T. C.

ORDU ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KARMAŞIK BULANIK ESNEK HALKALAR

SONGÜL SOYSAL

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ORDU 2024

TEZ BİLDİRİMİ

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan ve kullanılan intihal tespit programının sonuçlarına göre; bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

SONGÜL SOYSAL

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

KARMAŞIK BULANIK ESNEK HALKALAR

SONGÜL SOYSAL

ORDU ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ, 45 SAYFA

(TEZ DANIŞMANI: PROF. DR. YILDIRAY ÇELİK)

Bu tezin amacı karmaşık bulanık alt halka ve karmaşık bulanık esnek halka yapılarını vererek, temel özelliklerini araştırmak ve elde edilen sonuçları değerlendirmektir.

Bu çalışma beş ana bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde tez konusu ile ilgili literatür taramasının yer aldığı giriş kısmına yer verildi. İkinci bölümde çalışmamızda temel olan bazı tanım ve teoremler ifade edildi. Üçüncü bölümde karmaşık bulanık alt küme, karmaşık bulanık alt halka, π-bulanık alt küme ve π-bulanık alt halka gibi bazı kavramlar tanıtıldı. Karmaşık bulanık alt halkaların bazı temel özellikleri araştırıldı ve bir halka homomorfizması altında karmaşık bulanık alt halkaların görüntüsü ve ters görüntüsü ile ilgili teoremler verildi. Dördüncü bölüm iki kısımdan oluşmaktadır. İlk kısımda karmaşık bulanık esnek küme yapısı verildi ve bu yapı üzerinde bazı ikili işlemler verilerek bunlara ait örnekler sunuldu. İkinci kısımda karmaşık bulanık esnek halka yapısı tanıtıldı, temel özellikleri araştırıldı ve elde edilen sonuçlar ortaya konuldu. Ayrıca karmaşık bulanık esnek halka homomorfisi altında karmaşık bulanık esnek halkaların görüntüsü ve ters görüntüsü ile ilgili teoremler verildi ve temel özellikleri incelendi. Beşinci bölümde tez çalışmasından elde edilen sonuçlar ifade edildi ve önerilere yer verildi.

Anahtar Kelimeler: Karmaşık Bulanık Küme, Karmaşık Bulanık Alt Halka, Karmaşık Bulanık Esnek Küme, Karmaşık Bulanık Esnek Halka.

ABSTRACT

COMPLEX FUZZY SOFT RINGS

SONGÜL SOYSAL

ORDU UNIVERSITY INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

MATHEMATICS

MASTER THESIS, 45 PAGES

(SUPERVISOR: PROF. DR. YILDIRAY ÇELİK)

The aim of this thesis is to give complex fuzzy subring and complex fuzzy soft ring structures, to investigate their basic properties and to evaluate the results obtained.

This study consists of five main sections. In the first chapter, an introduction section containing the literature review regarding the thesis topic was included. In the second chapter, some definitions and theorems that are fundamental to our study are stated. In the third chapter, some concepts such as complex fuzzy subet, complex fuzzy subring, π-fuzzy subset and π-fuzzy subring are introduced. Some basic properties of complex fuzzy subrings are investigated and theorems regarding the image and inverse image of complex fuzzy subring under a ring homomorphism are given. The fourth chapter consist of two parts. In the firs part, the complex fuzzy soft set structure is given and some binary operations on this structure are given and examples of these are presented. In the second part, the complex fuzzy soft ring structure was introduced, its basic properties were investigated and the results were presented. In addition, theorems regarding the image and inverse image of complex fuzzy soft rings under complex fuzzy soft ring homomorphism are given and their basic properties are examined. In the first chapter the results obtained from the thesis study are expressed and suggestions are given.

Keywords: Complex Fuzzy Set, Complex Fuzzy Subring, Complex Fuzzy Soft Set, Complex Fuzzy Soft Ring.

TEŞEKKÜR

Tez konumun belirlenmesi, çalışmanın yürütülmesi ve yazımı esnasında desteklerini esirgemeyen başta danışman hocam Sayın Prof. Dr. Yıldıray ÇELİK olmak üzere Ordu Üniversitesi Matematik Bölümü Öğretim Üyelerine teşekkür ederim.

Aynı zamanda, manevi desteklerini her an üzerimde hissettiğim annem, babam ve eşime de teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa
TEZ BİLDİRİMİ..I
ÖZET..II
ABSTRACT..III
TEŞEKKÜR...IV
İÇİNDEKİLER...V
SİMGELER ve KISALTMALAR LİSTESİ...VI
1. GİRİŞ...1
2. TEMEL KAVRAMLAR...4
3. KARMAŞIK BULANIK ALT KÜMELER VE KARMAŞIK BULANIK ALT HALKALAR...6
4. KARMAŞIK BULANIK ESNEK HALKALAR...17
4.1. Karmaşık Bulanık Esnek Kümeler...17
4.2. Karmaşık Bulanık Esnek Halkalar...23
5. SONUÇ ve ÖNERİLER..33
6. KAYNAKLAR...34
ÖZGEÇMİŞ...37

SİMGELER ve KISALTMALAR LİSTESİ

$\boldsymbol{\delta_\alpha}$	:	δ'nın α-seviye alt kümesi
$\wedge$	:	Bulanık kümelerinin arakesiti
$\vee$	:	Bulanık kümelerinin birleşimi
$\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}$	:	A ve B karmaşık bulanık kümelerinin arakesiti
$\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}$	:	A ve B karmaşık bulanık kümelerinin birleşimi
$\boldsymbol{A^t}$	:	A kümesinin tümleyeni
$\boldsymbol{A_\pi}$	:	A'nın π bulanık alt kümesi
$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{X})$	:	X üzerindeki tüm bulanık kümelerin ailesi
$\boldsymbol{KB}(\boldsymbol{U})$	:	U üzerindeki bütün karmaşık bulanık kümelerin ailesi
$\widetilde{\subseteq}$	:	Karmaşık bulanık alt küme
$\boldsymbol{KBE}(\boldsymbol{U})$	:	U üzerindeki bütün karmaşık bulanık esnek kümelerin ailesi
$\widetilde{\sqsubseteq}$	:	Karmaşık bulanık esnek alt küme
$\boldsymbol{\Phi_A}$	:	Boş karmaşık bulanık esnek küme
$\boldsymbol{\Omega_A}$	:	Tam karmaşık bulanık esnek küme
$\widetilde{\cap}$	:	Karmaşık bulanık esnek kümelerin arakesiti
$\widetilde{\cup}$	:	Karmaşık bulanık esnek kümelerin birleşimi
$\widetilde{\sqcup}$	:	Karmaşık bulanık esnek kümelerin daraltılmış birleşimi
$\widetilde{\sqcap}$	:	Karmaşık bulanık esnek kümelerin genişletilmiş arakesiti
$\widetilde{\wedge}$	:	Karmaşık bulanık esnek kümelerin $\wedge$-arakesiti
$\widetilde{\vee}$	:	Karmaşık bulanık esnek kümelerin $\vee$-birleşimi
$\widetilde{\leq}$	:	Karmaşık bulanık esnek alt halka

1. GİRİŞ

Günlük yaşantımızda karşılaştığımız olaylardan bazıları belirsizlik içerdiğinden bunları net tanımlamalarla açıklamak ve ifade etmek her zaman mümkün olmayabilir. Zira belirsizlik kavramı karmaşık bir yapıya sahip olmasından ve açıkça tanımlanamamasından dolayı, belirsizlik içeren problemler klasik matematiksel yöntemler kullanılarak başarılı bir şekilde modellenememiştir. İlk kez Zadeh (1965) ile ortaya konulan bulanık küme kavramı bu ihtiyaçtan ortaya çıkmıştır. Bulanık kümeler kümede yer alan elemanların üyeliğinin dereceli olarak değerlendirilmesi için kullanılan küme türüdür. Bu değerlendirme bir X evrensel kümesinin elemanlarını $[0, 1]$ aralığına götüren üyelik fonksiyonu yardımı ile yapılır. Bulanık kümeler, verilerin yetersiz olduğu ya da kesin olmadığı hallerde, belirsizlik barındıran problemlere çözümler geliştirebilmek açısından önemlidir. Bulanık küme teorisi birçok yönde önemli ölçüde gelişmiştir ve çok çeşitli alanlarda uygulama bulmaktadır.

Rosenfeld (1971) bulanık kümeleri grup yapısı üzerinde ele aldı ve bulanık alt grup kavramını tanımladı. Mukherjee ve Bhattacharya (1984) bulanık normal alt grup ve bulanık kosetler üzerine çalışmalar yaptılar. Liu (1982) bulanık alt halka kavramını tanımladı. Zhang (1992) karmaşık bulanık sayıların birçok önemli özelliğini ortaya koydu. Malik ve Mordeson (1992) L-bulanık alt halkaların direkt toplam operasyonuna ait özellikleri araştırdılar. Bhakat ve Das (1996) bir halkanın bulanık alt halkalarını ve bulanık ideallerini yeniden tanımladılar.

Ramot ve ark. (2002) karmaşık bulanık küme kavramını verdiler. Karmaşık bulanık kümenin yeniliği üyelik fonksiyonunun elde edebileceği değer aralığında yatmaktadır. Geleneksel bulanık üyelik fonksiyonunun aksine, bu aralık [0,1] ile sınırlı olmayıp karmaşık düzlemde birim çembere kadar genişletilir. Böylece karmaşık bulanık küme, bir elemanın üyeliğini karmaşık sayı cinsinden açıklamak için matematiksel bir çerçeve sağlar. Karmaşık bulanık kümeler, çeşitli uygulama alanları için çok önemli bir role sahiptir. Buna ek olarak, bu kümeler aynı zamanda çeşitli problemleri, özellikle de sayısız periyodik hususları ve tahmin problemlerini çözmek için de kullanılır. Karmaşık bulanık kümeler ile çalışmanın avantajlarından biri, belirsizliği ve periyodikliği olan verileri çok etkili bir şekilde göstermesidir.

Buckley (1989) karmaşık bulanık sayılar üzerine bir çalışma yaptı. Chen ve ark. (2011)

uyarlanabilir nöro kompleks bulanık çıkarım sistemini geliştirdi. Fu ve Shen (2011) karmaşık bulanık sayıların sınıflandırıcı performans değerlendirmesindeki uygulamasını ele aldılar. Tamir ve Kandel (2011) karmaşık bulanık sınıf ve karmaşık bulanık mantık için karmaşık bulanık kümeleri kullandılar. Li ve ark. (2012) karmaşık bulanık kümeleri kullanarak kendi kendine öğrenen karmaşık bir nöro bulanık sistem sundular. Alkouri ve Salleh (2014) karmaşık bulanık kümeler üzerinde dilsel değişkenler ve çoklu mesafe ölçümünü ele aldılar. Tamir ve ark. (2015) karmaşık bulanık küme yapısını farklı bir yaklaşım ile yeniden tanıttılar.

Al-Husban ve Salleh (2016) karmaşık bulanık uzay üzerinde karmaşık bulanık hiper yapıları inşaa ettiler. Al-Husban ve ark. (2016) karmaşık bulanık uzay üzerinde karmaşık bulanık alt grup yapısını ele aldılar. Nagarajan ve ark. (2016) karmaşık bulanık kümeler üzerinde t-norm yapısını ve T-seviye karmaşık bulanık alt grup kavramını oluşturdular. Al-Husban ve ark. (2016) karmaşık sezgisel bulanık alt halka yapısını tanıttılar. Alsarahead ve Ahmad (2017) karmaşık bulanık alt halka kavramını vererek, temel özelliklerini araştırdılar. Dai ve ark. (2019) aralık değerli karmaşık bulanık kümeler arasındaki mesafe ölçümleri ile ilgili çalışma ortaya koydular. Shaqaqha (2020) Lie cebirlerinin karmaşık bulanık Lie alt cebirlerini tanımladı. Zeeshan ve Khan (2022) bir karar verme probleminde karmaşık bulanık kümelerin bir uygulamasını ele aldılar.

Maji ve ark. (2001) bulanık esnek küme kavramını verdiler ve bu yapıya ait temel özellikleri araştırdılar. Birçok araştırmacı tarafından da bu yapı kullanılarak bulanık esnek kümeler ile ilgili birçok çalışma ortaya konuldu. Nadia (2010) karmaşık bulanık esnek küme kavramını verdi ve bazı temel özellikleri araştırdı. İnan ve Öztürk (2012) bulanık esnek halka ve bulanık esnek ideal yapılarını tanımladılar. Çelik ve ark. (2013) bulanık esnek kümelerin halka yapısı üzerindeki uygulamasını ele aldılar, bulanık esnek halkalar üzerinde yeni ikili işlemler vererek özelliklerini incelediler. Alsarahead ve Ahmad (2017) karmaşık bulanık esnek grup yapısını verdiler ve bu yapıya ait temel özellikleri incelediler.

Bu tezle amaçlanan, karmaşık bulanık alt halka ve karmaşık bulanık esnek halka yapılarını vererek, temel özelliklerini araştırmak ve edinilen sonuçları değerlendirmektir. Bu çalışma beş ana bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde tez konusu ile ilgili literatür taramasının ele alındığı giriş kısmına yer verildi. İkinci bölümde çalışmamızda temel olan bazı tanım ve teoremler ifade edildi. Üçüncü bölümde karmaşık bulanık alt küme, karmaşık bulanık alt halka, π-bulanık küme ve π-bulanık alt halka gibi bazı kavramlar tanıtıldı. Karmaşık bulanık alt halkaların bazı temel özellikleri araştırıldı ve bir halka homomorfizması altında karmaşık bulanık alt halkaların görüntüsü ve ters görüntüsü ile ilgili teoremler verildi. Dördüncü bölüm iki kısımdan oluşmaktadır. İlk kısımda karmaşık bulanık esnek küme yapısı verildi ve bu yapı üzerinde bazı ikili işlemler verilerek bunlara ait örnekler sunuldu. İkinci kısımda karmaşık bulanık esnek halka yapısı tanıtıldı, temel özellikleri araştırıldı ve elde edilen sonuçlar ortaya konuldu. Ayrıca karmaşık bulanık esnek halka homomorfisi altında karmaşık bulanık esnek halkaların görüntüsü ve ters görüntüsü ile ilgili teoremler verildi ve temel özellikleri incelendi. Beşinci bölümde edinilen sonuçlara ve önerilere yer verildi.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Tanım 2.0.1 (Hungerford, 1974)) $R \neq \varnothing$ bir küme ve '+, .' R üzerinde tanımlı iki ikili işlem olsun. R ye bir halka denir. $\Leftrightarrow$ Her $x_1, x_2, x_3 \in R$ için

(i) $(R, +)$ değişmeli grup

(ii) $(R, \cdot)$ yarı grup

(iii) Her $x_1, x_2, x_3 \in R$ için $x_1 \cdot (x_2 + x_3) = x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3$ ve $(x_1 + x_2) \cdot x_3 = x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3$.

Eğer her $x_1 \in R$ için $x_1 \cdot 1_R = 1_R \cdot x_1 = x_1$ olacak şekilde $1_R \in R$ mevcut ise R ye birim elemanlı halka denir. R halkasının '+' işlemine göre olan birim elemanına halkanın sıfır elemanı denir ve 0_R ile gösterilir.

Tanım 2.0.2 (Hungerford, 1974)) $(R, +, \cdot)$ bir halka ve $\varnothing \neq S \subseteq R$ olsun. S'ye R'nin bir alt halkası denir. $\Leftrightarrow$ Her $x_1, x_2 \in S$ için $x_1.x_2 \in S$ ve $x_1 - x_2 \in S$ dir. Bu durum $S \leq R$ ile verilir. R halkasının bütün alt halkalarının kümesi $S(R)$ ile gösterilecektir.

Tanım 2.0.3 (Hungerford, 1974) R ve S iki halka olsun. $\phi : R \to S$ fonksiyonuna halka homomorfisi denir. $\Leftrightarrow$ Her $x_1, x_2 \in R$ için $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$ ve $f(x_1 \cdot x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2)$ dir.

Tanım 2.0.4 (Hungerford, 1974)) $\phi : R \to S$ bir halka homomorfisi olsun. Eğer ϕ bire-bir ve örten ise ϕ 'ye bir izomorfi denir. Bu durumda R ve S halkalarına izomorftur denir ve $R \cong S$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.0.5 (Zadeh, 1965) $X \neq \emptyset$ bir küme olsun. $\delta : X \to [0, 1]$ fonksiyonuna X 'in bulanık alt kümesi denir ve $\delta = \Big\{ \big(x, \delta(x)\big) : x \in X, \ \ \delta(x) \in [0, 1] \Big\}$ şeklinde tanımlanır. X üzerindeki tüm bulanık alt kümeler ailesi $B(X)$ ile gösterilir.

Tanım 2.0.6 (Zadeh, 1965) $\delta, \gamma \in B(X)$ olsun. Her $x \in X$ için $\delta(x) \leq \gamma(x)$ ise γ'ye δ'yü kapsıyor denir ve bu durum $\delta \leq \gamma$ şeklinde gösterilir.
$(\delta \vee \gamma)(x) = \delta(x) \vee \gamma(x) = max\{\delta(x), \gamma(x)\}$ ve
$(\delta \wedge \gamma)(x) = \delta(x) \wedge \gamma(x) = min\{\delta(x), \gamma(x)\}$
ile verilen kümelere sırasıyla δ ve γ'nün birleşimi ve arakesiti denir.

Tanım 2.0.7 (Mordeson ve Malik, 1998) $X \neq \emptyset$ ve $\delta \in B(X)$ olsun. $\alpha \in [0,1]$ olmak üzere $\delta_\alpha = \{x \in X \mid \delta(x) \geq \alpha\}$ kümesine δ'nün bir α-seviye alt kümesi denir.

Tanım 2.0.8 (Zadeh, 1965) $\{\delta_i | i \in I\}$ X üzerinde bulanık alt kümelerin bir ailesi olsun. $\{\delta_i | i \in I\}$ ailesinin kartezyen çarpımı $\underset{i \in I}{\times} \delta_i$ şeklinde gösterilir ve $\underset{i \in I}{\times} \delta_i = \underset{i \in I}{\wedge} \delta_i(x)$ şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.0.9 (Mordeson ve Malik, 1998) R bir halka ve δ, R üzerinde bir bulanık küme olsun. Eğer her $x, y \in R$ için aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa δ ye R nin bir bulanık alt halkası denir.

(i) $\delta(xy) \geq \min\{\delta(x), \delta(y)\}$

(ii) $\delta(x - y) \geq \min\{\delta(x), \delta(y)\}$

Tanım 2.0.10 (Mordeson ve Malik, 1998) R bir halka ve δ, R üzerinde bir bulanık küme olsun. Eğer her $x, y \in R$ için aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa δ ye R nin bir bulanık ideali denir.

(i) $\delta(xy) \geq \max\{\delta(x), \delta(y)\}$

(ii) $\delta(x - y) \geq \min\{\delta(x), \delta(y)\}$

Teorem 2.0.1 (Mordeson ve Malik, 1998) R ve S iki halka, $\phi : R \to S$ bir homomorfizma ve δ, R nin, γ, S nin bulanık alt halkaları (idealleri) olsun.

(i) $\phi(\delta)$ S nin bulanık alt halkası (ideali) dır.

(ii) $\phi^{-1}(\gamma)$ R nin bulanık alt halkası (ideali) dır.

Tanım 2.0.11 (Molodtsov, 1999) $X \neq \emptyset$ ve $P(X)$ X in alt kümelerinin bir ailesi ve $\mathcal{E} \neq \emptyset$ olsun. $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{E}$ ve $\mathcal{F} : \mathcal{A} \to P(\text{X})$ ile verilen $(\mathcal{F}, \mathcal{A})$ ikilisine X üzerinde bir esnek küme denir.

Tanım 2.0.12 (İnan ve Öztürk, 2012) $(\mathcal{F}, \mathcal{A})$ bir esnek küme olsun. $(\mathcal{F}, \mathcal{A})$ ya esnek halka denir. $\Leftrightarrow$ Her $a \in \mathcal{A}$ için $\mathcal{F}(a)$ bir alt halkadır.

Tanım 2.0.13 (Maji ve ark., 2001) $X \neq \emptyset$ bir küme, $\mathcal{E}$ parametreler kümesi, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{E}$ olsun. $F : \mathcal{A} \to B(X)$ ile verilen $(\mathcal{F}, \mathcal{A})$ ikilisine X üzerinde bulanık esnek küme denir.

3. KARMAŞIK BULANIK ALT KÜMELER ve KARMAŞIK BULANIK ALT HALKALAR

Tanım 3.0.1 (Ramot ve ark., 2002) U üzerinde tanımlı bir A karmaşık bulanık alt kümesi her bir elemana karmaşık değerli üyelik derecesi atayan bir $\delta_A(x)$ üyelik fonksiyonu ile verilir. $\delta_A(x)$ değerleri, karmaşık düzlemde birim çember içerisinde yer alır ve üstelik $s_A(x) \cdot e^{iv_A(x)}$ formunda ifade edilir. Burada $i = \sqrt{-1}$, $s_A(x)$ ve $v_A(x)$ reel değerler, $s_A(x) \in [0,1], v_A(x) \in [0, 2\pi]$ dir. Bir A karmaşık bulanık alt kümesi $A = \{(x, \delta_A(x)) : x \in U\}$ şeklinde bir sıralı çift ile ifade edilir. U üzerindeki bütün karmaşık bulanık kümelerin ailesi $KB(U)$ ile gösterilir.

Tanım 3.0.2 (Alsarahead ve Ahmad, 2017) A ve B, U üzerinde üyelik değerleri sırasıyla $\delta_A(x) = s_A(x)e^{iv_A(x)}$ ve $\delta_B(x) = s_B(x)e^{iv_B(x)}$ şeklinde olan karmaşık bulanık alt kümeler olsun. A ya B nin karmaşık bulanık alt kümesi denir. $\Leftrightarrow$ Her $x \in U$ için $s_A(x) \leq s_B(x)$ ve $v_A(x) \leq v_B(x)$ dir. Bu durum $A \overset{\sim}{\subseteq} B$ şeklinde gösterilir.

Tanım 3.0.3 (Alsarahead ve Ahmad, 2017) $A = \{(x, \delta_A(x)) : x \in U\}$ ve $B = \{(x, \delta_B(x)) : x \in U\}$ U üzerinde üyelik değerleri sırasıyla $\delta_A(x) = s_A(x)e^{iv_A(x)}$ ve $\delta_B(x) = s_B(x)e^{iv_B(x)}$ şeklinde olan iki karmaşık bulanık alt küme olsun. Bu takdirde her $x, y \in U$ için

(i) $s_A(x) \leq s_A(y) \Leftrightarrow v_A(x) \leq v_A(y)$ ise bir A karmaşık bulanık alt kümesine homojen karmaşık bulanık alt küme denir.

(ii) $s_A(x) \leq s_B(y) \Leftrightarrow v_A(x) \leq v_B(y)$ ise bir A karmaşık bulanık alt kümesine B ile homojen karmaşık bulanık alt küme denir.

Bu tezde bütün karmaşık bulanık alt kümeler, homojen karmaşık bulanık alt küme olarak ele alınacaktır.

Tanım 3.0.4 (Ramot ve ark., 2003) $A = \{(x, \delta_A(x)) : x \in U\}$ ve $B = \{(x, \delta_B(x)) : x \in U\}$ U üzerinde sırasıyla $\delta_A(x) = s_A(x)e^{iv_A(x)}$ ve $\delta_B(x) = s_B(x)e^{iv_B(x)}$ üyelik değerleri ile verilen iki karmaşık bulanık alt küme olsun. Bu takdirde A ve B nin arakesiti, birleşimi ve A nın tümleyeni sırasıyla $A \cap B$, $A \cup B$ ve A^t şeklinde gösterilir ve üyelik değerleri aşağıdaki gibi tanımlanır.

(i) $\delta_{A \cap B}(x) = s_{A \cap B}(x)e^{iv_{A \cap B}(x)} = \min\{s_A(x), s_B(x)\}\, e^{i \min\{v_A(x), v_B(x)\}}$

(ii) $\delta_{A \cup B}(x) = s_{A \cup B}(x)e^{iv_{A \cup B}(x)} = \max\{s_A(x), s_B(x)\}\, e^{i \max\{v_A(x), v_B(x)\}}$

(iii) $\delta_{A^t}(x) = (1 - s_A(x))\, e^{i(2\pi - v_A(x))}$

Önerme 3.0.1 (Alsarahead ve Ahmad, 2017) Bir A karmaşık bulanık alt kümesi homojen karmaşık bulanık alt kümedir. $\Leftrightarrow$ A^t homojen karmaşık bulanık alt kümedir.

İspat. Tanım 3.0.3 ve Tanım 3.0.4 kullanılarak gösterilir.

Tanım 3.0.5 (Alsarahead ve Ahmad, 2017) $A = \{(x, \delta_A(x)) : x \in U\}$ bir bulanık alt küme olsun. $A_\pi = \{(x, \delta_{A_\pi}(x)) : x \in U\}$ şeklinde verilen A_π kümesine π-bulanık alt küme denir. Burada $\delta_{A_\pi}(x) = 2\pi\delta_A(x)$ 'dir.

Tanım 3.0.6 (Alsarahead ve Ahmad, 2017) R bir halka ve $A_\pi = \{(x, \delta_{A_x}(x)) : x \in R\}$ R nin bir π-bulanık alt kümesi olsun. A_π ye π-bulanık alt halka denir. $\Leftrightarrow$ Her $x, y \in R$ için

(i) $\delta_{A_\pi}(xy) \geq \min\{\delta_{A_\pi}(x), \delta_{A_\pi}(y)\}$

(ii) $\delta_{A_\pi}(x - y) \geq \min\{\delta_{A_\pi}(x), \delta_{A_\pi}(y)\}$

Tanım 3.0.7 (Alsarahead ve Ahmad, 2017) R bir halka ve $A_\pi = \{(x, \delta_{A_x}(x)) : x \in R\}$ R nin bir π-bulanık alt kümesi olsun. A_π ye π-bulanık ideal denir. $\Leftrightarrow$ Her $x, y \in R$ için

(i) $\delta_{A_\pi}(xy) \geq \max\{\delta_{A_\pi}(x), \delta_{A_\pi}(y)\}$

(ii) $\delta_{A_\pi}(x - y) \geq \min\{\delta_{A_\pi}(x), \delta_{A_\pi}(y)\}$

Önerme 3.0.2 (Alsarahead & Ahmad 2017) Bir A_π π-bulanık alt kümesine π-bulanık alt halka (π-bulanık ideal) denir $\Leftrightarrow$ A bir bulanık alt halka (bulanık ideal) dır.

Tanım 3.0.8 (Alsarahead ve Ahmad, 2017) R bir halka ve $A = \{(x, \delta_A(x)) : x \in R\}$ bir homojen karmaşık bulanık alt küme olsun. Eğer her $x, y \in R$ için aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa A ya R nin karmaşık bulanık alt halkası denir.

(i) $\delta_A(xy) \geq \min\{\delta_A(x), \delta_A(y)\}$

(ii) $\delta_A(x - y) \geq \min\{\delta_A(x), \delta_A(y)\}$

Tanım 3.0.9 (Alsarahead ve Ahmad, 2017) R bir halka ve $A = \{(x, \delta_A(x)) : x \in R\}$ bir homojen karmaşık bulanık alt küme olsun. Eğer her $x, y \in R$ için aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa A ya R nin karmaşık bulanık ideali denir.

(i) $\delta_A(xy) \geq \max\{\delta_A(x), \delta_A(y)\}$

(ii) $\delta_A\left(x-y\right) \geq \min\left\{\delta_A(x), \delta_A(y)\right\}$

Teorem 3.0.1 (Alsarahead ve Ahmad, 2017) R bir halka ve $A = \{(x, \delta_A(x)) : x \in R\}$ kümesi $\delta_A(x) = s_A(x)e^{iv_A(x)}$ üyelik değeri ile verilen bir homojen karmaşık bulanık alt küme olsun. Bu takdirde A ya R nin karmaşık bulanık alt halkası denir. $\Leftrightarrow$

(i) $\bar{A} = \{(x, s_A(x)) : x \in R, s_A(x) \in [0,1]\}$ kümesi bir bulanık alt halkadır.

(ii) $\underline{A} = \{(x, v_A(x)) : x \in R, v_A(x) \in [0, 2\pi]\}$ kümesi bir π-bulanık alt halkadır.

İspat. A bir karmaşık bulanık alt halka olsun. Bu takdirde her $x, y \in R$ için

$$\begin{aligned} s_A(xy)e^{iv_A(xy)} &= \delta_A(xy) \\ &\geq \min\left\{\delta_A(x), \delta_A(y)\right\} \\ &= \min\left\{s_A(x)e^{iv_A(x)}, s_A(y)e^{iv_A(y)}\right\} \\ &= \min\left\{s_A(x), s_A(y)\right\} e^{i\min\{v_A(x), v_A(y)\}} \text{ dir.} \end{aligned}$$

A homojen olduğundan dolayı $s_A(xy) \geq \min\left\{s_A(x), s_A(y)\right\}$ ve $v_A(xy) \geq \min\left\{v_A(x), v_A(y)\right\}$ dir. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} s_A(x-y)e^{iv_A(x-y)} &= \delta_A(x-y) \\ &\geq \min\left\{\delta_A(x), \delta_A(y)\right\} \\ &= \min\left\{s_A(x)e^{iv_A(x)}, s_A(y)e^{iv_A(y)}\right\} \\ &= \min\left\{s_A(x), s_A(y)\right\} e^{i\min\{v_A(x), v_A(y)\}} \text{ dir.} \end{aligned}$$

A homojen olduğundan $s_A(x-y) \geq \min\left\{s_A(x), s_A(y)\right\}$ ve $v_A(x-y) \geq \min\left\{v_A(x), v_A(y)\right\}$ dir.

Buradan $\bar{A}$ bir bulanık alt halka ve $\underline{A}$ bir π-bulanık alt halkadır.

Tersine $\bar{A}$ bir bulanık alt halka ve $\underline{A}$ bir π-bulanık alt halka olsun. Her $x, y \in R$ için

$$\begin{aligned} s_A(xy) &\geq \min\left\{s_A(x), s_A(y)\right\} \\ v_A(xy) &\geq \min\left\{v_A(x), v_A(y)\right\} \\ s_A\left(x-y\right) &\geq \min\left\{s_A(x), s_A(y)\right\} \\ v_A\left(x-y\right) &\geq \min\left\{s_A(x), s_A(y)\right\} \text{ dir.} \end{aligned}$$

Buradan

$$
\begin{aligned}
\delta_A(xy) = s_A(xy)e^{iv_A(xy)} &\geq \min\left\{s_A(x), s_A(y)\right\} e^{i\min\{v_A(x), v_A(y)\}} \\
&= \min\left\{s_A(x)e^{iv_A(x)}, s_A(y)e^{iv_A(y)}\right\} \\
&= \min\left\{\delta_A(x), \delta_A(y)\right\}
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
\delta_A(xy) = s_A(x-y)e^{iv_A(x-y)} &\geq \min\left\{s_A(x), s_A(y)\right\} e^{i\min\{v_A(x), v_A(y)\}} \\
&= \min\left\{s_A(x)e^{iv_A(x)}, s_A(y)e^{iv_A(y)}\right\} \\
&= \min\left\{\delta_A(x), \delta_A(y)\right\}
\end{aligned}
$$

Dolayısıyla A bir karmaşık bulanık alt halkadır.

Teorem 3.0.2 (Alsarahead ve Ahmad, 2017) R bir halka ve $A = \{(x, \delta_A(x)) : x \in R\}$ kümesi $\delta_A(x) = s_A(x)e^{iv_A(x)}$ üyelik değeri ile verilen homojen karmaşık bulanık alt küme olsun. Bu takdirde A ya R nin karmaşık bulanık ideali denir. $\Leftrightarrow$

(i) $\bar{A} = \{(x, s_A(x)) : x \in R, s_A(x) \in [0, 1]\}$ kümesi bir bulanık idealdir.

(ii) $\underline{A} = \{(x, v_A(x)) : x \in R, v_A(x) \in [0, 2\pi]\}$ kümesi bir π-bulanık idealdir.

İspat. Teorem 3.0.1 in ispatına benzerdir.

Teorem 3.0.3 (Alsarahead ve Ahmad, 2017) $\{A_i : i \in I\}$ bir R halkası üzerinde karmaşık bulanık alt halkaların bir ailesi ve her $j, k \in I$ için A_j, A_k ile homojen olsun. Bu takdirde $\cap_{i \in I} A_i$ bir karmaşık bulanık alt halkadır.

İspat. Teorem 3.0.1 den biliyoruz ki her $i \in I$ için $s_{A_i}(x)$ bir bulanık alt halka ve $v_{A_i}(x)$ π-bulanık alt halkadır. Şimdi, $x, y \in R$ olsun. Bu takdirde

$$
\begin{aligned}
\delta_{\cap_{i\in I}A_i}(xy) &= s_{\cap_{i\in I}A_i}(xy)e^{iv_{\cap_{i\in I}A_i}(xy)} \\
&= \min_{i\in I}\{s_{A_i}(xy)\}\, e^{i\min_{i\in I}\left\{v_{A_i}(xy)\right\}} \\
&\geq \min_{i\in I}\{\min\{s_{A_i}(x), s_{A_i}(y)\}\}\, e^{i\min_{i\in I}\left\{\min\left\{v_{A_i}(x), v_{A_i}(y)\right\}\right\}} \\
&= \min\left\{\min_{i\in I}\{s_{A_i}(x)\}, \min_{i\in I}\{s_{A_i}(y)\}\right\} e^{i\min\left\{\min_{i\in I}\left\{v_{A_i}(x)\right\}, \min_{i\in I}\left\{v_{A_i}(y)\right\}\right\}} \\
&= \min\left\{\min_{i\in I}\{s_{A_i}(x)\}\, e^{i\min_{i\in I}\left\{v_{A_i}(x)\right\}},\ \min_{i\in I}\{s_{A_i}(y)\}\, e^{i\min_{i\in I}\left\{v_{A_i}(y)\right\}}\right\} \\
&= \min\left\{\delta_{\cap_{i\in I}A_i}(x), \delta_{\cap_{i\in I}A_i}(y)\right\}
\end{aligned}
$$

Diğer taraftan

$$
\begin{aligned}
\delta_{\cap_{i\in I}A_i}(x-y) &= s_{\cap_{i\in I}A_i}(x-y)\, e^{iv_{\cap_{i\in I}A_i}(x-y)} \\
&= \min_{i\in I}\{s_{A_i}(x-y)\}\, e^{i\min_{i\in I}\left\{v_{A_i}(x-y)\right\}} \\
&\geq \min_{i\in I}\{\min\{s_{A_i}(x), s_{A_i}(y)\}\}\, e^{i\min_{i\in I}\left\{\min\left\{v_{A_i}(x), v_{A_i}(y)\right\}\right\}} \\
&= \min\left\{\min_{i\in I}\{s_{A_i}(x)\}, \min_{i\in I}\{s_{A_i}(y)\}\right\} e^{i\min\left\{\min_{i\in I}\left\{v_{A_i}(x)\right\}, \min_{i\in I}\left\{v_{A_i}(y)\right\}\right\}} \\
&= \min\left\{\min_{i\in I}\{s_{A_i}(x)\}\, e^{i\min_{i\in I}\left\{v_{A_i}(x)\right\}},\ \min_{i\in I}\{s_{A_i}(y)\}\, e^{i\min_{i\in I}\left\{v_{A_i}(y)\right\}}\right\} \\
&= \min\left\{\delta_{\cap_{i\in I}A_i}(x), \delta_{\cap_{i\in I}A_i}(y)\right\}
\end{aligned}
$$

Böylece $\cap_{i\in I}A_i$ bir karmaşık bulanık alt halkadır.

Teorem 3.0.4 (Alsarahead ve Ahmad, 2017) $\{A_i : i \in I\}$ bir R halkası üzerinde karmaşık bulanık ideallerin bir ailesi ve her $j, k \in I$ için A_j, A_k ile homojen olsun. Bu takdirde $\cap_{i\in I}A_i$ bir karmaşık bulanık idealdir.

İspat. Teorem 3.0.3 ün ispatına benzerdir.

Teorem 3.0.5 (Alsarahead ve Ahmad, 2017) A, R halkası üzerinde bir karmaşık bulanık alt halkadır. $\Leftrightarrow$ A^t R üzerinde karmaşık bulanık alt halkadır.

İspat. A, R halkası üzerinde bir karmaşık bulanık alt halka olsun. Her $x, y \in R$ için

$$
\begin{aligned}
\delta_{A^t}(xy) &= (1 - s_A(xy))\, e^{i(2\pi - v_A(xy))} \\
&\geq (1 - \min\{s_A(x), s_A(y)\})\, e^{i(2\pi - \min\{v_A(x), v_A(y)\})} \\
&= \max\{(1 - s_A(x)), (1 - s_A(y))\}\, e^{i \max\{(2\pi - v_A(x)), (2\pi - v_A(y))\}} \\
&\geq \min\{(1 - s_A(x)), (1 - s_A(y))\}\, e^{i \min\{(2\pi - v_A(x)), (2\pi - v_A(y))\}} \\
&= \min\left\{(1 - s_A(x))\, e^{i(2\pi - v_A(x))}, (1 - s_A(y))\, e^{i(2\pi - v_A(y))}\right\} \\
&= \min\{\delta_{A^t}(x), \delta_{A^t}(y)\}
\end{aligned}
$$

Diğer taraftan

$$
\begin{aligned}
\delta_{A^t}(x - y) &= (1 - s_A(x - y))\, e^{i(2\pi - v_A(x-y))} \\
&\geq (1 - \min\{s_A(x), s_A(y)\})\, e^{i(2\pi - \min\{v_A(x), v_A(y)\})} \\
&= \max\{(1 - s_A(x)), (1 - s_A(y))\}\, e^{i \max\{(2\pi - v_A(x)), (2\pi - v_A(y))\}} \\
&\geq \min\{(1 - s_A(x)), (1 - s_A(y))\}\, e^{i \min\{(2\pi - v_A(x)), (2\pi - v_A(y))\}} \\
&= \min\left\{(1 - s_A(x))\, e^{i(2\pi - v_A(x))}, (1 - s_A(y))\, e^{i(2\pi - v_A(y))}\right\} \\
&= \min\{\delta_{A^t}(x), \delta_{A^t}(y)\}
\end{aligned}
$$

Böylece A^t bir karmaşık bulanık alt halkadır.

Tersine, A^t bir karmaşık bulanık alt halka olsun. Her $x, y \in R$ için

$$
\begin{aligned}
\delta_A(xy) &= s_A(xy) e^{i v_A(xy)} \\
&= 1 - (1 - s_A(xy))\, e^{i(2\pi - (2\pi - v_A(xy)))} \\
&\geq (1 - \min\{(1 - s_A(x)), (1 - s_A(y))\})\, e^{i(2\pi - \min\{(2\pi - v_A(x)), (2\pi - v_A(y))\})} \\
&= \max\{s_A(x), s_A(y)\}\, e^{i \max\{v_A(x), v_A(y)\}} \\
&\geq \min\{s_A(x), s_A(y)\}\, e^{i \min\{v_A(x), v_A(y)\}} \\
&= \min\left\{s_A(x) e^{i v_A(x)}, s_A(y) e^{i v_A(y)}\right\} \\
&= \min\{\delta_A(x), \delta_A(y)\}
\end{aligned}
$$

Diğer taraftan

$$
\begin{aligned}
\delta_A(x-y) &= s_A(x-y)e^{iv_A(x-y)} \\
&= 1-(1-s_A(xy))\, e^{i(2\pi-(2\pi-v_A(xy)))} \\
&\geq (1-\min\{(1-s_A(x)), (1-s_A(y))\})\, e^{i(2\pi-\min\{(2\pi-v_A(x)),(2\pi-v_A(y))\})} \\
&= \max\{s_A(x), s_A(y)\}\, e^{i\max\{v_A(x),v_A(y)\}} \\
&\geq \min\{s_A(x), s_A(y)\}\, e^{i\min\{v_A(x),v_A(y)\}} \\
&= \min\left\{s_A(x)e^{iv_A(x)}, s_A(y)e^{iv_A(y)}\right\} \\
&= \min\{\delta_A(x), \delta_A(y)\}
\end{aligned}
$$

Böylece A bir karmaşık bulanık alt halkadır.

Tanım 3.0.10 (Alsarahead ve Ahmad, 2017) $A = \left\{(x, \delta_A(x)) : \delta_A(x) = s_A(x)e^{iv_A(x)}, x \in X\right\}$ X in bir karmaşık bulanık alt kümesi olsun. $\alpha \in [0,1]$ ve $\beta \in [0, 2\pi]$ için $A_{(\alpha,\beta)} = \{x \in X : s_A(x) \geq \alpha, v_A(x) \geq \beta\}$ şeklinde verilen $A_{(\alpha,\beta)}$ kümesine, A karmaşık bulanık alt kümesinin (α, β)-seviye alt kümesi denir. Eğer $\beta = 0$ ise $A_\alpha = \{x \in X : s_A(x) \geq \alpha\}$ seviye alt kümesi eğer $\alpha = 0$ ise $A_\beta = \{x \in X : v_A(x) \geq \beta\}$ seviye alt kümesi elde edilir.

Teorem 3.0.6 (Alsarahead ve Ahmad, 2017) $A = \left\{(x, \delta_A(x)) : \delta_A(x) = s_A(x)e^{iv_A(x)}, x \in R\right\}$ R nin bir karmaşık bulanık alt halkasıve e, R halkasının birim elemanı olsun. Eğer $s_A(e) \geq \alpha$ ve $v_A(e) \geq \beta$ ise $A_{(\alpha,\beta)}$ kümesi R nin alt halkasıdır.

İspat. Açıkça $e \in A_{(\alpha,\beta)}$ dir. Böylece $A_{(\alpha,\beta)} \neq \phi$ dir. $x, y \in A_{(\alpha,\beta)}$ olsun. Buradan $s_A(x) \geq \alpha$, $v_A(x) \geq \beta$, $s_A(y) \geq \alpha$ ve $v_A(y) \geq \beta$ dır.

Şimdi,

$$
\begin{aligned}
\delta_A(xy) = s_A(xy)e^{iv_A(xy)} &\geq \min\left\{s_A(x)e^{iv_A(x)}, s_A(y)e^{iv_A(y)}\right\} \\
&= \min\{s_A(x), s_A(y)\}\, e^{i\min\{v_A(x),v_A(y)\}}
\end{aligned}
$$

Buradan

$$
\begin{aligned}
s_A(xy) &\geq \min\{s_A(x), s_A(y)\} \\
&\geq \min\{\alpha, \alpha\} \\
&= \alpha
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
v_A(xy) &\geq \min\{v_A(x), v_A(y)\} \\
&\geq \min\{\beta, \beta\} \\
&= \beta
\end{aligned}
$$

Bundan dolayı $xy \in A_{(\alpha,\beta)}$ dir.

Diğer taraftan

$$
\begin{aligned}
\delta_A(x-y) = s_A(x-y)e^{iv_A(x-y)} &\geq \min\left\{s_A(x)e^{iv_A(x)}, s_A(y)e^{iv_A(y)}\right\} \\
&= \min\{s_A(x), s_A(y)\}\, e^{i\min\{v_A(x), v_A(y)\}}
\end{aligned}
$$

Buradan

$$
\begin{aligned}
s_A(x-y) &\geq \min\{s_A(x), s_A(y)\} \\
&\geq \min\{\alpha, \alpha\} \\
&= \alpha
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
v_A(x-y) &\geq \min\{v_A(x), v_A(y)\} \\
&\geq \min\{\beta, \beta\} \\
&= \beta
\end{aligned}
$$

Bundan dolayı $x - y \in A_{(\alpha,\beta)}$ dir.

Sonuç olarak $A_{(\alpha,\beta)}$ kümesi R nin alt halkasıdır.

Sonuç 3.0.1 $A = \left\{(x, \delta_A(x)) : \delta_A(x) = s_A(x)e^{iv_A(x)}, x \in R\right\}$ R nin bir karmaşık bulanık alt halkası olsun. Eğer $s_A(e) \geq \alpha$ ve $v_A(e) \geq \beta$ ise $A_\alpha = \{x \in R : s_A(x) \geq \alpha\}$ ve $A_\beta = \{x \in R : v_A(x) \geq \beta\}$ seviye kümeleri R' nin alt halkalarıdır.

Tanım 3.0.11 (Alsarahead ve Ahmad, 2017) $f : R \longrightarrow S$ bir halka homomorfizması olsun. $A = \{(x, \delta_A(x)) : x \in R\}$ ve $B = \{(x, \delta_B(x)) : x \in S\}$ sırasıyla R ve S üzerinde üyelik değerleri $\delta_A(x) = s_A(x)e^{iv_A(x)}$ ve $\delta_B(x) = s_B(x)e^{iv_B(x)}$ şeklinde olan karmaşık bulanık alt halkalar olsun.

Bu takdirde $C = \{(y, f(\delta_A)(y)) : y \in S\}$ kümesine A nın görüntüsü denir ve her $y \in S$ için

$$f(\delta_A)(y) = \begin{cases} \vee \{\delta_A(x) \mid x \in R, f(x) = y\}, & \text{eğer } f^{-1}(y) \neq \phi \\ 0, & \text{eğer } f^{-1}(y) = \phi \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

$D = \{(x, f^{-1}(\delta_B)(x)) : x \in R\}$ kümesine B nin ters görüntüsü denir ve her $x \in R$ için $f^{-1}(\delta_B)(x) = \delta_B(f(x))$ ile verilir.

Lemma 3.0.1 (Alsarahead ve Ahmad, 2017) $f : R \longrightarrow S$ bir halka homomorfizması, A ve B sırasıyla R ve S üzerinde karmaşık bulanık alt halkalar olsun. Bu takdirde

(i) $f(\delta_A)(y) = f(s_A)(y)e^{if(v_A)(y)}$

(ii) $f^{-1}(\delta_B)(x) = f^{-1}(s_B)(x)e^{if^{-1}(v_B)(x)}$

İspat. (i)

$$\begin{aligned} f(\delta_A)(y) &= \max_{f(x)=y} \delta_A(x) \\ &= \max_{f(x)=y} \left(s_A(x)e^{iv_A(x)}\right) \\ &= \max_{f(x)=y} s_A(x)e^{\max_{f(x)=y} iv_A(x)} \\ &= f(s_A)(y)e^{if(v_A)(y)} \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} f^{-1}(\delta_B)(x) &= \delta_B(f(x)) \\ &= s_B(f(x))e^{iv_B(f(x))} \\ &= f^{-1}(s_B)(x)e^{if^{-1}(v_B)(x)} \end{aligned}$$

Teorem 3.0.7 (Alsarahead ve Ahmad, 2017) $f : R \longrightarrow S$ bir halka homomorfizması, A ve B sırasıyla R ve S üzerinde üyelik fonksiyonları $\delta_A(x) = s_A(x)e^{iv_A(x)}$ ve $\delta_B(x) = s_B(x)e^{iv_B(x)}$ şeklinde olan karmaşık bulanık alt halkalar olsun. Bu takdirde $f(\delta_A)$ S nin karmaşık bulanık alt halkasıdır.

İspat. A bir karmaşık bulanık alt halka olduğundan Teorem 3.0.1 ile $s_A(x)$ bir bulanık alt halka ve $v_A(x)$ bir π-bulanık alt halkadır. Ayrıca Teorem 2.0.1 ile $s_A(x)$ ve $v_A(x)$ in görüntüleri sırasıyla bulanık alt halka ve π-bulanık alt halkadır. Öyleyse her $x, y \in H$ için

$f(s_A)(xy) \geq \min\{f(s_A)(x), f(s_A)(y)\}$

$f(v_A)(xy) \geq \min\{f(v_A)(x), f(v_A)(y)\}$

$f(s_A)(x-y) \geq \min\{f(s_A)(x), f(s_A)(y)\}$

$f(v_A)(x-y) \geq \min\{f(s_A)(x), f(s_A)(y)\}$ dir.

Şimdi Lemma 3.0.1 ile

$$\begin{aligned} f(\delta_A)(xy) &= f(s_A)(xy)e^{if(v_A)(xy)} \\ &\geq \min\{f(s_A)(x), f(s_A)(y)\}\, e^{i\min\{f(v_A)(x), f(v_A)(y)\}} \\ &= \min\left\{f(s_A)(x)e^{if(v_A)(x)}, f(s_A)(y)e^{if(v_A)(y)}\right\} \\ &= \min\{f(\delta_A)(x), f(\delta_A)(y)\} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} f(\delta_A)(x-y) &= f(s_A)(x-y)e^{if(v_A)(x-y)} \\ &\geq \min\{f(s_A)(x), f(s_A)(y)\}\, e^{i\min\{f(v_A)(x), f(v_A)(y)\}} \\ &= \min\left\{f(s_A)(x)e^{if(v_A)(x)}, f(s_A)(y)e^{if(v_A)(y)}\right\} \\ &= \min\{f(\delta_A)(x), f(\delta_A)(y)\} \end{aligned}$$

Teorem 3.0.8 (Alsarahead ve Ahmad, 2017) $f : R \longrightarrow S$ bir halka homomorfizması, A ve B sırasıyla R ve S üzerinde üyelik fonksiyonları $\delta_A(x) = s_A(x)e^{iv_A(x)}$ ve $\delta_B(x) = s_B(x)e^{iv_B(x)}$ şeklinde olan karmaşık bulanık alt halkalar olsun. Bu takdirde $f^{-1}(\delta_B)$ R nin karmaşık bulanık alt halkasıdır.

İspat. B bir karmaşık bulanık alt halka olduğundan Teorem 3.0.1 ile $s_B(x)$ bir bulanık alt halka ve $v_B(x)$ bir π-bulanık alt halkadır. Ayrıca Teorem 2.0.1 ile $s_B(x)$ ve $v_B(x)$ in ters görüntüleri sırasıyla bulanık alt halka ve π-bulanık alt halkadır. Öyleyse her $x, y \in R$ için

$f^{-1}(s_B)(xy) \geq \min\{f^{-1}(s_B)(x), f^{-1}(s_B)(y)\}$

$f^{-1}(s_B)(x-y) \geq \min\{f^{-1}(s_B)(x), f^{-1}(s_B)(y)\}$

$f^{-1}(v_B)(xy) \geq \min\{f^{-1}(v_B)(x), f^{-1}(v_B)(y)\}$

$f^{-1}(v_B)(x-y) \geq \min\{f^{-1}(v_B)(x), f^{-1}(v_B)(y)\}$ dir.

Şimdi Lemma 3.0.1 ile

$$\begin{aligned}
f^{-1}(\delta_B)(xy) &= f^{-1}(s_B)(xy)e^{if^{-1}(v_B)(xy)} \\
&\geq \min\left\{f^{-1}(s_B)(x), f^{-1}(s_B)(y)\right\} e^{i\min\left\{f^{-1}(v_B)(x), f^{-1}(v_B)(y)\right\}} \\
&= \min\left\{f^{-1}(s_B)(x)e^{if^{-1}(v_B)(x)}, f^{-1}(s_B)(y)e^{if^{-1}(v_B)(y)}\right\} \\
&= \min\left\{f^{-1}(\delta_B)(x), f^{-1}(\delta_B)(y)\right\}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
f^{-1}(\delta_B)(x-y) &= f^{-1}(s_B)(x-y)e^{if^{-1}(v_B)(x-y)} \\
&\geq \min\left\{f^{-1}(s_B)(x), f^{-1}(s_B)(y)\right\} e^{i\min\left\{f^{-1}(v_B)(x), f^{-1}(v_B)(y)\right\}} \\
&= \min\left\{f^{-1}(s_B)(x)e^{if^{-1}(v_B)(x)}, f^{-1}(s_B)(y)e^{if^{-1}(v_B)(y)}\right\} \\
&= \min\left\{f^{-1}(\delta_B)(x), f^{-1}(\delta_B)(y)\right\}
\end{aligned}$$

4. KARMAŞIK BULANIK ESNEK HALKALAR

4.1 Karmaşık Bulanık Esnek Kümeler

Tanım 4.1.1 (Nadia, 2010) $U \neq \emptyset$ bir evrensel küme, $\mathcal{E} \neq \emptyset$ bir küme ve $A \subseteq \mathcal{E}$ olsun. $f : A \to KB(U)$ ile verilen (f, A) kümesine U üzerinde bir karmaşık bulanık esnek küme denir. U üzerindeki bütün karmaşık bulanık esnek kümelerin ailesi $KB(U)$ ile gösterilir.

Örnek 4.1.1 $U = \{h_1$ (gıda üretim şirketi), h_2 (elektronik üretim şirketi), h_3 (petrol şirketi), h_4 (ilaç şirketi)$\}$ şirketler kümesi ve $E = \{e_1$ (ham madde mevcudiyeti), e_2 (iş gücü mevcudiyeti), e_3 (pazar talebi), e_4 (üretim miktarı)$\}$ ilgili şirketlerin büyüme parametrelerini göstersin.
$A \subseteq E, A = \{e_1, e_3\}$ için $f : A \to KB(U)$ dönüşümü

$$f(e_1) = \left\{(h_1, 0.5e^{i0.6\pi}), (h_2, 0.9e^{i0.7\pi}), (h_3, 0.9e^{i0.9\pi}), (h_4, 1.0e^{i0.85\pi})\right\}$$
$$f(e_3) = \left\{(h_1, 0.7e^{i0.8\pi}), (h_2, 0.9e^{i0.9\pi}), (h_3, 0.8e^{i0.95\pi}), (h_4, 0.65e^{i0.85\pi})\right\}$$

şeklinde verilsin. Bu taktirde (f, A) karmaşık bulanık esnek kümesi $(f, A) = \{f(e_1), f(e_3)\}$ şeklindedir.

Tanım 4.1.2 $(f, A), (g, B) \in KBE(U)$ olsun. $A \subseteq B$ olmak üzere (f, A) ya (g, B) nin alt kümesi denir. $\Leftrightarrow$ Her $x \in A$ için $f(x) \tilde{\subseteq} g(x)$ dir. Bu durum $(f, A) \tilde{\sqsubseteq} (g, B)$ ile belirtilir.

Tanım 4.1.3 $(f, A) \in KBE(U)$ olsun. (f, A) ya boş karmaşık bulanık esnek küme denir. $\Leftrightarrow$ Her $x \in A$ için $f(x) = 0.e^{i.0\pi}$ dir. Bu durum Φ_A ile belirtilir.

Tanım 4.1.4 $(f, A) \in KBE(U)$ olsun. (f, A) ya tam karmaşık bulanık esnek küme denir. $\Leftrightarrow$ Her $x \in A$ için $f(x) = 1.e^{i.2\pi}$ dir. Bu durum Ω_A ile belirtilir.

Tanım 4.1.5 (Nadia, 2010) $(f, A), (g, B) \in KBE(U)$ olsun. $C = A \cap B$ olmak üzere her $c \in C$ için $h(c) = f(c) \cap g(c)$ olarak tanımlanan (h, C) kümesine (f, A) ve (g, B) kümelerinin arakesiti denir. Bu durum $(f, A) \tilde{\cap} (g, B)$ ile belirtilir.

Örnek 4.1.2 $U = \{h_1, h_2, h_3, h_4\}$ ve $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ parametreler kümesi olsun. $A, B \subseteq E, A = \{e_1, e_2\}$ ve $B = \{e_2\}$ olsun. (f, A) ve (g, B) karmaşık bulanık esnek kümeleri aşağıdaki gibi verilsin.

$$f\left(e_1\right)=\left\{\left(h_1,0.2e^{i0.4\pi}\right),\left(h_2,0.7e^{i0.1\pi}\right),\left(h_3,0.9e^{i0.4\pi}\right),\left(h_4,1.0e^{i0.25\pi}\right)\right\}$$

$$f\left(e_2\right)=\left\{\left(h_1,0.5e^{i0.6\pi}\right),\left(h_2,0.7e^{i0.8\pi}\right),\left(h_3,0.6e^{i0.5\pi}\right),\left(h_4,0.25e^{i0.8\pi}\right)\right\}$$

$$g\left(e_2\right)=\left\{\left(h_1,0.4e^{i0.5\pi}\right),\left(h_2,0.6e^{i0.8\pi}\right),\left(h_3,0.7e^{i0.4\pi}\right),\left(h_4,0.6e^{i0.65\pi}\right)\right\}$$

$C=A\cap B=\{e_2\}$ olmak üzere
$h\left(e_2\right)=f\left(e_2\right)\cap g\left(e_2\right)=\left\{\left(h_1,0.4e^{i0.5\pi}\right),\left(h_2,0.6e^{i0.8\pi}\right),\left(h_3,0.6e^{i0.4\pi}\right),\left(h_4,0.25e^{i0.65\pi}\right)\right\}$
şeklinde olup $(h,C)=(f,A)\,\tilde{\cap}\,(g,B)=\{h(e_2)\}$ dir.

Tanım 4.1.6 (Nadia, 2010) $(f,A),(g,B)\in KBE(U)$ olsun. $C=A\cup B$ olmak üzere her $c\in C$ için

$$h(c)=\begin{cases} f(c) & c\in A-B\\ g(c) & c\in B-A\\ f(c)\cup g(c) & c\in A\cap B\end{cases}$$

ile verilen (h,C) kümesine (f,A) ve (g,B) kümelerinin birleşimi denir. Bu durum $(f,A)\,\tilde{\cup}\,(g,B)$ ile belirtilir.

Örnek 4.1.3 $U=\{h_1,h_2,h_3,h_4\}$ ve $E=\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ parametreler kümesi olsun. $A,B\subseteq E, A=\{e_1,e_3\}$ ve $B=\{e_3,e_4\}$ olsun. (f,A) ve (g,B) aşağıdaki gibi verilsin.

$$f\left(e_1\right)=\left\{\left(h_1,0.4e^{i0.5\pi}\right),\left(h_2,0.8e^{i0.6\pi}\right),\left(h_3,0.8e^{i0.8\pi}\right),\left(h_4,1.0e^{i0.75\pi}\right)\right\}$$

$$f\left(e_3\right)=\left\{\left(h_1,0.6e^{i0.7\pi}\right),\left(h_2,0.9e^{i0.9\pi}\right),\left(h_3,0.7e^{i0.95\pi}\right),\left(h_4,0.75e^{i0.95\pi}\right)\right\}$$

$$g\left(e_3\right)=\left\{\left(h_1,0.5e^{i0.4\pi}\right),\left(h_2,0.7e^{i0.5\pi}\right),\left(h_3,0.6e^{i0.6\pi}\right),\left(h_4,0.9e^{i0.65\pi}\right)\right\}$$

$$g\left(e_4\right)=\left\{\left(h_1,0.8e^{i0.3\pi}\right),\left(h_2,0.85e^{i0.35\pi}\right),\left(h_3,0.75e^{i0.4\pi}\right),\left(h_4,0.95e^{i0.45\pi}\right)\right\}$$

$C=A\cup B=\{e_1,e_3,e_4\}$ olmak üzere

$$h\left(e_1\right)=f\left(e_1\right)=\left\{\left(h_1,0.4e^{i0.5\pi}\right),\left(h_2,0.8e^{i0.6\pi}\right),\left(h_3,0.8e^{i0.8\pi}\right),\left(h_4,1.0e^{i0.75\pi}\right)\right\}$$

$$h\left(e_4\right)=g\left(e_4\right)=\left\{\left(h_1,0.8e^{i0.3\pi}\right),\left(h_2,0.85e^{i0.35\pi}\right),\left(h_3,0.75e^{i0.4\pi}\right),\left(h_4,0.95e^{i0.45\pi}\right)\right\}$$

$$h\left(e_3\right)=f\left(e_3\right)\cup g\left(e_3\right)=\left\{\left(h_1,0.6e^{i0.7\pi}\right),\left(h_2,0.9e^{i0.9\pi}\right),\left(h_3,0.7e^{i0.95\pi}\right),\left(h_4,0.9e^{i0.95\pi}\right)\right\}$$

şeklinde olup $(h,C)=(f,A)\,\tilde{\cup}\,(g,B)=\{h(e_1),h(e_3),h(e_4)\}$ dir.

Önerme 4.1.1 $(f_1,A_1)\in KBE(U)$ olsun. Bu taktirde;

(i) $(f_1,A_1)\,\tilde{\cup}\,(f_1,A_1)=(f_1,A_1)$

(ii) $(f_1,A_1)\,\tilde{\cap}\,(f_1,A_1)=(f_1,A_1)$

(iii) $(f_1, A_1) \,\widetilde{\cup}\, \Phi_{A_1} = (f_1, A_1)$

(iv) $(f_1, A_1) \,\widetilde{\cap}\, \Phi_{A_1} = \Phi_{A_1}$

(v) $(f_1, A_1) \,\widetilde{\cup}\, \Omega_{A_1} = \Omega_{A_1}$

(vi) $(f_1, A_1) \,\widetilde{\cap}\, \Omega_{A_1} = (f_1, A_1)$

Önerme 4.1.2 $(f_1, A_1), (f_2, A_2), (f_3, A_3) \in KBE(U)$ olsun. Bu takdirde;

(i) $(f_1, A_1) \,\widetilde{\cup}\, (f_2, A_2) = (f_2, A_2) \,\widetilde{\cup}\, (f_1, A_1)$

(ii) $(f_1, A_1) \,\widetilde{\cap}\, (f_2, A_2) = (f_2, A_2) \,\widetilde{\cap}\, (f_1, A_1)$

(iii) $(f_1, A_1) \,\widetilde{\cup}\, ((f_2, A_2) \,\widetilde{\cup}\, (f_3, A_3)) = ((f_1, A_1) \,\widetilde{\cup}\, (f_2, A_2)) \,\widetilde{\cup}\, (f_3, A_3)$

(iv) $(f_1, A_1) \,\widetilde{\cap}\, ((f_2, A_2) \,\widetilde{\cap}\, (f_3, A_3)) = ((f_1, A_1) \,\widetilde{\cap}\, (f_2, A_2)) \,\widetilde{\cap}\, (f_3, A_3)$

(v) $(f_1, A_1) \,\widetilde{\sqsubseteq}\, (f_2, A_2) \Rightarrow (f_1, A_1) \,\widetilde{\cup}\, (f_3, A_3) \,\widetilde{\sqsubseteq}\, (f_2, A_2) \,\widetilde{\cup}\, (f_3, A_3)$

(vi) $(f_1, A_1) \,\widetilde{\sqsubseteq}\, (f_2, A_2) \Rightarrow (f_1, A_1) \,\widetilde{\cap}\, (f_3, A_3) \,\widetilde{\sqsubseteq}\, (f_2, A_2) \,\widetilde{\cap}\, (f_3, A_3)$

(vii) $(f_1, A_1) \,\widetilde{\cup}\, ((f_2, A_2) \,\widetilde{\cap}\, (f_3, A_3)) = ((f_1, A_1) \,\widetilde{\cup}\, (f_2, A_2)) \,\widetilde{\cap}\, ((f_1, A_1) \,\widetilde{\cup}\, (f_3, A_3))$

(viii) $(f_1, A_1) \,\widetilde{\cap}\, ((f_2, A_2) \,\widetilde{\cup}\, (f_3, A_3)) = ((f_1, A_1) \,\widetilde{\cap}\, (f_2, A_2)) \,\widetilde{\cup}\, ((f_1, A_1) \,\widetilde{\cap}\, (f_3, A_3))$

Tanım 4.1.7 $(f, A), (g, B) \in KBE(U)$ olsun. $C = A \cap B \neq \emptyset$ olmak üzere her $c \in C$ için $h(c) = f(c) \cup g(c)$ ile verilen (h, c) kümesine (f, A) ve (g, B) kümelerinin daraltılmış birleşimi denir. Bu durum $(f, A) \,\widetilde{\sqcup}\, (g, B)$ ile belirtilir.

Örnek 4.1.4 $U = \{h_1, h_2, h_3, h_4\}$ ve $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ parametreler kümesi olsun. $A, B \subseteq E, A = \{e_1, e_3\}$ ve $B = \{e_2, e_3\}$ olsun. (f, A) ve (g, B) kümeleri aşağıdaki şekilde verilsin.

$f(e_1) = \left\{(h_1, 0.5e^{i0.5\pi}), (h_2, 0.4e^{i0.7\pi}), (h_3, 0.3e^{i0.9\pi}), (h_4, 0.85e^{i0.5\pi})\right\}$

$f(e_3) = \left\{(h_1, 0.5e^{i0.7\pi}), (h_2, 0.8e^{i0.9\pi}), (h_3, 0.6e^{i0.45\pi}), (h_4, 0.3e^{i0.85\pi})\right\}$

$g(e_2) = \left\{(h_1, 0.4e^{i0.4\pi}), (h_2, 0.6e^{i0.8\pi}), (h_3, 0.7e^{i0.4\pi}), (h_4, 0.8e^{i0.85\pi})\right\}$

$g(e_3) = \left\{(h_1, 0.7e^{i0.4\pi}), (h_2, 0.65e^{i0.45\pi}), (h_3, 0.5e^{i0.6\pi}), (h_4, 0.85e^{i0.4\pi})\right\}$

$C = A \cap B = \{e_3\}$ olmak üzere

$h(e_3) = f(e_3) \cup g(e_3) = \{(h_1, 0.7e^{i0.7\pi}), (h_2, 0.8e^{i0.9\pi}), (h_3, 0.6e^{i0.6\pi}), (h_4, 0.85e^{i0.85\pi})\}$

şeklinde olup $(h, C) = (f, A) \tilde{\sqcup} (g, B) = \{h(e_3)\}$ dir.

Tanım 4.1.8 $(f, A), (g, B) \in KBE(U)$ olsun. $C = A \cup B$ olmak üzere her $c \in C$ için

$$h(c) = \begin{cases} f(c), & c \in A - B \\ g(c), & c \in B - A \\ f(c) \cap g(c), & c \in A \cap B \end{cases}$$

ile verilen (h, c) kümesine (f, A) ve (g, B) kümelerinin genişletilmiş arakesiti denir. Bu durum $(f, A) \tilde{\sqcap} (g, B)$ ile belirtilir.

Örnek 4.1.5 $U = \{h_1, h_2, h_3, h_4\}$ ve $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ parametreler kümesi olsun. $A, B \subseteq E, A = \{e_1\}$ ve $B = \{e_1, e_2\}$ olsun. (f, A) ve (g, B) kümeleri aşağıdaki şekilde verilsin.

$f(e_1) = \{(h_1, 0.3e^{i0.4\pi}), (h_2, 0.7e^{i0.5\pi}), (h_3, 0.7e^{i0.9\pi}), (h_4, 0.4e^{i0.65\pi})\}$

$g(e_1) = \{(h_1, 0.45e^{i0.55\pi}), (h_2, 0.45e^{i0.6\pi}), (h_3, 0.7e^{i0.9\pi}), (h_4, 0.9e^{i0.8\pi})\}$

$g(e_2) = \{(h_1, 0.7e^{i0.4\pi}), (h_2, 0.5e^{i0.25\pi}), (h_3, 0.5e^{i0.6\pi}), (h_4, 0.85e^{i0.7\pi})\}$

$C = A \cup B = \{e_1, e_2\}$ olmak üzere

$h(e_1) = f(e_1) \cap g(e_1) = \{(h_1, 0.3e^{i0.4\pi}), (h_2, 0.45e^{i0.5\pi}), (h_3, 0.7e^{i0.9\pi}), (h_4, 0.4e^{i0.65\pi})\}$

$h(e_2) = g(e_2) = \{(h_1, 0.7e^{i0.4\pi}), (h_2, 0.5e^{i0.25\pi}), (h_3, 0.5e^{i0.6\pi}), (h_4, 0.85e^{i0.7\pi})\}$

şeklinde olup $(h, C) = (f, A) \tilde{\sqcap} (g, B) = \{h(e_1), h(e_2)\}$ dir.

Tanım 4.1.9 $(f, A), (g, B) \in KBE(U)$ olsun. $C = A \times B$ olmak üzere her $(a, b) \in A \times B$ için $h(a, b) = f(a) \cap g(b)$ ile verilen (h, c) kümesine (f, A) ve (g, B) kümelerinin $\wedge$-arakesiti denir. Bu durum $(f, A) \tilde{\wedge} (g, B)$ ile belirtilir.

Örnek 4.1.6 $U = \{h_1, h_2, h_3, h_4\}$ ve $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ parametreler kümesi olsun. $A, B \subseteq E, A = \{e_1, e_2\}$ ve $B = \{e_2, e_4\}$ olsun. (f, A) ve (g, B) kümeleri aşağıda olduğu gibi verilsin.

$f(e_1) = \{(h_1, 0.3e^{i0.6\pi}), (h_2, 0.7e^{i0.8\pi}), (h_3, 0.8e^{i0.7\pi}), (h_4, 1.0e^{i0.45\pi})\}$

$f(e_2) = \{(h_1, 0.2e^{i0.8\pi}), (h_2, 0.8e^{i0.6\pi}), (h_3, 0.5e^{i0.65\pi}), (h_4, 0.5e^{i0.25\pi})\}$

$g(e_2) = \{(h_1, 0.45e^{i0.4\pi}), (h_2, 0.2e^{i0.7\pi}), (h_3, 0.6e^{i0.7\pi}), (h_4, 0.8e^{i0.75\pi})\}$

$g(e_4) = \{(h_1, 0.6e^{i0.8\pi}), (h_2, 0.5e^{i0.6\pi}), (h_3, 0.15e^{i0.3\pi}), (h_4, 0.85e^{i0.25\pi})\}$

$C = A \times B = \{(e_1, e_2), (e_1, e_4), (e_2, e_2), (e_2, e_4)\}$ olmak üzere

$h(e_1, e_2) = \{(h_1, 0.3e^{i0.4\pi}), (h_2, 0.2e^{i0.7\pi}), (h_3, 0.6e^{i0.7\pi}), (h_4, 0.8e^{i0.45\pi}\}$

$h(e_1, e_4) = \{(h_1, 0.3e^{i0.6\pi}), (h_2, 0.5e^{i0.6\pi}), (h_3, 0.15e^{i0.3\pi}), (h_4, 0.85e^{i0.25\pi}\}$

$h(e_2, e_2) = \{(h_1, 0.2e^{i0.4\pi}), (h_2, 0.2e^{i0.6\pi}), (h_3, 0.5e^{i0.65\pi}), (h_4, 0.5e^{i0.25\pi}\}$

$h(e_2, e_4) = \{(h_1, 0.2e^{i0.8\pi}), (h_2, 0.5e^{i0.6\pi}), (h_3, 0.15e^{i0.3\pi}), (h_4, 0.5e^{i0.25\pi}\}$

şeklinde olup $(h, C) = (f, A) \tilde{\wedge} (g, B) = \{h(e_1, e_2), h(e_1, e_4), h(e_2, e_2), h(e_2, e_4)\}$ dir.

Tanım 4.1.10 $(f, A), (g, B) \in KBE(U)$ olsun. $C = A \times B$ olmak üzere her $(a, b) \in A \times B$ için $h(a, b) = f(a) \cup g(b)$ ile verilen (h, c) kümesine (f, A) ve (g, B) kümelerinin $\vee$-birleşimi denir. Bu durum $(f, A) \tilde{\vee} (g, B)$ ile belirtilir.

Örnek 4.1.7 $U = \{h_1, h_2, h_3, h_4\}$ ve $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ parametreler kümesi olsun. $A, B \subseteq E, A = \{e_1, e_3\}$ ve $B = \{e_3\}$ olsun. (f, A) ve (g, B) kümeleri aşağıda olduğu gibi verilsin.

$f(e_1) = \{(h_1, 0.2e^{i0.6\pi}), (h_2, 0.7e^{i0.5\pi}), (h_3, 0.7e^{i0.35\pi}), (h_4, 0.9e^{i0.25\pi})\}$

$f(e_3) = \{(h_1, 0.4e^{i0.6\pi}), (h_2, 0.7e^{i0.8\pi}), (h_3, 0.8e^{i0.15\pi}), (h_4, 0.6e^{i0.85\pi})\}$

$g(e_3) = \{(h_1, 0.4e^{i0.6\pi}), (h_2, 0.6e^{i0.7\pi}), (h_3, 0.5e^{i0.8\pi}), (h_4, 0.7e^{i0.9\pi})\}$

$C = A \times B = \{(e_1, e_3), (e_3, e_3)\}$ olmak üzere

$h(e_1, e_3) = \{(h_1, 0.4e^{i0.6\pi}), (h_2, 0.7e^{i0.7\pi}), (h_3, 0.7e^{i0.8\pi}), (h_4, 0.9e^{i0.9\pi}\}$

$h(e_3, e_3) = \{(h_1, 0.4e^{i0.6\pi}), (h_2, 0.7e^{i0.8\pi}), (h_3, 0.8e^{i0.8\pi}), (h_4, 0.7e^{i0.9\pi}\}$

şeklinde olup $(h, C) = (f, A) \tilde{\vee} (g, B) = \{h(e_1, e_3), h(e_3, e_3)\}$ dir.

Tanım 4.1.11 (Alsarahead ve Ahmad, 2017) $(f, A), (g, B) \in KBE(U)$ olsun. Bu takdirde;

(i) (f, A) ya homojen karmaşık bulanık esnek küme denir. $\Leftrightarrow$ Her $a \in A$ için $f(a)$ homojen karmaşık bulanık kümedir.

(ii) (f, A) ya B ile homojen karmaşık bulanık esnek küme denir. $\Leftrightarrow$ Her $a, b \in A$ için $f(a)$, $f(b)$ ile homojendir.

(iii) (f, A) ya (g, B) ile homojendir denir. $\Leftrightarrow$ Her $a \in A \cap B$ için $f(a)$, $g(a)$ ile homojendir.

Tanım 4.1.12 $U \neq \emptyset$, $V \neq \emptyset$ evrensel kümeler olsun. $A \neq \emptyset$ ve $B \neq \emptyset$ parametre kümeleri olmak üzere $\varphi : U \to V$, $\psi : A \to B$ fonksiyonları ile verilen (φ, ψ) ikilisine U'dan V'ye karmaşık bulanık esnek fonksiyon denir.

Tanım 4.1.13 $(f, A) \in KBE(U)$, $(g, B) \in KBE(V)$ ve (φ, ψ) U dan V ye karmaşık bulanık esnek fonksiyon olsun. Bu takdirde

(i) (f, A) nın (φ, ψ) karmaşık bulanık esnek fonksiyonu altındaki görüntüsü $(\varphi, \psi)(f, A) = (\varphi(f), \psi(A))$ ile belirtilir ve $b \in \psi(A)$, $y \in V$ için

$$\delta_{\phi(f)(b)}(y) = \begin{cases} \bigvee\limits_{\phi(x)=y} \bigvee\limits_{\psi(a)=b} \delta_{f(a)}(x), & \text{eğer } \phi^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0, & \text{eğer } \phi^{-1}(y) = \emptyset \end{cases}$$

olarak tanımlanır.

(ii) (g, B) nin (φ, ψ) karmaşık bulanık esnek fonksiyonu altındaki ters görüntüsü $(\varphi, \psi)^{-1}(g, B) = (\varphi^{-1}(g), \psi^{-1}(B))$ ile belirtilir ve $a \in \psi^{-1}(B), x \in U$ için $\delta_{\varphi^{-1}(g)(a)}(x) = \delta_{g(\psi(a))}(\varphi(x))$ olarak tanımlanır.

Lemma 4.1.1 (f, A) ve (g, B) sırasıyla U ve V üzerinde homojen karmaşık bulanık esnek kümeler ve (φ, ψ), U dan V ye karmaşık bulanık esnek fonksiyon olsun. Bu takdirde;

(i) $\delta_{\varphi(f)(a)}(y) = s_{\varphi(f)(a)}(y) e^{i v_{\varphi(f)(a)}}$

(ii) $\delta_{\varphi^{-1}(g)(b)}(x) = s_{\varphi^{-1}(g)(b)}(x) e^{i\omega}$

İspat. (i)

$$\begin{aligned} \delta_{\varphi(f)(a)}(y) &= \bigvee_{\varphi(t)=y} \bigvee_{\psi(k)=a} \delta_{f(k)}(t) \\ &= \bigvee_{\varphi(t)=y} \bigvee_{\psi(k)=a} s_{f(k)}(t) e^{i v_{f(k)}(t)} \\ &= \left\{ \bigvee_{\varphi(t)=y} \bigvee_{\psi(k)=a} s_{f(k)}(t) \right\} e^{i \left\{ \bigvee\limits_{\varphi(t)=y} \bigvee\limits_{\psi(k)=a} v_{f(k)}(t) \right\}} \\ &= s_{\varphi(f)(a)}(y) e^{i v_{\varphi(f)(a)}(y)} \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}\delta_{\varphi^{-1}(g)(b)}(x) &= \delta_{g(\psi(b))}(\varphi(x)) \\ &= s_{g(\psi(b))}(\varphi(x))e^{iv_{g(\psi(b))}(\varphi(x))} \\ &= s_{\varphi^{-1}(g)(b)}(x)e^{iv_{\varphi^{-1}(g(b)}(x)}\end{aligned}$$

4.2 Karmaşık Bulanık Esnek Halkalar

Bu kısımda tüm karmaşık bulanık esnek kümeler, homojen karmaşık bulanık esnek küme olarak alınacaktır.

Tanım 4.2.1 (Alsarahead ve Ahmad, 2017) R bir halka ve $(f, A) \in KBE(R)$ olsun. (f, A) ya R üzerinde bir karmaşık bulanık esnek halka denir. $\Leftrightarrow$ Her $a \in A$ ve $x, y \in R$ için

(i) $\delta_{f(a)}(xy) \geq \min\left\{\delta_{f(a)}(x), \delta_{f(a)}(y)\right\}$

(ii) $\delta_{f(a)}\left(x - y\right) \geq \min\left\{\delta_{f(a)}(x), \delta_{f(a)}(y)\right\}$

Tanım 4.2.2 (Alsarahead ve Ahmad, 2017) R bir halka ve $(f, A) \in KBE(R)$ olsun. (f, A) ya R üzerinde bir karmaşık bulanık esnek ideal denir. $\Leftrightarrow$ Her $a \in A$ ve $x, y \in R$ için

(i) $\delta_{f(a)}(xy) \geq \max\left\{\delta_{f(a)}(x), \delta_{f(a)}(y)\right\}$

(ii) $\delta_{f(a)}\left(x - y\right) \geq \min\left\{\delta_{f(a)}(x), \delta_{f(a)}(y)\right\}$

Örnek 4.2.1 N tüm pozitif tam sayıların kümesi olsun $f : N \to KB(\mathbb{R})$ fonksiyonu her $n \in N$ için,

$$\delta_{f(n)}(x) = \begin{cases} 1.e^{i2\pi} & \text{eğer } n.x = 0_R \\ 0.e^{i0\pi} & \text{eğer } n.x \neq 0_R \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın.

Bu takdirde (f, N), $\mathbb{R}$ halkası üzerinde bir karmaşık bulanık esnek halka (ideal) dır.

Örnek 4.2.2 $f : A \to KB(\mathbb{Z}_2{\times}\mathbb{Z}_2)$ dönüşümü her $a \in A$ için, $\delta_{f(a)}(\overline{0}, \overline{0}) = 1.e^{i2\pi}, \delta_{f(a)}(\overline{1}, \overline{0}) = \delta_{f(a)}(\overline{0}, \overline{1}) = 0.5.e^{i0.2\pi}, \delta_{f(a)}(\overline{1}, \overline{1}) = 0.8.e^{i0.5\pi}$ şeklinde tanımlansın. Bu taktirde (f, A) kümesi $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ halkası üzerinde karmaşık bulanık esnek halkadır.

Tanım 4.2.3 (f, A) ve (g, B) R üzerinde karmaşık bulanık esnek halkalar olsun. (f, A) ya (g, B) nin karmaşık bulanık esnek alt halkası denir.$\Leftrightarrow$

(i) $A \subseteq B$

(ii) Her $a \in A$ için $f(a)$, $g(a)$ nın karmaşık bulanık alt halkasıdır.

Bu durum $(f, A) \tilde{\leq} (g, B)$ ile belirtilir.

Teorem 4.2.1 (Alsarahead ve Ahmad, 2017) (f, A) R halkası üzerinde homojen karmaşık bulanık esnek küme olsun. (f, A) R üzerinde bir karmaşık bulanık esnek halkadır. $\Leftrightarrow$

(i) $(\bar{f}, A)$ bulanık esnek kümesi bir bulanık esnek halkadır.

(ii) $(\underline{f}, A)$ π-bulanık esnek kümesi bir π-bulanık esnek halkadır.

İspat. (f, A) bir karmaşık bulanık esnek halka ve $x, y \in R$ olsun. Bu takdirde her $a \in A$ için

$$\begin{aligned} s_{f(a)}(xy)e^{iv_{f(a)}(xy)} &= \delta_{f(a)}(xy) \\ &\geq \min\left\{\delta_{f(a)}(x), \delta_{f(a)}(y)\right\} \\ &= \min\left\{s_{f(a)}(x)e^{iv_{f(a)}(x)}, s_{f(a)}(y)e^{iv_{f(a)}(y)}\right\} \\ &= \min\left\{s_{f(a)}(x), s_{f(a)}(y)\right\} e^{i\min\left\{v_{f(a)}(x), v_{f(a)}(y)\right\}} \text{ dir.} \end{aligned}$$

(f, A) homojen olduğundan
$s_{f(a)}(xy) \geq \min\left\{s_{f(a)}(x), s_{f(a)}(y)\right\}$ ve $v_{f(a)}(xy) \geq \min\left\{v_{f(a)}(x), v_{f(a)}(y)\right\}$ dir.
Diğer taraftan

$$\begin{aligned} s_{f(a)}(x-y)e^{iv_{f(a)}(x-y)} &= \delta_{f(a)}(x-y) \\ &\geq \min\left\{\delta_{f(a)}(x), \delta_{f(a)}(y)\right\} \\ &= \min\left\{s_{f(a)}(x)e^{iv_{f(a)}(x)}, s_{f(a)}(y)e^{iv_{f(a)}(y)}\right\} \\ &= \min\left\{s_{f(a)}(x), s_{f(a)}(y)\right\} e^{i\min\left\{v_{f(a)}(x), v_{f(a)}(y)\right\}} \text{ dir.} \end{aligned}$$

(f, A) homojen olduğundan
$s_{f(a)}(x-y) \geq \min\left\{s_{f(a)}(x), s_{f(a)}(y)\right\}$ ve $v_{f(a)}(x-y) \geq \min\left\{v_{f(a)}(x), v_{f(a)}(y)\right\}$ dir.

Buradan $(\bar{f}, A)$ bir bulanık esnek halka ve $(\underline{f}, A)$ bir π-bulanık esnek halkadır.

Tersine, $(\bar{f}, A)$ bir bulanık esnek halka ve $(\underline{f}, A)$ bir π-bulanık esnek halka olsun. Bu takdirde her $a \in A$ için

$s_{f(a)}(xy) \geq \min\left\{s_{f(a)}(x), s_{f(a)}(y)\right\}, v_{f(a)}(xy) \geq \min\left\{v_{f(a)}(x), v_{f(a)}(y)\right\}$ ve
$s_{f(a)}(x-y) \geq s_{f(a)}(x)$ ve $v_{f(a)}(x-y) \geq v_{f(a)}(x)$ dir.

Şimdi,

$$\begin{aligned}
\delta_{f(a)}(xy) &= s_{f(a)}(xy)e^{iv_{f(a)}(xy)} \\
&\geq \min\left\{s_{f(a)}(x), s_{f(a)}(y)\right\} e^{i\min\left\{v_{f(a)}(x), v_{f(a)}(y)\right\}} \\
&= \min\left\{s_{f(a)}(x)e^{iv_{f(a)}(x)}, s_{f(a)}(y)e^{iv_{f(a)}(y)}\right\} \\
&= \min\left\{\delta_{f(a)}(x), \delta_{f(a)}(y)\right\}.
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\delta_{f(a)}(x-y) &= s_{f(a)}(x-y)e^{iv_{f(a)}(x-y)} \\
&\geq \min\left\{s_{f(a)}(x), s_{f(a)}(y)\right\} e^{i\min\left\{v_{f(a)}(x), v_{f(a)}(y)\right\}} \\
&= \min\left\{s_{f(a)}(x)e^{iv_{f(a)}(x)}, s_{f(a)}(y)e^{iv_{f(a)}(y)}\right\} \\
&= \min\left\{\delta_{f(a)}(x), \delta_{f(a)}(y)\right\}.
\end{aligned}$$

Buradan $f(a)$ bir karmaşık bulanık alt halkadır. Böylece (f, A) bir karmaşık bulanık esnek halkadır.

Teorem 4.2.2 (Alsarahead ve Ahmad, 2017) $\{(f_i, A_i) : i \in I\}$, R halkası üzerinde karmaşık bulanık esnek halkaların bir ailesi ve her $j, k \in I$ için (f_j, A_j), (f_k, A_k) ile homojen olsun. Bu takdirde $\widetilde{\bigcap}_{i\in I}(f_i, A_i)$ bir karmaşık bulanık esnek halkadır.

İspat. $C = \cap_{i\in I} A_i$ olmak üzere $\widetilde{\bigcap}_{i\in I}(f_i, A_i) = (h, C)$ olsun. Bu takdirde her $i \in I$ ve $c \in C$ için $f_i(c)$ bir karmaşık bulanık halkadır. Buradan $c \in C$ için $s_{f_i(c)}(x)$ bir bulanık alt halka ve $v_{f_i(c)}(x)$ bir π-bulanık alt halkadır. Şimdi her $x, y \in R$ ve $c \in C$ için

$$
\begin{aligned}
\delta_{h(c)}(xy) &= \delta_{\cap_{i\in I} f_i(c)}(xy) \\
&= s_{\cap_{i\in I} f_i(c)}(xy) e^{i\omega_{\cap_{i\in I} f_i(c)(xy)}} \\
&= \min_{i\in I} \left\{ s_{f_i(c)}(xy) \right\} e^{i \min_{i\in I}\left\{ v_{f_i(c)}(xy) \right\}} \\
&\geq \min_{i\in I} \left\{ \min\left\{ s_{f_i(c)}(x), s_{f_i(c)}(y) \right\} \right\} e^{i \min_{i\in I}\left\{ \min\left\{ v_{f_i(c)}(x), v_{f_i(c)}(y) \right\} \right\}} \\
&= \min \left\{ \min_{i\in I} \left\{ s_{f_i(c)}(x) \right\}, \min_{i\in I} \left\{ s_{f_i(c)}(y) \right\} \right\} e^{i \min\left\{ \min_{i\in I}\left\{ v_{f_i(c)}(x) \right\}, \min_{i\in I}\left\{ v_{f_i(c)}(y) \right\} \right\}} \\
&= \min \left\{ \min_{i\in I} \left\{ s_{f_i(c)}(x) \right\} e^{i \min_{i\in I}\left\{ v_{f_i(c)}(x) \right\}}, \min_{i\in I} \left\{ s_{f_i(c)}(y) \right\} e^{i \min_{i\in I}\left\{ v_{f_i(c)}(y) \right\}} \right\} \\
&= \min \left\{ \delta_{\cap_{i\in I}} f_i(c)(x), \delta_{\cap_{i\in I}} f_i(c)(y) \right\} \\
&= \min \left\{ \delta_{h(c)}(x), \delta_{h(c)}(y) \right\}
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
\delta_{h(c)}(x-y) &= \delta_{\cap_{i\in I} f_i(c)}(x-y) \\
&= s_{\cap_{i\in I} f_i(c)}(x-y) e^{i\omega_{\cap_{i\in I} f_i(c)(x-y)}} \\
&= \min_{i\in I} \left\{ s_{f_i(c)}(xy) \right\} e^{i \min_{i\in I}\left\{ v_{f_i(c)}(xy) \right\}} \\
&\geq \min_{i\in I} \left\{ \min\left\{ s_{f_i(c)}(x), s_{f_i(c)}(y) \right\} \right\} e^{i \min_{i\in I}\left\{ \min\left\{ v_{f_i(c)}(x), v_{f_i(c)}(y) \right\} \right\}} \\
&= \min \left\{ \min_{i\in I} \left\{ s_{f_i(c)}(x) \right\}, \min_{i\in I} \left\{ s_{f_i(c)}(y) \right\} \right\} e^{i \min\left\{ \min_{i\in I}\left\{ v_{f_i(c)}(x) \right\}, \min_{i\in I}\left\{ v_{f_i(c)}(y) \right\} \right\}} \\
&= \min \left\{ \min_{i\in I} \left\{ s_{f_i(c)}(x) \right\} e^{i \min_{i\in I}\left\{ v_{f_i(c)}(x) \right\}}, \min_{i\in I} \left\{ s_{f_i(c)}(y) \right\} e^{i \min_{i\in I}\left\{ v_{f_i(c)}(y) \right\}} \right\} \\
&= \min \left\{ \delta_{\cap_{i\in I}} f_i(c)(x), \delta_{\cap_{i\in I}} f_i(c)(y) \right\} \\
&= \min \left\{ \delta_{h(c)}(x), \delta_{h(c)}(y) \right\}
\end{aligned}
$$

Böylece $\widetilde{\bigcap}_{i\in I} (f_i, A_i)$ bir karmaşık bulanık esnek halkadır.

Teorem 4.2.3 $\{(f_i, A_i) : i \in I\}$, R halkası üzerinde karmaşık bulanık esnek ideallerin bir ailesi ve her $j, k \in I$ için (f_j, A_j), (f_k, A_k) ile homojen olsun. Bu takdirde $\widetilde{\bigcap}_{i\in I} (f_i, A_i)$ bir karmaşık bulanık esnek idealdir.

İspat. Teorem 4.2.2 nin ispatına benzer şekilde yapılır.

Sonuç 4.2.1 (f, A) ve (g, B) R halkası üzerinde karmaşık bulanık esnek halkalar (idealler) ise $(f, A) \widetilde{\cap} (g, B)$ karmaşık bulanık esnek halka (ideal) dır.

Teorem 4.2.4 (f, A) ve (g, B) R üzerinde karmaşık bulanık esnek halkalar (idealler) ve $A \cap B = \emptyset$ olsun. Bu takdirde $(f, A) \widetilde{\cup} (g, B)$ karmaşık bulanık esnek halka (ideal) dır.

İspat. (f, A) ve (g, B) R üzerinde karmaşık bulanık esnek halkalar (idealler) ve $(f, A) \widetilde{\cup} (g, B) = (h, C)$ olsun. Burada $C = A \cup B$ olup, eğer $c \in A \setminus B$ ise $\delta_{h(c)}(x) = \delta_{f(c)}(x)$ ve $c \in B \setminus A$ ise $\delta_{h(c)}(x) = \delta_{g(c)}(x)$ dir. Açıkça $\delta_{f(c)}(x)$ ve $\delta_{g(c)}(x)$ karmaşık bulanık alt halkalar (idealler) olduğundan $\delta_{h(c)}(x)$ karmaşık bulanık alt halka (ideal) dır. Üstelik $(f, A) \widetilde{\cup} (g, B) = (h, C)$ karmaşık bulanık esnek halkadır.

Teorem 4.2.5 (g, A) ve (k, B) R üzerinde karmaşık bulanık esnek halkalar (idealler) olsun. Eğer her $x \in A \cap B$ için $g(x) \leq k(x)$ veya $k(x) \leq g(x)$ ise $(g, A) \widetilde{\cup} (k, B)$ R üzerinde karmaşık bulanık esnek halka (ideal) dır.

İspat. Açıkça her $x \in C$ için $g(x)$ ve $k(x)$ R nin karmaşık bulanık alt halkaları (idealleri) dır. Eğer $g(x) \leq k(x)$ veya $k(x) \leq g(x)$ ise $g(x) \vee k(x) = max \{g(x), k(x)\}$ R nin karmaşık bulanık alt halkası (ideali) dır. Buradan $(g, A) \widetilde{\cup} (k, B)$ R üzerinde karmaşık bulanık esnek halka (ideal) dır.

Teorem 4.2.6 (f, A) ve (g, B) R halkası üzerinde karmaşık bulanık esnek halkalar (idealler) ve $A \cap B = \emptyset$ olsun. Bu takdirde $(f, A) \widetilde{\vee} (g, B)$ karmaşık bulanık esnek halka (ideal) dır.

İspat. Teorem 4.2.4 ün ispatına benzer şekilde yapılır.

Teorem 4.2.7 (f, A) ve (g, B) R halkası üzerinde karmaşık bulanık esnek halkalar (idealler) ise $(f, A) \widetilde{\wedge} (g, B)$ karmaşık bulanık esnek halka (ideal) dır.

İspat. $(f, A) \widetilde{\wedge} (g, B) = (h, c)$ olsun. Burada $C = A \times B$ olmak üzere her (a, b) için $h(a, b) = f(a) \cap g(b)$ olup, (f, A) ve (g, B) karmaşık bulanık esnek halkalar (idealler) olduğundan $f(a)$ ve $g(b)$ R üzerinde karmaşık bulanık alt halkalar (idealler) dır. Buradan $f(a) \cap g(b)$ R üzerinde karmaşık bulanık alt halka (ideal) dır. Böylece $(f, A) \widetilde{\wedge} (g, B)$ karmaşık bulanık esnek halka (ideal) dır.

Tanım 4.2.4 (Alsarahead ve Ahmad, 2017) $(f, A) \in KBE(U)$ olsun. Bu takdirde her $\alpha \in [0, 1]$ ve $\beta \in [0, 2\pi]$ için $(f, A)_{(\alpha,\beta)} = \left\{f(a)_{(\alpha,\beta)} : a \in A\right\}$ kümesine, (f, A) karmaşık bulanık esnek kümesinin bir $(\alpha, \beta)-$ seviye esnek kümesi denir.
Burada $f(a)_{(\alpha,\beta)} = \left\{x \in U : s_{f(a)}(x) \geq \alpha, v_{f(a)}(x) \geq \beta\right\}$ $f(a)$ karmaşık bulanık kümesinin $(\alpha, \beta)-$ seviye kümesidir. Üstelik, her $\alpha \in [0, 1]$ ve $\beta \in [0, 2\pi]$ için $(f, A)_{(\alpha,\beta)}$ klasik anlamda bir esnek kümedir.

Teorem 4.2.8 (Alsarahead ve Ahmad, 2017) $(f, A) \in KBE(R)$ olsun. (f, A) R üzerinde bir karmaşık bulanık esnek halkadır.$\Leftrightarrow$ Her $a \in A$, $\alpha \in [0, 1]$ ve $\beta \in [0, 2\pi]$ için $f(a)_{(\alpha,\beta)} \neq \emptyset$ olmak üzere $(f, A)_{(\alpha,\beta)}$ (α, β)-seviye esnek kümesi R üzerinde esnek halkadır.

İspat. (f, A) R üzerinde bir karmaşık bulanık esnek halka olsun. Bu takdirde her $a \in A$ için $f(a)$, R'nin bir karmaşık bulanık alt halkasıdır. $\alpha \in [0, 1]$, $\beta \in [0, 2\pi]$ ve $f(a)_{(\alpha,\beta)} \neq \emptyset$ için $a \in A$ ve $x, y \in f(a)_{(\alpha,\beta)}$ olsun. Bu takdirde $s_{f(a)}(x) \geq \alpha$ ve $v_{f(a)}(x) \geq \beta$ dır. Ayrıca $s_{f(a)}(y) \geq \alpha$ ve $v_{f(a)}(y) \geq \beta$ dır.

Şimdi,

$$
\begin{aligned}
s_{f(a)}(xy)e^{iv_{f(a)}(xy)} &= \delta_{f(a)}(xy) \\
&\geq \min\left\{\delta_{f(a)}(x), \delta_{f(a)}(y)\right\} \\
&= \min\left\{s_{f(a)}(x)e^{iv_{f(a)}(x)}, s_{f(a)}(y)e^{iv_{f(a)}(y)}\right\} \\
&= \min\left\{s_{f(a)}(x), s_{f(a)}(y)\right\} e^{i\min\left\{v_{f(a)}(x), v_{f(a)}(y)\right\}}
\end{aligned}
$$

olup

$$
\begin{aligned}
s_{f(a)}(xy) &\geq \min\left\{s_{f(a)}(x), s_{f(a)}(y)\right\} \\
&\geq \min\{\alpha, \alpha\} \\
&= \alpha
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
v_{f(a)}(xy) &\geq \min\left\{v_{f(a)}(x), v_{f(a)}(y)\right\} \\
&\geq \min\{\beta, \beta\} \\
&= \beta
\end{aligned}
$$

Buradan $xy \in f(a)_{(\alpha,\beta)}$ dır.

Diğer taraftan

$$
\begin{aligned}
s_{f(a)}(x-y)e^{iv_{f(a)}(x-y)} &= \delta_{f(a)}(x-y) \\
&\geq \min\left\{\delta_{f(a)}(x), \delta_{f(a)}(y)\right\} \\
&= \min\left\{s_{f(a)}(x)e^{iv_{f(a)}(x)}, s_{f(a)}(y)e^{iv_{f(a)}(y)}\right\} \\
&= \min\left\{s_{f(a)}(x), s_{f(a)}(y)\right\} e^{i\min\left\{v_{f(a)}(x), v_{f(a)}(y)\right\}}
\end{aligned}
$$

olup

$$\begin{aligned} s_{f(a)}(x-y) &\geq \min\left\{s_{f(a)}(x), s_{f(a)}(y)\right\} \\ &\geq \min\{\alpha, \alpha\} \\ &= \alpha \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} v_{f(a)}(x-y) &\geq \min\left\{v_{f(a)}(x), v_{f(a)}(y)\right\} \\ &\geq \min\{\beta, \beta\} \\ &= \beta \end{aligned}$$

Buradan $x-y \in f(a)_{(\alpha,\beta)}$ dır.

Böylece $f(a)_{(\alpha,\beta)}$ R nin bir alt halkasıdır. Üstelik $(f,A)_{(\alpha,\beta)}$, R üzerinde bir esnek halkadır.

Tersine, her $a \in A$ $\alpha \in [0,1]$ ve $\beta \in [0,2\pi]$ için $(f,A)_{(\alpha,\beta)}$, R üzerinde bir esnek halka olsun. Farzedelim ki $x, y \in R$ ve $a \in A$ için $s_{f(a)}(x) = \lambda, s_{f(a)}(y) = \delta$, $v_{f(a)}(x) = \theta$ ve $v_{f(a)}(y) = \eta$ olsun. $\alpha = \min\{\lambda, \delta\}$ ve $\beta = \min\{\theta, \eta\}$ alınırsa $x, y \in f(a)_{(\alpha,\beta)}$ elde edilir. Buradan $f(a)_{(\alpha,\beta)}$ R nin alt halkasıdır. Dolayısıyla $x-y \in f(a)_{(\alpha,\beta)}$ ve $xy \in f(a)_{(\alpha,\beta)}$ dır. Böylece,
$s_{f(a)}(x-y) \geq \alpha = \min\{\lambda, \delta\} = \min\left\{s_{f(a)}(x), s_{f(a)}(y)\right\}$
$v_{f(a)}(x-y) \geq \beta = \min\{\theta, \eta\} = \min\left\{v_{f(a)}(x), v_{f(a)}(y)\right\}$
$s_{f(a)}(xy) \geq \alpha = \min\{\lambda, \delta\} = \min\left\{s_{f(a)}(x), s_{f(a)}(y)\right\}$
$v_{f(a)}(xy) \geq \beta = \min\{\theta, \eta\} = \min\left\{v_{f(a)}(x), v_{f(a)}(y)\right\}$ dır.
Üstelik $\delta_{f(a)}(x-y) \geq \min\left\{\delta_{f(a)}(x), \delta_{f(a)}(y)\right\}$ ve $\delta_{f(a)}(xy) \geq \min\left\{\delta_{f(a)}(x), \delta_{f(a)}(y)\right\}$ olup (f,A) R üzerinde bir karmaşık bulanık esnek halkadır.

Teorem 4.2.9 (Alsarahead ve Ahmad, 2017) (f,A) ve (g,B) sırasıyla R ve S halkaları üzerinde iki homojen karmaşık bulanık esnek halka ve (φ,ψ), R'den S'ye bir karmaşık bulanık esnek fonksiyon olsun. Bu takdirde

(i) $(\varphi,\psi)(f,A)$ S üzerinde bir karmaşık bulanık esnek halkadır.

(ii) $(\varphi,\psi)^{-1}(g,B)$ R üzerinde bir karmaşık bulanık esnek halkadır.

İspat. (i) (f,A) R üzerinde karmaşık bulanık esnek halka olsun. Bu takdirde her $a \in A$ için $s_{f(a)}(x)$ bir bulanık alt halka ve $v_{f(a)}(x)$ bir π-bulanık alt halkadır. Böylece her $x, y \in R$ için

Teorem 2.0.1 ile $s_{f(a)}(x)$'in ve $v_{f(a)}(x)$'in görüntüleri sırasıyla bulanık alt halka ve π-bulanık alt halkadır.

$s_{\varphi(f)(a)}(xy) \geq \min\left\{s_{\varphi(f)(a)}(x), s_{\varphi(f)(a)}(y)\right\}, s_{\varphi(f)(a)}(x-y) \geq s_{\varphi(f)(a)}(x),$
$v_{\varphi(f)(a)}(xy) \geq \min\left\{v_{\varphi(f)(a)}(x), v_{\varphi(f)(a)}(y)\right\}$ ve $v_{\varphi(f)(a)}(x-y) \geq v_{\varphi(f)(a)}(x)$

Şimdi Lemma 3.0.1 ile

$$\begin{aligned}
&\delta_{\varphi(f)(a)}(xy) = s_{\varphi(f)(a)}(xy)e^{iv_{\varphi(f)(a)}(xy)} \\
&\geq \min\left\{s_{\phi(f)(a)}(x), s_{\phi(f)(a)}(y)\right\} e^{i\min\left\{v_{\phi(f)(a)}(x), v_{\phi(f)(a)}(y)\right\}} \\
&= \min\left\{s_{\phi(f)(a)}(x)e^{iv_{\phi(f)(a)}(x)}, s_{\phi(f)(a)}(y)e^{iv_{\phi(f)(a)}(y)}\right\} \\
&= \min\left\{\delta_{\phi(f)(a)}(x), \delta_{\phi(f)(a)}(y)\right\}
\end{aligned}$$

Ayrıca,

$$\begin{aligned}
&\delta_{\varphi(f)(a)}(x-y) = s_{\varphi(f)(a)}(x-y)e^{iv_{\varphi(f)(a)}(x-y)} \\
&\geq \min\left\{s_{\phi(f)(a)}(x), s_{\phi(f)(a)}(y)\right\} e^{i\min\left\{v_{\phi(f)(a)}(x), v_{\phi(f)(a)}(y)\right\}} \\
&= \min\left\{s_{\phi(f)(a)}(x)e^{iv_{\phi(f)(a)}(x)}, s_{\phi(f)(a)}(y)e^{iv_{\phi(f)(a)}(y)}\right\} \\
&= \min\left\{\delta_{\phi(f)(a)}(x), \delta_{\phi(f)(a)}(y)\right\}
\end{aligned}$$

Buradan $(\varphi, \psi)(f, A)$ S üzerinde bir karmaşık bulanık esnek halkadır.

(ii) (g, B) S üzerinde karmaşık bulanık esnek halka olsun. Bu takdirde her $b \in B$ için $s_{g(b)}(x)$ bir bulanık alt halka ve $v_{g(b)}(x)$ bir π-bulanık alt halkadır. Böylece her $x, y \in R$ için Teorem 2.0.1 ile $s_{g(b)}(x)$'in ve $v_{g(b)}(x)$'in ters görüntüleri sırasıyla bulanık alt halka ve π-bulanık alt halkadır.

$s_{\varphi^{-1}(g)(b)}(xy) \geq \min\left\{s_{\varphi^{-1}(g)(b)}(x), s_{\varphi^{-1}(g)(b)}(y)\right\}, s_{\varphi^{-1}(g)(b)}(x-y) \geq s_{\varphi^{-1}(g)(b)}(x)$
$v_{\varphi^{-1}(g)(b)}(xy) \geq \min\left\{v_{\varphi^{-1}(g)(b)}(x), v_{\varphi^{-1}(g)(b)}(y)\right\}$ ve $v_{\varphi^{-1}(g)(b)}(x-y) \geq v_{\varphi^{-1}(g)(b)}(x)$

Şimdi Lemma 3.0.1 ile

$$\begin{aligned}
\delta_{\varphi^{-1}(g)(b)}(xy) &= s_{\varphi^{-1}(g)(b)}(xy)e^{iv_{\varphi^{-1}(g)(b)}(xy)} \\
&\geq \min\left\{s_{\phi^{-1}(g)(b)}(x), s_{\phi^{-1}(g)(b)}(y)\right\} e^{i\min\left\{v_{\phi^{-1}(g)(b)}(x), v_{\phi^{-1}(g)(b)}(y)\right\}} \\
&= \min\left\{s_{\phi^{-1}(g)(b)}(x)e^{iv_{\phi^{-1}(g)(b)}(x)}, s_{\phi^{-1}(g)(b)}(y)e^{iv_{\phi^{-1}(g)(b)}(y)}\right\} \\
&= \min\left\{\delta_{\phi^{-1}(g)(b)}(x), \delta_{\phi^{-1}(g)(b)}(y)\right\}
\end{aligned}$$

Ayrıca,

$$\begin{aligned}
\delta_{\varphi^{-1}(g)(b)}(x-y) &= s_{\varphi^{-1}(g)(b)}(x-y)e^{iv_{\varphi^{-1}(g)(b)}(x-y)} \\
&\geq \min\left\{s_{\phi^{-1}(g)(b)}(x), s_{\phi^{-1}(g)(b)}(y)\right\} e^{i\min\left\{v_{\phi^{-1}(g)(b)}(x), v_{\phi^{-1}(g)(b)}(y)\right\}} \\
&= \min\left\{s_{\phi^{-1}(g)(b)}(x)e^{iv_{\phi^{-1}(g)(b)}(x)}, s_{\phi^{-1}(g)(b)}(y)e^{iv_{\phi^{-1}(g)(b)}(y)}\right\} \\
&= \min\left\{\delta_{\phi^{-1}(g)(b)}(x), \delta_{\phi^{-1}(g)(b)}(y)\right\}
\end{aligned}$$

Buradan $(\varphi, \psi)^{-1}(g, B)$ R üzerinde bir karmaşık bulanık esnek halkadır.

Tanım 4.2.5 (f, A) ve (g, B) sırasıyla R ve S üzerinde karmaşık bulanık esnek halkalar olsun. $\varphi : G \to H$ ve $\psi : A \to B$ iki fonksiyon olmak üzere (φ, ψ) ye karmaşık bulanık esnek halka homomorfisi, (f, A) ya da (g, B) 'ye karmaşık bulanık esnek homomorfiktir denir. $\Leftrightarrow$

(i) $\varphi : G \to H$ bir halka homomorfisi

(ii) $\psi : A \to B$ bir dönüşüm

(iii) Her $x \in A$ için $\varphi(f(x)) = g(\psi(x))$ dır.

Bu durum $(\varphi, \psi) : (f, A) \to (g, B)$ şeklinde gösterilir. Burada φ bir izomorfi ve $g : A \to B$ birebir, örten bir dönüşüm ise (φ, ψ) 'ya karmaşık bulanık esnek izomorfi ve (f, A)'ya da (g, B) 'ye karmaşık bulanık izomorftur denir.

Teorem 4.2.10 (g, A), (h, B), (k, C) sırasıyla R, S ve T halkaları üzerinde karmaşık bulanık esnek halkalar olsun. Eğer $(\varphi, \psi) : (g, A) \to (h, B)$ ve $(\phi, \gamma) : (h, B) \to (k, C)$ karmaşık bulanık esnek halka homomorfileri ise $(\phi \circ \varphi, \gamma \circ \psi) : (g, A) \to (k, C)$ karmaşık bulanık esnek halka homomorfisidir.

İspat. Her $x \in A$ ve her $y \in B$ için $\varphi(g(x)) = h(\psi(x))$ ve $\phi(h(y)) = k(\gamma(y))$ dir. Ayrıca $\phi \circ \varphi : G \to K$ ve $(\gamma, \psi) : A \to C$ olmak üzere her $x \in A$ için $(\phi \circ \varphi)(g(x)) = \phi(\varphi(g(x)) =$

$k(\gamma(\psi(x))) = k((\gamma \circ \psi)(x))$ olur. Buradan $(\phi \circ \varphi, \gamma \circ \psi) : (g, A) \to (k, C)$ dir. Ayrıca $\varphi : G \to H$ ve $\phi : H \to K$ halka homomorfisi olduklarından $\phi \circ \varphi : G \to K$ halka homomorfisidir. Buradan $(\phi \circ \varphi, \gamma \circ \psi) : (g, A) \to (k, C)$ karmaşık bulanık esnek halka homomorfisidir.

Teorem 4.2.11 (g, A) ve (k, B) sırasıyla R ve S üzerinde karmaşık bulanık esnek kümeler, (g, A) R üzerinde karmaşık bulanık esnek halka olsun. Eğer (g, A), (k, B) ye karmaşık bulanık esnek izomorf ise (k, B) de S üzerinde karmaşık bulanık esnek halkadır.

İspat. (g, A), (k, B) ye karmaşık bulanık izomorf olduğundan Tanım 4.2.5 ile $\varphi : R \to S$ halka izomorfisi ve $\psi : A \to B$ birebir örten dönüşümü her $x \in A$ ve $y \in B$ için $\varphi(g(x)) = k(\psi(x)) = k(y)$ olacak şekilde mevcuttur. Teorem 3.0.7 ile $\varphi(g(x))$ S nin karmaşık bulanık alt halkasıdır ve bundan dolayı $k(y)$ S nin karmaşık bulanık alt halkasıdır. Buradan (k, B) S üzerinde karmaşık bulanık esnek halkadır.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında karmaşık bulanık alt halka yapısı verilerek, bu yapıya ait bazı temel özellikler sunulmuştur. Karmaşık bulanık esnek kümeler üzerinde yeni ikili işlemler verilerek, bu işlemlere ait bazı özellikler incelenmiştir. Ayrıca karmaşık bulanık esnek halka yapısı ele alınmış, temel özellikleri araştırılmış ve elde edilen sonuçlar değerlendirilmiştir. Üstelik karmaşık bulanık esnek kümeler üzerindeki ikili işlemlerin, karmaşık bulanık esnek halkalar üzerindeki etkileri araştırılmıştır.

Bu sonuçlar ışığında karmaşık bulanık esnek kümeler daha farklı cebirsel yapılar ile birlikte yeniden ele alınıp, oluşturulan yeni yapılara ait özellikler incelenebilir. Bu sayede belirsizlik içeren problemlere teorik anlamında yeni yaklaşımlar sağlanabilir.

KAYNAKLAR

[1] Al-Husban, A. & Salleh, A.R. (2016). Complex fuzzy group based on complex fuzzy space. *Global Journal of Pure and Applied Mathematics*, 12(2), 1433–1450.

[2] Al-Husban, A. & Salleh, A.R. (2016). Complex fuzzy hypergroups based on complex fuzzy spaces. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 107, 949–958.

[3] Al-Husban, A., Salleh, A.R. & Ahmad, A.G. (2016). Complex intuitionistic fuzzy subrings. *AIP Conference Proceedings*, 1784(1), doi: 10.1063/1.4966825.

[4] Alkouri, A.U.M. & Salleh, A.R. (2014). Linguistic variable, hedges and several distances on complex fuzzy sets. *Journal of Intelligent and Fuzzy Systems*, 26(5), 2527–2535.

[5] Alsarahead, M.O. & Ahmad, A.G. (2017). Complex fuzzy subrings. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 117(41), 563–577.

[6] Alsarahead, M.O. & Ahmad, A.G. (2017). Complex fuzzy soft groups. *Journal of Quality Measurement and Analysis*, 13(2), 17–28.

[7] Bhakat, S.K. & Das, P. (1996). Fuzzy subrings and ideals redefined. *Fuzzy Sets and Systems*, 81, 383–393.

[8] Buckley, J.J. (1989). Fuzzy complex numbers. *Fuzzy Sets and System*, 33, 333–345.

[9] Chen, Z., Aghakhani, S., Man, J. & Dick, S. (2011). ANCFIS: a neurofuzzy architecture employing complex fuzzy sets. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 9(2), 305–322.

[10] Çelik, Y., Ekiz, C. & Yamak, S. (2013). Applications of fuzzy soft sets in ring theory. *Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics*, 5, 451–462.

[11] Dai, S., Bi, L. & Hu, B. (2019). Distance Measures between the Interval-Valued Complex Fuzzy Sets. *Mathematics*, doi: 10.3390/math7060549.

[12] Fu, X. & Shen Q. (2011). Fuzzy complex numbers and their application for classifiers performance evaluation. *Pattern Recognition*, 44(7), 1403–1417.

[13] Hungerford, T.W. (1974). Algebra, Springer, New York.

[14] İnan, E. & Özturk, M.A. (2012). Fuzzy soft rings and fuzzy soft ideals. *Neural Computing and Applications*, 21(1), 1–8.

[15] Li, C., Wu, T. & Chan, F.- T. (2012). Self-learning complex neuro-fuzzy system with complex fuzzy sets and its application to adaptive image noise canceling. *Neurocomputing*, 94, 121–139.

[16] Liu, W.J. (1982). Fuzzy invariant subgroups and fuzzy ideals. *Fuzzy Sets and Systems*, 8, 133–139.

[17] Maji, P.K., Biswas, R. & Roy, A.R. (2001). Fuzzy soft sets. *The Journal of Fuzzy Mathematics*, 9, 589–602.

[18] Malik, D.S. & Mordeson, J.N. (1992). Fuzzy direct sums of fuzzy rings. *Fuzzy Sets and Systems*, 45(1), 83–91.

[19] Mordeson, J.N. & Malik, D.S. (1998). Fuzzy Commutative Algebra, World Scientific Publishing Co., Singapore.

[20] Mukherjee, N. & Bhattacharya, P. (1984). Fuzzy normal subgroups and fuzzy cosets. *Information Sciens*, 34(3), 225–239.

[21] Nagarajan, R., Saleem Abdullah, S. & Balamurugan, K. (2016). Brief discussions on T-level complex fuzzy subgroup. *IJAR*, 2, 957–964.

[22] Ramot, D., Milo, R., Friedman, M. & Kandel, A. (2002). Complex fuzzy sets. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 10(2), 171–186.

[23] Rosenfeld, A. (1971). Fuzzy groups. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 35(3), 512–517.

[24] Shaqaqha, S. (2020). Complex Fuzzy Lie Algebras. *Jordan Journal of Mathematics and Statistics*, 13(2), 231–247.

[25] Tamir, D.E. & Kandel, A. (2011). Axiomatic theory of complex fuzzy logic and complex fuzzy classes. *International Journal of Computers Communications and Control*, 6(3), 562–576.

[26] Tamir, D.E., Rishe, N.D & Kandel, A. (2015). Complex fuzzy sets and complex fuzzy logic an overview of theory and applications. *Fifty Years of Fuzzy Logic and its Applications*, 26, 661–681.

[27] Zadeh, L.A. (1965). Fuzzy sets. *Information and Control*, 8(3), 338–353.

[28] Zeeshan, M. & Khan, M. (2022). Complex fuzzy sets with applications in decision-making. *Iranian Journal of Fuzzy Systems*, 19(4)), 147–163.

[29] Zhang, G. (1992). Fuzzy limit theory of fuzzy complex numbers. *Fuzzy Sets and Systems*, 46, 227–235.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler	
Adı Soyadı	Songül SOYSAL
Doğum Yeri	
Doğum Tarihi	
Uyruğu	■ T.C. ❒ Diğer:
Telefon	
E-Posta Adresi	

Eğitim Bilgileri	
Lisans	
Üniversite	Ordu Üniversitesi
Fakülte	Fen Edebiyat Fakültesi
Bölümü	Matematik Bölümü
Mezuniyet Yılı	2014