T. C.

ORDU ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KARMAŞIK BULANIK ESNEK GRUPLAR

GÖKHAN YÜCE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ORDU 2024

TEZ BİLDİRİMİ

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan ve kullanılan intihal tespit programının sonuçlarına göre; bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

GÖKHAN YÜCE

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

KARMAŞIK BULANIK ESNEK GRUPLAR

GÖKHAN YÜCE

ORDU ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ, 48 SAYFA

(TEZ DANIŞMANI: PROF. DR. YILDIRAY ÇELİK)

Bu tezin amacı karmaşık bulanık alt grup ve karmaşık bulanık esnek grup yapılarını vererek, temel özelliklerini araştırmak ve elde edilen sonuçları değerlendirmektir.

Bu çalışma beş ana bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde tez konusu ile ilgili literatür taramasının yer aldığı giriş kısmına yer verildi. İkinci bölümde çalışmamızda temel olan bazı tanım ve teoremler ifade edildi. Üçüncü bölümde karmaşık bulanık alt küme, karmaşık bulanık alt grup, normal karmaşık bulanık alt grup, π-bulanık alt küme ve π-bulanık alt grup gibi bazı kavramlar tanıtıldı. Karmaşık bulanık alt grupların bazı temel özellikleri araştırıldı ve bir grup homomorfizması altında karmaşık bulanık alt grupların görüntüsü ve ters görüntüsü ile ilgili teoremler verildi. Dördüncü bölüm iki kısımdan oluşmaktadır. İlk kısımda karmaşık bulanık esnek küme yapısı verildi ve bu yapı üzerinde bazı ikili işlemler verilerek bunlara ait örnekler sunuldu. İkinci kısımda karmaşık bulanık esnek grup yapısı tanıtıldı, temel özellikleri araştırıldı ve elde edilen sonuçlar ortaya konuldu. Ayrıca karmaşık bulanık esnek homomorfi altında karmaşık bulanık esnek grupların görüntüsü ve ters görüntüsü ile ilgili teoremler verildi ve temel özellikleri incelendi. Beşinci bölümde tez çalışmasından elde edilen sonuçlar ifade edildi ve önerilere yer verildi.

Anahtar Kelimeler: Karmaşık Bulanık Küme, Karmaşık Bulanık Alt Grup, Karmaşık Bulanık Esnek Küme, Karmaşık Bulanık Esnek Grup.

ABSTRACT

COMPLEX FUZZY SOFT GROUPS

GÖKHAN YÜCE

ORDU UNIVERSITY INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

MATHEMATICS

MASTER THESIS, 48 PAGES

(SUPERVISOR: PROF. DR. YILDIRAY ÇELİK)

The aim of this thesis is to give complex fuzzy subgroup and complex fuzzy soft subgroup structures, to investigate their basic properties and to evaluate the results obtained.

This study consists of five main sections. In the first chapter, an introduction section containing the literature review regarding the thesis topic was included. In the second chapter, some definitions and theorems that are fundamental to our study are stated. In the third chapter, some concepts such as complex fuzzy subet, complex fuzzy subgroup, normal complex fuzzy subgroup, π-fuzzy subset and π-fuzzy subgroup are introduced. Some basic properties of complex fuzzy subgroups are investigated and theorems regarding the image and inverse image of complex fuzzy subgroup under a group homomorphism are given. The fourth chapter consist of two parts. In the firs part, the complex fuzzy soft set structure is introduced and some binary operations on this structure are given and examples of these are presented. In the second part, the complex fuzzy soft group structure was introduced, its basic properties were investigated and the results were presented. In addition, theorems regarding the image and inverse image of complex fuzzy soft groups under complex fuzzy soft homomorphism are given and their basic properties are examined. In the first chapter the results obtained from the thesis study are expressed and suggestions are given.

Keywords: Complex Fuzzy Set, Complex Fuzzy Subgroup, Complex Fuzzy Soft Set, Complex Fuzzy Soft Group.

TEŞEKKÜR

Tez konumun belirlenmesi, çalışmanın yürütülmesi ve yazımı esnasında desteklerini esirgemeyen başta danışman hocam Sayın Prof. Dr. Yıldıray ÇELİK olmak üzere Ordu Üniversitesi Matematik Bölümü Öğretim Üyelerine teşekkür ederim.

Ayrıca yüksek lisans sürecim boyunca bana TÜBİTAK 2211 Yurt İçi Lisansüstü Burs Programı aracılığıyla destek olan TÜBİTAK'a da teşekkür ederim.

Aynı zamanda, manevi desteklerini her an üzerimde hissettiğim aileme ve her zaman yanımda olan eşim Funda KOÇ YÜCE'ye teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER ve KISALTMALAR LİSTESİ

$(\mathcal{L}, \leq)$	:	$\mathcal{L}$ sıralı kümesi
$\boldsymbol{\delta_\alpha}$	:	δ'nın α-seviye alt kümesi
$\wedge$	:	Bulanık kümelerinin arakesiti
$\vee$	:	Bulanık kümelerinin birleşimi
$\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}$	:	A ve B karmaşık bulanık kümelerinin arakesiti
$\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}$	:	A ve B karmaşık bulanık kümelerinin birleşimi
$\boldsymbol{A^t}$	:	A karmaşık bulanık kümesinin tümleyeni
$\boldsymbol{A_\pi}$	:	A'nın π bulanık alt kümesi
$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{X})$	:	X üzerindeki tüm bulanık kümelerin ailesi
$\boldsymbol{KB}(\boldsymbol{U})$	:	U üzerindeki bütün karmaşık bulanık kümelerin ailesi
$\widehat{\subseteq}$	:	Karmaşık bulanık alt küme
$\boldsymbol{KBE}(\boldsymbol{U})$	:	U üzerindeki bütün karmaşık bulanık kümelerin ailesi
$\widetilde{\sqsubseteq}$	:	Karmaşık bulanık esnek alt küme
$\boldsymbol{\Phi_A}$	:	Boş karmaşık bulanık esnek küme
$\boldsymbol{\Omega_A}$	:	Tam karmaşık bulanık esnek küme
$\widetilde{\cap}$	:	Karmaşık bulanık esnek kümelerin arakesiti
$\widetilde{\cup}$	:	Karmaşık bulanık esnek kümelerin birleşimi
$\widetilde{\sqcup}$	:	Karmaşık bulanık esnek kümelerin daraltılmış birleşimi
$\widetilde{\sqcap}$	:	Karmaşık bulanık esnek kümelerin genişletilmiş arakesiti
$\widetilde{\wedge}$	:	Karmaşık bulanık esnek kümelerin $\wedge$-arakesiti
$\widetilde{\vee}$	:	Karmaşık bulanık esnek kümelerin $\vee$-birleşimi
$\widetilde{\bigcup}$	:	Karmaşık bulanık esnek kümeler ailesinin birleşimi
$\widetilde{\bigcap}$	:	Karmaşık bulanık esnek kümeler ailesinin arakesiti
$\widetilde{\bigsqcup}$	:	Karmaşık bulanık esnek kümeler ailesinin daraltılmış birleşimi
$\widetilde{\prod}$	:	Karmaşık bulanık esnek kümeler ailesinin genişletilmiş arakesiti
$\widetilde{\leq}$	:	Karmaşık bulanık esenk alt grup

1. GİRİŞ

İçerisinde belirsizlik barındıran problemlerin matematiksel olarak modellenmesi, analiz edilmesi, ve hesaplanması birçok dalda dikkate alınan en önemli konulardandır. Farklı sebeplerle ortaya çıkan belirsizliklerin çok değişik bir doğası olduğunu ve sadece bir matematiksel yaklaşım ile ele alınamayacağı açıktır. İlk olarak Zadeh (1965) tarafından ortaya konulan bulanık küme kavramı bu sebeple tanımlanmıştır. Klasik kümeler kaba bir ifade ile bir küme içerisindeki bir elemanın varlık-yokluk durumunu ifade etmek için kullanılan küme türüdür. Buna karşın bulanık kümeler ise kümede yer alan elemanların üyeliğinin dereceli olarak değerlendirilmesi için kullanılan küme türüdür. Bu değerlendirme üyelik fonksiyonu yardımı ile yapılır. Bulanık kümeler, verilerin yetersiz olduğu ya da kesin olmadığı hallerde, belirsizlik barındıran problemlere çözümler geliştirebilmek açısından önemlidir. Bulanık küme teorisi birçok yönde önemli ölçüde geliştirilmiş ve çok çeşitli alanlarda uygulama bulmuştur.

Rosenfeld (1971) bulanık alt grup kavramını tanımladı. Anthony ve Sherwood (1979) üçgensel normlar yardımıyla bir grubun bulanık alt grubunu yeniden tanımladılar. Sherwood (1983) bulanık alt grupların çarpımını tanımladı. Mukherjee ve Bhattacharya (1984) bulanık normal alt gruplarla birlikte bulanık kosetler üzerine çalışmalar yaptılar. Mashour ve ark. (1990) normal bulanık alt grupların birçok önemli özelliğini incelediler. Buckley (1989) karmaşık bulanık sayılar üzerine bir çalışma yaptı. Zhang (1992) karmaşık bulanık sayıların birçok önemli özelliğini ortaya koydu. Yao (2001) bulanık alt grupların homomorfizması ve izomorfizmaları üzerine bir çalışma yaptı.

Ramot ve ark. (2002) yeni bir küme yapısı olarak karmaşık bulanık küme kavramını verdiler. Karmaşık bulanık kümenin yeniliği üyelik fonksiyonunun elde edebileceği değer aralığında yatmaktadır. Geleneksel bulanık üyelik fonksiyonunun aksine, bu aralık [0,1] ile sınırlı olmayıp karmaşık düzlemde birim çembere kadar genişletilir. Karmaşık bulanık kümeler, çok sayıda uygulamada, özellikle gelişmiş kontrol sistemlerinde ve birden fazla bulanık değişkenin bulunduğu, basit bulanık işlemlerle etkili bir şekilde karakterize edilemeyecek karmaşık bir şekilde birbiriyle ilişkili olduğu periyodik olayların tahmininde çok önemli bir role sahiptir. Buna ek olarak, bu kümeler aynı zamanda çeşitli problemleri, özellikle de sayısız periyodik hususları ve tahmin problemlerini çözmek için de kullanılır. Karmaşık bulanık kümeler ile çalışmanın faydalarından biri, belirsizliği ve periyodikliği olan verileri çok etkili bir şekilde göstermesidir.

Chen ve ark. (2011) uyarlanabilir nöro kompleks bulanık çıkarım sistemini geliştirdi. Fu ve Shen (2011) karmaşık bulanık sayıların sınıflandırıcı performans değerlendirmesindeki uygulamasını ele aldılar. Tamir ve Kandel (2011) karmaşık bulanık sınıf ve karmaşık bulanık mantık için karmaşık bulanık kümeleri kullandılar. Li ve ark. (2012) karmaşık bulanık kümeleri kullanarak kendi kendine öğrenen karmaşık bir nöro bulanık sistem sundular. Alkouri ve Salleh (2014) karmaşık bulanık kümelerde tanımlanan birçok önemli çoklu mesafe ölçümünü ele aldılar. Tamir ve ark. (2015) karmaşık bulanık küme yapısını farklı bir yaklaşım ile yeniden ele aldılar.

Al-Husban ve Salleh (2016) karmaşık bulanık uzay üzerinde karmaşık bulanık hiper yapıları inşaa ettiler. Al-Husban ve ark. (2016) karmaşık bulanık uzay üzerinde karmaşık bulanık alt grup yapısını ele aldılar. Nagarajan ve ark. (2016) T-seviye karmaşık bulanık alt grup yapısını incelediler. Alsarahead (2022) karmaşık çoklu bulanık alt grup kavramını ortaya koydu. Rasuli (2023) t-normları kullanarak, karmaşık bulanık alt grupları ve normal karmaşık bulanık alt grupları tanımladı ve bazı karakteristik özelliklerini araştırdı.

Maji ve ark. (2001) tarafından bulanık esnek küme kavramı tanımlandı ve bu yapıya ait temel özellikler araştırdılar. Birçok araştırmacı tarafından da bu yapı kullanılarak bulanık esnek kümeler ile ilgili birçok çalışma ortaya konuldu. Aygünoğlu ve Aygün (2009) bulanık esnek grup kavramını verdiler. Ayrıca bulanık esnek fonksiyon ve bulanık esnek homomorfizma kavramlarını tanımladılar. Çelik (2015) L-bulanık esnek grup kavramını verdi ve bazı temel özelliklerini araştırdı. Ayrıca L-bulanık alt gruplarla L-bulanık esnek gruplar arasındaki ilişkiyi ortaya koydu.

Bu tezle amaçlanan, karmaşık bulanık alt grup ve karmaşık bulanık esnek grup yapılarını vererek, temel özelliklerini araştırmak ve elde edilen sonuçları değerlendirmektir. Bu çalışma beş ana bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde tez konusu ile ilgili literatür taramasının ele alındığı giriş kısmına yer verildi. İkinci bölümde çalışmamızda temel olan bazı tanım ve teoremler ifade edildi. Üçüncü bölümde karmaşık bulanık alt küme, karmaşık bulanık alt grup, normal karmaşık bulanık alt grup, π-bulanık küme ve π-bulanık alt grup gibi bazı kavramlar tanıtıldı. Karmaşık bulanık alt grupların bazı temel özellikleri araştırıldı ve bir grup homomorfizması altında karmaşık bulanık alt grupların görüntüsü ve ters görüntüsü ile ilgili teoremler verildi. Dördüncü bölüm iki kısımdan oluşmaktadır. İlk kısımda karmaşık bulanık esnek küme yapısı verildi ve bu yapı üzerinde bazı ikili işlemler verilerek bunlara ait örnekler sunuldu. İkinci kısımda karmaşık bulanık esnek grup yapısı tanıtıldı, temel özellikleri araştırıldı ve elde edilen sonuçlar ortaya konuldu. Ayrıca karmaşık bulanık esnek homomorfi altında karmaşık bulanık esnek grupların görüntüsü ve ters görüntüsü ile ilgili teoremler verildi ve temel özellikleri incelendi. Beşinci bölümde tez çalışmasında elde edilen sonuçlar ortaya konuldu ve önerilere yer verildi.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Tanım 2.0.1 (Birkhoff, 1967) $\mathcal{L} \neq \emptyset$ bir küme ve " $\leq$ " $\mathcal{L}$ üzerinde bir bağıntı olsun. $\mathcal{L}$'ye sıralı küme denir. $\Leftrightarrow$

(i) Her $a \in \mathcal{L}$ için $a \leq a$

(ii) Her $a, b \in \mathcal{L}$ için $a \leq b$ ve $b \leq a$ ise $a = b$

(iii) Her $a, b, c \in \mathcal{L}$ için $a \leq b$ ve $b \leq c$ ise $a \leq c$ dir.

$\mathcal{L}$ sıralı kümesi $(\mathcal{L}, \leq)$ notasyonu ile gösterilir.

Tanım 2.0.2 (Birkhoff, 1967) $(\mathcal{L}, \leq)$ bir sıralı küme olsun.

(i) $\mathcal{L}$'ye kafes denir. $\Leftrightarrow$ Her $a, b \in \mathcal{L}$ için $\mathrm{Sup}\{a, b\} = a \vee b$ ve $\mathrm{Inf}\{a, b\} = a \wedge b$ mevcuttur.

(ii) $\mathcal{L}$'ye tam kafes denir.$\Leftrightarrow$ Her $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{L}$ için Sup$\mathcal{T}$ ve İnf$\mathcal{T}$ mevcuttur.

(iii) $\mathcal{L}$'ye modüler kafes denir.$\Leftrightarrow$ $\mathcal{L}$ kafes ve her $a, b, c \in \mathcal{L}$, $a \leq b$ için $a \vee (b \wedge c) = b \wedge (a \vee c)$ dir.

(iv) $\mathcal{L}$'ye dağılımlı kafes denir.$\Leftrightarrow$ $\mathcal{L}$ kafes ve her $a, b, c \in \mathcal{L}$ için $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$ ve $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ dir.

(v) $(\mathcal{L}, \vee, \wedge)$ bir tam kafes olsun. $\mathcal{L}$'ye sonsuz $\vee$-dağılımlı kafes denir.$\Leftrightarrow$ Her $a, b_i \in \mathcal{L}, i \in \Lambda$ için $a \wedge (\bigvee_{i \in \Lambda} b_i) = \bigvee_{i \in \Lambda} (a \wedge b_i)$ dir.

Tanım 2.0.3 (Bhattacharya ve Jain, 1972) $G \neq \emptyset$ bir küme ve '.' G üzerinde bir ikili işlem olsun. G ye bir grup denir. $\Leftrightarrow$ Her $x_1, x_2, x_3 \in G$ için

G1) $(x_1 \cdot x_2) \cdot x_3 = x_1 \cdot (x_2 \cdot x_3)$

G2) $e'.x_1 = x_1.e' = x_1$ olacak şekilde bir $e' \in G$ mevcuttur.

G3) $\exists x_1^{-1} \in G$ öyleki $x_1.x_1^{-1} = x_1^{-1}.x_1 = e'$ dir.

Burada e''ye G grubunun birim elemanı, x_1^{-1} elemanına x_1'in tersi denir. G bir grup ise $(G, .)$ ile gösterilir.

Tanım 2.0.4 (Bhattacharya ve Jain, 1972) (G,$\cdot$) bir grup ve $\emptyset \neq H \subseteq G$ olsun. H'ye G'nin bir alt grubu denir. $\Leftrightarrow$ Her $x_1, x_2 \in H$ için $x_1.x_2 \in H$ ve $x_1^{-1} \in H$ dir.

Tanım 2.0.5 (Bhattacharya ve Jain, 1972) G bir grup ve H G'nin bir alt grubu olsun. H alt grubuna G'nin bir normal alt grubu denir. $\Leftrightarrow$ Her $x \in G$ için $x^{-1}Hx \subseteq H$'dır. Bu durum $H \trianglelefteq G$ notasyonu ile gösterilir.

Tanım 2.0.6 (Bhattacharya ve Jain, 1972) $(G_1, \cdot)$ ve $(G_2, *)$ iki grup ve $\phi : G_1 \to G_2$ bir fonksiyon olsun. Her $x_1, x_2 \in G$ için $\phi(x_1 \cdot x_2) = \phi(x_1) * \phi(x_2)$ ise f ye G_1 den G_2 ye bir homomorfizma denir.

Tanım 2.0.7 (Bhattacharya ve Jain, 1972) $\phi : G_1 \to G_2$ bir grup homomorfisi olsun. Eğer ϕ bire-bir ve örten ise ϕ 'ye bir izomorfi denir ve bu durum $G_1 \cong G_2$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.0.8 (Zadeh, 1965) $X \neq \emptyset$ bir küme olsun. $\delta : X \to [0, 1]$ fonksiyonuna X 'in bulanık alt kümesi denir ve $\delta = \Big\{\big(x, \delta(x)\big) : x \in X, \ \ \delta(x) \in [0, 1]\Big\}$ şeklinde tanımlanır. X üzerindeki tüm bulanık alt kümeler ailesi $B(X)$ ile gösterilir.

Tanım 2.0.9 (Kaufmann, 1975) $\delta, \gamma \in B(X)$ olsun. Her $x \in X$ için $\delta(x) \leq \gamma(x)$ ise γ'ya δ'yı kapsıyor denir ve bu durum $\delta \leq \gamma$ şeklinde gösterilir.
$(\delta \vee \gamma)(x) = \delta(x) \vee \gamma(x) = max\{\delta(x), \gamma(x)\}$ ve $(\delta \wedge \gamma)(x) = \delta(x) \wedge \gamma(x) = min\{\delta(x), \gamma(x)\}$ ile verilen kümelere sırasıyla δ ve γ'nün birleşimi ve arakesiti denir.

Tanım 2.0.10 (Kaufmann, 1975) $X \neq \emptyset$ ve $\delta \in B(X)$ olsun. $\alpha \in [0, 1]$ olmak üzere $\delta_\alpha = \{x \in X \mid \delta(x) \geq \alpha\}$ kümesine δ'nün bir α-seviye alt kümesi denir.

Tanım 2.0.11 (Zadeh, 1965) $\{\delta_i|i \in I\}$ X üzerinde bulanık alt kümelerin bir ailesi olsun. $\{\delta_i|i \in I\}$ ailesinin kartezyen çarpımı $\underset{i \in I}{\times} \delta_i$ şeklinde gösterilir ve $\underset{i \in I}{\times} \delta_i = \underset{i \in I}{\wedge} \delta_i(x)$ şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.0.12 (Rosenfeld, 1971) G bir grup ve δ G üzerinde bir bulanık küme olsun. Eğer her $x, y \in G$ için aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa δ ye G nin bir bulanık alt grubu denir.

(i) $\delta(xy) \geq \min\{\delta(x), \delta(y)\}$

(ii) $\delta\left(x^{-1}\right) \geq \delta(x)$

Tanım 2.0.13 (Akgül M., 1988) $A = \{(x, \delta_A(x)) : x \in G\}$ bulanık alt grubuna G nin normal bulanık alt grubu denir. $\Leftrightarrow$ Her $x, y \in G$ için $\delta_A(xy) = \delta_A(yx)$.

Teorem 2.0.1 (Rosenfeld, 1971) G_1 ve G_2 iki grup ve $f : G_1 \to G_2$ bir homomorfizma olsun. Bu takdirde

(i) δ, G_1'in bulanık alt grubu ise $f(\delta)$ G_2'nin bulanık alt grubudur.

(ii) γ, G_2'nin bulanık alt grubu ise $f^{-1}(\gamma)$ G_1'in bulanık alt grubudur.

Tanım 2.0.14 (Molodtsov, 1999) $X \neq \emptyset$ ve $P(X)$ X in alt kümelerinin bir ailesi ve $E \neq \emptyset$ olsun. $A \subseteq E$ olmak üzere ve $\mathcal{F}$: A $\to$ P(X) ile verilen ($\mathcal{F}$,A) ikilisine X üzerinde bir esnek küme denir.

Tanım 2.0.15 (Aygünoğlu ve Aygün, 2009) $(\mathcal{F}, A)$ bir esnek küme olsun. $(\mathcal{F}, A)$ ya esnek grup denir. $\Leftrightarrow$ Her $a \in A$ için $\mathcal{F}(a)$ bir alt gruptur.

Tanım 2.0.16 (Maji ve ark., 2001) $X \neq \emptyset$ bir küme, E parametreler kümesi, $A \subseteq E$ olsun. $F : A \to B(X)$ ile verilen $(\mathcal{F}, A)$ ikilisine X üzerinde bulanık esnek küme denir.

3. KARMAŞIK BULANIK ALT KÜMELER ve KARMAŞIK BULANIK ALT GRUPLAR

Tanım 3.0.1 (Ramot ve ark., 2002) U üzerinde tanımlı bir A karmaşık bulanık alt kümesi her bir elemana karmaşık değerli üyelik derecesi atayan bir $\delta_A(x)$ üyelik fonksiyonu ile verilir. $\delta_A(x)$ değerleri, karmaşık düzlemde birim çember içersinde yer alır ve üstelik $s_A(x) \cdot e^{iv_A(x)}$ formunda ifade edilir. Burada $i = \sqrt{-1}, s_A(x)$ ve $v_A(x)$ reel değerler, $s_A(x) \in [0, 1]$, $v_A(x) \in [0, 2\pi]$ dir. Bir A karmaşık bulanık alt kümesi $A = \{(x, \delta_A(x)) : x \in U\}$ şeklinde bir sıralı çift ile ifade edilir. U üzerindeki bütün karmaşık bulanık kümelerin ailesi $KB(U)$ ile gösterilir.

Tanım 3.0.2 (Alsarahead ve Ahmad, 2017) A ve B, U üzerinde üyelik değerleri sırasıyla $\delta_A(x) = s_A(x)e^{iv_A(x)}$ ve $\delta_B(x) = s_B(x)e^{iv_B(x)}$ şeklinde olan karmaşık bulanık alt kümeler olsun. A ya B nin karmaşık bulanık alt kümesi denir. $\Leftrightarrow$ Her $x \in U$ için $s_A(x) \leq s_B(x)$ ve $v_A(x) \leq v_B(x)$ dir. Bu durum $A \overset{\sim}{\subseteq} B$ şeklinde gösterilir.

Tanım 3.0.3 (Alsarahead ve Ahmad, 2017) $A = \{(x, \delta_A(x)) : x \in U\}$ ve $B = \{(x, \delta_B(x)) : x \in U\}$ U üzerinde üyelik değerleri sırasıyla $\delta_A(x) = s_A(x)e^{iv_A(x)}$ ve $\delta_B(x) = s_B(x)e^{iv_B(x)}$ şeklinde olan iki karmaşık bulanık alt küme olsun. Bu takdirde her $x, y \in U$ için

(i) $s_A(x) \leq s_A(y) \Leftrightarrow v_A(x) \leq v_A(y)$ ise bir A karmaşık bulanık alt kümesine homojen karmaşık bulanık alt küme denir.

(ii) $s_A(x) \leq s_B(y) \Leftrightarrow v_A(x) \leq v_B(y)$ ise bir A karmaşık bulanık alt kümesine B ile homojen karmaşık bulanık alt küme denir.

Bu tezde bütün karmaşık bulanık alt kümeler, homojen karmaşık bulanık alt küme olarak ele alınacaktır.

Tanım 3.0.4 (Ramot ve ark., 2003) $A = \{(x, \delta_A(x)) : x \in U\}$ ve $B = \{(x, \delta_B(x)) : x \in U\}$ U üzerinde sırasıyla $\delta_A(x) = s_A(x)e^{iv_A(x)}$ ve $\delta_B(x) = s_B(x)e^{iv_B(x)}$ üyelik değerleri ile verilen iki karmaşık bulanık alt küme olsun. Bu takdirde A ve B nin arakesiti, birleşimi ve A nın tümleyeni sırasıyla $A \cap B$, $A \cup B$ ve A^t şeklinde gösterilir ve üyelik değerleri aşağıdaki gibi tanımlanır.

(i) $\delta_{A\cap B}(x) = s_{A\cap B}(x)e^{iv_{A\cap B}(x)} = \min\{s_A(x), s_B(x)\}\, e^{i\min\{v_A(x), v_B(x)\}}$

(ii) $\delta_{A\cup B}(x) = s_{A\cup B}(x)e^{iv_{A\cup B}(x)} = \max\{s_A(x), s_B(x)\}\, e^{i\max\{v_A(x), v_B(x)\}}$

(iii) $\delta_{A^t}(x) = (1 - s_A(x))\, e^{i(2\pi - v_A(x))}$

Önerme 3.0.1 (Alsarahead ve Ahmad, 2017) Bir A karmaşık bulanık alt kümesi homojen karmaşık bulanık alt kümedir. $\Leftrightarrow$ A^t homojen karmaşık bulanık alt kümedir.

İspat. Tanım 3.0.3 ve Tanım 3.0.4 (iii) kullanılarak gösterilir.

Tanım 3.0.5 (Alsarahead ve Ahmad, 2017) $A = \{(x, \delta_A(x)) : x \in U\}$ bir bulanık küme olsun. $A_\pi = \{(x, \delta_{A_\pi}(x)) : x \in U\}$ şeklinde verilen A_π kümesine π-bulanık alt küme denir. Burada $\delta_{A_\pi}(x) = 2\pi\delta_A(x)$ 'dir.

Tanım 3.0.6 (Alsarahead ve Ahmad, 2017) G bir grup ve $A_\pi = \{(x, \delta_{A_\pi}(x)) : x \in G\}$ G nin bir π-bulanık alt kümesi olsun. A_π ye π-bulanık alt grup denir $\Leftrightarrow$ Her $x, y \in G$ için

(i) $\delta_{A_\pi}(xy) \geq \min\{\delta_{A_\pi}(x), \delta_{A_\pi}(y)\}$

(ii) $\delta_{A_\pi}(x^{-1}) \geq \delta_{A_\pi}(x)$

Önerme 3.0.2 (Alsarahead & Ahmad 2017) Bir A_π π-bulanık alt kümesine π-bulanık alt grup denir $\Leftrightarrow$ A bir bulanık alt gruptur.

Tanım 3.0.7 G bir grup ve $A_\pi = \{(x, \delta_{A_x}(x)) : x \in G\}$ G nin bir π-bulanık alt kümesi olsun. A_π ye normal π-bulanık alt grup denir $\Leftrightarrow$ Her $x, y \in G$ için $\delta_{A_\pi}(xy) = \delta_{A_\pi}(yx)$ dir.

Tanım 3.0.8 (Alsarahead ve Ahmad, 2017) G bir grup ve $A = \{(x, \delta_A(x)) : x \in G\}$ homojen karmaşık bulanık alt küme olsun. Eğer her $x, y \in G$ için aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa A ya G nin karmaşık bulanık alt grubu denir.

(i) $\delta_A(xy) \geq \min\{\delta_A(x), \delta_A(y)\}$

(ii) $\delta_A(x^{-1}) \geq \delta_A(x)$

Teorem 3.0.1 (Alsarahead ve Ahmad, 2017) G bir grup ve $A = \{(x, \delta_A(x)) : x \in G\}$ kümesi $\delta_A(x) = s_A(x)e^{iv_A(x)}$ üyelik değeri ile verilen homojen karmaşık bulanık alt küme olsun. Bu takdirde A ya G nin karmaşık bulanık alt grubu denir $\Leftrightarrow$

(i) $\bar{A} = \{(x, s_A(x)) : x \in G, s_A(x) \in [0, 1]\}$ kümesi bir bulanık alt gruptur.

(ii) $\underline{A} = \{(x, v_A(x)) : x \in G, v_A(x) \in [0, 2\pi]\}$ kümesi bir π-bulanık alt gruptur.

İspat. A bir karmaşık bulanık alt grup olsun. Bu takdirde her $x, y \in G$ için

$$\begin{aligned} s_A(xy)e^{iv_A(xy)} &= \delta_A(xy) \\ &\geq \min\{\delta_A(x), \delta_A(y)\} \\ &= \min\left\{s_A(x)e^{iv_A(x)}, s_A(y)e^{iv_A(y)}\right\} \\ &= \min\{s_A(x), s_A(y)\}\, e^{i\min\{v_A(x), v_A(y)\}} \text{ dir.} \end{aligned}$$

A homojen olduğundan dolayı $s_A(xy) \geq \min\{s_A(x), s_A(y)\}$ ve $v_A(xy) \geq \min\{v_A(x), v_A(y)\}$ dir. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} s_A\left(x^{-1}\right) e^{iv_A\left(x^{-1}\right)} &= \delta_A\left(x^{-1}\right) \\ &\geq \delta_A(x) \\ &= s_A(x)e^{iv_A(x)} \text{ dir.} \end{aligned}$$

A homojen olduğundan $s_A\left(x^{-1}\right) \geq s_A(x)$ ve $v_A\left(x^{-1}\right) \geq v_A(x)$ dir.

Buradan $\bar{A}$ bir bulanık alt grup ve $\underline{A}$ bir π-bulanık alt gruptur.

Tersine $\bar{A}$ bir bulanık alt grup ve $\underline{A}$ bir π-bulanık alt grup olsun. Her $x, y \in G$ için

$$\begin{aligned} s_A(xy) &\geq \min\{s_A(x), s_A(y)\} \\ v_A(xy) &\geq \min\{v_A(x), v_A(y)\} \\ s_A\left(x^{-1}\right) &\geq s_A(x) \\ v_A\left(x^{-1}\right) &\geq v_A(x) \text{ dir.} \end{aligned}$$

Buradan

$$\begin{aligned} \delta_A(xy) = s_A(xy)e^{iv_A(xy)} &\geq \min\{s_A(x), s_A(y)\}\, e^{i\min\{v_A(x), v_A(y)\}} \\ &= \min\left\{s_A(x)e^{iv_A(x)}, s_A(y)e^{iv_A(y)}\right\} \\ &= \min\{\delta_A(x), \delta_A(y)\} \end{aligned}$$

ve

$$
\begin{aligned}
\delta_A\left(x^{-1}\right) &= s_A\left(x^{-1}\right) e^{iv_A\left(x^{-1}\right)} \\
&\geq s_A(x) e^{iv_A(x)} \\
&= \delta_A(x) \text{ dir.}
\end{aligned}
$$

Dolayısıyla A bir karmaşık bulanık alt gruptur.

Teorem 3.0.2 (Alsarahead ve Ahmad, 2017) $\{A_i : i \in I\}$ bir G grubu üzerinde karmaşık bulanık alt grupların bir ailesi ve her $j, k \in I$ için A_j, A_k ile homojen olsun. Bu takdirde $\cap_{i \in I} A_i$ bir karmaşık bulanık alt gruptur.

İspat. Teorem 3.0.1 den biliyoruz ki her $i \in I$ için $s_{A_i}(x)$ bir bulanık alt grup ve $v_{A_i}(x)$ π-bulanık alt gruptur. Şimdi, $x, y \in G$ olsun. Bu takdirde

$$
\begin{aligned}
\delta_{\cap_{i \in I} A_i}(xy) &= s_{\cap_{i \in I} A_i}(xy) e^{iv_{\cap_{i \in I} A_i}(xy)} \\
&= \min_{i \in I}\left\{s_{A_i}(xy)\right\} e^{i \min_{i \in I}\left\{v_{A_i}(xy)\right\}} \\
&\geq \min_{i \in I}\left\{\min\left\{s_{A_i}(x), s_{A_i}(y)\right\}\right\} e^{i \min_{i \in I}\left\{\min\left\{v_{A_i}(x), v_{A_i}(y)\right\}\right\}} \\
&= \min\left\{\min_{i \in I}\left\{s_{A_i}(x)\right\}, \min_{i \in I}\left\{s_{A_i}(y)\right\}\right\} e^{i \min\left\{\min_{i \in I}\left\{v_{A_i}(x)\right\}, \min_{i \in I}\left\{v_{A_i}(y)\right\}\right\}} \\
&= \min\left\{\min_{i \in I}\left\{s_{A_i}(x)\right\} e^{i \min_{i \in I}\left\{v_{A_i}(x)\right\}},\ \min_{i \in I}\left\{s_{A_i}(y)\right\} e^{i \min_{i \in I}\left\{v_{A_i}(y)\right\}}\right\} \\
&= \min\left\{\delta_{\cap_{i \in I} A_i}(x), \delta_{\cap_{i \in I} A_i}(y)\right\}
\end{aligned}
$$

Diğer taraftan

$$
\begin{aligned}
\delta_{\cap_{i \in I} A_i}\left(x^{-1}\right) &= s_{\cap_{i \in I} A_i}\left(x^{-1}\right) e^{iv_{\cap_{i \in I} A_i}\left(x^{-1}\right)} \\
&= \min_{i \in I}\left\{s_{A_i}\left(x^{-1}\right)\right\} e^{i \min_{i \in I}\left\{v_{A_i}\left(x^{-1}\right)\right\}} \\
&\geq \min_{i \in I}\left\{s_{A_i}(x)\right\} e^{i \min_{i \in I}\left\{v_{A_i}(x)\right\}} \\
&= \delta_{\cap_{i \in I} A_i}(x) \text{ dir.}
\end{aligned}
$$

Buradan $\cap_{i \in I} A_i$ karmaşık bulanık alt gruptur.

Teorem 3.0.3 (Alsarahead ve Ahmad, 2017) A, G grubu üzerinde bir karmaşık bulanık alt gruptur. $\Leftrightarrow$ A^t G üzerinde karmaşık bulanık alt gruptur.

İspat. A, G üzerinde bir karmaşık bulanık alt grup olsun. Bu takdirde her $x, y \in G$ için

$$
\begin{aligned}
\delta_{A^t}(xy) &= (1 - s_A(xy))\, e^{i(2\pi - v_A(xy))} \\
&\geq (1 - \min\{s_A(x), s_A(y)\})\, e^{i(2\pi - \min\{v_A(x), v_A(y)\})} \\
&= \max\{(1 - s_A(x)), (1 - s_A(y))\}\, e^{i \max\{(2\pi - v_A(x)), (2\pi - v_A(y))\}} \\
&\geq \min\{(1 - s_A(x)), (1 - s_A(y))\}\, e^{i \min\{(2\pi - v_A(x)), (2\pi - v_A(y))\}} \\
&= \min\left\{(1 - s_A(x))\, e^{i(2\pi - v_A(x))}, (1 - s_A(y))\, e^{i(2\pi - v_A(y))}\right\} \\
&= \min\{\delta_{A^t}(x), \delta_{A^t}(y)\}
\end{aligned}
$$

Diğer taraftan

$$
\begin{aligned}
\delta_{A^t}\left(x^{-1}\right) &= \left(1 - s_A\left(x^{-1}\right)\right) e^{i\left(2\pi - v_A\left(x^{-1}\right)\right)} \\
&\geq (1 - s_A(x))\, e^{i(2\pi - v_A(x))} \\
&= \delta_{A^t}(x) \text{ dir.}
\end{aligned}
$$

Böylece A^t G üzerinde karmaşık bulanık alt gruptur.

Tersine, A^t bir karmaşık bulanık alt grup olsun. Bu takdirde her $x, y \in G$ için

$$
\begin{aligned}
\delta_A(xy) &= s_A(xy) e^{i v_A(xy)} \\
&= 1 - (1 - s_A(xy))\, e^{i(2\pi - (2\pi - v_A(xy)))} \\
&\geq (1 - \min\{(1 - s_A(x)), (1 - s_A(y))\})\, e^{i(2\pi - \min\{(2\pi - v_A(x)), (2\pi - v_A(y))\})} \\
&= \max\{s_A(x), s_A(y)\}\, e^{i \max\{v_A(x), v_A(y)\}} \\
&\geq \min\{s_A(x), s_A(y)\}\, e^{i \min\{v_A(x), v_A(y)\}} \\
&= \min\left\{s_A(x) e^{i v_A(x)}, s_A(y) e^{i v_A(y)}\right\} \\
&= \min\{\delta_A(x), \delta_A(y)\}
\end{aligned}
$$

Diğer taraftan

$$
\begin{aligned}
\delta_A\left(x^{-1}\right) &= s_A\left(x^{-1}\right) e^{i v_A\left(x^{-1}\right)} \\
&= 1 - \left(1 - s_A\left(x^{-1}\right)\right) e^{i\left(2\pi - \left(2\pi - v_A\left(x^{-1}\right)\right)\right)} \\
&\geq 1 - (1 - s_A(x))\, e^{i(2\pi - (2\pi - v_A(x)))} \\
&= s_A(x) e^{i v_A(x)} \\
&= \delta_A(x) \text{ dir.}
\end{aligned}
$$

Böylece A, G üzerinde karmaşık bulanık alt gruptur.

Tanım 3.0.9 (Alsarahead ve Ahmad, 2017) Bir $A = \{(x, \delta_A(x)) : x \in G\}$ karmaşık bulanık alt grubuna normal karmaşık bulanık alt grup denir. $\Leftrightarrow$ Her $x, y \in G$ için $\delta_A(xy) = \delta_A(yx)$ dir.

Tanım 3.0.10 Bir $A_\pi = \{(x, \delta_{A_\pi}(x)) : x \in G\}$ karmaşık π-bulanık alt grubuna normal karmaşık π-bulanık alt grup denir. $\Leftrightarrow$ Her $x, y \in G$ için $\delta_{A_\pi}(xy) = \delta_{A_\pi}(yx)$ dir.

Teorem 3.0.4 (Alsarahead ve Ahmad, 2017) G bir grup ve $A = \{(x, \delta_A(x)) : x \in G\}$ kümesi $\delta_A(x) = s_A(x)e^{iv_A(x)}$ üyelik değeri ile verilen bir homojen karmaşık bulanık alt küme olsun. Bu takdirde A ya G nin normal karmaşık bulanık alt grubu denir. $\Leftrightarrow$

(i) $\bar{A} = \{(x, s_A(x)) : x \in G, s_A(x) \in [0, 1]\}$ kümesi bir normal bulanık alt gruptur.

(ii) $\underline{A} = \{(x, v_A(x)) : x \in G, v_A(x) \in [0, 2\pi]\}$ kümesi bir normal π-bulanık alt gruptur.

İspat. Teorem 3.0.1 ile $\bar{A}$ bir bulanık alt grup ve $\underline{A}$ bir π-bulanık alt grup olduğu gösterildi. Şimdi $\bar{A}$ nın normal bulanık alt grup ve $\underline{A}$ nin normal π-bulanık alt grup olduğunu gösterelim.

A bir normal karmaşık bulanık alt grup ve $x, y \in G$ olsun. Bundan dolayı $\delta(xy) = \delta(yx)$ dir. Buradan $s_A(xy)e^{iv_A(xy)} = s_A(yx)e^{iv_A(yx)}$ olup $s_A(xy) = s_A(yx)$ ve $v_A(xy) = v_A(yx)$ dir. Böylece $\bar{A}$ bir normal bulanık alt grup ve $\underline{A}$ bir normal π-bulanık alt gruptur.

Tersine, her $x, y \in G$ için $\bar{A}$ bir normal bulanık alt grup ve $\underline{A}$ bir normal π-bulanık alt grup olsun. Bu takdirde $s_A(xy) = s_A(yx)$ ve $v_A(xy) = v_A(yx)$ olup $s_A(xy)e^{iv_A(xy)} = s_A(yx)e^{iv_A(yx)}$ dir. Böylece $\delta_A(xy) = \delta_A(yx)$ elde edilir.

Teorem 3.0.5 (Alsarahead ve Ahmad, 2017) Bir A, G grubu üzerinde normal karmaşık bulanık alt gruptur $\Leftrightarrow$ A^t bir normal karmaşık bulanık alt gruptur.

İspat. Teorem 3.0.3 ün ispatına benzer şekilde yapılır.

Teorem 3.0.6 (Alsarahead ve Ahmad, 2017) İki normal karmaşık bulanık alt grubun arakesiti de normal karmaşık bulanık alt gruptur.

İspat. Tanım 3.0.9 yardımıyla Teorem 3.0.2 nin ispatına benzer şekilde yapılır.

Tanım 3.0.11 (Alsarahead ve Ahmad, 2017) $A = \left\{(x, \delta_A(x)) : \delta_A(x) = s_A(x)e^{iv_A(x)}, x \in X\right\}$ X in bir karmaşık bulanık alt kümesi olsun. $\alpha \in [0, 1]$ ve $\beta \in [0, 2\pi]$ için

$A_{(\alpha,\beta)} = \{x \in X : s_A(x) \geq \alpha, v_A(x) \geq \beta\}$ şeklinde verilen $A_{(\alpha,\beta)}$ kümesine, A karmaşık bulanık alt kümesinin (α, β)-seviye alt kümesi denir. Eğer $\beta = 0$ ise $A_\alpha = \{x \in X : s_A(x) \geq \alpha\}$ seviye alt kümesi eğer $\alpha = 0$ ise $A_\beta = \{x \in X : v_A(x) \geq \beta\}$ seviye alt kümesini elde ederiz.

Teorem 3.0.7 (Alsarahead ve Ahmad, 2017) $A = \left\{(x, \delta_A(x)) : \delta_A(x) = s_A(x)e^{iv_A(x)}, x \in G\right\}$ G'nin bir karmaşık bulanık alt grubu ve $e^{'}$, G grubunun birim elemanı olsun. Eğer $s_A(e^{'}) \geq \alpha$ ve $v_A(e^{'}) \geq \beta$ ise $A_{(\alpha,\beta)}$ kümesi G' nin alt grubudur.

İspat. Açıkça $e^{'} \in A_{(\alpha,\beta)}$ dır. Böylece $A_{(\alpha,\beta)} \neq \phi$ dir. $x, y \in A_{(\alpha,\beta)}$ olsun. Bu takdirde $s_A(x) \geq \alpha$, $v_A(x) \geq \beta$, $s_A(y) \geq \alpha$ ve $v_A(y) \geq \beta$ dır.

Şimdi,

$$\begin{aligned}\delta_A(xy) = s_A(xy)e^{iv_A(xy)} &\geq \min\left\{s_A(x)e^{iv_A(x)}, s_A(y)e^{iv_A(y)}\right\}\\ &= \min\left\{s_A(x), s_A(y)\right\} e^{i\min\{v_A(x), v_A(y)\}}\end{aligned}$$

Buradan

$$\begin{aligned}s_A(xy) &\geq \min\left\{s_A(x), s_A(y)\right\}\\ &\geq \min\{\alpha, \alpha\}\\ &= \alpha\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}v_A(xy) &\geq \min\left\{v_A(x), v_A(y)\right\}\\ &\geq \min\{\beta, \beta\}\\ &= \beta\end{aligned}$$

Bundan dolayı $xy \in A_{(\alpha,\beta)}$ dir.

Diğer taraftan $\delta_A\left(x^{-1}\right) = s_A\left(x^{-1}\right)e^{iv_A\left(x^{-1}\right)} \geq s_A(x)e^{iv_A(x)}$ dir.
Buradan $s_A\left(x^{-1}\right) \geq s_A(x) \geq \alpha$ ve $v_A\left(x^{-1}\right) \geq v_A(x) \geq \beta$ olduğundan $x^{-1} \in A_{(\alpha,\beta)}$ elde edilir.

Sonuç 3.0.1 $A = \left\{(x, \delta_A(x)) : \delta_A(x) = s_A(x)e^{iv_A(x)}, x \in G\right\}$ G' nin bir karmaşık bulanık alt grubu olsun. Eğer $s_A(e) \geq \alpha$ ve $v_A(e) \geq \beta$ ise $A_\alpha = \{x \in G : s_A(x) \geq \alpha\}$ ve $A_\beta = \{x \in G : v_A(x) \geq \beta\}$ seviye kümeleri G' nin alt gruplarıdır.

Tanım 3.0.12 (Alsarahead ve Ahmad, 2017) $f : G \longrightarrow H$ bir grup homomorfizması olsun. $A = \{(x, \delta_A(x)) : x \in G\}$ ve $B = \{(x, \delta_B(x)) : x \in H\}$ sırasıyla G ve H üzerinde üyelik değerleri $\delta_A(x) = s_A(x)e^{iv_A(x)}$ ve $\delta_B(x) = s_B(x)e^{iv_B(x)}$ şeklinde olan karmaşık bulanık alt gruplar olsun.

$C = \{(y, f(\delta_A)(y)) : y \in H\}$ kümesine A nın görüntüsü denir ve her $y \in H$ için

$$f(\delta_A)(y) = \begin{cases} \vee \{\delta_A(x) \mid x \in G, f(x) = y\}, & \text{eğer } f^{-1}(y) \neq \phi \\ 0, & \text{eğer } f^{-1}(y) = \phi \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

$D = \{(x, f^{-1}(\delta_B)(x)) : x \in G\}$ kümesine B nin ters görüntüsü denir ve her $x \in G$ için $f^{-1}(\delta_B)(x) = \delta_B(f(x))$ şeklinde tanımlanır.

Lemma 3.0.1 (Alsarahead ve Ahmad, 2017) $f : G \longrightarrow H$ bir grup homomorfizması, A ve B sırasıyla G ve H üzerinde karmaşık bulanık alt gruplar olsun. Bu takdirde;

(i) $f(\delta_A)(y) = f(s_A)(y)e^{if(v_A)(y)}$

(ii) $f^{-1}(\delta_B)(x) = f^{-1}(s_B)(x)e^{if^{-1}(v_B)(x)}$

İspat. (i)

$$\begin{aligned} f(\delta_A)(y) &= \max_{f(x)=y} \delta_A(x) \\ &= \max_{f(x)=y} \left(s_A(x)e^{iv_A(x)}\right) \\ &= \max_{f(x)=y} s_A(x)e^{\max_{f(x)=y} iv_A(x)} \\ &= f(s_A)(y)e^{if(v_A)(y)} \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} f^{-1}(\delta_B)(x) &= \delta_B(f(x)) \\ &= s_B(f(x))e^{iv_B(f(x))} \\ &= f^{-1}(s_B)(x)e^{if^{-1}(v_B)(x)} \end{aligned}$$

Teorem 3.0.8 (Alsarahead ve Ahmad, 2017) $f : G \longrightarrow H$ bir grup homomorfizması, A ve B sırasıyla G ve H üzerinde üyelik fonksiyonları $\delta_A(x) = s_A(x)e^{iv_A(x)}$ ve $\delta_B(x) = s_B(x)e^{iv_B(x)}$

şeklinde olan karmaşık bulanık alt gruplar olsun. Bu takdirde $f(\delta_A)$ H nin karmaşık bulanık alt grubudur.

İspat. A bir karmaşık bulanık alt grup olduğundan Teorem 3.0.1 ile $s_A(x)$ bir bulanık alt grup ve $v_A(x)$ bir π-bulanık alt gruptur. Ayrıca Teorem 2.0.1 ve Önerme 3.0.2 ile $s_A(x)$ ve $v_A(x)$ in görüntüleri sırasıyla bulanık alt grup ve π-bulanık alt gruptur. Öyleyse her $x, y \in H$ için

$f\left(s_A\right)(xy) \geq \min\left\{f\left(s_A\right)(x), f\left(s_A\right)(y)\right\}$ ve $f\left(s_A\right)\left(x^{-1}\right) \geq f\left(s_A\right)(x)$,

$f\left(v_A\right)(xy) \geq \min\left\{f\left(v_A\right)(x), f\left(v_A\right)(y)\right\}$ ve $f\left(v_A\right)\left(x^{-1}\right) \geq f\left(v_A\right)(x)$ dir.

Şimdi Lemma 3.0.1 ile

$$\begin{aligned}
f\left(\delta_A\right)(xy) &= f\left(s_A\right)(xy)e^{if(v_A)(xy)} \\
&\geq \min\left\{f\left(s_A\right)(x), f\left(s_A\right)(y)\right\} e^{i\min\{f(v_A)(x), f(v_A)(y)\}} \\
&= \min\left\{f\left(s_A\right)(x)e^{if(v_A)(x)}, f\left(s_A\right)(y)e^{if(v_A)(y)}\right\} \\
&= \min\left\{f\left(\delta_A\right)(x), f\left(\delta_A\right)(y)\right\}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
f\left(\delta_A\right)\left(x^{-1}\right) &= f\left(s_A\right)\left(x^{-1}\right) e^{if(v_A)\left(x^{-1}\right)} \\
&\geq f\left(s_A\right)(x)e^{if(v_A)(x)} \\
&= f\left(\delta_A\right)(x) \text{ dir.}
\end{aligned}$$

Buradan $f(\delta_A)$ H nın karmaşık bulanık alt grubudur.

Teorem 3.0.9 (Alsarahead ve Ahmad, 2017) $f : G \longrightarrow H$ bir grup homomorfizması olsun. A ve B sırasıyla G ve H üzerinde karmaşık bulanık alt gruplar olsun. Bu takdirde $f^{-1}(\delta_B)$ G nin karmaşık bulanık alt grubudur.

İspat. B bir karmaşık bulanık alt grup olduğundan Teorem 3.0.1 ile $s_B(x)$ bir bulanık alt grup ve $v_B(x)$ bir π-bulanık alt gruptur. Ayrıca Teorem 2.0.1 ve Önerme 3.0.2 ile $s_B(x)$ ve $v_B(x)$ in ters görüntüleri sırasıyla bulanık alt grup ve π-bulanık alt gruptur. Öyleyse her $x, y \in G$ için

$f^{-1}\left(s_B\right)(xy) \geq \min\left\{f^{-1}\left(s_B\right)(x), f^{-1}\left(s_B\right)(y)\right\}$ ve

$f^{-1}(s_B)(x^{-1}) \geq f^{-1}(s_B)(x)$,

$f^{-1}(v_B)(xy) \geq \min\{f^{-1}(v_B)(x), f^{-1}(v_B)(y)\}$ ve

$f^{-1}(v_B)(x^{-1}) \geq f^{-1}(v_B)(x)$ dir.

Şimdi Lemma 3.0.1 ile

$$\begin{aligned} f^{-1}(\delta_B)(xy) &= f^{-1}(s_B)(xy)e^{if^{-1}(v_B)(xy)} \\ &\geq \min\left\{f^{-1}(s_B)(x), f^{-1}(s_B)(y)\right\} e^{i\min\left\{f^{-1}(v_B)(x), f^{-1}(v_B)(y)\right\}} \\ &= \min\left\{f^{-1}(s_B)(x)e^{if^{-1}(v_B)(x)}, f^{-1}(s_B)(y)e^{if^{-1}(v_B)(y)}\right\} \\ &= \min\left\{f^{-1}(\delta_B)(x), f^{-1}(\delta_B)(y)\right\} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} f^{-1}(\delta_B)\left(x^{-1}\right) &= f^{-1}(s_B)\left(x^{-1}\right)e^{if^{-1}(v_B)\left(x^{-1}\right)} \\ &\geq f^{-1}(s_B)(x)e^{if^{-1}(v_B)(x)} \\ &= f^{-1}(\delta_B)(x) \text{ dir.} \end{aligned}$$

Buradan $f^{-1}(\delta_B)$ G nin karmaşık bulanık alt grubudur.

4. KARMAŞIK BULANIK ESNEK GRUPLAR

4.1 Karmaşık Bulanık Esnek Kümeler

Tanım 4.1.1 (Nadia, 2010) $U \neq \emptyset$ bir evrensel küme, $E \neq \emptyset$ bir küme ve $A \subseteq E$ olsun. $f : A \to KB(U)$ ile verilen (f, A) ikilisine U üzerinde bir karmaşık bulanık esnek küme denir. U üzerindeki bütün karmaşık bulanık esnek kümelerin ailesi $KBE(U)$ ile gösterilir.

Örnek 4.1.1 $U = \{h_1\,(\text{Hindistan}), h_2\,(\text{Avustralya}), h_3\,(\text{Birleşik Krallık}), h_4\,(\text{ABD})\}$ ülkeler kümesi ve
$E = \{e_1\,(\text{enflasyon oranı}), e_2\,(\text{nüfus artışı}), e_3\,(\text{işsizlik oranı}), e_4\,(\text{hisse senedi piyasa endeksi})\}$ ilgili ülkelerin büyüme parametrelerini göstersin. $A \subseteq E, A = \{e_1, e_3\}$ için $f : A \to KB(U)$ dönüşümü

$$f(e_1) = \left\{(h_1, 0.4e^{i0.5\pi}), (h_2, 0.8e^{i0.6\pi}), (h_3, 0.8e^{i0.8\pi}), (h_4, 1.0e^{i0.95\pi})\right\}$$
$$f(e_3) = \left\{(h_1, 0.6e^{i0.7\pi}), (h_2, 0.9e^{i0.9\pi}), (h_3, 0.7e^{i0.8\pi}), (h_4, 0.75e^{i0.85\pi})\right\}$$

olarak verilsin. Bu takdirde (f, A) karmaşık bulanık esnek kümesi $(f, A) = \{f(e_1), f(e_3)\}$ şeklindedir.

Tanım 4.1.2 $(f, A), (g, B) \in KBE(U)$ olsun. (f, A)'ya (g, B)'nin alt kümesi denir. $\Leftrightarrow$

(i) $A \subseteq B$

(ii) Her $x \in A$ için $f(x) \,\tilde{\subseteq}\, g(x)$

Bu durum $(f, A) \,\tilde{\sqsubseteq}\, (g, B)$ ile belirtilir.

Tanım 4.1.3 $(f, A) \in KBE(U)$ olsun. (f, A) ya boş karmaşık bulanık esnek küme denir. $\Leftrightarrow$ Her $x \in A$ için $f(x) = 0.e^{i.0\pi}$ dir. Bu durum Φ_A ile belirtilir.

Tanım 4.1.4 $(f, A) \in KBE(U)$ olsun. (f, A) ya tam karmaşık bulanık esnek küme denir. $\Leftrightarrow$ Her $x \in A$ için $f(x) = 1.e^{i.2\pi}$ dir. Bu durum Ω_A ile belirtilir.

Tanım 4.1.5 (Nadia, 2010) $(f, A), (g, B) \in KBE(U)$ olsun. $C = A \cap B$ olmak üzere her $c \in C$ için $h(c) = f(c) \cap g(c)$ olarak tanımlanan (h, C) kümesine (f, A) ve (g, B) kümelerinin arakesiti denir. Bu durum $(f, A) \,\tilde{\cap}\, (g, B)$ ile belirtilir.

Örnek 4.1.2 $U = \{h_1, h_2, h_3, h_4\}$ ve $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ parametreler kümesi olsun. $A, B \subseteq E, A = \{e_1, e_2\}$ ve $B = \{e_2\}$ olsun. (f, A) ve (g, B) karmaşık bulanık esnek kümeleri aşağıdaki gibi verilsin.

$$f(e_1) = \left\{(h_1, 0.2e^{i0.4\pi}), (h_2, 0.7e^{i0.8\pi}), (h_3, 0.9e^{i0.9\pi}), (h_4, 1.0e^{i0.95\pi})\right\}$$
$$f(e_2) = \left\{(h_1, 0.5e^{i0.6\pi}), (h_2, 0.7e^{i0.8\pi}), (h_3, 0.6e^{i0.65\pi}), (h_4, 0.25e^{i0.4\pi})\right\}$$
$$g(e_2) = \left\{(h_1, 0.4e^{i0.5\pi}), (h_2, 0.6e^{i0.8\pi}), (h_3, 0.7e^{i0.9\pi}), (h_4, 0.6e^{i0.85\pi})\right\}$$

$C = A \cap B = \{e_2\}$ olmak üzere
$h(e_2) = f(e_2) \cap g(e_2) = \left\{(h_1, 0.4e^{i0.5\pi}), (h_2, 0.6e^{i0.8\pi}), (h_3, 0.6e^{i0.65\pi}), (h_4, 0.25e^{i0.4\pi})\right\}$
şeklinde olup $(h, C) = (f, A) \tilde{\cap} (g, B) = \{h(e_2)\}$ dir.

Tanım 4.1.6 (Nadia, 2010) $(f, A), (g, B) \in KBE(U)$ olsun. $C = A \cup B$ olmak üzere her $c \in C$ için

$$h(c) = \begin{cases} f(c) & c \in A - B \\ g(c) & c \in B - A \\ f(c) \cup g(c) & c \in A \cap B \end{cases}$$

ile verilen (h, C) kümesine (f, A) ve (g, B) kümelerinin birleşimi denir. Bu durum $(f, A) \tilde{\cup} (g, B)$ ile belirtilir.

Örnek 4.1.3 $U = \{h_1, h_2, h_3, h_4\}$ ve $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ parametreler kümesi olsun. $A, B \subseteq E, A = \{e_1, e_3\}$ ve $B = \{e_3, e_4\}$ olsun. (f, A) ve (g, B) aşağıdaki gibi verilsin.

$$f(e_1) = \left\{(h_1, 0.4e^{i0.5\pi}), (h_2, 0.8e^{i0.6\pi}), (h_3, 0.8e^{i0.8\pi}), (h_4, 1.0e^{i0.85\pi})\right\}$$
$$f(e_3) = \left\{(h_1, 0.6e^{i0.7\pi}), (h_2, 0.9e^{i0.9\pi}), (h_3, 0.7e^{i0.8\pi}), (h_4, 0.75e^{i0.85\pi})\right\}$$
$$g(e_3) = \left\{(h_1, 0.5e^{i0.4\pi}), (h_2, 0.7e^{i0.5\pi}), (h_3, 0.6e^{i0.65\pi}), (h_4, 0.9e^{i0.75\pi})\right\}$$
$$g(e_4) = \left\{(h_1, 0.8e^{i0.3\pi}), (h_2, 0.85e^{i0.35\pi}), (h_3, 0.75e^{i0.25\pi}), (h_4, 0.95e^{i0.45\pi})\right\}$$

$C = A \cup B = \{e_1, e_3, e_4\}$ olmak üzere

$$h(e_1) = f(e_1) = \left\{(h_1, 0.4e^{i0.5\pi}), (h_2, 0.8e^{i0.6\pi}), (h_3, 0.8e^{i0.8\pi}), (h_4, 1.0e^{i0.85\pi})\right\}$$
$$h(e_4) = g(e_4) = \left\{(h_1, 0.8e^{i0.3\pi}), (h_2, 0.85e^{i0.35\pi}), (h_3, 0.75e^{i0.25\pi}), (h_4, 0.95e^{i0.45\pi})\right\}$$
$$h(e_3) = f(e_3) \cup g(e_3) = \left\{(h_1, 0.6e^{i0.7\pi}), (h_2, 0.9e^{i0.9\pi}), (h_3, 0.7e^{i0.8\pi}), (h_4, 0.9e^{i0.85\pi})\right\}$$

şeklinde olup $(h, C) = (f, A) \tilde{\cup} (g, B) = \{h(e_1), h(e_3), h(e_4)\}$ dir.

Önerme 4.1.1 $(f_1, A_1) \in KBE(U)$ olsun. Bu taktirde;

(i) $(f_1, A_1) \,\widetilde{\cup}\, (f_1, A_1) = (f_1, A_1)$

(ii) $(f_1, A_1) \,\widetilde{\cap}\, (f_1, A_1) = (f_1, A_1)$

(iii) $(f_1, A_1) \,\widetilde{\cup}\, \Phi_{A_1} = (f_1, A_1)$

(iv) $(f_1, A_1) \,\widetilde{\cap}\, \Phi_{A_1} = \Phi_{A_1}$

(v) $(f_1, A_1) \,\widetilde{\cup}\, \Omega_{A_1} = \Omega_{A_1}$

(vi) $(f_1, A_1) \,\widetilde{\cap}\, \Omega_{A_1} = (f_1, A_1)$

İspat.

(i) $(f_1, A_1) \,\widetilde{\cup}\, (f_1, A_1) = (h, C)$ olsun. Tanım 4.1.6 ile $C = A_1 \cup A_1 = A_1$ olmak üzere her $x \in C$ için $h(x) = max\,\{f_1(x), f_1(x)\} = f_1(x)$ dir. Buradan $(f_1, A_1) \,\widetilde{\cup}\, (f_1, A_1) = (f_1, A_1)$ dır.

(ii) $(f_1, A_1) \,\widetilde{\cap}\, (f_1, A_1) = (h, C)$ olsun. Tanım 4.1.5 ile $C = A_1 \cap A_1 = A_1$ olmak üzere her $x \in C$ için $h(x) = min\,\{f_1(x), f_1(x)\} = f_1(x)$ dir. Buradan $(f_1, A_1) \,\widetilde{\cap}\, (f_1, A_1) = (f_1, A_1)$ dır.

(iii) $(f_1, A_1) \,\widetilde{\cup}\, \Phi_{A_1} = (h, C)$ olsun. Tanım 4.1.6 ile $C = A_1 \cup \Phi_{A_1} = A_1$ olmak üzere her $x \in C$ için $h(x) = max\,\{f_1(x), 0\} = f_1(x)$

(iv) (iv), (v) ve (vi) nin ispatları benzer şekilde yapılır.

Önerme 4.1.2 $(f_1, A_1), (f_2, A_2), (f_3, A_3) \in KBE(U)$ olsun. Bu takdirde;

(i) $(f_1, A_1) \,\widetilde{\cup}\, (f_2, A_2) = (f_2, A_2) \,\widetilde{\cup}\, (f_1, A_1)$

(ii) $(f_1, A_1) \,\widetilde{\cap}\, (f_2, A_2) = (f_2, A_2) \,\widetilde{\cap}\, (f_1, A_1)$

(iii) $(f_1, A_1) \,\widetilde{\cup}\, ((f_2, A_2) \,\widetilde{\cup}\, (f_3, A_3)) = ((f_1, A_1) \,\widetilde{\cup}\, (f_2, A_2)) \,\widetilde{\cup}\, (f_3, A_3)$

(iv) $(f_1, A_1) \,\widetilde{\cap}\, ((f_2, A_2) \,\widetilde{\cap}\, (f_3, A_3)) = ((f_1, A_1) \,\widetilde{\cap}\, (f_2, A_2)) \,\widetilde{\cap}\, (f_3, A_3)$

(v) $(f_1, A_1) \,\widetilde{\sqsubseteq}\, (f_2, A_2) \Rightarrow (f_1, A_1) \,\widetilde{\cap}\, (f_3, A_3) \,\widetilde{\sqsubseteq}\, (f_2, A_2) \,\widetilde{\cap}\, (f_3, A_3)$

(vi) $(f_1, A_1) \,\widetilde{\sqsubseteq}\, (f_2, A_2) \Rightarrow (f_1, A_1) \,\widetilde{\cup}\, (f_3, A_3) \,\widetilde{\sqsubseteq}\, (f_2, A_2) \,\widetilde{\cup}\, (f_3, A_3)$

(vii) $(f_1, A_1) \,\widetilde{\cup}\, ((f_2, A_2) \,\widetilde{\cap}\, (f_3, A_3)) = ((f_1, A_1) \,\widetilde{\cup}\, (f_2, A_2)) \,\widetilde{\cap}\, ((f_1, A_1) \,\widetilde{\cup}\, (f_3, A_3))$

(viii) $(f_1, A_1) \,\widetilde{\cap}\, ((f_2, A_2) \,\widetilde{\cup}\, (f_3, A_3)) = ((f_1, A_1) \,\widetilde{\cap}\, (f_2, A_2)) \,\widetilde{\cup}\, ((f_1, A_1) \,\widetilde{\cap}\, (f_3, A_3))$

İspat. (i), (ii), (iii) ve (iv) in ispatları Tanım 4.1.5 ve Tanım 4.1.6 ile açıktır.

(v) $(f_1, A_1) \,\widetilde{\sqsubseteq}\, (f_2, A_2)$ olduğundan Tanım 4.1.2 ile $A_1 \subseteq A_2$ ve her $x \in A_1$ için $f_1(x) \,\widetilde{\subseteq}\, f_2(x)$ dir. Tanım 4.1.5 ile $(f_1, A_1) \,\widetilde{\cap}\, (f_3, A_3) = (g, A_1 \cap A_3)$ ve $(f_2, A_2) \,\widetilde{\cap}\, (f_3, A_3) = (p, A_2 \cap A_3)$ olmak üzere her $x \in A_1 \cap A_3$ ve her $x \in A_2 \cap A_3$ için $g(x) = min\,\{f_1(x), f_3(x)\}$, $p(x) = min\,\{f_2(x), f_3(x)\}$ şeklindedir. Buradan $A_1 \cap A_3 \subseteq A_2 \cap A_3$ ve her $x \in A_1$ için $g(x) \,\widetilde{\subseteq}\, p(x)$ olur.
Yani $(f_1, A_1) \,\widetilde{\cap}\, (f_3, A_3) \,\widetilde{\sqsubseteq}\, (f_2, A_2) \,\widetilde{\cap}\, (f_3, A_3)$ dir.

(vi) (v) e benzer şekilde yapılır.

(vii) $(f_1, A_1) \,\widetilde{\cup}\, [(f_2, A_2) \,\widetilde{\cap}\, (f_3, A_3)] = (p, D)$ ve $[(f_1, A_1) \,\widetilde{\cup}\, (f_2, A_2)] \,\widetilde{\cap}\, [(f_1, A_1) \,\widetilde{\cup}\, (f_3, A_3)] = (q, E)$ eşitlikleri göz önüne alınırsa Tanım 4.1.5 ve Tanım 4.1.6 ile $D = A_1 \cup (A_2 \cap A_3)$ ve $E = (A_1 \cup A_2) \cap (A_1 \cup A_3)$ olur. Dolayısıyla $D = E$ ve her $x \in D$ için $p(x) = q(x)$ dir. Buradan $(f_1, A_1)\widetilde{\cup}((f_2, A_2)\widetilde{\cap}(f_3, A_3)) = ((f_1, A_1)\widetilde{\cup}(f_2, A_2))\widetilde{\cap}((f_1, A_1)\widetilde{\cup}(f_3, A_3))$ eşitliği elde edilir.

(viii) (vii) ye benzer şekilde yapılır.

Tanım 4.1.7 $(f, A), (g, B) \in KBE(U)$ olsun. $C = A \cap B \neq \emptyset$ olmak üzere her $c \in C$ için $h(c) = f(c) \cup g(c)$ ile verilen (h, c) kümesine (f, A) ve (g, B) kümelerinin daraltılmış birleşimi denir. Bu durum $(f, A) \,\widetilde{\sqcup}\, (g, B)$ ile belirtilir.

Örnek 4.1.4 $U = \{h_1, h_2, h_3, h_4\}$ ve $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ parametreler kümesi olsun. $A, B \subseteq E, A = \{e_1, e_3\}$ ve $B = \{e_2, e_3\}$ olsun. (f, A) ve (g, B) kümeleri aşağıdaki şekilde verilsin.

$$f\,(e_1) = \left\{(h_1, 0.5e^{i0.5\pi}), (h_2, 0.4e^{i0.35\pi}), (h_3, 0.3e^{i0.3\pi}), (h_4, 0.85e^{i0.5\pi})\right\}$$
$$f\,(e_3) = \left\{(h_1, 0.5e^{i0.7\pi}), (h_2, 0.8e^{i0.9\pi}), (h_3, 0.6e^{i0.75\pi}), (h_4, 0.3e^{i0.25\pi})\right\}$$
$$g\,(e_2) = \left\{(h_1, 0.4e^{i0.4\pi}), (h_2, 0.6e^{i0.8\pi}), (h_3, 0.7e^{i0.85\pi}), (h_4, 0.8e^{i0.95\pi})\right\}$$
$$g\,(e_3) = \left\{(h_1, 0.7e^{i0.4\pi}), (h_2, 0.65e^{i0.3\pi}), (h_3, 0.5e^{i0.2\pi}), (h_4, 0.85e^{i0.4\pi})\right\}$$

$C = A \cap B = \{e_3\}$ olmak üzere

$h(e_3) = f(e_3) \cup g(e_3) = \{(h_1, 0.7e^{i0.7\pi}), (h_2, 0.8e^{i0.9\pi}), (h_3, 0.6e^{i0.75\pi}), (h_4, 0.85e^{i0.4\pi})\}$

şeklinde olup $(h, C) = (f, A)\, \tilde{\sqcup}\, (g, B) = \{h(e_3)\}$ dir.

Tanım 4.1.8 $(f, A), (g, B) \in KBE(U)$ olsun. $C = A \cup B$ olmak üzere her $c \in C$ için

$$h(c) = \begin{cases} f(c), & c \in A - B \\ g(c), & c \in B - A \\ f(c) \cap g(c), & c \in A \cap B \end{cases}$$

ile verilen (h, c) kümesine (f, A) ve (g, B) kümelerinin genişletilmiş arakesiti denir. Bu durum $(f, A)\, \tilde{\sqcap}\, (g, B)$ ile belirtilir.

Örnek 4.1.5 $U = \{h_1, h_2, h_3, h_4\}$ ve $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ parametreler kümesi olsun. $A, B \subseteq E, A = \{e_1\}$ ve $B = \{e_1, e_2\}$ olsun. (f, A) ve (g, B) kümeleri aşağıdaki şekilde verilsin.

$f(e_1) = \{(h_1, 0.3e^{i0.4\pi}), (h_2, 0.7e^{i0.5\pi}), (h_3, 0.7e^{i0.9\pi}), (h_4, 0.4e^{i0.45\pi})\}$

$g(e_1) = \{(h_1, 0.45e^{i0.55\pi}), (h_2, 0.45e^{i0.6\pi}), (h_3, 0.7e^{i0.9\pi}), (h_4, 0.9e^{i0.95\pi})\}$

$g(e_2) = \{(h_1, 0.7e^{i0.6\pi}), (h_2, 0.5e^{i0.25\pi}), (h_3, 0.5e^{i0.6\pi}), (h_4, 0.85e^{i0.7\pi})\}$

$C = A \cup B = \{e_1, e_2\}$ olmak üzere

$h(e_1) = f(e_1) \cap g(e_1) = \{(h_1, 0.3e^{i0.4\pi}), (h_2, 0.45e^{i0.5\pi}), (h_3, 0.7e^{i0.9\pi}), (h_4, 0.4e^{i0.45\pi})\}$

$h(e_2) = g(e_2) = \{(h_1, 0.7e^{i0.6\pi}), (h_2, 0.5e^{i0.25\pi}), (h_3, 0.5e^{i0.6\pi}), (h_4, 0.85e^{i0.7\pi})\}$

şeklinde olup $(h, C) = (f, A)\, \tilde{\sqcap}\, (g, B) = \{h(e_1), h(e_2)\}$ dir.

Tanım 4.1.9 $\{(f_i, A_i) \mid i \in I\}$ U üzerinde karmaşık bulanık esnek kümelerin bir ailesi olsun.

(i) $A = \underset{i \in I}{\cup} A_i$ ve her $x \in A$ için $I(x) = \{(i \mid x \in A_i\}$ olmak üzere $f(x) = \underset{i \in I(x)}{\cup} f_i(x)$ şeklinde tanımlanan (f, A) karmaşık bulanık esnek kümesine (f_i, A_i) karmaşık bulanık esnek kümeler ailesinin birleşimi denir. Bu durum $\tilde{\bigcup\limits_{i \in I}} (f_i, A_i)$ notasyonu ile gösterilir.

(ii) $A = \underset{i \in I}{\cap} A_i$ ve her $x \in A$ için $f(x) = \underset{i \in I}{\cap} f_i(x)$ şeklinde tanımlanan (f, A) karmaşık bulanık esnek kümesine (f_i, A_i) karmaşık bulanık esnek kümeler ailesinin arakesiti denir. Bu durum $\tilde{\bigcap\limits_{i \in I}} (f_i, A_i)$ notasyonu ile gösterilir.

(iii) $A = \underset{i\in I}{\cap} A_i$ ve her $x \in A$ için $f(x) = \underset{i\in I}{\cup} f_i(x)$ şeklinde tanımlanan (f, A) karmaşık bulanık esnek kümesine (f_i, A_i) karmaşık bulanık esnek kümeler ailesinin daraltılmış birleşimi denir. Bu durum $\widetilde{\bigsqcup_{i\in I}}(f_i, A_i)$ notasyonu ile gösterilir.

(iv) $A = \underset{i\in I}{\cup} A_i$ ve her $x \in A$ için $I(x) = \{(i \mid x \in A_i\}$ olmak üzere $f(x) = \underset{i\in I(x)}{\cap} f_i(x)$ şeklinde tanımlanan (f, A) karmaşık bulanık esnek kümesine (f_i, A_i) karmaşık bulanık esnek kümeler ailesinin genişletilmiş arakesiti denir. Bu durum $\widetilde{\bigsqcap_{i\in I}}(f_i, A_i)$ notasyonu ile gösterilir.

Önerme 4.1.3 $\{(f_i, A_i) \mid i \in I\} \subseteq KBE(U)$ ve $(f, B) \in KBE(U)$ olsun.

(i) $(f, B)\widetilde{\bigcap}\left(\widetilde{\bigcup_{i\in I}}(f_i, A_i)\right) = \widetilde{\bigcup_{i\in I}}\left((f, B)\widetilde{\bigcap}(f_i, A_i)\right)$

(ii) $(f, B)\widetilde{\bigcup}\left(\widetilde{\bigcap_{i\in I}}(f_i, A_i)\right) = \widetilde{\bigcap_{i\in I}}\left((f, B)\widetilde{\bigcup}(f_i, A_i)\right)$

(iii) $(f, B)\widetilde{\bigsqcap}\left(\widetilde{\bigsqcup_{i\in I}}(f_i, A_i)\right) = \widetilde{\bigsqcup_{i\in I}}\left((f, B)\widetilde{\bigsqcap}(f_i, A_i)\right)$

(iv) $(f, B)\widetilde{\bigsqcup}\left(\widetilde{\bigsqcap_{i\in I}}(f_i, A_i)\right) = \widetilde{\bigsqcap_{i\in I}}\left((f, B)\widetilde{\bigsqcup}(f_i, A_i)\right)$

İspat.

(i) $(f, B)\widetilde{\bigcap}\left(\widetilde{\bigcup_{i\in I}}(f_i, A_i)\right) = \left(k, B \cap (\underset{i\in I}{\cup} A_i)\right)$ ve $\widetilde{\bigcup_{i\in I}}\left((f, B)\widetilde{\bigcap}(f_i, A_i)\right) = \left(h, \underset{i\in I}{\cup}(B \cap A_i)\right)$ olsun. $I(x) = \{i \mid x \in A_i\}$, $I'(x) = \{i \mid x \in B \cap A_i\}$ olmak üzere $x \in B \cap \left(\underset{i\in I}{\cup} A_i\right) = \underset{i\in I}{\cup}(B \cap A_i)$ ise

$$
\begin{aligned}
k(x) &= f(x) \cap \left(\underset{i\in I(x)}{\cup} f_i(x)\right) \\
&= \underset{i\in I(x)}{\cup}(f(x) \cap f_i(x)) \\
&= \underset{i\in I'(x)}{\cup}(f(x) \cap f_i(x)) \quad (I(x) = I'(x) \text{ olduğundan}) \\
&= h(x) \text{ dir.}
\end{aligned}
$$

Yani $k(x) = h(x)$ olur. Buradan $\widetilde{\bigcup_{i\in I}}\left((f, B)\widetilde{\bigcap}(f_i, A_i)\right) = (f, B)\widetilde{\bigcap}\left(\widetilde{\bigcup_{i\in I}}(f_i, A_i)\right)$

(ii) $(f,B)\widetilde{\bigcup}\left(\widetilde{\bigcap\limits_{i\in I}}(f_i,A_i)\right)=\left(k, B\cup(\bigcap\limits_{i\in I}A_i)\right)$ ve $\widetilde{\bigcap\limits_{i\in I}}\left((f,B)\widetilde{\bigcup}(f_i,A_i)\right)=\left(h,\bigcap\limits_{i\in I}(B\cup A_i)\right)$ olsun. $x\in B\cup\left(\bigcap\limits_{i\in I}A_i\right)=\bigcap\limits_{i\in I}(B\cup A_i)$ olmak üzere

- Eğer $x\in B\setminus\bigcap\limits_{i\in I}A_i$ ise $k(x)=f(x)$ dir. Ayrıca $x\notin\bigcap\limits_{i\in I}A_i$ olduğundan keyfi bir $i\in I$, $x\notin A_i$ ve $I'=\{j\mid x\in A_j\}$ olmak üzere $h(x)=\left[\bigcap\limits_{i\in I'}(f(x)\cup f_i(x))\right]\cap f(x)=f(x)$ dir. Yani $k(x)=h(x)$ olur.
- Eğer $x\in\bigcap\limits_{i\in I}A_i\setminus B$ ise $k(x)=\bigcap\limits_{i\in I}f_i(x)$ dir. Ayrıca her $i\in I$ için $x\in A_i\setminus B$ olduğundan $h(x)=\bigcap\limits_{i\in I}f_i(x)$ dir. Yani $k(x)=h(x)$ olur.
- Eğer $x\in B\cap\left(\bigcap\limits_{i\in I}A_i\right)$ ise $k(x)=f(x)\cap\left(\bigcap\limits_{i\in I}f_i(x)\right)=\bigcap\limits_{i\in I}(f(x)\cap f_i(x))=h(x)$ olur.

  Buradan $(f,B)\widetilde{\bigcup}\left(\widetilde{\bigcap\limits_{i\in I}}(f_i,A_i)\right)=\widetilde{\bigcap\limits_{i\in I}}\left((f,B)\widetilde{\bigcup}(f_i,A_i)\right)$ dir.

(iii) i) ye benzer şekilde yapılır.

(iv) ii) ye benzer şekilde yapılır.

Teorem 4.1.1 $KBE(U)=\{(f,A)\mid A\subseteq E, f:A\to KB(U)\}$ olsun ve $\{(f_i,A_i)\mid i\in I\}$ U üzerinde karmaşık bulanık esnek kümelerin bir ailesi olsun. Bu takdirde $(KBE(U),\widetilde{\sqsubseteq})$ tam kafestir ve $\operatorname{Sup}\{(f_i,A_i)\mid i\in I\}=\widetilde{\bigcup\limits_{i\in I}}(f_i,A_i)$, $\operatorname{Inf}\{(f_i,A_i)\mid i\in I\}=\widetilde{\bigcap\limits_{i\in I}}(f_i,A_i)$ dir.

İspat. Açıkça $j\in I$ için $(f_j,A_j)\ \widetilde{\sqsubseteq}\ \widetilde{\bigcup\limits_{i\in I}}(f_i,A_i)$ dir. Öte yandan, $(g,A)\in KBE(U)$ ve her $i\in I$ için $(f_i,A_i)\ \widetilde{\sqsubseteq}\ (g,A)$ ise her $i\in I$ ve $x\in A$ için $A_i\subseteq A$ ve $f_i(x)\ \widetilde{\subseteq}\ g(x)$ dir. Böylece $\bigcup\limits_{i\in I}A_i\subseteq A$ ve $x\in\bigcup\limits_{i\in I}A_i$ için $\bigcup\limits_{i\in I}f_i(x)\ \widetilde{\subseteq}\ g(x)$ yani $\widetilde{\bigcup\limits_{i\in I}}(f_i,A_i)\ \widetilde{\sqsubseteq}\ (g,A)$ olur. Buradan $\operatorname{Sup}\{(f_i,A_i)\mid i\in I\}=\widetilde{\bigcup\limits_{i\in I}}(f_i,A_i)$ olur.

Açıkça $j\in I$ için $\widetilde{\bigcap\limits_{i\in I}}(f_i,A_i)\ \widetilde{\sqsubseteq}\ (f_j,A_j)$ dir. Öte yandan, $(g,A)\in KBE(U)$ ve her $i\in I$ için $(g,A)\ \widetilde{\sqsubseteq}\ (f_i,A_i)$ ise her $i\in I$ ve $x\in A$ için $A\subseteq A_i$ dir. Böylece $A\subseteq\bigcap\limits_{i\in I}A_i$ ve $x\in A$ için $g(x)\ \widetilde{\subseteq}\ \bigcap\limits_{i\in I}f_i(x)$ yani $(g,A)\ \widetilde{\sqsubseteq}\ \widetilde{\bigcap\limits_{i\in I}}(f_i,A_i)$ olur. Buradan $\operatorname{Inf}\{(f_i,A_i)\mid i\in I\}=\widetilde{\bigcap\limits_{i\in I}}(f_i,A_i)$ olur. Sonuç olarak $(KBE(U),\widetilde{\sqsubseteq})$ tam kafestir.

Tanım 4.1.10 $(f,A),(g,B)\in KBE(U)$ olsun. $C=A\times B$ olmak üzere her $(a,b)\in A\times B$ için $h(a,b)=f(a)\cap g(b)$ ile verilen (h,c) kümesine (f,A) ve (g,B) kümelerinin $\wedge$-arakesiti denir. Bu durum $(f,A)\ \widetilde{\wedge}\ (g,B)$ şeklinde gösterilir.

Örnek 4.1.6 $U = \{h_1, h_2, h_3, h_4\}$ ve $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ parametreler kümesi olsun. $A, B \subseteq E, A = \{e_1, e_2\}$ ve $B = \{e_2, e_4\}$ olsun. (f, A) ve (g, B) kümeleri aşağıda olduğu gibi verilsin.

$$f(e_1) = \left\{(h_1, 0.3e^{i0.6\pi}), (h_2, 0.7e^{i0.8\pi}), (h_3, 0.8e^{i0.8\pi}), (h_4, 1.0e^{i0.85\pi})\right\}$$
$$f(e_2) = \left\{(h_1, 0.2e^{i0.4\pi}), (h_2, 0.8e^{i0.6\pi}), (h_3, 0.5e^{i0.45\pi}), (h_4, 0.5e^{i0.5\pi})\right\}$$
$$g(e_2) = \left\{(h_1, 0.45e^{i0.4\pi}), (h_2, 0.2e^{i0.15\pi}), (h_3, 0.6e^{i0.7\pi}), (h_4, 0.8e^{i0.75\pi})\right\}$$
$$g(e_4) = \left\{(h_1, 0.6e^{i0.8\pi}), (h_2, 0.5e^{i0.6\pi}), (h_3, 0.15e^{i0.3\pi}), (h_4, 0.85e^{i0.85\pi})\right\}$$

$C = A \times B = \{(e_1, e_2), (e_1, e_4), (e_2, e_2), (e_2, e_4)\}$ olmak üzere

$$h(e_1, e_2) = \left\{(h_1, 0.3e^{i0.4\pi}), (h_2, 0.2e^{i0.15\pi}), (h_3, 0.6e^{i0.7\pi}), (h_4, 0.8e^{i0.75\pi}\right\}$$
$$h(e_1, e_4) = \left\{(h_1, 0.3e^{i0.6\pi}), (h_2, 0.5e^{i0.6\pi}), (h_3, 0.15e^{i0.3\pi}), (h_4, 0.85e^{i0.85\pi}\right\}$$
$$h(e_2, e_2) = \left\{(h_1, 0.2e^{i0.4\pi}), (h_2, 0.2e^{i0.15\pi}), (h_3, 0.5e^{i0.45\pi}), (h_4, 0.5e^{i0.5\pi}\right\}$$
$$h(e_2, e_4) = \left\{(h_1, 0.2e^{i0.4\pi}), (h_2, 0.5e^{i0.6\pi}), (h_3, 0.15e^{i0.3\pi}), (h_4, 0.5e^{i0.5\pi}\right\}$$

şeklinde olup $(h, C) = (f, A) \mathbin{\tilde{\wedge}} (g, B) = \{h(e_1, e_2), h(e_1, e_4), h(e_2, e_2), h(e_2, e_4)\}$ dir.

Tanım 4.1.11 $(f, A), (g, B) \in KBE(U)$ olsun. $C = A \times B$ olmak üzere her $(a, b) \in A \times B$ için $h(a, b) = f(a) \cup g(b)$ ile verilen (h, c) kümesine (f, A) ve (g, B) kümelerinin $\vee$-birleşimi denir. Bu durum $(f, A) \mathbin{\tilde{\vee}} (g, B)$ ile belirtilir.

Örnek 4.1.7 $U = \{h_1, h_2, h_3, h_4\}$ ve $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ parametreler kümesi olsun. $A, B \subseteq E, A = \{e_1, e_3\}$ ve $B = \{e_3\}$ olsun. (f, A) ve (g, B) kümeleri aşağıda olduğu gibi verilsin.

$$f(e_1) = \left\{(h_1, 0.2e^{i0.1\pi}), (h_2, 0.7e^{i0.5\pi}), (h_3, 0.7e^{i0.35\pi}), (h_4, 0.9e^{i0.65\pi})\right\}$$
$$f(e_3) = \left\{(h_1, 0.4e^{i0.6\pi}), (h_2, 0.7e^{i0.8\pi}), (h_3, 0.8e^{i0.85\pi}), (h_4, 0.6e^{i0.65\pi})\right\}$$
$$g(e_3) = \left\{(h_1, 0.4e^{i0.6\pi}), (h_2, 0.6e^{i0.7\pi}), (h_3, 0.5e^{i0.65\pi}), (h_4, 0.7e^{i0.9\pi})\right\}$$

$C = A \times B = \{(e_1, e_3), (e_3, e_3)\}$ olmak üzere

$$h(e_1, e_3) = \left\{(h_1, 0.4e^{i0.6\pi}), (h_2, 0.7e^{i0.7\pi}), (h_3, 0.7e^{i0.65\pi}), (h_4, 0.9e^{i0.9\pi}\right\}$$
$$h(e_3, e_3) = \left\{(h_1, 0.4e^{i0.6\pi}), (h_2, 0.7e^{i0.8\pi}), (h_3, 0.8e^{i0.85\pi}), (h_4, 0.7e^{i0.9\pi}\right\}$$

şeklinde olup $(h, C) = (f, A) \mathbin{\tilde{\vee}} (g, B) = \{h(e_1, e_3), h(e_3, e_3)\}$ dir.

Tanım 4.1.12 (Alsarahead ve Ahmad, 2017) $(f, A), (g, B) \in KBE(U)$ olsun. Bu takdirde;

(i) (f, A)'ya homojen karmaşık bulanık esnek küme denir. $\Leftrightarrow$ Her $a \in A$ için $f(a)$ homojen karmaşık bulanık alt kümedir.

(ii) (f, A)'ya (f, B) ile homojen karmaşık bulanık esnek küme denir. $\Leftrightarrow$ Her $a, b \in A$ için $f(a)$, $f(b)$ ile homojendir.

(iii) (f, A)'ya (g, B) ile homojendir denir. $\Leftrightarrow$ Her $a \in A \cap B$ için $f(a)$, $g(a)$ ile homojendir.

Tanım 4.1.13 $U \neq \emptyset$, $V \neq \emptyset$ evrensel kümeler olsun. $A \neq \emptyset$ ve $B \neq \emptyset$ parametre kümeleri olmak üzere $\varphi : U \to V$, $\psi : A \to B$ fonksiyonları ile verilen (φ, ψ) ikilisine U'dan V'ye karmaşık bulanık esnek fonksiyon denir.

Tanım 4.1.14 $(f, A) \in KBE(U)$, $(g, B) \in KBE(V)$ ve (φ, ψ) U dan V ye karmaşık bulanık esnek fonksiyon olsun. Bu takdirde

(i) (f, A) nın (φ, ψ) karmaşık bulanık esnek fonksiyonu altındaki görüntüsü $(\varphi, \psi)(f, A) = (\varphi(f), \psi(A))$ ile belirtilir ve $b \in \psi(A)$, $y \in V$ için

$$\delta_{\phi(f)(b)}(y) = \begin{cases} \bigvee\limits_{\phi(x)=y} \bigvee\limits_{\psi(a)=b} \delta_{f(a)}(x), & \text{eğer } \phi^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0, & \text{eğer } \phi^{-1}(y) = \emptyset \end{cases}$$

olarak tanımlanır.

(ii) (g, B) nin (φ, ψ) karmaşık bulanık esnek fonksiyonu altındaki ters görüntüsü $(\varphi, \psi)^{-1}(g, B) = (\varphi^{-1}(g), \psi^{-1}(B))$ ile belirtilir ve $a \in \psi^{-1}(B), x \in U$ için $\delta_{\varphi^{-1}(g)(a)}(x) = \delta_{g(\psi(a))}(\varphi(x))$ olarak tanımlanır.

Örnek 4.1.8 $U = \{u_1, u_2, u_3\}$ ve $V = \{v_1, v_2\}$ iki evrensel küme olsun. $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ için U üzerinde (f, A) karmaşık bulanık esnek kümesi aşağıdaki gibi verilsin.

$f(a_1) = \left\{(u_1, 1e^{2\pi}), (u_2, 1e^{\pi}), \left(u_3, 1e^{\frac{\pi}{2}}\right)\right\}$,

$f(a_2) = \left\{\left(u_1, \frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{3}}\right), \left(u_2, \frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{4}}\right), \left(u_3, \frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{5}}\right)\right\}$,

$f(a_3) = \left\{\left(u_1, \frac{1}{3}e^{\frac{\pi}{6}}\right), \left(u_2, \frac{1}{3}e^{\frac{\pi}{7}}\right), \left(u_3, \frac{1}{3}e^{\frac{\pi}{8}}\right)\right\}$.

$B = \{b_1, b_2\}$ için V üzerinde (g, B) karmaşık bulanık esnek kümesi aşağıdaki gibi verilsin.

$g(b_1) = \left\{(v_1, 1e^{\pi}), \left(v_2, \frac{1}{2}e^{\pi}\right)\right\}$

$g(b_2) = \left\{\left(v_1, \frac{1}{4}e^{\frac{\pi}{3}}\right), \left(v_2, \frac{1}{4}e^{\frac{\pi}{4}}\right)\right\}$

$\varphi : U \to V$ ve $\psi : A \to B$ fonksiyonları

$\varphi(u_1) = v_1$, $\varphi(u_2) = \varphi(u_3) = v_2$, $\psi(a_1) = b_1$ ve $\psi(a_2) = \psi(a_3) = b_2$ şeklinde tanımlansın.

Bu takdirde $b_1 \in \psi(A)$ için
$\delta_{\varphi(f)(b_1)}(v_1) = \delta_{f(a_1)}(u_1) = 1e^{2\pi}$

$$\begin{aligned}
\delta_{\varphi(f)(b_1)}(v_2) &= \left\{\delta_{f(a_2)}(u_2) \vee \delta_{f(a_2)}(u_3)\right\} \vee \left\{\delta_{f(a_3)}(u_2) \vee \delta_{f(a_3)}(u_3)\right\} \\
&= \left\{\frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{4}} \vee \frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{5}}\right\} \vee \left\{\frac{1}{3}e^{\frac{\pi}{7}} \vee \frac{1}{3}e^{\frac{\pi}{8}}\right\} \\
&= \frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{4}}.
\end{aligned}$$

Benzer şekilde $x \in V$ için $\delta_{\varphi(f)(b_2)}(x)$ üyelik değerlerini bulabiliriz.
Şimdi $a_1 \in \psi^{-1}(B)$ için;

$$\begin{aligned}
\delta_{\varphi^{-1}(g)(a_1)}(u_1) &= \delta_{g(\psi(a_1))}(\varphi(u_1)) = \delta_{g(b_1)}(v_1) = 1e^{\pi} \\
\delta_{\varphi^{-1}(g)(a_1)}(u_2) &= \delta_{g(\psi(a_1))}(\varphi(u_2)) = \delta_{g(b_1)}(v_2) = \frac{1}{2}e^{\pi} \\
\delta_{\varphi^{-1}(g)(a_1)}(u_3) &= \delta_{g(\psi(a_1))}(\varphi(u_3)) = \delta_{g(b_1)}(v_2) = \frac{1}{2}e^{\pi}
\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde $x \in U$ için $\delta_{\varphi^{-1}(g)(a_2)}(x)$ ve $\delta_{\varphi^{-1}(g)(a_3)}(x)$ üyelik değerlerini de bulabiliriz.

Lemma 4.1.1 (Alsarahead ve Ahmad, 2017) (f, A) ve (g, B) sırasıyla U ve V üzerinde iki homojen karmaşık bulanık esnek küme ve (φ, ψ), U dan V ye karmaşık bulanık esnek fonksiyon olsun. Bu takdirde aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

(i) $\delta_{\varphi(f)(a)}(y) = s_{\varphi(f)(a)}(y)e^{iv_{\varphi(f)(a)}}$

(ii) $\delta_{\varphi^{-1}(g)(b)}(x) = s_{\varphi^{-1}(g)(b)}(x)e^{i\omega}$

İspat. (i)

$$\begin{aligned}
\delta_{\varphi(f)(a)}(y) &= \bigvee_{\varphi(t)=y} \bigvee_{\psi(k)=a} \delta_{f(k)}(t) \\
&= \bigvee_{\varphi(t)=y} \bigvee_{\psi(k)=a} s_{f(k)}(t)e^{iv_{f(k)}(t)} \\
&= \left\{\bigvee_{\varphi(t)=y} \bigvee_{\psi(k)=a} s_{f(k)}(t)\right\} e^{i\left\{\bigvee_{\varphi(t)=y}\bigvee_{\psi(k)=a} v_{f(k)}(t)\right\}} \\
&= s_{\varphi(f)(a)}(y)e^{iv_{\varphi(f)(a)}(y)}
\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}\delta_{\varphi^{-1}(g)(b)}(x) &= \delta_{g(\psi(b))}(\varphi(x)) \\ &= s_{g(\psi(b))}(\varphi(x))e^{iv_{g(\psi(b))}(\varphi(x))} \\ &= s_{\varphi^{-1}(g)(b)}(x)e^{iv_{\varphi^{-1}(g(b)}(x)}\end{aligned}$$

4.2 Karmaşık Bulanık Esnek Gruplar

Bu kısımda tüm karmaşık bulanık esnek kümeler, homojen karmaşık bulanık esnek küme olarak alınacaktır.

Tanım 4.2.1 (Alsarahead ve Ahmad, 2017) G bir grup ve $(f, A) \in KBE(G)$ olsun. (f, A) ya G üzerinde bir karmaşık bulanık esnek grup denir. $\Leftrightarrow$ Her $a \in A$ ve $x, y \in G$ için

(i) $\delta_{f(a)}(xy) \geq \min\left\{\delta_{f(a)}(x), \delta_{f(a)}(y)\right\}$

(ii) $\delta_{f(a)}\left(x^{-1}\right) \geq \delta_{f(a)}(x)$

Örnek 4.2.1 N tüm pozitif tam sayıların kümesi ve $G = \mathbb{Z}_{12}$ olsun $f : N \to KB(G)$ fonksiyonu her $n \in N$ için,

$$\delta_{f(n)}(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}e^{i\pi} & \text{eğer } x \in \{0, 6\} \\ 0e^{i0\pi} & \text{eğer } x \in \mathbb{Z}_{12} - \{0, 6\} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın.

Bu takdirde (f, N), $\mathbb{Z}_{12}$ üzerinde bir karmaşık bulanık esnek gruptur.

Çözüm: Her $n \in N$ için, $f(n) = \left\{\left(x, \delta_{f(n)}(x)\right)\right\}$ $\mathbb{Z}_{12}$ üzerinde bir karmaşık bulanık alt gruptur. Böylece (f, N) $\mathbb{Z}_{12}$ üzerinde bir karmaşık bulanık esnek gruptur.

Örnek 4.2.2 $(G, .)$ bir grup ve e', G'nin birim elemanı olsun. $f : G \to KB(G)$ olmak üzere her $x \in G$ için,

$$\delta_{f(g)}(x) = \begin{cases} 1.e^{i\pi}, & x = e' \\ \frac{1}{2}.e^{i\pi}, & x \neq e' \end{cases}$$

ile verilen (f, G) kümesi G üzerinde karmaşık bulanık esnek gruptur.

Çözüm: Her $x, y \in G$ için $\delta_{f(g)}(x^{-1}) = \delta_{f(g)}(x)$ olduğu açıktır.
Şimdi $\delta_{f(g)}(x.y) \geq min\left\{\delta_{f(g)}(x), \delta_{f(g)}(y)\right\}$ olduğunu gösterelim.

1. $x = e'$ veya $y = e'$ ise eşitsizlik doğrudur.
2. $x \neq e'$ ve $y \neq e'$ ise $min\left\{\delta_{f(g)}(x), \delta_{f(g)}(y)\right\} = min\left\{\frac{1}{2}e^{i\pi}, \frac{1}{2}e^{i\pi}\right\} = \frac{1}{2}e^{i\pi} \leq \delta_{f(g)}(x.y)$ olur. Yani her $g \in G$ için $f(g)$ G'nin karmaşık bulanık alt grubudur. Böylece (f, G), G üzerinde karmaşık bulanık esnek gruptur.

Tanım 4.2.2 (f, A) ve (g, B) G üzerinde karmaşık bulanık esnek gruplar olsun. (f, A)'ya (g, B)'nin karmaşık bulanık esnek alt grubu denir.$\Leftrightarrow$

(i) $A \subseteq B$

(ii) Her $a \in A$ için $f(a)$, $g(a)$'nın karmaşık bulanık alt grubudur.

Bu durum $(f, A) \mathrel{\tilde{\leq}} (g, B)$ ile belirtilir.

Örnek 4.2.3 $f : \mathbb{R} \to KB(\mathbb{R})$ ve $g : \mathbb{R} \to KB(\mathbb{R})$ dönüşümleri her $n, x \in \mathbb{R}$ için

$$\delta_{f(n)}(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}.e^{i.\pi}, & n \leq x \\ 0.e^{i.\pi}, & x < n \end{cases} \quad \text{ve} \quad \delta_{g(n)}(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}.e^{i.\pi}, & n \leq x \\ 1.e^{i.\pi}, & x < n \end{cases} \quad \text{şeklinde verilsin.}$$

Açıkça $(f, \mathbb{R}) \mathrel{\tilde{\leq}} (g, \mathbb{R})$ dir.

Teorem 4.2.1 (Alsarahead ve Ahmad, 2017) (f, A) G grubu üzerinde homojen karmaşık bulanık esnek küme olsun. Bu takdirde (f, A), G üzerinde bir karmaşık bulanık esnek gruptur $\Leftrightarrow$

(i) $(\bar{f}, A) = \left\{\left(x, s_{f(a)}(x)\right) : x \in G, s_{f(a)}(x) \in [0, 1]\right\}$ bulanık esnek kümesi bir bulanık esnek gruptur.

(ii) $(\underline{f}, A) = \left\{\left(x, v_{f(a)}(x)\right) : x \in G, v_{f(a)}(x) \in [0, 1]\right\}$ π-bulanık esnek kümesi bir π-bulanık esnek gruptur.

İspat. (f, A) bir karmaşık bulanık esnek grup ve $x, y \in G$ olsun. Bu takdirde her $a \in A$ için

$$
\begin{aligned}
s_{f(a)}(xy)e^{iv_{f(a)}(xy)} &= \delta_{f(a)}(xy) \\
&\geq \min\left\{\delta_{f(a)}(x), \delta_{f(a)}(y)\right\} \\
&= \min\left\{s_{f(a)}(x)e^{iv_{f(a)}(x)}, s_{f(a)}(y)e^{iv_{f(a)}(y)}\right\} \\
&= \min\left\{s_{f(a)}(x), s_{f(a)}(y)\right\} e^{i\min\left\{v_{f(a)}(x), v_{f(a)}(y)\right\}} \text{ dir.}
\end{aligned}
$$

(f, A) homojen olduğundan

$s_{f(a)}(xy) \geq \min\left\{s_{f(a)}(x), s_{f(a)}(y)\right\}$ ve $v_{f(a)}(xy) \geq \min\left\{v_{f(a)}(x), v_{f(a)}(y)\right\}$ dir.

Diğer taraftan

$$
\begin{aligned}
s_{f(a)}\left(x^{-1}\right) e^{iv_{f(a)}\left(x^{-1}\right)} &= \delta_{f(a)}\left(x^{-1}\right) \\
&\geq \delta_{f(a)}(x) \\
&= s_{f(a)}(x)e^{iv_{f(a)}(x)} \text{ olup}
\end{aligned}
$$

$s_{f(a)}\left(x^{-1}\right) \geq s_{f(a)}(x)$ ve $v_{f(a)}\left(x^{-1}\right) \geq v_{f(a)}(x)$ dir. Buradan $(\bar{f}, A)$ bir bulanık esnek grup ve $(\underline{f}, A)$ bir π-bulanık esnek gruptur.

Tersine, $(\bar{f}, A)$ bir bulanık esnek grup ve $(\underline{f}, A)$ bir π-bulanık esnek grup olsun. Bu takdirde her $a \in A$ için

$s_{f(a)}(xy) \geq \min\left\{s_{f(a)}(x), s_{f(a)}(y)\right\}$, $v_{f(a)}(xy) \geq \min\left\{v_{f(a)}(x), v_{f(a)}(y)\right\}$ ve

$s_{f(a)}\left(x^{-1}\right) \geq s_{f(a)}(x)$ ve $v_{f(a)}\left(x^{-1}\right) \geq v_{f(a)}(x)$ dir.

Şimdi,

$$
\begin{aligned}
\delta_{f(a)}(xy) &= s_{f(a)}(xy)e^{iv_{f(a)}(xy)} \\
&\geq \min\left\{s_{f(a)}(x), s_{f(a)}(y)\right\} e^{i\min\left\{v_{f(a)}(x), v_{f(a)}(y)\right\}} \\
&= \min\left\{s_{f(a)}(x)e^{iv_{f(a)}(x)}, s_{f(a)}(y)e^{iv_{f(a)}(y)}\right\} \\
&= \min\left\{\delta_{f(a)}(x), \delta_{f(a)}(y)\right\}.
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
\delta_{f(a)}\left(x^{-1}\right) &= s_{f(a)}\left(x^{-1}\right) e^{iv_{f(a)}\left(x^{-1}\right)} \\
&\geq s_{f(a)}(x)e^{iv_{f(a)}(x)} \\
&= \delta_{f(a)}(x)
\end{aligned}
$$

Buradan $f(a)$ bir karmaşık bulanık alt gruptur. Böylece (f, A) bir karmaşık bulanık esnek gruptur.

Teorem 4.2.2 (Alsarahead ve Ahmad, 2017) $\{(f_i, A_i) : i \in I\}$, G grubu üzerinde karmaşık bulanık esnek grupların bir ailesi ve her $j, k \in I$ için (f_j, A_j), (f_k, A_k) ile homojen olsun. Bu takdirde $\widetilde{\bigcap}_{i\in I}(f_i, A_i)$ bir karmaşık bulanık esnek gruptur.

İspat. $C = \cap_{i\in I} A_i$ olmak üzere $\cap_{i\in I}(f_i, A_i) = (h, C)$ olsun. Bu takdirde her $i \in I$ ve $c \in C$ için $f_i(c)$ bir karmaşık bulanık alt gruptur. Buradan $c \in C$ için $s_{f_i(c)}(x)$ bir bulanık alt grup ve $v_{f_i(c)}(x)$ bir π-bulanık alt gruptur. Şimdi her $x, y \in G$ ve $c \in C$ için

$$
\begin{aligned}
\delta_{h(c)}(xy) &= \delta_{\cap_{i\in I} f_i(c)}(xy) \\
&= s_{\cap_{i\in I} f_i(c)}(xy) e^{i\omega \cap_{i\in I} f_i(c)(xy)} \\
&= \min_{i\in I}\left\{s_{f_i(c)}(xy)\right\} e^{i \min_{i\in I}\left\{v_{f_i(c)}(xy)\right\}} \\
&\geq \min_{i\in I}\left\{\min\left\{s_{f_i(c)}(x), s_{f_i(c)}(y)\right\}\right\} e^{i \min_{i\in I}\left\{\min\left\{v_{f_i(c)}(x), v_{f_i(c)}(y)\right\}\right\}} \\
&= \min\left\{\min_{i\in I}\left\{s_{f_i(c)}(x)\right\}, \min_{i\in I}\left\{s_{f_i(c)}(y)\right\}\right\} e^{i \min\left\{\min_{i\in I}\left\{v_{f_i(c)}(x)\right\}, \min_{i\in I}\left\{v_{f_i(c)}(y)\right\}\right\}} \\
&= \min\left\{\min_{i\in I}\left\{s_{f_i(c)}(x)\right\} e^{i \min_{i\in I}\left\{v_{f_i(c)}(x)\right\}}, \min_{i\in I}\left\{s_{f_i(c)}(y)\right\} e^{i \min_{i\in I}\left\{v_{f_i(c)}(y)\right\}}\right\} \\
&= \min\left\{\delta_{\cap_{i\in I}} f_i(c)(x), \delta_{\cap_{i\in I}} f_i(c)(y)\right\} \\
&= \min\left\{\delta_{h(c)}(x), \delta_{h(c)}(y)\right\}
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
\delta_{h(c)}\left(x^{-1}\right) &= \delta_{\cap_{i\in I} f_i(c)}\left(x^{-1}\right) \\
&= s_{\cap_{i\in I} f_i(c)}\left(x^{-1}\right) e^{iv_{\cap_{i\in I}}} f_i(c)\left(x^{-1}\right) \\
&= \min_{i\in I}\left\{s_{f_i(c)}\left(x^{-1}\right)\right\} e^{i \min_{i\in I}\left\{\omega^{v_i(c)}\left(x^{-1}\right)\right\}} \\
&\geq \min_{i\in I}\left\{s_{f_i(c)}(x)\right\} e^{i \min_{i\in I}\left\{v_{f_i(c)}(x)\right\}} \\
&= \delta_{\cap_{i\in I} f_i(c)}(x) \\
&= \delta_{h(c)}(x) \text{ elde edilir.}
\end{aligned}
$$

Böylece $\cap_{i\in I}(f_i, A_i)$ bir karmaşık bulanık esnek gruptur.

Sonuç 4.2.1 (f, A) ve (g, B) G grubu üzerinde karmaşık bulanık esnek gruplar ise $(f, A) \widetilde{\cap} (g, B)$ karmaşık bulanık esnek gruptur.

Teorem 4.2.3 (f, A) ve (g, B) G üzerinde karmaşık bulanık esnek gruplar ve $A \cap B = \emptyset$ olsun. Bu takdirde $(f, A) \widetilde{\cup} (g, B)$ karmaşık bulanık esnek gruptur.

İspat. (f, A) ve (g, B) G üzerinde karmaşık bulanık esnek gruplar ve $(f, A) \widetilde{\cup} (g, B) = (h, C)$ olsun. Burada $C = A \cup B$ olup, eğer $c \in A \setminus B$ ise $\delta_{h(c)}(x) = \delta_{f(c)}(x)$ ve $c \in B \setminus A$ ise $\delta_{h(c)}(x) = \delta_{g(c)}(x)$ dir. Buradan $\delta_{f(c)}(x)$ ve $\delta_{g(c)}(x)$ karmaşık bulanık alt gruplardır. Üstelik $(f, A) \widetilde{\cup} (g, B) = (h, C)$ karmaşık bulanık esnek gruptur.

Teorem 4.2.4 (g, A) ve (k, B) G üzerinde karmaşık bulanık esnek gruplar olsun. Eğer her $x \in A \cap B$ için $g(x) \widetilde{\subseteq} k(x)$ veya $k(x) \widetilde{\subseteq} g(x)$ ise $(g, A) \widetilde{\cup} (k, B)$ G üzerinde karmaşık bulanık esnek gruptur.

İspat. Açıkça her $x \in C$ için $g(x)$ ve $k(x)$ G nin karmaşık bulanık alt gruplarıdır. Eğer $g(x) \widetilde{\subseteq} k(x)$ veya $k(x) \widetilde{\subseteq} g(x)$ olursa $g(x) \vee k(x) = max\left\{g(x), k(x)\right\}$ G nin karmaşık bulanık alt grubu olduğu açıktır. Buradan $(g, A) \widetilde{\cup} (k, B)$ G üzerinde karmaşık bulanık esnek gruptur.

Teorem 4.2.5 (f, A) ve (g, B) G grubu üzerinde karmaşık bulanık esnek gruplar ve $A \cap B = \emptyset$ olsun. Bu takdirde $(f, A) \widetilde{\vee} (g, B)$ karmaşık bulanık esnek gruptur.

İspat. Tanım 4.1.10 kullanılarak Teorem 4.2.3 ün ispatına benzer şekilde yapılır.

Teorem 4.2.6 (f, A) ve (g, B) G grubu üzerinde karmaşık bulanık esnek gruplar ise $(f, A) \widetilde{\wedge}$ (g, B) karmaşık bulanık esnek gruptur.

İspat. $(f, A) \widetilde{\wedge} (g, B) = (h, C)$ olsun. Burada $C = A \times B$ olmak üzere her $(a, b) \in C$ için $h(a, b) = f(a) \cap g(b)$ olup, (f, A) ve (g, B) karmaşık bulanık esnek gruplar olduğundan $f(a)$ ve $g(b)$ G üzerinde karmaşık bulanık alt gruplardır. Buradan $f(a) \cap g(b)$ G üzerinde karmaşık bulanık alt gruptur. Böylece $(f, A) \widetilde{\wedge} (g, B)$ karmaşık bulanık esnek gruptur.

Lemma 4.2.1 (Alsarahead ve Ahmad, 2017) G bir grup ve (f, A), G üzerinde homojen karmaşık bulanık esnek küme olsun. Bu takdirde her $a \in A$ için (f, A) G üzerinde bir karmaşık bulanık esnek gruptur. $\Leftrightarrow \delta_{f(a)}\left(xy^{-1}\right) \geq \min\left\{\delta_{f(a)}(x), \delta_{f(a)}(y)\right\}$.

İspat. (f, A) bir karmaşık bulanık esnek grup olsun. Bu takdirde her $a \in A$ için $\delta_{f(a)}(xy) \geq \min\left\{\delta_{f(a)}(x), \delta_{f(a)}(y)\right\}$ ve $\delta_{f(a)}\left(x^{-1}\right) \geq \delta_{f(a)}(x)$ olup
$\delta_{f(a)}\left(xy^{-1}\right) \geq \min\left\{\delta_{f(a)}(x), \delta_{f(a)}\left(y^{-1}\right)\right\} \geq \min\left\{\delta_{f(a)}(x), \delta_{f(a)}(y)\right\}$ dir.
Tersine,

$\delta_{f(a)}\left(xy^{-1}\right) \geq \min\left\{\delta_{f(a)}(x), \delta_{f(a)}(y)\right\}$ olsun Her $x \in G$ için $x = y$ alınırsa $\delta_{f(a)}(e) \geq \delta_{f(a)}(x)$ olup $\delta_{f(a)}\left(y^{-1}\right) = \delta_{f(a)}\left(ey^{-1}\right) \geq \min\left\{\delta_{f(a)}(e), \delta_{f(a)}(y)\right\} = \delta_{f(a)}(y)$ elde edilir. Buradan (f, A) G üzerinde karmaşık bulanık esnek gruptur.

Tanım 4.2.3 (Alsarahead ve Ahmad, 2017) $(f, A) \in KBE(U)$ olsun. Bu takdirde her $\alpha \in [0, 1]$ ve $\beta \in [0, 2\pi]$ için $(f, A)_{(\alpha,\beta)} = \left\{f(a)_{(\alpha,\beta)} : a \in A\right\}$ kümesine, (f, A) karmaşık bulanık esnek kümesinin bir $(\alpha, \beta)-$ seviye esnek kümesi denir. Burada $f(a)_{(\alpha,\beta)} = \left\{x \in U : s_{f(a)}(x) \geq \alpha, v_{f(a)}(x) \geq \beta\right\}$ $f(a)$ karmaşık bulanık kümesinin $(\alpha, \beta)-$ seviye kümesidir.
Üstelik, her $\alpha \in [0, 1]$ ve $\beta \in [0, 2\pi]$ için $(f, A)_{(\alpha,\beta)}$ klasik anlamda bir esnek kümedir.

Teorem 4.2.7 (Alsarahead ve Ahmad, 2017) $(f, A) \in KBE(G)$ olsun. (f, A) G üzerinde bir karmaşık bulanık esnek gruptur.$\Leftrightarrow$ Her $a \in A$, $\alpha \in [0, 1]$ ve $\beta \in [0, 2\pi]$ için $f(a)_{(\alpha,\beta)} \neq \emptyset$ olmak üzere $(f, A)_{(\alpha,\beta)}$ (α, β)-seviye esnek kümesi G üzerinde esnek gruptur.

İspat. (f, A) G üzerinde bir karmaşık bulanık esnek grup olsun. Bu takdirde her $a \in A$ için $f(a)$, G'nin bir karmaşık bulanık alt grubudur. $\alpha \in [0, 1]$, $\beta \in [0, 2\pi]$ ve $f(a)_{(\alpha,\beta)} \neq \emptyset$ için $a \in A$ ve $x, y \in f(a)_{(\alpha,\beta)}$ olsun. Bu takdirde $s_{f(a)}(x) \geq \alpha$ ve $v_{f(a)}(x) \geq \beta$ dır. Ayrıca $s_{f(a)}(y) \geq \alpha$ ve $v_{f(a)}(y) \geq \beta$ dır.

Şimdi,

$$\begin{aligned}
s_{f(a)}(xy)e^{iv_{f(a)}(xy)} &= \delta_{f(a)}(xy) \\
&\geq \min\left\{\delta_{f(a)}(x), \delta_{f(a)}(y)\right\} \\
&= \min\left\{s_{f(a)}(x)e^{iv_{f(a)}(x)}, s_{f(a)}(y)e^{iv_{f(a)}(y)}\right\} \\
&= \min\left\{s_{f(a)}(x), s_{f(a)}(y)\right\} e^{i\min\left\{v_{f(a)}(x), v_{f(a)}(y)\right\}}
\end{aligned}$$

olup

$$\begin{aligned}
s_{f(a)}(xy) &\geq \min\left\{s_{f(a)}(x), s_{f(a)}(y)\right\} \\
&\geq \min\{\alpha, \alpha\} \\
&= \alpha
\end{aligned}$$

ve

$$
\begin{aligned}
v_{f(a)}(xy) &\geq \min\left\{v_{f(a)}(x), v_{f(a)}(y)\right\} \\
&\geq \min\{\beta, \beta\} \\
&= \beta \text{ dır.}
\end{aligned}
$$

Buradan $xy \in f(a)_{(\alpha,\beta)}$.

Diğer taraftan $s_{f(a)}\left(x^{-1}\right) e^{iv_{f(a)}x^{-1})} = \delta_{f(a)}\left(x^{-1}\right) \geq \delta_{f(a)}(x) = s_{f(a)}(x)e^{iv_{f(a)}(x)}$ olduğunu biliyoruz. Bu gösterir ki $s_{f(a)}\left(x^{-1}\right) \geq s_{f(a)}(x) \geq \alpha$ ve $v_{f(a)}\left(x^{-1}\right) \geq v_{f(a)}(x) \geq \beta$ dır. Dolayısıyla $x^{-1} \in f(a)_{(\alpha,\beta)}$ dır. Böylece $f(a)_{(\alpha,\beta)}$ G nin bir alt grubudur. Üstelik $(f, A)_{(\alpha,\beta)}$, G üzerinde bir esnek gruptur.

Tersine, her $a \in A$ $\alpha \in [0, 1]$ ve $\beta \in [0, 2\pi]$ için $(f, A)_{(\alpha,\beta)}$, G üzerinde bir esnek grup olsun. Farzedelim ki $x, y \in G$ ve $a \in A$ için $s_{f(a)}(x) = \lambda$, $s_{f(a)}(y) = \delta$, $v_{f(a)}(x) = \theta$ ve $v_{f(a)}(y) = \eta$ olsun. $\alpha = \min\{\lambda, \delta\}$ ve $\beta = \min\{\theta, \eta\}$ alınırsa $x, y \in f(a)_{(\alpha,\beta)}$ elde edilir. Buradan $f(a)_{(\alpha,\beta)}$ G nin alt grubudur. Dolayısıyla $xy^{-1} \in f(a)_{(\alpha,\beta)}$ dır.
Böylece,
$s_{f(a)}\left(xy^{-1}\right) \geq \alpha = \min\{\lambda, \delta\} = \min\left\{s_{f(a)}(x), s_{f(a)}(y)\right\}$ ve
$v_{f(a)}\left(xy^{-1}\right) \geq \beta = \min\{\theta, \eta\} = \min\left\{v_{f(a)}(x), v_{f(a)}(y)\right\}$ dır.
Üstelik $\delta_{f(a)}\left(xy^{-1}\right) \geq \min\left\{\delta_{f(a)}(x), \delta_{f(a)}(y)\right\}$ olup (f, A) G üzerinde bir karmaşık bulanık esnek gruptur.

Teorem 4.2.8 (f, A) ve (g, B) sırasıyla G ve H grupları üzerinde iki homojen karmaşık bulanık esnek grup ve (φ, ψ), G'den H'ye bir karmaşık bulanık esnek fonksiyon olsun. Bu takdirde

(i) $(\varphi, \psi)(f, A)$ H üzerinde bir karmaşık bulanık esnek gruptur.

(ii) $(\varphi, \psi)^{-1}(g, B)$ G üzerinde bir karmaşık bulanık esnek gruptur.

İspat. (i) (f, A) G üzerinde karmaşık bulanık esnek grup olsun. Bu takdirde her $a \in A$ için $s_{f(a)}(x)$ bir bulanık alt grup ve $v_{f(a)}(x)$ bir π-bulanık alt gruptur. Böylece her $x, y \in H$ için Teorem 2.0.1 ile $s_{f(a)}(x)$'in ve $v_{f(a)}(x)$'in görüntüleri sırasıyla bulanık alt grup ve π-bulanık alt gruptur.

$s_{\varphi(f)(a)}(xy) \geq \min\left\{s_{\varphi(f)(a)}(x), s_{\varphi(f)(a)}(y)\right\}$, $s_{\varphi(f)(a)}\left(x^{-1}\right) \geq s_{\varphi(f)(a)}(x)$,
$v_{\varphi(f)(a)}(xy) \geq \min\left\{v_{\varphi(f)(a)}(x), v_{\varphi(f)(a)}(y)\right\}$ ve $v_{\varphi(f)(a)}\left(x^{-1}\right) \geq v_{\varphi(f)(a)}(x)$

Şimdi Lemma 3.0.1 ile

$$
\begin{aligned}
&\delta_{\varphi(f)(a)}(xy) = s_{\varphi(f)(a)}(xy)e^{iv_{\varphi(f)(a)}(xy)} \\
&\geq \min\left\{s_{\phi(f)(a)}(x), s_{\phi(f)(a)}(y)\right\} e^{i\min\left\{v_{\phi(f)(a)}(x), v_{\phi(f)(a)}(y)\right\}} \\
&= \min\left\{s_{\phi(f)(a)}(x)e^{iv_{\phi(f)(a)}(x)}, s_{\phi(f)(a)}(y)e^{iv_{\phi(f)(a)}(y)}\right\} \\
&= \min\left\{\delta_{\phi(f)(a)}(x), \delta_{\phi(f)(a)}(y)\right\}
\end{aligned}
$$

Ayrıca,

$$
\begin{aligned}
\delta_{\varphi(f)(a)}\left(x^{-1}\right) &= s_{\varphi(f)(a)}\left(x^{-1}\right) e^{iv_{\varphi(f)(a)}\left(x^{-1}\right)} \\
&\geq s_{\varphi(f)(a)}(x)e^{iv_{\varphi(f)(a)}(x)} \\
&= \delta_{\varphi(f)(a)}(x)
\end{aligned}
$$

Buradan $(\varphi, \psi)(f, A)$ H üzerinde bir karmaşık bulanık esnek gruptur.

(ii) (g, B) H üzerinde karmaşık bulanık esnek grup olsun. Bu takdirde her $b \in B$ için $s_{g(b)}(x)$ bir bulanık alt grup ve $v_{g(b)}(x)$ bir π-bulanık alt gruptur. Böylece her $x, y \in G$ için Teorem 2.0.1 ile $s_{g(b)}(x)$'in ve $v_{g(b)}(x)$'in ters görüntüleri sırasıyla bulanık alt grup ve π-bulanık alt gruptur.

$$
s_{\varphi^{-1}(g)(b)}(xy) \geq \min\left\{s_{\varphi^{-1}(g)(b)}(x), s_{\varphi^{-1}(g)(b)}(y)\right\}, s_{\varphi^{-1}(g)(b)}\left(x^{-1}\right) \geq s_{\varphi^{-1}(g)(b)}(x)
$$

$$
v_{\varphi^{-1}(g)(b)}(xy) \geq \min\left\{v_{\varphi^{-1}(g)(b)}(x), v_{\varphi^{-1}(g)(b)}(y)\right\} \text{ ve } v_{\varphi^{-1}(g)(b)}\left(x^{-1}\right) \geq v_{\varphi^{-1}(g)(b)}(x)
$$

Şimdi Lemma 3.0.1 ile

$$
\begin{aligned}
\delta_{\varphi^{-1}(g)(b)}(xy) &= s_{\varphi^{-1}(g)(b)}(xy)e^{iv_{\varphi^{-1}(g)(b)}(xy)} \\
&\geq \min\left\{s_{\phi^{-1}(g)(b)}(x), s_{\phi^{-1}(g)(b)}(y)\right\} e^{i\min\left\{v_{\phi^{-1}(g)(b)}(x), v_{\phi^{-1}(g)(b)}(y)\right\}} \\
&= \min\left\{s_{\phi^{-1}(g)(b)}(x)e^{iv_{\phi^{-1}(g)(b)}(x)}, s_{\phi^{-1}(g)(b)}(y)e^{iv_{\phi^{-1}(g)(b)}(y)}\right\} \\
&= \min\left\{\delta_{\phi^{-1}(g)(b)}(x), \delta_{\phi^{-1}(g)(b)}(y)\right\}
\end{aligned}
$$

Ayrıca,

$$
\begin{aligned}
\delta_{\varphi^{-1}(g)(b)}\left(x^{-1}\right) &= s_{\varphi^{-1}(g)(b)}\left(x^{-1}\right) e^{iv_{\varphi^{-1}(g)(b)}(x^{-1})} \\
&\geq s_{\varphi^{-1}(g)(b)}(x)e^{iv_{\varphi^{-1}(g)(b)}(x)} \\
&= \delta_{\varphi^{-1}(g)(b)}(x)
\end{aligned}
$$

Buradan $(\varphi, \psi)^{-1}(g, B)$ G üzerinde bir karmaşık bulanık esnek gruptur.

Tanım 4.2.4 (f, A) ve (g, B) sırasıyla G ve H üzerinde karmaşık bulanık esnek gruplar olsun. $\varphi : G \to H$ ve $\psi : A \to B$ iki fonksiyon olmak üzere (φ, ψ) ye karmaşık bulanık esnek grup homomorfisi, (f, A) ya da (g, B) 'ye karmaşık bulanık esnek homomorfiktir denir. $\Leftrightarrow$

(i) $\varphi : G \to H$ bir grup homomorfisi

(ii) $\psi : A \to B$ bir dönüşüm

(iii) Her $x \in A$ için $\varphi(f(x)) = g(\psi(x))$ dır.

Bu durum $(\varphi, \psi) : (f, A) \to (g, B)$ şeklinde gösterilir.

Burada φ bir izomorfi ve $g : A \to B$ birebir, örten bir dönüşüm ise (φ, ψ) 'ya karmaşık bulanık esnek izomorfi ve (f, A)'ya da (g, B) 'ye karmaşık bulanık izomorftur denir.

Teorem 4.2.9 (g, A), (h, B), (k, C) sırasıyla G, H ve K grupları üzerinde karmaşık bulanık esnek gruplar olsun. Eğer $(\varphi, \psi) : (g, A) \to (h, B)$ ve $(\phi, \gamma) : (h, B) \to (k, C)$ karmaşık bulanık esnek grup homomorfileri ise $(\phi \circ \varphi, \gamma \circ \psi) : (g, A) \to (k, C)$ karmaşık bulanık esnek grup homomorfisidir.

İspat. Her $x \in A$ ve her $y \in B$ için $\varphi(g(x)) = h(\psi(x))$ ve $\phi(h(y)) = k(\gamma(y))$ dir. Ayrıca $\phi \circ \varphi : G \to K$ ve $(\gamma, \psi) : A \to C$ olmak üzere her $x \in A$ için $(\phi \circ \varphi)(g(x)) = \phi(\varphi(g(x)) = k(\gamma(\psi(x))) = k((\gamma \circ \psi)(x))$ olur. Buradan $(\phi \circ \varphi, \gamma \circ \psi) : (g, A) \to (k, C)$ dir. Ayrıca $\varphi : G \to H$ ve $\phi : H \to K$ grup homomorfisi olduklarından $\phi \circ \varphi : G \to K$ grup homomorfisidir. Buradan $(\phi \circ \varphi, \gamma \circ \psi) : (g, A) \to (k, C)$ karmaşık bulanık esnek grup homomorfisidir.

Teorem 4.2.10 (g, A) ve (h, B) sırasıyla G ve K üzerinde karmaşık bulanık esnek kümeler, (g, A) G üzerinde karmaşık bulanık esnek grup olsun. Eğer (g, A), (h, B) ye karmaşık bulanık esnek izomorf ise (h, B) de K üzerinde karmaşık bulanık esnek gruptur.

İspat. (g, A), (h, B) ye karmaşık bulanık izomorf olduğundan Tanım 4.2.4 ile $\varphi : G \to K$ grup izomorfisi ve $\psi : A \to B$ bire-bir örten dönüşümleri her $x \in A$ ve $y \in B$ için $\varphi(g(x)) = h(\psi(x)) = h(y)$ olacak şekilde mevcuttur. Teorem 4.2.8 ile $\varphi(g(x))$ K nın karmaşık bulanık alt grubudur ve bundan dolayı $h(y)$ K nın karmaşık bulanık alt grubudur. Buradan (h, B) K üzerinde karmaşık bulanık esnek gruptur.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında karmaşık bulanık alt grup ve normal karmaşık bulanık alt grup yapıları verilerek, bu yapılara ait bazı temel özellikler sunulmuştur. Karmaşık bulanık esnek kümeler üzerinde yeni ikili işlemler verilerek, bu işlemlere ait bazı özellikler incelenmiştir. Ayrıca karmaşık bulanık esnek grup yapısı ele alınmış, temel özellikleri araştırılmış ve elde edilen sonuçlar değerlendirilmiştir. Üstelik karmaşık bulanık esnek kümeler üzerindeki ikili işlemlerin, karmaşık bulanık esnek gruplar üzerindeki etkileri araştırılmıştır.

Bu sonuçlar ışığında karmaşık bulanık esnek kümeler daha farklı cebirsel yapılar ile birlikte yeniden ele alınıp, oluşturulan yeni yapılara ait özellikler incelenebilir. Bu sayede belirsizlik içeren problemlere teorik anlamında yeni yaklaşımlar sağlanabilir.

KAYNAKLAR

[1] Akgül, M. (1988). Some properties of fuzzy groups. *J. Math. Anal. Appl.*, 133(1), 93–100.

[2] Al-Husban, A., Salleh, A.R. & Hassan, N. (2015). Complex fuzzy normal subgroup. *AIP Conference Proceedings*, doi:10.1063/1.4931335.

[3] Al-Husban, A. & Salleh, A.R. (2016). Complex fuzzy group based on complex fuzzy space. *Global Journal of Pure and Applied Mathematics*, 12(2), 1433–1450.

[4] Al-Husban, A. & Salleh, A.R. (2016). Complex fuzzy hypergroups based on complex fuzzy spaces. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 107, 949–958.

[5] Alkouri, A.U.M. & Salleh, A.R. (2014). Linguistic variable, hedges and several distances on complex fuzzy sets. *Journal of Intelligent and Fuzzy Systems*, 26(5), 2527–2535.

[6] Alsarahead, M.O. & Ahmad, A.G. (2017). Complex fuzzy subgroups. *Applied Mathematical Sciences*, 11(41), 2011–2021.

[7] Alsarahead, M.O. & Ahmad, A.G. (2017). Complex fuzzy soft groups. *Journal of Quality Measurement and Analysis*, 13(2), 17–28.

[8] Alsarahead, M.O. & Al-Husban, A. (2022). Complex multi-fuzzy subgroups. *Journal of Discrete Mathematical Sciences and Cryptography*, 25(8), 2707–2716.

[9] Anthony, J.M. & Sherwood, H. (1979). Fuzzy groups redefined. *J. Math. Anal. Appl.*, 69, 124–130.

[10] Anthony, J.M. & Sherwood, H. (1982). A characterization of fuzzy subgroups. *Fuzzy Sets and Systems*, 7, 297–305.

[11] Aygünoğlu, A. & Aygün, H. (2009). Introduction of fuzzy soft groups. *Comput. Math. with Appl.*, 58, 1279–1286.

[12] Bhattacharya, P.B. & Jain S.K. (1972). First Course in Group Theory, New Delhi.

[13] Birkhoff, G. (1967). Lattice Theory, American Mathematical society, Providence, Rhode Island.

[14] Buckley, J.J. (1989). Fuzzy complex numbers. *Fuzzy Sets and System*, 33, 333–345.

[15] Chen, Z., Aghakhani, S., Man, J. & Dick, S. (2011). ANCFIS: a neurofuzzy architecture employing complex fuzzy sets. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 9(2), 305–322.

[16] Çelik, Y. (2015). A new approach to group theory via soft sets and L-fuzzy soft sets. *Internation Journal of Pure And Apllied Mathematics*, 105(3), 459–475.

[17] Fu, X. & Shen Q. (2011). Fuzzy complex numbers and their application for classifiers performance evaluation. *Pattern Recognition*, 44(7), 1403–1417.

[18] Kaufmann, A. (1975). Introduction to the Theory of Fuzyy Subsets, Volume 1, Acedemic Press, London.

[19] Maji, P.K., Biswas, R. & Roy, A.R. (2001). Fuzzy soft sets. *The Journal of Fuzzy Mathematics*, 9, 589–602.

[20] Mashour, A.S., Ghanim, H. & Sidky, F.I. (1990). Normal fuzzy subgroups. *Information Sciens*, 20, 53–59.

[21] Molodtsov, D. (1999). Soft set theory-first results. *Comput. Math. Appl.*, 37, 19–31.

[22] Mordeson, J.N. & Malik, D.S. (1998). Fuzzy Commutative Algebra, World Scientific Publishing Co., Singapore.

[23] Mukherjee, N. & Bhattacharya, P. (1984). Fuzzy normal subgroups and fuzzy cosets. *Information Sciens*, 34(3), 225–239.

[24] Nadia, A. (2010). Complex fuzzy soft set. *MSc Research Project, Universiti Kebangsaan Malaysia*, 84, 264–269.

[25] Nagarajan, R., Saleem Abdullah, S. & Balamurugan, K. (2016). Brief discussions on T-level complex fuzzy subgroup. *IJAR*, 2, 957–964.

[26] Ramot, D., Milo, R., Friedman, M. & Kandel, A. (2002). Complex fuzzy sets. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 10(2), 171–186.

[27] Rasuli, R. (2023). T-norms over complex fuzzy subgroups. *Mathematical Analysis and its contemporary applications*, 5(1), 33–49.

[28] Rosenfeld, A. (1971). Fuzzy groups. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 35(3), 512–517.

[29] Sherwood, H. (1983). Product of fuzzy subgroups. *Fuzzy Sets and Systems*, 11, 79–89.

[30] Tamir, D.E. & Kandel, A. (2011). Axiomatic theory of complex fuzzy logic and complex fuzzy classes. *International Journal of Computers Communications and Control*, 6(3), 562–576.

[31] Tamir, D.E., Rishe, N.D & Kandel, A. (2015). Complex fuzzy sets and complex fuzzy logic an overview of theory and applications. *Fifty Years of Fuzzy Logic and its Applications*, 26, 661–681.

[32] Yao, B.-X. (2001). Fuzzy homomorphism of groups and isomorphism theorems of fuzzy quotient groups. *Fuzzy Systems and Mathematics*, 15(3), 5–9.

[33] Zadeh, L.A. (1965). Fuzzy sets. *Information and Control*, 8(3), 338–353.

[34] Zhang, G. (1992). Fuzzy limit theory of fuzzy complex numbers. *Fuzzy Sets and Systems*, 46, 227–235.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler	
Adı Soyadı	Gökhan YÜCE
Doğum Yeri	
Doğum Tarihi	
Uyruğu	■ T.C. ❒ Diğer:
Telefon	
E-Posta Adresi	

Eğitim Bilgileri	
Lisans	
Üniversite	Karadeniz Teknik Üniversitesi
Fakülte	Fen Edebiyat Fakültesi
Bölümü	Matematik Bölümü
Mezuniyet Yılı	2008
Yüksek Lisans	
Üniversite	Karadeniz Teknik Üniversitesi
Enstitü Adı	Fen Bilimleri Enstitüsü
Programı	Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanlar Eğitimi (Tezsiz)
Mezuniyet Yılı	2010