnek kümedir. Bu küme; $(F,A) \vee (G,B)$ ile gösterilir ve $O(e,e') = F(e)\tilde{\cup}G(e')$ olmak üzere $(F,A) \vee (G,B) = (O, A \times B)$ şeklinde tanımlanır.

Bu tanımlar, özellike Tanım 3.1.4, (tümleyen kavramı) matematiksel olarak bir elemanın değilinin karşılığı olmadığı için bazı karışıklıklara yol açmaktadır. Bu karışıklığın giderilmesi için Çağman [7] tarafından esnek küme işlemleri yeniden tanımlanmıştır. Çalışmanın bundan sonraki kısmında Çağman [7]'ın makalesi baz alınarak sezgisel bulanık esnek küme işlemleri tekrar inşa edilecektir.

Tanım 3.1.11 X evrensel küme ve E parametre kümesi olsun. $f : E \to \mathcal{IF}(X)$ fonksiyonuna X üzerinde bir sezgisel bulanık esnek küme (*sbe*–küme) denir. Dolayısıyla bir f *sbe*–kümesi

$$f = \Big\{ \big(e, \{ \langle x, \mu_{f(e)}(x), \nu_{f(e)}(x) \rangle : x \in X \} \big) : e \in E \Big\}$$

şeklinde gösterilebilir.

Tanım 3.1.12 $f, g \in \mathbb{IFS}_E^X$ olsun. Her $e \in E$ için $f(e) \subseteq g(e)$ oluyorsa g, f'yi sbe-kapsar denir ve $f \sqsubseteq g$ şeklinde gösterilir.

Tanım 3.1.13 $f \in \mathbb{IFS}_E^X$ olsun. Her $e \in E$ için $f(e) = \overline{0}$ oluyorsa f'ye sbe-boş küme denir ve $\tilde{0}_E$ ile gösterilir.

Tanım 3.1.14 $f \in \mathbb{IFS}_E^X$ olsun. Her $e \in E$ için $f(e) = X$ oluyorsa f'ye sbe-evrensel küme denir ve $\tilde{1}_E$ ile gösterilir.

Tanım 3.1.15 $f, g \in \mathbb{IFS}_E^X$ olsun. f ile g'nin sbe-birleşimi $f \sqcup g$ ile gösterilir ve her $e \in E$ için $(f \sqcup g)(e) = f(e) \cup g(e)$ şeklinde tanımlanır.

Tanım 3.1.16 $f, g \in \mathbb{IFS}_E^X$ olsun. f ile g sbe-kesişimi $\sqcap g$ ile gösterilir ve her $e \in E$ için $(f \sqcap g)(e) = f(e) \cap g(e)$ şeklinde tanımlanır.

Tanım 3.1.17 $f \in \mathbb{IFS}_E^X$ olsun. f 'nin sbe-tümelyeni $f^{\tilde{c}}$ ile gösterilir ve her $e \in E$ için $f^{\tilde{c}}(e) = (f(e))^c$ şeklinde tanımlanır. Burada $(f(e))^c$ ifadesi $f(e)$ sezgisel bulanık kümesinin tümleyenini göstermektedir.

Teorem 3.1.1 $f, g, h \in \mathbb{IFS}_E^X$ verilsin. Bu takdirde aşağıdaki iddialar doğrudur.

i. $f \sqcap f = f$

ii. $f \sqcup f = f$

iii. $f^{\tilde{c}} \sqcap f = \tilde{0}_E$

iv. $f^{\tilde{c}} \sqcup f = \tilde{1}_E$

v. $\tilde{0}_E^{\tilde{c}} = \tilde{1}_E$ ve $\tilde{1}_E^{\tilde{c}} = \tilde{0}_E$

vi. $f \sqcap g = g \sqcap f$

vii. $f \sqcup g = g \sqcup f$

viii. $f \sqcap (g \sqcup h) = (f \sqcap g) \sqcup (f \sqcap h)$

ix. $f \sqcup (g \sqcap h) = (f \sqcup g) \sqcap (f \sqcup h)$

x. $(f \sqcap g)^{\tilde{c}} = f^{\tilde{c}} \sqcup g^{\tilde{c}}$

xi. $(f \sqcup g)^{\tilde{c}} = f^{\tilde{c}} \sqcap g^{\tilde{c}}$

xii. $f \sqcap \tilde{0}_E = \tilde{0}_E$ ve $f \sqcup \tilde{0}_E = f$

xiii. $f \sqcup \tilde{1}_E = \tilde{1}_E$ ve $f \sqcap \tilde{1}_E = f$

İspat.

i. Her $e \in E$ için,

$$(f \sqcap f)(e) = f(e) \cap f(e) = f(e)$$

olup, sbe-kümelerin sbe-kesişimleri tanımından

$$f \sqcap f = f$$

elde edilir.

ii. Her $e \in E$ için,

$$(f \sqcup f)(e) = f(e) \cup f(e) = f(e)$$

olup, sbe-kümelerin sbe-kesişimleri tanımından

$$f \sqcup f = f$$

elde edilir

iii. Her $e \in E$ için sbe-tümleyen işlemi tanımı dikkate alınırsa;

$$(f^{\tilde{c}} \sqcap f)(e) = f^{\tilde{c}}(e) \cap f(e) = (f(e))^c \cap f(e) = \overline{0}$$

olduğundan

$$f^{\tilde{c}} \sqcap f = \tilde{0}_E$$

elde edilir.

iv. Her $e \in E$ için sbe-tümleyen işlemi tanımı dikkate alınırsa,

$$(f^{\tilde{c}} \sqcup f)(e) = f^{\tilde{c}}(e) \cup f(e) = (f(e))^c \cup f(e) = \overline{1}$$

olduğundan

$$f^{\tilde{c}} \sqcup f = \tilde{1}_E$$

elde edilir.

v. sbe-boş küme ve sbe-evrensel küme tanımları dikkate alındığında, her $e \in E$ için

$$f(e) = \overline{0}$$

olduğundan

$$\tilde{0}_E^{\tilde{c}} = \tilde{1}_E$$

bulunur. Benzer şekilde, Her $e \in E$ için $f(e) = \overline{1}$ olduğundan;

$$\tilde{1}_E^{\tilde{c}} = \widetilde{0}_E$$

elde edilir.

vi. Her $e \in E$ için

$$(f \sqcap g)(e) = f(e) \cap g(e) = g(e) \cap f(e) = (g \sqcap f)(e)$$

olup,

$$f \sqcap g = g \sqcap f$$

elde edilir.

vii. Her $e \in E$ için

$$(f \sqcup g)(e) = f(e) \cup g(e) = g(e) \cup f(e) = (g \sqcup f)(e)$$

olup,

$$f \sqcup g = g \sqcup f$$

elde edilir.

viii. Her $e \in E$ için

$$(f \cap (g \cap h))(e) = (f \cap g)(e) \cup (f \cap h)(e)) = (f(e) \cap g(e)) \cup (f(e) \cap h(e)$$

olup,

$$f \sqcap (g \sqcup h) = (f \sqcap g) \sqcup (f \sqcap h)$$

elde edilir.

ix. Her $e \in E$ için

$$(f \cup (g \cap h))(e) = (f \cup g)(e) \cap (f \cup h)(e)) = (f(e) \cup g(e)) \cap (f(e) \cup h(e)$$

olup,

$$f \sqcup (g \sqcap h) = (f \sqcup g) \sqcap (f \sqcup h)$$

elde edilir.

x. Her $e \in E$ için

$$(f \cap g)^c(e) = f^c(e) \cup g^c(e)$$

olduğundan,

$$(f \sqcap g)^{\tilde{c}} = f^{\tilde{c}} \sqcup g^{\tilde{c}}$$

elde edilir.

xi. Her $e \in E$ için

$$(f \cup g)^c(e) = f^c(e) \cap g^c(e)$$

olduğundan;

$$(f \sqcup g)^{\tilde{c}} = f^{\tilde{c}} \sqcap g^{\tilde{c}}$$

elde edilir.

xii. Her $e \in E$ için

$$f(e) \cap \overline{0} = \overline{0}$$

ve

$$f(e) \cup \overline{0} = f(e)$$

olduğundan sırasıyla;

$$f \sqcap \tilde{0}_E = \tilde{0}_E$$

ve

$$f \sqcup \tilde{0}_E = f$$

elde edilir.

xiii. Her $e \in E$ için

$$f(e) \cup \overline{1} = \overline{1}$$

ve

$$f(e) \cap \overline{1} = f(e)$$

olduğundan sırasıyla

$$f \sqcup \tilde{1}_E = \tilde{1}_E$$

ve

$$f \sqcap \tilde{1}_E = f$$

elde edilir.

Örnek 3.1.1 $E = \{e_1, e_2\}$, $X = \{x_1, x_2\}$ ve

$$f = \Big\{\big(e_1\{\langle x_1, 0.2, 0.3\rangle, \langle x_2, 0.7, 0.1\rangle\}\big)\big(e_2\{\langle x_1, 0.4, 0.4\rangle, \langle x_2, 0.6, 0.3\rangle\}\big)\Big\}$$
$$g = \Big\{\big(e_1\{\langle x_1, 0.4, 0.6\rangle, \langle x_2, 0.7, 0.2\rangle\}\big)\big(e_2\{\langle x_1, 0.8, 0.8\rangle, \langle x_2, 0.6, 0.6\rangle\}\big)\Big\}$$
$$h = \Big\{\big(e_1\{\langle x_1, 0.6, 0.9\rangle, \langle x_2, 0.1, 0.3\rangle\}\big)\big(e_2\{\langle x_1, 0.2, 0.2\rangle, \langle x_2, 0.8, 0.9\rangle\}\big)\Big\}$$

olsun. Buradan

i. $f \sqsubseteq h$'dir:

$$e_1 \in E \text{ için } \mu_{f(e_1)} \leq \mu_{h(e_1)} \text{ ve } \nu_{f(e_1)} \geq \nu_{h(e_1)}$$

$$e_2 \in E \text{ için } \mu_{f(e_2)} \leq \mu_{h(e_2)} \text{ ve } \nu_{f(e_2)} \geq \nu_{h(e_2)}$$

olup, her $e_1, e_1 \in E$ için $f(e_1) \subseteq h(e_1)$ ve $f(e_2) \subseteq h(e_2)$ olup sezgisel bulanık esnek kapsama tanımından $f \sqsubseteq h$ elde edilir.

ii. $f \sqcap g$ *sbe*–kümesini bulalım:

$$(f \sqcap g)(e_1) = f(e_1) \cap g(e_1) \text{ ve } (f \sqcap g)(e_2) = f(e_2) \cap g(e_2)$$

olduğundan

$$f \sqcap g = \Big\{\big(e_1\{\langle x_1, 0.2, 0.3\rangle, \langle x_2, 0.7, 0.1\rangle\}\big)\big(e_2\{\langle x_1, 0.2, 0.3\rangle, \langle x_2, 0.7, 0.1\rangle\}\big)\Big\}$$

olarak bulunur.

iii. $f \sqcup g$ *sbe*–kümesini bulalım:

$$(f \sqcup g)(e_1) = f(e_1) \cup g(e_1) \text{ ve } (f \sqcup g)(e_2) = f(e_2) \cup g(e_2)$$

olduğundan

$$f \sqcup g = \Big\{\big(e_1\{\langle x_1, 0.4, 0.6\rangle, \langle x_2, 0.7, 0.2\rangle\}\big)\big(e_2\{\langle x_1, 0.8, 0.8\rangle, \langle x_2, 0.6, 0.6\rangle\}\big)\Big\}$$

olarak bulunur.

iv. $f^{\tilde{c}}$ *sbe*–kümesini bulalım:

$$f^{\tilde{c}}(e) = (f(e))^{\tilde{c}}$$

olduğundan

$$f^{\tilde{c}} = \Big\{\big(e_1\{\langle x_1, 0.3, 0.2\rangle, \langle x_2, 0.1, 0.7\rangle\}\big)\big(e_2\{\langle x_1, 0.4, 0.4\rangle, \langle x_2, 0.3, 0.6\rangle\}\big)\Big\}$$

elde edilir.

Tanım 3.1.18 $f, g \in \mathbb{IFS}_E^X$ olmak üzere "f *ve* g" ifadesi bir sezgisel bulanık esnek kümedir ve $f \wedge g$ şeklinde gösterilir. $h = f \wedge g$ olmak üzere her $e, e' \in E$ için $h(e, e') = f(e) \cap g(e)$ şeklinde tanımlanır. Eğer $f(e) = \tilde{0}$ veya $g(e') = \tilde{0}$ ise $\big((e, e'), h(e, e')\big)$ sıralı ikilisi sezgisel bulanık esnek kümede gösterilmez. Dolayısıyla $f \wedge g$ kümesi

$$f \wedge g = \Big\{\big((e, e'), f(e) \cap g(e')\big) : e, e' \in E\Big\}$$

olarak yazılabilir.

Tanım 3.1.19 $f, g \in \mathbb{IFS}_E^X$ olmak üzere "f veya g" ifadesi bir sezgisel bulanık esnek kümedir ve $f \vee g$ şeklinde gösterilir. $h = f \vee g$ olmak üzere her $e, e' \in E$ için $h(e, e') = f(e) \cup g(e)$ şeklinde tanımlanır. Eğer $f(e) = \tilde{0}$ veya $g(e') = \tilde{0}$ ise $\big((e, e'), h(e, e')\big)$ sıralı ikilisi sezgisel bulanık esnek kümede gösterilmez. Dolayısıyla $f \vee g$ kümesi

$$f \vee g = \Big\{\big((e, e'), f(e) \cup g(e')\big) : e, e' \in E\Big\}$$

olarak yazılabilir.

Teorem 3.1.2 $f, g \in \mathbb{IFS}_E^X$ olmak üzere, aşağıdaki iddialar doğrudur.

i. $(f \wedge g)^{\tilde{c}} = f^{\tilde{c}} \vee g^{\tilde{c}}$

ii. $(f \vee g)^{\tilde{c}} = f^{\tilde{c}} \wedge g^{\tilde{c}}$

İspat. $f, g \in \mathbb{IFS}_E^X$ olsun.

i. $f \wedge g$ kümesi tanımından

$$\begin{aligned}
(f \wedge g)^{\tilde{c}} &= \Big\{\big((e, e'), h(e, e')\big) : e, e' \in E\Big\}^{\tilde{c}} \\
&= \Big\{\big((e, e'), f(e) \cap g(e')\big) : e, e' \in E\Big\}^{\tilde{c}} \\
&= \Big\{\big((e, e'), f(e)^c \cup g(e')^c\big) : e, e' \in E\Big\} \\
&= f^{\tilde{c}} \vee g^{\tilde{c}}
\end{aligned}$$

ii. $f \vee g$ kümesi tanımından

$$\begin{aligned}
(f \vee g)^{\tilde{c}} &= \Big\{\big((e, e'), h(e, e')\big) : e, e' \in E\Big\}^{\tilde{c}} \\
&= \Big\{\big((e, e'), f(e) \cup g(e')\big) : e, e' \in E\Big\}^{\tilde{c}} \\
&= \Big\{\big((e, e'), f(e)^c \cap g(e')^c\big) : e, e' \in E\Big\} \\
&= f^{\tilde{c}} \wedge g^{\tilde{c}}
\end{aligned}$$

3.2 Sezgisel Bulanık Esnek Fonksiyonlar

Tanım 3.2.1 $\mathbb{IFS}_E^X$ ve $\mathbb{IFS}_K^Y$ sırasıyla X ve Y üzerinde tüm *sbe*–kümelerin kümesi olsun. $\varphi : X \to Y$ ve $\psi : E \to K$ fonksiyonları verilsin. $\varphi_\psi : \mathbb{IFS}_E^X \to \mathbb{IFS}_K^Y$ ifadesine sezgisel bulanık esnek fonksiyon (*sbe*–fonksiyon) denir.

i. $f \in \mathbb{IFS}_E^X$'nin φ_ψ altındaki görüntüsü $\varphi_\psi(f)$ ile gösterilir,

$$\mu_{\varphi(f)(k)}(y) = \begin{cases} \bigvee_{e\in\psi^{-1}(k),\, x\in\varphi^{-1}(y)} \mu_{f(e)}(x), & \varphi^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0, & \varphi^{-1}(y) = \emptyset \end{cases}$$

ve

$$\nu_{\varphi(f)(k)}(y) = \begin{cases} \bigwedge_{e\in\psi^{-1}(k),\, x\in\varphi^{-1}(y)} \nu_{f(e)}(x), & \varphi^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 1, & \varphi^{-1}(y) = \emptyset \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

ii. $g \in \mathbb{IFS}_K^Y$ nın φ_ψ^{-1} altındaki ters görüntüsü $\varphi_\psi^{-1}(g)$ ile gösterilir,

$$\mu_{\varphi^{-1}(g)(e)}(x) = \mu_{g(\psi(e))}(\varphi(x))$$

ve

$$\nu_{\varphi^{-1}(g)(e)}(x) = \nu_{G(\psi(e))}(\varphi(u))$$

şeklinde tanımlanır. Dolayısıyla aşağıdaki diagramı yazabiliriz.

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & \mathcal{IF}(X) \\ \psi\downarrow & & \downarrow\varphi \\ K & \xrightarrow[g]{} & \mathcal{IF}(Y) \end{array}$$

φ ve ψ fonksiyonları birebir ise φ_ψ fonksiyonuna *sbe*–birebir fonksiyon denir. Eğer φ ve ψ fonksiyonları örten ise φ_ψ fonksiyonuna da *sbe*–örten fonksiyon denir.

Örnek 3.2.1 $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, $K = \{k_1, k_2, k_3\}$ ve $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ olsun. $\varphi : X \to Y$ ve $\psi : E \to K$ fonksiyonları

$$\begin{array}{ll} \psi(e_1) = k_1, & \varphi(x_1) = y_1 \\ \psi(e_2) = k_1, & \varphi(x_2) = y_1 \\ \psi(e_3) = k_2, & \varphi(x_3) = y_2 \\ \psi(e_4) = k_3, & \varphi(x_4) = y_3 \end{array}$$

şeklinde tanımlansın. $f \in \mathbb{IFS}_E^X$ ve $g \in \mathbb{IFS}_K^Y$ kümeleri

$$\begin{aligned} f &= \Big\{ \big(e_1, \{\langle x_1, 0.8, 0.1\rangle, \langle x_2, 0.2, 0.7\rangle, \langle x_3, 0.6, 0.4\rangle, \langle x_4, 0.8, 0.2\rangle\}\big), \\ &\quad \big(e_2, \{\langle x_1, 0.2, 0.5\rangle, \langle x_2, 0.5, 0.5\rangle, \langle x_3, 0.1, 0.7\rangle, \langle x_4, 0.8, 0.2\rangle\}\big), \\ &\quad \big(e_3, \{\langle x_1, 0.4, 0.6\rangle, \langle x_2, 0.3, 0.7\rangle, \langle x_3, 0.9, 0.1\rangle, \langle x_4, 0.6, 0.3\rangle\}\big), \\ &\quad \big(e_4, \{\langle x_1, 0.8, 0.1\rangle, \langle x_2, 0.7, 0.2\rangle, \langle x_3, 0.2, 0.6\rangle, \langle x_4, 0.4, 0.5\rangle\}\big) \Big\} \\ g &= \Big\{ \big(k_1, \{\langle y_1, 0.5, 0.4\rangle, \langle y_2, 0.3, 0.7\rangle, \langle y_3, 0.4, 0.6\rangle\}\big) \\ &\quad \big(k_2, \{\langle y_1, 0.2, 0.7\rangle, \langle y_2, 0.1, 0.8\rangle, \langle y_3, 0.4, 0.5\rangle\}\big) \\ &\quad \big(k_3, \{\langle y_1, 0.3, 0.6\rangle, \langle y_2, 0.5, 0.3\rangle, \langle y_3, 0.4, 0.6\rangle\}\big) \Big\} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlansın. Buradan,

$$\begin{aligned} \varphi_\psi(f) &= \Big\{ \big(k_1, \{\langle y_1, 0.8, 0.1\rangle, \langle y_2, 0.6, 0.4\rangle, \langle y_3, 0.8, 0.2\rangle\}\big), \\ &\quad \big(k_2, \{\langle y_1, 0.4, 0.6\rangle, \langle y_2, 0.9, 0.1\rangle, \langle y_3, 0.6, 0.3\rangle\}\big), \\ &\quad \big(k_3, \{\langle y_1, 0.8, 0.1\rangle, \langle y_2, 0.2, 0.6\rangle, \langle y_3, 0.4, 0.5\rangle\}\big), \Big\} \\ \varphi_\psi^{-1}(g) &= \Big\{ \big(e_1, \{\langle x_1, 0.8, 0.1\rangle, \langle x_2, 0.8, 0.1\rangle, \langle x_3, 0.6, 0.4\rangle, \langle x_4, 0.8, 0.2\rangle\}\big), \\ &\quad \big(e_2, \{\langle x_1, 0.8, 0.1\rangle, \langle x_2, 0.8, 0.1\rangle, \langle x_3, 0.6, 0.4\rangle, \langle x_4, 0.8, 0.2\rangle\}\big), \\ &\quad \big(e_3, \{\langle x_1, 0.4, 0.6\rangle, \langle x_2, 0.4, 0.6\rangle, \langle x_3, 0.9, 0.1\rangle, \langle x_4, 0.6, 0.3\rangle\}\big), \\ &\quad \big(e_4, \{\langle x_1, 0.8, 0.1\rangle, \langle x_2, 0.8, 0.1\rangle, \langle x_3, 0.2, 0.6\rangle, \langle x_4, 0.4, 0.5\rangle\}\big), \end{aligned}$$

Teorem 3.2.1 $f, f_1, f_2 \in \mathbb{IFS}_E^X$ ve $\varphi_\psi : \mathbb{IFS}_E^X \to \mathbb{IFS}_K^Y$ bir *sbe*–fonksiyon olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler doğrudur.

i. $f_1 \sqsubseteq f_2$ ise $\varphi_\psi(f_1) \sqsubseteq \varphi_\psi(f_2)$

ii. $f \sqsubseteq \varphi_\psi^{-1}(\varphi_\psi(f))$ dır. Buradaki eşitlik ancak ve ancak φ_ψ *sbe*–birebir olduğunda sağlanır.

iii. $\varphi_\psi(f_1 \sqcup f_2) = \varphi_\psi(f_1) \sqcup \varphi_\psi(f_2)$

iv. $\varphi_\psi(f_1 \sqcap f_2) \sqsubseteq \varphi_\psi(f_1) \sqcap \varphi_\psi(f_2)$

İspat.

i. $f_1 \sqsubseteq f_2$ olsun. Buradan, her $e \in E$ için $f_1(e) \subseteq f_2(e)$ 'dir. Yani, her $e \in E$ ve her $x \in X$ için $\mu_{f_1(e)}(x) \leq \mu_{f_2(e)}(x)$ ve $\gamma_{f_1(e)}(x) \geq \gamma_{f_2(e)}(x)$ olur. Dolayısıyla $k \in K$ ve $y \in Y$ için;

$$\bigvee_{\substack{e\in\psi^{-1}(k)\\ x\in\varphi^{-1}(y)}} \mu_{f_1(e)}(x) \leq \bigvee_{\substack{e\in\psi^{-1}(k)\\ x\in\varphi^{-1}(y)}} \mu_{f_2(e)}(x)$$

ve

$$\bigwedge_{\substack{e\in\psi^{-1}(k)\\ x\in\varphi^{-1}(y)}} \nu_{f_1(e)}(x) \geq \bigvee_{\substack{e\in\psi^{-1}(k)\\ x\in\varphi^{-1}(y)}} \mu_{f_2(e)}(x)$$

yazabiliriz. Bu ise bize,

$$\varphi_\psi(f_1) \sqsubseteq \varphi_\psi(f_2)$$

olduğunu gösterir.

ii. $f \sqsubseteq \varphi_{\psi^{-1}}(\varphi_\psi(f))$ kapsamasını göstermek ile her $e \in E$ için $f(e) \subseteq (\varphi_{\psi^{-1}}(\varphi_\psi(f))(e))$ kapsamasını göstermek eşdeğerdir. Dolayısıyla her $e \in E$ ve her $x \in X$ için

$$\mu_{f(e)}(x) \leq \mu_{\varphi^{-1}(\varphi(f)(e))}(x) \text{ ve } \nu_{f(e)}(x) \leq \nu_{\varphi^{-1}(\varphi(f)(e))}(x)$$

olduğu gösterilmelidir.

$$\begin{aligned} \mu_{\varphi^{-1}(\varphi(f))(e)}(x) &= \mu_{(\varphi(f))(\psi(e))}\varphi(x) \\ &= \begin{cases} \bigvee_{\substack{e\in\psi^{-1}(\psi(e))\\ x\in\varphi^{-1}(\varphi(x))}} \mu_{f(e)}(x), & \varphi^{-1}(\varphi(x)) \neq \emptyset \\ 0, & \varphi^{-1}(\varphi(x)) = \emptyset \end{cases} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \nu_{f(e)}(x) \geq \nu_{\varphi^{-1}(\varphi(f))(e)}(x) &= \nu_{(\varphi(f))(\psi(e))}\varphi(x) \\ &= \begin{cases} \bigwedge_{\substack{e\in\psi^{-1}(\psi(e))\\ x\in\varphi^{-1}(\varphi(x))}} \nu_{f(e)}(x), & \varphi^{-1}(\varphi(x)) \neq \emptyset \\ 0, & \varphi^{-1}(\varphi(x)) = \emptyset \end{cases} \end{aligned}$$

eşitliklerinden istenen elde edilmiş olur. Dolayısıyla

$$f \sqsubseteq \varphi_\psi^{-1}(\varphi_\psi(f))$$

bulunur. Eşitliğin ancak ve ancak φ ve ψ fonksiyonlarının birebir olmasıysa, yani φ_ψ *sbe*–fonksiyonunun *sbe*–birebir olmasıyla sağlanacağı açıktır.

iii. $k \in K$ ve $y \in Y$ için

$$\begin{aligned}
\mu_{(\varphi(f_1 \sqcup f_2))(k)}(y) &= \begin{cases} \bigvee_{\substack{e\in\psi^{-1}(k) \\ x\in\varphi^{-1}(y)}} \mu_{(f_1\sqcup f_2)(e)}(x), & \varphi^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0, & \varphi^{-1}(y) = \emptyset \end{cases} \\
&= \begin{cases} \bigvee_{\substack{e\in\psi^{-1}(k) \\ x\in\varphi^{-1}(y)}} \{\mu_{f_1(e)}(x) \vee \mu_{f_2(e)}(x)\}, & \varphi^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0, & \varphi^{-1}(y) = \emptyset \end{cases} \\
&= \begin{cases} \bigvee_{\substack{e\in\psi^{-1}(k) \\ x\in\varphi^{-1}(y)}} \mu_{f_1(e)}(x), & \varphi^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0, & \varphi^{-1}(y) = \emptyset \end{cases} \\
&\quad \vee \begin{cases} \bigvee_{\substack{e\in\psi^{-1}(k) \\ x\in\varphi^{-1}(y)}} \mu_{f_2(e)}(x), & \varphi^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0, & \varphi^{-1}(y) = \emptyset \end{cases}
\end{aligned}$$

iv. $(f_1 \sqcap f_2) \sqsubseteq f_1$ ve $(f_1 \sqcap f_2) \sqsubseteq f_2$ kapsamalarından i yardımıyla

$$\varphi_\psi(f_1 \sqcap f_2) \sqsubseteq \varphi_\psi(f_1) \text{ ve } \varphi_\psi(f_1 \sqcap f_2) \sqsubseteq \varphi_\psi(f_2)$$

bulunur. Buradan da

$$\varphi_\psi(f_1 \sqcap f_2) \sqsubseteq \varphi_\psi(f_1) \sqcap \varphi_\psi(f_2)$$

elde edilir.

Teorem 3.2.2 $g, g_1, g_2 \in \mathbb{IFS}_K^Y$ ve $\varphi_\psi : \mathbb{IFS}_E^X \to \mathbb{IFS}_K^Y$ bir *sbe*–fonksiyon olsun.

i. $\varphi_\psi(\varphi^{-1}(g)) \sqsubseteq g$ (Eşitlik ancak ve ancak φ_ψ *sbe*–örten olduğunda sağlanır.)

ii. $\varphi_\psi^{-1}(g_1 \sqcup g_2) = \varphi_{\psi^{-1}}(g_1) \sqcup \varphi_{\psi^{-1}}(g_2)$

iii. $\varphi_\psi^{-1}(g_1 \sqcap g_2) = \varphi_{\psi^{-1}}(g_1) \sqcap \varphi_{\psi^{-1}}(g_2)$

iv. $\varphi_\psi^{-1}(g^{\tilde{c}}) = \left(\varphi_\psi^{-1}(g)\right)^{\tilde{c}}$

İspat.

i. $\varphi_\psi(\varphi_\psi^{-1}(g)) \sqsubseteq g$ kapsamasının sağlanması her $k \in K$ için $(\varphi_\psi(\varphi_\psi^{-1}(g))(k) \sqsubseteq g(k)$ kapsamasına eşdeğerdir.

$$\mu_{(\varphi(\varphi^{-1})(g))(k)}(y) = \begin{cases} \bigvee_{\substack{e\in\psi^{-1}(k) \\ x\in\varphi^{-1}(y)}} \mu_{\varphi^{-1}(g(e))}(x), & \varphi^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0, & \varphi^{-1}(y) = \emptyset \end{cases} \leq \mu_{g(k)}(y)$$

Benzer şekilde,

$$\begin{aligned}
\nu_{(\varphi(f_1 \sqcup f_2))(k)}(y) &= \begin{cases} \bigwedge_{\substack{e\in\psi^{-1}(k) \\ x\in\varphi^{-1}(y)}} \nu_{(f_1\sqcup f_2)(e)}(x), & \varphi^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0, & \varphi^{-1}(y) = \emptyset \end{cases} \\
&= \begin{cases} \bigwedge_{\substack{e\in\psi^{-1}(k) \\ x\in\varphi^{-1}(y)}} \{\nu_{f_1(e)}(x) \wedge \nu_{f_2(e)}(x)\}, & \varphi^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0, & \varphi^{-1}(y) = \emptyset \end{cases} \\
&= \begin{cases} \bigwedge_{\substack{e\in\psi^{-1}(k) \\ x\in\varphi^{-1}(y)}} \mu_{f_1(e)}(x), & \varphi^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0, & \varphi^{-1}(y) = \emptyset \end{cases} \\
&\quad \wedge \begin{cases} \bigwedge_{\substack{e\in\psi^{-1}(k) \\ x\in\varphi^{-1}(y)}} \mu_{f_2(e)}(x), & \varphi^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0, & \varphi^{-1}(y) = \emptyset \end{cases}
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise $\varphi_\psi(f_1 \sqcup f_2) = \varphi_\psi(f_1) \sqcup \varphi_\psi(f_2)$ olduğunu gösterir.

$$\nu_{g(k)}(y) \leq \nu_{(\varphi(\varphi^{-1}(y)))(k)}(y) = \begin{cases} \bigwedge_{\substack{e\in\psi^{-1}(k) \\ x\in\varphi^{-1}(y)}} \mu_{\varphi^{-1}(g(e))}(x), & \varphi^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0, & \varphi^{-1}(y) = \emptyset \end{cases}$$

olduğundan $\varphi_\psi(\varphi_\psi^{-1}(g)) \sqsubseteq g$ bulunur.

ii. $\varphi^{-1}(g_1 \sqcup g_2) = \varphi^{-1}(g_1) \sqcup \varphi^{-1}(g_2)$ olması için, $e \in E$ olmak üzere

$$\varphi^{-1}(g_1 \sqcup g_2)(e) = (\varphi^{-1}(g_1) \sqcup \varphi^{-1}(g_2))(e)$$

eşitliğinin sağlanması gerekir. Buradan, her $e \in E$ ve her $x \in X$ için

$$\begin{aligned}
\mu_{\varphi^{-1}(g_1\sqcup g_2)(e)}(x) &= \mu_{(g_1\sqcup g_2)(\psi(e))}(\varphi(x)) \\
&= \mu_{g_1(\psi(e))}(\varphi(x)) \vee \mu_{g_2(\psi(e))}(\varphi(x)) \\
&= \mu_{\varphi^{-1}(g_1)(e)}(x) \vee \mu_{\varphi^{-1}(g_2(e))}(x)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\nu_{\varphi^{-1}(g_1\sqcup g_2)(e)}(x) &= \nu_{(g_1\sqcup g_2)(\psi(e))}(\varphi(x)) \\
&= \nu_{g_1(\psi(e))}(\varphi(x)) \vee \mu_{g_2(\psi(e))}(\varphi(x)) \\
&= \mu_{\varphi^{-1}(g_1)(e)}(x) \vee \mu_{\varphi^{-1}(g_2(e))}(x)
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Bu da istenendir.

iii. $\varphi^{-1}(g_1 \sqcap g_2) = \varphi^{-1}(g_1) \sqcap \varphi^{-1}(g_2)$ olması için, $e \in E$ olmak üzere

$$\varphi^{-1}(g_1 \sqcap g_2)(e) = (\varphi^{-1}(g_1) \sqcap \varphi^{-1}(g_2))(e)$$

eşitliğinin sağlanması gerekir. Buradan, her $e \in E$ ve her $x \in X$ için

$$\begin{aligned}\mu_{\varphi^{-1}(g_1 \sqcap g_2)(e)}(x) &= \mu_{(g_1 \sqcap g_2)(\psi(e))}(\varphi(x)) \\ &= \mu_{g_1(\psi(e))}(\varphi(x)) \wedge \mu_{g_2(\psi(e))}(\varphi(x)) \\ &= \mu_{\varphi^{-1}(g_1)(e)}(x) \wedge \mu_{\varphi^{-1}(g_2(e))}(x)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\nu_{\varphi^{-1}(g_1 \sqcap g_2)(e)}(x) &= \nu_{(g_1 \sqcap g_2)(\psi(e))}(\varphi(x)) \\ &= \nu_{g_1(\psi(e))}(\varphi(x)) \wedge \mu_{g_2(\psi(e))}(\varphi(x)) \\ &= \mu_{\varphi^{-1}(g_1)(e)}(x) \wedge \mu_{\varphi^{-1}(g_2(e))}(x)\end{aligned}$$

olarak bulunur. Bu da istenendir.

iv. Herhangi bir $e \in E$ için $(\varphi_{\psi}^{-1}(g^{\tilde{c}}))(e) = (\varphi_{\psi}^{-1}(g))^{\tilde{c}}(e)$ olduğu gösterilmelidir. Buradan her $e \in E$ ve her $x \in X$ için

$$\begin{aligned}\mu_{\varphi^{-1}(g^{\tilde{c}})(e)}(x) &= \mu_{g^{\tilde{c}}(\psi(e))}(\varphi(x)) \\ &= \mu_{\varphi^{-1}(g)^{\tilde{c}}(e)}(x)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\nu_{\varphi^{-1}(g^{\tilde{c}})(e)}(x) &= \nu_{g^{\tilde{c}}(\psi(e))}(\varphi(x)) \\ &= \nu_{\varphi^{-1}(g)^{\tilde{c}}(e)}(x)\end{aligned}$$

olur. Bu da istenendir.

Tanım 3.2.2 $f \in \mathbb{IFS}_E^X$ verilsin. Bir $e \in E$ için $f(e) \neq \overline{0}$ ve her $e' \in E \setminus \{e\}$ için $f(e') = \overline{0}$ ise f *sbe*–kümesine sezgisel bulanık esnek nokta (*sbe*–nokta) denir ve e_f ile gösterilir.

Tanım 3.2.3 e_f bir *sbe*–nokta ve $g \in \mathbb{IFS}_E^X$ olsun. Eğer $f(e) \subseteq g(e)$ ise e_f *sbe*–noktasına g *sbe*–kümesine aittir denir ve $e_f \tilde{\in} g$ ile gösterilir.

Örnek 3.2.2 $E = \{a, b, c, d\}$ ve $X = \{x, y, z\}$ olsun.

$$\begin{aligned}f(a) &= \Big\{\big(a, \{\langle x, 0.8, 0.1\rangle, \langle y, 0.5, 0.5\rangle, \langle z, 0.6, 0.2\rangle\}\big)\Big\} \\ f(b) &= \Big\{\big(c, \{\langle x, 0.7, 0.2\rangle, \langle y, 0.4, 0.5\rangle, \langle z, 0.3, 0.7\rangle\}\big)\Big\}\end{aligned}$$

olarak tanımlanıyor.

$$a_g = \Big\{\big(a, \langle x, 0.5, 0.4\rangle, \langle y, 0.4, 0.6\rangle, \langle z, 0.5, 0.3\rangle\big)\Big\}$$

bir *sbe*–noktadır ve $a_g \tilde{\in} f$ dir.

Teorem 3.2.3 Her *sbe*–küme, tüm *sbe*–noktalarının bir birleşimi olarak yazılır.

İspat. $f \in \mathbb{IFS}_E^X$ ve $\{e_{g_k}\}_{k\in\Lambda}$ ailesi, f'nin tüm *sbe*–noktalarının kümesi olsun. Bu durumda, her $e_i \in E$ için

$$f(e_i) = \bigcup_{k\in\Lambda} G_k(e_i)$$

olur. Buradan,

$$f = \Big\{(e_i, f(e_i)) : e_i \in E\Big\}$$

elde edilir.

Teorem 3.2.4 [12] $f, g \in \mathbb{IFS}_E^X$ olsun. $f \sqsubseteq g$ ancak ve ancak her $e_h \tilde{\in} f$ için $e_h \tilde{\in} g$ olmasıdır.

İspat. $(\Rightarrow)$: $f \sqsubseteq g$ olsun.Bu durumda here$\in E$ için $f(e) \sqsubseteq g(e)$ olur. Eğer;
$e_h \tilde{\in} f$ ise $f \sqsubseteq g$ 'dir. Çünkü

$$h(e) \sqsubseteq g(e) \sqsubseteq g(e)$$

buradan, $h(e) \sqsubseteq g(e)$ olup; böylece $e_h \tilde{\in} g$ elde edilir.
$(\Leftarrow)$: Eğer, her $e_h \tilde{\in} f$ olması durumunda $e_h \tilde{\in} g$ oluyorsa, her sezgisel bulanık esnek küme sezgisel bulanık esnek noktaların bir birleşimi olarak yazılabileceğinden

$$\bigsqcup_{e_h \tilde{\in} f} e_h = f$$

buradan

$$\bigsqcup_{e_h \tilde{\in} f} e_h \sqsubseteq g$$

olur. Böylece $f \sqsubseteq g$ elde edilir.

4. SEZGİSEL BULANIK ESNEK TOPOLOJİK UZAYLAR

4.1 Sezgisel Bulanık Esnek Topoloji

Tanım 4.1.1 $\tau \subseteq \mathbb{IFS}_E^X$ küme ailesi aşağıdaki şartları sağlıyorsa bu aileye X üzerinde bir sezgisel bulanık esnek topoloji (*sbe*–topoloji) denir.

i. $\tilde{0}_E, \tilde{1}_E \in \tau$

ii. Herhangi $f, g \in \tau$ için $f \sqcap g \in \tau$

iii. Herhangi bir $\{f_i\}_{i\in I} \subseteq \tau$ için $\bigsqcup_{i\in I} f_i \in \tau$

Eğer τ, X üzerinde bir *sbe*–topoloji ise, (X, τ, E) üçlüsüne X üzerinde sezgisel bulanık esnek topolojik uzay (sbe topolojik uzay) denir. τ'nun her bir elemanına *sbe*–açık küme denir. Eğer, $f^c \in \tau$ ise bu durumda f kümesine X üzerinde *sbe*–kapalı küme denir. (X, τ, E) *sbe*–topolojik uzayındaki tüm *sbe*–kapalı kümeleri $\kappa_\tau = \{f : f^c \in \tau\}$ ile gösterilir.

Örnek 4.1.1 $\tau^1 = \mathbb{IFS}_E^X$ ve $\tau^0 = \{\tilde{0}_E, \tilde{1}_E\}$ olmak üzere (X, τ^1, E) ve (X, τ^0, E) *sbe*–topolojik uzaylar olsun. Bu iki *sbe*–topolojik uzay üzerindeki tüm *sbe*–açık kümeler aynı zamanda *sbe*–kapalı kümelerdir.

Tanım 4.1.2 (X, τ, E) *sbe*–topolojik uzay ve $f \in \mathbb{IFS}_E^X$ olsun. Bu durumda f'nin *sbe*–içi f° ile gösterilir ve

$$f^\circ = \bigsqcup_{\substack{g\in\tau \\ g\sqsubseteq f}} g$$

şekilde tanımlanır.

Tanım 4.1.3 (X, τ, E) *sbe*–topolojik uzay ve $f \in \mathbb{IFS}_E^X$ olsun. Bu durumda f'nin *sbe*–kapanışı $\overline{f}$ ile gösterilir ve

$$\overline{f} = \bigsqcap_{\substack{h^{\tilde{c}}\in\tau \\ f\sqsubseteq h}} h$$

şekilde tanımlanır.

Teorem 4.1.1 (X, τ, E) bir *sbe*–topolojik uzay olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler doğrudur.

i. $\tilde{1}_E$ ve $\tilde{0}_E$, X üzerinde *sbe*–kapalı kümedir.

ii. Herhangi sayıda *sbe*–kapalı kümenin kesişimi yine *sbe*–kapalı kümedir.

iii. Herhangi iki *sbe*–kapalı kümenin birleşimi yine *sbe*–kapalı kümedir.

Teorem 4.1.2 (X, τ, E), X üzerinde *sbe*–topolojik uzay ve $f \in \mathbb{IFS}_E^X$ olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler sağlanır.

i. $f^\circ \sqsubseteq f$

ii. $f \sqsubseteq g$ ise $f^\circ \sqsubseteq g^\circ$

iii. $f^\circ \in \tau$

iv. f *sbe*–açık kümedir ancak ve ancak $f^\circ = f$

v. $(f^\circ)^\circ = f^\circ$

vi. $(\tilde{0}_E)^\circ = \tilde{0}_E$ ve $(\tilde{1}_E)^\circ = \tilde{1}_E$'dır.

İspat. $f \in \mathbb{IFS}_E^X$ olsun. Buradan,

i. f'nin sbe-içi

$$f^\circ = \bigsqcup_{\substack{g \in \tau \\ g \sqsubseteq f}} g$$

olduğundan $f^\circ \sqsubseteq f$ elde edilir.

ii. $f \sqsubseteq g$ ve $f^\circ \sqsubseteq f$ olduğundan $f^\circ \sqsubseteq g$ dir. *i.*'den $g^\circ \sqsubseteq g$ ve g'nin kapsadığı en geniş açık küme g'nin *sbe*–içi olduğundan

$$f^\circ \sqsubseteq g^\circ \sqsubseteq g$$

elde edilir.

iii. f *sbe*–kümesinin *sbe*–içi tanımı gereğince

$$f^\circ = \bigsqcup_{\substack{g \in \tau \\ g \sqsubseteq f}} g$$

olup $f^\circ \in \tau$ elde edilir.

iv. f *sbe*–açık olsun. *i.*'den $f^\circ \sqsubseteq f$ dir. Diğer taraftan f *sbe*–açık olduğundan $f \sqsubseteq f$ ve f *sbe*–açık kümesinin kapsadığı en geniş açık küme f° olup

$$f \sqsubseteq f^\circ \sqsubseteq f$$

dir. Buradan

$$f^\circ \sqsubseteq f \text{ ve } f \sqsubseteq f^\circ$$

olduğundan $f = f^\circ$ elde edilir.

Tersine olarak $f = f^\circ$ olsun. f° açık olduğundan f açıktır.

v. $g = f^\circ$ olsun. *iii.* ve *iv.* 'den $g = g^\circ$ olur. Böylece,

$$(f^\circ)^\circ = f^\circ$$

elde edilir.

vi. $\tilde{0}_E$ ve $\tilde{1}_E$ *sbe*–açık kümeler olduğundan *iv.* 'den dolayı,

$$(\tilde{0}_E)^\circ = \tilde{0}_E \ \ ve \ \ (\tilde{1}_E)^\circ = \tilde{1}_E$$

elde edilir.

Teorem 4.1.3 (X, τ, E)bir *sbe*–topolojik uzay ve $f, g \in \mathbb{IFS}_E^X$ olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler sağlanır.

i. $f \sqsubseteq \overline{f}$

ii. $f \sqsubseteq g$ ise $\overline{f} \sqsubseteq \overline{g}$

iii. $(\overline{f})^c \in \tau$

iv. f *sbe*–kapalı kümedir ancak ve ancak $\overline{f} = f$

v. $\overline{\overline{f}} = \overline{f}$

vi. $\overline{\tilde{0}}_E = \tilde{0}_E$ ve $\overline{\tilde{1}}_E = \tilde{1}_E$'dır.

İspat. $f \in \mathbb{IFS}_E^X$ olsun. Buradan,

i. *sbe*–topolojik uzaylarda kapanış işlemi dikkate alındığında;

$$f \sqsubseteq \overline{f}$$

olduğu açıktır.

ii. $f, g \in \mathbb{IFS}_E^X$ ve $f \sqsubseteq g$ olsun. *i.*'den

$$g \sqsubseteq \overline{g}$$

elde edilir. O halde; $f \sqsubseteq \overline{g}$ olur. Ayrıca, *sbe*–kapanış tanımından f'yi kapsayan en küçük *sbe*–kapalı küme $\overline{f}$ olduğundan,

$$f \sqsubseteq \overline{f} \sqsubseteq \overline{g}$$

bulunur. Böylece

$$\overline{f} \sqsubseteq \overline{g}$$

elde edilir.

iii. Teorem 4.1.3 *iii.* gereğince $(f^c)^\circ \in \tau$ olur. Buradan, *sbe*–kapanış ve *sbe*–iç tanımları dikkate alınırsa

$$(\overline{f})^c = \Big(\bigsqcap_{\substack{h^{\tilde{c}} \in \tau \\ f \sqsubseteq h}} h\Big)^c = \bigsqcup_{\substack{g \in \tau \\ g \sqsubseteq f}} h^c = \overline{f^c}$$

olup, $(\overline{f^c}) \in \tau$ elde edilir.

iv. f kapalı olsun. *i.*'den dolayı $f \sqsubseteq \overline{f}$ 'dir. $f \in \tau^c$ ve $f \sqsubseteq f$ olmasından;

$$\overline{f} = \bigsqcap_{\substack{h^{\tilde{c}} \in \tau \\ f \sqsubseteq h}} h \sqsubseteq f$$

olup, $\overline{f} \sqsubseteq f$ elde edilir. Bu ise, $f = \overline{f}$ demektir. Diğer taraftan, $\overline{f} = f$ olsun. Bu durumda *iii.* 'den dolayı f *sbe*–kapalı kümedir.

v. $g = \overline{f}$ alalım. $\overline{f}$ *sbe*–kapalı olduğundan g *sbe*–kapalıdır ve *iv.*'den

$$\overline{g} = g$$

bulunur.Dolayısıyla $\overline{f} = \overline{\overline{f}}$ elde edilir.

vi. $\tilde{0}_E$ ve $\tilde{1}_E$ *sbe*–kapalı kümeler olduğundan *iv.*'den dolayı,

$$\overline{\tilde{0}}_E = \tilde{0}_E \text{ ve } \overline{\tilde{1}}_E = \tilde{1}_E$$

elde edilir.

Teorem 4.1.4 (X, τ, E) bir *sbe*–topolojik uzay ve $f, g \in \mathbb{IFS}_E^X$ olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler sağlanır.

i. $f^\circ \sqcap g^\circ = (f \sqcap g)^\circ$

ii. $f^\circ \sqcup g^\circ \sqsubseteq (f \sqcup g)^\circ$

iii. $\overline{f \sqcap g} \sqsubseteq \overline{f} \sqcap \overline{g}$

iv. $\overline{f} \sqcup \overline{g} = \overline{f \sqcup g}$

v. $(f^\circ)^{\tilde{c}} = \overline{(f^{\tilde{c}})}$

vi. $(f^{\tilde{c}})^\circ = (\overline{f})^{\tilde{c}}$

İspat.

i. $f \sqcap g \sqsubseteq f$ olduğundan,

$$(f \sqcap g)^\circ \sqsubseteq f \;\; ve \;\; (f \sqcap g)^\circ \sqsubseteq g \;\; \text{olur.}$$

$f^\circ \sqsubseteq f$ olduğundan

$$f^\circ \sqsubseteq f \;\; ve \;\; g^\circ \sqsubseteq g \;\; \text{olur.}$$

Buradan haraketle,

$$f^\circ \sqcap g^\circ \sqsubseteq (f \sqcap g) \;\; \text{için} \;\; f^\circ \sqcap g^\circ \sqsubseteq (f \sqcap g)^\circ$$

elde edilmiş olur. Sonuç olarak,

$$f^\circ \sqcap g^\circ \sqsubseteq (f \sqcap g)^\circ \;\; \text{ve} \;\; (f \sqcap g)^\circ \sqsubseteq f^\circ \sqcap g^\circ$$

olduğundan, $f^\circ \sqcap g^\circ = (f \sqcap g)^\circ$ elde edilir.

ii. $f \sqsubseteq f \sqcup g$ ve $g \sqsubseteq f \sqcup g$ olup "$f \sqsubseteq g$ ise $f^\circ \sqsubseteq g^\circ$" gereğince, $f^\circ \sqsubseteq f \sqcup g$ ve $g^\circ \sqsubseteq f \sqcup g$ olur. Buradan,

$$f^\circ \sqcup g^\circ \sqsubseteq f \sqcup g$$

elde edilir. $(f \sqcup g)^\circ$ *sbe*–kümesi $f \sqcup g$ *sbe*–kümesinin kapsadığı en geniş *sbe*–küme olduğundan,

$$f^\circ \sqcup g^\circ \sqsubseteq (f \sqcup g)^\circ \sqsubseteq f \sqcup g$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

iii. $f \sqcap g \sqsubseteq f$ ve $f \sqcap g \sqsubseteq g$ den Teorem 4.1.3-*ii.* ile

$$\overline{f \sqcap g} \sqsubseteq \overline{f} \text{ ve } \overline{f \sqcap g} \sqsubseteq \overline{g}$$

olur. Buradan

$$\overline{f \sqcap g} \sqsubseteq \overline{f} \sqcap \overline{g}$$

elde edilir.

iv. $f \sqsubseteq f \sqcup g$ ve $g \sqsubseteq f \cup g$ den Teorem 4.1.3-*ii.* ile

$$\overline{f} \sqsubseteq \overline{f \sqcup g} \text{ ve } \overline{g} \sqsubseteq \overline{f \cup g}$$

bulunur. Buradan

$$\overline{f} \sqcup \overline{g} \sqsubseteq \overline{f \sqcup g} \tag{4.1.1}$$

elde edilir. $f \sqsubseteq \overline{f}$ ve $g \sqsubseteq \overline{g}$'den

$$f \sqcup g \sqsubseteq \overline{f} \sqcup \overline{g}$$

bulunur. $f \sqcup g$'yi kapsayan en küçük *sbe*–kapalı küme $\overline{f \sqcup g}$ olduğundan

$$\overline{f \sqcup g} \sqsubseteq \overline{f} \sqsubseteq \overline{g} \tag{4.1.2}$$

bulunur. (4.1.1) ve (4.1.2)'den $\overline{f} \sqcup \overline{g} = \overline{f \sqcup g}$ elde edilir.

v. $f \in \mathbb{IFS}_E^X$'in içi

$$f^\circ = \bigsqcup_{i \in I} g_i$$

olsun. Burada her $i \in I$ için $g_i \in \tau$ ve $g_i \sqsubseteq f$'dir. Her iki tarafın *sbe*–tümleyeni alınırsa

$$(f^\circ)^{\tilde{c}} = \Big(\bigsqcup_{i \in I} g_i\Big)^{\tilde{c}} = \Big(\bigsqcap_{i \in I} g_i^{\tilde{c}}\Big)$$

olur.

$$f^{\tilde{c}} \sqsubseteq g_i^c \quad \text{ve} \quad g_i^c \in \kappa_\tau$$

olduğundan

$$\Big(\bigsqcap_{i \in I} g_i^{\tilde{c}}\Big) = \overline{(f^{\tilde{c}})}$$

elde edilir.

vi. *v.*'de f yerine $f^{\tilde{c}}$ alınırsa

$$[(f^{\tilde{c}})^\circ]^{\tilde{c}} = \overline{(f^{\tilde{c}})^{\tilde{c}}} = \overline{f}$$

bulunur. Böylece

$$(f^{\tilde{c}})^\circ = (\overline{f})^{\tilde{c}}$$

elde edilir.

Örnek 4.1.2 [12] $\tau^1 = \mathbb{IFS}_E^X$ olmak üzere (X, τ^1, E) *sbe*–topolojik uzayını ele alalım. Açıkca görülür ki her f *sbe*–kümesi aynı zamanda hem *sbe*–açık küme hem de *sbe*–kapalı kümedir. Dolayısıyla, $f^\circ = \overline{f} = f$ dır.

Tanım 4.1.4 [12] (X, τ, E) *sbe*–topolojik uzay ve $f \in \mathbb{IFS}_E^X$ olsun. Bu durumda, $e_g \tilde{\in} f$ *sbe*–noktasını içeren, $g \sqsubseteq f$ koşulunu sağlayan bir $g \in \tau$ varsa, f 'ye e_g 'nin sbe-komşuluğudur denir. e_g *sbe*–noktasının tüm *sbe*–komşuluklarına *sbe*–komşuluk sistemi olarak adlandırılır ve $\tilde{\mathcal{N}_\tau}(e_g)$ ile gösterilir.

Tanım 4.1.5 [12] (X, τ, E) *sbe*–küme olsun. $g \sqsubseteq h \sqsubseteq f$ olacak şekilde *sbe*–açık h kümesi varsa, bu durumda $f \in \mathbb{IFS}_E^X$ *sbe*–kümesine g'nin sbe-komşuluğudur denir.

Teorem 4.1.5 [12] (X, τ, E) bir *sbe*–topolojik uzay olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler de *sbe*–topolojik uzaydır.

i. $\tau_\mu = \{\Box f : f \in \tau\}$

ii. $\tau_\lambda = \{\Diamond f : f \in \tau\}$

Teorem 4.1.6 [12] (X, τ, E), X bir *sbe*–topolojik uzay ve e_f de bir *sbe*–nokta olsun. Bu durumda, $\tilde{\mathcal{N}_\tau}(e_f)$ aşağıdaki özellikleri sağlar.

i. $g \in \tilde{\mathcal{N}_\tau}(e_f)$ ise $e_F \in g$dir.

ii. $g \in \tilde{\mathcal{N}_\tau}(e_f)$ ve $g \sqsubseteq h$ ise $h \in \tilde{\mathcal{N}_\tau}(e_f)$dir.

iii. $g, h \in \tilde{\mathcal{N}_\tau}(e_f)$ ise $g \sqcap h \in \mathcal{N}_\tau(e_f)$

iv. $g, h \in \tilde{\mathcal{N}_\tau}(e_f)$ ise $g \sqcup h \in \mathcal{N}_\tau(e_f)$

v. $g \in \tilde{\mathcal{N}_\tau}(e_f)$ ise, her $e'_n \tilde{\in} m$ için $g \in \tilde{\mathcal{N}_\sigma}(e'_n)$ olacak şekilde $m \in \tilde{\mathcal{N}_\tau}(e_f)$ vardır.

Teorem 4.1.7 (X, τ, E) bir *sbe*–topolojik uzay olsun. $f \in \mathbb{IFS}_E^X$ bir *sbe*–açık kümedir ancak ve ancak f nin tüm *sbe*–noktalarının, sbe-komşuluğu olmasıdır.

İspat. $(\Rightarrow)$: İspatı açıktır.

$(\Leftarrow)$: f *sbe*–küme ve $\{e_{h_i} : i \in I\}$ ailesi f nın tüm sbe-alt kümelerinin ailesi olsun. Bu durumda her $i \in I$ için öyle bir g_i *sbe*–açık kümesi vardır ki;

$$e_{h_i} \tilde{\in} g_i \sqsubseteq f$$

böylece Teorem 3.2.4'den

$$e_{h_i} \sqsubseteq g_i \sqsubseteq f$$

olur. Dolayısıyla

$$\bigsqcup_{i\in I} h_i = f \sqsubseteq \bigsqcup_{i\in I} g_i \sqsubseteq f$$

bulunur. Buradan da

$$\bigsqcup_{i\in I} g_i = f$$

elde edilir.

4.2 Sezgisel Bulanık Esnek Sürekli Fonksiyonlar

Tanım 4.2.1 (X, τ, E) ve (Y, σ, K) sırasıyla X ve Y kümeleri üzerinde tanımlı *sbe*–topolojik uzaylar olsun. Ayrıca; $\varphi_\psi : \mathbb{IFS}_E^X \to \mathbb{IFS}_K^Y$ bir *sbe*–fonksiyon olsun. Her $g \in \sigma$ için $\varphi_\psi^{-1}(g) \in \tau$ ise φ_ψ *sbe*–fonksiyonuna sezgisel bulanık esnek sürekli fonksiyon (*sbe*–sürekli fonksiyon) denir.

Örnek 4.2.1 $\tau = \mathbb{IFS}_E^X$ alırsak, her $\varphi_\psi : (X, \tau, E) \to (Y, \sigma, K)$ *sbe*–fonksiyonunun *sbe*–sürekli fonksiyon olduğu görülür.

Teorem 4.2.1 $f : (X, \tau, E) \to (Y, \sigma, K)$ *sbe*–süreklidir ancak ve ancak her $g\mathbb{IFS}_K^Y$ için $\varphi_{\psi^{-1}}(g) \sqsubseteq (\varphi_\psi^{-1}(g))^\circ$ olmasıdır.

İspat. $(\Rightarrow)$: φ_ψ *sbe*–sürekli olsun.4.1.2-i'den,

$$g^\circ \sqsubseteq g \quad \text{ve} \quad \varphi_\psi^{-1}(g^\circ) \sqsubseteq \varphi_\psi^{-1}(g)$$

bulunur.φ_ψ *sbe*–sürekli olduğundan $\varphi_\psi(g^\circ) \in \tau$'dur. Buradan, 4.1.2-ii ve iv.'den

$$\varphi_\psi(g^\circ)^\circ = \varphi_\psi^{-1}(g^\circ) \sqsubseteq (\varphi_\psi^{-1}(g))^\circ$$

olur.Bu da istenendir. $(\Leftarrow)$: Her $g \in \mathbb{IFS}_K^Y$ için $\varphi_\psi^{-1}(g^\circ) \sqsubseteq (\varphi_\psi^{-1}(g))^\circ$ olsun.Herhangi bir $h \in \sigma$ verilsin. Yeter şart ifadesinden ve 4.1.2-iv'den,

$$\varphi_\psi^{-1}(h^\circ) = (\varphi_\psi^{-1}(h)) \sqsubseteq (\varphi_\psi^{-1}(h))^\circ$$

bulunur. Bu da $\varphi_\psi^{-1}(h) \in \tau$ anlamına gelir.O halde φ_ψ fonksiyonu *sbe*–süreklidir.

5. SEZGİSEL BULANIK ESNEK BAĞLANTILI TOPOLOJİK UZAYLAR

5.1 Sezgisel Bulanık Esnek Bağlantılı Kümeler

Tanım 5.1.1 (X, τ, E) bir *sbe*–topolojik uzay ve $f \in \mathbb{IFS}_E^X$ olsun. $f \sqsubseteq g \sqcup h$ ve $g \sqcap h = \tilde{0}_E$ olacak şekilde $\tilde{0}_E$'den $g, h \in \tau$ varsa f'ye *sbe*–bağlantısız küme denir. Bu tanımda f yerine $\tilde{1}_E$ alınırsa, (X, τ, E) *sbe*–topolojik uzayına *sbe*–bağlantısız topolojik uzay adı verilir. Bu koşulu sağlayan $g, h \in \tau$ yoksa, (X, τ, E)'ye *sbe*-bağlantılı uzay adı verilir.

Örnek 5.1.1 (X, τ^0, E) *sbe*–bağlantılıdır. Buna karşın, (X, τ^1, E) *sbe*–bağlantısızdır.

Teorem 5.1.1 (X, τ, E) bir *sbe*–topolojik uzay olsun. (X, τ, E) *sbe*–bağlantılıdır ancak ve ancak bu uzayda hem sbe-açık hem de sbe-kapalı bir küme yoktur.

İspat. $(\Rightarrow)$: (X, τ, E) *sbe*–bağlantılı olsun. Bu uzayda hem açık hem de kapalı bir f *sbe*–kümesinin var olduğunu kabul edelim. Bu takdirde,

$$f \sqcup f^{\tilde{c}} = \tilde{1}_E \text{ ve } f \sqcap f^{\tilde{c}} = \tilde{0}_E$$

olur. f sbe-kapalı olduğundan $f^{\tilde{c}} \in \tau$'dur. Bu durum, (X, τ, E)'nin *sbe*–bağlantılı olmasıyla çelişir.
$(\Leftarrow)$: (X, τ, E) topolojik uzayında hem açık hem de kapalı küme var olmasın. Buna karşın, (X, τ, E) *sbe*–bağlantısız olsun. Bu durumda,

$$f \sqcup g = \tilde{1}_E \text{ ve } f \sqcap g = \tilde{0}_E$$

olacak şekilde $f, g \in \tau$ vardır. Bu iki eşitlikten, $f^{\tilde{c}} = g$ alınırsa, hipotezle çelişen bir durum ortaya çıkar. Dolayısıyla (X, τ, E) *sbe*–bağlantılıdır.

Teorem 5.1.2 (X, τ, E) bir *sbe*–bağlantılı topolojik uzay ve $\sigma \subseteq \tau$ olsun. Bu takdirde, (X, σ, E) de bir *sbe*–bağlantılı topolojik uzaydır.

İspat. (X, τ, E) *sbe*–bağlantılı uzay olduğundan $f \sqcup g = \tilde{1}_E$ ve $f \sqcap g = \tilde{0}_E$ olacak şekilde $f, g \in \tau$ bulunamaz. $\sigma \subseteq \tau$ olduğundan bu iki koşulu sağlayan sbe-açık kümeler σ ailesinde de yoktur. Dolayısıyla (X, σ, E) de bir *sbe*–bağlantılı topolojik uzaydır.

Teorem 5.1.3 (X, τ, E) ve (Y, σ, K) iki *sbe*–topolojik uzay olsun. $f \in \mathbb{IFS}_E^X$ ve $\varphi_\psi : (X, \tau, E) \to (Y, \sigma, K)$ bir *sbe*–sürekli fonksiyon olmak üzere, f *sbe*–bağlantılı ise $\varphi_\psi(f) \in \mathbb{IFS}_K^Y$ de *sbe*–bağlantılıdır.

İspat. $f \in \mathbb{IFS}_E^X$ *sbe*–bağlantılı olsun. $\varphi_\psi(f)$'nin *sbe*–bağlantısız olduğunu varsayalım. Bu takdirde,

$$\varphi_\psi(f) \sqsubseteq g \sqcup h \text{ ve } g \sqcap h = \tilde{0}_K$$

olacak şekilde $g, h \in \tau$ vardır. Buradan Teorem 3.2.1 *i.* ve 3.2.2 *ii.-iii.*'den

$$f \sqsubseteq \varphi_\psi^{-1}(\varphi_\psi(f)) \sqsubseteq \varphi_\psi^{-1}(g \cup h) = \varphi_\psi^{-1}(g) \sqcup \varphi_\psi^{-1}(h)$$

ve

$$\varphi_\psi^{-1}(g \sqcap h) = \varphi_\psi^{-1}(g) \sqcap \varphi_\psi^{-1}(h) = \tilde{0}_E$$

olur. φ_ψ *sbe*–sürekli olduğundan $\varphi_\psi^{-1}(g), \varphi_\psi^{-1}(h) \in \tau$'dur. Dolayısıyla bu durum f'nin *sbe*–bağlantılı olmasıyla çelişir.

Sonuç 5.1.1 Teorem 5.1.3'de f yerine $\tilde{1}_E$ ve φ_f'yi *sbe*–örten alırsak, (X, τ, E) *sbe*–bağlantılı ise (Y, σ, K) da *sbe*–bağlantılı olur.

Uyarı 5.1.1 *sbe*–bağlantılı bir *sbe*–kümenin bir *sbe*–sürekli fonksiyon altındaki ters görüntüsünün *sbe*–bağlantılı olması gerekmez. Aşağıdaki örnek bu durumu resmetmektedir.

Örnek 5.1.2 $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, $Y = \{y\}$, $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ ve $K = \{k_1, k_2, k_3\}$ olsun.

$$\varphi : X \to Y \text{ ve } \psi : E \to K$$

fonksiyonları

$$\varphi(x_1) = y \quad \psi(e_1) = k_1$$

$$\varphi(x_2) = y \quad \psi(e_2) = k_2$$

$$\varphi(x_3) = y \quad \psi(e_3) = k_3$$

şeklinde tanımlansın. $\varphi_\psi = (X, \tau^1, E) \to (Y, \tau^0, E)$ *sbe*–süreklidir. Buna karşın, (Y, τ^0, E), *sbe*–bağlantılıdır ama (X, τ^1, E) *sbe*–bağlantılı değildir.

Tanım 5.1.2 (X, τ, E) bir *sbe*–topolojik uzay ve $f, g \in \mathbb{IFS}_E^X$ olsun.

$$\overline{f} \sqcap g = \tilde{0}_E \text{ ve } f \sqcap \overline{g} = \tilde{0}_E$$

ise, f ve g *sbe*–kümelerine *sbe*–ayrılmış kümeler denir ve $f \mid g$ şeklinde gösterilir.

Örnek 5.1.3 (X, τ^1, E) bir *sbe*–topolojik uzayında her $f \in \mathbb{IFS}_E^X$ için $f \mid f^{\tilde{c}}$ 'dir.

Teorem 5.1.4 (X, τ, E) bir *sbe*–topolojik uzay ve $f, g \in \tau$ olsun. $f \sqcap g = \tilde{0}_E$ ise $f \mid g$ 'dir.

İspat. $f, g \in \tau$ için $f \sqcap g = \tilde{0}_E$ olduğunu kabul edelim. Eşitliğin her iki yanına *sbe*–tümleyen işlemi uygulanırsa Teorem 3.1.1 *v.* ve *x.*'dan

$$f^{\tilde{c}} \sqcup g^{\tilde{c}} = \tilde{1}_E$$

elde edilir. $f \sqsubseteq g^{\tilde{c}}$ ve $g \sqsubseteq f^{\tilde{c}}$ kapsamaları, $g^{\tilde{c}}, f^{\tilde{c}} \in \kappa_\tau$ ile dikkate alınırsa,

$$\overline{f} \sqsubseteq \overline{g^{\tilde{c}}} = g^{\tilde{c}} \text{ ve } \overline{g} \sqsubseteq \overline{f^{\tilde{c}}} = f^{\tilde{c}}$$

bulunur. Dolayısıyla $\overline{f} \sqcap g = \tilde{0}_E$ ve $f \sqcap \overline{g} = \tilde{0}_E$ elde edilir.

Teorem 5.1.5 (X, τ, E) bir *sbe*–topolojik uzay ve $f, g \in \kappa_\tau$ olsun. $f \sqcap g = \tilde{0}_E$ ise $f \,|\, g$ 'dir.

İspat. $f, g \in \kappa_\tau$ olsun. Teorem 4.1.3 *iv*'den $\overline{f} = f$ ve $\overline{g} = g$ 'dir. Buradan,

$$f \sqcap g = \overline{f} \sqcap g = \tilde{0}_E \text{ ve } f \sqcap g = f \sqcap \overline{g} = \tilde{0}_E$$

olur. Bu ise $f \,|\, g$ demektir.

Teorem 5.1.6 (X, τ, E) bir *sbe*–topolojik uzay ve $f \in \mathbb{IFS}_E^X$ olsun. f *sbe*–bağlantılıdır ancak ve ancak f *sbe*–ayrılmış iki kümenin birleşimi şeklinde yazılamaz.

İspat. $(\Rightarrow)$: $f \in \mathbb{IFS}_E^X$ olsun. f *sbe*–bağlantılı ise *sbe*– ayrılmış iki kümenin birleşimi olarak yazılamayacağı açıktır.

$(\Leftarrow)$: f ayrılmış iki kümenin birleşimi olarak yazılamasın. f'nin *sbe*–bağlantısız olduğunu kabul edelim.Buradan

$$f \sqsubseteq g \sqcup h, \text{ ve } g \sqcap h = \tilde{0}_E$$

olacak şekilde $g, h \in \tau$ vardır.

$$\overline{g} \sqsubseteq h^{\tilde{c}} \text{ ve } \overline{h} \sqsubseteq g^{\tilde{c}}$$

kapsamaları dikkate alınırsa,

$$g \sqcap \overline{h} = \tilde{0}_E \text{ ve } \overline{g} \sqcap h = \tilde{0}_E$$

elde edilir. Bu durum hipotezle çelişir.

Teorem 5.1.7 (X, τ, E) bir *sbe*–topolojik uzay olsun. (X, τ, E) *sbe*–bağlantılıdır ancak ve ancak $\tilde{1}_E$, iki *sbe*–ayrılmış kümenin birleşimi olarak yazılamaz.

İspat. $(\Rightarrow)$: $\tilde{1}_E = f \sqcup g$ ve $f \mid g$ olsun. Buradan

$$\overline{f} \sqcap g = \tilde{0}_E \text{ ve } f \sqcap \overline{g} = \tilde{0}_E$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$f \sqcap g = \overline{0}_E, \quad f = g^{\tilde{c}} \text{ ve } g = f^{\tilde{c}}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned} \overline{f} &= \overline{f} \sqcap \tilde{1}_E \\ &= \overline{f} \sqcap (f \sqcup g) \\ &= (\overline{f} \sqcap f) \sqcup (\overline{f} \sqcap g) \\ &= f \end{aligned}$$

olur. Şu halde $f \in \kappa_\tau$ dur. Benzer şekilde;

$$\begin{aligned} \overline{g} &= \overline{g} \sqcap \tilde{1}_E \\ &= \overline{g} \sqcap (f \sqcup g) \\ &= (\overline{g} \sqcap f) \sqcup (\overline{g} \sqcap g) \\ &= g \end{aligned}$$

ve $g \in \kappa_\tau$ bulunur. $f = g^{\tilde{c}}$ ve $g = f^{\tilde{c}}$ eşitliklerinden $f, g \in \tau$ elde edilir. Bu ise (X, τ, E) *sbe*–uzayının *sbe*–bağlantılı olmasıyla çelişir.

$(\Leftarrow)$: $\tilde{1}_E$ iki *sbe*–ayrılmış kümenin birleşimi olarak yazılamasın. (X, τ, E)'nin *sbe*–bağlantısız olduğunu varsayalım. Teorem 5.1.1'den bu uzayda hem *sbe*–açık hem de *sbe*–kapalı bir *sbe*–küme vardır. Bu ise hipotezle çelişir. O halde (X, τ, E) *sbe*–bağlantılıdır.

5.2 SC_i-Bağlantılılık

Tanım 5.2.1 (X, τ, E) bir *sbe*–topolojik uzay ve $f \in \mathbb{IFS}_E^X$ olsun.

i. $f \sqsubseteq g \sqcup h$, $g \sqcap h \sqsubseteq f^{\tilde{c}}$, $f \sqcap g \neq \tilde{0}_E$ ve $f \sqcap h \neq \tilde{0}_E$ olacak şekilde *sbe*–boştan farklı $g, h \in \tau$ yoksa, f'ye (X, τ, E) uzayında SC_1-bağlantılıdır denir.

ii. $f \sqsubseteq g \sqcup h$, $f \sqcap g \sqcap h = \tilde{0}_E$, $f \sqcap g \neq \tilde{0}_E$ ve $f \sqcap h \neq \tilde{0}_E$ olacak şekilde *sbe*–boştan farklı $g, h \in \tau$ yoksa, f'ye (X, τ, E) uzayında SC_2-bağlantılıdır denir.

iii. $f \sqsubseteq g \sqcup h$, $g \sqcap h \sqsubseteq f^{\tilde{c}}$, $g \not\sqsubseteq f^{\tilde{c}}$, $h \not\sqsubseteq f^{\tilde{c}}$ olacak şekilde *sbe*–boştan farklı $g, h \in \tau$ yoksa f'ye (X, τ, E) uzayında SC_3-bağlantılıdır denir.

iv. $f \sqsubseteq g \sqcup h$, $f \sqcap g \sqcap h = \tilde{0}_E$, $g \not\sqsubseteq f^{\tilde{c}}$ ve $h \not\sqsubseteq f^{\tilde{c}}$ olacak şekilde *sbe*–boştan farklı $g, h \in \tau$ yoksa f'ye (X, τ, E) uzayında SC_4-bağlantılıdır denir.

Yukarıdaki tanım dikkate alındığında SC_i-bağlantılılık $(i = 1, 2, 3, 4)$ kavramları arasındaki ilişki aşağıdaki diyagramda gösterildiği gibidir.

$$\begin{tikzcd} SC_1 \arrow[r] \arrow[d] & SC_2 \arrow[d] \\ SC_3 \arrow[r] & SC_4 \end{tikzcd}$$

Aşağıdaki örnekler tüm aksi durumları göstermektedir.

Örnek 5.2.1 $X = [0, 1]$ ve $E = \{a, b\}$ olsun. $f, g, h \in \mathbb{IFS}_E^X$ kümeleri

$$\begin{aligned} f &= \big\{(a, \{x, \mu_{f(a)}(x), \nu_{f(a)}(x) : x \in X\}), (b, \{x, \mu_{f(b)}(x), \nu_{f(b)}(x) : x \in X\})\big\} \\ g &= \big\{(a, \{x, \mu_{g(a)}(x), \nu_{g(a)}(x) : x \in X\}), (b, \{x, \mu_{g(b)}(x), \nu_{g(b)}(x) : x \in X\})\big\} \\ h &= \big\{(a, \{x, \mu_{h(a)}(x), \nu_{h(a)}(x) : x \in X\}), (b, \{x, \mu_{h(b)}(x), \nu_{h(b)}(x) : x \in X\})\big\} \end{aligned}$$

burada her $x \in X$ için

$$\begin{aligned} \mu_{f(a)}(x) &= \mu_{f(b)}(x) = \frac{3}{4} \\ \nu_{f(a)}(x) &= \nu_{f(b)}(x) = \frac{1}{4} \\ \mu_{g(a)}(x) &= \begin{cases} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} < x < 1 \\ 1 & 0 \le x \le \frac{1}{3} \end{cases} \\ \mu_{g(b)}(x) &= \begin{cases} 1 & \frac{1}{3} < x < 1 \\ \frac{1}{3} & 0 \le x \le \frac{1}{3} \end{cases} \\ \nu_{g(a)}(x) &= 1 - \mu_{g(a)}(x) \\ \nu_{g(b)}(x) &= 1 - \mu_{g(b)}(x) \\ \mu_{h(a)}(x) &= \begin{cases} 1 & \frac{1}{3} < x \le 1 \\ \frac{1}{3} & 0 \le x \le \frac{1}{3} \end{cases} \\ \mu_{h(b)}(x) &= \begin{cases} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} < x \le 1 \\ 1 & 0 \le x \le \frac{1}{3} \end{cases} \\ \nu_{h(a)}(x) &= 1 - \mu_{h(a)}(x) \\ \nu_{h(b)}(x) &= 1 - \mu_{h(b)}(x) \end{aligned}$$

olarak tanımlanmaktadır. $\tau = \{\tilde{1}_E, \tilde{0}_E, g, h, g \sqcap h\}$ olmak üzere (X, τ, E) bir *sbe*–topolojik uzaydır. Bu takdirde, f SC_4-bağlantılıdır fakat SC_2-bağlantılı değildir.

Örnek 5.2.2 $X = [0,1]$ ve $E = \{a,b\}$ olsun. $f, g, h \in \mathbb{IFS}_E^X$ kümeleri

$$\begin{aligned} g &= \big\{(a, \{x, \mu_{g(a)}(x), \nu_{g(a)}(x) : x \in X\}), (b, \{x, \mu_{g(b)}(x), \nu_{g(b)}(x) : x \in X\})\big\} \\ h &= \big\{(a, \{x, \mu_{h(a)}(x), \nu_{h(a)}(x) : x \in X\}), (b, \{x, \mu_{h(b)}(x), \nu_{h(b)}(x) : x \in X\})\big\} \\ f &= g \sqcup h \end{aligned}$$

burada her $x \in X$ için

$$\begin{aligned} \mu_{g(a)}(x) &= \begin{cases} 0 & \frac{1}{3} < x \leq 1 \\ \frac{1}{3} & 0 \leq x \leq \frac{1}{3} \end{cases} \\ \mu_{g(b)}(x) &= \begin{cases} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} < x \leq 1 \\ 0 & 0 \leq x \leq \frac{1}{3} \end{cases} \\ \nu_{g(a)}(x) &= 1 - \mu_{g(a)}(x) \\ \nu_{g(b)}(x) &= 1 - \mu_{g(b)}(x) \\ \mu_{h(a)}(x) &= \begin{cases} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} < x \leq 1 \\ 0 & 0 \leq x \leq \frac{1}{3} \end{cases} \\ \mu_{h(b)}(x) &= \begin{cases} 0 & \frac{1}{3} < x \leq 1 \\ \frac{1}{3} & 0 \leq x \leq \frac{1}{3} \end{cases} \\ \nu_{h(a)}(x) &= 1 - \mu_{h(a)}(x) \\ \nu_{h(b)}(x) &= 1 - \mu_{h(b)}(x) \end{aligned}$$

$\tau = \{\tilde{0}_E, \tilde{1}_E, g, h, g \sqcup h\}$ olmak üzere (X, τ, E) bir *sbe*–topolojik uzaydır. Bu takdirde, f SC_4-bağlantılıdır ama SC_3-bağlantılı değildir.

Örnek 5.2.3 $X = [0,1]$ ve $E = \{a,b\}$ olsun. $f, g, h \in \mathbb{IFS}_E^X$ kümeleri

$$g = \big\{(a, \{x, \mu_{g(a)}(x), \nu_{g(a)}(x) : x \in X\}), (b, \{x, \mu_{g(b)}(x), \nu_{g(b)}(x) : x \in X\})\big\}$$

$$h = \big\{(a, \{x, \mu_{h(a)}(x), \nu_{h(a)}(x) : x \in X\}), (b, \{x, \mu_{h(b)}(x), \nu_{h(b)}(x) : x \in X\})\big\}$$

$$f = \big\{(a, \{x, \mu_{f(a)}(x), \nu_{f(a)}(x) : x \in X\}), (b, \{x, \mu_{f(b)}(x), \nu_{f(b)}(x) : x \in X\})\big\}$$

şeklinde tanımlanıyor. Burada her $x \in X$ için

$$\begin{aligned} \mu_{g(a)}(x) &= \begin{cases} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} < x \leq 1 \\ \frac{2}{3} & 0 \leq x \leq \frac{1}{3} \end{cases} \\ \mu_{g(b)}(x) &= \begin{cases} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} < x \leq 1 \\ \frac{1}{3} & 0 \leq x \leq \frac{1}{3} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nu_{g(a)}(x) &= 1-\mu_{g(a)}(x)\\
\nu_{g(b)}(x) &= 1-\mu_{g(b)}(x)\\
\mu_{h(a)}(x) &= \begin{cases} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} < x \leq 1 \\ \frac{1}{3} & 0 \leq x \leq \frac{1}{3} \end{cases}\\
\mu_{h(b)}(x) &= \begin{cases} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} < x \leq 1 \\ \frac{2}{3} & 0 \leq x \leq \frac{1}{3} \end{cases}\\
\nu_{h(a)}(x) &= 1-\mu_{h(a)}(x)\\
\nu_{h(b)}(x) &= 1-\mu_{h(b)}(x)\\
\mu_{f(a)}(x) &= 1-\mu_{f(b)}(x) = \frac{1}{3}\\
\nu_{h(b)}(x) &= \nu_{f(b)}(x) = \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

olarak tanımlanıyor. $\tau = \{\tilde{0}_E, \tilde{1}_E, g, h, g \sqcap h, g \sqcup h\}$ olmak üzere (X, τ, E) bir *sbe*–topolojik uzaydır. Bu takdirde, f bu *sbe*–topolojik uzaya göre SC_2-bağlantılıdır ama SC_1-bağlantılı değildir.

Örnek 5.2.4 $X = [0, 1]$ ve $E = \{a, b\}$ olsun. $f, g, h \in \mathbb{IFS}_E^X$ kümeleri

$$f = \big\{(a, \{x, \mu_{f(a)}(x), \nu_{f(a)}(x) : x \in X\}), (b, \{x, \mu_{f(b)}(x), \nu_{f(b)}(x) : x \in X\})\big\}$$

$$g = \big\{(a, \{x, \mu_{g(a)}(x), \nu_{g(a)}(x) : x \in X\}), (b, \{x, \mu_{g(b)}(x), \nu_{g(b)}(x) : x \in X\})\big\}$$

$$h = \big\{(a, \{x, \mu_{h(a)}(x), \nu_{h(a)}(x) : x \in X\}), (b, \{x, \mu_{h(b)}(x), \nu_{h(b)}(x) : x \in X\})\big\}$$

burada her $x \in X$ için

$$\begin{aligned}
\mu_{f(a)}(x) &= \begin{cases} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} < x < 1 \\ \frac{2}{3} & 0 \leq x \leq \frac{2}{3} \end{cases}\\
\mu_{f(b)}(x) &= \begin{cases} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} < x \leq 1 \\ \frac{1}{3} & 0 \leq x \leq \frac{2}{3} \end{cases}\\
\nu_{f(a)}(x) &= 1-\mu_{f(a)}(x)\\
\nu_{f(b)}(x) &= 1-\mu_{f(b)}(x)\\
\mu_{g(a)}(x) &= \begin{cases} 0 & \frac{2}{3} < x \leq 1 \\ \frac{2}{3} & 0 \leq x \leq \frac{2}{3} \end{cases}\\
\mu_{g(b)}(x) &= \begin{cases} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} < x \leq 1 \\ 0 & 0 \leq x \leq \frac{2}{3} \end{cases}\\
\nu_{h(a)}(x) &= 1-\mu_{h(a)}(x)\\
\nu_{h(b)}(x) &= 1-\mu_{h(b)}(x)
\end{aligned}$$

olarak tanımlanıyor. $\tau = \{\tilde{0}_E, \tilde{1}_E, g, h, g \sqcup h\}$ olmak üzere (X, τ, E) bir *sbe*–topolojik uzaydır. f, bu uzayda SC_3-bağlantıldır fakat SC_2-bağlantılı ve SC_1-bağlantılı değildir.

Örnek 5.2.5 Örnek 5.2.4'de her $x \in X$ için

$$\mu_{f(a)}(x) = \mu_{f(b)}(x) = \frac{2}{3} \text{ ve } \nu_{f(a)}(x) = \nu_{f(b)}(x) = \frac{1}{3}$$

alırsak, f bu uzayda SC_2-bağlantılıdır ama SC_3-bağlantılı değildir

Teorem 5.2.1 (X, τ, E) ve (Y, σ, K) iki *sbe*–topolojik uzay, $\varphi_\psi : (X, \tau, E) \to (Y, \sigma, K)$ bir *sbe*–sürekli ve sbe-örten fonksiyon ve $f \in \mathbb{IFS}_E^X$ olsun. f, SC_1-bağlantılı ise $\varphi_\psi(f)$ de SC_1-bağlantıldır.

İspat. f, (X, τ, E) uzayında SC_1-bağlantılı olsun. $\varphi_\psi(f)$'nin (Y, σ, K) uzayında SC_1-bağlantılı olmadığını varsayalım. Buradan,

$$\begin{aligned} \varphi_\psi(f) &\sqsubseteq g \sqcup h \\ g \sqcap h &\sqsubseteq (\varphi_\psi(f))^{\tilde{c}} \\ \varphi_\psi(f) \sqcap g &\neq \tilde{0}_K \\ \varphi_\psi(f) \sqcap h &\neq \tilde{0}_K \end{aligned}$$

olacak şekilde $g, h \in \tau$ vardır. Teorem 3.2.2'den

$$\begin{aligned} f &\sqsubseteq \varphi_\psi^{-1}(\varphi_\psi(f)) \\ &\sqsubseteq \varphi_\psi^{-1}(g \sqcup h) \\ &= \varphi_\psi^{-1}(g) \sqcup \varphi_\psi^{-1}(h) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_\psi^{-1}(g \sqcap h) &= \varphi_\psi^{-1}(g) \sqcap \varphi_\psi^{-1}(h) \\ &\sqsubseteq \varphi_\psi^{-1}\big((\varphi_\psi(f))^{\tilde{c}}\big) \\ &= \big(\varphi_\psi^{-1}(\varphi_\psi(f))\big)^{\tilde{c}} \\ &\sqsubseteq f^{\tilde{c}} \end{aligned}$$

$$\tilde{0}_E \neq \varphi_\psi^{-1}(\varphi_\psi(f) \sqcap g) = \varphi_\psi^{-1}(\varphi_\psi(f)) \sqcap \varphi_\psi^{-1}(g) \sqsupseteq f \sqcap \varphi_\psi^{-1}(g)$$

ve

$$\tilde{0}_E \neq \varphi_\psi^{-1}(\varphi_\psi(f) \sqcap h) = \varphi_\psi^{-1}(\varphi_\psi(f)) \sqcap \varphi_\psi^{-1}(h) \sqsupseteq f \sqcap \varphi_\psi^{-1}(h)$$

olur. Bu ise f'nin SC_1-bağlantılı olmasıyla çelişir.

Teorem 5.2.2 (X,τ,E) ve (Y,σ,K) iki *sbe*–topolojik uzay, $\varphi_\psi : (X,\tau,E) \to (Y,\sigma,K)$ bir *sbe*–sürekli örten fonksiyon ve $f \in \mathbb{IFS}_E^X$ olsun. f, SC_2-bağlantılı ise $\varphi_\psi(f)$ de SC_2-bağlantılıdır.

İspat. f, (X,τ,E) uzayında SC_2-bağlantılı olsun. Ama $\varphi_\psi(f)$, SC_2-bağlantılı olmasın.Buradan,

$$\begin{aligned} \varphi_\psi(f) &\sqsubseteq g \sqcup h \\ \varphi_\psi(f) \sqcap g \sqcap h &= \tilde{0}_K \\ \varphi_\psi(f) \sqcap g &\neq \tilde{0}_K \\ \varphi_\psi(f) \sqcap h &\neq \tilde{0}_K \end{aligned}$$

olacak şekilde $\tilde{0}_K$'dan farklı $g,h \in \tau$ vardır. Böylece

$$f \sqsubseteq \varphi_\psi^{-1}(\varphi_\psi(f)) \sqsubseteq \varphi_\psi^{-1}(g \sqcup h) = \varphi_\psi(g) \sqcup \varphi_\psi(h)$$

$$f \sqcap \varphi_\psi^{-1}(g) \sqcap \varphi_\psi^{-1}(h) \sqsubseteq \varphi_\psi^{-1}\Big(\varphi_\psi(g) \sqcap g \sqcap h\Big) = \varphi_\psi^{-1}(\varphi_\psi(f)) \sqcap \varphi_\psi(g) \sqcap \varphi_\psi^{-1}(h) = \tilde{0}_E$$

$$f \sqcap \varphi_\psi^{-1}(g) \sqsubseteq \varphi_\psi^{-1}(\varphi_\psi(f) \sqcap g) = \varphi_\psi^{-1}\big(\varphi_\psi(f)\big) \sqcap \varphi_\psi^{-1}(g) \neq \tilde{0}_E$$

$$f \sqcap \varphi_\psi^{-1}(h) \sqsubseteq \varphi_\psi^{-1}(\varphi_\psi(f) \sqcap h) = \varphi_\psi^{-1}\big(\varphi_\psi(f)\big) \sqcap \varphi_\psi^{-1}(h) \neq \tilde{0}_E$$

bulunur.$\varphi_\psi^{-1}(g), \varphi_\psi^{-1}(h) \in \tau$ olduğundan, bu durum f'nin SC_2-bağlantılı olmasıyla çelişir.

Teorem 5.2.3 (X,τ,E) ve (Y,σ,K) iki *sbe*–topolojik uzay, $\varphi_\psi : (X,\tau,E) \to (Y,\sigma,K)$ sbe-örten ve sürekli fonksiyon ve $f \in \mathbb{IFS}_E^X$ olsun. Eğer f, SC_3-bağlantılı ise $\varphi_\psi(f)$ de SC_3-bağlantılıdır.

İspat. f, SC_3-bağlantılı olsun.$\varphi_\psi(f)$ 'in SC_3-bağlantılı olmadığını varsayalım. Buradan

$$\begin{aligned} \varphi_\psi(f) &\sqsubseteq g \sqcup h \\ g \sqcap h &\sqsubseteq (\varphi_\psi(f))^{\tilde{c}} \\ g &\not\sqsubseteq (\varphi_\psi(f))^{\tilde{c}} \\ h &\not\sqsubseteq (\varphi_\psi(f))^{\tilde{c}} \end{aligned}$$

olacak şekilde $g,h \in \sigma$ vardır. Buradan,

$$f \sqsubseteq \varphi_\psi^{-1}(\varphi_\psi(f)) \sqsubseteq \varphi_\psi^{-1}(g \sqcup h) = \varphi_\psi^{-1}(g) \sqcup \varphi_\psi^{-1}(h)$$

ve

$$(\varphi_\psi)^{-1}(g \sqcap h) = (\varphi_\psi)^{-1}(g) \sqcap (\varphi_\psi)^{-1}(h) \sqcap (\varphi_\psi)^{-1}((\varphi_\psi(f))^{\tilde{c}}) \sqsubseteq f^{\tilde{c}}$$

olur. φ_ψ *sbe*–sürekli olduğundan $\varphi_\psi^{-1}(g)$, $\varphi_\psi^{-1}(h) \in \tau$'dur. Ayrıca

$$g \not\sqsubseteq (\varphi_\psi(f))^{\tilde{c}} \text{ ve } h \not\sqsubseteq (\varphi_\psi(f))^{\tilde{c}}$$

kapsamalarından öyle $y_1, y_2 \in Y$ vardır ki;

Teorem 5.2.4 (X, τ, E) ve (Y, σ, K) iki *sbe*–topolojik uzay, $\varphi_\psi : (X, \tau, E) \to (Y, \sigma, K)$ sbe-örten ve sürekli fonksiyon ve $f \in \mathbb{IFS}_E^X$ olsun. Eğer f, SC_4-bağlantılı ise $\varphi_\psi(f)$ de SC_4-bağlantılıdır.

İspat. f, SC_4-bağlantılı olsun. $\varphi_\psi(f)$'nin SC_4-bağlantılı olmadığını varsayalım.Buradan,

$$\begin{aligned} \varphi_\psi(f) &\sqsubseteq g \sqcup h \\ \varphi_\psi(f) \sqcap g \sqcap h &= \tilde{0}_K \\ g &\not\sqsubseteq (\varphi_\psi(f))^{\tilde{c}} \\ g &\not\sqsubseteq (\varphi_\psi(f))^{\tilde{c}} \end{aligned}$$

olacak şekilde $g, h \in \sigma$ vardır.Buradan,

$$f \sqsubseteq \varphi_\psi^{-1}(\varphi_\psi(f)) \sqsubseteq \varphi_\psi^{-1}(g \sqcup g) = \varphi_\psi^{-1}(g) \sqcup \varphi_\psi^{-1}(h)$$

ve

$$\varphi_\psi^{-1}(\varphi_\psi(f) \sqcap g \sqcap h) = f \sqcap \varphi_\psi^{-1}(g) \sqcap \varphi_\psi^{-1}(h) = \tilde{0}_E$$

elde edilir.

$$g \not\sqsubseteq ((\varphi_\psi(f))^{\tilde{c}}) \quad \text{ve} \quad h \sqsubseteq ((\varphi_\psi(f))^{\tilde{c}})$$

kapsamalarından, öyle $y_1, y_2 \in Y$ vardır ki,

$$\begin{aligned} \mu_{g(e)}(y_1) &\geq 1 - \varphi_\psi(f)(k)(y_1) \\ \mu_{h(e)}(y_2) &\geq 1 - \varphi_\psi(f)(k)(y_2) \end{aligned} \tag{5.2.1}$$

ve

$$\begin{aligned} \nu_{g(e)}(y_1) &\leq 1 - \varphi_\psi(f)(k)(y_1) \\ \nu_{h(e)}(y_2) &\leq 1 - \varphi_\psi(f)(k)(y_2) \end{aligned} \tag{5.2.2}$$

dır. $\varphi_\psi(g) \sqsubseteq f^{\tilde{c}}$ olduğunu varsayalım. Bu durum, (5.2.1) ile çelişir. $\varphi_\psi(h) \sqsubseteq f^{\tilde{c}}$ olduğunu varsayarsak bu da (5.2.2) ile çelişir. O halde $\varphi_\psi(f)$ de SC_3-bağlantılıdır.

Teorem 5.2.5 (X, τ, E) bir *sbe*–topolojik uzay ve $f_1, f_2 \in \mathbb{IFS}_E^X$ kümeleri SC_1-bağlantılı ve $f_1 \sqcap f_2 = \tilde{0}_E$ olsun. Bu taktirde $f_1 \sqcup f_2$ de SC_1-bağlantılıdır.

İspat. Aksini kabul edelim. $f_1 \sqcup f_2$, SC_1-bağlantılı olmasın. Buradan,

$$\begin{aligned} f_1 \sqcup f_2 &\sqsubseteq g \sqcup h \\ g \sqcap h &\sqsubseteq (f_1 \sqcup f_2)^{\tilde{c}} \\ (f_1 \sqcup f_2) \sqcap g &\neq \tilde{0}_E \\ (f_1 \sqcup f_2) \sqcap h &\neq \tilde{0}_E \end{aligned}$$

olacak şekilde $\tilde{0}_E$'den farklı $g, h \in \tau$ vardır. Buradan, $f_1 \sqcap f_2 = \tilde{0}_E$ eşitliğiyle

$$\begin{aligned} f_1 \sqsubseteq g \sqcup h, &\quad f_2 \sqsubseteq g \sqcup h \\ g \sqcap h \sqsubseteq f_1^{\tilde{c}}, &\quad g \sqcap h \sqsubseteq f_2^{\tilde{c}} \\ f_1 \sqcap g \neq \tilde{0}_E, &\quad f_2 \sqcap g \neq \tilde{0}_E \\ f_1 \sqcap h \neq \tilde{0}_E, &\quad f_2 \sqcap h \neq \tilde{0}_E \end{aligned}$$

bulunur. Bu durum f_1 ve f_2'nin SC_1-bağlantılı olmasıyla çelişir.

Teorem 5.2.6 (X, τ, E) bir *sbe*–topolojik uzay ve $f_1, f_2 \in \mathbb{IFS}_E^X$ kümeleri SC_2-bağlantılı ve $f_1 \sqcap f_2 = \tilde{0}_E$ olsun. Bu taktirde $f_1 \sqcup f_2$ de SC_2-bağlantılıdır.

İspat. $f_1 \sqcup f_2$'nin SC_2-bağlantılı olmadığını varsayalım. Buradan

$$\begin{aligned} f_1 \sqcup f_2 &\sqsubseteq g \sqcup h \\ (f_1 \sqcup f_2) \sqcap g \sqcap h &= \tilde{0}_E \\ (f_1 \sqcup f_2) \sqcap g &\neq \tilde{0}_E \\ (f_1 \sqcup f_2) \sqcap h &\neq \tilde{0}_E \end{aligned}$$

olacak şekilde $g, h \in \tau$ vardır. $f_1 \sqcap f_2 = \tilde{0}_E$ eşitliği de kullanılırsa,

$$\begin{aligned} f_1 \sqsubseteq g \sqcup h, &\quad f_2 \sqsubseteq g \sqcup h \\ f_1 \sqcap g \sqcap h = \tilde{0}_E, &\quad f_2 \sqcap g \sqcap h = \tilde{0}_E \\ f_1 \sqcap g \neq \tilde{0}_E, &\quad f_2 \sqcap g \neq \tilde{0}_E \\ f_1 \sqcap h \neq \tilde{0}_E, &\quad f_2 \sqcap g \neq \tilde{0}_E \end{aligned}$$

elde edilir.Bu durumda f_1 ve f_2'nin SC_2-bağlantılı olmasıyla çelişir.

6. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu çalışmada sezgisel bulanık topolojik uzay ve sezgisel bulanık topolojik uzaylardaki bağlantılılık kavramlarından yola çıkılarak sezgisel bulanık esnek bağlantılılık ve sezgisel bulanık esnek C_i bağlantılık kavramı ve temel özellikleri ele alınarak incelenmiştir.

KAYNAKLAR

[1] **Ali, M.I. Feng, F. Liu, X. Min, W.K. Shabir, M. 2009.** On some new operations in soft set theory, Computers and Mathematics with Applications 57 (2009)1547-1553.

[2] **Aktaş, H. and Çağman, N., 2007.** Soft sets and soft groups, Information Sciences 177 (2007) 2726-2735.

[3] **Atanassov, K.T., 1986.** Intuitionistic Fuzzy Sets, Fuzzy Sets and Systems 20 (1986) 87-96.

[4] **Aygünoğlu A. and Aygün, H., 2011.** Some notes on soft topological spaces, Neural Comput and Applic, (2011), 1-7.

[5] **Çağman, N. and Enginoğlu, S., 2010.** Soft set theory and uni-int decision making, European Journal of Operational Research 10.16/ j.ejor.2010.05.004, 2010.

[6] **Çağman, N., Karataş, S. and Enginoğlu, S., 2011.** Soft topology, Computers and Mathematics with Applications, 62 (2011), 351-358.

[7] **Çağman, N., 2014.** Contributions to theory of soft sets, Journal of New Results in Science, (4)(2014) 33-41.

[8] **Çoker, D., 1997.** An introduction to intuitionistic fuzzy topological spaces, Fuzzy Sets and Systems, 88 (1997) 81-89.

[9] **Gong, K., Wang, P. and Xiao, Z.** Bijective soft set decision system based parameters reduction under fuzzy environments, Applied Mathematical Modelling, 37 (2013) 4474–4485.

[10] **Hussain, S. and Ahmad, B., 2011.** Some properties of soft topological spaces, Computers and Mathematics with Applications, 62 (2011) 4058–4067.

[11] **Karataş, S. and Akdağ, M., 2014.** On intuitionistic fuzzy soft continuous mappings, Journal of New Results in Science, 4(2014) 55-70

[12] **Karataş, S. and İşleyen, M.A., 2015.** Connectedness on intuitionistic fuzzy soft topological spsaces, Journal of New Theory, 1(2015) 02-16

[13] **Kong Z., Gao, L. , Wang, L., Li, S., 2008.** The normal parameter reduction of soft sets and its algorithm, Computers and Mathematics with Applications, 56 (2008) 3029–3037.

[14] **Li, Z. and Cui, R., 2013.** On the topological structure of intuitionistic fuzzy soft set, Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics, Volume 5, No. 1 (2013), pp. 229-239.

[15] **Maji, P.K., Biswas, R. , and Roy A.R., 2001.** Intuitionistic Fuzzy Soft Sets, The Journal of Fuzzy Mathematics, 9(3) 677–692 (2001)

[16] **Maji, P.K., Roy, A.R., Biswas, R., 2002.** An application of soft sets in a decision making problem, Computers and Mathematics with Applications 44 (2002)1077-1083.

[17] **Maji, P.K., Bismas, R., Roy, A.R., 2003.** Soft set theory, Computers and Mathematics with Applications, 45 (2003) 555-562.

[18] **Majumdar, P. K., 2009.** More on Intuitionistic Fuzzy Soft Sets, Rough Sets, Fuzzy Sets, Data Mining and Granular Computing, Springer-Verlag (12th International Conference, Proceedings, RSFDGrC 2009 Delhi, India.)

[19] **Majumdar, P., Samanta, S.K., 2008.** Similarity measure of soft sets, New Mathematics and Natural Computation, 4 (1) (2008) 1–12.

[20] **Molodtsov, D.A., 1999.** Soft set theory-first results, Computers and Mathematics with Applications, 37 (1999) 19-31.

[21] **Shabir, M. and Naz, M., 2011.** On soft topological spaces, Computers and Mathematics with Applications, 61 (2011) 1786-1799.

[22] **Tanay, B. and Kandemir, M.B. 2012.** Topological structure of fuzzy soft sets, Computers and Mathematics with Applications, 61 (2011) 2952-2957.

[23] **Yin, Y., Li, H. and Jun, Y.B., 2012.** On algebraic structures of intuitionistic fuzzy soft sets, Computers and Mathematics with Applications, 61 (2012) 2896-2911.

[24] **Zadeh L., 1965.** Fuzzy Sets, Inform. and Control, 8 (1965) 338-353.

[25] **Zorlutuna, I. Akdağ, M. Min, W.K. Atmaca, S. 2012.** Remarks on soft topological spaces, Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics, Volume 3, No. 2, pp. 171-185.

DİZİN

ÖZGEÇMİŞ

Adı-Soyadı	:	Mehmet Akif İŞLEYEN
Doğum Yeri	:	Ordu
Doğum Tarihi	:	1984
Medeni Hali	:	Evli
Bildiği Yabancı Dil	:	İngilizce
İletişim Bilgileri	:	Ordu Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü, mehmetakifisleyen@msn.com
Lise	:	Özel Seçkin(Altaş) Fen Lisesi-2002
Lisans	:	Gazi Üniversitesi Fen-Ed. Fak. Matemaatik Böl.-2010
Yüksek Lisans	:	Ordu Üniversitesi 2015