T. C.

ORDU ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GOLDBERG SNARKLARDA BAĞLANTILILIK VE YAPI BAĞLANTILILIK

FEYZA ÇELİK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ORDU 2024

TEZ BİLDİRİMİ

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan ve kullanılan intihal tespit programının sonuçlarına göre; bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

Feyza ÇELİK

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

GOLDBERG SNARKLARDA BAĞLANTILILIK VE YAPI BAĞLANTILILIK

FEYZA ÇELİK

ORDU ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ, 76 SAYFA

(TEZ DANIŞMANI: DOÇ. DR. CANAN ÇİFTÇİ)

(İKİNCİ TEZ DANIŞMANI: DOÇ. DR. FATİH SAY)

Bir ağ basit bağlantılı bir çizge olarak modellenmektedir. Ağ güvenirliği ve hataya dayanıklılık bir ağın performansını değerlendirmek için önemli ölçütlerdir. Ağın performans göstergelerinden biri bağlantılılık parametresidir. Ancak bu parametre, yalnızca tek bir tepenin hatasını dikkate alır ve tepenin tüm komşularının aynı anda arızalanacağını kabul eder. Bu nedenle, bir ağın yapı hatasını göz ardı eder. Bu eksikliklerden dolayı, süper bağlantılılık, yapı bağlantılılık ve altyapı bağlantılılık gibi çeşitli bağlantılılık parametreleri tanımlanmıştır.

Bir çizgeden silindiğinde çizgeyi bağlantısız ya da tek bir izole tepeye izomorf hale getiren minimum tepe sayısı (sırasıyla ayrıt sayısı) bağlantılılık (sırasıyla ayrıt bağlantılılık) sayısına karşılık gelirken, çizgeyi izole tepe içermeyen bağlantısız bir çizge haline getiren minimum tepe sayısı (sırasıyla ayrıt sayısı) ise süper bağlantılılık (sırasıyla süper ayrıt bağlantılılık) sayısına karşılık gelir.

G bağlantılı bir çizge ve H çizgesi G çizgesinin bir altçizgesi olsun. G çizgesinin $H-$ yapı bağlantılılığı (sırasıyla $H-$altyapı bağlantılılığı) G çizgesinden her bir elemanı H ile (sırasıyla H çizgesinin bağlantılı bir altçizgesi ile) izomorf olan altçizgelerin kümesinin tepeleri silindiğinde çizgeyi bağlantısız yapan minimum eleman sayısıdır.

Bu tez çalışmasında, kübik bir çizge olan Goldberg snark üzerinde bağlantılılık, ayrıt bağlantılılık, süper bağlantılılık, süper ayrıt bağlantılılık, yapı bağlantılılık ve altyapı bağlantılılık parametreleri incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Çizge Teorisi, Bağlantılılık, Süper Bağlantılılık, Yapı Bağlantılılık, Altyapı Bağlantılılık, Goldberg Snark

ABSTRACT

CONNECTIVITY AND STRUCTURE CONNECTIVITY

IN GOLDBERG SNARK

FEYZA ÇELİK

ORDU UNIVERSITY INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

MATHEMATICS

MASTER THESIS, 76 PAGES

SUPERVISOR: ASSOC. PROF. CANAN ÇİFTÇİ

CO-SUPERVISOR: ASSOC. PROF. FATİH SAY

A network is modeled as a simple connected graph. The reliability and fault tolerance of a network are important indicators for evaluating its performance. One of performance indicators of a network is the connectivity parameter. However, this parameter only considers the failure of a single vertex and assumes that all its neighbors fail simultaneously. Therefore, it ignores structural faults of a network. Due to these shortcomings, various connectivity parameters such as super connectivity, structure-connectivity, and substructure-connectivity have been defined.

The connectivity (respectively, edge connectivity) is the minimum number of vertices (respectively, edges) to delete to make the graph disconnected or isomorphic to a single isolated vertex. The super connectivity (respectively, super edge connectivity) is the minimum number of vertices (respectively, edges) to delete to make the graph disconnected without isolated vertices.

Let G be a connected graph and H be a subgraph of G. The $H-$structure connectivity (respectively, $H-$substructure connectivity) of G is the minimum cardinality of a set of connected subgraphs in G, whose removal disconnects G and each element in the set is isomorphic to H (respectively, a connected subgraph of H).

In this thesis, connectivity, edge connectivity, super connectivity, super edge connectivity, structure connectivity and substructure connectivity parameters are examined on the Goldberg snark, which is a cubic graph. connectivity.

Keywords: Graph Theory, Connectivity, Super Connectivity, Structure Connectivity, Substructure Connectivity, Goldberg Snark

TEŞEKKÜR

Çalışmamda bana yön gösteren, destek ve emeklerini esirgemeyen, öğrencisi olmaktan her zaman gurur duyacağım danışman hocam Doç. Dr. Canan Çiftçi' ye ve tez çalışmam esnasında yardımlarından dolayı ikinci danışman hocam Doç. Dr. Fatih Say' a teşekkür ederim.

Lisans ve yüksek lisans eğitimim boyunca bilgileriyle ışık tutan, yönlendirmeleriyle bana akademik yolda yürüme şevki kazandıran Ordu Üniversitesi Matematik Bölümündeki tüm hocalarıma sonsuz teşekkür ederim.

Yüksek lisans eğitimi boyunca 2210 Yurtiçi Yüksek Lisans Burs Programı kapsamında verdiği destekten dolayı TÜBİTAK Bilim İnsanı Destek Programları Başkanlığı'na (BİDEB) teşekkür ederim.

Hayatım boyunca beni destekleyen, haklarını asla ödeyemeyeceğim annem, babam ve kardeşime teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

ŞEKİL LİSTESİ

SİMGELER ve KISALTMALAR LİSTESİ

$\boldsymbol{B_i}$	:	G_n çizgesinde bir blok
$\boldsymbol{C_n}$	:	n tepeli çevre çizge
$\boldsymbol{deg_G(v)}$	:	G çizgesinde v tepesinin derecesi
$\boldsymbol{deg_G(e)}$	:	G çizgesinde e ayrıtının derecesi
$\boldsymbol{E(G)}$	:	G çizgesinin ayrıtlar kümesi
$\boldsymbol{E_{ij}}$	:	B_i bloğu ile B_j bloğunu bağlayan ayrıtlar kümesi
$\boldsymbol{G-H}$	:	$V(G)-V(H)$ tepeleri tarafından etkilenmiş altçizge
$\boldsymbol{G[S]}$	:	G çizgesinin S tepeler kümesi tarafından etkilenmiş altçizgesi
$\boldsymbol{G_n}$	:	Goldberg snark
$\boldsymbol{K_n}$	:	n tepeli tam çizge
$\boldsymbol{K_{1,n}}$	:	$n+1$ tepeli yıldız çizge
$\boldsymbol{\kappa(G)}$	:	G çizgesinin bağlantılılık değeri
$\boldsymbol{\lambda(G)}$	:	G çizgesinin ayrıt bağlantılılık değeri
$\boldsymbol{\kappa(G;H)}$	:	G çizgesinin H-yapı bağlantılılık değeri
$\boldsymbol{\kappa'(G)}$	:	G çizgesinin süper bağlantılılık değeri
$\boldsymbol{\lambda'(G)}$	:	G çizgesinin süper ayrıt bağlantılılık değeri
$\boldsymbol{\kappa^s(G;H)}$	:	G çizgesinin H- altyapı bağlantılılık değeri
$\boldsymbol{N_G(v)}$	:	v tepesinin G çizgesindeki komşuluğu
$\boldsymbol{N_G(S)}$	:	S tepeler kümesinin açık komşuluğu
$\boldsymbol{P_n}$	:	n tepeli yol çizge
$\boldsymbol{U}$	:	G_n çizgesinin u_i tepelerinin oluşturduğu küme
$\boldsymbol{V(G)}$	:	G çizgesinin tepeler kümesi
$\boldsymbol{V}$	:	G_n çizgesinin v_i tepelerinin oluşturduğu küme
$\boldsymbol{X}$	:	G_n çizgesinin x_i tepelerinin oluşturduğu küme
$\boldsymbol{Y}$	:	G_n çizgesinin y_i tepelerinin oluşturduğu küme
$\boldsymbol{Z}$	:	G_n çizgesinin z_i tepelerinin oluşturduğu küme
$\boldsymbol{\lvert S\rvert}$	:	S kümesinin eleman sayısı
$\boldsymbol{(u,v)}$	:	u ve v tepelerini birleştiren ayrıt
$\boldsymbol{\delta(G)}$	:	G çizgesinin minimum tepe derecesi
$\boldsymbol{\xi(G)}$	:	G çizgesinin minimum ayrıt derecesi
$\cong$	:	İki çizge arasındaki izomorfizma

1. GİRİŞ

Bir ağ merkezleri çizgenin tepelerine, merkezler arasındaki ilişkileri de çizgenin ayrıtlarına karşılık gelecek şekilde basit bağlantılı bir çizge olarak modellenmektedir. Bir ağdaki temel problemlerden biri, veri akışının devamlılığının sağlanmasıdır. Diğer bir deyişle, ağın merkezlerinde ya da merkezler arasındaki bağlantılarda meydana gelebilecek olası hasarlardan sonra geriye kalan ağda herhangi iki merkez arasında iletişimin devam edip etmeyeceği oldukça önemlidir. Ağın güvenirliği ve hataya dayanıklılık bir ağın performansını değerlendirmek için önemli ölçütlerdir. Bu ve benzeri problemlerin incelenmesi için çizgeler üzerinde bağlantılılık kavramı ortaya atılmış, zaman içinde çeşitli versiyonları da incelenmiştir. Fakat bu parametre herhangi bir tepenin bütün komşularının aynı anda arızalanacağını kabul etmektedir, bu nedenle bu parametre birçok eksikliğe sahiptir. Bu dezavantajı telafi etmek için, 1983 yılında Harary (Harary, 1983), kalan her bağlantılı bileşenin, arızalı tepelerin silinmesinden sonra belirli bir özelliğe sahip olduğu koşullu bağlantılılık kavramını önermiştir. G bağlantılı bir çizge ve P özelliği, çizgeler üzerinde tanımlı bir özellik olmak üzere, koşullu bağlantılılık sayısı G çizgesinden silindiğinde kalan her bir bileşen P özelliğine sahip olacak şekilde geriye kalan çizgeyi bağlantısız yapan minimum tepe sayısı olarak tanımlanmıştır ve $\kappa(G; P)$ ile gösterilir. Bu tanımla, hasardan sonra geriye kalan ağın her bir bileşeninin sahip olması gereken koşullar altında araştırmalar yapılmaya başlanmıştır. Koşullu bağlantılılık parametrelerinden biri Fàbrega ve Fiol tarafından önerilen g–ekstra bağlantılılıktır (Fàbrega & Fiol, 1996). Bir G çizgesini bağlantısız hale getiren ve geriye kalan her bileşenin en az $g + 1$ tepeye sahip olduğu bir tepe kesim kümesinin minimum eleman sayısı g–ekstra bağlantılılık sayısıdır. Tanımdan 0-ekstra bağlantılılık klasik bağlantılılığa, 1-ekstra bağlantılılık ise süper bağlantılılığa karşılık gelmektedir. Bağlantılılık ve süper bağlantılılık çeşitli çizge sınıfı üzerinde çalışılmıştır (L. Lin, Xu, Zhou, & Hsieh, 2015; L. Guo, Su, Lin, & Chen, 2018; Ekinci & Gauci, 2019a; Ekinci, 2022; Ekinci & Gauci, 2019b; Ghasemi, 2021).

Ancak, yukarıda bahsedilen bağlantılılık parametreleri sadece tek bir tepe arızasının ağ üzerindeki etkisini göz önünde bulundurup o tepenin çevresindeki tepelerin etkilerini ihmal ettiklerinden dolayı hala dezavantajlıdır. Ayrıca, büyük ölçekli ağlar ve alt ağların giderek daha fazla çipler üzerine inşa edilmesiyle birlikte, çip üzerindeki herhangi bir tepenin arızalanması tüm çipin arızalı kabul edilebileceği anlamına gelmektedir. Bu nedenle, yapısal arızaların dikkate alınması giderek daha mümkün hale gelmektedir. Ağ hata toleransı parametrelerini optimize etmek için Lin ve arkadaşları (C.-K. Lin, Zhang, Fan, & Wang, 2016), tek bir tepe arızasının etkilerine odaklanmak yerine belirli yapıların arızalarının etkilerine dikkat eden yapı bağlantılılık ve altyapı bağlantılılık kavramlarını ortaya atmışlardır.

G çizgesi $V(G)$ tepeler kümesi ve $E(G)$ ayrıtlar kümesine sahip yönsüz basit çizge olsun. Eğer $V(G)$ kümesindeki her tepe çifti arasında bir yol bulunuyorsa G çizgesine bağlantılı çizge; aksi halde bağlantısız çizge denir. $V(G)$ tepeler kümesindeki u ve v tepeleri için eğer $(u, v) \in E(G)$ ise u ve v tepelerine komşu tepeler denir. G çizgesindeki bir v tepesinin açık komşuluğu $V(G)$ tepeler kümesinde v tepesine komşu olan tüm tepelerin oluşturduğu kümedir ve $N_G(v)$ ile gösterilir. Benzer şekilde, S kümesi $V(G)$ kümesinin bir alt kümesi olmak üzere S kümesinin açık komşuluğu $N_G(S)$ ile gösterilir ve $N_G(S) = (\cup_{v \in S} N_G(v)) - S$ olarak tanımlanır. Bir G çizgesinde bir v tepesinin derecesi v tepesine komşu olan tepelerin sayısıdır ve $deg_G(v)$ ile gösterilir. Bir G çizgesinin minimum tepe derecesi $\delta(G)$ ile gösterilir. Bir G çizgesinde derecesi sıfır olan tepeye izole tepe denir. Eğer her $v \in V(G)$ tepesi için $deg_G(v) = r$ ise G çizgesine r-regüler çizge denir. Bir $e = (u, v) \in E(G)$ ayrıtının derecesi $deg_G(e)$ ile gösterilir ve $deg_G(e) = deg_G(u) + deg_G(v) - 2$ eşitliği ile verilir. Bir G çizgesindeki minimum ayrıt derecesi $\xi(G)$ ile gösterilir ve $\xi(G) = \min\{deg_G(e) : e \in E(G)\}$ sağlanır.

Bir G çizgesinin H altçizgesi için $V(H) \subseteq V(G)$ ve $E(H) \subseteq E(G)$ sağlanır. S kümesi $V(G)$ tepeler kümesinin bir alt kümesi olmak üzere S kümesi tarafından etkilenmiş altçizge tepeler kümesi S ve ayrıtlar kümesi ise S kümesindeki tepelere bağlı olan ayrıtlardan oluşan bir altçizgedir ve $G[S]$ ile gösterilir.

İki G ve H çizgesi için $(u, v) \in E(G) \Leftrightarrow (f(u), f(v)) \in E(G)$ koşulunu sağlayan birebir ve örten bir $f : V(G) \rightarrow V(H)$ fonksiyonu var ise G çizgesi H çizgesine izomorftur denir ve $G \cong H$ ile gösterilir.

$n \geq 2$ olmak üzere $P_n = (v_1, v_2, ..., v_n)$ yolu her $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$

için $(v_i, v_{i+1}) \in E(G)$ koşulunu sağlayan yani ardışık her iki tepesi komşu olan birbirinden farklı $v_1, v_2, ..., v_n$ tepe dizisinden oluşmaktadır ve n tepeli yol çizge P_n olarak adlandırılır. n tepeli çevre çizge C_n ise $P_n = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ yolunun başlangıç tepesi v_1 ile bitiş tepesi olan v_n tepesi komşu olan çizgedir. $n + 1$ tepeli yıldız çizge, n tane 1 dereceli tepesi ve 1 dereceli tüm tepelere komşu olan bir merkez tepesi olan çizgedir ve $K_{1,n}$ ile gösterilir.

Bir G çizgesinin her tepe çifti arasında daima bir yol varsa, G çizgesine bağlantılı çizge; aksi halde bağlantısız çizge denir. G çizgesinin maksimal bağlantılı altçizgesi bileşen olarak adlandırılır. Bu nedenle, bağlantısız bir çizge en az iki bileşene sahiptir. Eğer bir bileşen ya da çizge ayrıta sahip değilse boş çizge olarak adlandırılır.

Bir G çizgesinin kesim tepesi çizgeden silindiğinde çizgeyi bağlantısız yapan bir tepedir. $S \subseteq V(G)$ olsun. Bir G çizgesinden S kümesindeki tepeler silindiğinde geriye kalan $G - S$ çizgesi bağlantısız ya da tek bir izole tepe içeriyor ise S kümesine kesim-küme denir. Eğer $G - S$ çizgesi bağlantısız ve her bileşeni en az iki tepe içeriyor ise S kümesine süper-kesim küme denir. G çizgesinin minimum elemanlı bir kesim kümesinin eleman sayısı G çizgesinin bağlantılılık sayısını verir ve $\kappa(G)$ ile gösterilir (Boesch, 1986). Eğer $\kappa(G) = \delta(G)$ ise, G çizgesi maksimal bağlantılıdır denir. Benzer şekilde, G çizgesinin minimum elemanlı bir süper kesim kümesinin eleman sayısı G çizgesinin süper bağlantılılık sayısını verir ve $\kappa'(G)$ ile gösterilir. Bir minimum süper kesim küme aynı zamanda bir kesim küme olduğundan

$$\kappa(G) \leq \kappa'(G)$$

eşitsizliği mevcuttur.

Bağlantılı bir G çizgesinin her S kesim kümesi $G - S$ çizgesinde izole tepe bırakırsa G çizgesine süper bağlantılı ya da kısaca süper-κ çizge denir. Buradan G çizgesinin süper bağlantılı bir çizge ise $\kappa'(G) > \kappa(G)$, aksi halde $\kappa'(G) = \kappa(G)$ olduğu açıktır.

$T \subseteq E(G)$ olmak üzere $G - T$ çizgesi bağlantısız ise T kümesine ayrıt kesim-küme denir. Bir G çizgesinin minimum elemanlı ayrıt kesim kümesinin eleman sayısı G çizgesinin ayrıt bağlantılılık sayısını verir ve $\lambda(G)$ ile gösterilir. Bir G

çizgesinin bağlantılılık, ayrıt bağlantılılık ve minimum tepe derecesi arasındaki ilişki

$$\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$$

ile verilmiştir (Whitney, 1992). Eğer $\lambda(G) = \delta(G)$ ise, G çizgesi maksimal ayrıt bağlantılıdır denir. Eğer $G - T$ çizgesi bağlantısız ve her bileşeni en az iki tepe içeriyor ise T kümesine süper ayrıt kesim küme denir. G çizgesinin minimum elemanlı bir süper ayrıt kesim kümesinin eleman sayısı G çizgesinin süper ayrıt bağlantılılık sayısını verir ve $\lambda'(G)$ ile gösterilir. Bir minimum süper ayrıt kesim küme aynı zamanda bir süper kesim küme olduğundan

$$\lambda(G) \leq \lambda'(G)$$

eşitsizliği mevcuttur.

2010 yılında Zhou ve Feng (J.-X. Zhou & Feng, 2010) minimum 3 dereceye sahip süper bağlantılı fakat süper ayrıt bağlantılı olmayan tek çizgenin 6 tepeli Ladder çizge olduğunu ispatlamıştır. Bu nedenle, G_n çizgesi süper ayrıt bağlantılıdır. Yani, $\lambda'(G_n) > \lambda(G_n)$ olur.

Bir G çizgesinin bağlantılılık, ayrıt bağlantılılık ve minimum tepe derecesi arasındaki ilişki 1988 yılında Esfahanian ve Hakimi tarafından aşağıdaki teorem ile verilmiştir.

Teorem 1.0.1 (Esfahanian & Hakimi, 1988) G çizgesi en az 4 tepeli bağlantılı ve yıldız çizgeye izomorf olmayan bir çizge ise

$$\lambda(G) \leq \lambda'(G) \leq \xi(G)$$

eşitsizliği sağlanır.

Bu tezde kübik bir çizge olan Goldberg snark çizgesinin bağlantılılık, süper bağlantılılık ve yapı bağlantılılık parametreleri ele alınarak incelenmiştir. Bölüm 2' de Bölüm 2'de yapı ve altyapı bağlantılılık kavramları ile ilgili temel tanım ve teoremler verilmiştir. Bölüm 3'te snarkların önemi, Goldberg snark tanımı ve özelliklerinden bahsedilmiştir. Bölüm 4' te ise tez boyunca elde edilen sonuçlara yer verilmiştir.

2. YAPI BAĞLANTILILIK

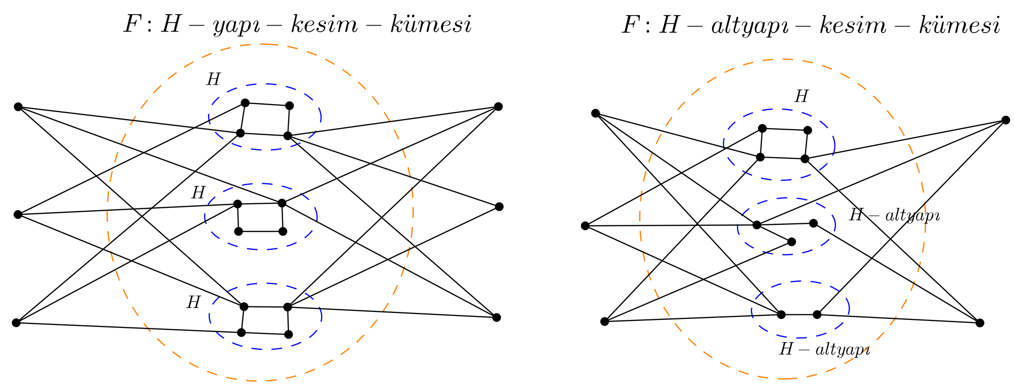
H çizgesi, G çizgesinin bir altçizgesi olmak üzere $G - H$ çizgesi G çizgesinin $V(G) - V(H)$ tepeleri tarafından etkilenmiş bir altçizgesidir. Her F_i çizgesi G çizgesinin bağlantılı bir altçizgesine izomorf olacak şekilde $F = \{F_1, \ldots, F_n\}$ olsun. $G - F$ çizgesi G çizgesinin $V(G) - V(F_1) - \ldots - V(F_n)$ tepeleri tarafından etkilenmiş bir altçizgesidir.

F kümesi G çizgesinin bağlantılı altçizgelerinin bir kümesi olsun. Eğer $G - F$ bağlantısız bir çizge ya da tek bir izole tepeye izomorf olan bir çizge ise F kümesine G çizgesinin altçizge kesim–kümesi denir.

H çizgesi G çizgesinin bağlantılı bir altçizgesi olsun. Eğer F kümesi bir altçizge kesim–kümesi ve F kümesinin her elamanı H çizgesine izomorf ise F kümesine H-yapı kesim-küme denir. Minimum elemanlı bir H-yapı-kesim kümenin eleman sayısı G çizgesinin H-yapı bağlantılılık sayısını verir ve $\kappa(G; H)$ ile gösterilir.

Eğer F kümesi bir altçizge kesim–kümesi ve F kümesinin her elamanı Hçizgesinin bağlantılı bir altçizgesine izomorf ise F kümesine H-altyapı kesim-küme denir. Minimum elemanlı bir H-altyapı-kesim kümenin eleman sayısı G çizgesinin H-altyapı bağlantılılık sayısını verir ve $\kappa^s(G; H)$ ile gösterilir.

Tanımlardan, $\kappa(G; H) \geq \kappa^s(G; H)$ olduğu ve K_1-yapı bağlantılılığın klasik bağlantılılığa karşılık geldiği açıktır. Ayrıca, H-yapı-kesim ya da H-altyapı-kesim kümesindeki altçizgeler ayrık olmak zorunda değildir. Şekil 2.1 ile H altçizgesi C_4 olmak üzere H-yapı-kesim ve H-altyapı-kesim küme örneğine yer verilmiştir.



Şekil 2.1 H-yapı-kesim küme ve H-altyapı-kesim küme

Çizgedeki bir tepe hatalı tepeler kümesinde değilse hatasız tepe denir. Eğer bir (u, v) ayrıtının iki uç tepesi de hatasız ise bu ayrıta hatasız ayrıt denir.

Yol, çevre ve yıldız çizgeler tüm ağlarda var olan üç ortak yapıdır. Son zamanlarda, yapı bağlantılılık üzerine yapılan araştırmaların çoğu bu üç yapıya dayanmaktadır. Yapı ve altyapı bağlantılılık üzerine çalışılan bazı ağ yapıları: Hiperküp Q_n (C.-K. Lin et al., 2016), katlı küp FQ_n (Sabir & Meng, 2018), k-ary-n-küp Q_n^k (Lv, Fan, Hsu, & Lin, 2018), (n, k)-star $S_{n,k}$ (C. Li, Lin, & Li, 2018), kabarcık sıralama yıldız çizge BS_n (Zhang & Wang, 2019), bükülmüş çizge (D. Li, Hu, & Liu, 2019), çapraz küp CQ_n (Pan & Cheng, 2020), yıldız çizge S_n (C. Li, Lin, & Li, 2020), hiperküp-benzeri ağlar HL (C.-K. Lin, Cheng, & Lipták, 2020), düzenleme çizgesi $A_{n,k}$ (Lei & Meng, 2020), alternatif grup çizgesi AG_n (X. Li, Zhou, Ren, & Guo, 2021), divide-and-swap küp (Q. Zhou, Zhou, Liu, & Liu, 2021), katlı divide-and-swap küp (Türkmen, Çiftçi, & Ekinci, 2023), Hiyerarşik katlı küp (H. Guo, Hao, Chang, & Kwon, 2024), yarım küp (Yang & Zhou, 2024), çift küp (Yang, Zhou, & Zhang, 2024), değiştirilmiş hiperküp (Liu & Cheng, 2024).

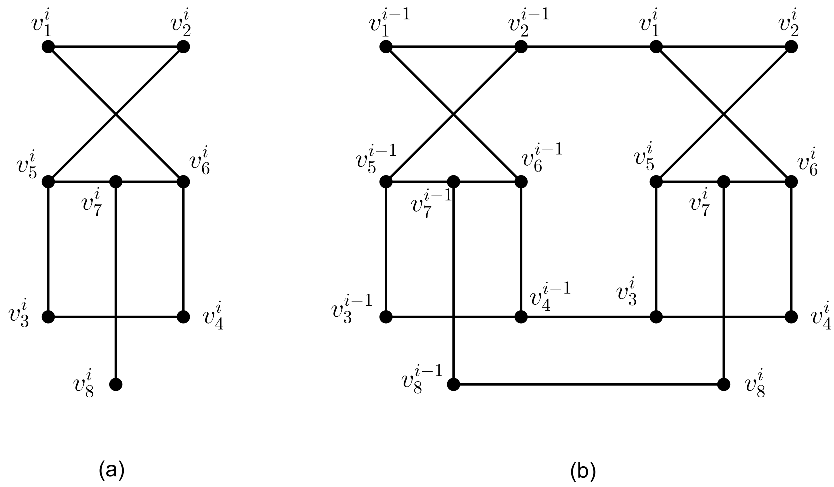
3. GOLDBERG SNARK

Bağlantılı bir çizgeden silindiğinde çizgeyi bağlantısız yapan tek bir ayrıta köprü denir. Snark, kromatik indeksi 4 olan yani ayrıtları üç renkle boyanmayan basit bağlantılı köprü içermeyen kübik bir çizgedir. 1880 yılında Tait (Tait, 1880), Dört Renk varsayımının her düzlemsel köprü içermeyen kübik çizgenin kromatik indeksinin 3 olduğu ifadesine eşdeğer olduğunu kanıtlamıştır. Bu eşdeğerlik ve dört renk varsayımına karşıt örnek arayışı, snarkların tarihi önemini ve kromatik indeksi 4 olan kübik çizgelerin çalışılmasını motive etmiştir. Martin Gardner (Gardner, 1976), Lewis Carroll'un *The Hunting of Snark* adlı şiirinden yola çıkarak bu tür çizgeleri bulmanın zor olduğunu ifade etmek için ayrıtları üç renkle boyanmayan kübik çizgilere snark adını vermiştir. Bu çizgelerin önemi, snarkların iyi bilinen Tutte'nin 5-Akış Varsayımı (Tutte, 1954), 1-Faktörlü Çift Kapak Varsayımı ve Döngü Çift Kapak Varsayımı gibi bazı varsayımların minimal karşıt örnekleri (Celmins, 1979) olduğundan da kaynaklanmaktadır.

İlk ve en küçük snark 1898 yılında Pertersen (Holton & Sheehan, 1993) tarafından keşfedilen, çizge teorisinde çeşitli çizge özellikleri için örnek ve karşı örnek olarak yaygın olarak kullanılan Petersen çizgesidir. Yeni snarkların keşfinde önemli bir atılım, sonsuz snark ailesi elde etmek için ilk yöntemi sunan Isaacs tarafından yapılmıştır. Bu yöntem ile çiçek snark ve Blanusa-Descartes-Szekeres snark aileleri (Isaacs, 1975) tanımlanmıştır. Isaacs'ın çalışmasını takiben, sonsuz snark aileleri üretmek için yeni yöntemler geliştirilmiştir. 1981 yılında ise Goldberg (Goldberg, 1981) snarklar oluşturmak için bir yöntem tanımlamıştır. Goldberg, kromatik indeksi 4 ve maksimum derecesi 3 olan bir ayrıt-kritik çizge ailesi belirlemiştir. Bu ailedeki en küçük çizge, bir Loupekine snarkının (Isaacs, 1976) altçizgesidir. 2007 yılında ise twisted Goldberg snark tanımlanmıştır (Ghebleh, 2007).

Goldberg snarkları, temel bloklar olarak adlandırılan sabit altçizgelerden oluşur. Bir temel B_i bloğu $V(B_i) = \{v_j^i : 1 \leqslant j \leqslant 8\}$ tepeler kümesi ve $E(B_i) = \{v_1^i v_2^i, v_1^i v_6^i, v_2^i v_5^i, v_3^i v_4^i, v_3^i v_5^i, v_4^i v_6^i, v_5^i v_7^i, v_6^i v_7^i, v_7^i v_8^i\}$ ayrıtlar kümesinden oluşmaktadır (Bknz. Şekil 3.1 (a)). $i \neq j$ olmak üzere B_i ve B_j bloklarını bağlayan $E_{ij} = \{v_2^i v_1^j, v_4^i v_3^j, v_8^i v_8^j\}$ kümesindeki ayrıtlar bağlantı ayrıtları olarak adlandırılır.

Bağlantı çizgesi L_i, tepeler kümesi $V(L_i) = V(B_i) \cup V(B_{i-1})$ ve ayrıtlar kümesi $E(L_i) = E(B_i) \cup E(B_{i-1}) \cup E_{(i-1)i}$ olan bir çizgedir (Bknz. Şekil 3.1 (b)).

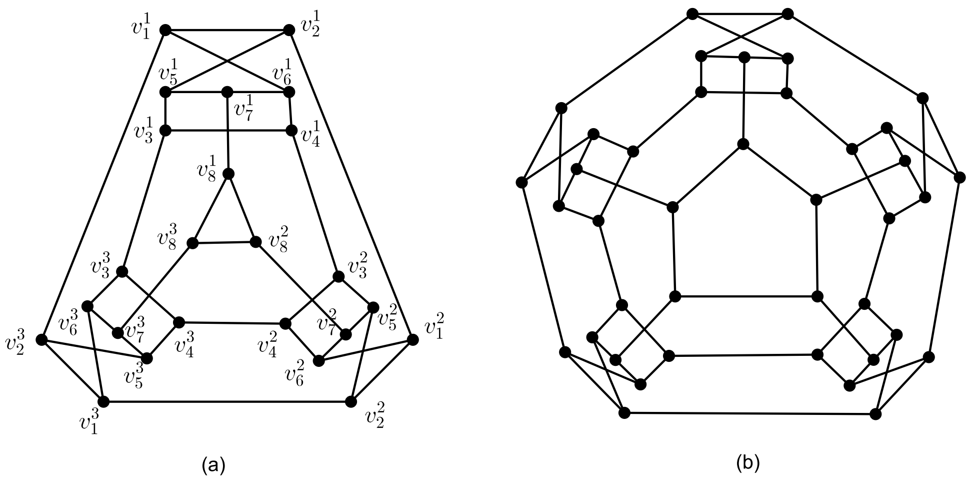


Şekil 3.1 (a) Blok B_i (b) Bağlantı çizgesi L_i

İlk Goldberg snark G_3, B_1, B_2 ve B_3 bloklarının birleşimi ve E_{12}, E_{23}, E_{31} ayrıtlar kümesindeki ayrıtların eklenmesi ile oluşturulur. Yani, G_3 çizgesi $V(G_3) = V(B_1) \cup V(B_2) \cup V(B_3)$ tepeler kümesi ve $E(G_3) = E_{12} \cup E_{23} \cup E_{31}$ ayrıtlar kümesine sahiptir (Bknz Şekil 3.2 (a)). Her n tek ve $n \geq 5$ için G_n çizgesi G_{n-2} ve L_n çizgelerinden oluşur ve $V(G_n) = V(G_{n-2}) \cup V(L_n)$ tepeler kümesi ve $E(G_n) = (E(G_{n-2}) - E_{(n-2)1}) \cup E(L_n) \cup E_{(n-2)(n-1)} \cup E_{n1}$ ayrıtlar kümesine sahiptir (Bknz Şekil 3.2 (b)).

Goldberg snark yapısı itibari ile $\{v_1^1, v_2^1, v_1^2, v_2^2, \ldots, v_1^n, v_2^n\}$ ve $\{v_3^1, v_4^1, v_3^2, v_4^2, \ldots, v_3^n, v_4^n\}$ kümelerindeki tepeler tarafından etkilenmiş altçizgelerin her biri 2n tepeli bir çevreye ve $\{v_8^1, v_8^2, \ldots, v_8^n\}$ kümesindeki tepeler tarafından etkilenmiş altçizge ise n tepeli bir çevre çizgeye izomorftur.

İspatlarımızda kolaylık sağlamak amacıyla $V(G_n)$ tepeler kümesindeki tepe isimleri değiştirilerek tepeler kümesi beş kümeye ayrılmıştır. Her $i \geq 1$ için v_1^i tepesi yerine u_{2i-2} tepesi; v_2^i tepesi yerine u_{2i-1} tepesi; v_3^i tepesi yerine v_{2i-2} tepesi; v_4^i tepesi yerine v_{2i-1} tepesi; v_5^i tepesi yerine x_{2i-2} tepesi; v_6^i tepesi yerine x_{2i-1} tepesi; v_7^i tepesi



Şekil 3.2 (a) Goldberg snark G_3 (b) Goldberg snark G_5

yerine z_{i-1} tepesi ve v_8^i tepesi yerine y_{i-1} tepesi alınmıştır. Böylece, G_n çizgesi

$$U = \{u_i \mid i \in \{0, 1, \ldots, 2n-1\}\}$$

$$V = \{v_i \mid i \in \{0, 1, \ldots, 2n-1\}\}$$

$$X = \{x_i \mid i \in \{0, 1, \ldots, 2n-1\}\}$$

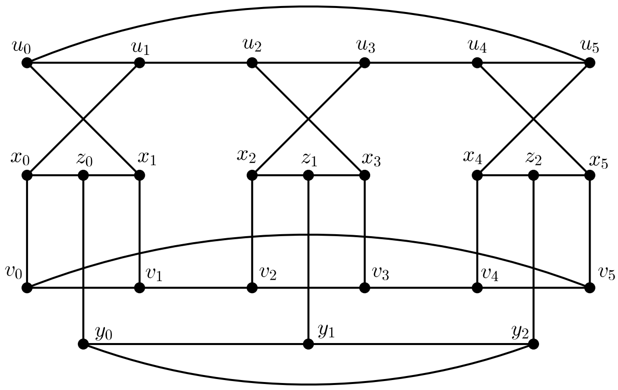
$$Y = \{y_i \mid i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}\}$$

$$Z = \{z_i \mid i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}\}$$

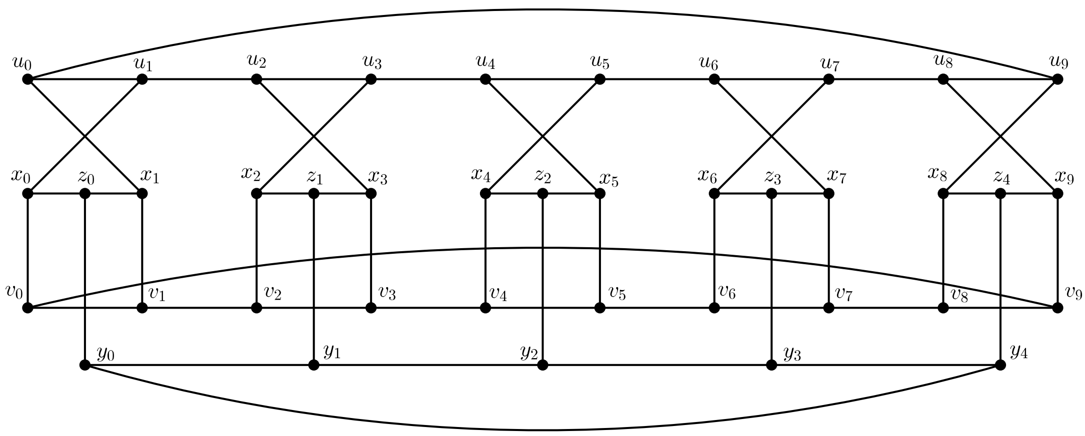
olmak üzere $U \cup V \cup X \cup Y \cup Z$ tepeler kümesine sahiptir. U ve V kümelerinin tepeleri tarafından etkilenmiş altçizgelerin her birinin C_{2n} çevre çizgesine ve Y kümesinin tepeleri tarafından etkilenmiş altçizgelerin her birinin C_n çevre çizgesine izomorf olduğu açıktır.

Tez boyunca kullanılacak olan G_n çizgesinin tepeler kümesi dikkate alınarak şekilsel olarak kolaylık sağlaması amacıyla Şekil 3.3 ve Şekil 3.4 ile Şekil 3.2'deki G_3 ve G_5 çizgelerinin izomorf çizgeleri verilmiştir.

Goldberg snark, çeşitli parametreler kullanılarak incelenmiştir. Bu parametrelerden bazıları: Burge Fulkerson boyama (Hao, Niu, Wang, Zhang, & Zhang, 2009), sigma boyama (da Soledade Gonzaga & de Almeida, 2019), dairesel akış sayısı (Lukot'ka, 2024), toplam kromatik sayı (Campos, Dantas, & de Mello, 2011),



Şekil 3.3 Goldberg snark G_3



Şekil 3.4 Goldberg snark G_5

bağlantılı ve ağaç baskınlık (Zhao & Liu, 2016), dairesel kromatik indeks (Ghebleh, 2007), Roman baskınlık and bağımsız Roman baskınlık (Luiz, 2024), eşit toplam kromatik sayı (Dantas et al., 2016).

Bu tez kapsamında, Goldberg snark ele alınarak bağlantılılık, süper bağlantılılık ve $H \in \{K_1, K_{1,1}, K_{1,2}, K_{1,3}\}$ olmak üzere H-yapı bağlantılılık ve H-altyapı bağlantılılık değerleri incelenmiştir.

4. ELDE EDİLEN SONUÇLAR

4.1 Bağlantılılık ve Süper Bağlantılılık

Bu bölümde Goldberg snarklarda bağlantılılık ve süper bağlantılılık değerleri incelenmiştir. Öncelikle aşağıdaki iki yardımcı teorem ile en fazla üç elemanlı bir $S \subset V(G_n)$ tepeler kümesinin G_n çizgesinden silindiğinde geriye kalan çizgenin bağlantılı olması için S kümesinin sağlaması gereken durumları incelenmiştir.

U kümesinin ve V kümesinin tepeleri tarafından etkilenmiş altçizgelerin her biri $2n$ uzunluklu birer çevredir ve birbirleri ile yer değiştirebilir durumdadırlar. Bu özellik, ispatlarda bazı durumların sadece U ya da sadece V kümesi ele alınarak ispatlanabilir olmasını sağlamaktadır.

Yardımcı Teorem 4.1.1 $n \geq 3$ için $S \subseteq V(G_n)$ ve $|S| \leq 3$ olsun. Eğer $S \subseteq U \cup V$ ya da $S \subseteq U \cup Y$ ya da $S \subseteq V \cup Y$ ya da $S \cap U \neq \emptyset$ ve $S \cap Z \neq \emptyset$ ya da $S \cap V \neq \emptyset$ ve $S \cap Z \neq \emptyset$ ya da $S \cap X \neq \emptyset$ ve $S \cap Z \neq \emptyset$ ya da $S \subseteq X$ ise $G_n - S$ çizgesi bağlantılıdır.

İspat. $S \subseteq V(G_n)$ ve $|S| \leq 3$ olsun. S kümesi G_n çizgesinin $S \subseteq U \cup V$ ya da $S \subseteq U \cup Y$ ya da $S \subseteq V \cup Y$ ya da $S \cap U \neq \emptyset$ ve $S \cap Z \neq \emptyset$ ya da $S \cap V \neq \emptyset$ ve $S \cap Z \neq \emptyset$ ya da $S \cap X \neq \emptyset$ ve $S \cap Z \neq \emptyset$ ya da $S \subseteq X$ olacak şekilde kesim kümesi olsun. Goldberg çizgesi köprü içermeyen bir çizge olduğundan kesim tepe içermez. Yani, G_n çizgesi 1 elemanlı kesim kümeye sahip olamaz. O halde, $|S| \geq 2$ olur.

U kümesi ile V kümesi kendi aralarında yer değiştirilebilir olduğundan $S \subseteq U \cup Y$ ve $S \subseteq V \cup Y$ durumlarından birini ($S \cap U \neq \emptyset$ ve $S \cap Z \neq \emptyset$) ve ($S \cap V \neq \emptyset$ ve $S \cap Z \neq \emptyset$) durumlarından birini incelemek yeterlidir. Bu nedenle, incelenmesi gereken beş durum vardır.

Durum 1. $S \subseteq U \cup V$ olsun.

O halde, X, Y ve Z kümeleri hatasız olup $X \cup Y \cup Z$ kümesindeki tepeler ile etkilenmiş altçizge bağlantılıdır.

(i) S kümesi U kümesinin ya da V kümesinin tepelerinden oluşsun.

Genelliği kaybetmeden, S kümesi U kümesinin tepelerinden oluşsun. O halde,

V kümesi hatasızdır. $G_n - S$ çizgesinde $i \in \{0, 1, \ldots, 2n-1\}$ olmak üzere X kümesindeki her x_i tepesi V kümesindeki v_i tepesine komşudur. Dolayısıyla, $X \cup Y \cup Z \cup V$ kümesindeki tüm tepeler aynı bileşendedir. Ayrıca, $U - S$ kümesindeki her tepenin X kümesinde bir komşusu vardır. $X \cup Y \cup Z \cup V$ kümesindeki tepeler ile etkilenmiş altçizge bağlantılı olduğundan $G_n - S$ çizgesi bağlantılıdır. Bu ise S kümesinin kesim küme olması ile çelişir.

(ii) $S \cap U \neq \emptyset$ ve $S \cap V \neq \emptyset$ olsun.

$|S|$ ya 2 ya da 3 olduğundan, U ya da V kümesinden biri S kümesinin tam olarak bir tepesini içerir. Genelliği kaybetmeden $t \in \{0, 1, \ldots, 2n-1\}$ olmak üzere $S \cap U = \{u_t\}$ olsun. $G_n - S$ çizgesinde $U - \{u_t\}$ kümesindeki tepeler tarafından etkilenmiş altçizge P_{2n-1} yol çizgesine izomorf olup bağlantılıdır ve $U - \{u_t\}$ kümesindeki her tepenin X kümesinde tam olarak bir komşu tepesi vardır. Böylece $(X \cup Y \cup Z) \cup (U - \{u_t\})$ kümesindeki tüm tepeler aynı bileşendedir. Bu bileşen C olsun. $G_n - S$ çizgesinde $V - S$ kümesindeki her tepenin X kümesinde bir komşusu olduğundan, $V - S$ kümesindeki her tepenin C bileşeninde bir komşusu vardır. O halde, $G_n - S$ çizgesi bağlantılıdır. Bu ise S kümesinin kesim küme olması ile çelişir.

Durum 2. $S \subseteq U \cup Y$ olsun.

(i) S kümesi U kümesinin ya da Y kümesinin tepelerinden oluşsun.

Eğer S kümesi, sadece U kümesinin tepelerinden oluşursa Durum 1(i) ile aynıdır. O halde, S kümesi sadece Y kümesinin tepelerinden oluşsun. Bu durumda, U, V, X ve Z kümeleri hatasız olup, $U \cup V \cup X \cup Z$ kümesindeki tepeler tarafından etkilenmiş $G_n[U \cup V \cup X \cup Z]$ altçizgesi bağlantılıdır. Ayrıca, $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ olmak üzere $Y - S$ kümesindeki her y_i tepesi Z kümesindeki z_i tepesinde komşu olduğundan, $Y - S$ kümesindeki her tepenin $G_n[U \cup V \cup X \cup Z]$ çizgesinde bir komşu tepesi olduğu anlamına gelir. Dolayısıyla, $G_n - S$ çizgesi bağlantılıdır, bu ise kabul ile çelişir.

(ii) $S \cap U \neq \emptyset$ ve $S \cap Y \neq \emptyset$ olsun.

$|S| = 2$ ya da $|S| = 3$ olduğundan U ya da Y kümesinden biri S kümesinin tam olarak bir tepesini içerir. İncelenmesi gereken iki durum vardır. Her iki durumda da

$X \cup V \cup Z$ kümesi hatasız olup bu kümedeki tepeler tarafından etkilenmiş altçizge bağlantılıdır.

- $t \in \{0, 1, \ldots, 2n-1\}$ olmak üzere $S \cap U = \{u_t\}$ olsun. $G_n - S$ çizgesinde $U - \{u_t\}$ kümesindeki tepeler tarafından etkilenmiş altçizge P_{2n-1} yol çizgesine izomorf olup bağlantılı ve $U - \{u_t\}$ kümesindeki her tepenin X kümesinde bir komşusu vardır. Böylece $(X \cup V \cup Z) \cup (U - \{u_t\})$ kümesinin tüm tepeleri aynı C bileşenindedir. Ayrıca, $G_n - S$ çizgesinde $Y - S$ kümesindeki her tepenin Z kümesinde bir komşusu olduğundan, $Y - S$ kümesindeki her tepeyi C bileşenine bağlayan hatasız bir ayrıt vardır. Böylece, $G_n - S$ çizgesi bağlantılı olup kabul ile çelişir.

- $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ olmak üzere $S \cap Y = \{y_k\}$ olsun. $G_n - S$ çizgesinde $Y - \{y_k\}$ kümesindeki tepeler tarafından etkilenmiş altçizge P_{n-1} yol çizgesine izomorf olup bağlantılı ve $Y - \{y_k\}$ kümesindeki her tepenin Z kümesinde bir komşusu vardır. Böylece, $(X \cup V \cup Z) \cup (Y - \{y_k\})$ kümesindeki tüm tepeler aynı bileşendedir. Bu bileşen C olsun. Ayrıca, $G_n - S$ çizgesinde $U - S$ kümesindeki her tepenin X kümesinde bir komşusu vardır. Yani $U - S$ kümesindeki her tepenin C bileşeninde bir komşusu vardır. O halde, $G_n - S$ çizgesi bağlantılı olup kabul ile çelişir.

Durum 3. $S \cap U \neq \emptyset$ ve $S \cap Z \neq \emptyset$ olsun.

$G_n - S$ çizgesinde X, V ve Y kümeleri hatasızdır. Böylece, $X \cup V$ kümesindeki tepeler tarafından etkilenmiş altçizge bağlantılıdır. Y kümesindeki tepeler tarafından etkilenmiş altçizge ise C_n çizgesine izomorf olup bağlantılıdır. $|S| = 2$ ya da $|S| = 3$ olduğundan U ya da Z kümesinden biri S kümesinin tam olarak bir tepesini içerir. O halde, incelenmesi gereken iki durum vardır.

$t \in \{0, 1, \ldots, 2n-1\}$ olmak üzere $S \cap U = \{u_t\}$ olsun. $G_n - S$ çizgesinde $U - \{u_t\}$ kümesindeki tepeler tarafından etkilenmiş altçizge P_{2n-1} yol çizgesine izomorf olup bağlantılıdır. $U - \{u_t\}$ kümesindeki her tepenin X kümesinde bir komşusu olduğundan, $(X \cup V) \cup (U - \{u_t\})$ kümesindeki tüm tepeler aynı bileşendedir. Bu bileşen C_1 olsun. $G_n - S$ çizgesinde $Z - S$ kümesindeki her tepenin Y kümesindeki bir komşusu olduğundan, $Y \cup (Z - S)$ kümesindeki tüm tepeler aynı bileşendedir. Bu bileşen C_2 olsun. $G_n - S$ çizgesinde $Z - S$ kümesindeki her tepenin X kümesinde iki tane komşusu vardır. Böylece, C_1 ve C_2 bileşenleri hatasız bir ayrıt ile birbirine bağlı olur. Dolayısıyla, $G_n - S$ çizgesi bağlantılıdır, bu ise kabul ile çelişir.

$k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ olmak üzere $S \cap Z = \{z_k\}$ olsun. $G_n - S$ çizgesinde hem $Z - \{z_k\}$ kümesindeki her tepenin hem de $U - S$ kümesindeki her tepenin X kümesinde en az bir komşusu vardır. Böylece, $(X \cup V) \cup (Z - \{z_k\}) \cup (U - S)$ kümesindeki tüm tepeler aynı bileşendedir. Ayrıca, $G_n - S$ çizgesindeki her $z_i \in Z - \{z_k\}$ tepesi $y_i \in Y$ tepesine komşu olduğundan, $G_n - S$ çizgesi bağlantılıdır, bu ise kabul ile çelişir.

Durum 4. $S \cap Z \neq \emptyset$ ya da $S \cap X \neq \emptyset$ olsun.

$G_n - S$ çizgesinde U, V ve Y kümeleri hatasızdır. U, V ve Y kümeleri tarafından etkilenmiş altçizge sırasıyla C_{2n}, C_{2n} ve C_n çizgelerine izomorf olup her biri bağlantılıdır.

$|S| = 2$ ya da $|S| = 3$ olduğundan X ya da Z kümesinden biri S kümesinin tam olarak bir tepesini içerir.

$G_n - S$ çizgesinde U ve V kümeleri hatasız olduğundan, $X - S$ kümesindeki her tepenin hem U hem V kümesinde birer komşusu olup, $U \cup V \cup (X - S)$ kümesinin tüm tepeleri aynı bileşendedir. Bu bileşen C_1 olsun. Ayrıca, $G_n - S$ çizgesinde $Z - S$ kümesindeki her tepenin Y kümesinde bir komşusu olup, $Y \cup (Z - S)$ kümesindeki tüm tepeler aynı bileşendedir. Bu bileşen C_2 olsun.

(i) $k \in \{0, 1, \ldots, 2n-1\}$ olmak üzere $S \cap X = \{x_k\}$ olsun.

$G_n - S$ çizgesinde $Z - S$ kümesindeki her tepenin $X - \{x_k\}$ kümesinde en az bir komşusu vardır. Dolayısıyla, C_1 ve C_2 bileşenleri hatasız ayrıtlar ile bağlı olup $G_n - S$ çizgesi bağlantılıdır, bu ise kabul ile çelişir.

(ii) $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ olmak üzere $S \cap Z = \{z_t\}$ olsun.

Eğer $|S \cap X| = 1$ ise $G_n - S$ çizgesinde $Z - \{z_t\}$ kümesindeki her tepenin $X - S$ kümesinde en az bir komşusu vardır. Dolayısıyla, C_1 ve C_2 bileşenleri hatasız ayrıtlar ile bağlı olup $G_n - S$ çizgesi bağlantılıdır, bu ise kabul ile çelişir.

$|S \cap X| = 2$ olsun. $i, j \in \{0, 1, \ldots, 2n-1\}$ ve $i \neq j$ olmak üzere $X \cap S = \{x_i, x_j\}$ olsun. Genelliği kaybetmeden z_t tepesi B_1 bloğunda olsun. Yani $t = 0$ olsun. x_i ve x_j tepelerinin B_1 bloğunda olup olmamasına göre üç alt durum vardır.

- $x_i, x_j \in V(B_1)$ olsun. O halde, $G_n - S$ çizgesinde $Z - \{z_0\}$ kümesindeki her tepenin $X - S$ kümesinde tam olarak iki tane komşusu vardır. Dolayısıyla, C_1 ve C_2 bileşenleri hatasız ayrıtlar ile bağlı olup $G_n - S$ çizgesi bağlantılıdır, bu ise kabul ile çelişir.

- $k \neq 1$ olmak üzere $x_i \in V(B_1)$ ve $x_j \in V(B_k)$ ya da $k, l \neq 1$ ve $k \neq l$ olmak üzere $x_i \in V(B_k)$ ve $x_j \in V(B_l)$ olsun. O halde, $G_n - S$ çizgesinde $Z - \{z_0\}$ kümesindeki her tepenin $X - S$ kümesinde en az bir komşusu vardır. Dolayısıyla, C_1 ve C_2 bileşenleri hatasız ayrıtlar ile bağlı olup $G_n - S$ çizgesi bağlantılıdır, bu ise kabul ile çelişir.

- $k \neq 1$ olmak üzere $x_i, x_j \in V(B_k)$ olsun. O halde, B_k bloğunda $Z - S$ kümesindeki tepe z_{k-1} olup $Z - \{z_0, z_{k-1}\}$ kümesindeki her tepenin $X - S$ kümesinde tam olarak iki tane komşusu vardır. Ayrıca Y kümesi hatasız olduğundan z_{k-1} tepesi C_2 bileşenindeki y_{k-1} tepesine komşu olup C_1 ve C_2 bileşenleri hatasız ayrıtlar ile bağlıdır. Böylece, $G_n - S$ çizgesi bağlantılıdır, bu ise kabul ile çelişir.

Durum 5. $S \subseteq X$ olsun.

$G_n - S$ çizgesinde U, V ve Z kümeleri hatasız olduğundan, $X - S$ kümesindeki her tepenin derecesinin üç olduğu açıktır. Yani, $G_n - S$ çizgesinde $X - S$ kümesindeki her tepenin U, V ve Z kümelerinde birer komşusu olup $(X - S) \cup (U \cup V \cup Z)$ kümesinin tüm tepeleri aynı bileşendedir. Ayrıca, Y ve Z kümeleri hatasız olduğundan $G_n - S$ çizgesinde $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ olmak üzere her $y_i \in Y$ tepesi $z_i \in Z$ tepesine komşudur. Böylece $G_n - S$ çizgesi bağlantılıdır. Bu ise kabul ile çelişir. □

Yardımcı Teorem 4.1.2 n tek ve $n \geq 5$ olmak üzere $S \subseteq V(G_n)$ ve $|S| \leq 3$ olsun. Eğer $S \subseteq Z$ ise $G_n - S$ çizgesi bağlantılıdır.

İspat. n tek ve $n \geq 5$ olmak üzere $S \subseteq V(G_n)$ ve $|S| \leq 3$ olsun. S kümesi G_n çizgesinin $S \subseteq Z$ olacak şekilde kesim kümesi olsun. Goldberg snark köprü içermeyen bir çizge olduğundan kesim tepe içermez. Yani, G_n çizgesi 1 elemanlı kesim kümeye sahip olamaz. O halde, $|S| = 2$ ya da $|S| = 3$ olur.

$G_n - S$ çizgesinde U, V, X ve Y kümeleri hatasızdır. X kümesindeki her tepe U ve V kümelerindeki birer tepeye komşudur. Böylece, $G_n[U \cup V \cup X]$ etkilenmiş altçizgesi bağlantılıdır. Ayrıca, $G_n - S$ çizgesinde Y kümesi hatasız olduğundan, Y kümesinin tepeleri ile etkilenmiş altçizge C_n çizgesine izomorf olup bağlantılıdır.

G_n çizgesinde $|Z| = n \geq 5$ ve $|S| \leq 3$ olduğundan $|Z - S| \geq 2$ olup $Z - S$ kümesinde en az iki tepe vardır. $G_n - S$ çizgesinde $Z - S$ kümesindeki her tepenin X kümesinde tam olarak iki komşusu ve Y kümesinde bir komşusu vardır. Dolayısıyla, $G_n - S$ çizgesi bağlantılıdır. Bu ise S kümesinin kesim küme olması ile çelişir. □

Teorem 4.1.3 ile n tek ve $n \geq 3$ olmak üzere G_n çizgesinin maksimal bağlantılı olduğu ve $\kappa(G_n) = 3$ olduğu ispat edilmiştir.

Teorem 4.1.3 n tek ve $n \geq 3$ olmak üzere $\kappa(G_n) = 3$ eşitliği sağlanır.

İspat. Herhangi bir G çizgesi için $\kappa(G) \leq \delta(G)$ olduğu bilinmektedir. Bu nedenle, $\kappa(G_n) \leq \delta(G_n) = 3$ olup ispatı tamamlamak için $\kappa(G_n) \geq 3$ olduğunu göstermek yeterlidir. G_n çizgesi kesim tepe içermediğinden $\kappa(G_n) \geq 2$ olur. O halde, G_n çizgesinin iki elemanlı kesim kümeye sahip olmadığını göstermek yeterlidir.

S kümesi, G_n çizgesinin $|S| = 2$ olacak şekilde bir kesim kümesi olsun. Yardımcı Teorem 4.1.1 ile $n \geq 3$ olmak üzere S kümesi $U \cup V$ ya da $U \cup Y$ ya da $V \cup Y$ kümelerinde yer alamaz ya da S kümesi için ($S \cap U \neq \emptyset$ ve $S \cap Z \neq \emptyset$) ya da ($S \cap V \neq \emptyset$ ve $S \cap Z \neq \emptyset$) ya da ($S \cap X \neq \emptyset$ ve $S \cap Z \neq \emptyset$) ya da $S \subseteq X$ koşulları sağlanmaz; Yardımcı Teorem 4.1.2 ile n tek ve $n \geq 5$ olmak üzere S kümesi Z kümesinde yer alamaz. O halde, incelenmesi gereken dört durum vardır. Ayrıca, U ve V kümeleri kendi aralarında yer değiştirilebilir olduğundan $|S \cap U| = 1$ ve $|S \cap X| = 1$ durumu ile $|S \cap V| = 1$ ve $|S \cap X| = 1$ durumundan birini incelemek yeterlidir.

(1) $|S \cap U| = 1$ ve $|S \cap X| = 1$ olsun.

$G_n - S$ çizgesinde Z, V ve Y kümeleri hatasız olup $Z \cup Y$ kümesindeki tepeler ile etkilenmiş altçizge ve V kümesindeki tepeler ile etkilenmiş altçizge bağlantılıdır.

$G_n - S$ çizgesinde $X - S$ kümesindeki her tepenin hem V kümesinde hem de Z kümesinde bir komşusu vardır. Yani, $G_n - U - S$ çizgesi bağlantılıdır. $\alpha, \beta \in \{0, 1, \ldots, 2n-1\}$ olmak üzere $S \cap U = \{u_\alpha\}$ ve $S \cap X = \{x_\beta\}$ olsun. $G_n - S$ çizgesinde $U - \{u_\alpha\}$ kümesindeki tepeler tarafından etkilenmiş altçizge P_{2n-1} yol çizgesine izomorf olup bağlantılıdır. $n \geq 3$ olduğundan $|U - \{u_\alpha\}| \geq 5$ olup $U - \{u_\alpha\}$ kümesindeki bir tepeyi $X - \{x_\beta\}$ kümesindeki bir tepeye dolayısıyla $G_n - U - S$ çizgesindeki bir tepeye bağlayan en az bir hatasız ayrıt vardır. Dolayısıyla, $G_n - S$ çizgesi bağlantılıdır, bu ise kabul ile çelişir.

(3) $|S \cap X| = 1$ ve $|S \cap Y| = 1$ olsun.

$G_n - S$ çizgesinde U, Z ve V kümeleri hatasızdır. $G_n[U]$ ve $G_n[V]$ etkilenmiş altçizgeleri bağlantılı C_{2n} çevresine izomorftur. $G_n - S$ çizgesinde $X - S$ kümesindeki her tepenin hem U hem de V kümesinde bir komşusu vardır. Ayrıca Z kümesindeki her tepe de $X - S$ kümesinde en az bir komşu tepeye sahiptir. Böylece, $(X - S) \cup U \cup Z \cup V$ kümesindeki tüm tepeler aynı bileşendedir. Bu bileşen C olsun. $G_n - S$ çizgesinde $Y - S$ kümesindeki tepeler tarafından etkilenmiş altçizge P_{n-1} yol çizgesine izomorftur. $Y - S$ kümesindeki her tepenin Z kümesinde dolayısıyla C bileşeninde bir komşusu vardır. Böylece, $G_n - S$ çizgesi bağlantılıdır, bu ise kabul ile çelişir.

(4) $|S \cap Y| = 1$ ve $|S \cap Z| = 1$ olsun.

$G_n - S$ çizgesinde U, X ve V kümeleri hatasız olup $U \cup X \cup V$ kümesindeki tepeler ile etkilenmiş altçizge bağlantılıdır. $G_n - S$ çizgesinde $Z - S$ kümesindeki her tepenin X kümesinde tam olarak iki komşusu vardır. Bu durumda $(U \cup X \cup V) \cup (Z - S)$ kümesinin tüm tepeleri aynı bileşendedir. Yani, $G_n - Y - S$ çizgesi bağlantılıdır. $Y - S$ kümesindeki tepeler ile etkilenmiş altçizge P_{n-1} yol çizgesine izomorf olup bağlantılıdır. $n \geq 3$ olduğundan $|Y - S| \geq 2$ ve $|N_{G_n - S}(Y - S) \cap Z| \geq 1$ olup $Y - S$ kümesindeki bir tepeyi $Z - S$ kümesindeki bir tepeye dolayısıyla $G_n - Y - S$ çizgesindeki bir tepeye bağlayan en az bir hatasız ayrıt vardır. Böylece, $G_n - S$ çizgesi bağlantılıdır, bu ise kabul ile çelişir.

(5) $n = 3$ için $|S \cap Z| = 2$ olsun.

$G_n - S$ çizgesinde U, X, V ve Y kümeleri hatasız olup $U \cup X \cup V$ kümesindeki tepeler tarafından etkilenmiş altçizge bağlantılıdır. Ayrıca, Y kümesi tarafından etkilenmiş altçizge bağlantılı C_n çevresine izomorftur. $n = 3$ olduğundan $|Z - S| = 1$ olduğu açıktır. Genelliği kaybetmeden $z_0 \in Z - S$ olsun. $G_n - S$ çizgesinde z_0 tepesinin Y kümesinde y_0 komşusu ve X kümesinde tam olarak iki tane komşusu vardır. Dolayısıyla, $(U \cup X \cup V) \cup Y \cup (Z - S)$ kümesinin tüm tepeleri aynı bileşende olup $G_n - S$ çizgesi bağlantılıdır, bu ise kabul ile çelişir.

Dolayısıyla, G_n çizgesini bağlantısız yapmak için G_n çizgesinden iki tepe silmenin yeterli olmadığı görülmüştür. Yani, $\kappa(G_n) \geq 3$ elde edilip ispat tamamlanmıştır. $\square$

Herhangi bir G çizgesi için

$$\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$$

olduğu bilinmektedir. Teorem 4.1.3 yardımıyla ve Goldberg snark G_n çizgesi 3-regüler bir çizge olup $\delta(G_n) = 3$ olduğundan G_n çizgesinin maksimal ayrıt bağlantılı olduğu ve ayrıt bağlantılılık sayısı aşağıdaki teorem ile verilebilir.

Teorem 4.1.4 n tek ve $n \geq 3$ olmak üzere $\lambda(G_n) = 3$ eşitliği sağlanır.

Teorem 4.1.5 ile n tek ve $n \geq 5$ olmak üzere G_n çizgesinin süper bağlantılı yani süper-κ olduğu ve $\kappa'(G_n) = 4$ olduğu ispat edilmiştir. Bu teorem $n = 3$ olduğunda sağlamamaktadır.

Herhangi bir G çizgesi için $\kappa'(G) \geq \kappa(G)$ olduğundan $n = 3$ için $\kappa'(G_n) \geq 3$ elde edilir. S kümesi G_n çizgesinin tepeler kümesinin bir alt kümesi olmak üzere, $S = Z$ ise $|S| = 3$ olup $G_n - S$ çizgesi bağlantısızdır, fakat izole tepe içermemektedir. Böylece, $n = 3$ olduğunda $\kappa'(G_n) \leq 3$ olup alt sınır ile $\kappa'(G_n) = 3$ elde edilir. Yani, $n = 3$ olduğunda G_n çizgesi için κ elemana sahip bir süper kesim küme vardır. Yani, G_n çizgesi $n = 3$ için süper bağlantılı değildir.

Teorem 4.1.5 n tek ve $n \geq 5$ olmak üzere $\kappa'(G_n) = 4$ eşitliği sağlanır.

İspat. Herhangi bir G çizgesi için $\kappa'(G) \geq \kappa(G)$ olduğundan, Teorem 4.1.3 ile $\kappa'(G_n) \geq \kappa(G_n) = 3$ elde edilir.

Alt sınırın ispatı için $S \subseteq V(G_n)$ kümesi üç elemanlı bir tepeler kümesi ise $G_n - S$ çizgesinin ya bağlantılı ya da izole tepe içerdiğini göstermek yeterlidir.

O halde, S üç elemanlı bir süper kesim küme olsun. Yani, $G_n - S$ çizgesi bağlantısız bir çizge ve hiçbir bileşeni izole tepe içermez. Yardımcı Teorem 4.1.1 ve Yardımcı Teorem 4.1.2 ile n tek ve $n \geq 5$ olmak üzere S kümesi $U \cup Z$ ya da $V \cup Z$ ya da $X \cup Z$ ya da $U \cup V$ ya da $U \cup Y$ ya da $V \cup Y$ kümelerinde yer alamaz.

(1) $S \cap U \neq \emptyset$, $S \cap X \neq \emptyset$ ve $|S \cap (U \cup X)| = 3$ olsun.

$G_n - S$ çizgesinde V, Y ve Z kümeleri hatasız olup $G_n[Z \cup Y]$ ve $G_n[V]$ etkilenmiş altçizgeleri bağlantılıdır. $G_n - S$ çizgesinde $X - S$ kümesindeki her tepe hem V kümesindeki hem de Z kümesindeki bir tepeye komşudur. O halde, $(X - S) \cup (Y \cup Z) \cup V$ kümesindeki tüm tepeler aynı bileşendedir. Yani, $G_n - U - S$ çizgesi bağlantılıdır.

- $|S \cap U| = 1$ ve $|S \cap X| = 2$ olsun.

  $G_n - S$ çizgesinde $U - S$ kümesindeki tepeler ile etkilenmiş altçizge P_{2n-1} yol çizgesine izomorftur. $n \geq 5$ olduğundan $|U - S| \geq 9$ ve $|X - S| \geq 8$ olup $U - S$ kümesindeki bir tepeyi $X - S$ kümesindeki bir tepeye dolayısıyla $G_n - U - S$ çizgesindeki bir tepeye bağlayan en az bir hatasız ayrıt vardır. Böylece, $G_n - S$ çizgesi bağlantılıdır. Bu ise kabul ile çelişir.

- $|S \cap U| = 2$ ve $|S \cap X| = 1$ olsun.

  $\alpha, \beta, \gamma \in \{0, 1, \ldots, 2n-1\}$ olmak üzere $S \cap U = \{u_\alpha, u_\gamma\}$ ve $S \cap X = \{x_\beta\}$ olsun. Genelliği kaybetmeden β çift tam sayı olsun. O halde x_β tepesi ile $u_{\beta+1}$ tepesi komşudur.

  Eğer $u_{\beta+1} \in S$ ise, $U - S$ kümesindeki her tepe $X - S$ kümesindeki bir tepeye komşu olup $U - S$ kümesindeki her tepenin $G_n - U - S$ çizgesinde komşu olduğu bir tepe vardır. Yani, $G_n - S$ çizgesi bağlantılıdır. Bu ise kabul ile çelişir.

  $u_{\beta+1} \notin S$ olsun. Eğer $N_{G_n}(u_{\beta+1}) \cap (U \cup X) = \{u_\alpha, u_\gamma, x_\beta\}$ ise $G_n - S$ çizgesinde $u_{\beta+1}$ tepesi izole tepe olur. Bu ise S kümesinin süper kesim küme olmasıyla çelişir. Eğer $N_{G_n}(u_{\beta+1}) \cap (U \cup X) \neq \{u_\alpha, u_\gamma, x_\beta\}$ ise $U - S - \{u_{\beta+1}\}$ kümesindeki her tepenin $X - S$ kümesinde komşu olduğu bir tepe vardır. Buradan $(Y \cup Z) \cup V \cup (X - S) \cup (U - S - \{u_{\beta+1}\})$ kümesindeki tüm tepelerin aynı bileşende olduğu görülür. O halde sadece $u_{\beta+1}$ tepesi incelenmelidir. $N_{G_n}(u_{\beta+1}) \cap (U \cup X) \neq \{u_\alpha, u_\gamma, x_\beta\}$

olduğundan $u_{\beta+1}$ tepesinin $U - S$ kümesinde en az bir komşusu vardır. O halde $G_n - S$ çizgesi bağlantılıdır, bu ise kabul ile çelişir.

(2) $S \cap X \neq \emptyset$, $S \cap Y \neq \emptyset$ ve $|S \cap (X \cup Y)| = 3$ olsun.

$G_n - S$ çizgesinde U, Z ve V kümeleri hatasızdır. Böylece, $G_n[U]$ ve $G_n[V]$ etkilenmiş altçizgeleri C_{2n} çevresine izomorftur.

- $|S \cap X| = 1$ ve $|S \cap Y| = 2$ olsun.

  $G_n - S$ çizgesinde $X - S$ kümesindeki her tepenin U, Z ve V kümelerinde bir komşusu vardır. O halde $(X - S) \cup U \cup Z \cup V$ kümesinin tüm tepeleri aynı bileşendedir. Yani, $G_n - Y - S$ çizgesi bağlantılıdır. $i \in \{0, 1, ..., n-3\}$ olmak üzere $Y - S$ kümesindeki her y_i tepesi Z kümesinde z_i tepesine komşudur. Dolayısıyla, $Y - S$ kümesindeki her tepeyi $G_n - Y - S$ çizgesindeki bir tepeye bağlayan hatasız bir ayrıt olup $G_n - S$ çizgesi bağlantılıdır. Bu ise kabul ile çelişir.

- $|S \cap X| = 2$ ve $|S \cap Y| = 1$ olsun.

  $G_n - S$ çizgesinde $X - S$ kümesindeki her tepenin hem U hem V kümesinde bir komşusu vardır. O halde $(X - S) \cup U \cup V$ kümesinin tüm tepeleri aynı bileşendedir. Bu bileşen C_1 olsun.

  $\alpha, \beta \in \{0, 1, \ldots, 2n-1\}$ ve $\gamma \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ olmak üzere $S \cap X = \{x_\alpha, x_\beta\}$ ve $S \cap Y = \{y_\gamma\}$ olsun. Eğer $N_{G_n}(z_\gamma) \cap (X \cup Y) = \{x_\alpha, x_\beta, y_\gamma\}$ ise $G_n - S$ çizgesinde z_γ tepesi izole tepe olur, bu ise S kümesinin süper kesim küme olmasıyla çelişir. $N_{G_n}(z_\gamma) \cap (X \cup Y) \neq \{x_\alpha, x_\beta, y_\gamma\}$ olsun. $G_n - S$ çizgesinde $Y - S$ kümesindeki tepeler tarafından etkilenmiş altçizge P_{n-1} yol çizgesine izomorf olup bağlantılıdır. Ayrıca $Z - \{z_\gamma\}$ kümesindeki her tepe $Y - S$ kümesindeki bir tepeye komşudur. O halde $(Y - S) \cup (Z - \{z_\gamma\})$ kümesinin tüm tepeleri aynı bileşendedir. Bu bileşen C_2 olsun. $N_{G_n}(z_\gamma) \cap (X \cup Y) \neq \{x_\alpha, x_\beta, y_\gamma\}$ olduğundan z_γ tepesinin $X - S$ kümesinde dolayısıyla C_1 bileşeninde en az bir komşu tepesi vardır. $X - S$ kümesindeki her tepe Z kümesinde en az bir tepeye komşu olduğundan C_1 ve C_2 bileşenleri en az bir hatasız ayrıt ile birbirine bağlı olur. Dolayısıyla, $G_n - S$ çizgesi bağlantılıdır, bu ise kabul ile çelişir.

(3) $S \cap V \neq \emptyset$, $S \cap X \neq \emptyset$ ve $|S \cap (V \cup X)| = 3$ olsun.

$U \cup X$ ile $V \cup X$ kümeleri kendi aralarında yer değiştirilebilir olduğundan (1) durumu için yapılan açıklamalar bu durum için de geçerlidir.

(4) $S \cap Y \neq \emptyset$, $S \cap Z \neq \emptyset$ ve $|S \cap (Y \cup Z)| = 3$ olsun.

$G_n - S$ çizgesinde U, V ve X kümeleri hatasız olup $U \cup V \cup X$ kümesindeki tepeler tarafından etkilenmiş altçizge bağlantılıdır. $G_n - S$ çizgesinde $Z - S$ kümesindeki her tepenin X kümesinde en az bir komşusu olduğundan $(U \cup V \cup X) \cup (Z - S)$ kümesindeki tepeler tarafından etkilenmiş altçizge bağlantılıdır. Yani, $G_n - Y - S$ çizgesi bağlantılıdır.

- $|S \cap Y| = 1$ ve $|S \cap Z| = 2$ olsun.

  $G_n - S$ çizgesinde $Y - S$ kümesindeki tepeler tarafından etkilenmiş altçizge P_{n-1} yol çizgesine izomorf olup bağlantılıdır. $n \geq 5$ olduğundan $|Y - S| \geq 4$ ve $|Z - S| \geq 3$ olduğu açıktır. Böylece $Y \cap S$ kümesindeki bir tepenin $Z \cap S$ kümesindeki bir tepeye komşu olup olmama durumları incelendiğinde $Y - S$ ve $Z - S$ kümelerinde birbirine komşu olan en az iki tepenin olduğu görülür. Yani, $Y - S$ kümesindeki bir tepeyi $Z - S$ kümesindeki bir tepeye dolayısıyla $G_n - Y - S$ çizgesindeki bir tepeye bağlayan en az bir hatasız ayrıt vardır. Böylece, $G_n - S$ çizgesi bağlantılıdır. Bu ise kabul ile çelişir.

- $|S \cap Y| = 2$ ve $|S \cap Z| = 1$ olsun.

  $\alpha, \beta, \gamma \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ olmak üzere $S \cap Y = \{y_\alpha, y_\beta\}$ ve $S \cap Z = \{z_\gamma\}$ olsun.

  Eğer $y_\gamma \in S$ ise, $Y - S$ kümesindeki her tepenin $Z - S$ kümesinde dolayısıyla $G_n - Y - S$ çizgesinde bir komşu tepesi vardır. Böylece, $G_n - S$ çizgesi bağlantılıdır, bu ise kabul ile çelişir.

  $y_\gamma \notin S$ olsun. Eğer $N_{G_n}(y_\gamma) \cap (Y \cup Z) = \{y_\alpha, y_\beta, z_\gamma\}$ ise y_γ tepesi $G_n - S$ çizgesinde izole bir tepe olup S kümesinin süper kesim küme olması ile çelişir. $N_{G_n}(y_\gamma) \cap (Y \cup Z) \neq \{y_\alpha, y_\beta, z_\gamma\}$ olsun. O halde, y_γ tepesinin S kümesinde olmayan en az bir komşusu vardır. $G_n - S$ çizgesinde $Y - S - \{y_\gamma\}$ kümesindeki her tepenin $Z - S$ kümesinde dolayısıyla $G_n - Y - S$ çizgesinde bir komşu tepesi vardır. O halde, sadece y_γ tepesi incelenmelidir. y_γ tepesinin $G_n - S$ çizgesinde en az bir komşu tepesi olduğundan, y_γ tepesi de hatasız bir ayrıt ile $G_n - Y - S$ çizgesine bağlıdır. Dolayısıyla, $G_n - S$ çizgesi bağlantılıdır, bu ise kabul ile çelişir.

(5) $|S \cap U| = 1$ ve $|S \cap X| = 1$ olsun.

(i) $|S \cap Z| = 1$ olsun.

$G_n - S$ çizgesinde V ve Y kümeleri hatasız olup $G_n[V]$ ve $G_n[Y]$ etkilenmiş altçizgeleri sırasıyla bağlantılı C_{2n} ve C_n çevresine izomorftur. $G_n - S$ çizgesinde $Z - S$ kümesindeki her tepenin Y kümesinde bir komşusu vardır ve $X - S$ kümesindeki her tepenin V kümesinde komşusu vardır. Ayrıca $Z - S$ kümesindeki her tepe $X - S$ kümesindeki en az bir tepeye komşudur. O halde $(X - S) \cup (Z - S) \cup V \cup Y$ kümesindeki tepeler aynı bileşendedir. Bu bileşen C olsun. $U - S$ kümesindeki tepeler tarafından etkilenmiş altçizge P_{2n-1} yol çizgesine izomorftur. $n \geq 5$ olduğundan $|U - S| \geq 9$ ve $|X - S| \geq 9$ olup $U - S$ kümesindeki bir tepeyi $X - S$ kümesindeki bir tepeye dolayısıyla C bileşenindeki bir tepeye bağlayan en az bir hatasız ayrıt vardır. Böylece, $G_n - S$ çizgesi bağlantılıdır. Bu ise kabul ile çelişir.

(ii) $|S \cap Y| = 1$ olsun.

$G_n - S$ çizgesinde Z ve V kümeleri hatasız olup $G_n[V]$ etkilenmiş altçizgesi C_{2n} çevresine izomorftur. Ayrıca, $G_n - S$ çizgesinde $X - S$ kümesindeki her tepenin V kümesinde bir komşusu vardır ve Z kümesindeki her tepenin $X - S$ kümesinde en az bir komşusu vardır. $Y - S$ kümesindeki tepeler tarafından etkilenmiş altçizge P_{n-1} yol çizgesine izomorf olup bağlantılıdır. $n \geq 5$ ve $|Y - S| \geq 4$ olduğundan $Y - S$ kümesindeki bir tepeyi Z kümesindeki bir tepeye bağlayan bir hatasız ayrıt vardır. O halde, $V \cup (Y - S) \cup (X - S) \cup Z$ kümesindeki tüm tepeler aynı bileşendedir. $U - S$ kümesindeki tepeler tarafından etkilenmiş altçizge P_{2n-1} yol çizgesine izomorftur. $n \geq 5$ ve $|S \cap U| = |S \cap X| = 1$ olduğundan, $U - S$ kümesinde $X - S$ kümesindeki bir tepeye komşu olan bir tepe vardır. Yani, $U - S$ kümesindeki bir tepeyi $X - S$ kümesindeki bir tepeye dolayısıyla C bileşenindeki bir tepeye bağlayan bir hatasız ayrıt vardır. Buradan, $G_n - S$ çizgesinin bağlantılı olduğu görülür. Bu ise kabul ile çelişir.

(iii) $|S \cap V| = 1$ olsun.

$G_n - S$ çizgesinde Z ve Y kümeleri hatasız olup $Z \cup Y$ kümesi tarafından etkilenmiş altçizge bağlantılıdır. Ayrıca, $G_n - S$ çizgesinde $X - S$ kümesindeki her tepenin $Z \cup Y$ kümesinde bir komşusu vardır. O halde, $(Z \cup Y) \cup (X - S)$ kümesindeki tüm tepeler aynı bileşendedir. Bu bileşen C olsun. $\alpha, \beta, \gamma \in \{0, 1, \ldots, 2n - 1\}$ olmak üzere $S \cap U = \{u_\alpha\}$, $S \cap V = \{v_\beta\}$ ve $S \cap X = \{x_\gamma\}$ olsun. $U - S$ kümesindeki tepeler ile etkilenmiş altçizge P_{2n-1} yol çizgesine izomorftur. Genelliği kaybetmeden α çift tam sayı olsun. O halde u_α tepesi ile $x_{\alpha+1}$ tepesi komşudur. Eğer $x_{\alpha+1} \in S$ ise, $X - S$ kümesindeki her tepe $U - S$ kümesindeki bir tepeye komşu olup $U - S$ kümesindeki tüm tepeler C bileşenine bağlı olur. Eğer $x_{\alpha+1} \notin S$ ise, $X - S - \{x_{\alpha+1}\}$ kümesindeki her tepe $U - S$ kümesindeki bir tepeye komşudur. $x_{\alpha+1}$ tepesinin ise hatasız Z kümesinde bir komşusu vardır. Her iki durum için $U - S$ kümesindeki tüm tepeler C bileşenine bağlı olur. $V - S$ kümesinde v_β tepesi dışında komşusu C bileşeninde olan mutlaka bir tepe vardır. Dolayısıyla, $G_n - S$ çizgesi bağlantılıdır, bu ise kabul ile çelişir.

(6) $|S \cap V| = 1$ ve $|S \cap X| = 1$ olsun.

$|S \cap Z| = 1$ ya da $|S \cap Y| = 1$ durumları incelenmelidir. U kümesi ile V kümesi kendi aralarında yer değiştirilebilir olduğundan (5) durumdaki (i) ve (ii) için yapılan açıklamalar bu durumlar için de geçerlidir.

(7) $|S \cap Y| = 1$ ve $|S \cap Z| = 1$ olsun.

(i) $|S \cap U| = 1$ olsun.

$G_n - S$ çizgesinde X ve V kümeleri hatasız olup V kümesinin tepeleri tarafından etkilenmiş altçizge C_{2n} çevresine izomorftur. X kümesindeki her x_i tepesi V kümesindeki v_i tepesine komşudur. $G_n - S$ çizgesinde $Z - S$ kümesindeki her tepenin X kümesinde tam olarak iki komşusu vardır. Ayrıca, $U - S$ kümesindeki tepeler tarafından etkilenmiş altçizge P_{2n-1} yol çizgesine izomorf olup $U - S$ kümesindeki her tepenin X kümesinde bir komşusu vardır. O halde $V \cup (U - S) \cup (Z - S) \cup X$ kümesindeki tüm tepeler aynı bileşendedir. Yani, $G_n - Y - S$ çizgesi bağlantılıdır. $G_n - S$ çizgesinde $Y - S$ kümesindeki tepeler tarafından etkilenmiş altçizge P_{n-1} yol çizgesine izomorf olup bağlantılıdır. $n \geq 5$ olduğundan $|Y-S| \geq 4$ ve $|Z-S| \geq 4$ olup $|N_{G_n-S}(Y-S) \cap Z| \geq 3$ sağlanır. Buradan $Y-S$ kümesindeki bir tepeyi $Z-S$ kümesindeki bir tepeye dolayısıyla $G_n - Y - S$ çizgesindeki bir tepeye bağlayan en az bir hatasız ayrıtın var olduğu görülür. Böylece, $G_n - S$ çizgesi bağlantılıdır. Bu ise kabul ile çelişir.

(ii) $|S \cap V| = 1$ olsun.

U kümesi ile V kümesi kendi aralarında yer değiştirilebilir olduğundan (6) durumdaki (i) için yapılan açıklamalar bu durumlar için de geçerlidir.

(iii) $|S \cap X| = 1$ olsun.

$G_n - S$ çizgesinde U ve V kümeleri hatasız olup U ve V kümesindeki tepeler tarafından etkilenmiş altçizgelerin her biri C_{2n} çevresine izomorftur. $G_n - S$ çizgesinde $X - S$ kümesindeki her tepenin hem U hem V kümesinde bir komşu tepesi vardır. Ayrıca, $Z - S$ kümesindeki her tepenin $X - S$ kümesinde en az bir komşusu vardır. Dolayısıyla, $(X-S) \cup (Z-S) \cup U \cup V$ kümesindeki tüm tepeler aynı bileşendedir. Yani, $G_n - Y - S$ çizgesi bağlantılıdır. $G_n - S$ çizgesinde $Y - S$ kümesindeki tepeler tarafından etkilenmiş altçizge P_{n-1} yol çizgesine izomorf olup bağlantılıdır. $n \geq 5$ olduğundan $Y - S$ kümesindeki bir tepeyi $Z - S$ kümesindeki bir tepeye dolayısıyla $G_n - Y - S$ çizgesindeki bir tepeye bağlayan bir hatasız ayrıt vardır. Böylece, $G_n - S$ çizgesi bağlantılıdır. Bu ise kabul ile çelişir.

(8) $|S \cap U| = 1$ ve $|S \cap V| = 1$ olsun.

(i) $|S \cap Y| = 1$ olsun.

$G_n - S$ çizgesinde X ve Z kümeleri hatasızdır. $G_n - S$ çizgesinde $U - S$, $V - S$ ve $Y - S$ kümeleri tarafından etkilenmiş altçizgeler sırasıyla P_{2n-1}, P_{2n-1} ve P_{n-1} yol çizgelerine izomorf olup bağlantılıdır. $\alpha, \beta \in \{0, 1, \ldots, 2n-1\}$ ve $\gamma \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ olmak üzere $S \cap U = \{u_\alpha\}$, $S \cap V = \{v_\beta\}$ ve $S \cap Y = \{y_\gamma\}$ olsun. Genelliği kaybetmeden α çift tam sayı olsun. O halde, G_n çizgesinde u_α tepesi ile $x_{\alpha+1}$ tepesi komşudur. $G_n - S$ çizgesinde $X - \{x_{\alpha+1}\}$ kümesindeki her tepenin $U - S$ kümesinde bir komşusu vardır. $x_{\alpha+1}$ tepesinin ise hatasız Z kümesinde bir komşusu vardır. G_n çizgesinde v_β tepesi ile x_β tepesi komşu olduğundan, $G_n - S$ çizgesinde $X - \{x_\beta\}$ kümesindeki her x_i tepesi $V - S$ kümesinde v_i tepesine komşudur. x_β tepesinin ise hatasız Z kümesinde bir komşusu vardır. Dolayısıyla, $(U - S) \cup (V - S) \cup X \cup Z$ kümesindeki tepeler ile etkilenmiş altçizge bağlantılıdır. Yani, $G_n - Y - S$ çizgesi bağlantılıdır. $G_n - S$ çizgesinde Z kümesi hatasız olduğundan $Y - S$ kümesindeki her tepenin Z kümesinde dolayısıyla $G_n - Y - S$ çizgesinde bir komşusu vardır. O halde, $G_n - S$ çizgesi bağlantılıdır. Bu ise kabul ile çelişir.

(ii) $|S \cap Z| = 1$ olsun.

$G_n - S$ çizgesinde X ve Y kümeleri hatasız olup Y kümesinin tepeleri tarafından etkilenmiş altçizge C_n çevresine izomorftur. $G_n - S$ çizgesinde $U - S$ ve $V - S$ kümelerinin tepeleri tarafından etkilenmiş altçizgelerin her biri P_{2n-1} yol çizgesine izomorf olup bağlantılıdır. $\alpha, \beta \in \{0, 1, \ldots, 2n - 1\}$ ve $\gamma \in \{0, 1, \ldots, n - 1\}$ olmak üzere $S \cap U = \{u_\alpha\}$, $S \cap V = \{v_\beta\}$ ve $S \cap Z = \{z_\gamma\}$ olsun. Genelliği kaybetmeden α çift tam sayı olsun. G_n çizgesinde u_α tepesi ile $x_{\alpha+1}$ tepesi komşu olduğundan, $X - \{x_{\alpha+1}\}$ kümesindeki her tepenin $U - S$ kümesinde bir komşusu vardır. O halde, $(U - S) \cup (X - \{x_{\alpha+1}\})$ kümesindeki tüm tepeler aynı bileşendedir. Bu bileşen C olsun. X kümesinde incelenmesi gereken tek tepe $x_{\alpha+1}$ tepesidir.

(a) Eğer $N_{G_n}(x_{\alpha+1}) = \{u_\alpha, v_\beta, z_\gamma\}$ ise $x_{\alpha+1}$ tepesi $G_n - S$ çizgesinde izole tepe olur. Bu ise S kümesinin süper kesim küme olmasıyla çelişir.

(b) Eğer $N_{G_n}(x_{\alpha+1}) \neq \{u_\alpha, v_\beta, z_\gamma\}$ ise $|N_{G_n}(x_{\alpha+1}) \cap S| \leq 2$ olup $x_{\alpha+1}$ tepesinin $G_n - S$ çizgesinde en az bir komşu tepesi vardır.

G_n çizgesinde v_β tepesi ile x_β tepesi komşu olduğundan, $G_n - S$ çizgesinde $X - \{x_\beta\}$ kümesindeki her tepenin $V - S$ kümesinde bir komşusu vardır.

- Eğer $\beta \neq \alpha + 1$ ise, x_β tepesinin $U - S$ kümesinde, $x_{\alpha+1}$ tepesinin de $V - S$ kümesinde bir komşusu vardır. Dolayısıyla, $(V - S) \cup \{x_{\alpha+1}\}$ kümesindeki tüm tepeler C bileşenine bağlı olur.
- Eğer $\beta = \alpha + 1$ ise, x_β yani $x_{\alpha+1}$ tepesinin $Z - S$ kümesinde bir komşusu vardır. Yani, $V - S$ kümesindeki tüm tepeler C bileşenine bağlı olur.

$G_n - S$ çizgesinde $Z - S$ kümesindeki her tepenin X kümesinde tam olarak iki ve Y kümesinde bir komşusu olduğundan $(Z - S) \cup Y$ kümesindeki tüm tepeler C bileşenindedir. Böylece, $G_n - S$ çizgesi bağlantılıdır, bu ise kabul ile çelişir.

Tüm durumlar incelendiğinde $G_n - S$ çizgesini izole tepe bırakmadan bağlantısız yapmak için üç tepenin yeterli olamayacağı görülür. Yani, $\kappa'(G_n) \geq 4$ elde edilir. Üst sınır için $S = \{u_2, u_{2n-1}, x_0, x_1\}$ alınırsa $G_n - S$ çizgesi izole tepe içermeyen bağlantısız bir çizge olur. Yani, $\kappa'(G_n) \leq 4$ elde edilir. Alt ve üst sınırdan, n tek ve $n \geq 5$ olmak üzere $\kappa'(G_n) = 4$ elde edilir. $\square$

G_n çizgesi 3-regüler olduğundan $n \geq 3$ olmak üzere $\xi(G_n) = 4$ olduğu açıktır. Teorem 1.0.1 yardımı ile $\lambda'(G_n) \leq \xi(G_n) = 4$ olduğu bilinmektedir. Ayrıca, G_n çizgesi süper ayrıt bağlantılı olduğundan yani $\lambda'(G_n) > \lambda(G_n)$ olduğundan aşağıdaki sonuç verilebilir.

Teorem 4.1.6 n tek ve $n \geq 5$ olmak üzere $\lambda'(G_n) = 4$ eşitliği sağlanır.

4.2 Yapı Bağlantılılık ve Altyapı Bağlantılılık

Bu bölümde $H \in \{K_1, K_{1,1}, K_{1,2}, K_{1,3}\}$ olmak üzere Goldberg snark için H–yapı bağlantılılık ve H–altyapı bağlantılılık değerleri incelenmiştir.

Öncelikle aşağıdaki yardımcı teorem ile F kümesi G_n çizgesinin altçizgelerinden oluşan bir küme olmak üzere G_n çizgesinden silindiğinde $G_n - F$ çizgesini bağlantılı yapan F kümesinin G_n çizgesinin hangi tepeler kümesinin elemanlarını içerdiği belirlenmiştir.

Yardımcı Teorem 4.2.1 n tek ve $n \geq 3$ olmak üzere F kümesi G_n çizgesinin altçizgelerinden oluşan bir küme olsun. Eğer $V(F) \subseteq U \cup V$ ya da $V(F) \subseteq U \cup Y$ ya da $V(F) \subseteq V \cup Y$ ise $G_n - F$ çizgesi bağlantılıdır.

İspat. n tek ve $n \geq 3$ olmak üzere F kümesi G_n çizgesinin altçizgelerinden oluşan bir küme olsun. $U \cup Y$ ve $V \cup Y$ kümelerinin kendi aralarında yer değiştirilebilir oldukları dikkate alınırsa sadece aşağıdaki durumları incelemek yeterlidir.

Durum 1. $V(F) \subseteq U \cup V$ olsun.

(i) $V(F) \cap U \neq \emptyset$ ve $V(F) \cap V = \emptyset$ olsun.

$G_n - F$ çizgesinde X, Y, Z ve V kümeleri hatasız olup $X \cup Y \cup Z \cup V$ kümesindeki tepeler ile etkilenmiş altçizge bağlantılıdır. $G_n - F$ çizgesinde $U - V(F)$ kümesindeki her tepenin X kümesinde bir komşusu vardır. Dolayısıyla, geriye kalan çizgenin tüm tepeleri aynı bileşendedir, yani $G_n - F$ çizgesi bağlantılıdır.

(ii) $V(F) \cap U = \emptyset$ ve $V(F) \cap V \neq \emptyset$ olsun.

U kümesi ile V kümesi kendi aralarında yer değiştirilebilir olduğundan Durum (1) (i) için yapılan açıklamalar bu durum için de geçerlidir.

(iii) $V(F) \cap U \neq \emptyset$ ve $V(F) \cap V \neq \emptyset$ olsun.

$G_n - F$ çizgesinde X, Y ve Z kümeleri hatasız olup $X \cup Y \cup Z$ kümesindeki tepeler tarafından etkilenmiş altçizge bağlantılıdır. $G_n - F$ çizgesinde $U - V(F)$ kümesindeki her tepenin ve $V - V(F)$ kümesindeki her tepenin X kümesinde bir komşusu vardır. $X \cup Y \cup Z$ kümesindeki tepeler tarafından etkilenmiş altçizge bağlantılı olduğundan geriye kalan çizgenin tüm tepeleri aynı bileşendedir. Yani, $G_n - F$ çizgesi bağlantılıdır.

Durum 2. $V(F) \subseteq U \cup Y$ olsun.

(i) $V(F) \cap U \neq \emptyset$ ve $V(F) \cap Y = \emptyset$ olsun.

Bu durumda $V(F) \cap V = \emptyset$ olduğundan bu durum Durum (1) (i) ile aynıdır.

(ii) $V(F) \cap U = \emptyset$ ve $V(F) \cap Y \neq \emptyset$ olsun.

$G_n - F$ çizgesinde X, U, Z ve V kümeleri hatasız olup $X \cup U \cup Z \cup V$ kümesindeki tepeler tarafından etkilenmiş altçizge bağlantılıdır. $G_n - F$ çizgesinde $Y - V(F)$ kümesindeki her tepenin Z kümesinde komşu olduğu bir tepe vardır. Dolayısıyla, geriye kalan çizgenin tüm tepeleri aynı bileşendedir, yani $G_n - F$ çizgesi bağlantılıdır.

(iii) $V(F) \cap U \neq \emptyset$ ve $V(F) \cap Y \neq \emptyset$ olsun.

$G_n - F$ çizgesinde X, Z ve V kümeleri hatasız olup $X \cup Z \cup V$ kümesindeki tepeler tarafından etkilenmiş altçizge bağlantılıdır. $G_n - F$ çizgesinde $U - V(F)$ kümesindeki her tepenin X kümesinde bir komşusu vardır. Ayrıca, $Y - V(F)$

kümesindeki her tepenin de Z kümesinde bir komşu tepesi vardır. $X \cup Z \cup V$ kümesindeki tepeler ile etkilenmiş altçizge bağlantılı olduğundan geriye kalan çizgenin tüm tepeleri aynı bileşendedir. Yani, $G_n - F$ çizgesi bağlantılıdır. $\square$

Teorem 4.1.3 yardımı ile n tek ve $n \geq 3$ olmak üzere $\kappa(G_n) = 3$ ve herhangi bir G çizgesi için $\kappa(G; K_1) = \kappa^s(G; K_1) = \kappa(G)$ olduğundan aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 4.2.2 n tek ve $n \geq 3$ olmak üzere $\kappa(G_n; K_1) = \kappa^s(G_n; K_1) = 3$ eşitliği sağlanır.

4.2.1 $K_{1,1}$–Yapı Bağlantılılık ve $K_{1,1}$–Altyapı Bağlantılılık

Bu bölümde n tek ve $n \geq 3$ olmak üzere Goldberg snark G_n için $K_{1,1}$–altyapı bağlantılılık ve $K_{1,1}$–yapı bağlantılılık değerleri incelenmiştir.

Öncelikle $n = 3$ ve $m \in \{1, 2, 3\}$ olmak üzere Goldberg snarkın $K_{1,m}$–altyapı bağlantılılık değeri için bir alt sınır ispat edilmiştir.

Yardımcı Teorem 4.2.3 $n = 3$ ve $m \in \{1, 2, 3\}$ olmak üzere $\kappa^s(G_n; K_{1,m}) \geq 2$ eşitsizliği sağlanır.

İspat. Çelişki elde etmek için F çizgeler kümesinin G_3 çizgesinin bir elemanlı bir $K_{1,m}$-altyapı-kesim kümesi olduğu kabul edilsin. Bu durumda, F çizgesi $K_{1,m}$ çizgesinin bağlantılı bir altçizgesidir. Yani, F çizgesinin K_1, $K_{1,1}$, $K_{1,2}$ ya da $K_{1,3}$ çizgelerine izomorf olduğu durumlar incelenmelidir.

Teorem 4.1.3 ile G_n çizgesinin bağlantılılık sayısının üç olduğu bilinmektedir. Bir altyapı-kesim küme aynı zamanda bir kesim-küme olduğundan, $|V(F)| \geq 3$ olmalıdır. O halde, F çizgesi K_1 ya da $K_{1,1}$ çizgelerine izomorf olamaz. Bu nedenle, F çizgesinin $K_{1,2}$ ya da $K_{1,3}$ çizgesine izomorf olduğu durumu incelenmelidir.

F çizgesinin merkez tepesi U, V, X, Y ya da Z kümelerinde olabilir. U ile V kümeleri kendi aralarında yer değiştirilebilir olduğundan F çizgesinin merkezinin U kümesinde olması ile V kümesinde olması benzerdir. Bu nedenle, F çizgesinin merkezinin V kümesi dışındaki durumları incelemek yeterlidir.

$G_3 - F$ çizgesinde $U - V(F)$ ve $V - V(F)$ kümelerindeki tepeler tarafından etkilenmiş altçizgelerin her biri bir yol çizgeye izomorf olup bağlantılıdır. $X - V(F)$ kümesindeki her tepenin $V - V(F)$ kümesinde bir komşusu ve $Z - V(F)$ kümesindeki her tepenin ise $X - V(F)$ kümesinde en az bir komşusu vardır. Böylece, $(X - V(F)) \cup (V - V(F)) \cup (Z - V(F))$ kümesindeki tüm tepeler aynı bileşendedir. $n = 3$ olduğundan $|U - V(F)| \geq 3$ ve $|X - V(F)| \geq 4$ olur. Bu ise $U - V(F)$ kümesindeki bir tepeyi $X - V(F)$ kümesindeki bir tepeye bağlayan hatasız bir ayrıtın mutlaka olduğunu gösterir. Yani, $G_3 - Y - F$ çizgesi bağlantılıdır.

(1) F çizgesinin merkezi Y kümesinde olsun.

$Y - V(F) = \emptyset$ ya da $|Y - V(F)| = 1$ olur. Eğer $Y - V(F) = \emptyset$ ise $Y - V(F)$ kümesindeki tepeler tarafından etkilenmiş altçizge boş çizgedir. O halde $G_3 - Y - F$ çizgesi $G_3 - F$ çizgesine izomorf olup $G_3 - F$ çizgesi bağlantılıdır. Bu ise F kümesinin $K_{1,m}$–altyapı-kesim küme olması ile çelişir. Eğer $|Y - V(F)| = 1$ ise $Y - V(F)$ kümesindeki tepeler tarafından etkilenmiş altçizge K_1 çizgesine izomorftur. Bu durumda $|Z - V(F)| = 2$ olup $Y - V(F)$ kümesindeki tepenin $Z - V(F)$ kümesinde komşusu vardır. Böylece, $Y - V(F)$ kümesindeki tepeler tarafından etkilenmiş altçizge $G_3 - Y - F$ çizgesine hatasız bir ayrıt ile bağlı olur. Böylece, $G_3 - F$ çizgesi bağlantılıdır. Bu ise F kümesinin $K_{1,m}$–altyapı-kesim küme olması ile çelişir.

(2) F çizgesinin merkezi Y kümesinde olmasın.

$G_3 - F$ çizgesinde $Y - V(F)$ kümesindeki tepeler tarafından etkilenmiş altçizge ya P_3 yol çizgesine izomorf ya da C_3 çizgesine izomorf bir çizgedir. Yani, $Y - V(F)$ kümesinde en az iki tepe vardır. Ayrıca, $|Z - V(F)| \geq 2$ ve $Z - V(F)$ kümesindeki her tepenin $Y - V(F)$ kümesinde bir komşusu olduğundan $Y - V(F)$ kümesindeki tepeler tarafından etkilenmiş altçizge $G_3 - Y - F$ çizgesine hatasız en az iki ayrıt ile bağlı olur. Böylece, $G_3 - F$ çizgesi bağlantılıdır. Bu ise F kümesinin $K_{1,m}$–altyapı-kesim küme olması ile çelişir.

Dolayısıyla $G_3 - F$ çizgesini bağlantısız yapmak için tek elemanlı bir $K_{1,m}$–alt yapı kesim kümenin yeterli olamayacağı görülür. Buradan, $n = 3$ ve $m \in \{1, 2, 3\}$ olmak üzere $\kappa^s(G_n; K_{1,m}) \geq 2$ elde edilir. $\square$

Aşağıdaki teorem ile $n = 3$ olmak üzere G_n çizgesinin $K_{1,1}$–altyapı bağlantılılık ve $K_{1,1}$–yapı bağlantılılık değerleri ispat edilmiştir.

Teorem 4.2.4 $n = 3$ olmak üzere $\kappa(G_n; K_{1,1}) = \kappa^s(G_n; K_{1,1}) = 2$ eşitliği sağlanır.

İspat. G_3 çizgesinin $\{y_0, y_1\}$ ve $\{z_2, x_4\}$ tepeleri tarafından etkilenmiş $K_{1,1}$ altçizgeleri sırasıyla F_1 ve F_2 olsun. $F = \{F_1, F_2\}$ olmak üzere $G_3 - F$ çizgesinde y_2 tepesi izole tepe olup $G_3 - F$ çizgesi bağlantısızdır. Böylece, $\kappa(G_3; K_{1,1}) \leq 2$ elde edilir.

Herhangi bir G çizgesi ve H-yapı-kesim kümesi için $\kappa(G; H) \geq \kappa^s(G; H)$ eşitsizliği, Yardımcı Teorem 4.2.3 ve ispatladığımız üst sınır yardımıyla $2 \geq \kappa(G_3; K_{1,1}) \geq \kappa^s(G_3; K_{1,1}) \geq 2$ elde edilir. Buradan ispat tamamlanmış olur. $\square$

Aşağıdaki yardımcı teorem n tek ve $n \geq 5$ olmak üzere $K_{1,1}$–altyapı bağlantılılık için bir alt sınır vermektedir.

Yardımcı Teorem 4.2.5 n tek ve $n \geq 5$ olmak üzere $\kappa^s(G_n; K_{1,1}) \geq 3$ eşitliği sağlanır.

İspat. İspatı tamamlamak için G_n çizgesinin iki elemanlı bir $K_{1,1}$–altyapı kesim kümesinin olamayacağını göstermek yeterlidir. $F = \{F_1, F_2\}$ kümesi, G_n çizgesinin $K_{1,1}$–altyapı kesim kümesi olsun. Teorem 4.1.3 ile $\kappa(G_n) = 3$ olduğundan $|V(F)| \geq 3$ olmalıdır. Bu nedenle, F kümesinin elemanlarından bir $K_{1,1}$ olmalıdır. Genelliği kaybetmeden F_1 çizgesi $K_{1,1}$ çizgesine izomorf olsun. O halde, incelenmesi gereken iki durum vardır.

Durum 1. $F_2 \cong K_1$ olsun.

Teorem 4.1.3 ile $\kappa(G_n) = 3$ ve Teorem 4.1.5 ile $\kappa'(G_n) = 4$ olduğundan n tek ve $n \geq 5$ için G_n çizgesinin süper bağlantılı olduğu bilinmektedir. Yani, G_n çizgesinin 3 elemanlı her kesim kümesi geriye izole tepe bıraktığı bilinmektedir. Fakat, G_n çizgesinin yapısı gereği G_n çizgesinin bir tepesinin tüm komşularını içeren bir $V(F)$ kümesi olamaz. Dolayısıyla, bu durum mümkün değildir.

Durum 2. $F_2 \cong K_{1,1}$ olsun.

Yardımcı Teorem 4.2.1 yardımıyla $V(F) \subseteq U \cup V$ ya da $V(F) \subseteq U \cup Y$ ya da $V(F) \subseteq V \cup Y$ ise $G_n - F$ çizgesinin bağlantılı olduğu bilinmektedir. Bu ise F kümesinin $K_{1,1}$–altyapı kesim kümesi olması ile çelişir. Bu nedenle aşağıdaki durumlar incelenmelidir.

(1) $V(F_1) \cap U \neq \emptyset$ olsun. Yani, $V(F_1) \subseteq U$ ya da $|V(F_1) \cap U| = 1$ olsun.

$G_n - F$ çizgesinde $V - V(F)$ ve $Y - V(F)$ kümelerindeki tepeler tarafından etkilenmiş altçizgelerin her biri bağlantılıdır.

(i) $V(F_2) \cap Y = \emptyset$ ve $V(F_2) \cap Z = \emptyset$ olsun.

$G_n - F$ çizgesinde Z ve Y kümeleri hatasızdır. Böylece, $Z \cup Y$ kümesindeki tepeler tarafından etkilenmiş altçizge bağlantılıdır. $G_n - F$ çizgesinde $X - V(F)$ kümesindeki her tepenin Z kümesinde bir komşusu vardır. O halde, $(X - V(F)) \cup (Z \cup Y)$ kümesindeki tüm tepeler aynı bileşendedir. Ayrıca, $n \geq 5$ olduğundan $V - V(F)$ kümesindeki bir tepeyi $X - V(F)$ kümesindeki bir tepeye bağlayan en az bir hatasız ayrıt vardır. Geriye kalan çizgede $V - V(F)$ kümesindeki tepeler tarafından etkilenmiş altçizge bağlantılı olduğundan, $G_n - U - F$ çizgesi bağlantılıdır.

- $V(F_2) \cap U \neq \emptyset$ olsun.

  $G_n - F$ çizgesinde $U - V(F)$ kümesindeki tepeler tarafından etkilenmiş altçizge ya bir yol çizgeye izomorf olup bağlantılıdır ya da iki bileşene sahip bağlantısız bir çizgedir. Geriye kalan çizgede $U - V(F)$ kümesindeki her tepenin $X - V(F)$ kümesinde bir komşusu olduğundan, $U - V(F)$ kümesindeki her tepe hatasız ayrıtlar ile $G_n - U - F$ çizgesine bağlı olur. Dolayısıyla, $G_n - F$ çizgesi bağlantılıdır, bu ise kabul ile çelişir.

- $V(F_2) \cap V \neq \emptyset$ olsun.

  $G_n - F$ çizgesinde $U - V(F)$ kümesindeki tepeler tarafından etkilenmiş altçizge bir yol çizgeye izomorf olup bağlantılıdır. $n \geq 5$ olduğundan $U - V(F)$ kümesinde $X - V(F)$ kümesindeki bir tepeye komşu olan en az bir tepe vardır. Bu $G_n[U - V(F)]$ etkilenmiş bağlantılı altçizgenin $G_n - U - F$ çizgesine en az bir hatasız ayrıt ile bağlandığını gösterir. Dolayısıyla, $G_n - F$ çizgesi bağlantılıdır, bu ise kabul ile çelişir.

(ii) $V(F_2) \cap Y \neq \emptyset$ ya da $V(F_2) \cap Z \neq \emptyset$ olsun.

$G_n - F$ çizgesinde V kümesi hatasız olup $X - V(F)$ kümesindeki her tepenin V kümesinde bir komşusu vardır. Geriye kalan çizgede $Z - V(F)$ kümesindeki her tepenin $X - V(F)$ kümesinde bir komşusu vardır. Böylece, $(X - V(F)) \cup V \cup (Z - V(F))$ kümesindeki tüm tepeler aynı bileşendedir. Bu bileşen C olsun. $V(F_2) \cap U = \emptyset$ olup $G_n - F$ çizgesinde $U - V(F)$ kümesindeki tepeler tarafından etkilenmiş altçizge bir yol çizgeye izomorftur. $n \geq 5$ olduğundan $U - V(F)$ kümesinde $X - V(F)$ kümesindeki bir tepeye komşu olan en az bir tepe vardır. Ayrıca, $n \geq 5$ olduğundan $|Y - V(F)| \geq 3$ ve $|N_{G_n - F}(Y - V(F)) \cap Z| \geq 3$ olduğundan $Y - V(F)$ kümesindeki bir tepeyi $Z - V(F)$ kümesindeki bir tepeye bağlayan en az üç hatasız ayrıt vardır. Bu ise $G_n[U - V(F)]$ ve $G_n[Y - V(F)]$ etkilenmiş bağlantılı altçizgelerin her birinin C bileşenine en az bir hatasız ayrıt ile bağlandığını gösterir. Dolayısıyla, $G_n - F$ çizgesi bağlantılıdır, bu ise kabul ile çelişir.

(2) $V(F_1) \cap V \neq \emptyset$ olsun.

U kümesi ile V kümesi kendi aralarında yer değiştirilebilir olduğundan $V(F_1) \subseteq U$ durumu $V(F_1) \subseteq V$ durumu ile, $|V(F_1) \cap U| = 1$ durumu ise $|V(F_1) \cap V| = 1$ durumu ile benzerdir. Bu nedenle, Durum 2 (1) için yapılan açıklamalar bu durum için de geçerlidir.

(3) $V(F_1) \cap U = \emptyset$ ve $V(F_1) \cap V = \emptyset$ olsun.

F_1 ve F_2 çizgelerinin ikisi $K_{1,1}$ çizgesine izomorf olduğundan $V(F_2) \cap U \neq \emptyset$ ya da $V(F_2) \cap V \neq \emptyset$ durumu sırasıyla Durum 2 (1) ya da Durum 2 (2) durumundaki elemanları içermektedir. Bu nedenle, aşağıdaki durumları incelemek yeterlidir.

$G_n - F$ çizgesinde $U - V(F)$ ve $V - V(F)$ kümelerindeki tepeler tarafından etkilenmiş altçizgelerin her biri bağlantılıdır. Geriye kalan çizgede $X - V(F)$ kümesindeki her tepenin $V - V(F)$ kümesinde bir komşusu vardır. Ayrıca, $Z - V(F)$ kümesindeki her tepenin de $X - V(F)$ kümesinde bir komşusu vardır. O halde, $(V - V(F)) \cup (X - V(F)) \cup (Z - V(F))$ kümesindeki tüm tepeler aynı bileşendedir. Bu bileşen C olsun. $n \geq 5$ olduğundan, $U - V(F)$ kümesindeki bir tepeyi $X - V(F)$

kümesindeki bir tepeye bağlayan en az bir hatasız ayrıt vardır. Bu, $U - V(F)$ kümesinin tepeleri tarafından etkilenmiş bağlantlılı altçizgenin C bileşenine hatasız bir ayrıt ile bağlandığını gösterir. Böylece, $G_n - Y - F$ çizgesi bağlantılıdır.

(i) $V(F_1) \cap Y \neq \emptyset$ ve $V(F_2) \cap Y \neq \emptyset$ olsun.

$G_n - F$ çizgesinde $Y - V(F)$ kümesindeki tepeler tarafından etkilenmiş altçizge ya bir yol çizgeye izomorf olup bağlantılıdır ya da iki bileşene sahip bağlantısız bir çizgedir. Geriye kalan çizgede $Y - V(F)$ kümesindeki her tepenin $Z - V(F)$ kümesinde bir komşusu vardır. Böylece, $Y - V(F)$ kümesindeki her tepe bir hatasız ayrıt ile $G_n - Y - F$ çizgesine bağlanmış olur. Dolayısıyla, $G_n - F$ çizgesi bağlantılıdır, bu ise kabul ile çelişir.

(ii) $|V(F_1) \cap X| = 1$ ve $|V(F_1) \cap Z| = 1$ olsun.

$G_n - F$ çizgesinde $Y - V(F)$ kümesindeki tepeler tarafından etkilenmiş altçizge bir yol çizgeye izomorf olup bağlantılıdır. $n \geq 5$ olduğundan $|Y - V(F)| \geq 3$ ve $|N_{G_n - F}(Y - V(F)) \cap Z| \geq 2$ olur. Böylece, $Y - V(F)$ kümesindeki bir tepeyi $Z - V(F)$ kümesindeki bir tepeye bağlayan en az iki hatasız ayrıt vardır. Böylece, $Y - V(F)$ kümesindeki tepeler tarafından etkilenmiş bağlantılı altçizge $G_n - Y - F$ çizgesine hatasız ayrıtlar ile bağlanmış olur. Dolayısıyla, $G_n - F$ çizgesi bağlantılıdır, bu ise kabul ile çelişir.

Tüm durumlar incelendiğinde $G_n - F$ çizgesini bağlantısız yapmak için iki elemanlı bir $K_{1,1}$–altyapı–kesim kümenin yeterli olamayacağı görülür. Buradan, n tek ve $n \geq 5$ olmak üzere $\kappa^s(G_n; K_{1,1}) \geq 3$ elde edilir. □

Aşağıdaki teorem ile n tek ve $n \geq 5$ olmak üzere G_n çizgesinin $K_{1,1}$–yapı bağlantılılık ve $K_{1,1}$–altyapı bağlantılılık değerleri ispat edilmiştir.

Teorem 4.2.6 n tek ve $n \geq 5$ olmak üzere $\kappa^s(G_n; K_{1,1}) = \kappa(G_n; K_{1,1}) = 3$ eşitliği sağlanır.

İspat. F_1, F_2 ve F_3 çizgeleri G_n çizgesinin sırasıyla $\{u_0, u_1\}$, $\{u_3, u_4\}$, $\{x_3, v_3\}$ tepeleri tarafından etkilenmiş altçizgeleri olsun. F_1, F_2 ve F_3 çizgelerinin her birinin

$K_{1,1}$ çizgesine izomorf olduğu açıktır. $F = \{F_1, F_2, F_3\}$ olmak üzere u_2 tepesi $G_n - F$ çizgesinde izole tepedir. Dolayısıyla, n tek ve $n \geq 5$ olmak üzere $\kappa(G_n; K_{1,1}) \leq 3$ elde edilir.

Yardımcı Teorem 4.2.5, $\kappa(G_n; K_{1,1}) \geq \kappa^s(G_n; K_{1,1})$ ve $n \geq 5$ olmak üzere $\kappa(G_n; K_{1,1}) \leq 3$ eşitsizlikleri ile $3 \geq \kappa(G_n; K_{1,1}) \geq \kappa^s(G_n; K_{1,1}) \geq 3$ olup $\kappa(G_n; K_{1,1}) = \kappa^s(G_n; K_{1,1}) = 3$ elde edilir. □

4.2.2 $K_{1,2}$–Yapı Bağlantılılık ve $K_{1,2}$–Altyapı Bağlantılılık

Bu bölümde n tek ve $n \geq 3$ olmak üzere Goldberg snark G_n için $K_{1,2}$–yapı bağlantılılık ve $K_{1,2}$–altyapı bağlantılılık değerleri incelenmiştir.

Öncelikle aşağıdaki teorem ile Yardımcı Teorem 4.2.3 kullanılarak $n = 3$ olmak üzere G_n çizgesinin $K_{1,2}$–yapı bağlantılılık ve $K_{1,2}$–altyapı bağlantılılık değerleri elde edilmiştir.

Teorem 4.2.7 $n = 3$ olmak üzere $\kappa(G_n; K_{1,2}) = \kappa^s(G_n; K_{1,2}) = 2$ eşitliği sağlanır.

İspat. G_3 çizgesinin $\{z_0, y_0, y_1\}$ ve $\{z_2, x_4, x_5\}$ tepeleri tarafından etkilenmiş altçizgeler sırasıyla F_1 ve F_2 olsun. $F = \{F_1, F_2\}$ olmak üzere $G_3 - F$ çizgesinde y_2 izole tepe olup $G_3 - F$ çizgesi bağlantısızdır. Böylece, $\kappa(G_3; K_{1,2}) \leq 2$ elde edilir.

Herhangi bir G çizgesi ve H-yapı-kesim küme için $\kappa(G; H) \geq \kappa^s(G; H)$ olduğu bilinmektedir. Yardımcı Teorem 4.2.3 ve ispatladığımız $\kappa(G_3; K_{1,2}) \leq 2$ eşitsizliği ile $2 \geq \kappa(G_3; K_{1,2}) \geq \kappa^s(G_3; K_{1,2}) \geq 2$ olup $\kappa(G_3; K_{1,2}) = \kappa^s(G_3; K_{1,2}) = 2$ elde edilir. □

Aşağıdaki yardımcı teorem ile n tek ve $n \geq 5$ olmak üzere G_n çizgesinin $K_{1,2}$–altyapı bağlantılılık değeri için bir alt sınır ispat edilmiştir.

Yardımcı Teorem 4.2.8 n tek ve $n \geq 5$ olmak üzere $\kappa^s(G_n; K_{1,2}) \geq 3$ eşitsizliği sağlanır.

İspat. Çelişki elde etmek için F çizgeler kümesinin G_n çizgesinin iki elemanlı bir $K_{1,2}$–altyapı–kesim kümesi olduğu kabul edilsin. $F = \{F_1, F_2\}$ olsun. Eğer F kümesinin elemanlarından hiçbiri $K_{1,2}$ çizgesine izomorf değilse F aynı zamanda bir $K_{1,1}$–altyapı–kesim kümedir. Yardımcı Teorem 4.2.5 ile $K_{1,1}$– altyapı–kesim kümesinin en az üç elemanlı olduğu bilinmektedir. Bu ise F kümesinin iki elemanlı bir $K_{1,2}$–altyapı–kesim küme olması ile çelişir. O halde, F kümesinin elemanlarından biri $K_{1,2}$ çizgesine izomorf olsun. Genelliği kaybetmeden F_1 çizgesi $K_{1,2}$ çizgesine izomorf olsun. O halde F_2 çizgesi için aşağıdaki durumlar incelenmelidir.

Durum 1. $F_2 \cong K_1$ olsun.

(1) $V(F_1) \cap U \neq \emptyset$ ve $V(F_1) \cap V = \emptyset$ olsun.

Yardımcı Teorem 4.2.1 ile $|V(F_1) \cap U| = 3$ iken $V(F_2) \subseteq U$ ya da $V(F_2) \subseteq V$ ya da $V(F_2) \subseteq Y$ ise $G_n - F$ çizgesinin bağlantılı olduğu bilinmektedir. Bu ise F kümesinin $K_{1,2}$–altyapı–kesim küme olması ile çelişir. Bu nedenle, $|V(F_1) \cap U| = 3$ durumu için sadece $V(F_2) \subseteq X$ ve $V(F_2) \subseteq Z$ durumlarını incelemek yeterlidir.

(i) $V(F_2) \subseteq V$ olsun.

$G_n - F$ çizgesinde $U - V(F)$ kümesinin tepeleri tarafından etkilenmiş altçizge bağlantılı olup P_{2n-1} ya da P_{2n-2} yol çizgesine izomorftur. Ayrıca, $V - V(F)$ kümesinin tepeleri ile etkilenmiş altçizge bağlantılı P_{2n-1} yol çizgesine izomorftur.

- $|V(F_1) \cap U| = 2$ olsun.

  O halde, $|V(F_1) \cap X| = 1$ olduğu açıktır. $G_n - F$ çizgesinde Y ve Z kümeleri hatasız olup $Y \cup Z$ kümesinin tepeleri tarafından etkilenmiş altçizge bağlantılıdır. $G_n - F$ çizgesinde $X - V(F)$ kümesindeki her tepenin Z kümesinde bir komşusu vardır. O halde $(Y \cup Z) \cup (X - V(F))$ kümesindeki tüm tepeler aynı bileşendedir. Bu bileşen C olsun. $n \geq 5$ olduğundan geriye kalan çizgede her iki ucu $V(F)$ kümesinde olmayan en az bir (x_i, v_j) ayrıtı mutlaka vardır. Bu ise $V - V(F)$ kümesindeki v_j tepesinin C bileşenindeki x_i tepesine hatasız bir ayrıt ile bağlı olduğunu gösterir. Ayrıca, $U - V(F)$ kümesindeki her tepenin de $X - V(F)$ kümesinde bir komşusu olduğundan $G_n - F$ çizgesi bağlantılıdır. Bu ise kabul ile çelişir.

- $|V(F_1) \cap U| = 1$ olsun.

  $G_n - F$ çizgesinde Y kümesi hatasız olup $Z - V(F)$ kümesindeki her tepenin Y kümesinde bir komşusu vardır. Ayrıca, $X - V(F)$ kümesindeki her tepenin

$U-V(F)$ kümesinde tam olarak bir komşusu vardır. $Z-V(F)$ kümesindeki her tepenin de $X-V(F)$ kümesinde en az bir komşusu olduğundan, $Y\cup(Z-V(F))\cup(X-V(F))\cup(U-V(F))$ kümesindeki tüm tepeler aynı bileşendedir. Bu bileşen C olsun. $n\geq 5$ olduğundan $|V-V(F)|=|X-V(F)|=2n-1\geq 9$ olup G_n-F çizgesinde bir ucu $V-V(F)$ kümesinde diğer ucu ise $X-V(F)$ kümesinde yani C bileşeninde olan hatasız bir ayrıt vardır. Böylece, G_n-F çizgesi bağlantılıdır. Bu ise kabul ile çelişir.

(ii) $V(F_2)\cap V=\emptyset$ olsun.

G_n-F çizgesinde V kümesi hatasız olduğundan $X-V(F)$ kümesindeki her tepenin V kümesinde bir komşusu vardır. Böylece, $V\cup(X-V(F))$ kümesindeki tüm tepeler aynı bileşendedir. Bu bileşen C olsun.

- $V(F_2)\subseteq X$ olsun.

  G_n-F çizgesinde $U-V(F)$ kümesinin tepeleri tarafından etkilenmiş altçizge bağlantılı olup bir yol çizgesine izomorftur. Ayrıca, G_n-F çizgesinde Y kümesi hatasız olup $Z-V(F)$ kümesindeki her tepenin Y kümesinde komşu olduğu bir tepe vardır. Böylece, $Y\cup(Z-V(F))$ kümesindeki tüm tepeler aynı bileşendedir. $n\geq 5$ olduğundan $X-V(F)$ kümesindeki en az bir tepenin hem $U-V(F)$ kümesinde hem de $Z-V(F)$ kümesinde bir komşusu vardır. Yani, $X-V(F)$ kümesindeki bir tepeyi hem $U-V(F)$ kümesindeki bir tepeye hem de $Z-V(F)$ kümesindeki bir tepeye bağlayan hatasız ayrıtlar vardır. Dolayısıyla, G_n-F çizgesi bağlantılıdır. Bu ise kabul ile çelişir.

- $V(F_2)\subseteq U$ ya da $V(F_2)\subseteq Y$ ya da $V(F_2)\subseteq Z$ olsun.

  G_n-F çizgesinde $Y-V(F)$ kümesinin tepeleri tarafından etkilenmiş altçizge bağlantılı olup ya P_{n-1} ya da C_n çizgesine izomorftur. $Z-V(F)$ ve $U-V(F)$ kümesindeki her tepenin $X-V(F)$ kümesinde dolayısıyla C bileşeninde en az bir komşusu vardır. $n\geq 5$ için $|Y-V(F)|\geq 4$ ve $|Z-V(F)|\geq 4$ olup $|N_{G_n-F}(Y-V(F))\cap Z|\geq 3$ olduğundan her iki ucu da $V(F)$ kümesinde olmayan en az bir (z_i,y_i) ayrıtı vardır. Böylece, G_n-F çizgesi bağlantılıdır. Bu ise kabul ile çelişir.

(2) $V(F_1) \cap V \neq \emptyset$ ve $V(F_1) \cap U = \emptyset$ olsun.

U kümesi ile V kümesi kendi aralarında yer değiştirilebilir olduğundan Durum 1 (1) için yapılan açıklamalar bu durum için de geçerlidir.

(3) $V(F_1) \cap U = \emptyset$ ve $V(F_1) \cap V = \emptyset$ olsun.

Yardımcı Teorem 4.2.1 ile $|V(F_1) \cap Y| = 3$ iken $V(F_2) \subseteq U$ ya da $V(F_2) \subseteq V$ ya da $V(F_2) \subseteq Y$ ise $G_n - F$ çizgesinin bağlantılı olduğu bilinmektedir. Bu ise F kümesinin $K_{1,2}$–altyapı–kesim küme olması ile çelişir. Bu nedenle $|V(F_1) \cap Y| = 3$ durumu için sadece $V(F_2) \subseteq X$ ve $V(F_2) \subseteq Z$ durumlarını incelemek yeterlidir.

(i) $|V(F_1) \cap Y| = 2$ ve $V(F_2) \subseteq Y$ ya da $|V(F_1) \cap Y| = 1$ ve $V(F_2) \subseteq Y$ olsun.

İlk durum için $|V(F_1) \cap Z| = 1$ ve $|V(F_1) \cap X| = 1$ olduğu, ikinci durum için ise $|V(F_1) \cap Z| = 1$ olduğu açıktır. $G_n - F$ çizgesinde U ve V kümeleri hatasız olup $X - V(F)$ kümesindeki her tepenin hem U hem de V kümesinde bir komşusu vardır. O halde, $U \cup V \cup (X - V(F))$ kümesindeki tepeler tarafından etkilenmiş altçizge bağlantılıdır. Ayrıca, $Z - V(F)$ kümesindeki her tepenin $X - V(F)$ kümesinde en az bir tane komşusu ve $Y - V(F)$ kümesindeki her tepenin $Z - V(F)$ kümesinde bir komşusu vardır. Böylece, $G_n - F$ çizgesi bağlantılıdır. Bu ise kabul ile çelişir.

(ii) $V(F_1) \cap Y = \emptyset$ ya da $V(F_1) \cap Y \neq \emptyset$ ve $V(F_2) \nsubseteq Y$ olsun.

U kümesi ile V kümesi kendi aralarında yer değiştirilebilir olduğundan $V(F_2) \subseteq U$ ve $V(F_2) \subseteq V$ durumlarından sadece $V(F_2) \subseteq U$ durumu dikkate alınarak ispat yapılmıştır.

$G_n - F$ çizgesinde $U - V(F)$, $V - V(F)$ ve $Y - V(F)$ kümelerinin tepeleri tarafından etkilenmiş altçizgelerin her biri bağlantılıdır. $G_n - F$ çizgesinde $X - V(F)$ kümesindeki her tepenin $V - V(F)$ kümesinde bir komşusu vardır. Ayrıca, $Z - V(F)$ kümesindeki her tepenin de $X - V(F)$ kümesinde en az bir komşusu vardır. Bu ise $(X - V(F)) \cup (V - V(F)) \cup (Z - V(F))$ kümesinin tepeleri tarafından etkilenmiş altçizgenin bağlantılı olduğunu gösterir. $n \geq 5$ olduğundan $|Y - V(F)| \geq 2$ ve $|N_{G_n - F}(Y - V(F)) \cap Z| \geq 1$ olup geriye kalan çizgede her iki ucu da $V(F)$ kümesinde olmayan hatasız en az bir (y_i, z_i) ayrıtı vardır. Benzer şekilde, $n \geq 5$ olduğundan $|U - V(F)| \geq 9$ ve $|X - V(F)| \geq 7$ olup geriye kalan çizgede bir ucu $U - V(F)$ kümesinde diğer ucu $X - V(F)$ kümesinde olan hatasız bir ayrıt vardır. Dolayısıyla, $G_n - F$ çizgesi bağlantılıdır. Bu ise kabul ile çelişir.

(4) $V(F_1) \cap U \neq \emptyset$ ve $V(F_1) \cap V \neq \emptyset$ olsun.

U kümesi ile V kümesi kendi aralarında yer değiştirilebilir olduğundan $V(F_2) \subseteq U$ ve $V(F_2) \subseteq V$ durumlarından sadece $V(F_2) \subseteq U$ durumu dikkate alınmıştır.

$G_n - F$ çizgesinde $Y - V(F)$ kümesinin tepeleri tarafından etkilenmiş altçizge bağlantılı olup ya C_n çevre çizgesine ya da P_{n-1} yol çizgesine izomorftur. $G_n - F$ çizgesinde $V - V(F)$ kümesinin tepeleri tarafından etkilenmiş altçizge P_{2n-1} yol çizgesine izomorf olup bağlantılıdır.

(i) $V(F_2) \subset Y$ olsun.

$G_n - F$ çizgesinde $U - V(F)$ kümesinin tepeleri tarafından etkilenmiş altçizge P_{2n-1} yol çizgesine izomorf olup bağlantılıdır. Geriye kalan çizgede $X - V(F)$ kümesindeki her tepenin hem $U - V(F)$ kümesinde hem de $V - V(F)$ kümesinde bir komşusu vardır. Ayrıca, $G_n - F$ çizgesinde Z kümesi hatasız olup Z kümesindeki her tepenin $X - V(F)$ kümesinde en az bir komşusu vardır. Böylece, $(U-V(F))\cup(V-V(F))\cup(X-V(F))\cup Z$ kümesindeki tüm tepeler aynı bileşende olup $G_n - Y - F$ çizgesi bağlantılıdır. $G_n - F$ çizgesinde $Y - V(F)$ kümesindeki her tepenin Z kümesinde dolayısıyla bağlantılı $G_n - Y - F$ çizgesinde bir komşusu vardır. O halde, $G_n - F$ çizgesi bağlantılıdır, bu ise kabul ile çelişir.

(ii) $V(F_2) \nsubseteq Y$ olsun.

$G_n - F$ çizgesinde Y kümesi hatasız olup $Z - V(F)$ kümesindeki her tepenin Y kümesinde bir komşusu vardır. Böylece, $G_n[(Z - V(F)) \cup Y]$ çizgesi bağlantılıdır. Ayrıca, $G_n - F$ çizgesinde $X - V(F)$ kümesindeki her tepenin $V - V(F)$ kümesinde bir komşusu vardır. Böylece, $G_n[(X - V(F)) \cup (V - V(F))]$ çizgesi bağlantılıdır. $n \geq 5$ olduğundan geriye kalan çizgede bir ucu $X - V(F)$ kümesinde diğer ucu $Z - V(F)$ kümesinde olan hatasız bir ayrıt mutlaka vardır. Böylece, $G_n[(Z - V(F)) \cup Y]$ çizgesi hatasız bir ayrıt ile $G_n[(X - V(F)) \cup (V - V(F))]$ çizgesine bağlı olup $G_n - U - F$ çizgesi bağlantılıdır.

- $V(F_2) \subseteq U$ olsun.

  $G_n - F$ çizgesinde $U - V(F)$ kümesindeki her tepenin $X - V(F)$ kümesinde dolayısıyla bağlantılı $G_n - U - F$ çizgesinde bir komşusu vardır. O halde, $G_n - F$ çizgesi bağlantılıdır, bu ise kabul ile çelişir.

- $V(F_2) \subseteq X$ ya da $V(F_2) \subseteq Z$ olsun.

  $G_n - F$ çizgesinde $X - V(F)$ kümesindeki her tepenin $U - V(F)$ kümesinde bir komşusu vardır. Böylece, $G_n - U - F$ çizgesi $G_n[U - V(F)]$ çizgesine bağlı olup $G_n - F$ çizgesi bağlantılıdır, bu ise kabul ile çelişir.

Durum 2. $F_2 \cong K_{1,1}$ olsun.

(1) $V(F_1) \cap U \neq \emptyset$ ve $V(F_1) \cap V = \emptyset$ olsun.

Yardımcı Teorem 4.2.1 ile $|V(F_1) \cap U| = 3$ iken $V(F_2) \subseteq U$ ya da $V(F_2) \subseteq V$ ya da $V(F_2) \subseteq Y$ ise $G_n - F$ çizgesinin bağlantılı olduğu bilinmektedir. Bu ise F kümesinin $K_{1,2}$–altyapı–kesim küme olması ile çelişir. Bu nedenle, $|V(F_1) \cap U| = 3$ durumu için sadece $V(F_2) \nsubseteq U$, $V(F_2) \nsubseteq V$ ve $V(F_2) \nsubseteq Y$ durumlarını incelemek yeterlidir.

$G_n - F$ çizgesinde $V - V(F)$ ve $Y - V(F)$ kümesindeki tepeler tarafından etkilenmiş altçizgelerin her biri bağlantılıdır.

(i) $V(F_2) \cap U \neq \emptyset$ ya da $V(F_2) \cap Y \neq \emptyset$ olsun.

$V(F) \cap V = \emptyset$ olup $G_n - F$ çizgesinde $X - V(F)$ kümesindeki her tepenin $V - V(F)$ kümesinde bir komşusu vardır. Ayrıca, $G_n - F$ çizgesinde $Z - V(F)$ ve $U - V(F)$ kümelerindeki her tepenin $X - V(F)$ kümesinde en az bir komşusu vardır. Böylece, $(V - V(F)) \cup (X - V(F)) \cup (Z - V(F)) \cup (U - V(F))$ kümesinin tüm tepeleri aynı bileşende olup $G_n - Y - F$ çizgesi bağlantılıdır. $n \geq 5$ olduğundan $|Y - V(F)| \geq 2$ ve $|N_{G_n - F}(Y - V(F)) \cap Z| \geq 2$ olur. Bu nedenle, $G_n - F$ çizgesinde $Y - V(F)$ kümesindeki bir tepeyi $Z - V(F)$ kümesindeki bir tepeye dolayısıyla $G_n - Y - F$

çizgesindeki bir tepeye bağlayan hatasız bir ayrıt mutlaka vardır. Böylece, $G_n - F$ çizgesi bağlantılıdır, bu ise kabul ile çelişir.

(ii) $V(F_2) \cap U = \emptyset$ ve $V(F_2) \cap X \neq \emptyset$ olsun.

$G_n - F$ çizgesinde $U - V(F)$ kümesinin tepeleri tarafından etkilenmiş altçizge bağlantılıdır. $X - V(F)$ kümesindeki her tepenin $V - V(F)$ kümesinde bir komşusu olup $(V - V(F)) \cup (X - V(F))$ kümesinin tüm tepeleri aynı bileşendedir. Bu bileşen C_1 olsun. Ayrıca, $G_n - F$ çizgesinde $Z - V(F)$ kümesindeki her tepenin de $Y - V(F)$ kümesinde bir komşusu vardır. Böylece, $(Y - V(F)) \cup (Z - V(F))$ kümesinin tüm tepeleri aynı bileşende olup bu bileşen C_2 olsun. $n \geq 5$ olduğundan $Z - V(F)$ kümesindeki bir tepeyi $X - V(F)$ kümesindeki bir tepeye bağlayan en az bir hatasız ayrıt vardır. Yani, C_1 bileşeni C_2 bileşenine en az bir hatasız ayrıt ile bağlı olur. Ayrıca, $G_n - F$ çizgesinde $U - V(F)$ kümesindeki bir tepeyi $X - V(F)$ kümesindeki bir tepeye yani C_1 bileşenindeki bir tepeye bağlayan en az bir hatasız ayrıt mutlaka vardır. Dolayısıyla, $G_n - F$ çizgesi bağlantılıdır, bu ise kabul ile çelişir.

(iii) $V(F_2) \subset V$ olsun.

$G_n - F$ çizgesinde $U - V(F)$ kümesinin tepeleri tarafından etkilenmiş altçizge bir yol çizgesine izomorf olup bağlantılıdır. Yardımcı Teorem 4.2.1 ile F_1 çizgesinin sadece iki durumu incelenmelidir.

- $|V(F_1) \cap U| = 1$ olsun.

  $G_n - F$ çizgesinde $X - V(F)$ kümesindeki her tepenin $U - V(F)$ kümesinde bir komşusu vardır. Ayrıca, $Z - V(F)$ kümesindeki her tepenin de $X - V(F)$ kümesinde bir komşusu vardır. Böylece, $G_n - (Y \cup V) - F$ çizgesi bağlantılıdır. $n \geq 5$ olduğundan, geriye kalan çizgede $V - V(F)$ kümesindeki bir tepeyi $X - V(F)$ kümesindeki bir tepeye bağlayan hatasız bir ayrıt mutlaka vardır. Ayrıca, $G_n - F$ çizgesinde Y kümesi hatasız ve $n \geq 5$ olduğundan $|Z - V(F)| \geq 4$ olup geriye kalan çizgede $Z - V(F)$ kümesindeki her tepenin Y kümesinde bir komşusu vardır. Böylece, $G_n[V - V(F)]$ ve $G_n[Y]$ etkilenmiş bağlantılı altçizgelerin her biri hatasız ayrıtlar ile $G_n - (Y \cup V) - F$

çizgesine bağlanmış olur. Dolayısıyla, $G_n - F$ çizgesi bağlantılıdır, bu ise kabul ile çelişir.

- $|V(F_1) \cap U| = 2$ olsun.

  $G_n - F$ çizgesinde $Z - V(F)$ kümesindeki her tepenin $Y - V(F)$ kümesinde bir komşusu vardır. Ayrıca, $X - V(F)$ kümesindeki her tepenin ise $Z - V(F)$ kümesinde bir komşusu vardır. Böylece $(Y - V(F)) \cup (Z - V(F)) \cup (X - V(F))$ kümesinin tüm tepeleri aynı bileşende olur. $n \geq 5$ olduğundan, geriye kalan çizgede hem $U - V(F)$ hem de $V - V(F)$ kümesindeki bir tepenin $X - V(F)$ kümesinde bir komşusu mutlaka vardır. $U - V(F)$ ve $V - V(F)$ kümelerinin tepeleri tarafından etkilenmiş altçizgelerin her biri bağlantılı olduğundan geriye kalan çizgenin tüm tepeleri aynı bileşende olur. Böylece, $G_n - F$ çizgesi bağlantılıdır, bu ise kabul ile çelişir.

(2) $V(F_1) \cap V \neq \emptyset$ ve $V(F_1) \cap U = \emptyset$ olsun.

U kümesi ile V kümesi kendi aralarında yer değiştirilebilir olduğundan Durum 2 (1) için yapılan açıklamalar bu durum için de geçerlidir.

(3) $V(F_1) \cap U = \emptyset$ ve $V(F_1) \cap V = \emptyset$ olsun.

Yardımcı Teorem 4.2.1 ile $|V(F_1) \cap Y| = 3$ iken $V(F_2) \subseteq U$ ya da $V(F_2) \subseteq V$ ya da $V(F_2) \subseteq Y$ ise $G_n - F$ çizgesinin bağlantılı olduğu bilinmektedir. Bu ise F kümesinin $K_{1,2}$–altyapı–kesim küme olması ile çelişir. Bu nedenle, $|V(F_1) \cap Y| = 3$ durumu için sadece $V(F_2) \nsubseteq U$, $V(F_2) \nsubseteq V$ ve $V(F_2) \nsubseteq Y$ durumlarını incelemek yeterlidir.

U kümesi ile V kümesi kendi aralarında yer değiştirilebilir olduğundan $V(F_2) \cap U \neq \emptyset$ ve $V(F_2) \cap V \neq \emptyset$ durumlarından sadece $V(F_2) \cap U \neq \emptyset$ durumu dikkate alınarak ispat yapılmıştır.

$G_n - F$ çizgesinde $U - V(F)$ ve $V - V(F)$ kümelerinin tepeleri tarafından etkilenmiş altçizgelerin her biri bağlantılıdır. $G_n - F$ çizgesinde $X - V(F)$ kümesindeki her tepenin $V - V(F)$ kümesinde bir komşusu vardır. Ayrıca, $Z - V(F)$ kümesindeki her tepenin de $X - V(F)$ kümesinde en az bir komşusu vardır. Böylece,

$(X-V(F))\cup(V-V(F))\cup(Z-V(F))$ kümesindeki tüm tepeler aynı bileşendedir. Bu bileşen C olsun. Ayrıca, $U-V(F)$ kümesindeki tepeler tarafından etkilenmiş altçizge G^* olsun.

(i) $V(F_1)\cap Y\neq\emptyset$ ve $V(F_2)\nsubseteq Z\cup Y$ ya da $V(F_1)\cap Y=\emptyset$ olsun.

G_n-F çizgesinde $Y-V(F)$ kümesindeki tepeler tarafından etkilenmiş altçizge bir yol çizgesine izomorf olup bağlantılıdır. $n\geq 5$ olduğundan $|Y-V(F)|\geq 2$ ve $|N_{G_n-F}(Y-V(F))\cap Z|\geq 1$ olup G_n-F çizgesinde $Y-V(F)$ kümesindeki bir tepeyi $Z-V(F)$ kümesindeki bir tepeye dolayısıyla C bileşenindeki bir tepeye bağlayan hatasız bir ayrıt mutlaka vardır. O halde G_n-G^*-F çizgesi bağlantılıdır.

(ii) $V(F_1)\cap Y\neq\emptyset$ ve $V(F_2)\subseteq Z\cup Y$ olsun.

$n=5$ olmak üzere $|V(F_1)\cap Y|=3$ ve $|V(F_2)\cap Y|=2$ ise, G_n-F çizgesinde $Y-V(F)$ kümesinin tepeleri tarafından etkilenmiş altçizge boş bir çizgedir. O halde G_n-F çizgesi G_n-G^*-F çizgesine izomorf olup bağlantılıdır. Diğer durumlarda G_n-F çizgesinde $Y-V(F)$ kümesinin tepeleri tarafından etkilenmiş altçizge ya bir yol çizgesine izomorf bağlantılı bir çizge ya da iki bileşene sahip bağlantısız bir çizgedir. Geriye kalan çizgede $Y-V(F)$ kümesindeki her tepenin $Z-V(F)$ kümesinde bir komşusu vardır. Bu ise $Y-V(F)$ kümesindeki tüm tepelerin C bileşenine bağlı olduğu anlamına gelir. O halde G_n-G^*-F çizgesi bağlantılıdır.

G^* çizgesi bağlantılı olduğundan her iki durum için G_n-F çizgesinin bağlantılı olduğunu göstermek için G^* çizgesi ile G_n-G^*-F çizgesini birbirine bağlayan en az bir hatasız ayrıt bulmak yeterlidir. $n\geq 5$ olduğundan G^* çizgesinde bir u_i tepesinin $X-V(F)$ kümesinde komşu olduğu bir x_j tepesi mutlaka vardır. Yani, G^* çizgesi (u_i,x_j) hatasız ayrıtı ile G_n-G^*-F çizgesine bağlı olur. Böylece, G_n-F çizgesi bağlantılıdır. Bu ise kabul ile çelişir.

(4) $V(F_1)\cap U\neq\emptyset$ ve $V(F_1)\cap V\neq\emptyset$ olsun.

U kümesi ile V kümesi kendi aralarında yer değiştirilebilir olduğundan $V(F_2)\cap U\neq\emptyset$ ve $V(F_2)\cap V\neq\emptyset$ durumlarından sadece $V(F_2)\cap U\neq\emptyset$ durumu dikkate alınarak ispat yapılmıştır.

(i) $V(F_2) \cap U \neq \emptyset$ olsun.

$G_n - F$ çizgesinde Y ve Z kümeleri hatasız olup $Y \cup Z$ kümesinin tepeleri tarafından etkilenmiş altçizge bağlantılıdır. Geriye kalan çizgede $X - V(F)$ kümesindeki her tepenin hem $V - V(F)$ kümesinde hem de $Z - V(F)$ kümesinde bir komşusu vardır. Böylece, $G_n - U - F$ çizgesi bağlantılıdır. Geriye kalan çizgede $U - V(F)$ kümesindeki her tepenin $X - V(F)$ kümesinde bir komşusu olduğundan $G_n[U - V(F)]$ çizgesi $G_n - U - F$ çizgesine bağlı olur. Dolayısıyla, $G_n - F$ çizgesi bağlantılıdır. Bu ise kabul ile çelişir.

(ii) $V(F_2) \cap U = \emptyset$ ve $V(F_2) \cap V = \emptyset$ olsun.

$G_n - F$ çizgesinde $V - V(F)$ ve $Y - V(F)$ kümelerinin tepeleri tarafından etkilenmiş altçizgelerin her biri bağlantılıdır. $G_n - F$ çizgesinde $X - V(F)$ kümesindeki her tepenin $V - V(F)$ kümesinde bir komşusu vardır. Ayrıca, $Z - V(F)$ kümesindeki her tepenin de $X - V(F)$ kümesinde en az bir komşusu vardır. Böylece, $(X - V(F)) \cup (V - V(F)) \cup (Z - V(F))$ kümesindeki tüm tepeler aynı bileşendedir. Bu bileşen C olsun. C bileşenindeki $X - V(F)$ kümesindeki her tepenin $U - V(F)$ kümesinde bir komşu tepesi ve $Z - V(F)$ kümesindeki bir tepeyi $Y - V(F)$ kümesindeki bir tepeye bağlayan en az bir hatasız ayrıt vardır. Dolayısıyla, $G_n - F$ çizgesi bağlantılıdır. Bu ise kabul ile çelişir.

Durum 3. $F_2 \cong K_{1,2}$ olsun.

(1) $V(F_1) \cap U \neq \emptyset$ ve $V(F_1) \cap V = \emptyset$ olsun.

Yardımcı Teorem 4.2.1 ile $|V(F_1) \cap U| = 3$ iken $V(F_2) \subseteq U$ ya da $V(F_2) \subseteq V$ ya da $V(F_2) \subseteq Y$ ise $G_n - F$ çizgesinin bağlantılı olduğu bilinmektedir. Bu ise F kümesinin $K_{1,2}$–altyapı–kesim küme olması ile çelişir. Bu nedenle, $|V(F_1) \cap U| = 3$ durumu için sadece $V(F_2) \nsubseteq U$, $V(F_2) \nsubseteq V$ ve $V(F_2) \nsubseteq Y$ durumlarını incelemek yeterlidir.

$G_n - F$ çizgesinde $Y - V(F)$ ve $V - V(F)$ kümesindeki tepeler tarafından etkilenmiş altçizgelerin her biri bağlantılıdır.

(i) $V(F_2) \cap U \neq \emptyset$ ya da $|V(F_2) \cap U| = 1$ ve $|V(F_2) \cap V| = 1$ olsun.

$G_n - F$ çizgesinde $X - V(F)$ kümesindeki her tepenin $V - V(F)$ kümesinde tam olarak bir komşusu, $Z - V(F)$ kümesindeki her tepenin ise $Y - V(F)$ kümesinde tam olarak bir komşusu vardır. Böylece, $(X - V(F)) \cup (V - V(F))$ kümesindeki tüm tepeler aynı bileşendedir. Bu bileşen C_1 olsun. Benzer şekilde, $(Y - V(F)) \cup (Z - V(F))$ kümesindeki tüm tepeler aynı bileşendedir. Bu bileşen C_2 olsun. $n \geq 5$ olduğundan $|Z - V(F)| \geq 3$ olup $Z - V(F)$ kümesindeki bir tepeyi $X - V(F)$ kümesindeki bir tepeye bağlayan hatasız bir ayrıt mutlaka vardır. Böylece C_1 ve C_2 bileşenleri hatasız bir ayrıt ile birbirine bağlı olur. Geriye kalan çizgede $U - V(F)$ kümesindeki her tepenin $X - V(F)$ kümesinde tam olarak bir komşusu vardır. Böylece, $U - V(F)$ kümesindeki her tepeyi C_1 bileşenine bağlayan hatasız ayrıtlar vardır. O halde, $G_n - F$ çizgesi bağlantılıdır. Bu ise kabul ile çelişir.

(ii) $V(F_2) \cap U = \emptyset$ ve $|V(F_2) \cap V| \leq 1$ olsun.

$G_n - F$ çizgesinde $X - V(F)$ kümesindeki her tepenin $V - V(F)$ kümesinde tam olarak bir komşusu, $Z - V(F)$ kümesindeki her tepenin de $X - V(F)$ kümesinde en az bir komşusu vardır. Dolayısıyla, $(X - V(F)) \cup (V - V(F)) \cup (Z - V(F))$ kümesindeki tüm tepeler aynı bileşendedir. Bu bileşen C olsun. $G_n - F$ çizgesinde $U - V(F)$ kümesindeki tepeler tarafından etkilenmiş altçizge bir yol çizgeye izomorf olup bağlantılıdır. Ayrıca, $n \geq 5$ olduğundan $|Y - V(F)| \geq 2$ ve $|N_{G_n - F}(Y - V(F)) \cap Z| \geq 1$ olduğu açıktır. Böylece, $U - V(F)$ kümesindeki bir tepeyi $X - V(F)$ kümesindeki bir tepeye ve $Y - V(F)$ kümesindeki bir tepeyi $Z - V(F)$ kümesindeki bir tepeye bağlayan en az bir hatasız ayrıt vardır. Yani, $U - V(F)$ ve $Y - V(F)$ kümelerinin tepeleri tarafından etkilenmiş bağlantılı altçizgelerin her biri hatasız birer ayrıt ile C bileşenine bağlı olur. O halde, $G_n - F$ çizgesi bağlantılıdır. Bu ise kabul ile çelişir.

(iii) $V(F_2) \cap V \neq \emptyset$ ve $|V(F_2) \cap V| \neq 1$ olsun.

$G_n - F$ çizgesinde $U - V(F)$ kümesindeki tepeler tarafından etkilenmiş altçizge bir yol çizgeye izomorf olup bağlantılıdır. $G_n - F$ çizgesinde $Z - V(F)$ kümesindeki her tepenin $Y - V(F)$ kümesinde bir komşusu vardır. Böylece $(Z - V(F)) \cup (Y - V(F))$ kümesindeki tüm tepeler aynı bileşendedir. Bu bileşen C_1 olsun.

- $|V(F_1) \cap U| = 1$ olsun.

  $G_n - F$ çizgesinde $X - V(F)$ kümesindeki her tepenin $U - V(F)$ kümesinde bir komşusu vardır. Böylece $(X - V(F)) \cup (U - V(F))$ kümesindeki tüm tepeler aynı bileşendedir. Bu bileşen C_2 olsun. Ayrıca, $Z - V(F)$ kümesindeki her tepenin $X - V(F)$ kümesinde bir komşusu vardır. Bu C_1 bileşeninin C_2 bileşenine en az bir hatasız ayrıt ile bağlı olduğu anlamına gelir. $n \geq 5$ olduğundan geriye kalan çizgede $V - V(F)$ kümesindeki bir tepeyi $X - V(F)$ kümesindeki bir tepeye dolayısıyla C_2 bileşenindeki bir tepeye bağlayan hatasız bir ayrıt mutlaka vardır. Dolayısıyla, $G_n - F$ çizgesi bağlantılıdır. Bu ise kabul ile çelişir.

- $|V(F_1) \cap U| \neq 1$ olsun.

  $G_n - F$ çizgesinde $X - V(F)$ kümesindeki her tepenin $Z - V(F)$ kümesinde bir komşusu vardır. Buradan $X - V(F)$ kümesindeki her tepenin C_1 bileşenine bağlı olduğu görülür. Ayrıca, $n \geq 5$ olduğundan $U - V(F)$ kümesideki bir tepeyi $X - V(F)$ kümesindeki bir tepeye bağlayan bir ayrıt ve $V - V(F)$ bir tepeyi $X - V(F)$ kümesindeki bir tepeye bağlayan bir ayrıt mutlaka vardır. Böylece, $V(C_1) \cup (U - V(F)) \cup (V - V(F)) \cup (X - V(F))$ kümesindeki tüm tepeler aynı bileşende olup $G_n - F$ çizgesi bağlantılıdır. Bu ise kabul ile çelişir.

(2) $V(F_1) \cap V \neq \emptyset$ ve $V(F_1) \cap U = \emptyset$ olsun.

U kümesi ile V kümesi kendi aralarında yer değiştirilebilir olduğundan Durum 3 (1) için yapılan açıklamalar bu durum için de geçerlidir.

(3) $|V(F_1) \cap U| = 1$ ve $|V(F_1) \cap V| = 1$ olsun.

U kümesi ile V kümesi kendi aralarında yer değiştirilebilir olduğundan $(V(F_2) \cap U \neq \emptyset$ ve $V(F_2) \cap V = \emptyset)$ ya da $(V(F_2) \cap V \neq \emptyset$ ve $V(F_2) \cap U = \emptyset)$ durumundan sadece $V(F_2) \cap U \neq \emptyset$ ve $V(F_2) \cap V = \emptyset$ durumu dikkate alınarak ispat yapılmıştır.

$G_n - F$ çizgesinde $Y - V(F)$ kümesindeki tepeler tarafından etkilenmiş altçizge bağlantılıdır.

(i) $V(F_2) \cap U \neq \emptyset$ ve $V(F_2) \cap V = \emptyset$ olsun.

$G_n - F$ çizgesinde $V - V(F)$ kümesindeki tepeler tarafından etkilenmiş altçizge P_{2n-1} yol çizgesine izomorf olup bağlantılıdır. Geriye kalan çizgede Y kümesi hatasız olup $Z - V(F)$ kümesindeki her tepenin Y kümesinde bir komşusu vardır. Böylece $(Z - V(F)) \cup Y$ kümesindeki tüm tepeler aynı bileşendedir. Bu bileşen C_1 olsun. Ayrıca, $X - V(F)$ kümesindeki her tepenin $V - V(F)$ kümesinde bir komşusu vardır. Yani, $(X - V(F)) \cup (V - V(F))$ kümesindeki tüm tepeler aynı bileşendedir. Bu bileşen C_2 olsun. $n \geq 5$ olduğundan geriye kalan çizgede $X - V(F)$ kümesindeki bir tepeyi $Z - V(F)$ kümesindeki bir tepeye bağlayan hatasız bir ayrıt mutlaka vardır. Bu C_1 bileşeninin C_2 bileşenine en az bir hatasız ayrıt ile bağlı olduğu anlamına gelir. Ayrıca, $G_n - F$ çizgesinde $U - V(F)$ kümesindeki her tepenin $X - V(F)$ kümesinde bir komşusu olduğundan, $G_n - F$ çizgesi bağlantılıdır. Bu ise kabul ile çelişir.

(ii) $V(F_2) \cap U = \emptyset$ ve $V(F_2) \cap V = \emptyset$ olsun.

$G_n - F$ çizgesinde $U - V(F)$ ve $V - V(F)$ kümelerindeki tepeler tarafından etkilenmiş $G_n[U - V(F)]$ ve $G_n[V - V(F)]$ altçizgeleri bağlantılıdır. Geriye kalan çizgede $X - V(F)$ kümesindeki her tepenin $V - V(F)$ kümesinde tam olarak bir komşusu ve $Z - V(F)$ kümesindeki her tepenin $X - V(F)$ kümesinde en az bir komşusu vardır. Bu ise $(X - V(F)) \cup (Z - V(F)) \cup (V - V(F))$ kümesindeki tüm tepelerin aynı bileşende olduğunu gösterir. Bu bileşen C olsun. Ayrıca, $G_n[U - V(F)]$ ve $G_n[Y - V(F)]$ etkilenmiş altçizgeleri bağlantılı ve $n \geq 5$ olduğundan, geriye kalan çizgede $Y - V(F)$ kümesindeki bir tepeyi $Z - V(F)$ kümesindeki bir tepeye bağlayan ve $U - V(F)$ kümesindeki bir tepeyi $X - V(F)$ kümesindeki bir tepeye bağlayan birer hatasız ayrıt mutlaka vardır. Böylece, $G_n[U - V(F)]$ ve $G_n[Y - V(F)]$ çizgeleri hatasız ayrıtlar ile C bileşenine bağlı olur. Dolayısıyla, $G_n - F$ çizgesi bağlantılıdır. Bu ise kabul ile çelişir.

(iii) $|V(F_2) \cap U| = 1$ ve $|V(F_2) \cap V| = 1$ olsun.

$G_n - F$ çizgesinde $U - V(F)$ ve $V - V(F)$ kümelerindeki tepeler tarafından etkilenmiş $G_n[U - V(F)]$ ve $G_n[V - V(F)]$ çizgeleri ya bağlantılı ya da iki bileşene sahip bağlantısız birer çizgedir. Geriye kalan çizgede $Z - V(F)$ kümesindeki her tepenin $Y - V(F)$ kümesinde tam olarak bir komşusu ve $X - V(F)$ kümesindeki her tepenin $Z - V(F)$ kümesinde en az bir komşusu vardır. Yani $(X - V(F)) \cup (Z - V(F)) \cup (Y - V(F))$ kümesindeki tüm tepeler aynı bileşendedir. Bu bileşen C olsun. Ayrıca, geriye kalan çizgede $U - V(F)$ kümesindeki her tepenin $X - V(F)$ kümesinde ve $V - V(F)$ kümesindeki her tepenin $X - V(F)$ kümesinde bir komşusu olduğundan, $G_n[U - V(F)]$ ve $G_n[V - V(F)]$ çizgelerindeki tüm tepeler C bileşenine bağlı olur. Dolayısıyla, $G_n - F$ çizgesi bağlantılıdır. Bu ise kabul ile çelişir.

(4) $V(F_1) \cap U = \emptyset$ ve $V(F_1) \cap V = \emptyset$ olsun.

Yardımcı Teorem 4.2.1 ile $|V(F_1) \cap Y| = 3$ iken $V(F_2) \subseteq U$ ya da $V(F_2) \subseteq V$ ya da $V(F_2) \subseteq Y$ ise $G_n - F$ çizgesinin bağlantılı olduğu bilinmektedir. Bu ise F kümesinin $K_{1,2}$–altyapı–kesim küme olması ile çelişir. Bu nedenle, $|V(F_1) \cap Y| = 3$ durumu için sadece $V(F_2) \nsubseteq U$, $V(F_2) \nsubseteq V$ ve $V(F_2) \nsubseteq Y$ durumlarını incelemek yeterlidir.

Ayrıca, U kümesi ile V kümesi kendi aralarında yer değiştirilebilir olduğundan $V(F_2) \cap U \neq \emptyset$ ve $V(F_2) \cap V \neq \emptyset$ durumlarından sadece $V(F_2) \cap U \neq \emptyset$ durumu dikkate alınarak ispat yapılmıştır.

$G_n - F$ çizgesinde $U - V(F)$ ve $V - V(F)$ kümesindeki tepeler tarafından etkilenmiş altçizgelerin her biri bağlantılıdır. $X - V(F)$ kümesindeki her tepenin $V - V(F)$ kümesinde tam olarak bir ve $Z - V(F)$ kümesindeki her tepenin de $X - V(F)$ kümesinde en az bir komşusu vardır. Dolayısıyla, $(X - V(F)) \cup (Z - V(F)) \cup (V - V(F))$ kümesindeki tüm tepeler aynı bileşendedir. Bu bileşen C olsun.

(i) $V(F_2) \cap Y = \emptyset$ ve $V(F_2) \cap V = \emptyset$ ya da $|V(F_2) \cap U| = 1$ ve $|V(F_2) \cap V| = 1$ olsun.

$G_n - F$ çizgesinde $Y - V(F)$ kümesindeki tepeler tarafından etkilenmiş altçizge bağlantılıdır. Ayrıca, $n \geq 5$ olduğundan $|Y - V(F)| \geq 2$, $|N_{G_n - F}(Y - V(F)) \cap Z| \geq 1$, $|U - V(F)| \geq 7$ ve $|X - V(F)| \geq 6$ olduğu açıktır. Bu nedenle, geriye kalan çizgede $Y - V(F)$ kümesindeki bir tepeyi $Z - V(F)$ kümesindeki bir tepeye ve $U - V(F)$ kümesindeki bir tepeyi de $X - V(F)$ kümesindeki bir tepeye bağlayan en az bir hatasız ayrıt vardır. O halde, $G_n - F$ çizgesi bağlantılıdır. Bu ise kabul ile çelişir.

(ii) $V(F_2) \cap Y \neq \emptyset$ olsun.

$G_n - F$ çizgesinde U kümesi hatasız olup $X - V(F)$ kümesindeki her tepenin $U - V(F)$ kümesinde bir komşusu vardır. Böylece $V(C) \cup (U - V(F))$ kümesindeki tüm tepeler aynı bileşendedir. Yani, $G_n - Y - F$ çizgesi bağlantılıdır.

- $V(F_1) \cap Y = \emptyset$ olsun.

  $G_n - F$ çizgesinde $Y - V(F)$ kümesindeki tepeler tarafından etkilenmiş altçizge bağlantılıdır. Ayrıca, $n \geq 5$ olduğundan $|Y - V(F)| \geq 2$ ve $|N_{G_n - F}(Y - V(F)) \cap Z| \geq 1$ olup $Y - V(F)$ kümesindeki bir tepeyi $Z - V(F)$ kümesindeki bir tepeye bağlayan en az bir hatasız ayrıt vardır. Böylece, $G_n[Y - V(F)]$ etkilenmiş altçizgesi en az bir hatasız ayrıt ile $G_n - Y - F$ çizgesine bağlı olur. O halde, $G_n - F$ çizgesi bağlantılıdır. Bu ise kabul ile çelişir.

- $V(F_1) \cap Y \neq \emptyset$ olsun.

  $n = 5$ olmak üzere $|V(F_1) \cap Y| = 3$ ve $|V(F_2) \cap Y| = 2$ ise, $G_n - F$ çizgesinde $Y - V(F)$ kümesinin tepeleri tarafından etkilenmiş altçizge boş bir çizgedir. O halde, $G_n - F$ çizgesi $G_n - Y - F$ çizgesine izomorf olup bağlantılıdır. Diğer durumlarda $G_n - F$ çizgesinde $Y - V(F)$ kümesindeki tepeler tarafından etkilenmiş altçizge ya bir yol çizgeye izomorf olup bağlantılıdır ya da iki bileşene sahip bağlantısız bir çizgedir. Geriye kalan çizgede $Y - V(F)$ kümesindeki her tepenin (eğer varsa) $Z - V(F)$ kümesinde bir komşusu vardır. Böylece $Y - V(F)$ kümesindeki tüm tepeler $G_n - Y - F$ çizgesine bağlı olur. Dolayısıyla, $G_n - F$ çizgesi bağlantılıdır. Bu ise kabul ile çelişir.

Tüm durumlar incelendiğinde $G_n - F$ çizgesini bağlantısız yapmak için iki elemanlı bir $K_{1,2}$–altyapı–kesim kümenin yeterli olamayacağı görülür. Buradan, n tek ve $n \geq 5$ olmak üzere $\kappa^s(G_n; K_{1,2}) \geq 3$ elde edilir. □

Aşağıdaki teorem ile $n \geq 5$ olmak üzere G_n çizgesinin $K_{1,2}$–yapı bağlantılılık ve $K_{1,2}$–altyapı bağlantılılık değerleri ispat edilmiştir.

Teorem 4.2.9 n tek ve $n \geq 5$ olmak üzere $\kappa^s(G_n; K_{1,2}) = \kappa(G_n; K_{1,2}) = 3$ eşitliği sağlanır.

İspat. F_1, F_2 ve F_3 çizgeleri G_n çizgesinin sırasıyla $\{u_0, u_1, x_1\}$, $\{u_3, u_4, u_5\}$ ve $\{x_3, v_3, v_4\}$ tepeleri tarafından etkilenmiş altçizgeleri olsun. F_1, F_2 ve F_3 çizgelerinin her birinin $K_{1,2}$ çizgesine izomorf olduğu açıktır. $F = \{F_1, F_2, F_3\}$ olmak üzere u_2 tepesi $G_n - F$ çizgesinde izole tepedir. Dolayısıyla, $n \geq 5$ olmak üzere $\kappa(G_n; K_{1,2}) \leq 3$ elde edilir.

Yardımcı Teorem 4.2.8, $\kappa(G_n; K_{1,2}) \geq \kappa^s(G_n; K_{1,2})$ ve $n \geq 5$ olmak üzere $\kappa(G_n; K_{1,2}) \leq 3$ eşitsizlikleri ile $3 \geq \kappa(G_n; K_{1,2}) \geq \kappa^s(G_n; K_{1,2}) \geq 3$ olup $\kappa(G_n; K_{1,2}) = \kappa^s(G_n; K_{1,2}) = 3$ elde edilir. □

4.2.3 $K_{1,3}$–Yapı Bağlantılılık ve $K_{1,3}$–Altyapı Bağlantılılık

Bu bölümde n tek ve $n \geq 3$ olmak üzere Goldberg snark G_n için $K_{1,3}$–yapı bağlantılılık ve $K_{1,3}$–altyapı bağlantılılık değerleri incelenmiştir.

Öncelikle aşağıdaki iki teorem ile Yardımcı Teorem 4.2.3 kullanılarak $n = 3$ için G_n çizgesinin $K_{1,3}$–altyapı bağlantılılık değeri ispat edilmiştir.

Teorem 4.2.10 $n = 3$ olmak üzere $\kappa^s(G_n; K_{1,3}) = 2$ eşitsizliği sağlanır.

İspat. $K_{1,2}$ çizgesi $K_{1,3}$ çizgesinin bağlantılı bir altçizgesi olduğundan $\kappa^s(G_n; K_{1,3}) \leq \kappa^s(G_n; K_{1,2})$ eşitsizliği sağlanır. Verilen eşitsizlik ve Teorem 4.2.7 yardımıyla $\kappa^s(G_3; K_{1,3}) \leq 2$ elde edilir.

Yardımcı Teorem 4.2.3 ile $\kappa^s(G_3; K_{1,3}) \geq 2$ olduğundan ispat tamamlanmış olur. □

Çalışmanın geri kalanında $n = 3$ için G_n çizgesinin $K_{1,3}$–yapı bağlantılılık değeri ve n tek, $n \geq 5$ için ise G_n çizgesinin hem $K_{1,3}$–yapı bağlantılılık hem de $K_{1,3}$–altyapı bağlantılılık değeri incelenmiştir.

Aşağıdaki yardımcı teorem ile n tek ve $n \geq 5$ olmak üzere G_n çizgesinin $K_{1,3}$–altyapı bağlantılılık değeri için bir alt sınır elde edilmiştir.

Yardımcı Teorem 4.2.11 n tek ve $\kappa^s(G_n; K_{1,3}) \geq 3$ eşitsizliği sağlanır.

İspat. Çelişki elde etmek için F çizgeler kümesinin G_n çizgesinin iki elemanlı bir $K_{1,3}$-altyapı–kesim kümesi olduğu kabul edilsin. $F = \{F_1, F_2\}$ olsun. Eğer F kümesinin elemanlarından hiçbiri $K_{1,3}$ çizgesine izomorf değilse F aynı zamanda bir $K_{1,2}$–altyapı–kesim kümedir. Yardımcı Teorem 4.2.8 ile $n \geq 5$ olmak üzere G_n çizgesinin $K_{1,2}$–altyapı–kesim kümesinin en az üç elemanlı olduğu bilinmektedir. Bu ise F kümesinin iki elemanlı bir $K_{1,3}$–altyapı–kesim küme olması ile çelişir. O halde, F kümesinin elemanlarından biri $K_{1,3}$ çizgesine izomorf olmalıdır. Genelliği kaybetmeden F_1 çizgesi $K_{1,3}$ çizgesine izomorf olsun.

Durum 1. $F_2 \cong K_1$ olsun.

(1) $|V(F_1) \cap U| = 3$ olsun.

Bu durum için $|V(F_1) \cap X| = 1$ olduğu açıktır. $G_n - F$ çizgesinde $V - V(F)$ ve $Y - V(F)$ kümesindeki tepeler tarafından etkilenmiş altçizgelerin her biri sırasıyla P_{2n-1} ve P_{n-1} yol çizgelerine izomorf olup bağlantılıdır.

(i) $V(F_2) \subseteq U$ ya da $V(F_2) \subseteq V$ olsun.

$G_n - F$ çizgesinde $Z - V(F)$ kümesindeki her tepenin $Y - V(F)$ kümesinde, $X - V(F)$ kümesindeki her tepenin de $Z - V(F)$ kümesinde tam olarak bir komşusu vardır. O halde $(Y - V(F)) \cup (Z - V(F)) \cup (X - V(F))$ kümesindeki tüm tepeler aynı bileşendedir. Bu bileşen C olsun. $n \geq 5$ olduğundan geriye kalan çizgede $V - V(F)$ kümesindeki bir tepeyi $X - V(F)$ kümesindeki bir tepeye bağlayan en az bir hatasız ayrıt mutlaka vardır. $V - V(F)$ kümesindeki tepeler tarafından etkilenmiş altçizge bağlantılı olduğundan, bu altçizge C bileşenine bağlanmış olur. Ayrıca, $U - V(F)$ kümesindeki her tepenin $X - V(F)$ kümesinde bir komşusu olduğundan, $U - V(F)$ kümesindeki tüm tepeler de C bileşenine bağlıdır. O halde, $G_n - F$ çizgesi bağlantılıdır. Bu ise kabul ile çelişir.

(ii) $V(F_2) \subseteq Y$ ya da $V(F_2) \subseteq Z$ olsun.

$G_n - F$ çizgesinde V kümesi hatasız olduğundan, $X - V(F)$ kümesindeki her tepenin $V - V(F)$ kümesinde tam olarak bir komşusu vardır. $Z - V(F)$ kümesindeki her tepenin de $X - V(F)$ kümesinde en az bir komşusu vardır. O halde, $(V - V(F)) \cup (X - V(F)) \cup (Z - V(F))$ kümesindeki tüm tepeler aynı bileşendedir. Bu bileşen C olsun. $n \geq 5$ olduğundan $Y - V(F)$ kümesindeki bir tepeyi $Z - V(F)$ kümesindeki bir tepeye bağlayan hatasız bir ayrıt mutlaka vardır. Böylece, $G_n[Y - V(F)]$ etkilenmiş bağlantılı altçizge bu hatasız ayrıt ile C bileşenine bağlanır. Ayrıca, $U - V(F)$ kümesindeki her tepenin $X - V(F)$ kümesinde bir komşusu olduğundan, $U - V(F)$ kümesindeki tüm tepeler C bileşenine bağlı olur. O halde, $G_n - F$ çizgesi bağlantılıdır. Bu ise kabul ile çelişir.

(iii) $V(F_2) \subseteq X$ olsun.

$G_n - F$ çizgesinde $Z - V(F)$ kümesindeki her tepenin $Y - V(F)$ kümesinde, $X - V(F)$ kümesindeki her tepenin de $Z - V(F)$ kümesinde tam olarak bir komşusu vardır. Dolayısıyla $(Y - V(F)) \cup (Z - V(F)) \cup (X - V(F))$ kümesindeki tüm tepeler aynı bileşendedir. Bu bileşen C olsun. $G_n - F$ çizgesinde V kümesi hatasız olduğundan $X - V(F)$ kümesindeki her tepenin $V - V(F)$ kümesinde tam olarak bir komşusu olup C bileşeni ile $V - V(F)$ kümesinin tepeleri tarafından etkilenmiş bağlantılı altçizge birbirine bağlı olur. Geriye kalan çizgede $U - V(F)$ kümesindeki tepeler tarafından etkilenmiş altçizge P_{2n-3} çizgesine izomorf olup, $n \geq 5$ olduğundan $U - V(F)$ kümesindeki bir tepeyi $X - V(F)$ kümesindeki bir tepeye bağlayan dolayısıyla C bileşenine bağlayan en az bir hatasız ayrıt vardır. Böylece, $G_n - F$ çizgesi bağlantılıdır. Bu ise kabul ile çelişir.

(2) $|V(F_1) \cap V| = 3$ olsun.

$U \cup X$ kümesi ile $V \cup X$ kümesi kendi aralarında yer değiştirilebilir olduğundan, Durum 1 (1) için yapılan açıklamalar bu durum için de geçerlidir.

(3) $|V(F_1) \cap U| = 1$ olsun. Yani, $|V(F_1) \cap X| = 1$, $|V(F_1) \cap Z| = 1$, $|V(F_1) \cap U| = 1$, $|V(F_1) \cap V| = 1$ olsun.

U kümesi ile V kümesi kendi aralarında yer değiştirilebilir olduğundan $V(F_2) \subset U$ ve $V(F_2) \subset V$ durumlarından sadece $V(F_2) \subset U$ durumu dikkate alınarak ispat yapılmıştır.

$G_n - F$ çizgesinde $V - V(F)$ ve $Y - V(F)$ kümesindeki tepeler tarafından etkilenmiş altçizgelerin her biri bağlantılıdır.

(i) $V(F_2) \cap X = \emptyset$ ve $V(F_2) \cap V = \emptyset$ olsun.

$G_n - F$ çizgesinde $X - V(F)$ kümesindeki her tepenin $V - V(F)$ kümesinde tam olarak bir ve $Z - V(F)$ kümesindeki her tepenin de $X - V(F)$ kümesinde tam olarak iki komşusu vardır. O halde, $(V - V(F)) \cup (X - V(F)) \cup (Z - V(F))$ kümesindeki tüm tepeler aynı bileşendedir. Bu bileşen C olsun. $n \geq 5$ olduğundan $Y - V(F)$ kümesindeki bir tepeyi $Z - V(F)$ kümesindeki bir tepeye yani C bileşenine bağlayan en az bir hatasız ayrıt vardır. Ayrıca, $G_n - F$ çizgesinde $U - V(F)$ kümesindeki her tepenin $X - V(F)$ kümesinde bir komşusu olup, $U - V(F)$ kümesindeki tüm tepeler de C bileşenine bağlı olur. O halde, $G_n - F$ çizgesi bağlantılıdır. Bu ise kabul ile çelişir.

(ii) $V(F_2) \subseteq X$ olsun.

$G_n - F$ çizgesinde $Z - V(F)$ kümesindeki her tepenin $Y - V(F)$ kümesinde, $X - V(F)$ kümesindeki her tepenin de $V - V(F)$ kümesinde tam olarak bir komşusu vardır. Böylece, $(Z - V(F)) \cup (Y - V(F))$ ve $(X - V(F)) \cup (V - V(F))$ kümelerindeki tepeler tarafından etkilenmiş altçizgelerin her biri bağlantılıdır. Bu çizgeler sırasıyla C_1 ve C_2 olsun. $G_n - F$ çizgesinde $Z - V(F)$ kümesindeki her tepenin $X - V(F)$ kümesinde en az bir komşusu olduğundan, C_1 ve C_2 çizgeleri birbirine bağlı olur. Yani, $G_n - U - F$ çizgesi bağlantılı olur. Geriye kalan çizgede $U - V(F)$ kümesinin tepeleri tarafından etkilenmiş altçizge P_{2n-1} yol çizgesine izomorf olup $U - V(F)$ kümesindeki bir tepeyi $X - V(F)$ kümesindeki bir tepeye bağlayan hatasız bir ayrıt mutlaka vardır. Böylece, $G_n - F$ çizgesi bağlantılıdır. Bu ise kabul ile çelişir.

(4) $V(F_1) \cap U = \emptyset$ ve $V(F_1) \cap V = \emptyset$ olsun.

U kümesi ile V kümesi kendi aralarında yer değiştirilebilir olduğundan $V(F_2) \subset U$ ve $V(F_2) \subset V$ durumları benzer olup sadece $V(F_2) \subset U$ durumu dikkate alınarak ispat yapılmıştır.

$G_n - F$ çizgesinde $V - V(F)$ ve $U - V(F)$ kümelerindeki tepeler tarafından etkilenmiş altçizgelerin her biri bağlantılıdır. $X - V(F)$ kümesindeki her tepenin $V - V(F)$ kümesinde tam olarak bir komşusu ve $Z - V(F)$ kümesindeki her tepenin de $X - V(F)$ kümesinde en az bir komşusu vardır. O halde, $(V - V(F)) \cup (X - V(F)) \cup (Z - V(F))$ kümesindeki tüm tepeler aynı bileşendedir. Bu bileşen C olsun.

(i) $V(F_2) \cap Y = \emptyset$ olsun.

$n \geq 5$ olduğundan $|Y - V(F)| \geq 2$ ve $|N_{G_n-F}(Y - V(F)) \cap Z| \geq 1$ olup $G_n - F$ çizgesinde $Y - V(F)$ kümesindeki bir tepeyi $Z - V(F)$ kümesindeki bir tepeye bağlayan en az bir hatasız ayrıt vardır. Benzer şekilde, $n \geq 5$ olduğundan $U - V(F)$ kümesindeki bir tepeyi $X - V(F)$ kümesindeki bir tepeye bağlayan hatasız bir ayrıt mutlaka vardır. Geriye kalan çizgede $Y - V(F)$ ve $U - V(F)$ kümelerinin tepeleri tarafından etkilenmiş altçizgelerin her biri bağlantılı olduğundan, bu hatasız ayrıtlar ile $U - V(F)$ ve $Y - V(F)$ kümesindeki tüm tepeler C bileşenine bağlı olur. O halde, $G_n - F$ çizgesi bağlantılıdır. Bu ise kabul ile çelişir.

(ii) $V(F_2) \subseteq Y$ olsun.

$G_n - F$ çizgesinde $Y - V(F)$ kümesinin tepeleri tarafından etkilenmiş altçizge ya bir yol çizgeye izomorf olup bağlantılıdır ya da iki bileşene sahip bağlantısız bir çizgedir. $Y - V(F)$ kümesindeki her tepenin $Z - V(F)$ kümesinde dolayısıyla C bileşeninde bir komşusu vardır. Ayrıca, $X - V(F)$ kümesindeki her tepenin $U - V(F)$ kümesinde bir komşusu vardır. $G_n - F$ çizgesinde U kümesi hatasız olup U kümesinin tepeleri tarafından etkilenmiş altçizge bağlantılı olduğundan, U kümesindeki her tepe C bileşenine bağlı olur. O halde, $G_n - F$ çizgesi bağlantılıdır. Bu ise kabul ile çelişir.

Durum 2. $F_2 \cong K_{1,1}$ olsun.

(1) $|V(F_1) \cap U| = 3$ olsun.

$G_n - F$ çizgesinde $V - V(F)$ ve $Y - V(F)$ kümesindeki tepeler tarafından etkilenmiş altçizgelerin her biri bağlantılıdır.

(i) $V(F_2) \cap U \neq \emptyset$ ya da $V(F_2) \cap V \neq \emptyset$ olsun.

$G_n - F$ çizgesinde $Z - V(F)$ kümesindeki her tepenin $Y - V(F)$ kümesinde tam olarak bir, $X - V(F)$ kümesindeki her tepenin ise $Z - V(F)$ kümesinde en az bir komşusu vardır. Ayrıca, $n \geq 5$ olduğundan $V - V(F)$ kümesindeki bir tepeyi $X - V(F)$ kümesindeki bir tepeye bağlayan en az bir hatasız ayrıt vardır. Böylece, $(Y - V(F)) \cup (X - V(F)) \cup (Z - V(F)) \cup (V - V(F))$ kümesindeki tüm tepeler aynı bileşendedir. Yani, $G_n - U - F$ çizgesi bağlantılıdır.

- $V(F_2) \cap U \neq \emptyset$ olsun.

  $G_n - F$ çizgesinde $U - V(F)$ kümesinin tepeleri tarafından etkilenmiş altçizge ya bir yol çizgeye izomorf olup bağlantılıdır ya da iki bileşene sahip bağlantısız bir çizgedir. $U - V(F)$ kümesindeki her tepenin $X - V(F)$ kümesinde bir komşusu olduğundan, $U - V(F)$ kümesindeki tüm tepeler $G_n - U - F$ çizgesine bağlı olur. O halde, $G_n - F$ çizgesi bağlantılıdır. Bu ise kabul ile çelişir.

- $V(F_2) \cap V \neq \emptyset$ olsun.

  $G_n - F$ çizgesinde $U - V(F)$ kümesinin tepeleri tarafından etkilenmiş altçizge P_{2n-3} yol çizgesine izomorf olup bağlantılıdır. $n \geq 5$ olduğundan $U - V(F)$ kümesindeki bir tepeyi $X - V(F)$ kümesindeki bir tepeye bağlayan en az bir hatasız ayrıt vardır. Böylece, $G_n[U - V(F)]$ etkilenmiş altçizgesi $G_n - U - F$ çizgesine en az bir hatasız ayrıt ile bağlı olur. Dolayısıyla, $G_n - F$ çizgesi bağlantılıdır. Bu ise kabul ile çelişir.

(ii) $V(F_2) \cap Y \neq \emptyset$ ya da $V(F_2) \cap Z \neq \emptyset$ olsun.

$G_n - F$ çizgesinde $X - V(F)$ kümesindeki her tepenin $V - V(F)$ kümesinde tam olarak bir, $Z - V(F)$ kümesindeki her tepenin ise $X - V(F)$ kümesinde en az bir komşusu vardır. Böylece, $(V - V(F)) \cup (X - V(F)) \cup (Z - V(F))$ kümesindeki tüm tepeler aynı bileşendedir. Ayrıca, $n \geq 5$ ve $G_n[U - V(F)]$ ve $G_n[Y - V(F)]$ altçizgelerin her biri bağlantılı olduğundan, $U - V(F)$ kümesindeki bir tepeyi $X - V(F)$ kümesindeki bir tepeye bağlayan en az bir hatasız ayrıt ve $Y - V(F)$ kümesindeki bir tepeyi $Z - V(F)$ kümesindeki bir tepeye bağlayan en az bir hatasız ayrıt vardır. Dolayısıyla, geriye kalan çizgedeki tüm tepeler aynı bileşende olup $G_n - F$ çizgesi bağlantılıdır. Bu ise kabul ile çelişir.

(2) $|V(F_1) \cap V| = 3$ olsun.

$U \cup X$ kümesi ile $V \cup X$ kümesi ve U kümesi ile V kümesi kendi aralarında yer değiştirilebilir olduğundan Durum 2 (1) için yapılan açıklamalar bu durum için de geçerlidir.

(3) $|V(F_1) \cap U| = 1$ olsun.

U kümesi ile V kümesi kendi aralarında yer değiştirilebilir olduğundan $V(F_2) \subset U$ durumu ile $V(F_2) \subset V$ durumu ve $|V(F_2) \cap U| = |V(F_2) \cap X| = 1$ durumu ile $|V(F_2) \cap V| = |V(F_2) \cap X| = 1$ durumu benzerdir. Bu nedenle, bu durumlardan sadece $V(F_2) \subset U \cup X$ durumu dikkate alınarak ispat yapılmıştır.

$G_n - F$ çizgesinde $V - V(F)$ ve $Y - V(F)$ kümelerindeki tepeler tarafından etkilenmiş altçizgelerin her biri bağlantılıdır.

$G_n - F$ çizgesinde $X - V(F)$ kümesindeki her tepenin $V - V(F)$ kümesinde tam olarak bir, $Z - V(F)$ kümesindeki her tepenin de $X - V(F)$ kümesinde en az bir komşusu vardır. Ayrıca, $n \geq 5$ olduğundan $|Y - V(F)| \geq 3$ ve $|N_{G_n-F}(Y - V(F)) \cap Z| \geq 3$ olup $Y - V(F)$ kümesindeki bir tepeyi $Z - V(F)$ kümesindeki bir tepeye bağlayan bir hatasız ayrıt vardır. Böylece, $(V - V(F)) \cup (X - V(F)) \cup (Z - V(F)) \cup (Y - V(F))$ kümesindeki tüm tepeler aynı bileşendedir. Yani, $G_n - U - F$ çizgesi bağlantılıdır.

(i) $V(F_2) \cap U \neq \emptyset$ olsun.

$G_n - F$ çizgesinde $U - V(F)$ kümesindeki tepeler tarafından etkilenmiş altçizge ya bir yol çizgeye izomorftur ya da iki bileşene sahip bağlantısız bir çizgedir. Geriye kalan çizgede $U - V(F)$ kümesindeki her tepenin $X - V(F)$ kümesinde yani $G_n - U - F$ çizgesinde bir komşusu vardır. O halde, $G_n - F$ çizgesi bağlantılıdır. Bu ise kabul ile çelişir.

(ii) $V(F_2) \cap U = \emptyset$ olsun.

$G_n - F$ çizgesinde $U - V(F)$ kümesindeki tepeler tarafından etkilenmiş altçizge P_{2n-1} yol çizgesine izomorf olup bağlantılıdır. $X - V(F)$ kümesindeki her tepenin $U - V(F)$ kümesinde tam olarak bir komşusu vardır. Böylece, $U - V(F)$ kümesindeki tepeler ile etkilenmiş altçizge hatasız bir ayrıt ile $G_n - U - F$ çizgesine bağlı olur. Dolayısıyla, $G_n - F$ çizgesi bağlantılıdır. Bu ise kabul ile çelişir.

(4) $V(F_1) \cap U = \emptyset$ ve $V(F_1) \cap V = \emptyset$ olsun.

$G_n - F$ çizgesinde $V - V(F)$ ve $U - V(F)$ kümelerindeki tepeler tarafından etkilenmiş altçizgelerin her biri bağlantılıdır.

U kümesi ile V kümesi kendi aralarında yer değiştirilebilir olduğundan $V(F_2) \subset U$ durumu ile $V(F_2) \subset V$ durumu ve $|V(F_2) \cap U| = |V(F_2) \cap X| = 1$ durumu ile $|V(F_2) \cap V| = |V(F_2) \cap X| = 1$ durumu benzerdir. Bu nedenle, bu durumlardan sadece $V(F_2) \subset U \cup X$ durumu dikkate alınarak ispat yapılmıştır.

$G_n - F$ çizgesinde $X - V(F)$ kümesindeki her tepenin $V - V(F)$ kümesinde tam olarak bir, $Z - V(F)$ kümesindeki her tepenin $X - V(F)$ kümesinde en az bir komşusu vardır. Ayrıca, $G_n - F$ çizgesinde $U - V(F)$ kümesindeki bir tepeyi $X - V(F)$ kümesindeki bir tepeye bağlayan en az bir hatasız ayrıt vardır. O halde, $(V - V(F)) \cup (X - V(F)) \cup (Z - V(F)) \cup (U - V(F))$ kümesinin tüm tepeleri aynı bileşendedir. Yani, $G_n - Y - F$ çizgesi bağlantılıldır.

(i) $V(F_2) \cap Y \neq \emptyset$ olsun.

$G_n - F$ çizgesinde $Y - V(F)$ kümesindeki tepeler tarafından etkilenmiş altçizge ya bir yol çizgeye izomorftur ya da iki bileşene sahip bağlantısız bir çizgedir. Geriye kalan çizgede $Y - V(F)$ kümesindeki her tepenin (eğer varsa) $Z - V(F)$ kümesinde yani $G_n - U - F$ çizgesinde bir komşusu vardır. O halde, $G_n - F$ çizgesi bağlantılıdır. Bu ise kabul ile çelişir.

(ii) $V(F_2) \cap Y = \emptyset$ olsun.

$G_n - F$ çizgesinde $Y - V(F)$ kümesindeki tepeler ile etkilenmiş altçizge bir yol yol çizgesine izomorf olup bağlantılıdır. $n \geq 5$ olduğundan $|Y - V(F)| \geq 2$ ve $|N_{G_n - F}(Y - V(F)) \cap Z| \geq 1$ olduğundan $Y - V(F)$ kümesindeki bir tepeyi $Z - V(F)$ kümesindeki bir tepeye bağlayan en az bir hatasız ayrıt vardır. Böylece, $Y - V(F)$ kümesindeki tepeler ile etkilenmiş altçizge hatasız bir ayrıt ile $G_n - Y - F$ çizgesine bağlı olur. Dolayısıyla, $G_n - F$ çizgesi bağlantılıdır. Bu ise kabul ile çelişir.

Durum 3. $F_2 \cong K_{1,2}$ olsun.

(1) $V(F_1) \cap U \neq \emptyset$ olsun.

$G_n - F$ çizgesinde $Y - V(F)$ kümesinin tepeleri tarafından etkilenmiş altçizge bağlantılıdır.

(i) $V(F_2) \cap U \neq \emptyset$ ve $V(F_2) \cap V = \emptyset$ olsun.

$G_n - F$ çizgesinde $V - V(F)$ kümesinin tepeleri tarafından etkilenmiş $G_n[V - V(F)]$ altçizgesi bağlantılıdır. $G_n - F$ çizgesinde $X - V(F)$ kümesindeki her tepenin $V - V(F)$ kümesinde bir komşusu olup $(X - V(F)) \cup (V - V(F))$ kümesindeki tüm tepeler aynı bileşendedir. Bu bileşen C_1 olsun. Ayrıca, $Z - V(F)$ kümesindeki her tepenin de $Y - V(F)$ kümesinde bir komşusu olup $(Y - V(F)) \cup (Z - V(F))$ kümesindeki tüm tepeler aynı bileşendedir. Bu bileşen de C_2 olsun. $X - V(F)$ kümesindeki bir tepeyi $Z - V(F)$ kümesindeki bir tepeye bağlayan en az bir hatasız ayrıt olduğundan, C_1 ve C_2 bileşenleri bu hatasız ayrıt ile birbirine bağlı olur. Yani, $G_n - U - F$ çizgesi bağlantılıdır. Geriye kalan çizgede $U - V(F)$ kümesindeki her tepenin $X - V(F)$ kümesinde bir komşusu vardır. Böylece, $U - V(F)$ kümesindeki tüm tepeler $G_n - U - F$ çizgesine bağlı olur. O halde, $G_n - F$ çizgesi bağlantılıdır. Bu ise kabul ile çelişir.

(ii) $V(F_2) \cap V \neq \emptyset$ ve $V(F_2) \cap U = \emptyset$ olsun.

Eğer $|V(F_1) \cap U| = 1$ ise U kümesi ile V kümesi kendi aralarında yer değiştirilebilir olduğundan, bu durum $V(F_2) \cap U \neq \emptyset$ ve $V(F_2) \cap V = \emptyset$ durumu ile aynı olup Durum 3 (1) (i) için yapılan açıklamalar bu durum için de geçerlidir. O halde $|V(F_1) \cap U| = 3$ olsun.

$G_n - F$ çizgesinde $Y - V(F)$, $V - V(F)$ ve $U - V(F)$ kümelerinin tepeleri tarafından etkilenmiş altçizgelerin her biri bağlantılıdır. $Z - V(F)$ kümesindeki her tepenin $Y - V(F)$ kümesinde bir komşusu vardır. O halde, $(Z - V(F)) \cup (Y - V(F))$ kümesindeki tüm tepeler aynı bileşendedir. Bu bileşen C_1 olsun. İncelenmesi gereken iki alt durum vardır.

- $|V(F_2) \cap V| = 1$ olsun.

  $G_n - F$ çizgesinde $X - V(F)$ kümesindeki her tepenin $V - V(F)$ kümesinde bir komşusu vardır. O halde, $(X - V(F)) \cup (V - V(F))$ kümesindeki tüm tepeler aynı bileşendedir. Bu bileşen C_2 olsun. Ayrıca, geriye kalan çizgede $Z - V(F)$ kümesindeki her tepenin $X - V(F)$ kümesinde bir komşusu olup C_1 ve C_2 bileşenleri birbirine bağlı olur. $n \geq 5$ olduğundan $U - V(F)$ kümesindeki bir tepeyi $X - V(F)$ kümesindeki bir tepeye bağlayan en az bir hatasız ayrıt vardır. Böylece, $U - V(F)$ kümesinin tepeleri tarafından etkilenmiş bağlantılı altçizge hatasız bir ayrıt ile C_2 bileşenine bağlı olur. O halde, $G_n - F$ çizgesi bağlantılıdır. Bu ise kabul ile çelişir.

- $|V(F_2) \cap V| \neq 1$ olsun.

  $G_n - F$ çizgesinde $X - V(F)$ kümesindeki her tepenin $Z - V(F)$ kümesinde bir komşusu vardır. O halde, $X - V(F)$ kümesindeki tüm tepeler C_1 bileşenine bağlıdır. Böylece, $G_n - (U \cup V) - F$ çizgesi bağlantılıdır. Ayrıca $U - V(F)$ kümesindeki bir tepeyi $X - V(F)$ kümesindeki bir tepeye ve $V - V(F)$ kümesindeki bir tepeyi $X - V(F)$ kümesindeki bir tepeye bağlayan en az bir hatasız ayrıt vardır. $V - V(F)$ ve $U - V(F)$ kümelerinin tepeleri tarafından etkilenmiş altçizgelerin her biri bağlantılı olduğundan, bu altçizgeler hatasız ayrıtlar ile $G_n - (U \cup V) - F$ çizgesine bağlı olur. O halde, $G_n - F$ çizgesi bağlantılıdır. Bu ise kabul ile çelişir.

(iii) $V(F_2) \cap U \neq \emptyset$ ve $V(F_2) \cap V \neq \emptyset$ olsun.

Eğer $|V(F_1) \cap U| = 3$ ise Durum 3 (1) (i) için yapılan açıklamalar bu durum için de geçerlidir. O halde $|V(F_1) \cap U| = 1$ olsun. Bu durumda F_1 ve F_2 çizgelerinin tepelerinin aynı blokta olup olmamasına göre iki alt durum vardır.

- F_1 ve F_2 çizgelerinin tepeleri aynı blokta olsun.

  Bu durumda $G_n[U - V(F)]$ ve $G_n[V - V(F)]$ etkilenmiş altçizgelerinin her biri P_{2n-2} yol çizgesine izomorf olup bağlantılıdır. Böylece, Durum 3 (1) (i) için yapılan açıklamalar bu durum için de geçerlidir.

- F_1 ve F_2 çizgelerinin tepeleri farklı blokta olsun.

  $\alpha, \beta \in \{0, 1, \ldots, 2n - 1\}$ olmak üzere $u_\alpha \in V(F_1)$ olsun. Genelliği kaybetmeden α çift tam sayı olsun. Böylece, $V(F_1) = \{u_\alpha, x_{\alpha+1}, v_{\alpha+1}, z_\beta\}$ olsun. $G_n - F$ çizgesinde $Z - V(F)$ kümesindeki her tepenin $Y - V(F)$ kümesinde, $X - V(F) - \{x_\alpha\}$ kümesindeki her tepenin de $Z - V(F)$ kümesinde bir komşusu vardır. Ayrıca, $U - V(F) - \{u_{\alpha+1}\}$ ve $V - V(F) - \{v_\alpha\}$ kümelerindeki her tepenin $X - V(F) - \{x_\alpha\}$ kümesinde bir komşusu vardır. Böylece, $G_n - F - \{x_\alpha, u_{\alpha+1}, v_\alpha\}$ çizgesi bağlantılıdır. Geriye kalan çizgede x_α tepesi hem v_α tepesine hem de $u_{\alpha+1}$ tepesine komşu olduğundan, $G_n - F$ çizgesi bağlantılıdır. Bu ise kabul ile çelişir.

(iv) $V(F_2) \cap U = \emptyset$ ve $V(F_2) \cap V = \emptyset$ olsun.

$G_n - F$ çizgesinde $U - V(F)$, $Y - V(F)$ ve $V - V(F)$ kümelerindeki tepeler tarafından etkilenmiş altçizgelerin her biri bağlantılıdır. $X - V(F)$ kümesindeki her tepenin $V - V(F)$ kümesinde bir, $Z - V(F)$ kümesindeki her tepenin de $X - V(F)$ kümesinde en az bir komşusu vardır. O halde, $(X - V(F)) \cup (V - V(F)) \cup (Z - V(F))$ kümesindeki tüm tepeler aynı bileşendedir. Bu bileşen C olsun. $n \geq 5$ olduğundan $|Y - V(F)| \geq 2$ ve $|N_{G_n - F}(Y - V(F)) \cap Z| \geq 1$ eşitsizlikleri mevcut olup $Y - V(F)$ kümesindeki bir tepeyi $Z - V(F)$ kümesindeki bir tepeye bağlayan en az bir hatasız ayrıt vardır. Ayrıca, $n \geq 5$ olduğundan $U - V(F)$ kümesindeki bir tepeyi $X - V(F)$ kümesindeki bir tepeye bağlayan en az bir hatasız ayrıt mutlaka vardır. $Y - V(F)$ ve $U - V(F)$ kümelerinin tepeleri tarafından etkilenmiş altçizgelerin her biri bağlantılı olduğundan, bu altçizgeler hatasız birer ayrıt ile C bileşenine bağlı olur. O halde, $G_n - F$ çizgesi bağlantılıdır. Bu ise kabul ile çelişir.

(2) $|V(F_1) \cap V| = 3$ olsun.

U kümesi ile V kümesi kendi aralarında yer değiştirilebilir olduğundan, bu durum $|V(F_1) \cap U| = 3$ durumu ile aynı olup Durum 3 (1) için yapılan açıklamalar bu durum için de geçerlidir.

(3) $V(F_1) \cap U = \emptyset$ ve $V(F_1) \cap V = \emptyset$ olsun.

$G_n - F$ çizgesinde $V - V(F)$ ve $U - V(F)$ kümesindeki tepeler tarafından etkilenmiş altçizgelerin her biri bağlantılıdır.

(i) $V(F_2) \cap U \neq \emptyset$ olsun.

$G_n - F$ çizgesinde $X - V(F)$ kümesindeki her tepenin $V - V(F)$ kümesinde tam olarak bir, $Z - V(F)$ kümesindeki her tepenin de $X - V(F)$ kümesinde en az bir komşusu vardır. O halde, $(V - V(F)) \cup (X - V(F)) \cup (Z - V(F))$ kümesindeki tüm tepeler aynı bileşendedir. Bu bileşen C olsun. $n \geq 5$ olduğundan $|Y - V(F)| \geq 2$ ve $|N_{G_n - F}(Y - V(F)) \cap Z| \geq 1$ eşitsizlikleri mevcut olup $Y - V(F)$ kümesindeki bir tepeyi $Z - V(F)$ kümesindeki bir tepeye bağlayan en az bir hatasız ayrıt vardır. Ayrıca, $n \geq 5$ olduğundan $U - V(F)$ kümesindeki bir tepeyi $X - V(F)$ kümesindeki bir tepeye bağlayan en az bir hatasız ayrıt mutlaka vardır. $Y - V(F)$ ve $U - V(F)$ kümelerinin tepeleri tarafından etkilenmiş altçizgelerin her biri bağlantılı olduğundan, bu altçizgeler hatasız birer ayrıt ile C bileşenine bağlı olur. O halde, $G_n - F$ çizgesi bağlantılıdır. Bu ise kabul ile çelişir.

(ii) $V(F_2) \cap Y \neq \emptyset$ olsun.

$G_n - F$ çizgesinde $X - V(F)$ kümesindeki her tepenin $V - V(F)$ kümesinde tam olarak bir, $Z - V(F)$ kümesindeki her tepenin $X - V(F)$ kümesinde en az bir ve $Y - V(F)$ kümesindeki her tepenin $Z - V(F)$ kümesinde tam olarak bir komşusu vardır. Böylece, $(X - V(F)) \cup (Z - V(F)) \cup (Y - V(F)) \cup (V - V(F))$ kümesindeki tüm tepeler aynı bileşendedir. Yani, $G_n - U - F$ çizgesi bağlantılıdır. Ayrıca, $X - V(F)$ kümesindeki her tepenin $U - V(F)$ kümesinde bir komşusu olup $U - V(F)$ kümesinin tepeleri tarafından etkilenmiş bağlantılı altçizge en az bir hatasız ayrıt ile $G_n - U - F$ çizgesine bağlanır. O halde, $G_n - F$ çizgesi bağlantılıdır. Bu ise kabul ile çelişir.

(iii) $V(F_2) \cap U = \emptyset$ ve $V(F_2) \cap Y = \emptyset$ olsun.

$G_n - F$ çizgesinde $X - V(F)$ kümesindeki her tepenin $U - V(F)$ kümesinde bir, $Z - V(F)$ kümesindeki her tepenin de $X - V(F)$ kümesinde en az bir komşusu vardır. O halde, $(U - V(F)) \cup (X - V(F)) \cup (Z - V(F))$ kümesindeki tüm tepeler aynı bileşendedir. Bu bileşen C olsun. $n \geq 5$ olduğundan $|Y - V(F)| \geq 2$ ve $|N_{G_n - F}(Y - V(F)) \cap Z| \geq 1$ olduğu açıktır. Böylece, $V - V(F)$ kümesindeki bir tepeyi $X - V(F)$ kümesindeki bir tepeye ve $Y - V(F)$ kümesindeki bir tepeyi de $Z - V(F)$ kümesindeki bir tepeye bağlayan en az bir hatasız ayrıt vardır. Geriye kalan çizgede $Y - V(F)$ ve $V - V(F)$ kümelerinin tepeleri ile etkilenmiş altçizgelerin her biri bağlantılı olduğundan bu altçizgeler hatasız birer ayrıt ile C bileşenine bağlı olur. O halde, $G_n - F$ çizgesi bağlantılıdır. Bu ise kabul ile çelişir.

Durum 4. $F_2 \cong K_{1,3}$ olsun.

(1) $V(F_1) \cap U \neq \emptyset$ olsun. Yani, $|V(F_1) \cap U| = 3$ ya da $|V(F_1) \cap U| = 1$ olsun.

$G_n - F$ çizgesinde $Y - V(F)$ kümesinin tepeleri tarafından etkilenmiş altçizge bağlantılıdır.

(i) $|V(F_2) \cap U| = 3$ olsun.

$G_n - F$ çizgesinde $Z - V(F)$ kümesindeki her tepenin $Y - V(F)$ kümesinde bir komşusu vardır. O halde, $(Y - V(F)) \cup (Z - V(F))$ kümesindeki tüm tepeler aynı bileşendedir. Bu bileşen C_1 olsun. Ayrıca, $G_n - F$ çizgesinde $V - V(F)$ kümesinin tepeleri ile etkilenmiş altçizge bağlantılı olup $X - V(F)$ kümesindeki her tepenin $V - V(F)$ kümesinde bir komşusu vardır. Dolayısıyla, $(X - V(F)) \cup (V - V(F))$ kümesindeki tüm tepeler aynı bileşendedir. Bu bileşen C_2 olsun. $n \geq 5$ olduğundan geriye kalan çizgede $X - V(F)$ kümesindeki bir tepeyi $Z - V(F)$ kümesindeki bir tepeye bağlayan en az bir hatasız ayrıt vardır. Böylece, C_1 ve C_2 bileşenleri bu hatasız ayrıt ile birbirine bağlı olur. Yani, $G_n - U - F$ çizgesi bağlantılıdır. $G_n - F$ çizgesinde $U - V(F)$ kümesindeki her tepenin $X - V(F)$ kümesinde bir komşusu olup $U - V(F)$ kümesindeki tüm tepeler $G_n - U - F$ çizgesine bağlı olur. O halde, $G_n - F$ çizgesi bağlantılıdır. Bu ise kabul ile çelişir.

(ii) $|V(F_2) \cap V| = 3$ olsun.

(a) $|V(F_1) \cap U| = 3$ olsun.

$G_n - F$ çizgesinde $Z - V(F)$ kümesindeki her tepenin $Y - V(F)$ kümesinde, $X - V(F)$ kümesindeki her tepenin de $Z - V(F)$ kümesinde bir komşusu vardır. O halde, $(Y - V(F)) \cup (Z - V(F)) \cup (X - V(F))$ kümesindeki tüm tepeler aynı bileşendedir. $G_n - F$ çizgesinde $U - V(F)$ ve $V - V(F)$ kümelerinin tepeleri tarafından etkilenmiş altçizgelerin her biri P_{2n-3} yol çizgesine izomorf olup bağlantılıdır. $n \geq 5$ olduğundan geriye kalan çizgede bu yol çizgelerin her ikisindeki en az bir tepenin $X - V(F)$ kümesinde bir komşusu vardır. Böylece, geriye kalan çizgedeki tüm tepeler aynı bileşende olup $G_n - F$ çizgesi bağlantılıdır. Bu ise kabul ile çelişir.

(b) $|V(F_1) \cap U| = 1$ olsun.

$G_n - F$ çizgesinde U kümesi ile V kümesi kendi aralarında yer değiştirilebilir olduğundan bu durum $|V(F_2) \cap U| = 3$ ve $|V(F_1) \cap U| = 1$ durumu ile aynıdır. Bu nedenle, Durum 4 (1) (i) için yapılan açıklamalar bu durum için de geçerlidir.

(iii) $V(F_2) \cap U = \emptyset$ ve $V(F_2) \cap V = \emptyset$ olsun.

$G_n - F$ çizgesinde $V - V(F)$ ve $U - V(F)$ kümesindeki tepeler tarafından etkilenmiş altçizgelerin her biri bağlantılıdır. $X - V(F)$ kümesindeki her tepenin $V - V(F)$ kümesinde bir komşusu, $Z - V(F)$ kümesindeki her tepenin de $X - V(F)$ kümesinde en az bir komşusu vardır. O halde, $(V-V(F)) \cup (X-V(F)) \cup (Z-V(F))$ kümesindeki tüm tepeler aynı bileşendedir. Bu bileşen C olsun. $n \geq 5$ olduğundan $|Y - V(F)| \geq 2$ ve $|N_{G_n-F}(Y - V(F)) \cap Z)| \geq 1$ olduğundan $Y - V(F)$ kümesindeki bir tepeyi $Z - V(F)$ kümesindeki bir tepeye bağlayan en az bir hatasız ayrıt vardır. Ayrıca, $n \geq 5$ olduğundan $U - V(F)$ kümesindeki bir tepeyi de $X - V(F)$ kümesindeki bir tepeye bağlayan en az bir hatasız ayrıt mutlaka vardır. $Y - V(F)$ ve $U - V(F)$ kümelerinin tepeleri ile etkilenmiş $G_n[Y - V(F)]$ ve $G_n[U - V(F)]$ altçizgeleri bağlantılı olduğundan bu bağlantılı çizgeler hatasız ayrıtlar ile C bileşenine bağlı olur. O halde $G_n - F$ çizgesi bağlantılıdır. Bu ise kabul ile çelişir.

(iv) $V(F_2) \cap U \neq \emptyset$ ve $V(F_2) \cap V \neq \emptyset$ olsun.

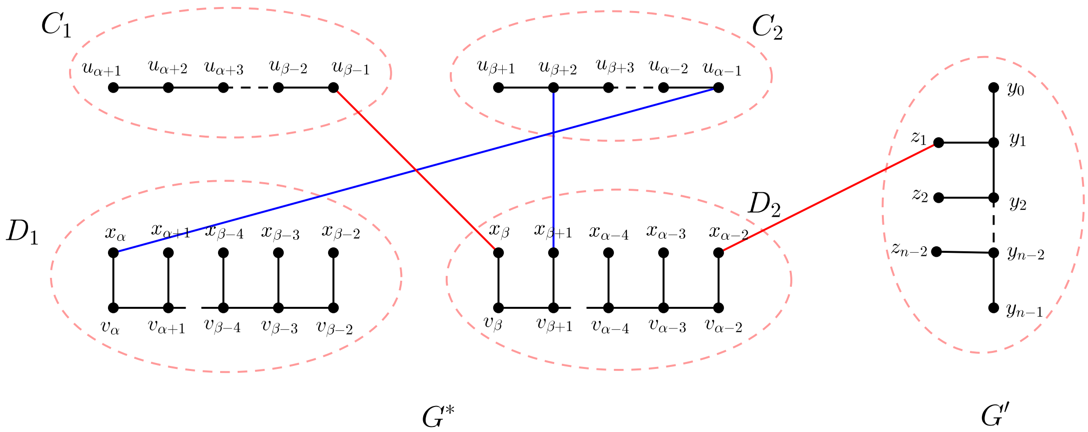
$|V(F_2) \cap U| = 1$, $|V(F_2) \cap V| = 1$, $|V(F_2) \cap X| = 1$ ve $|V(F_2) \cap Z| = 1$ olur. F_1 ve F_2 çizgelerinin ikisi de $K_{1,3}$ çizgesine izomorf olduğundan $|V(F_1) \cap U| = 3$ durumu Durum 4 (1) (i) durumundaki bir F kümesi ile aynıdır. Bu nedenle, $|V(F_1) \cap U| = 1$ durumunu incelemek yeterlidir. Bu durumda $|V(F_1) \cap U| = 1$, $|V(F_1) \cap V| = 1$, $|V(F_1) \cap X| = 1$ ve $|V(F_1) \cap Z| = 1$ olur.

$G_n - F$ çizgesinde $U - V(F)$ ve $V - V(F)$ kümelerinin tepeleri tarafından etkilenmiş altçizgelerden en az biri bağlantılı olsun. Genelliği kaybetmeden $V - V(F)$ kümesinin tepeleri tarafından etkilenmiş altçizge bağlantılı olsun. Bu durum Durum 4 (1) (i) durumu ile aynıdır. Yani, $G_n - F$ çizgesi bağlantılıdır. Bu ise kabul ile çelişir. O halde $U - V(F)$ ve $V - V(F)$ kümelerinin tepeleri tarafından etkilenmiş altçizgelerin her ikisi de bağlantısız olsun. $\alpha, \beta \in \{0, 1, \ldots, 2n-1\}$ olmak üzere $u_\alpha \in V(F_1)$ ve $u_\beta \in V(F_2)$ olsun. Genelliği kaybetmeden $\alpha < \beta$ olsun. $G_n - F$ çizgesinde $u_{\alpha+1}, u_{\alpha+2}, \ldots, u_{\beta-1}$ tepeleri bir yol çizge üzerindedir. Yani bu tepeler aynı bileşendedir. Bu bileşen C_1 olsun. Benzer şekilde, $G_n - F$ çizgesinde $u_{\beta+1}, u_{\beta+2}, \ldots, u_{\alpha-1}$ tepeleri bir yol çizge üzerindedir. Yani bu tepeler aynı bileşendedir. Bu bileşen C_2 olsun.

(a) α ve β tek tam sayı olsun.

$G_n - F$ çizgesinde $v_\alpha, v_{\alpha+1}, \ldots, v_{\beta-2}$ tepeleri bir yol çizge üzerindedir. Bu tepelere karşılık gelen $x_\alpha, x_{\alpha+1}, \ldots, x_{\beta-2}$ tepeleri sırasıyla $v_\alpha, v_{\alpha+1}, \ldots, v_{\beta-2}$ tepelerine komşudur. Böylece, $v_\alpha, v_{\alpha+1}, \ldots, v_{\beta-2}, x_\alpha, x_{\alpha+1}, \ldots, x_{\beta-2}$ tepeleri aynı bileşendedir. Bu bileşen D_1 olsun. Benzer şekilde, $G_n - F$ çizgesinde $v_\beta, v_{\beta+1}, \ldots, v_{\alpha-2}$ tepeleri bir yol çizge üzerindedir. Bu tepelere karşılık gelen $x_\beta, x_{\beta+1}, \ldots, x_{\alpha-2}$ tepeleri sırasıyla $v_\beta, v_{\beta+1}, \ldots, v_{\alpha-2}$ tepelerine komşudur. O halde, $v_\beta, v_{\beta+1}, \ldots, v_{\alpha-2}, x_\beta, x_{\beta+1}, \ldots, x_{\alpha-2}$ tepeleri aynı bileşendedir. Bu bileşen D_2 olsun.

C_2 bileşeninden $u_{\beta+2}$ ve $u_{\alpha-1}$ tepeleri ele alınsın. C_2 bileşenindeki $u_{\beta+2}$ tepesi D_2 bileşenindeki $x_{\beta+1}$ tepesine, $u_{\alpha-1}$ tepesi de D_1 bileşenindeki x_α tepesine komşudur (Bknz. Şekil 4.1).



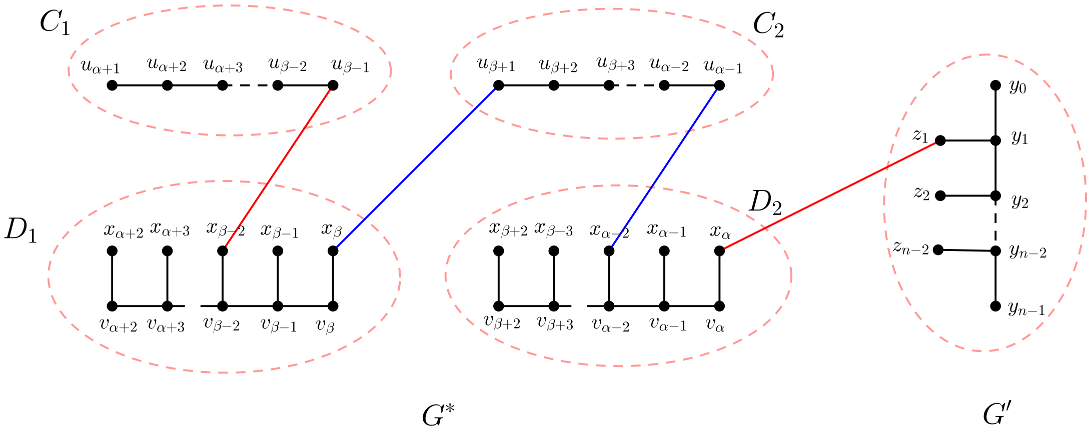
Şekil 4.1 α ve β tek tam sayı olduğunda $G_n - F$ çizgesi

(b) α ve β çift tam sayı olsun.

$G_n - F$ çizgesinde $v_{\alpha+2}, v_{\alpha+3}, \ldots, v_\beta$ tepeleri bir yol çizge üzerindedir. Bu tepelere karşılık gelen $x_{\alpha+2}, x_{\alpha+3}, \ldots, x_\beta$ tepeleri sırasıyla $v_{\alpha+2}, v_{\alpha+3}, \ldots, v_\beta$ tepelerine komşudur. Böylece, $v_{\alpha+2}, v_{\alpha+3}, \ldots, v_\beta, x_{\alpha+2}, x_{\alpha+3}, \ldots, x_\beta$ tepeleri aynı bileşendedir. Bu bileşen D_1 olsun. Benzer şekilde, $G_n - F$ çizgesinde $v_{\beta+2}, v_{\beta+3}, \ldots, v_\alpha$ tepeleri bir yol çizge üzerindedir. Bu tepelere karşılık gelen $x_{\beta+2}, x_{\beta+3}, \ldots, x_\alpha$ tepeleri sırasıyla $v_{\beta+2}, v_{\beta+3}, \ldots, v_\alpha$ tepelerine komşudur.

Böylece, $v_{\beta+2}, v_{\beta+3}, \ldots, v_{\alpha}, x_{\beta+2}, x_{\beta+3}, \ldots, x_{\alpha}$ tepeleri aynı bileşendedir. Bu bileşen D_2 olsun.

C_2 bileşeninden $u_{\beta+1}$ ve $u_{\alpha-1}$ tepeleri ele alınsın. C_2 bileşenindeki $u_{\beta+1}$ tepesi D_1 bileşenindeki x_{β} tepesine, $u_{\alpha-1}$ tepesi de D_2 bileşenindeki $x_{\alpha-2}$ tepesine komşudur (Bknz. Şekil 4.2).



Şekil 4.2 α ve β çift tam sayı olduğunda $G_n - F$ çizgesi

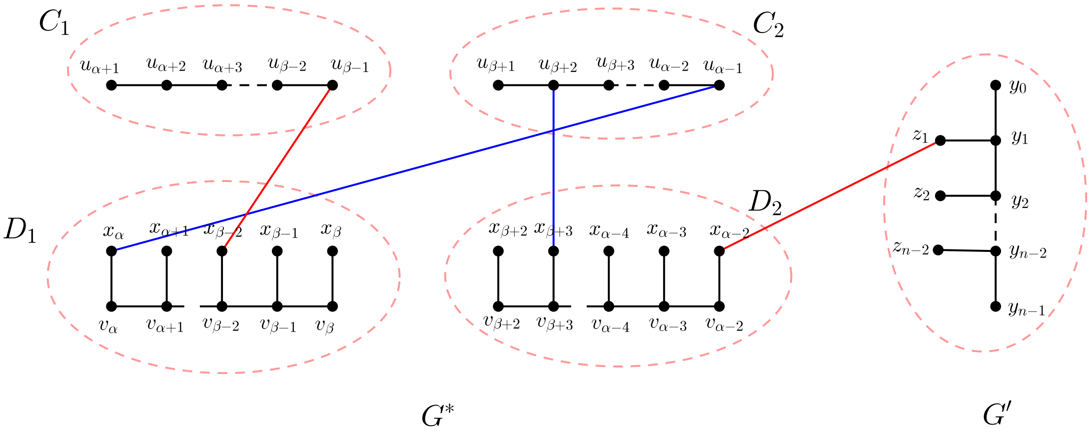
(c) α tek ve β çift tam sayı olsun.

$G_n - F$ çizgesinde $v_{\alpha}, v_{\alpha+1}, \ldots, v_{\beta}$ tepeleri bir yol çizge üzerindedir. Bu tepelere karşılık gelen $x_{\alpha}, x_{\alpha+1}, \ldots, x_{\beta}$ tepeleri sırasıyla $v_{\alpha}, v_{\alpha+1}, \ldots, v_{\beta}$ tepelerine komşudur. Böylece, $v_{\alpha}, v_{\alpha+1}, \ldots, v_{\beta}, x_{\alpha}, x_{\alpha+1}, \ldots, x_{\beta}$ tepeleri aynı bileşendedir. Bu bileşen D_1 olsun. Benzer şekilde, $G_n - F$ çizgesinde $v_{\beta+2}, v_{\beta+3}, \ldots, v_{\alpha-2}$ tepeleri bir yol çizge üzerindedir. Bu tepelere karşılık gelen $x_{\beta+2}, x_{\beta+3}, \ldots, x_{\alpha-2}$ tepeleri sırasıyla $v_{\beta+2}, v_{\beta+3}, \ldots, v_{\alpha-2}$ tepelerine komşudur. Böylece, $v_{\beta+2}, v_{\beta+3}, \ldots, v_{\alpha-2}, x_{\beta+2}, x_{\beta+3}, \ldots, x_{\alpha-2}$ tepeleri aynı bileşendedir. Bu bileşen D_2 olsun.

C_2 bileşeninden $u_{\beta+2}$ ve $u_{\alpha-1}$ tepeleri ele alınsın. C_2 bileşenindeki $u_{\beta+2}$ tepesi D_2 bileşenindeki $x_{\beta+3}$ tepesine, $u_{\alpha-1}$ tepesi de D_1 bileşenindeki x_{α} tepesine komşudur (Bknz. Şekil 4.3).

(d) α çift ve β tek tam sayı olsun.

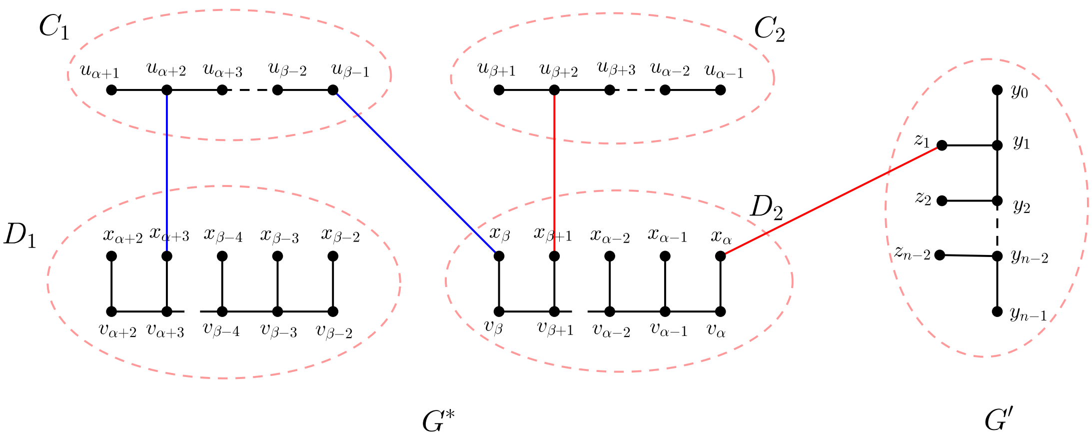
$G_n - F$ çizgesinde $v_{\alpha+2}, v_{\alpha+3}, \ldots, v_{\beta-2}$ tepeleri bir yol çizge



Şekil 4.3 α tek ve β çift tam sayı olduğunda $G_n - F$ çizgesi

üzerindedir. Bu tepelere karşılık gelen $x_{\alpha+2}, x_{\alpha+3}, \ldots, x_{\beta-2}$ tepeleri sırasıyla $v_{\alpha+2}, v_{\alpha+3}, \ldots, v_{\beta-2}$ tepelerine komşudur. Böylece, $v_{\alpha+2}, v_{\alpha+3}, \ldots, v_{\beta-2}, x_{\alpha+2}, x_{\alpha+3}, \ldots, x_{\beta-2}$ tepeleri aynı bileşendedir. Bu bileşen D_1 olsun. Benzer şekilde, $G_n - F$ çizgesinde $v_\beta, v_{\beta+1}, \ldots, v_\alpha$ tepeleri bir yol çizge üzerindedir. Bu tepelere karşılık gelen $x_\beta, x_{\beta+1}, \ldots, x_\alpha$ tepeleri sırasıyla $v_\beta, v_{\beta+1}, \ldots, v_\alpha$ tepelerine komşudur. Böylece, $v_\beta, v_{\beta+1}, \ldots, v_\alpha, x_\beta, x_{\beta+1}, \ldots, x_\alpha$ tepeleri aynı bileşendedir. Bu bileşen D_2 olsun.

C_1 bileşeninden iki tane tepe ele alınsın. Bu tepeler $u_{\beta-1}$ ve $u_{\alpha+2}$ olsun. C_1 bileşenindeki $u_{\beta-1}$ tepesi D_2 bileşenindeki x_β tepesine, $u_{\alpha+2}$ tepesi de D_1 bileşenindeki $x_{\alpha+3}$ tepesine komşudur (Bknz. Şekil 4.4).



Şekil 4.4 α çift ve β tek tam sayı olduğunda $G_n - F$ çizgesi

(a), (b) ve (c) durumlarında C_2 bileşenini D_1 ve D_2 bileşenine bağlayan hatasız ayrıtlar olup $V(D_1) \cup V(D_2) \cup V(C_2)$ kümesindeki tüm tepeler aynı bileşendedir. C_1 bileşeni en az bir tepe içerdiğinden ve $U - V(F)$ kümesindeki her tepenin $X - V(F)$ kümesinde bir komşusu olduğundan C_1 bileşenindeki bir tepenin D_1 ya da D_2 bileşeninde bir komşusu vardır. (d) durumunda ise C_1 bileşeni hatasız ayrıtlar ile D_1 ve D_2 bileşenlerine bağlı olup $V(D_1) \cup V(D_2) \cup V(C_1)$ kümesindeki tüm tepeler aynı bileşendedir. C_2 bileşeni en az bir tepe içerdiğinden ve $U - V(F)$ kümesindeki her tepenin $X - V(F)$ kümesinde bir komşusu olduğundan C_2 bileşenindeki bir tepenin D_1 ya da D_2 bileşeninde bir komşusu vardır. Dolayısıyla, tüm durumlarda $(U - V(F)) \cup (X - V(F)) \cup (V - V(F))$ kümesinin tepeleri tarafından etkilenmiş altçizge bağlantılıdır. Bu çizge G^* olsun.

$G_n - F$ çizgesinde $Z - V(F)$ kümesindeki her tepenin $Y - V(F)$ kümesinde bir komşusu vardır. Yani, $(Y - V(F)) \cup (Z - V(F))$ kümesinin tepeleri tarafından etkilenmiş altçizge bağlantılıdır. Bu çizge G' olsun. Ayrıca, $Z - V(F)$ kümesindeki her tepenin $X - V(F)$ kümesinde en az bir komşusu olduğundan, G^* ve G' bağlantılı çizgelerini bağlayan en az bir hatasız ayrıt vardır. Dolayısıyla, $G_n - F$ çizgesi bağlantılıdır. Bu ise kabul ile çelişir.

(2) $|V(F_1) \cap V| = 3$ olsun.

U kümesi ile V kümesi kendi aralarında yer değiştirilebilir olduğundan bu durum $|V(F_1) \cap U| = 3$ durumu ile aynıdır. Bu nedenle, Durum 4 (1) için yapılan açıklamalar bu durum için de geçerlidir.

(3) $V(F_1) \cap U = \emptyset$ ve $V(F_1) \cap V = \emptyset$ olsun.

$G_n - F$ çizgesinde $V - V(F)$ ve $U - V(F)$ kümelerinin tepeleri tarafından etkilenmiş altçizgelerin her biri bağlantılıdır. $X - V(F)$ kümesindeki her tepenin $V - V(F)$ kümesinde tam olarak bir, $Z - V(F)$ kümesindeki her tepenin de $X - V(F)$ kümesinde en az bir komşusu vardır. O halde, $(Z - V(F)) \cup (X - V(F)) \cup (V - V(F))$ kümesindeki tüm tepeler aynı bileşendedir. $n \geq 5$ olduğundan $U - V(F)$ kümesindeki bir tepeyi $X - V(F)$ kümesindeki bir tepeye bağlayan en az bir hatasız ayrıt mutlaka vardır. Böylece, $G_n - Y - F$ çizgesi bağlantılıdır.

(i) $V(F_2) \cap U \neq \emptyset$ olsun.

$G_n - F$ çizgesinde $Y - V(F)$ kümesindeki tepeler tarafından etkilenmiş altçizge bağlantılıdır. $n \geq 5$ olduğundan $|Y - V(F)| \geq 2$ ve $|N_{G_n-F}(Y - V(F)) \cap Z)| \geq 1$ olduğundan, $Y - V(F)$ kümesindeki bir tepeyi $Z - V(F)$ kümesindeki bir tepeye bağlayan en az bir hatasız ayrıt vardır. Böylece $Y - V(F)$ kümesindeki tepeler tarafından etkilenmiş altçizge ile $G_n - Y - F$ çizgesi en az bir hatasız ayrıt ile birbirine bağlı olur. Böylece, $G_n - F$ çizgesi bağlantılıdır. Bu ise kabul ile çelişir.

(ii) $|V(F_2) \cap V| = 3$ olsun.

U kümesi ile V kümesi kendi aralarında yer değiştirilebilir olduğundan bu durum $|V(F_2) \cap U| = 3$ durumu ile aynıdır. Bu nedenle, Durum 4 (3) (i) için yapılan açıklamalar bu durum için de geçerlidir.

(iii) $V(F_2) \cap U = \emptyset$ ve $V(F_2) \cap V = \emptyset$ olsun.

$G_n - F$ çizgesinde $Y - V(F)$ kümesindeki her tepenin (eğer varsa) $Z - V(F)$ kümesinde bir komşusu vardır. Böylece, $Y - V(F)$ kümesindeki her tepe $G_n - Y - F$ çizgesine bağlı olup $G_n - F$ çizgesi bağlantılıdır. Bu ise kabul ile çelişir.

Tüm durumlar incelendiğinde $G_n - F$ çizgesini bağlantısız yapmak için iki elemanlı bir $K_{1,3}$–altyapı–kesim kümenin yeterli olamayacağı görülür. Buradan, n tek ve $n \geq 5$ olmak üzere $\kappa^s(G_n; K_{1,3}) \geq 3$ elde edilir. □

Aşağıdaki yardımcı teorem ile n tek, $n \geq 3$ olmak üzere G_n çizgesinin $K_{1,3}$–yapı bağlantılılık değeri için bir üst sınır elde edilmiştir.

Yardımcı Teorem 4.2.12 n tek, $n \geq 3$ olmak üzere $\kappa(G_n; K_{1,3}) \leq 3$ eşitsizliği sağlanır.

İspat. F_1, F_2 ve F_3 çizgeleri G_n çizgesinin sırasıyla $\{u_1, x_0, z_0, v_0\}$, $\{x_2, x_3, z_1, y_1\}$ ve $\{u_3, u_4, u_5, x_5\}$ tepeleri tarafından etkilenmiş altçizgeleri olsun. F_1, F_2 ve F_3 çizgelerinin her birinin $K_{1,3}$ çizgesine izomorf olduğu açıktır. $F = \{F_1, F_2, F_3\}$ olmak üzere u_2 tepesi $G_n - F$ çizgesinde izole tepedir. Dolayısıyla, n tek ve $n \geq 3$ olmak üzere $\kappa(G_n; K_{1,3}) \leq 3$ elde edilir. □

Yardımcı Teorem 4.2.11, Yardımcı Teorem 4.2.12 ve $\kappa(G_n; K_{1,3}) \geq \kappa^s(G_n; K_{1,3})$ eşitsizliği ile n tek, $n \geq 5$ olmak üzere $3 \geq \kappa(G_n; K_{1,3}) \geq \kappa^s(G_n; K_{1,3}) \geq 3$ olup aşağıdaki sonuç elde edilir.

Teorem 4.2.13 n tek, $n \geq 5$ olmak üzere $\kappa^s(G_n; K_{1,3}) = \kappa(G_n; K_{1,3}) = 3$ eşitliği sağlanır.

Aşağıdaki teorem ile de $n = 3$ olmak üzere G_n çizgesinin $K_{1,3}$–yapı bağlantılılık değeri ispat edilmiştir. Böylece, n tek, $n \geq 3$ olmak üzere tüm tek n değerleri için G_n çizgesinin $K_{1,3}$–yapı bağlantılılık ve $K_{1,3}$–altyapı bağlantılılık değerleri ispat edilmiş olur.

Teorem 4.2.14 $n = 3$ olmak üzere $\kappa(G_n; K_{1,3}) = 3$ eşitliği sağlanır.

İspat. Yardımcı Teorem 4.2.12 ile $n = 3$ olmak üzere $\kappa(G_n; K_{1,3}) \leq 3$ olduğu bilinmektedir. İspatı tamamlamak için $\kappa(G_3; K_{1,3}) \geq 3$ olduğunu göstermek yeterlidir. Herhangi bir G çizgesi ve H-yapı-kesim kümesi için $\kappa(G; H) \geq \kappa^s(G; H)$ olduğundan Yardımcı Teorem 4.2.3 yardımı ile $\kappa(G_3; K_{1,3}) \geq 2$ elde edilir. O halde, G_3 çizgesinin iki elemanlı bir $K_{1,3}$–yapı-kesim kümesinin olamayacağını göstermek yeterlidir. Çelişki elde etmek için F kümesi G_3 çizgesinin $K_{1,3}$–yapı–kesim kümesi olsun. $F = \{F_1, F_2\}$ olsun. F kümesinin elemanlarının her ikisinin de $K_{1,3}$ çizgesine izomorf olduğu açıktır.

(1) $V(F_1) \cap U \neq \emptyset$ olsun.

(i) $|V(F_2) \cap U| = 3$ ya da $|V(F_2) \cap V| = 3$ olsun.

Yardımcı Teorem 4.2.11 ispatında Durum 4 (1) (i) ve Durum 4 (1) (ii) için yapılan açıklamalar $n = 3$ olduğunda $|V(F_2) \cap U| = 3$ ya da $|V(F_2) \cap V| = 3$ durumları için de geçerlidir.

(ii) $V(F_2) \cap U = \emptyset$ ve $V(F_2) \cap V = \emptyset$ olsun.

$G_3 - F$ çizgesinde $V - V(F)$ ve $U - V(F)$ kümesindeki tepeler tarafından etkilenmiş altçizgelerin her biri bağlantılıdır. $X - V(F)$ kümesindeki her tepenin $V - V(F)$ kümesinde bir komşusu, $Z - V(F)$ kümesindeki her tepenin de $X - V(F)$

kümesinde en az bir komşusu vardır. O halde, $(V - V(F)) \cup (X - V(F)) \cup (Z - V(F))$ kümesindeki tüm tepeler aynı bileşendedir. Bu bileşen C olsun. Ayrıca, $|N_{G_3-F}(U - V(F)) \cap X)| \geq 1$ olduğundan $U - V(F)$ kümesindeki bir tepeyi de $X - V(F)$ kümesindeki bir tepeye bağlayan en az bir hatasız ayrıt mutlaka vardır. $U - V(F)$ kümesinin tepeleri ile etkilenmiş altçizge bağlantılı olduğundan bu bağlantılı çizge hatasız ayrıtlar ile C bileşenine bağlı olur. Yani, $G_3 - Y - F$ çizgesi bağlantılıdır.

Eğer $|V(F_2) \cap Y| = 3$ ise $G_3 - F$ çizgesinde $Y - V(F)$ kümesinin tepeleri ile etkilenmiş altçizge boş bir çizgedir. Bu durumda, $G_3 - F$ çizgesi $G_3 - Y - F$ çizgesine izomorf olup bağlantılıdır. Bu ise kabul ile çelişir.

Eğer $|V(F_2) \cap Y| = 1$ ise, $G_3 - F$ çizgesinde $Y - V(F)$ kümesinin tepeleri ile etkilenmiş altçizge P_2 yol çizgesine izomorftur. Ayrıca, $|N_{G_3-F}(Y - V(F)) \cap Z)| \geq 1$ olduğu açıktır. Yani, $Y - V(F)$ kümesindeki bir tepeyi $Z - V(F)$ kümesindeki bir tepeye bağlayan en az bir hatasız ayrıt mutlaka vardır. Yani, $Y - V(F)$ kümesinin tepeleri ile etkilenmiş P_2 çizgesi $G_3 - Y - F$ çizgesine en az bir hatasız ayrıt ile bağlı olur. Dolayısıyla, $G_3 - F$ çizgesi bağlantılıdır. Bu ise kabul ile çelişir.

(iii) $V(F_2) \cap U \neq \emptyset$ ve $V(F_2) \cap V \neq \emptyset$ olsun.

F_1 ve F_2 çizgelerinin ikisi de $K_{1,3}$ çizgesine izomorf olduğundan $|V(F_1) \cap U| = 3$ durumu (1) (i) durumundaki bir F kümesi ile aynıdır. Bu nedenle, $|V(F_1) \cap U| = 1$ durumunu incelemek yeterlidir.

$G_3 - F$ çizgesinde $U - V(F)$ ve $V - V(F)$ kümelerinin tepeleri tarafından etkilenmiş altçizgelerden en az biri bağlantılı olduğunda, Yardımcı Teorem 4.2.11 ispatında Durum 4 (1) (iv) için yapılan açıklamalar bu durum için de geçerlidir.

$G_3 - F$ çizgesinde $U - V(F)$ ve $V - V(F)$ kümelerinin tepeleri tarafından etkilenmiş altçizgelerden her ikisi bağlantısız olsun. $\alpha, \beta \in \{0, 1, \ldots, 5\}$ olmak üzere $u_\alpha \in V(F_1)$ ve $u_\beta \in V(F_2)$ olsun. Geriye kalan çizgede $U - V(F)$ ve $V - V(F)$ kümelerinin tepeleri tarafından etkilenmiş altçizgelerden her ikisinin bağlantısız olabilmesi için α ve β tam sayılarının ya her ikisi tek ya da her ikisi çift tam sayı olmalıdır. O halde, Yardımcı Teorem 4.2.11 ispatında Durum 4 (1) (iv) ispatının (c) ve (d) açıklamaları dışında yapılan tüm açıklamalar bu durum için de geçerlidir.

(2) $|V(F_1) \cap V| = 3$ olsun.

U kümesi ile V kümesi kendi aralarında yer değiştirilebilir olduğundan bu durum $|V(F_1) \cap U| = 3$ durumu ile aynıdır. Bu nedenle, (1) durumu için yapılan açıklamalar bu durum için de geçerlidir.

(3) $V(F_1) \cap U = \emptyset$ ve $V(F_1) \cap V = \emptyset$ olsun.

$G_3 - F$ çizgesinde $V - V(F)$ ve $U - V(F)$ kümelerinin tepeleri tarafından etkilenmiş altçizgelerin her biri bağlantılıdır. $X - V(F)$ kümesindeki her tepenin $V - V(F)$ kümesinde tam olarak bir, $Z - V(F)$ kümesindeki her tepenin de $X - V(F)$ kümesinde en az bir komşusu vardır. O halde, $(Z - V(F)) \cup (X - V(F)) \cup (V - V(F))$ kümesindeki tüm tepeler aynı bileşendedir. Ayrıca, $U - V(F)$ kümesindeki bir tepeyi $X - V(F)$ kümesindeki bir tepeye bağlayan en az bir hatasız ayrıt mutlaka vardır. Böylece, $G_3 - Y - F$ çizgesi bağlantılıdır.

Eğer $|V(F_1) \cap Y| = 3$ ise $G_3 - F$ çizgesinde $Y - V(F)$ kümesinin tepeleri tarafından etkilenmiş altçizge boş bir çizgedir. Bu durumda, $G_3 - F$ çizgesi $G_3 - Y - F$ çizgesine izomorf olup bağlantılıdır. Bu ise kabul ile çelişir. O halde $|V(F_1) \cap Y| = 1$ olsun. Yardımcı Teorem 4.2.11 ispatında Durum 4 (3) için yapılan açıklamalar bu durum için de geçerlidir.

Tüm durumlar incelendiğinde $G_3 - F$ çizgesini bağlantısız yapmak için iki elemanlı bir $K_{1,3}$–altyapı–kesim kümenin yeterli olamayacağı görülür. Buradan, $\kappa^s(G_3; K_{1,3}) \geq 3$ elde edilip ispat tamamlanır. $\square$

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tez çalışmasında, 3-regüler bir çizge sınıfı olan Goldberg snark G_n üzerinde bağlantılılık, süper bağlantılılık ve yapı bağlantılılık değerleri incelenmiştir.

Öncelikle G_n çizgesinin bağlantılılık ve ayrıt bağlantılılık değerlerinin $n \geq 3$ olmak üzere 3 olduğu gösterilmiştir. Ardından, G_n çizgesinin süper bağlantılılık ve süper ayrıt bağlantılılık değerlerinin $n = 3$ iken 3 olduğu, n tek, $n \geq 5$ iken 4 olduğu ispat edilmiştir. G_n çizgesinin bağlantılılık ve süper bağlantılılık ile elde edilen sonuçlarından yararlanarak n tek, $n \geq 5$ iken G_n çizgesinin süper bağlantılı ve süper ayrıt bağlantılı olduğu, $n = 3$ iken G_n çizgesinin süper bağlantılı olmadığı ifade edilmiştir.

Ardından F kümesi G_n çizgesinin altçizgelerinden oluşan bir küme olmak üzere G_n çizgesinden silindiğinde $G_n - F$ çizgesini bağlantılı yapan F kümesinin G_n çizgesinin hangi tepeler kümesinin elemanlarını içerdiği ispat edilmiştir. Elde edilen bu sonuç G_n çizgesinin $m \in \{1, 2, 3\}$ olmak üzere $K_{1,m}$–yapı bağlantılılık ve $K_{1,m}$–altyapı bağlantılılık değerlerinin ispatında kullanılan oldukça yararlı bir sonuç olmuştur.

$n = 3$ olmak üzere G_n çizgesinin $K_{1,1}$–yapı bağlantılılık ve $K_{1,1}$–altyapı bağlantılılık değerlerinin 2 olduğu, n tek, $n \geq 5$ olmak üzere G_n çizgesinin $K_{1,1}$–yapı bağlantılılık ve $K_{1,1}$–altyapı bağlantılılık değerlerinin 3 olduğu ispat edilmiştir. G_n çizgesinin $K_{1,2}$–yapı bağlantılılık ve $K_{1,2}$–altyapı bağlantılılık değerleri için ise $n = 3$ iken $\kappa(G_n; K_{1,2}) = \kappa^s(G_n; K_{1,2}) = 2$ ve n tek, $n \geq 5$ iken $\kappa(G_n; K_{1,2}) = \kappa^s(G_n; K_{1,2}) = 3$ elde edilmiştir.

Son olarak, $n \geq 3$ olmak üzere G_n çizgesinin $K_{1,3}$–yapı bağlantılılık ve $K_{1,3}$–altyapı bağlantılılık değerleri incelenmiştir. $n = 3$ olduğunda G_n çizgesinin $K_{1,3}$–yapı bağlantılılık değerinin 3 olduğu ve $K_{1,3}$–altyapı bağlantılılık değerinin ise 2 olduğu ispat edilmiştir. n tek, $n \geq 5$ olmak üzere $\kappa(G_n; K_{1,3}) = \kappa^s(G_n; K_{1,3}) = 3$ olarak belirlenmiştir.

6. KAYNAKLAR

Boesch, F. T. (1986). Synthesis of reliable networks-a survey. *IEEE Transactions on Reliability*, *35*(3), 240–246.

Campos, C., Dantas, S., & de Mello, C. P. (2011). The total-chromatic number of some families of snarks. *Discrete Mathematics*, *311*(12), 984–988.

Celmins, U. (1979). *A study of three conjectures on an infinite family of snarks*. Faculty of Mathematics, University of Waterloo.

Dantas, S., de Figueiredo, C. M., Mazzuoccolo, G., Preissmann, M., Dos Santos, V. F., & Sasaki, D. (2016). On the equitable total chromatic number of cubic graphs. *Discrete Applied Mathematics*, *209*, 84–91.

da Soledade Gonzaga, L. G., & de Almeida, S. M. (2019). Sigma coloring on powers of paths and some families of snarks. *Electronic Notes in Theoretical Computer Science*, *346*, 485–496.

Ekinci, G. B. (2022). The super-connectivity of double generalized petersen graphs. *RAIRO-Operations Research*, *56*(5), 3659–3665.

Ekinci, G. B., & Gauci, J. B. (2019a). On the reliability of generalized petersen graphs. *Discrete Applied Mathematics*, *252*, 2–9.

Ekinci, G. B., & Gauci, J. B. (2019b). The super-connectivity of kneser graphs. *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, *39*(1), 5–11.

Esfahanian, A.-H., & Hakimi, S. L. (1988). On computing a conditional edge-connectivity of a graph. *Information processing letters*, *27*(4), 195–199.

Fàbrega, J., & Fiol, M. A. (1996). On the extraconnectivity of graphs. *Discrete Mathematics*, *155*(1-3), 49–57.

Gardner, M. (1976). Mathematical games: snarks, boojums, and other conjectures related to the four-color map theorem. *Sci. Amer.*, *234*, 126–130.

Ghasemi, M. (2021). Some results about the reliability of folded hypercubes. *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, *44*, 1093–1099.

Ghebleh, M. (2007). The circular chromatic index of goldberg snarks. *Discrete mathematics*, *307*(24), 3220–3225.

Goldberg, M. K. (1981). Construction of class 2 graphs with maximum vertex degree

3. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, *31*(3), 282–291.

Guo, H., Hao, R.-X., Chang, J.-M., & Kwon, Y. S. (2024). Hyper star structure connectivity of hierarchical folded cubic networks. *The Journal of Supercomputing*, 1–18.

Guo, L., Su, G., Lin, W., & Chen, J. (2018). Fault tolerance of locally twisted cubes. *Applied Mathematics and Computation*, *334*, 401–406.

Hao, R., Niu, J., Wang, X., Zhang, C.-Q., & Zhang, T. (2009). A note on berge–fulkerson coloring. *Discrete Mathematics*, *309*(13), 4235–4240.

Harary, F. (1983). Conditional connectivity. *Networks*, *13*(3), 347–357.

Holton, D. A., & Sheehan, J. (1993). *The Petersen graph* (Vol. 7). Cambridge University Press, Cambridge. Retrieved from `https://doi.org/10.1017/CBO9780511662058` doi: 10.1017/CBO9780511662058

Isaacs, R. (1975). Infinite families of nontrivial trivalent graphs which are not tait colorable. *The American Mathematical Monthly*, *82*(3), 221–239.

Isaacs, R. (1976). Loupekhine's snarks: a bifamily of non-tait-colorable graphs. *J. Combin. Theory B*.

Lei, Y., & Meng, J. (2020). Structure fault-tolerance of arrangement graphs. *Applied Mathematics and Computation*, *381*, 125287.

Li, C., Lin, S., & Li, S. (2018). Structure connectivity and substructure connectivity of (n, k)-star graph networks. In *2018 15th international symposium on pervasive systems, algorithms and networks (i-span)* (pp. 240–246).

Li, C., Lin, S., & Li, S. (2020). Structure connectivity and substructure connectivity of star graphs. *Discrete Applied Mathematics*, *284*, 472–480.

Li, D., Hu, X., & Liu, H. (2019). Structure connectivity and substructure connectivity of twisted hypercubes. *Theoretical Computer Science*, *796*, 169–179.

Li, X., Zhou, S., Ren, X., & Guo, X. (2021). Structure and substructure connectivity of alternating group graphs. *Applied Mathematics and Computation*, *391*, 125639.

Lin, C.-K., Cheng, E., & Lipták, L. (2020). Structure and substructure connectivity of hypercube-like networks. *Parallel Processing Letters*, *30*(03), 2040007.

Lin, C.-K., Zhang, L., Fan, J., & Wang, D. (2016). Structure connectivity and substructure connectivity of hypercubes. *Theoretical Computer Science*, *634*, 97–107.

Lin, L., Xu, L., Zhou, S., & Hsieh, S.-Y. (2015). The extra, restricted connectivity and conditional diagnosability of split-star networks. *IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems*, *27*(2), 533–545.

Liu, H., & Cheng, D. (2024). Structure fault tolerance of exchanged hypercube. *The Computer Journal*, *67*(2), 527–536.

Luiz, A. G. (2024). Roman domination and independent roman domination on graphs with maximum degree three. *Discrete Applied Mathematics*, *348*, 260–278.

Lukot'ka, R. (2024). Circular flow number of goldberg snarks. *Discrete Mathematics*, *347*(3), 113792.

Lv, Y., Fan, J., Hsu, D. F., & Lin, C.-K. (2018). Structure connectivity and substructure connectivity of k-ary n-cube networks. *Information Sciences*, *433*, 115–124.

Pan, Z., & Cheng, D. (2020). Structure connectivity and substructure connectivity of the crossed cube. *Theoretical Computer Science*, *824*, 67–80.

Sabir, E., & Meng, J. (2018). Structure fault tolerance of hypercubes and folded hypercubes. *Theoretical Computer Science*, *711*, 44–55.

Tait, P. G. (1880). Remarks on the colouring of maps. *Proc Roya Soc London*, *10*, 729.

Türkmen, M., Çiftçi, C., & Ekinci, G. B. (2023). Structure and substructure connectivity of folded divide-and-swap cube. *arXiv preprint arXiv:2311.11323*.

Tutte, W. T. (1954). A contribution to the theory of chromatic polynomials. *Canadian journal of mathematics*, *6*, 80–91.

Whitney, H. (1992). Congruent graphs and the connectivity of graphs. *Hassler Whitney Collected Papers*, 61–79.

Yang, L., & Zhou, S. (2024). Hyper star structure fault tolerance of half hypercube. *The Journal of Supercomputing*, 1–19.

Yang, L., Zhou, S., & Zhang, Q. (2024). Star structure fault tolerance of bicube networks. *International Journal of Computer Mathematics: Computer Systems Theory*, *9*(1), 21–32.

Zhang, G., & Wang, D. (2019). Structure connectivity and substructure connectivity of bubble-sort star graph networks. *Applied Mathematics and Computation*, *363*, 124632.

Zhao, C., & Liu, H. (2016). Connected and tree domination on goldberg and flower snarks1. *Applied Mathematical Sciences*, *10*(62), 3057–3064.

Zhou, J.-X., & Feng, Y.-Q. (2010). Super-connected but not super edge-connected graphs. *Information processing letters*, *111*(1), 22–25.

Zhou, Q., Zhou, S., Liu, J., & Liu, X. (2021). Structure and substructure connectivity of divide-and-swap cube. *Theoretical Computer Science*, *880*, 20–36.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	:	Feyza Çelik
Doğum Yeri ve Tarihi	:	
Lisans Üniversite	:	Ordu Üniversitesi
Yüksek Lisans Üniversite	:	Ordu Üniversitesi
İletişim Adresi	:	