T. C.

ORDU ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BULLEN, SIMPSON, ORTA NOKTA VE YAMUK TİPLİ İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİN GENELLEŞTİRMELERİ

HANİFE AZAKLI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ORDU 2024

TEZ BİLDİRİMİ

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan ve kullanılan intihal tespit programının sonuçlarına göre; bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

HANİFE AZAKLI

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

BULLEN, SIMPSON, ORTA NOKTA VE YAMUK TİPLİ İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİN GENELLEŞTİRMELERİ

HANİFE AZAKLI

ORDU ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ, 43 SAYFA

(TEZ DANIŞMANI: PROF. DR. ERHAN SET)

Dört bölümden oluşmakta olan bu tezin giriş bölümünde eşitsizlik teorisi ve konvekslik kavramı hakkında genel bilgi verilmiştir. İkinci bölümde bazı konveks fonksiyon sınıfları, bazı önemli eşitsizlikler ve konveks fonksiyonlar için literatürde yer alan Hermite-Hadamard, Bullen, Yamuk, Orta nokta ve Simpson tipli eşitsizlikler verilmiştir. Üçüncü bölümde s-konveks, quasi-konveks ve P-fonksiyonu için Bullen, Yamuk, Orta nokta ve Simpson tipli eşitsizliklerin yeni genelleştirilmeleri elde edilmiştir. Son bölüm olan tartışma ve sonuçta ise tezde elde edilen bulgular özetlenerek bazı öneriler verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Hermite-Hadamard, Bullen, Yamuk, Orta nokta ve Simpson tipli eşitsizlikler, Konveks fonksiyonlar, s-konveks fonksiyon, Quasi-konveks fonksiyon, P-fonksiyonu.

ABSTRACT

GENERALIZATIONS OF BULLEN, SIMPSON, MIDPOINT AND TRAPEZOID TYPE INTEGRAL INEQUALITIES

HANİFE AZAKLI

ORDU UNIVERSITY INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

MATHEMATICS

MASTER THESIS, 43 PAGES

(SUPERVISOR: PROF. DR. ERHAN SET)

In the introduction part of this thesis, which consists of four chapters, general information about inequality theory and the concept of convexity is given. In the second part, some classes of convex functions, some important inequalities and Hermite-Hadamard, Bullen, Trapezoid, Midpoint and Simpson type inequalities for convex functions are given. In the last section, generalizations of the Bullen, Trapezoid, Midpoint and Simpson type inequalities for the s-convex, quasi-convex and P-function are obtained. In the last chapter, discussion and conclusion, the findings obtained in the thesis are summarised and some suggestions are mentioned.

Keywords: Hermite-Hadamard, Bullen, Trapezoid, Midpoint and Simpson type inequalities, Convex functions, s-convex functions, Quasi-convex functions, P-function.

TEŞEKKÜR

Tez konumun belirlenmesi, çalışmanın yürütülmesi ve yazımı esnasında göstermiş olduğu her türlü destekten dolayı başta değerli danışman hocam Sayın Prof. Dr. Erhan SET'e ve tez yazım aşamasında desteğini esirgemeyen Dr. Barış ÇELİK'e ve Dr. Ali KARAOĞLAN'a teşekkür ederim.

Ayrıca tez talışmalarım süresince moral ve motivasyonumu her daim yüksek tutan desteklerini eksik etmeyen değerli babam İlhan AZAKLI ve değerli annem Melek AZAKLI'ya sonsuz teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER ve KISALTMALAR LİSTESİ

$\mathbb{R}$	:	Reel sayılar kümesi
$\hbar'$	:	$\hbar$ fonksiyonunun birinci mertebeden türevi
$\mathbf{I}$	:	$\mathbb{R}'$de bir aralık
$\boldsymbol{I}^{\circ}$	:	I'nın içi
$\boldsymbol{L}[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$	:	$[a,b]$ aralığında integrallenebilen fonksiyonlar kümesi
$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{I})$	:	P fonksiyonlar sınıfı
$\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{s}}^{\mathbf{1}}$	:	Birinci anlamda s-konveks fonksiyonlar sınıfı
$\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{s}}^{\mathbf{2}}$	:	İkinci anlamda s-konveks fonksiyonlar sınıfı
$\boldsymbol{QC}(\boldsymbol{I})$	:	Quasi-konveks fonksiyonlar sınıfı

1. GİRİŞ

Bir çokluğun diğerinden daha büyük ya da daha küçük olduğunu ifade eden eşitsizlikte, durumu anlatan büyüktür ($>$) ve küçüktür ($<$) işaretleri kullanılmıştır ve bu işaretleri ilk kez 1631 yılında İngiliz matematikçi olan Thomas Harriot "Artis Analyticae Praxis and Aequations Algebraicas Resolvendas" adlı eserinde yer vermiştir. Matematiğin önemli alanlarından biri olan eşitsizlikler teorisi 19. yüzyılda hızlı bir gelişme kaydetmiş ve bir çok alanda kullanılması nedeniyle araştırmacıların bu alanda çalışmasında önemli bir motivasyon kaynağı olmuştur. Bu bağlamda bir çok önemli eşitsizlik farklı araştırmacılar tarafından literatüre kazandırılmış olup bunlardan bazıları Hölder, Minkowski, Grüss, Chebsyhev, Bullen, Hermite-Hadamard, Simpson, Jensen eşitsizlikleri şeklindedir.

Eşitsizlikler; matematiksel analiz, diferansiyel denklemler, olasılık teorisi, optimizasyon problemleri gibi matematiğin ve diğer bilimlerin bir çok alanında kullanılmakta olup eşitsizlikler teorisi ile iç içe olan kavramlardan birisi de konvekslik kavramıdır. Tanımı bir eşitsizliğin sağlanması koşuluna bağlı olarak yapılan konveks fonksiyonlar ile ilgili çalışmalar 18. yüzyılda başlamış olup halen devam etmektedir. Bu teorinin zengin bir tarihi vardır ve son yıllarda da araştırmacıların ilgi odağı haline gelmiştir. W. Orlicz, W.W. Breckner, S. Varošanec, İ. İşcan, G.H. Toader, V.G. Miheşan gibi farklı araştırmacılar tarafından birinci anlamda s-konvekslik, ikinci anlamda s-konvekslik h-konvekslik, harmonik konvekslik, m-konvekslik, (α, m)-konvekslik gibi bir çok farklı konveks fonksiyon sınıfı tanımlanmış ve bu fonksiyon sınıfları kullanılarak eşitsizliklerin yeni genelleştirilmeleri, genişlemeleri elde edilmiştir. Konveks fonksiyonlar yardımıyla elde edilen en önemli eşitsizliklerden birisi Hermite - Hadamard eşitsizliği olup Hermite-Hadamard-Fejer eşitsizliği ve Bullen eşitsizliği de literatürde önemli bir yere sahiptir. Konveks fonksiyonlar eşitsizlikler dışında matematiğin bir çok alanında ve mühendislik, ekonomi, endüstri gibi alanlarda da kullanılmaktadır.

Bu çalışmada da, s-konveks fonksiyonlar, quasi-konveks fonksiyonlar ve P-fonksiyonlar için Bullen, Simpson, orta nokta ve yamuk tipli eşitsizliklerin yeni versiyonları ve genelleştirmeleri elde edilmiştir.

2. GENEL BİLGİLER

Bu bölümde, tezin araştırma bulguları bölümünde kullanılacak olan tanımlar, teoremler ve lemmalar sunulmuştur.

2.1 Bazı Fonksiyon Sınıfları

Tanım 2.1.1 Her $x, y \in I$ ve $\xi \in [0,1]$ için $\hbar : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$\hbar(\xi x + (1-\xi)y) \leq \xi \hbar(x) + (1-\xi)\hbar(y) \tag{2.1.1}$$

şartını sağlıyorsa $\hbar$'a I üzerinde konveks fonksiyon denir. Burada I, $\mathbb{R}$' deki açık, yarı-açık veya kapalı, sonlu veya sonsuz bir aralıktır. Eğer (2.1.1) eşitsizliği $x \neq y$ için sağlanıyorsa $\hbar$'a kesin konveks fonksiyon denir. Öte yandan, $-\hbar : I \to \mathbb{R}$ konveks ise, $\hbar : I \to \mathbb{R}$ konkavdır [24].

Literatürde farklı konveks fonksiyon sınıfları yer almakta olup W. Orlicz birinci anlamda s-konveks fonksiyon sınıfını aşağıdaki gibi tanımlamıştır.

Tanım 2.1.2 $\alpha, \beta \geq 0, \quad \alpha^s + \beta^s = 1$ ve $s \in (0,1]$ olmak üzere her $u, v \in \mathbb{R}^+$ için $\hbar : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$\hbar(\alpha u + \beta v) \leq \alpha^s \hbar(u) + \beta^s \hbar(v)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa $\hbar$'a birinci anlamda s-konveks fonksiyon denir. Bu fonksiyonların sınıfı K_s^1 ile gösterilir. Eşitsizlik yön değiştirirse $\hbar$ fonksiyonu birinci anlamda s-konkav olarak adlandırılır [22].

İkinci anlamda s-konveks fonksiyon sınıfı da W.W. Breckner tarafından aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

Tanım 2.1.3 $\alpha, \beta \geq 0, \quad \alpha+\beta = 1$ ve $s \in (0,1]$ olmak üzere her $u, v \in \mathbb{R}^+$ için $\hbar : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$\hbar(\alpha u + \beta v) \leq \alpha^s \hbar(u) + \beta^s \hbar(v)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa $\hbar$'a ikinci anlamda s-konveks fonksiyon denir. Bu fonksiyonların sınıfı K_s^2 ile gösterilir. Eşitsizlik yön değiştirirse $\hbar$ fonksiyonu ikinci anlamda s-konkav olarak adlandırılır [2, 16].

Tanım 2.1.2 ve Tanım 2.1.3'de $s = 1$ olarak seçilirse konveks fonksiyon kavramı elde edilir.

Diğer bir konvekslik sınıfı olan quasi-konvekslik tanımı aşağıdaki gibidir.

Tanım 2.1.4 $\hbar : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere her $x, y \in I$ ve $\lambda \in [0, 1]$ için

$$\hbar(\xi x + (1 - \xi)y) \leq \max\{\hbar(x), \hbar(y)\}$$

oluyorsa $\hbar$'a I üzerinde quasi-konveks fonksiyon denir ve $\hbar \in QC(I)$ olarak ifade edilir [18].

P-fonksiyonun tanımı aşağıdaki gibidir.

Tanım 2.1.5 $\hbar : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ negatif olmayan bir fonksiyon ve her $x, y \in I$, $\xi \in [0, 1]$ için

$$\hbar(\xi x + (1 - \xi)y) \leq \hbar(x) + \hbar(y)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa $\hbar$'a P-fonksiyonu denir veya $\hbar$, $P(I)$ sınıfına aittir denir [8].

2.2 Bazı Önemli Eşitsizlikler

2.2.1 Hermite-Hadamard Eşitsizliği ve Hermite-Hadamard Eşitsizliği ile İlgili Genelleştirmeler

Son zamanlarda çok sayıda araştırmacı kendini farklı yönlerdeki konvekslikle ilgili eşitsizlikleri ve özelliklerini incelemeye adamıştır. Zaman içinde farklı araştırmacılar tarafından birçok integral eşitsizliği elde edilmiştir. Literatürde Hermite-Hadamard eşitsizliği [6], Hermite-Hadamard-Fejér eşitsizliği [13], Bullen eşitsizliği [3], Simpson tipli eşitsizlikler [29] ve Ostrowski tipli eşitsizlikler [28] gibi konveks foksiyonları içeren birçok eşitsizlik türü vardır. Bu fonksiyon sınıfı için önemli eşitsizliklerden biri olan Hermite-Hadamard eşitsizliği aşağıdaki gibidir.

Teorem 2.2.1 $\kappa, \tau \in I$ ve $\kappa < \tau$ olmak üzere $\hbar : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konveks fonksiyonu için

$$\hbar\left(\frac{\kappa + \tau}{2}\right) \leq \frac{1}{\tau - \kappa} \int_{\kappa}^{\tau} \hbar(x)dx \leq \frac{\hbar(\kappa) + \hbar(\tau)}{2} \tag{2.2.1}$$

eşitsizliği geçerlidir [6, 14].

K_s^2 sınıfındaki fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliği Dragomir ve Fitzpatrick tarafından aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

Teorem 2.2.2 $\hbar : [0,\infty) \to [0,\infty)$ ikinci anlamda s konveks fonksiyon olmak üzere $s \in (0,1], \kappa, \tau \in [0,\infty)$ ve $\kappa < \tau$ olsun. $\hbar \in L[\kappa,\tau]$ olmak üzere

$$2^{s-1}\hbar\left(\frac{\kappa+\tau}{2}\right) \leq \frac{1}{\tau-\kappa}\int_\kappa^\tau \hbar(x)dx \leq \frac{\hbar(\kappa)+\hbar(\tau)}{s+1} \tag{2.2.2}$$

eşitsizliği geçerlidir [9].

Dragomir ve Agarwal, Hermite-Hadamard eşitsizliğinin sağ tarafıyla ilgili aşağıdaki sonuçları vermişlerdir.

Lemma 2.2.1 $\hbar : I^\circ \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferansiyellenebilen bir dönüşüm $(\kappa,\tau) \in I^\circ$ ve $\kappa < \tau$ olsun. Eğer $\hbar' \in L[\kappa,\tau]$ ise

$$\frac{\hbar(\kappa)+\hbar(\tau)}{2} - \frac{1}{\tau-\kappa}\int_\kappa^\tau \hbar(x)dx = \frac{\tau-\kappa}{2}\int_0^1 (1-2t)\hbar'(t\kappa+(1-t)\tau)dt \tag{2.2.3}$$

eşitliği geçerlidir [7].

Teorem 2.2.3 $\hbar : I^\circ \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,$I^\circ$ de diferansiyellenebilen bir dönüşüm, $(\kappa,\tau) \in I^\circ$ ve $\kappa < \tau$ olsun. $[\kappa,\tau]$ aralığında $|\ \hbar'\ |$ konveks ise

$$\left|\frac{\hbar(\kappa)+\hbar(\tau)}{2} - \frac{1}{\tau-\kappa}\int_\kappa^\tau \hbar(x)dx\right| \leq \frac{\tau-\kappa}{8}(|\ \hbar'(\kappa)\ | + |\ \hbar'(\tau)\ |) \tag{2.2.4}$$

eşitsizliği geçerlidir [7].

Kırmacı'da Hermite-Hadamard eşitsizliğinin sol tarafı ile ilgili olarak türevleri konveks olan fonksiyonlar için şu sonuçları elde etmiştir.

Lemma 2.2.2 $\hbar : I^\circ \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I° de diferansiyellenebilen bir dönüşüm, $(\kappa,\tau) \in I^\circ$ ve $\kappa < \tau$ olsun. Bu taktirde

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\tau-\kappa}\int_\kappa^\tau \hbar(x)dx - \hbar\left(\frac{\kappa+\tau}{2}\right) \qquad (2.2.5)\\ = \ & (\tau-\kappa)\left[\int_0^{1/2} t\hbar'(t\kappa+(1-t)\tau)dt + \int_{1/2}^1 (t-1)\hbar'(t\kappa+(1-t)\tau)dt\right] \end{aligned}$$

elde edilir [21].

Teorem 2.2.4 $\hbar : I^{\circ} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I° de diferansiyellenebilen bir dönüşüm, $(\kappa, \tau) \in I^{\circ}$ ve $\kappa < \tau$ olsun. Bu taktirde $|\ \hbar'\ |$, $[\kappa, \tau]$ aralığında konveks ise

$$\left| \frac{1}{\tau - \kappa} \int_{\kappa}^{\tau} \hbar(x)dx - \hbar\left(\frac{\kappa + \tau}{2}\right) \right| \leq \frac{\tau - \kappa}{8}(|\hbar'(\kappa)| + |\hbar'(\tau)|) \tag{2.2.6}$$

eşitsizliği geçerlidir [21].

2.2.2 Bullen Eşitsizliği ve Konveks Fonksiyonlar İçin Genelleştirilmiş Bullen Tipli Eşitsizlikler

Teorem 2.2.5 $\hbar : [\kappa, \tau] \to \mathbb{R}$ konveks bir fonksiyon olmak üzere

$$\frac{2}{\tau - \kappa} \int_{\kappa}^{\tau} \hbar(x)dx \leq \hbar\left(\frac{\kappa + \tau}{2}\right) \leq \frac{\hbar(\kappa) + \hbar(\tau)}{2}$$

eşitsizliği geçerlidir. Bu eşitsizliğe literatürde Bullen eşitsizliği denir $[3, 24]$.

Son 10 yılda birçok matematikçi ve araştırmacı bu eşitsizlik üzerine çalışmalar yaparak yeni sonuçlar elde etmişlerdir. Sarıkaya ve arkadaşları [27] lokal kesirli integraller için, Du ve arkadaşları [11] genelleştirilmiş kesirli integraller için ve Çakmak $[4, 5]$ uyumlu kesirli integraller ve diferansiyellenebilir h-konveks fonksiyonlar için Bullen tipli eşitsizlikler elde etmişlerdir.

Sarıkaya konveks fonksiyonlar için Bullen eşitsizliğinin yeni bir genelleştirmesini aşağıdaki gibi elde etmiştir.

Teorem 2.2.6 $\hbar : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, konveks bir fonksiyon, $\kappa < \tau$ ve $\kappa, \tau \in I$ olsun. Bu taktirde her $x \in [\kappa, \tau]$ için

$$\begin{aligned} \hbar\left(\frac{\kappa + x}{2}\right) + \hbar\left(\frac{\tau + x}{2}\right) &\leq \frac{1}{x - \kappa} \int_{\kappa}^{x} \hbar(t)dt + \frac{1}{\tau - x} \int_{x}^{\tau} \hbar(t)dt \\ &\leq \hbar(x) + \frac{\hbar(\kappa) + \hbar(\tau)}{2} \end{aligned} \tag{2.2.7}$$

eşitsizliği geçerlidir [26].

İspat. $[\kappa,\tau]$ aralığını $[\kappa,x]$ ve $[x,\tau]$ şeklinde alt aralıklara ayrılsın. $\hbar$, $[\kappa,x]\subset[\kappa,\tau]$ üzerinde konveks bir fonksiyon olduğundan (2.2.1) eşitsizliği kullanılarak

$$\hbar\left(\frac{\kappa+x}{2}\right)\leq\frac{1}{x-\kappa}\int_{\kappa}^{x}\hbar(t)dt\leq\frac{\hbar(\kappa)+\hbar(x)}{2}\tag{2.2.8}$$

elde edilir. Benzer şekilde $[x,\tau]\subset[\kappa,\tau]$ için de

$$\hbar\left(\frac{\tau+x}{2}\right)\leq\frac{1}{\tau-x}\int_{x}^{\tau}\hbar(t)dt\leq\frac{\hbar(\tau)+\hbar(x)}{2}\tag{2.2.9}$$

yazılır. Buradan (2.2.8) ve (2.2.9) eşitsizlikleri taraf tarafa toplanırsa

$$\hbar\left(\frac{\kappa+x}{2}\right)+\hbar\left(\frac{\tau+x}{2}\right)\leq\frac{1}{x-\kappa}\int_{\kappa}^{x}\hbar(t)dt+\frac{1}{\tau-x}\int_{x}^{\tau}\hbar(t)dt\leq\frac{\hbar(\kappa)+\hbar(\tau)}{2}$$

elde edilir ve böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 2.2.1 Teorem 2.2.6 şartları altında $x=\frac{\kappa+\tau}{2}$ olarak seçilirse aşağıdaki Bullen tipli eşitsizlik

$$\begin{aligned}\hbar\left(\frac{\kappa+\tau}{2}\right)&\leq\frac{1}{2}\left[\hbar\left(\frac{3\kappa+\tau}{4}\right)+\hbar\left(\frac{\kappa+3\tau}{4}\right)\right]\\ &\leq\frac{1}{\tau-\kappa}\int_{\kappa}^{\tau}\hbar(t)dt\\ &\leq\frac{1}{2}\left[\hbar\left(\frac{\kappa+\tau}{2}\right)+\frac{\hbar(\kappa)+\hbar(\tau)}{2}\right]\end{aligned}\tag{2.2.10}$$

elde edilir [26].

Uyarı 2.2.1 Teorem 2.2.6'de $x=\kappa$ veya $x=\tau$ alınırsa

$$\lim_{x\to\kappa}\frac{1}{x-\kappa}\int_{\kappa}^{x}\hbar(t)dt=\hbar(\kappa)\ veya\ \lim_{x\to\tau}\frac{1}{\tau-x}\int_{x}^{\tau}\hbar(t)dt=\hbar(\tau)$$

olduğu kullanılarak (2.2.7) eşitsizliği (2.1.1) eşitsizliğine indirgenir [26].

2.2.3 Simpson Eşitsizliği ve Konveks Fonksiyonlar İçin Genelleştirilmiş Simpson Tipli Eşitsizlikler

Aşağıdaki eşitsizilik literatürde Simpson eşitsizliği olarak bilinmektedir.

Teorem 2.2.7 $\hbar:[\kappa,\tau]\to\mathbb{R}$ (κ,τ) açık aralığında sürekli 4. dereceden türevlenebilir fonksiyon ve

$$\|\hbar^{(4)}\|_{\infty}=sup\mid\hbar^{(4)}(x)\mid<\infty$$

eşitsizliği geçerli olmak üzere:

$$\left|\frac{1}{6}\left[\hbar(\kappa)-4\hbar(\frac{\kappa+\tau}{2}\Big)+\hbar(\tau)\right]-\frac{1}{\tau-\kappa}\int_{\kappa}^{\tau}\hbar(t)dt\right|\leq\frac{1}{2880}\left\|\hbar^{(4)}\right\|_{\infty}(\tau-\kappa)^{4}$$

eşitsizliği geçerlidir.

Literatürde bir çok Simpson tipli eşitsizlik vardır. Alomari ve arkadaşları [1] s-konveks fonksiyonlar için, Hussain ve Qaisar [17] h-konveks fonksiyonlar için, Kavurmacı ve arkadaşları [20] (α, m) geometrik konveks fonksiyonlar için, Pecaric ve Varosanec [23] sınırlı varyasyonlu fonksiyonlar için, Sarıkaya ve arkadaşları [25] s-konveks fonksiyonlar için, Du ve arkadaşları [10] genişletilmiş (s, m)-konveks fonksiyonlar için, Ertuğral ve Sarıkaya [12] genelleştirilmiş kesirli integraller için, Hezenci ve arkadaşları [15] iki kez diferansiyellenebilen fonksiyonlar için, İşcan [19] harmonik konveks fonksiyonlar için ve Ujevic [30] iki katlı integraller için Simpson tipli eşitsizlikleri literatüre kazandırmışlardır.

Lemma 2.2.3 $\hbar : [\kappa, \tau] \to \mathbb{R}$, $\kappa < \tau$ ve (κ, τ) aralığında türevlenebilir bir dönüşüm, $\hbar' \in L[\kappa, \tau]$ ise $x \in [\kappa, \tau]$ için

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{3}\left[2\hbar\left(\frac{\kappa+x}{2}\right)+2\hbar\left(\frac{\tau+x}{2}\right)+\hbar(x)+\frac{\hbar(\kappa)+\hbar(\tau)}{2}\right] \qquad (2.2.11)\\
&-\left[\frac{1}{x-\kappa}\int_{\kappa}^{x}\hbar(t)dt+\frac{1}{\tau-x}\int_{x}^{\tau}\hbar(t)dt\right]\\
=\;&(x-\kappa)\int_{0}^{\frac{1}{2}}\left(\xi-\frac{1}{6}\right)[\hbar'(\xi x+(1-\xi)\kappa)-\hbar'(\xi\kappa+(1-\xi)x)]d\xi\\
&+(\tau-x)\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(\frac{5}{6}-\xi\right)[\hbar'(\xi x+(1-\xi)\tau)-\hbar'(\xi\tau+(1-\xi)x)]d\xi
\end{aligned}$$

eşitliği geçerlidir [26].

İspat. (2.2.11)'in sağ tarafındaki integrallere kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\begin{aligned}
H_1 &= \int_{0}^{\frac{1}{2}}\left(\xi-\frac{1}{6}\right)[\hbar'(\xi x+(1-\xi)\kappa)-\hbar'(\xi\kappa+(1-\xi)x)]d\xi\\
&= \frac{2}{3(x-\kappa)}\hbar\left(\frac{\kappa+x}{2}\right)+\frac{1}{6(x-\kappa)}[\hbar(\kappa)+\hbar(x)]-\frac{1}{(x-\kappa)^2}\int_{\kappa}^{x}\hbar(t)dt
\end{aligned}$$

ve

$$H_2=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(\frac{5}{6}-\xi\right)[\hbar'(\xi x+(1-\xi)\tau)-\hbar'(\xi\tau+(1-\xi)x]d\xi$$

$$=\frac{2}{3(\tau-x)}\hbar\left(\frac{\tau+x}{2}\right)+\frac{1}{6(x-\kappa)}[\hbar(\kappa)+\hbar(x)]-\frac{1}{(\tau-x)^2}\int_x^{\tau}\hbar(t)dt$$

elde edilir. Eğer H_1 ile H_2 sırayla $(x-\kappa)$ ve $(\tau-x)$ ile çarpılıp toplanırsa (2.2.11) eşitliği elde edilip ispat tamamlanır.

Uyarı 2.2.2 Eğer Lemma 2.2.3'te $x=\kappa$ veya $x=\tau$ alınırsa (2.2.11) özdeşliği $s=1$ için [1]'de Alomari ve arkadaşları tarafından elde edilen Lemma 1'deki (4) özdeşliğine indirgenir [26].

Sonuç 2.2.2 Lemma 2.2.3'te $x=\frac{\kappa+\tau}{2}$ seçilirse (2.2.11) özdeşliği

$$\frac{1}{6}\left[4\hbar\left(\frac{3\kappa+\tau}{4}\right)+4\hbar\left(\frac{3\tau+\kappa}{4}\right)+\hbar\left(\frac{\kappa+\tau}{2}\right)+\frac{\hbar(\kappa)+\hbar(\tau)}{2}\right]-\frac{1}{\tau-\kappa}\int_{\kappa}^{\tau}\hbar(t)dt$$

$$=\frac{\tau-\kappa}{4}\left\{\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\xi-\frac{1}{6}\right)\left[\hbar'\left(\xi\frac{\kappa+\tau}{2}+(1-\xi)\kappa\right)-\hbar'\left(\xi\kappa+(1-\xi)\frac{\kappa+\tau}{2}\right)\right]d\xi\right.$$

$$\left.+\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(\frac{5}{6}-\xi\right)\left[\hbar'\left(\xi\frac{\kappa+\tau}{2}+(1-\xi)\tau\right)-\hbar'\left(\xi\tau+(1-\xi)\frac{\kappa+\tau}{2}\right)\right]d\xi\right\}$$

özdeşliğine indirgenmiş olur [26].

Sarıkaya Simpson tipli bazı eşitsizliklerin genelleştirmesini aşağıdaki gibi vermiştir.

Teorem 2.2.8 $\hbar:[\kappa,b]\to\mathbb{R}$, $\kappa<\tau$ ve (κ,τ)'de türevlenebilir bir dönüşüm olsun. $|\hbar'|$, $[\kappa,\tau]$ aralığında konveks olmak üzere $x\in[\kappa,\tau]$ için

$$\left|\frac{1}{3}\left[2\hbar\left(\frac{\kappa+x}{2}\right)+2\hbar\left(\frac{\tau+x}{2}\right)+\hbar(x)+\frac{\hbar(\kappa)+\hbar(\tau)}{2}\right]\right. \tag{2.2.12}$$

$$\left.-\left[\frac{1}{x-\kappa}\int_{\kappa}^{x}\hbar(t)dt+\frac{1}{\tau-x}\int_x^{\tau}\hbar(t)dt\right]\right|$$

$$\leq\frac{5(\tau-\kappa)|\hbar'(x)|}{72}+\frac{5(x-\kappa)|\hbar'(\kappa)|+5(\tau-x)|\hbar'(\tau)|}{72}$$

eşitsizliği geçerlidir [26].

İspat. Lemma 2.2.3 ve $|\hbar'|$'nin konveksliği kullanılarak,

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{3}\left[2\hbar\left(\frac{\kappa+x}{2}\right)+2\hbar\left(\frac{\tau+x}{2}\right)+\hbar(x)+\frac{\hbar(\kappa)+\hbar(\tau)}{2}\right]\right.\\
&\left.-\left[\frac{1}{x-\kappa}\int_{\kappa}^{x}\hbar(t)dt+\frac{1}{\tau-x}\int_{x}^{\tau}\hbar(t)dt\right]\right|\\
\leq\;& (x-\kappa)\int_0^{\frac{1}{2}}\left|\xi-\frac{1}{6}\right|[|\hbar'(\xi x+(1-\xi)\kappa)|+|\hbar'(\xi\kappa+(1-\xi)x|]d\xi\\
&+(\tau-x)\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left|\frac{5}{6}-\xi\right|[|\hbar'(\xi x+(1-\xi)\tau)|+|\hbar'(\xi\tau+(1-\xi)x|]d\xi\\
\leq\;& (x-\kappa)[|\hbar'(x)|+|\hbar'(\kappa)|]\int_0^{\frac{1}{2}}\left|\xi-\frac{1}{6}\right|d\xi\\
&+(\tau-x)[|\hbar'(x)|+|\hbar'(\kappa)|]\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left|\frac{5}{6}-\xi\right|d\xi\\
=\;& \frac{5(\tau-\kappa)}{72}|\hbar'(x)|+\frac{5(x-\kappa)|\hbar'(\kappa)|+5(\tau-x)|\hbar'(\tau)|}{72}
\end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

Uyarı 2.2.3 Teorem 2.2.8'de $x=\kappa$ veya $x=\tau$ alınırsa (2.2.12) eşitsizliği [25]'de Sarıkaya ve arkadaşları tarafından elde edilen Teorem 2.1'deki (2.2) eşitsizliğine indirgenir [26].

Sonuç 2.2.3 Teorem 2.2.8'de $x=\frac{\kappa+\tau}{2}$ seçilirse (2.2.12) eşitsizliği

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{6}\left[4\hbar\left(\frac{3\kappa+\tau}{4}\right)+4\hbar\left(\frac{3\tau+\kappa}{4}\right)+\hbar\left(\frac{\kappa+\tau}{2}\right)+\frac{\hbar(\kappa)+\hbar(\tau)}{2}\right]-\frac{1}{\tau-\kappa}\int_{\kappa}^{\tau}\hbar(t)dt\right|\\
\leq\;& \frac{5(\tau-\kappa)}{144}\left[\left|\hbar'\left(\frac{\kappa+\tau}{2}\right)\right|+\frac{|\hbar'(\kappa)|+|\hbar'(\tau)|}{2}\right]\\
\leq\;& \frac{5(\tau-\kappa)}{72}\left(\frac{|\hbar'(\kappa)|+|\hbar'(\tau)|}{2}\right)
\end{aligned}$$

eşitsizliğine indirgenir [26].

Teorem 2.2.9 $\hbar:[\kappa,\tau]\to\mathbb{R}, \kappa<\tau$ ve (κ,τ)'de türevlenebilir bir dönüşüm olsun. $q>1$ ve $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ olmak üzere $|\hbar'|^q$, $x\in[\kappa,\tau]$ aralığında konveks ise

$$\left|\frac{1}{3}\left[2\hbar\left(\frac{\kappa+x}{2}\right)+2\hbar\left(\frac{\tau+x}{2}\right)+\hbar(x)+\frac{\hbar(\kappa)+\hbar(\tau)}{2}\right]\right. \tag{2.2.13}$$

$$-\left[\frac{1}{x-\kappa}\int_{\kappa}^{x}\hbar(t)dt+\frac{1}{\tau-x}\int_{x}^{\tau}\hbar(t)dt\right]\Bigg|$$

$$\leq\frac{1}{(1+p)^{\frac{1}{p}}}\left[\frac{1}{3^{p+1}}+\frac{1}{6^{p+1}}\right]^{\frac{1}{p}}$$

$$\times\left\{(x-\kappa)\left[\left(\frac{|\hbar'(x)|^{q}+|\hbar'(\kappa)|^{q}}{2}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{|\hbar'(\kappa)|^{q}+|\hbar'(x)|^{q}}{2}\right)^{\frac{1}{q}}\right.\right.$$

$$\left.\left.+(\tau-x)\left[\left(\frac{|\hbar'(x)|^{q}+|\hbar'(\tau)|^{q}}{2}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{|\hbar'(\tau)|^{q}+|\hbar'(x)|^{q}}{2}\right)^{\frac{1}{q}}\right]\right\}$$

eşitsizliği geçerlidir [26].

İspat. Lemma 2.2.3, Hölder eşitsizliği ve $|\hbar'|^{q}$'nin konveksliği kullanılarak

$$\left|\frac{1}{3}\left[2\hbar\left(\frac{\kappa+x}{2}\right)+2\hbar\left(\frac{\tau+x}{2}\right)+\hbar(x)+\frac{\hbar(\kappa)+\hbar(\tau)}{2}\right]\right.$$

$$-\left[\frac{1}{x-\kappa}\int_{\kappa}^{x}\hbar(t)dt+\frac{1}{\tau-x}\int_{x}^{\tau}\hbar(t)dt\right]\Bigg|$$

$$\leq\quad(x-\kappa)\left(\int_{0}^{\frac{1}{2}}\left|\xi-\frac{1}{6}\right|^{p}d\xi\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\times\left[\left(\int_{0}^{\frac{1}{2}}|\hbar'(\xi x+(1-\xi)\kappa)|^{q}d\xi\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\int_{0}^{\frac{1}{2}}|\hbar'(\xi\kappa+(1-\xi)x)|^{q}\right)^{\frac{1}{q}}\right|$$

$$+(\tau-x)\left(\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left|\frac{5}{6}-\xi\right|^{p}d\xi\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\times\left[\left(\int_{\frac{1}{2}}^{1}|\hbar'(\xi x+(1-\xi)\tau\Big)|^{q}d\xi\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\int_{\frac{1}{2}}^{1}|\hbar'\Big(\xi\tau+(1-\xi)x\Big)|^{q}d\xi\right)^{\frac{1}{q}}\right]$$

$$\leq\quad\frac{1}{(1+p)^{\frac{1}{p}}}\left[\frac{1}{3^{p+1}}+\frac{1}{6^{p+1}}\right]^{\frac{1}{p}}$$

$$\times\left\{(x-\kappa)\left[\left(\int_{0}^{\frac{1}{2}}[|\hbar'(x)|^{q}+(1-\xi)|\hbar'(\kappa)|^{q}]d\xi\right)^{\frac{1}{q}}\right.\right.$$

$$\left.+\left(\int_{0}^{\frac{1}{2}}[\xi|\hbar'(\kappa)|^{q}+(1-\xi)|\hbar'(x)|^{q}]d\xi\right)^{\frac{1}{q}}\right]$$

$$
\begin{aligned}
&+(\tau-x)\Bigg[\bigg(\int_0^{\frac{1}{2}}[\xi|\hbar'(x)|^q+(1-\xi)|\hbar'(\tau)|^q]d\xi\bigg)^{\frac{1}{q}}\\
&+\bigg(\int_0^{\frac{1}{2}}[\xi|\hbar(\tau)|^q+(1-\xi)|\hbar'(x)|^q]d\xi\bigg)^{\frac{1}{q}}\Bigg]\Bigg\}\\
\leq\ &\frac{1}{(1+p)^{\frac{1}{p}}}\left[\frac{1}{3^{p+1}}+\frac{1}{6^{p+1}}\right]^{\frac{1}{p}}\\
&\times\Bigg\{(x-\kappa)\Bigg[\bigg(\frac{|\hbar'(x)|^q+|\hbar'(\kappa)|^q}{2}\bigg)^{\frac{1}{q}}+\bigg(\frac{|\hbar'(\kappa)|^q+|\hbar'(x)|^q}{2}\bigg)^{\frac{1}{q}}\Bigg]\\
&+(\tau-x)\Bigg[\bigg(\frac{|\hbar'(x)|^q+|\hbar'(\tau)|^q}{2}\bigg)^{\frac{1}{q}}+\bigg(\frac{|\hbar'(\tau)|^q+|\hbar'(x)|^q}{2}\bigg)^{\frac{1}{q}}\Bigg]\Bigg\}
\end{aligned}
$$

yazılır ve ispat tamamlanır.

Uyarı 2.2.4 Eger Teorem 2.2.9'da $x=\kappa$ veya $x=\tau$ seçilirse (2.2.13) eşitsizliği Sarıkaya ve arkadaşları tarafından elde edilen [25]'deki Teorem 2.3'deki (2.3) eşitsizliğine indirgenir [26].

Sonuç 2.2.4 Teorem 2.2.9'da $x=\frac{\kappa+\tau}{2}$ seçilirse

$$
\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{6}\left[4\hbar\bigg(\frac{3\kappa+\tau}{4}\bigg)+4\hbar\bigg(\frac{3\tau+\kappa}{4}\bigg)+\hbar\bigg(\frac{\kappa+\tau}{2}\bigg)+\frac{\hbar(\kappa)+\hbar(\tau)}{2}\right]-\frac{1}{\tau-\kappa}\int_\kappa^\tau\hbar(t)dt\right|\\
\leq\ &\frac{\tau-\kappa}{2(1+p)^{\frac{1}{p}}}\left[\frac{1}{3^{p+1}}+\frac{1}{6^{p+1}}\right]^{\frac{1}{p}}\\
&\times\Bigg[\bigg(\frac{|\hbar'\big(\frac{\kappa+\tau}{2}\big)|^q+|\hbar'(\kappa)|^q}{3}\bigg)^{\frac{1}{q}}+\bigg(\frac{|\hbar'\big(\frac{\kappa+\tau}{2}\big)|^q+|\hbar'(\tau)|^q}{2}\bigg)^{\frac{1}{q}}\Bigg]\\
\leq\ &\frac{\tau-\kappa}{2(1+p)^{\frac{1}{p}}}\left[\frac{1}{3^{p+1}}+\frac{1}{6^{p+1}}\right]^{\frac{1}{p}}\\
&\times\Bigg[\bigg(\frac{3|\hbar'(\kappa)|^q+|\hbar'(\tau)|^q}{4}\bigg)^{\frac{1}{q}}+\bigg(\frac{|\hbar'(\kappa)|^q+3|\hbar'(\tau)|^q}{4}\bigg)^{\frac{1}{q}}\Bigg]
\end{aligned}
$$

eşitsizliği elde edilir [26].

2.2.4 Konveks Fonksiyonlar İçin Genelleştirilmiş Yamuk Tipli Eşitsizlikler

Lemma 2.2.4 $\hbar : [\kappa, \tau] \to \mathbb{R}$, $\kappa < \tau$, (κ, τ) aralığında diferansiyellenebilen bir dönüşüm olsun. $\hbar' \in L[\kappa, \tau]$ ve $x \in [\kappa, \tau]$ için

$$\hbar(x) + \frac{\hbar(\kappa) + \hbar(\tau)}{2} - \left[\frac{1}{x-\kappa}\int_{\kappa}^{x} \hbar(t)dt + \frac{1}{\tau - x}\int_{x}^{\tau} \hbar(t)dt\right] \tag{2.2.14}$$

$$= \frac{(x-\kappa)}{2}\int_0^1 (1-2\xi)\hbar'(\xi\kappa + (1-\xi)x)d\xi$$

$$+\frac{(\tau - x)}{2}\int_0^1 (1-2\xi)\hbar'(\xi x + (1-\xi)\tau)d\xi$$

eşitliği geçerlidir [26].

İspat. (2.2.14) eşitliğinin sağ tarafındaki integrallere kısmi integrasyon uygulanıp, $t = \xi\kappa + (1-\xi)x$ değişken değişimi kullanılırsa

$$\begin{aligned} F_1 &= \int_0^1 (1-2\xi)\hbar'(\xi\kappa + (1-\xi)x)d\xi \\ &= \frac{\hbar(x)}{x-\kappa} + \frac{\hbar(\kappa)}{x-\kappa} - \frac{2}{(x-\kappa)^2}\int_{\kappa}^{x} \hbar(t)dt \end{aligned}$$

yazılır. Benzer şekilde

$$\begin{aligned} F_2 &= \int_0^1 (1-2\xi)\hbar'(\xi x + (1-\xi)\tau)d\xi \\ &= \frac{\hbar(\tau)}{\tau - x} + \frac{\hbar(x)}{\tau - x} - \frac{2}{(\tau - x)^2}\int_{x}^{\tau} \hbar(t)dt \end{aligned}$$

olarak yazılır.

Eğer F_1 ile F_2 sırasıyla $\frac{x-\kappa}{2}$ ve $\frac{\tau-x}{2}$ ile çarpılıp toplanırsa (2.2.14) elde edilir.

Uyarı 2.2.5 Eger Lemma 2.2.4'de $x = \kappa$ veya $x = \tau$ alınırsa (2.2.14) eşitliği (2.2.3) eşitliğine indirgenir [26].

Sonuç 2.2.5 Lemma 2.2.4'de $x = \frac{\kappa+\tau}{2}$ seçilirse

$$\frac{1}{2}\left[\hbar\left(\frac{\kappa+\tau}{2}\right) + \frac{\hbar(\kappa) + \hbar(\tau)}{2}\right] - \frac{1}{\tau-\kappa}\int_{\kappa}^{\tau} \hbar(t)dt$$

$$= \frac{\tau-\kappa}{8}\int_0^1 (1-2\xi)\hbar'\Big(\xi\kappa+(1-\xi)\frac{\kappa+\tau}{2}\Big)d\xi$$

$$+\frac{\tau-\kappa}{8}\int_0^1 (1-2\xi)\hbar'\Big(\xi\frac{\kappa+\tau}{2}+(1-\xi)\tau\Big)d\xi$$

eşitliği elde edilir [26].

Teorem 2.2.10 $\hbar : [\kappa,\tau] \to \mathbb{R}$ tanımlı (κ,τ) açık aralığında diferansiyellenebilen bir dönüşüm ve $\kappa < \tau$ olmak üzere $|\hbar'|$, $[\kappa,\tau]$ aralığında konveks ise $x \in [\kappa,\tau]$ için

$$\left|\hbar(x)+\frac{\hbar(\kappa)+\hbar(\tau)}{2}-\left[\frac{1}{x-\kappa}\int_\kappa^x \hbar(t)dt+\frac{1}{\tau-x}\int_x^\tau \hbar(t)dt\right]\right| \tag{2.2.15}$$

$$\leq \frac{\tau-\kappa}{8}|\hbar'(x)|+\frac{(x-\kappa)|\hbar'(\kappa)|+(\tau-x)|\hbar'(\tau)|}{8}$$

eşitsizliği geçerlidir [26].

İspat. Lemma 2.2.4 ve $|\hbar'|$'nin konveksliği kullanılarak

$$\left|\hbar(x)+\frac{\hbar(\kappa)+\hbar(\tau)}{2}-\left[\frac{1}{x-\kappa}\int_\kappa^x \hbar(t)dt+\frac{1}{\tau-x}\int_x^\tau \hbar(t)dt\right]\right|$$

$$\leq \frac{x-\kappa}{2}\int_0^1 |1-2\xi||\hbar'(\xi\kappa+(1-\xi)x)|d\xi$$

$$+\frac{\tau-x}{2}\int_0^1 |1-2\xi|\hbar'(\xi x+(1-\xi)\tau)|d\xi$$

$$\leq \frac{x-\kappa}{2}\int_0^1 |1-2\xi|[\xi|\hbar'(\kappa)|+(1-\xi)|\hbar'(x)|]d\xi$$

$$+\frac{\tau-x}{2}\int_0^1 |1-2\xi|[\xi|\hbar'(x)|+(1-\xi)|\hbar'(\tau)|]d\xi$$

$$= \frac{x-\kappa}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} (1-2\xi)[\xi|\hbar'(\kappa)|+(1-\xi)|\hbar'(x)|]d\xi$$

$$+\frac{x-\kappa}{2}\int_{\frac{1}{2}}^1 (2\xi-1)[\xi|\hbar'(\kappa)|+(1-\xi)|\hbar'(x)|]d\xi$$

$$+\frac{\tau-x}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} (1-2\xi)[\xi|\hbar'(x)|+(1-\xi)|\hbar'(\tau)|]d\xi$$

$$+\frac{\tau-x}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{1}(2\xi-1)[\xi|\hbar'(x)|+(1-\xi)|\hbar'(\tau)|]d\xi$$

$$= \frac{\tau-\kappa}{8}|\hbar'(x)|+\frac{(x-\kappa)|\hbar'(\kappa)|+(\tau-x)|\hbar(\tau)|}{8}$$

elde edilir ve böylece ispat tamamlanır.

Uyarı 2.2.6 Eger Teorem 2.2.10'da $x=\kappa$ veya $x=\tau$ alınırsa (2.2.15) eşitsizliği (2.2.4) eşitsizliğine indirgenir [26].

Sonuç 2.2.6 Teorem 2.2.4'te $x=\frac{\kappa+\tau}{2}$ seçilirse

$$\left|\frac{1}{2}\left[\hbar\left(\frac{\kappa+\tau}{2}\right)+\frac{\hbar(\kappa)+\hbar(\tau)}{2}\right]-\frac{1}{\tau-\kappa}\int_{\kappa}^{\tau}\hbar(t)dt\right|$$

$$\leq \frac{\tau-\kappa}{16}\left[\left|\hbar'\left(\frac{\kappa+\tau}{2}\right)\right|+\frac{|\hbar'(\kappa)|+|\hbar'(\tau)|}{2}\right]$$

$$\leq \frac{\tau-\kappa}{8}\left(\frac{|\hbar'(\kappa)|+|\hbar'(\tau)|}{2}\right)$$

eşitsizliği elde edilir [26].

Teorem 2.2.11 $\hbar:[\kappa,\tau]\to\mathbb{R}$ tanımlı (κ,τ) aralığında diferansiyellenebilen ve $\kappa<\tau$ olmak üzere $|\hbar'|^q$ $[\kappa,\tau]$'de konveks ise $q>1$ ve $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ için

$$\left|\hbar(x)+\frac{\hbar(\kappa)+\hbar(\tau)}{2}-\left[\frac{1}{x-\kappa}\int_{\kappa}^{x}\hbar(t)dt+\frac{1}{\tau-x}\int_{x}^{\tau}\hbar(t)dt\right]\right| \tag{2.2.16}$$

$$\leq \frac{1}{2(p+1)^{\frac{1}{p}}}\left[(x-\kappa)\left(\frac{|\hbar'(\kappa)|^q+|\hbar'(x)|^q}{2}\right)^{\frac{1}{p}}\right]$$

$$+\left[(\tau-x)\left(\frac{|\hbar'(\tau)|^q+|\hbar'(x)|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}\right]$$

eşitsizliği geçerlidir [26].

İspat. Lemma 2.2.4, Hölder eşitsizliği ve $|\hbar'|^q$'nin konveksliği kullanılarak

$$\left|\hbar(x)+\frac{\hbar(\kappa)+\hbar(\tau)}{2}-\left[\frac{1}{x-\kappa}\int_{\kappa}^{x}\hbar(t)dt+\frac{1}{\tau-x}\int_{x}^{\tau}\hbar(t)dt\right]\right|$$

$$\leq \frac{x-\kappa}{2}\int_{0}^{1}|1-2\xi||\hbar'(\xi\kappa+(1-\xi)x)|d\xi$$

$$+\frac{\tau-x}{2}\int_0^1 |1-2\xi|\hbar'(\xi x+(1-\xi)\tau)|d\xi$$

$$\leq \frac{x-\kappa}{2}\left(\int_0^1 |1-2\xi|^p d\xi\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 |\hbar'(\xi\kappa+(1-\xi)x)|^q d\xi\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\frac{\tau-x}{2}\left(\int_0^1 |1-2\xi|^p d\xi\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 |\hbar'(\xi x+(1-\xi)\tau)|^q d\xi\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq \frac{x-\kappa}{2(p+1)^{\frac{1}{p}}}\left(\int_0^1 [\xi|\hbar'(\kappa)|^q+(1-\xi)|\hbar'(x)^q|]d\xi\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\frac{\tau-x}{2(p+1)^{\frac{1}{p}}}\left(\int_0^1 [\xi|\hbar'(x)|^q+(1-\xi)|\hbar'(\tau)^q|]d\xi\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$= \frac{x-\kappa}{2(p+1)^{\frac{1}{p}}}\left(\frac{|\hbar'(\kappa)|^q+|\hbar'(x)|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}+\frac{\tau-x}{2(p+1)^{\frac{1}{p}}}\left(\frac{|\hbar'(\tau)|^q+|\hbar'(x)|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

Sonuç 2.2.7 Teorem 2.2.11'de, $x=\frac{\kappa+\tau}{2}$ seçilirse

$$\left|\frac{1}{2}\left[\hbar\left(\frac{\kappa+\tau}{2}\right)+\frac{\hbar(\kappa)+\hbar(\tau)}{2}\right]-\frac{1}{\tau-\kappa}\int_\kappa^\tau \hbar(t)dt\right|$$

$$\leq \frac{\tau-\kappa}{8(p+1)^{\frac{1}{p}}}\left[\left(\frac{|\hbar'(\kappa)|^q+|\hbar'\left(\frac{\kappa+\tau}{2}\right)^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}+\left[\left(\frac{|\hbar'(\tau)|^q+|\hbar'\left(\frac{\kappa+\tau}{2}\right)^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}\right]$$

$$\leq \frac{\tau-\kappa}{8(p+1)^{\frac{1}{p}}}\left[\left(\frac{3|\hbar'(\kappa)|^q+|\hbar'(\tau)|^q}{4}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{3|\hbar'(\tau)|^q+|\hbar'(\kappa)|^q}{4}\right)^{\frac{1}{q}}\right]$$

eşitsizliği elde edilir [26].

Uyarı 2.2.7 Teorem 2.2.11'de $x=\kappa$ veya $x=\tau$ alınırsa (2.2.16) eşitsizliği [7]'de Dragomir ve Agarwal tarafından elde edilen Teorem 2.3'deki (2.4) eşitsizliğine indirgenir [26].

2.2.5 Konveks Fonksiyonlar İçin Genelleşitirilmiş Orta Nokta Eşitsizlikleri

Lemma 2.2.5 $\hbar : [\kappa, \tau] \to \mathbb{R}$ (κ, τ)'de diferansiyellenebilir bir dönüşüm ve $\kappa < \tau$ olsun. Eğer $\hbar' \in L[\kappa, \tau]$ ise $x \in [\kappa, \tau]$ için

$$\hbar\left(\frac{\kappa+x}{2}\right)+\hbar\left(\frac{\tau+x}{2}\right)-\left[\frac{1}{x-\kappa}\int_{\kappa}^{x}\hbar(t)dt+\frac{1}{\tau-x}\int_{x}^{\tau}\hbar(t)dt\right] \quad (2.2.17)$$

$$= (x-\kappa)\int_{0}^{\frac{1}{2}}\xi[\hbar'(\xi x+(1-\xi)\kappa)-\hbar'(\xi\kappa+(1-\xi)x)]d\xi$$

$$+(\tau-x)\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-\xi)[\hbar'(\xi x+(1-\xi)\tau)-\hbar'(\xi\tau+(1-\xi)x)]d\xi$$

eşitliği geçerlidir [26].

İspat. (2.2.17)'deki eşitliğin sağ tarafındaki integrallere kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\begin{aligned} T_1 &= \int_{0}^{\frac{1}{2}}\xi[\hbar'(\xi x+(1-\xi)\kappa)-\hbar'(\xi\kappa+(1-\xi)x)]d\xi \\ &= \frac{1}{x-\kappa}\hbar\left(\frac{\kappa+x}{2}\right)-\frac{1}{(x-\kappa)^2}\int_{\kappa}^{x}\hbar(t)dt \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} T_2 &= \int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-\xi)[\hbar'(\xi x+(1-\xi)\tau)-\hbar'(\xi\tau+(1-\xi)x)]d\xi \\ &= \frac{1}{\tau-x}\hbar\left(\frac{\tau+x}{2}\right)-\frac{1}{(\tau-x)^2}\int_{x}^{\tau}\hbar(t)dt \end{aligned}$$

elde edilir.

T_1 ile T_2 sırasıyla $(x-\kappa)$ ve $(\tau-x)$ ile çarpılıp toplanırsa istenilen eşitlik elde edilir.

Uyarı 2.2.8 Lemma 2.2.5'de $x=\kappa$ veya $x=\tau$ alınırsa (2.2.17) özdeşliği (2.2.5) eşitliğine indirgenir [26].

Sonuç 2.2.8 Lemma 2.2.5'de $x=\frac{\kappa+\tau}{2}$ seçilirse

$$\frac{1}{2}\left[\hbar\left(\frac{3\kappa+\tau}{4}\right)+\hbar\left(\frac{3\tau+\kappa}{4}\right)\right]-\frac{1}{\tau-\kappa}\int_{\kappa}^{\tau}\hbar(t)dt$$

$$= \frac{\tau-\kappa}{4}\Bigg\{\int_0^{\frac{1}{2}}\xi\Bigg[\hbar'\Bigg(\xi\frac{\kappa+\tau}{2}+(1-\xi)\kappa\Bigg)-\hbar'\Bigg(\xi\kappa+(1-\xi)\frac{\kappa+\tau}{2}\Bigg]d\xi$$

$$+\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-\xi)\Bigg[\hbar'\Bigg(\xi\frac{\kappa+\tau}{2}-(1-\xi)\tau\Bigg)-\hbar'\Bigg(\xi\tau+(1-\xi)\frac{\kappa+\tau}{2}\Bigg]d\xi\Bigg\}$$

eşitliği elde edilir [26].

Teorem 2.2.12 $\hbar : [\kappa, \tau] \to \mathbb{R}$ (κ, τ) aralığıda türevlenebilir bir fonksiyon ve $\kappa < \tau$ olmak üzere $|\hbar'|$, $x \in [\kappa, \tau]$'de konveks ise

$$\left|\hbar\left(\frac{\kappa+x}{2}\right)+\hbar\left(\frac{\tau+x}{2}\right)-\left[\frac{1}{x-\kappa}\int_\kappa^x\hbar(t)dt+\frac{1}{\tau-x}\int_x^\tau\hbar(t)dt\right]\right| \quad (2.2.18)$$

$$\leq \frac{\tau-\kappa}{8}|\hbar'(x)|+\frac{(x-\kappa)|\hbar'(\kappa)|+(\tau-x)|\hbar'(\tau)|}{8}$$

eşitsizliği geçerlidir [26].

İspat. Lemma 2.2.5 ve $|\hbar'|$'nin konveksliği kullanılarak,

$$\left|\hbar\left(\frac{\kappa+x}{2}\right)+\hbar\left(\frac{\tau+x}{2}\right)-\left[\frac{1}{x-\kappa}\int_\kappa^x\hbar(t)dt+\frac{1}{\tau-x}\int_x^\tau\hbar(t)dt\right]\right|$$

$$\leq (x-\kappa)\int_0^{\frac{1}{2}}\xi[|\hbar'(\xi x+(1-\xi)\kappa)|+|\hbar'(\xi\kappa+(1-\xi)x)|]d\xi$$

$$+(\tau-x)\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-\xi)[|\hbar'(\xi x+(1-\xi)\tau)|+|\hbar'(\xi\tau+(1-\xi)x)|]d\xi$$

$$\leq (x-\kappa)[|\hbar'(x)|+|\hbar'(\kappa)|]\int_0^{\frac{1}{2}}\xi d\xi+(\tau-x)[|\hbar'(x)|+|\hbar'(\kappa)|]\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-\xi)d\xi$$

$$= \frac{\tau-\kappa}{8}|\hbar'(x)|+\frac{(x-\kappa)|\hbar'(\kappa)|+(\tau-x|\hbar'(\tau)|}{8}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

Uyarı 2.2.9 Teorem 2.2.12'de $x = \kappa$ veya $x = \tau$ alınırsa (2.2.18) eşitsizliği (2.2.6) eşitsizliğine indirgenir [26].

Sonuç 2.2.9 Teorem 2.2.12'de $x = \frac{\kappa+\tau}{2}$ seçilirse

$$\left|\frac{1}{2}\left[\hbar\left(\frac{3\kappa+\tau}{4}\right)+\hbar\left(\frac{3\tau+\kappa}{4}\right)\right]-\frac{1}{\tau-\kappa}\int_\kappa^\tau\hbar(t)dt\right|$$

$$\leq \frac{\tau-\kappa}{16}\left[\left|\hbar'\left(\frac{\kappa+\tau}{2}\right)\right|+\frac{|\hbar'(\kappa)|+|\hbar'(\tau)|}{2}\right]$$

$$\leq \frac{\tau-\kappa}{8}\left(\frac{|\hbar'(\kappa)|+|\hbar'(\tau)|}{2}\right)$$

eşitsizliği elde edilir [26].

Teorem 2.2.13 $\hbar : [\kappa,\tau] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $\kappa < \tau$ ve (κ,τ) aralığında diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. $q > 1$ ve $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ olmak üzere $|\hbar'|^q$, $[\kappa,\tau]$'da konveks ise $x \in [\kappa,\tau]$ için

$$\left|\hbar\left(\frac{\kappa+x}{2}\right)+\hbar\left(\frac{\tau+x}{2}\right)-\left[\frac{1}{x-\kappa}\int_{\kappa}^{x}\hbar(t)dt+\frac{1}{\tau-x}\int_{x}^{\tau}\hbar(t)dt\right]\right| \tag{2.2.19}$$

$$\leq \frac{1}{(1+p)^{\frac{1}{p}}2^{1+\frac{1}{p}}}\left\{(x-\kappa)\left[\left(\frac{|\hbar'(x)|^q+|\hbar'(\kappa)|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{|\hbar'(\kappa)|^q+|\hbar'(x)|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}\right]\right.$$

$$\left.+(\tau-x)\left[\left(\frac{|\hbar'(x)|^q+|\hbar'(\tau)|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{|\hbar'(\tau)|^q+|\hbar'(x)|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}\right]\right\}$$

eşitsizliği geçerlidir [26].

İspat. Lemma 2.2.5, Hölder eşitsizliği ve $|\hbar'|^q$'nin konveksliği kullanılarak,

$$\left|\hbar\left(\frac{\kappa+x}{2}\right)+\hbar\left(\frac{\tau+x}{2}\right)-\left[\frac{1}{x-\kappa}\int_{\kappa}^{x}\hbar(t)dt+\frac{1}{\tau-x}\int_{x}^{\tau}\hbar(t)dt\right]\right|$$

$$\leq (x-\kappa)\left(\int_0^{\frac{1}{2}}\xi^p d\xi\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\times\left[\left(\int_0^{\frac{1}{2}}|\hbar'(\xi x+(1-\xi)\kappa)|^q d\xi\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\int_0^{\frac{1}{2}}|\hbar'(\xi\kappa+(1-\xi)x)|^q d\xi\right)^{\frac{1}{q}}\right]$$

$$+(\tau-x)\left(\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-\xi)^p d\xi\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\times\left[\left(\int_{\frac{1}{2}}^{1}|\hbar'(\xi x+(1-\xi)\tau)|^q d\xi\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\int_{\frac{1}{2}}^{1}|\hbar'(\xi\tau+(1-\xi)x)|^q d\xi\right)^{\frac{1}{q}}\right]$$

$$\leq \frac{x-\kappa}{(1+p)^{\frac{1}{p}}2^{1+\frac{1}{p}}}$$

$$\times\left[\left(\int_0^{\frac{1}{2}}[\xi|\hbar'(x)|^q+(1-\xi)|\hbar'(\kappa)|^q]d\xi\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\int_0^{\frac{1}{2}}[\xi|\hbar'(\kappa)|^q+(1-\xi)|\hbar'(x)|^q]d\xi\right)^{\frac{1}{q}}\right]$$

$$+\frac{(\tau-x)}{(1+p)^{\frac{1}{p}}2^{1+\frac{1}{p}}}$$

$$\times\left[\left(\int_0^{\frac{1}{2}}[\xi|\hbar'(x)|^q+(1-\xi)|\hbar'(\tau)|^q]d\xi\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\int_0^{\frac{1}{2}}[\xi|\hbar'(\tau)|^q+(1-\xi)|\hbar'(x)|^q]d\xi\right)^{\frac{1}{q}}\right]$$

$$\leq \frac{x-\kappa}{(1+p)^{\frac{1}{p}}2^{1+\frac{1}{p}}}\left[\left(\frac{|\hbar'(x)|^q+|\hbar'(\kappa)|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{|\hbar'(\kappa)|^q+|\hbar'(x)|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}\right]$$

$$+\frac{(\tau-x)}{(1+p)^{\frac{1}{p}}2^{1+\frac{1}{p}}}\left[\left(\frac{|\hbar'(x)|^q+|\hbar'(\tau)|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{|\hbar'(\tau)|^q+|\hbar'(x)|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}\right]$$

bulunur ve ispat tamamlanır.

Uyarı 2.2.10 Teorem 2.2.13'de $x=\kappa$ veya $x=\tau$ seçilirse (2.2.19) eşitsizliği [21]'de Kırmacı tarafından elde edilen Teorem 2.3'deki (2.3) eşitsizliğine indirgenir.

Sonuç 2.2.10 Teorem 2.2.13'de $x=\frac{\kappa+\tau}{2}$ seçilirse

$$\left|\frac{1}{2}\left[\hbar\left(\frac{3\kappa+\tau}{4}\right)+\hbar\left(\frac{3\tau+\kappa}{4}\right)\right]-\frac{1}{\tau-\kappa}\int_\kappa^\tau \hbar(t)dt\right]\Big|$$

$$\leq \frac{\tau-\kappa}{(1+p)^{\frac{1}{p}}2^{3+\frac{1}{p}}}$$

$$\times\left\{\left[\left(\frac{|\hbar'\left(\frac{\kappa+\tau}{2}\right)|^q+|\hbar'(\kappa)|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{|\hbar'(\kappa)|^q+|\hbar'\left(\frac{\kappa+\tau}{2}\right)|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}\right]\right.$$

$$\left.+\left[\left(\frac{|\hbar'\left(\frac{\kappa+\tau}{2}\right)|^q+|\hbar'(b)|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{|\hbar'(\tau)|^q+|\hbar'\left(\frac{\kappa+\tau}{2}\right)|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}\right]\right\}$$

$$\leq \frac{\tau-\kappa}{(1+p)^{\frac{1}{p}}2^{2+\frac{1}{p}}}\left[\left(\frac{3|\hbar'(\kappa)|^q+|\hbar'(\tau)|^q}{4}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{|\hbar'(\kappa)|^q+3|\hbar'(\tau)|^q}{4}\right)^{\frac{1}{q}}\right]$$

elde edilir [26].

3. ARAŞTIRMA BULGULARI

3.1 s-Konveks Fonksiyonlar İçin Bullen, Yamuk, Orta Nokta ve Simpson Tipli Eşitsizlikler

Teorem 3.1.1 $\hbar : [0,\infty) \to [0,\infty)$ bir fonksiyon ve $\hbar \in K_s^2$, $s \in (0,1]$, $\kappa, \tau \in [0,\infty)$ ve $\kappa < \tau$ olsun. $\hbar \in L[\kappa,\tau]$ olmak üzere $x \in (\kappa,\tau)$ için

$$\begin{aligned} & 2^{s-1}\left(\hbar\left(\frac{\kappa+x}{2}\right)+\hbar\left(\frac{\tau+x}{2}\right)\right) \\ \leq \;& \frac{1}{x-\kappa}\int_\kappa^x \hbar(t)dt + \frac{1}{\tau-x}\int_x^\tau \hbar(t)dt \\ \leq \;& \frac{\hbar(\kappa)+\hbar(\tau)+2\hbar(x)}{s+1} \end{aligned} \tag{3.1.1}$$

esitsizliği geçerlidir.

İspat. $\hbar$, $[\kappa,x] \subset [\kappa,\tau]$'de ikinci anlamda s-konveks fonksiyon olduğundan (2.2.2) eşitsizliği kullanılarak

$$2^{s-1}\hbar\left(\frac{\kappa+x}{2}\right) \leq \frac{1}{x-\kappa}\int_\kappa^x \hbar(x)dx \leq \frac{\hbar(\kappa)+\hbar(x)}{s+1}. \tag{3.1.2}$$

yazılır. $[x,\tau] \subset [\kappa,\tau]$ içinde benzer şekilde

$$2^{s-1}\hbar\left(\frac{\tau+x}{2}\right) \leq \frac{1}{\tau-\kappa}\int_x^\tau \hbar(x)dx \leq \frac{\hbar(\tau)+\hbar(x)}{s+1}. \tag{3.1.3}$$

yazılır. Buradan (3.1.2) ve (3.1.3) taraf tarafa toplanırsa

$$\begin{aligned} & 2^{s-1}\left(\hbar\left(\frac{\kappa+x}{2}\right)+\hbar\left(\frac{\tau+x}{2}\right)\right) \\ \leq \;& \frac{1}{x-\kappa}\int_\kappa^x \hbar(t)dt + \frac{1}{\tau-x}\int_x^\tau \hbar(t)dt \\ \leq \;& \frac{\hbar(\kappa)+\hbar(\tau)+2\hbar(x)}{s+1} \end{aligned}$$

olur. Böylece (3.1.1) eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 3.1.1 Teorem 3.1.1'de $s = 1$ için (3.1.1) eşitsizliği, (2.2.7)'deki eşitsizliğe indirgenir.

Teorem 3.1.2 $\kappa < \tau$ olmak üzere $\hbar : [\kappa,\tau] \subset [0,\infty) \to \mathbb{R}$ tanımlı (κ,τ) aralığında diferansiyellenebilen bir dönüşüm olsun. $|\hbar'|$, $[\kappa,\tau]$'de ikinci anlamda s-konveks fonksiyon ve $x \in (\kappa,\tau)$

olmak üzere

$$\left|\hbar(x)+\frac{\hbar(\kappa)+\hbar(\tau)}{2}-\left[\frac{1}{x-\kappa}\int_{\kappa}^{x}\hbar(t)dt+\frac{1}{\tau-x}\int_{x}^{\tau}\hbar(t)dt\right]\right| \tag{3.1.4}$$

$$\leq \left(\frac{1}{2^{s+1}(s+1)(s+2)}+\frac{s}{2(s+1)(s+2)}\right)(\tau-\kappa)|\hbar'(x)|$$

$$+\left(\frac{1}{2^{s+1}(s+1)(s+2)}+\frac{s}{2(s+1)(s+2)}\right)\big((x-\kappa)|\hbar'(\kappa)|+(\tau-x)|\hbar'(\tau)|\big)$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. Lemma 2.2.4, mutlak değer özellikleri ve $|\hbar'|$'nin $[\kappa,\tau]$'de ikinci anlamda s-konveksliği kullanılarak

$$\left|\hbar(x)+\frac{\hbar(\kappa)+\hbar(\tau)}{2}-\left[\frac{1}{x-\kappa}\int_{\kappa}^{x}\hbar(t)dt+\frac{1}{\tau-x}\int_{x}^{\tau}\hbar(t)dt\right]\right|$$

$$\leq \frac{x-\kappa}{2}\int_0^1|1-2\xi||\hbar'(\xi\kappa+(1-\xi)x)d\xi|+\frac{\tau-x}{2}\int_0^1|1-2\xi||\hbar'(\xi x+(1-\xi)\tau)d\xi|$$

$$\leq \frac{x-\kappa}{2}\int_0^1|1-2\xi|\left[\xi^s|\hbar'(\kappa)|+(1-\xi)^s|\hbar'(x)|\right]d\xi$$

$$+\frac{\tau-x}{2}\int_0^1|1-2\xi|\left[\xi^s|\hbar'(x)|+(1-\xi)^s|\hbar'(\tau)|\right]d\xi$$

$$= \frac{x-\kappa}{2}\int_0^{\frac{1}{2}}(1-2\xi)\left[\xi^s|\hbar'(\kappa)|+(1-\xi)^s|\hbar'(x)|\right]d\xi$$

$$+\frac{x-\kappa}{2}\int_{\frac{1}{2}}^1(2\xi-1)\left[\xi^s|\hbar'(\kappa)|+(1-\xi)^s|\hbar'(x)|\right]d\xi$$

$$+\frac{\tau-x}{2}\int_0^{\frac{1}{2}}(1-2\xi)\left[\xi^s|\hbar'(x)|+(1-\xi)^s|\hbar'(\tau)|\right]d\xi$$

$$+\frac{\tau-x}{2}\int_{\frac{1}{2}}^1(2\xi-1)\left[\xi^s|\hbar'(x)|+(1-\xi)^s|\hbar'(\tau)|\right]d\xi$$

$$= \left(\frac{1}{2^{s+1}(s+1)(s+2)}+\frac{s}{2(s+1)(s+2)}\right)(\tau-\kappa)|\hbar'(x)|$$

$$+\left(\frac{1}{2^{s+1}(s+1)(s+2)}+\frac{s}{2(s+1)(s+2)}\right)\big((x-\kappa)|\hbar'(\kappa)|+(\tau-x)|\hbar'(\tau)|\big)$$

olur ve istenilen sonuç elde edilir.

Sonuç 3.1.2 Teorem 3.1.2'de $s = 1$ olarak alınırsa (3.1.4) eşitsizliği, (2.2.15) eşitsizliğine indirgenmiş olur.

Teorem 3.1.3 $\kappa < \tau$, $\hbar : [\kappa, \tau] \subset [0, \infty) \to \mathbb{R}$, (κ, τ) aralığında diferansiyellenebilen bir dönüşüm olsun. $|\hbar'|^q$, $(q > 1)$, $[\kappa, \tau]$'de ikinci anlamda s-konveks fonksiyon ise $x \in (\kappa, \tau)$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere

$$\left|\hbar(x) + \frac{\hbar(\kappa) + \hbar(\tau)}{2} - \left[\frac{1}{x-\kappa}\int_{\kappa}^{x}\hbar(t)dt + \frac{1}{\tau - x}\int_{x}^{\tau}\hbar(t)dt\right]\right| \tag{3.1.5}$$

$$\leq \frac{x-\kappa}{2(p+1)^{\frac{1}{p}}}\left(\frac{|\hbar'(\kappa)|^q + |\hbar'(x)|^q}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}} + \frac{\tau - x}{2(p+1)^{\frac{1}{p}}}\left(\frac{|\hbar'(\tau)|^q + |\hbar'(x)|^q}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. $|\hbar'|^q$'nin ikinci anlamda s-konveksliği, Lemma 2.2.4 ve Hölder eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
&\left|\hbar(x) + \frac{\hbar(\kappa) + \hbar(\tau)}{2} - \left[\frac{1}{x-\kappa}\int_{\kappa}^{x}\hbar(t)dt + \frac{1}{\tau - x}\int_{x}^{\tau}\hbar(t)dt\right]\right| \\
\leq\ & \frac{x-\kappa}{2}\int_0^1 |1-2\xi||\hbar'(\xi\kappa + (1-\xi)x)d\xi| + \frac{\tau - x}{2}\int_0^1 |1-2\xi||\hbar'(\xi x + (1-\xi)\tau)d\xi| \\
\leq\ & \frac{x-\kappa}{2}\left(\int_0^1 |1-2\xi|^p d\xi\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 |\hbar'(\xi\kappa + (1-\xi)x)d\xi|\right)^{\frac{1}{q}} \\
&+ \frac{\tau - x}{2}\left(\int_0^1 |1-2\xi|^p d\xi\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 |\hbar'(\xi x + (1-\xi)\tau)d\xi|\right)^{\frac{1}{q}} \\
\leq\ & \frac{x-\kappa}{2(p+1)^{\frac{1}{p}}}\left(\int_0^1 (\xi^s|\hbar'(\kappa)|^q + (1-\xi)^s|\hbar'(x)|^q)d\xi\right)^{\frac{1}{q}} \\
&+ \frac{\tau - x}{2(p+1)^{\frac{1}{p}}}\left(\int_0^1 (\xi^s|\hbar'(x)|^q + (1-\xi)^s|\hbar'(\tau)|^q)d\xi\right)^{\frac{1}{q}} \\
=\ & \frac{x-\kappa}{2(p+1)^{\frac{1}{p}}}\left(\frac{|\hbar'(\kappa)|^q + |\hbar'(x)|^q}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}} + \frac{\tau - x}{2(p+1)^{\frac{1}{p}}}\left(\frac{|\hbar'(\tau)|^q + |\hbar'(x)|^q}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla istenilen eşitsizlik elde edilmiş olur.

Sonuç 3.1.3 Teorem 3.1.3'de $s = 1$ için (3.1.5) eşitsizliği, (2.2.16)'deki eşitsizliğe indirgenir.

Teorem 3.1.4 $\hbar : [\kappa, \tau] \subset [0, \infty) \to \mathbb{R}$, (κ, τ) aralığında diferansiyellenebilir bir dönüşüm ve $\kappa < \tau$ olsun. $|\hbar'|$, $[\kappa, \tau]$'de ikinci anlamda s-konveks fonksiyon ve $x \in (\kappa, \tau)$ olmak üzere

$$\left|\hbar\left(\frac{\kappa+x}{2}\right)+\hbar\left(\frac{\tau+x}{2}\right)-\left[\frac{1}{x-\kappa}\int_{\kappa}^{x}\hbar(t)dt+\frac{1}{\tau-x}\int_{x}^{\tau}\hbar(t)dt\right]\right| \tag{3.1.6}$$

$$\leq \frac{2^{s+1}-1}{2^{s+1}(s+1)(s+2)}(\tau-\kappa)|\hbar'(x)|$$

$$+\frac{2^{s+1}-1}{2^{s+1}(s+1)(s+2)}\Big[(x-\kappa)|\hbar'(\kappa)|+(\tau-x)|\hbar'(\tau)|\Big]$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. $|\hbar'|$'nin ikinci anlamda s-konveksliği, Lemma 2.2.5 ve mutlak değer özellikleri kullanılarak,

$$\left|\hbar\left(\frac{\kappa+x}{2}\right)+\hbar\left(\frac{\tau+x}{2}\right)-\left[\frac{1}{x-\kappa}\int_{\kappa}^{x}\hbar(t)dt+\frac{1}{\tau-x}\int_{x}^{\tau}\hbar(t)dt\right]\right|$$

$$\leq (x-\kappa)\int_0^{\frac{1}{2}}\xi[|\hbar'(\xi x+(1-\xi)\kappa)|+|\hbar'(\xi\kappa+(1-\xi)x)|]d\xi$$

$$+(\tau-x)\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-\xi)[|\hbar'(\xi x+(1-\xi)\tau)|+|\hbar'(\xi\tau+(1-\xi)x)|]d\xi$$

$$\leq (x-\kappa)\int_0^{\frac{1}{2}}\xi[\xi^s|\hbar'(x)|+(1-\xi)^s|\hbar'(\kappa)|+\xi^s|\hbar'(\kappa)|+(1-\xi)^s|\hbar'(x)|]d\xi$$

$$+(\tau-x)\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-\xi)[\xi^s|\hbar'(x)|+(1-\xi)^s|\hbar'(\tau)|+\xi^s|\hbar'(\tau)|+(1-\xi)^s|\hbar'(x)|]d\xi$$

$$= \frac{2^{s+1}-1}{2^{s+1}(s+1)(s+2)}(\tau-\kappa)|\hbar'(x)|$$

$$+\frac{2^{s+1}-1}{2^{s+1}(s+1)(s+2)}\Big[(x-\kappa)|\hbar'(\kappa)|+(\tau-x)|\hbar'(\tau)|\Big]$$

yazılır ve ispat tamamlanır.

Sonuç 3.1.4 Teorem 3.1.4'de $s=1$ için (3.1.6) eşitsizliği, (2.2.18)'deki eşitsizliğe indirgenir.

Teorem 3.1.5 $\kappa < \tau$, $\hbar : [\kappa, \tau] \subset [0, \infty) \to \mathbb{R}$, (κ, τ) aralığında diferansiyellenebilir bir dönüşüm olsun. $q > 1$ için $|\hbar'|^q$, $[\kappa, \tau]$'de ikinci anlamda s-konveks fonksiyon ise $x \in (\kappa, \tau)$ ve $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$

olmak üzere

$$\left|\hbar\left(\frac{\kappa+x}{2}\right)+\hbar\left(\frac{\tau+x}{2}\right)-\left[\frac{1}{x-\kappa}\int_{\kappa}^{x}\hbar(t)dt+\frac{1}{\tau-x}\int_{x}^{\tau}\hbar(t)dt\right]\right| \tag{3.1.7}$$

$$\leq \frac{x-\kappa}{(1+p)^{\frac{1}{p}}2^{1+\frac{1}{p}}}\left[\left(\frac{|\hbar'(x)|^q+|\hbar'(\kappa)|^q}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{|\hbar'(\kappa)|^q+|\hbar'(x)|^q}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}\right]$$

$$+\frac{\tau-x}{(1+p)^{\frac{1}{p}}2^{1+\frac{1}{p}}}\left[\left(\frac{|\hbar'(x)|^q+|\hbar'(\tau)|^q}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{|\hbar'(\tau)|^q+|\hbar'(x)|^q}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}\right]$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. $|\hbar'|^q$'nin ikinci anlamda s-konveksliği, Lemma 2.2.5 ve Hölder eşitsizliği kullanılarak

$$\left|\hbar\left(\frac{\kappa+x}{2}\right)+\hbar\left(\frac{\tau+x}{2}\right)-\left[\frac{1}{x-\kappa}\int_{\kappa}^{x}\hbar(t)dt+\frac{1}{\tau-x}\int_{x}^{\tau}\hbar(t)dt\right]\right|$$

$$\leq (x-\kappa)\left(\int_0^{\frac{1}{2}}\xi^p d\xi\right)^{\frac{1}{p}}\left[\left(\int_0^{\frac{1}{2}}|\hbar'(\xi x+(1-\xi)\kappa)|^q\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\int_0^{\frac{1}{2}}|\hbar'(\xi\kappa+(1-\xi)x)|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right]$$

$$+(\tau-x)\left(\int_{\frac{1}{2}}^{1}\xi^p d\xi\right)^{\frac{1}{p}}\left[\left(\int_{\frac{1}{2}}^{1}|\hbar'(\xi x+(1-\xi)\tau)|^q\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\int_{\frac{1}{2}}^{1}|\hbar'(\xi\tau+(1-\xi)x)|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right]$$

$$\leq \frac{x-\kappa}{(1+p)^{\frac{1}{p}}2^{1+\frac{1}{p}}}$$

$$\times\left[\left(\int_0^{\frac{1}{2}}[\xi^s|\hbar'(x)|^q+(1-\xi)^s|\hbar'(\kappa)|^q]d\xi\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\int_0^{\frac{1}{2}}[\xi^s|\hbar'(\kappa)|^q+(1-\xi)^s)|\hbar'(x)|^q]d\xi\right)^{\frac{1}{q}}\right]$$

$$+\frac{\tau-x}{(1+p)^{\frac{1}{p}}2^{1+\frac{1}{p}}}$$

$$\times\left[\left(\int_{\frac{1}{2}}^{1}[\xi^s|\hbar'(x)|^q+(1-\xi)^s|\hbar'(\tau)|^q]d\xi\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\int_{\frac{1}{2}}^{1}[\xi^s|\hbar'(\tau)|^q+(1-\xi)^s)|\hbar'(x)|^q]d\xi\right)^{\frac{1}{q}}\right]$$

$$= \frac{x-\kappa}{(1+p)^{\frac{1}{p}}2^{1+\frac{1}{p}}}\left[\left(\frac{|\hbar'(x)|^q+|\hbar'(\kappa)|^q}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{|\hbar'(\kappa)|^q+|\hbar'(x)|^q}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}\right]$$

$$+\frac{\tau-x}{(1+p)^{\frac{1}{p}}2^{1+\frac{1}{p}}}\left[\left(\frac{|\hbar'(x)|^q+|\hbar'(\tau)|^q}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{|\hbar'(\tau)|^q+|\hbar'(x)|^q}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}\right].$$

yazılır. Bu da ispatı tamamlar.

Sonuç 3.1.5 Teorem 3.1.5'de $s=1$ için (3.1.7) eşitsizliği, (2.2.19)'deki eşitsizliğe indirgenir.

Teorem 3.1.6 $\kappa<\tau$ olmak üzere $\hbar:[\kappa,\tau]\subset[0,\infty)\to\mathbb{R}$ tanımlı, (κ,τ) aralığında diferansiyellenebilir bir dönüsüm olsun. $|\hbar'|$, $[\kappa,\tau]$'de ikinci anlamda s-konveks fonksiyon ve $x\in(\kappa,\tau)$

olmak üzere

$$\left|\frac{1}{3}\left[2\hbar\left(\frac{\kappa+x}{2}\right)+2\hbar\left(\frac{\tau+x}{2}\right)+\hbar(x)+\frac{\hbar(\kappa)+\hbar(\tau)}{2}\right]\right. \tag{3.1.8}$$

$$\left.-\left[\frac{1}{x-\kappa}\int_{\kappa}^{x}\hbar(t)dt+\frac{1}{\tau-x}\int_{x}^{\tau}\hbar(t)dt\right]\right|$$

$$\leq \left(\frac{2^{-s-1}(1+5^{s+2})}{3^{s+2}(s+1)(s+2)}-\frac{1}{2^{s+1}(s+1)(s+2)}+\frac{s-4}{6(s+1)(s+2)}\right)|\hbar'(x)|$$

$$+\left(\frac{2^{-s-1}(1+5^{s+2})}{3^{s+2}(s+1)(s+2)}-\frac{1}{2^{s+1}(s+1)(s+2)}+\frac{s-4}{6(s+1)(s+2)}\right)$$

$$\times[(x-\kappa)|\hbar'(\kappa)|+(\tau-x)|\hbar'(\tau)|]$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. $|\hbar'|$'nin s-konveksliği, Lemma 2.2.3 ve mutlak değerin özellikleri kullanılarak

$$\left|\frac{1}{3}\left[2\hbar\left(\frac{\kappa+x}{2}\right)+2\hbar\left(\frac{\tau+x}{2}\right)+\hbar(x)+\frac{\hbar(\kappa)+\hbar(\tau)}{2}\right]\right.$$

$$\left.-\left[\frac{1}{x-\kappa}\int_{\kappa}^{x}\hbar(t)dt+\frac{1}{\tau-x}\int_{x}^{\tau}\hbar(t)dt\right]\right|$$

$$\leq (x-\kappa)\int_0^{\frac{1}{2}}\left|\xi-\frac{1}{6}\right|[|\hbar'(\xi x+(1-\xi)\kappa)|+|\hbar'(\xi\kappa+(1-\xi)x)|]d\xi$$

$$+(\tau-x)\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left|\frac{5}{6}-\xi\right|[|\hbar'(\xi x+(1-\xi)\tau)|+|\hbar'(\xi\tau+(1-\xi)x)|]d\xi$$

$$\leq (x-\kappa)\int_0^{\frac{1}{2}}\left|\xi-\frac{1}{6}\right|[\xi^s|\hbar'(x)|+(1-\xi)^s|\hbar'(\kappa)|+\xi^s|\hbar'(\kappa)|+(1-\xi)^s|\hbar'(x)|]d\xi$$

$$+(\tau-x)\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left|\frac{5}{6}-\xi\right|[\xi^s|\hbar'(x)|+(1-\xi)^s|\hbar'(\tau)|+\xi^s|\hbar'(\tau)|+(1-\xi)^s|\hbar'(x)|]d\xi$$

$$= \left(\frac{2^{-s-1}(1+5^{s+2})}{3^{s+2}(s+1)(s+2)}-\frac{1}{2^{s+1}(s+1)(s+2)}+\frac{s-4}{6(s+1)(s+2)}\right)|\hbar'(x)|$$

$$+\left(\frac{2^{-s-1}(1+5^{s+2})}{3^{s+2}(s+1)(s+2)}-\frac{1}{2^{s+1}(s+1)(s+2)}+\frac{s-4}{6(s+1)(s+2)}\right)$$

$$\times[(x-\kappa)|\hbar'(\kappa)|+(\tau-x)|\hbar'(\tau)|]$$

elde edilir ve böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 3.1.6 Teorem 3.1.6'da $s=1$ için (3.1.8) eşitsizliği, (2.2.12)'deki eşitsizliğe indirgenir.

Teorem 3.1.7 $\kappa < \tau$, $\hbar : [\kappa, \tau] \subset [0, \infty) \to \mathbb{R}$, (κ, τ) aralığında diferansiyellenebilir bir dönüşüm olsun. $q > 1$ için $|\hbar'|^q$ $[\kappa, \tau]$'de ikinci anlamda s-konveks fonksiyon ise $x \in (\kappa, \tau)$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere

$$\left| \frac{1}{3} \left[2\hbar\left(\frac{\kappa + x}{2}\right) + 2\hbar\left(\frac{\tau + x}{2}\right) + \hbar(x) + \frac{\hbar(\kappa) + \hbar(\tau)}{2} \right] \right. \tag{3.1.9}$$

$$\left. - \left[\frac{1}{x - \kappa} \int_\kappa^x \hbar(t)dt + \frac{1}{\tau - x} \int_x^\tau \hbar(t)dt \right] \right|$$

$$\leq \frac{x - \kappa}{(1+p)^{\frac{1}{p}}} \left[\frac{1}{3^{p+1}} + \frac{1}{6^{p+1}} \right]^{\frac{1}{p}} \left[\left(\frac{|\hbar'(x)|^q + |\hbar'(\kappa)|^q}{s+1} \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{|\hbar'(\kappa)|^q + |\hbar'(x)|^q}{s+1} \right)^{\frac{1}{q}} \right]$$

$$+ \frac{\tau - x}{(1+p)^{\frac{1}{p}}} \left[\frac{1}{3^{p+1}} + \frac{1}{6^{p+1}} \right]^{\frac{1}{p}} \left[\left(\frac{|\hbar'(x)|^q + |\hbar'(\tau)|^q}{s+1} \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{|\hbar'(\tau)|^q + |\hbar'(x)|^q}{s+1} \right)^{\frac{1}{q}} \right]$$

dir.

İspat. $|\hbar'|^q$'nin ikinci anlamda s-konveksliği, Lemma 2.2.3 ve Hölder eşitsizliği kullanılarak

$$\left| \frac{1}{3} \left[2\hbar\left(\frac{\kappa + x}{2}\right) + 2\hbar\left(\frac{\tau + x}{2}\right) + \hbar(x) + \frac{\hbar(\kappa) + \hbar(\tau)}{2} \right] \right.$$

$$\left. - \left[\frac{1}{x - \kappa} \int_\kappa^x \hbar(t)dt + \frac{1}{\tau - x} \int_x^\tau \hbar(t)dt \right] \right|$$

$$\leq (x - \kappa) \left(\int_0^{\frac{1}{2}} \left| \xi - \frac{1}{6} \right|^p d\xi \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\times \left[\left(\int_0^{\frac{1}{2}} |\hbar'(\xi x + (1-\xi)\kappa)|^q \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\int_0^{\frac{1}{2}} |\hbar'(\xi \kappa + (1-\xi)x)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right]$$

$$+ (\tau - x) \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 \left| \frac{5}{6} - \xi \right|^p d\xi \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\times \left[\left(\int_{\frac{1}{2}}^1 |\hbar'(\xi x + (1-\xi)\tau)|^q \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 |\hbar'(\xi \tau + (1-\xi)x)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right]$$

$$\leq \frac{1}{(1+p)^{\frac{1}{p}}} \left[\frac{1}{3^{p+1}} + \frac{1}{6^{p+1}} \right]^{\frac{1}{p}} \left\{ (x - \kappa) \left[\left(\int_0^{\frac{1}{2}} [\xi^s |\hbar'(x)|^q + (1-\xi)^s |\hbar'(\kappa)|^q] d\xi \right)^{\frac{1}{q}} \right. \right.$$

$$\left. + \left(\int_0^{\frac{1}{2}} [\xi^s |\hbar'(\kappa)|^q + (1-\xi)^s |\hbar'(x)|^q] d\xi \right)^{\frac{1}{q}} \right]$$

$$+ (\tau - x) \left[\left(\int_{\frac{1}{2}}^1 [\xi^s |\hbar'(x)|^q + (1-\xi)^s |\hbar'(\tau)|^q] d\xi \right)^{\frac{1}{q}} \right.$$

$$\left. \left. + \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 [\xi^s |\hbar'(\tau)|^q + (1-\xi)^s |\hbar'(x)|^q] d\xi \right)^{\frac{1}{q}} \right] \right\}$$

$$= \quad \frac{x-\kappa}{(1+p)^{\frac{1}{p}}}\left[\frac{1}{3^{p+1}}+\frac{1}{6^{p+1}}\right]^{\frac{1}{p}}\left[\left(\frac{|\hbar'(x)|^q+|\hbar'(\kappa)|^q}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{|\hbar'(\kappa)|^q+|\hbar'(x)|^q}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}\right]$$

$$+\frac{\tau-x}{(1+p)^{\frac{1}{p}}}\left[\frac{1}{3^{p+1}}+\frac{1}{6^{p+1}}\right]^{\frac{1}{p}}\left[\left(\frac{|\hbar'(x)|^q+|\hbar'(\tau)|^q}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{|\hbar'(\tau)|^q+|\hbar'(x)|^q}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}\right]$$

yazılır ve ispat biter.

Sonuç 3.1.7 Teorem 3.1.7'de $s=1$ için (3.1.9) eşitsizliği, (2.2.13)'deki eşitsizliğe indirgenir.

3.2 Quasi-Konveks Fonksiyonlar için Bullen, Yamuk, Orta Nokta ve Simpson Tipli Eşitsizlikler

Teorem 3.2.1 $\hbar:[\kappa,\tau]\to\mathbb{R}$ tanımlı (κ,τ) aralığında diferansiyellenebilir bir dönüşüm ve $\kappa<\tau$ olsun. $|\hbar'|$, $[\kappa,\tau]$'de quasi-konveks fonksiyon ve $x\in(\kappa,\tau)$ olmak üzere

$$\left|\hbar(x)+\frac{\hbar(\kappa)+\hbar(\tau)}{2}-\left[\frac{1}{x-\kappa}\int_\kappa^x \hbar(t)dt+\frac{1}{\tau-x}\int_x^\tau \hbar(t)dt\right]\right|$$

$$\leq \quad \frac{x-\kappa}{4}\max\{|\hbar'(\kappa)|,|\hbar'(x)|\}+\frac{\tau-x}{4}\max\{|\hbar'(x)|,|\hbar'(\tau)|\}$$

$$\leq \quad \frac{\tau-\kappa}{4}\max\{|\hbar'(x)|,|\hbar'(\kappa)|,|\hbar'(\tau)|\}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. $|\hbar'|$'nin quasi-konveksliği, Lemma 2.2.4 ve mutlak değerin özellikleri kullanılarak

$$\left|\hbar(x)+\frac{\hbar(\kappa)+\hbar(\tau)}{2}-\left[\frac{1}{x-\kappa}\int_\kappa^x \hbar(t)dt+\frac{1}{\tau-x}\int_x^\tau \hbar(t)dt\right]\right|$$

$$\leq \quad \frac{x-\kappa}{2}\int_0^1 |1-2\xi||\hbar'(\xi\kappa+(1-\xi)x)d\xi|$$

$$+\frac{\tau-x}{2}\int_0^1 |1-2\xi||\hbar'(\xi x+(1-\xi)\tau)d\xi|$$

$$\leq \quad \frac{x-\kappa}{2}\int_0^1 |1-2\xi|\max\{|\hbar'(\kappa)|,|\hbar'(x)|\}d\xi$$

$$+\frac{\tau-x}{2}\int_0^1 |1-2\xi|\max\{|\hbar'(x)|,|\hbar'(\tau)|\}d\xi$$

$$= \quad \frac{x-\kappa}{4}\max\{|\hbar'(\kappa)|,|\hbar'(x)|\}$$

$$+\frac{\tau-x}{4}\max\{|\hbar'(x)|,|\hbar'(\tau)|\}$$

yazılır ve ispat biter.

Teorem 3.2.2 $\kappa < \tau$, $\hbar : [\kappa, \tau] \to \mathbb{R}$ tanımlı (κ, τ)'de diferansiyellenebilir bir dönüşüm olsun. $q > 1$ için $|\hbar'|^q$, $[\kappa, \tau]$'de quasi konveks fonksiyon ise $x \in (\kappa, \tau)$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
&\left|\hbar(x) + \frac{\hbar(\kappa) + f(\tau)}{2} - \left[\frac{1}{x-\kappa}\int_{\kappa}^{x}\hbar(t)dt + \frac{1}{\tau - x}\int_{x}^{\tau}\hbar(t)dt\right]\right| \\
\leq\ & \frac{x-\kappa}{2(p+1)^{\frac{1}{p}}}\left(\max\{|\hbar'(\kappa)|^q, |\hbar'(x)|^q\}\right)^{\frac{1}{q}} \\
&+\frac{\tau - x}{2(p+1)^{\frac{1}{p}}}\left(\max\{|\hbar'(x)|^q, |\hbar'(\tau)|^q\}\right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

dir.

İspat. $|\hbar'|^q$'nin quasi-konveksliği, Lemma 2.2.4 ve Hölder eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
&\left|\hbar(x) + \frac{\hbar(\kappa) + \hbar(\tau)}{2} - \left[\frac{1}{x-\kappa}\int_{\kappa}^{x}\hbar(t)dt + \frac{1}{\tau - x}\int_{x}^{\tau}\hbar(t)dt\right]\right| \\
\leq\ & \frac{x-\kappa}{2}\int_0^1 |1-2\xi||\hbar'(\xi\kappa + (1-\xi)x)d\xi| \\
&+\frac{\tau - x}{2}\int_0^1 |1-2\xi||\hbar'(\xi x + (1-\xi)\tau)d\xi| \\
\leq\ & \frac{x-\kappa}{2}\left(\int_0^1 |1-2\xi|^p d\xi\right)^{\frac{1}{p}}\left(|\hbar'(\xi\kappa + (1-\xi)x)d\xi|\right)^{\frac{1}{q}} \\
&+\frac{\tau - x}{2}\left(\int_0^1 |1-2\xi|^p d\xi\right)^{\frac{1}{p}}\left(|\hbar'(\xi x + (1-\xi)\tau)d\xi|\right)^{\frac{1}{q}} \\
\leq\ & \frac{x-\kappa}{2(p+1)^{\frac{1}{p}}}\left(\int_0^1 \max\{|\hbar'(\kappa)|^q, |\hbar'(x)|^q\}d\xi\right)^{\frac{1}{q}} \\
&+\frac{\tau - x}{2(p+1)^{\frac{1}{p}}}\left(\int_0^1 \max\{|\hbar'(x)|^q, |\hbar'(\tau)|^q\}d\xi\right)^{\frac{1}{q}} \\
=\ & \frac{x-\kappa}{2(p+1)^{\frac{1}{p}}}\left(\max\{|\hbar'(\kappa)|^q, |\hbar'(x)|^q\}\right)^{\frac{1}{q}} \\
&+\frac{\tau - x}{2(p+1)^{\frac{1}{p}}}\left(\max\{|\hbar'(x)|^q, |\hbar'(\tau)|^q\}\right)^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

yazılır ve böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.2.3 $\hbar : [\kappa, \tau] \to \mathbb{R}$ (κ, τ)'de diferansiyellenebilir bir dönüşüm, $\kappa < \tau$ olsun. $|\hbar'|$, $[\kappa, \tau]$

'de quasi-konveks fonksiyon ve $x \in (\kappa, \tau)$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
&\left|\hbar\left(\frac{\kappa+x}{2}\right)+\hbar\left(\frac{\tau+x}{2}\right)-\left[\frac{1}{x-\kappa}\int_{\kappa}^{x}\hbar(t)dt+\frac{1}{\tau-x}\int_{x}^{\tau}\hbar(t)dt\right]\right| \\
\leq\;& \frac{x-\kappa}{8}\left(\max\{|\hbar'(x)|,|\hbar'(\kappa)|\}+\max\{|\hbar'(\kappa)|,|\hbar'(x)|\}\right) \\
&+\frac{\tau-x}{8}\left(\max\{|\hbar'(x)|,|\hbar'(\tau)|\}+\max\{|\hbar'(\tau)|,|\hbar'(x)|\}\right)
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. $|\hbar'|$'nin quasi-konveksliği, Lemma 2.2.5 ve mutlak değerin özellikleri kullanılarak

$$\begin{aligned}
&\left|\hbar\left(\frac{\kappa+x}{2}\right)+\hbar\left(\frac{\tau+x}{2}\right)-\left[\frac{1}{x-\kappa}\int_{\kappa}^{x}\hbar(t)dt+\frac{1}{\tau-x}\int_{x}^{\tau}\hbar(t)dt\right]\right| \\
\leq\;& (x-\kappa)\int_{0}^{\frac{1}{2}}\xi[|\hbar'(\xi x+(1-\xi)\kappa)|+|\hbar'(\xi\kappa+(1-\xi)x)|]d\xi \\
&+(\tau-x)\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-\xi)[|\hbar'(\xi x+(1-\xi)\tau)|+|\hbar'(\xi\tau+(1-\xi)x)|]d\xi \\
\leq\;& (x-\kappa)\int_{0}^{\frac{1}{2}}\xi[\max\{|\hbar'(x)|,|\hbar'(\kappa)|\}+\max\{|\hbar'(\kappa)|,|\hbar'(x)|\}]d\xi \\
&+(\tau-x)\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-\xi)[\max\{|\hbar'(x)|,|\hbar'(\tau)|\}+\max\{|\hbar'(\tau)|,|\hbar'(x)|\}]d\xi \\
=\;& \frac{x-\kappa}{8}\left(\max\{|\hbar'(x)|,|\hbar'(\kappa)|\}+\max\{|\hbar'(\kappa)|,|\hbar'(x)|\}\right) \\
&+\frac{\tau-x}{8}\left(\max\{|\hbar'(x)|,|\hbar'(\tau)|\}+\max\{|\hbar'(\tau)|,|\hbar'(x)|\}\right)
\end{aligned}$$

yazılır ve istenilen sonuç elde edilir.

Teorem 3.2.4 $\kappa < \tau$, $\hbar : [\kappa, \tau] \to \mathbb{R}$ (κ, τ) aralığında diferansiyellenebilen bir dönüşüm olsun. $q > 1$ için $|\hbar'|^q$, $[\kappa, \tau]$'de quasi-konveks fonksiyon ise $x \in (\kappa, \tau)$ ve $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
&\left|\hbar\left(\frac{\kappa+x}{2}\right)+\hbar\left(\frac{\tau+x}{2}\right)-\left[\frac{1}{x-\kappa}\int_{\kappa}^{x}\hbar(t)dt+\frac{1}{\tau-x}\int_{x}^{\tau}\hbar(t)dt\right]\right| \\
\leq\;& \frac{x-\kappa}{4(1+p)^{\frac{1}{p}}}\left[\left(\max\{|\hbar'(x)|^q,|\hbar'(\kappa)|^q\}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\max\{|\hbar'(\kappa)|^q,|\hbar'(x)|^q\}\right)^{\frac{1}{q}}\right] \\
&+\frac{\tau-x}{4(1+p)^{\frac{1}{p}}}\left[\left(\max\{|\hbar'(x)|^q,|\hbar'(\tau)|^q\}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\max\{|\hbar'(\tau)|^q,|\hbar'(x)|^q\}\right)^{\frac{1}{q}}\right]
\end{aligned}$$

dir.

İspat. $|\hbar'|^q$'nin quasi-konveksliği, Lemma 2.2.5 ve Hölder eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
&\left|\hbar\left(\frac{\kappa+x}{2}\right)+\hbar\left(\frac{\tau+x}{2}\right)-\left[\frac{1}{x-\kappa}\int_\kappa^x \hbar(t)dt+\frac{1}{\tau-x}\int_x^\tau \hbar(t)dt\right]\right| \\
\leq\; & (x-\kappa)\left(\int_0^{\frac{1}{2}}\xi^p d\xi\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\times\left[\left(\int_0^{\frac{1}{2}}|\hbar'(\xi x+(1-\xi)\kappa)|^q\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\int_0^{\frac{1}{2}}|\hbar'(\xi\kappa+(1-\xi)x)|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right] \\
&+(\tau-x)\left(\int_{\frac{1}{2}}^1\xi^p d\xi\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\times\left[\left(\int_{\frac{1}{2}}^1|\hbar'(\xi x+(1-\xi)\tau)|^q\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\int_{\frac{1}{2}}^1|\hbar'(\xi\tau+(1-\xi)x)|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right] \\
\leq\; & \frac{x-\kappa}{(1+p)^{\frac{1}{p}}2^{1+\frac{1}{p}}} \\
&\times\left[\left(\int_0^{\frac{1}{2}}\max\{|\hbar'(x)|^q,|\hbar'(\kappa)|^q\}d\xi\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\int_0^{\frac{1}{2}}\max\{|\hbar'(\kappa)|,|\hbar'(x)|\}d\xi\right)^{\frac{1}{q}}\right] \\
&+\frac{\tau-x}{(1+p)^{\frac{1}{p}}2^{1+\frac{1}{p}}} \\
&\times\left[\left(\int_{\frac{1}{2}}^1\max\{|\hbar'(x)|^q,|\hbar'(\tau)|^q\}d\xi\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\int_{\frac{1}{2}}^1\max\{|\hbar'(\tau)|^q,|\hbar'(x)|^q\}d\xi\right)^{\frac{1}{q}}\right] \\
=\; & \frac{x-\kappa}{4(1+p)^{\frac{1}{p}}}\left[\left(\max\{|\hbar'(x)|^q,|\hbar'(\kappa)|^q\}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\max\{|\hbar'(\kappa)|^q,|\hbar'(x)|^q\}\right)^{\frac{1}{q}}\right] \\
&+\frac{\tau-x}{4(1+p)^{\frac{1}{p}}}\left[\left(\max\{|\hbar'(x)|^q,|\hbar'(\tau)|^q\}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\max\{|\hbar'(\tau)|^q,|\hbar'(x)|^q\}\right)^{\frac{1}{q}}\right]
\end{aligned}$$

yazılır ki böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.2.5 $\hbar:[\kappa,\tau]\to\mathbb{R}$ tanımlı (κ,τ) diferansiyellenebiilir bir dönüşüm ve $\kappa<\tau$ olsun. $|\hbar'|$, $[\kappa,\tau]$'de quasi-konveks fonksiyon ve $x\in(\kappa,\tau)$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{3}\left[2\hbar\left(\frac{\kappa+x}{2}\right)+2\hbar\left(\frac{\tau+x}{2}\right)+\hbar(x)+\frac{\hbar(\kappa)+\hbar(\tau)}{2}\right]\right. \\
&\left.-\left[\frac{1}{x-\kappa}\int_\kappa^x \hbar(t)dt+\frac{1}{\tau-x}\int_x^\tau \hbar(t)dt\right]\right| \\
\leq\; & \frac{5(x-\kappa)}{72}\left(\max\{|\hbar'(x)|,|\hbar'(\kappa)|\}+\max\{|\hbar'(\kappa)|,|\hbar'(x)|\}\right)
\end{aligned}$$

$$+\frac{5(\tau-x)}{72}\left(\max\{|\hbar'(x)|,|\hbar'(\tau)|\}+\max\{|\hbar'(\tau)|,|\hbar'(x)|\}\right)$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. Lemma 2.2.3, mutlak değer özellikleri ve $|\hbar'|$'nin quasi-konveks olması kullanılarak

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{3}\left[2\hbar\left(\frac{\kappa+x}{2}\right)+2\hbar\left(\frac{\tau+x}{2}\right)+\hbar(x)+\frac{\hbar(\kappa)+\hbar(\tau)}{2}\right]\right.\\
&\left.-\left[\frac{1}{x-\kappa}\int_\kappa^x\hbar(t)dt+\frac{1}{\tau-x}\int_x^\tau\hbar(t)dt\right]\right|\\
\leq\ & (x-\kappa)\int_0^{\frac{1}{2}}\left|\xi-\frac{1}{6}\right|[|\hbar'(\xi x+(1-\xi)\kappa)|+|\hbar'(\xi\kappa+(1-\xi)x)|]d\xi\\
&+(\tau-x)\int_{\frac{1}{2}}^1\left|\frac{5}{6}-\xi\right|[|\hbar'(\xi x+(1-\xi)\tau)|+|\hbar'(\xi\tau+(1-\xi)x)|]d\xi\\
\leq\ & (x-\kappa)\int_0^{\frac{1}{2}}\left|\xi-\frac{1}{6}\right|[\max\{|\hbar'(x)|,|\hbar'(\kappa)|\}+\max\{|\hbar'(\kappa)|,|\hbar'(x)|\}]d\xi\\
&+(\tau-x)\int_{\frac{1}{2}}^1\left|\frac{5}{6}-\xi\right|[\max\{|\hbar'(x)|,|\hbar'(\tau)|\}+\max\{|\hbar'(\tau)|,|\hbar'(x)|\}]d\xi\\
=\ & \frac{5(x-\kappa)}{72}\left(\max\{|\hbar'(x)|,|\hbar'(\kappa)|\}+\max\{|\hbar'(\kappa)|,|\hbar'(x)|\}\right)\\
&+\frac{5(\tau-x)}{72}\left(\max\{|\hbar'(x)|,|\hbar'(\tau)|\}+\max\{|\hbar'(\tau)|,|\hbar'(x)|\}\right)
\end{aligned}$$

yazılır ve böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.2.6 $\kappa<\tau$, $\hbar:[\kappa,\tau]\to\mathbb{R}$, (κ,τ) aralığında diferansiyellenebilir bir dönüşüm olsun. $|\hbar'|^q$ $(q>1)$, $[\kappa,\tau]$'de quasi-konveks fonksiyon ise $x\in(\kappa,\tau)$ ve $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{3}\left[2\hbar\left(\frac{\kappa+x}{2}\right)+2\hbar\left(\frac{\tau+x}{2}\right)+\hbar(x)+\frac{\hbar(\kappa)+\hbar(\tau)}{2}\right]\right.\\
&\left.-\left[\frac{1}{x-\kappa}\int_\kappa^x\hbar(t)dt+\frac{1}{\tau-x}\int_x^\tau\hbar(t)dt\right]\right|\\
\leq\ & \frac{x-\kappa}{4(1+p)^{\frac{1}{p}}}\left[\frac{2}{3^{p+1}}\right]^{\frac{1}{p}}\left[\left(\max\{|\hbar'(x)|^q,|\hbar'(\kappa)|^q\}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\max\{|\hbar'(\kappa)|^q,|\hbar'(x)|^q\}\right)^{\frac{1}{q}}\right]\\
&+\frac{\tau-x}{4(1+p)^{\frac{1}{p}}}\left[\frac{2}{3^{p+1}}\right]^{\frac{1}{p}}\left[\left(\max\{|\hbar'(x)|^q,|\hbar'(\tau)|^q\}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\max\{|\hbar'(\tau)|^q,|\hbar'(x)|^q\}\right)^{\frac{1}{q}}\right]
\end{aligned}$$

dir.

İspat. $|\hbar'|^q$'nin quasi-konveksliği, Lemma 2.2.3 ve Hölder eşitsizliği kullanılarak

$$
\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{3}\left[2\hbar\left(\frac{\kappa+x}{2}\right)+2\hbar\left(\frac{\tau+x}{2}\right)+\hbar(x)+\frac{\hbar(\kappa)+\hbar(\tau)}{2}\right]\right. \\
&\left.-\left[\frac{1}{x-\kappa}\int_{\kappa}^{x}\hbar(t)dt+\frac{1}{\tau-x}\int_{x}^{\tau}\hbar(t)dt\right]\right| \\
\leq\ &(x-\kappa)\left(\int_0^{\frac{1}{2}}\left|\xi-\frac{1}{6}\right|^p d\xi\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\times\left[\left(\int_0^{\frac{1}{2}}|\hbar'(\xi x+(1-\xi)\kappa)|^q\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\int_0^{\frac{1}{2}}|\hbar'(\xi\kappa+(1-\xi)x)|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right] \\
&+(\tau-x)\left(\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left|\frac{5}{6}-\xi\right|^p d\xi\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\times\left[\left(\int_{\frac{1}{2}}^{1}|\hbar'(\xi x+(1-\xi)\tau)|^q\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\int_{\frac{1}{2}}^{1}|\hbar'(\xi\tau+(1-\xi)x)|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right] \\
\leq\ &\frac{1}{(1+p)^{\frac{1}{p}}}\left[\frac{1}{3^{p+1}}+\frac{1}{6^{p+1}}\right]^{\frac{1}{p}} \\
&\times\left\{(x-\kappa)\left[\left(\int_0^{\frac{1}{2}}\max\{|\hbar'(x)|^q,|\hbar'(\kappa)|^q\}d\xi\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\int_0^{\frac{1}{2}}\max\{|\hbar'(\kappa)|^q,|\hbar'(x)|^q\}d\xi\right)^{\frac{1}{q}}\right]\right. \\
&\left.+(\tau-x)\left[\left(\int_{\frac{1}{2}}^{1}\max\{|\hbar'(x)|^q,|\hbar'(\tau)|^q\}d\xi\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\int_{\frac{1}{2}}^{1}\max\{|\hbar'(\tau)|^q,|\hbar'(x)|^q\}d\xi\right)^{\frac{1}{q}}\right]\right\} \\
=\ &\frac{x-\kappa}{4(1+p)^{\frac{1}{p}}}\left[\frac{2}{3^{p+1}}\right]^{\frac{1}{p}}\left[\left(\max\{|\hbar'(x)|^q,|\hbar'(\kappa)|^q\}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\max\{|\hbar'(\kappa)|^q,|\hbar'(x)|^q\}\right)^{\frac{1}{q}}\right] \\
&+\frac{\tau-x}{4(1+p)^{\frac{1}{p}}}\left[\frac{2}{3^{p+1}}\right]^{\frac{1}{p}}\left[\left(\max\{|\hbar'(x)|^q,|\hbar'(\tau)|^q\}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\max\{|\hbar'(\tau)|^q,|\hbar'(x)|^q\}\right)^{\frac{1}{q}}\right].
\end{aligned}
$$

yazılır ve istenilen sonuç elde edilir.

3.3 P-Fonksiyonu için Bullen, Yamuk, Orta Nokta ve Simpson Tipli Eşitsizlikler

Teorem 3.3.1 $\hbar:[\kappa,\tau]\to\mathbb{R}$ tanımlı (κ,τ)'de diferansiyellenebilir bir dönüşüm ve $\kappa<\tau$ olsun. $|\hbar'|$, $[\kappa,\tau]$'de P fonksiyon ve $x\in(\kappa,\tau)$ olmak üzere

$$\left|\hbar(x)+\frac{\hbar(\kappa)+\hbar(\tau)}{2}-\left[\frac{1}{x-\kappa}\int_{\kappa}^{x}\hbar(t)dt+\frac{1}{\tau-x}\int_{x}^{\tau}\hbar(t)dt\right]\right|$$

$$\leq \frac{(x-\kappa)[|\hbar'(\kappa)|+|\hbar'(x)|]}{4}+\frac{(\tau-x)[|\hbar'(x)|+|\hbar'(\tau)|]}{4}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. $|\hbar'|$'nin P-fonksiyonu olması, Lemma 2.2.4 ve mutlak değerin özellikleri kullanılarak

$$\begin{aligned}
&\left|\hbar(x)+\frac{\hbar(\kappa)+\hbar(\tau)}{2}-\left[\frac{1}{x-\kappa}\int_{\kappa}^{x}\hbar(t)dt+\frac{1}{\tau-x}\int_{x}^{\tau}\hbar(t)dt\right]\right| \\
\leq\;& \frac{x-\kappa}{2}\int_0^1|1-2\xi||\hbar'(\xi\kappa+(1-\xi)x)d\xi| \\
&+\frac{\tau-x}{2}\int_0^1|1-2\xi||\hbar'(\xi x+(1-\xi)\tau)d\xi| \\
\leq\;& \frac{x-\kappa}{2}\int_0^1|1-2\xi|\left[|\hbar'(\kappa)|+|\hbar'(x)|\right]d\xi \\
&+\frac{\tau-x}{2}\int_0^1|1-2\xi|\left[|\hbar'(x)|+|\hbar'(\tau)|\right]d\xi \\
=\;& \frac{(x-\kappa)[|\hbar'(\kappa)|+|\hbar'(x)|]}{4} \\
&+\frac{(\tau-x)[|\hbar'(x)|+|\hbar'(\tau)|]}{4}.
\end{aligned}$$

yazılır ve ispat tamamlanır.

Teorem 3.3.2 $\kappa<\tau$, $\hbar:[\kappa,\tau]\to\mathbb{R}$ tanımlı (κ,τ)'de diferansiyellenebilir bir dönüşüm olsun. $q>1$ için $|\hbar'|^q$, $[\kappa,\tau]$'de P fonksiyon ise $x\in(\kappa,\tau)$ ve $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
&\left|\hbar(x)+\frac{\hbar(\kappa)+\hbar(\tau)}{2}-\left[\frac{1}{x-\kappa}\int_{\kappa}^{x}\hbar(t)dt+\frac{1}{\tau-x}\int_{x}^{\tau}\hbar(t)dt\right]\right| \\
\leq\;& \frac{x-\kappa}{2(p+1)^{\frac{1}{\tau}}}\left(|\hbar'(\kappa)|^q+|\hbar'(x)|^q\right)^{\frac{1}{q}} \\
&+\frac{\tau-x}{2(p+1)^{\frac{1}{p}}}\left(|\hbar'(\tau)|^q+|\hbar'(x)|^q\right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

dir.

İspat. Lemma 2.2.4, Hölder eşitsizliği ve $|\hbar'|^q$'nin P-konveks olması kullanılarak

$$\begin{aligned}
&\left|\hbar(x)+\frac{\hbar(\kappa)+\hbar(\tau)}{2}-\left[\frac{1}{x-\kappa}\int_{\kappa}^{x}\hbar(t)dt+\frac{1}{\tau-x}\int_{x}^{\tau}\hbar(t)dt\right]\right| \\
\leq\;& \frac{x-\kappa}{2}\int_0^1|1-2\xi||\hbar'(\xi\kappa+(1-\xi)x)d\xi|
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& +\frac{\tau-x}{2}\int_0^1 |1-2\xi||\hbar'(\xi x+(1-\xi)\tau)d\xi| \\
\leq\ & \frac{x-\kappa}{2}\left(\int_0^1 |1-2\xi|^p d\xi\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 |\hbar'(\xi\kappa+(1-\xi)x)d\xi|\right)^{\frac{1}{q}} \\
& +\frac{\tau-x}{2}\left(\int_0^1 |1-2\xi|^p d\xi\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 |\hbar'(\xi x+(1-\xi)\tau)d\xi|\right)^{\frac{1}{q}} \\
\leq\ & \frac{x-\kappa}{2(p+1)^{\frac{1}{p}}}\left(\int_0^1 (|\hbar'(\kappa)|^q+|\hbar'(x)|^q)d\xi\right)^{\frac{1}{q}} \\
& +\frac{\tau-x}{2(p+1)^{\frac{1}{p}}}\left(\int_0^1 (|\hbar'(x)|^q+|\hbar'(\tau)|^q)d\xi\right)^{\frac{1}{q}} \\
=\ & \frac{x-\kappa}{2(p+1)^{\frac{1}{p}}}\left(|\hbar'(\kappa)|^q+|\hbar'(x)|^q\right)^{\frac{1}{q}} \\
& +\frac{\tau-x}{2(p+1)^{\frac{1}{p}}}\left(|\hbar'(\tau)|^q+|\hbar'(x)|^q\right)^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}
$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.3.3 $\hbar : [\kappa,\tau] \to \mathbb{R}$ tanımlı (κ,τ)'de diferansiyellenebilir bir dönüşüm ve $\kappa < \tau$ olsun. $|\hbar'|$, $[\kappa,\tau]$'de P fonksiyon ve $x \in (\kappa,\tau)$ olmak üzere

$$
\begin{aligned}
& \left|\hbar\left(\frac{\kappa+x}{2}\right)+\hbar\left(\frac{\tau+x}{2}\right)-\left[\frac{1}{x-\kappa}\int_\kappa^x \hbar(t)dt+\frac{1}{\tau-x}\int_x^\tau \hbar(t)dt\right]\right| \\
\leq\ & \frac{(x-\kappa)[|\hbar'(x)|+|\hbar'(\kappa)|]}{4}+\frac{(\tau-x)[|\hbar'(x)|+|\hbar'(\tau)|]}{4}
\end{aligned}
$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. $|\hbar'|$'nin P-fonksiyonu olması, Lemma 2.2.5 ve mutlak değerin özellikleri kullanılarak

$$
\begin{aligned}
& \left|\hbar\left(\frac{\kappa+x}{2}\right)+\hbar\left(\frac{\tau+x}{2}\right)-\left[\frac{1}{x-\kappa}\int_\kappa^x \hbar(t)dt+\frac{1}{\tau-x}\int_x^\tau \hbar(t)dt\right]\right| \\
\leq\ & (x-\kappa)\int_0^{\frac{1}{2}} \xi[|\hbar'(\xi x+(1-\xi)\kappa)|+|\hbar'(\xi\kappa+(1-\xi)x)|]d\xi \\
& +(\tau-x)\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-\xi)[|\hbar'(\xi x+(1-\xi)\tau)|+|\hbar'(\xi\tau+(1-\xi)x)|]d\xi \\
\leq\ & 2(x-\kappa)\int_0^{\frac{1}{2}} \xi[|\hbar'(x)|+|\hbar'(\kappa)|]d\xi+2(\tau-x)\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-\xi)[|\hbar'(x)|+|\hbar'(\tau)|]d\xi \\
=\ & \frac{(x-\kappa)[|\hbar'(x)|+|\hbar'(\kappa)|]}{4}+\frac{(\tau-x)[|\hbar'(x)|+|\hbar'(\tau)|]}{4}
\end{aligned}
$$

yazılır ve ispat biter.

Teorem 3.3.4 $\kappa < \tau$, $\hbar : [\kappa, \tau] \to \mathbb{R}$ tanımlı (κ, τ)'de diferansiyellenebilir bir dönüşüm olsun. $|\hbar'|^q$ $(q > 1)$, $[\kappa, \tau]$'de P fonksiyon ise $x \in (\kappa, \tau)$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
&\left|\hbar\left(\frac{\kappa+x}{2}\right)+\hbar\left(\frac{\tau+x}{2}\right)-\left[\frac{1}{x-\kappa}\int_{\kappa}^{x}\hbar(t)dt+\frac{1}{\tau-x}\int_{x}^{\tau}\hbar(t)dt\right]\right| \\
\leq\ & \frac{x-\kappa}{(1+p)^{\frac{1}{p}}2^{1+\frac{1}{p}}}\left[\left(\frac{|\hbar'(x)|^q+|\hbar'(\kappa)|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{|\hbar'(\kappa)|^q+|\hbar'(x)|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}\right] \\
&+\frac{\tau-x}{(1+p)^{\frac{1}{p}}2^{1+\frac{1}{p}}}\left[\left(\frac{|\hbar'(x)|^q+|\hbar'(\tau)|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{|\hbar'(\tau)|^q+|\hbar'(x)|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}\right]
\end{aligned}$$

dir.

İspat. $|\hbar'|^q$'nin P-fonksiyonu olması, Lemma 2.2.5 ve Hölder eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
&\left|\hbar\left(\frac{\kappa+x}{2}\right)+\hbar\left(\frac{\tau+x}{2}\right)-\left[\frac{1}{x-\kappa}\int_{\kappa}^{x}\hbar(t)dt+\frac{1}{\tau-x}\int_{x}^{\tau}\hbar(t)dt\right]\right| \\
\leq\ & (x-\kappa)\left(\int_0^{\frac{1}{2}}\xi^p d\xi\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\times\left[\left(\int_0^{\frac{1}{2}}|\hbar'(\xi x+(1-\xi)\kappa)|^q\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\int_0^{\frac{1}{2}}|\hbar'(\xi\kappa+(1-\xi)x)|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right] \\
&+(\tau-x)\left(\int_{\frac{1}{2}}^{1}\xi^p d\xi\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\times\left[\left(\int_{\frac{1}{2}}^{1}|\hbar'(\xi x+(1-\xi)\tau)|^q\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\int_{\frac{1}{2}}^{1}|\hbar'(\xi\tau+(1-\xi)x)|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right] \\
\leq\ & \frac{x-\kappa}{(1+p)^{\frac{1}{p}}2^{1+\frac{1}{p}}}\left[\left(\int_0^{\frac{1}{2}}[|\hbar'(x)|^q+|\hbar'(\kappa)|^q]d\xi\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\int_0^{\frac{1}{2}}[|\hbar'(\kappa)|^q+|\hbar'(x)|^q]d\xi\right)^{\frac{1}{q}}\right] \\
&+\frac{\tau-x}{(1+p)^{\frac{1}{p}}2^{1+\frac{1}{p}}}\left[\left(\int_{\frac{1}{2}}^{1}[|\hbar'(x)|^q+|\hbar'(\tau)|^q]d\xi\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\int_{\frac{1}{2}}^{1}[|\hbar'(\tau)|^q+|\hbar'(x)|^q]d\xi\right)^{\frac{1}{q}}\right] \\
=\ & \frac{x-\kappa}{(1+p)^{\frac{1}{p}}2^{1+\frac{1}{p}}}\left[\left(\frac{|\hbar'(x)|^q+|\hbar'(\kappa)|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{|\hbar'(\kappa)|^q+|\hbar'(x)|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}\right] \\
&+\frac{\tau-x}{(1+p)^{\frac{1}{p}}2^{1+\frac{1}{p}}}\left[\left(\frac{|\hbar'(x)|^q+|\hbar'(\tau)|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{|\hbar'(\tau)|^q+|\hbar'(x)|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}\right]
\end{aligned}$$

yazılır ki bu da ispatı tamamlar.

Teorem 3.3.5 $\hbar : [\kappa, \tau] \to \mathbb{R}$ tanımlı (κ, τ) aralığında diferensiyellenebilen bir dönüşüm ve $\kappa < \tau$ olsun. $|\hbar'|$, $[\kappa, \tau]$'de P fonksiyon ve $x \in (\kappa, \tau)$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{1}{3}\left[2\hbar\left(\frac{\kappa+x}{2}\right)+2\hbar\left(\frac{\tau+x}{2}\right)+\hbar(x)+\frac{\hbar(\kappa)+\hbar(\tau)}{2}\right]\right. \\
&\left. -\left[\frac{1}{x-\kappa}\int_{\kappa}^{x}\hbar(t)dt+\frac{1}{\tau-x}\int_{x}^{\tau}\hbar(t)dt\right]\right| \\
\leq\ & \frac{5(x-\kappa)[|\hbar'(x)|+|\hbar'(\kappa)|}{36}+\frac{5(\tau-x)[|\hbar'(\tau)|+|\hbar'(x)|}{36}
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. Lemma 2.2.3, mutlak değer özellikleri ve $|\hbar'|$'nin $[\kappa, \tau]$'de P-konveks olması kullanılarak

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{1}{3}\left[2\hbar\left(\frac{\kappa+x}{2}\right)+2\hbar\left(\frac{\tau+x}{2}\right)+\hbar(x)+\frac{\hbar(\kappa)+\hbar(\tau)}{2}\right]\right. \\
&\left. -\left[\frac{1}{x-\kappa}\int_{\kappa}^{x}\hbar(t)dt+\frac{1}{\tau-x}\int_{x}^{\tau}\hbar(t)dt\right]\right| \\
\leq\ & (x-\kappa)\int_{0}^{\frac{1}{2}}\left|\xi-\frac{1}{6}\right|[|\hbar'(\xi x+(1-\xi)\kappa)|+|\hbar'(\xi\kappa+(1-\xi)x)|]d\xi \\
& +(\tau-x)\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left|\frac{5}{6}-\xi\right|[|\hbar'(\xi x+(1-\xi)\tau)|+|\hbar'(\xi\tau+(1-\xi)x)|]d\xi \\
\leq\ & 2(x-\kappa)\int_{0}^{\frac{1}{2}}\left|\xi-\frac{1}{6}\right|[|\hbar'(x)|+|\hbar'(\kappa)|]d\xi \\
& +2(\tau-x)\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left|\frac{5}{6}-\xi\right|[|\hbar'(x)|+|\hbar'(\tau)|]d\xi \\
=\ & \frac{5(x-\kappa)[|\hbar'(x)|+|\hbar'(\kappa)|}{36}+\frac{5(\tau-x)[|\hbar'(\tau)|+|\hbar'(x)|}{36}
\end{aligned}$$

olur ki ispat tamamlanır.

Teorem 3.3.6 $\kappa < \tau$, $\hbar : [\kappa, \tau] \to \mathbb{R}$, (κ, τ)'de diferansiyellenebilir bir dönüşüm olsun. $|\hbar'|^q$ $(q > 1)$, $[\kappa, \tau]$'de P fonksiyon ise $x \in (\kappa, \tau)$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{1}{3}\left[2\hbar\left(\frac{\kappa+x}{2}\right)+2\hbar\left(\frac{\tau+x}{2}\right)+\hbar(x)+\frac{\hbar(\kappa)+\hbar(\tau)}{2}\right]\right. \\
&\left. -\left[\frac{1}{x-\kappa}\int_{\kappa}^{x}\hbar(t)dt+\frac{1}{\tau-x}\int_{x}^{\tau}\hbar(t)dt\right]\right| \\
\leq\ & \frac{x-\kappa}{(1+p)^{\frac{1}{p}}}\left[\frac{1}{3^{p+1}}+\frac{1}{6^{p+1}}\right]^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

$$\times\left[\left(\frac{|\hbar'(x)|^q+|\hbar'(\kappa)|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{|\hbar'(\kappa)|^q+|\hbar'(x)|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}\right]$$

$$+\frac{\tau-x}{(1+p)^{\frac{1}{p}}}\left[\frac{1}{3^{p+1}}+\frac{1}{6^{p+1}}\right]^{\frac{1}{p}}$$

$$\times\left[\left(\frac{|\hbar'(x)|^q+|\hbar'(\tau)|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{|\hbar'(\tau)|^q+|\hbar'(x)|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}\right]$$

dir.

İspat. $|\hbar'|^q$'nin P-fonsiyonu olması, Lemma 2.2.3 ve Hölder eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{3}\left[2\hbar\left(\frac{\kappa+x}{2}\right)+2\hbar\left(\frac{\tau+x}{2}\right)+\hbar(x)+\frac{\hbar(\kappa)+\hbar(\tau)}{2}\right]\right.\\
&\left.-\left[\frac{1}{x-\kappa}\int_\kappa^x \hbar(t)dt+\frac{1}{\tau-x}\int_x^\tau \hbar(t)dt\right]\right|\\
\leq\ & (x-\kappa)\left(\int_0^{\frac{1}{2}}\left|\xi-\frac{1}{6}\right|^p d\xi\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\times\left[\left(\int_0^{\frac{1}{2}}|\hbar'(\xi x+(1-\xi)\kappa)|^q\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\int_0^{\frac{1}{2}}|\hbar'(\xi\kappa+(1-\xi)x)|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right]\\
&+(\tau-x)\left(\int_{\frac{1}{2}}^1\left|\frac{5}{6}-\xi\right|^p d\xi\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\times\left[\left(\int_{\frac{1}{2}}^1|\hbar'(\xi x+(1-\xi)\tau)|^q\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\int_{\frac{1}{2}}^1|\hbar'(\xi\tau+(1-\xi)x)|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right]\\
\leq\ & \frac{1}{(1+p)^{\frac{1}{p}}}\left[\frac{1}{3^{p+1}}+\frac{1}{6^{p+1}}\right]^{\frac{1}{p}}\\
&\times\left\{(x-\kappa)\left[\left(\int_0^{\frac{1}{2}}[|\hbar'(x)|^q+|\hbar'(\kappa)|^q]d\xi\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\int_0^{\frac{1}{2}}[|\hbar'(\kappa)|^q+|\hbar'(x)|^q]d\xi\right)^{\frac{1}{q}}\right]\right.\\
&\left.+(\tau-x)\left[\left(\int_{\frac{1}{2}}^1[|\hbar'(x)|^q+|\hbar'(\tau)|^q]d\xi\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\int_{\frac{1}{2}}^1[|\hbar'(\tau)|^q+|\hbar'(x)|^q]d\xi\right)^{\frac{1}{q}}\right]\right\}\\
=\ & \frac{x-\kappa}{(1+p)^{\frac{1}{p}}}\left[\frac{1}{3^{p+1}}+\frac{1}{6^{p+1}}\right]^{\frac{1}{p}}\\
&\times\left[\left(\frac{|\hbar'(x)|^q+|\hbar'(\kappa)|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{|\hbar'(\kappa)|^q+|\hbar'(x)|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}\right]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{\tau - x}{(1+p)^{\frac{1}{p}}}\left[\frac{1}{3^{p+1}}+\frac{1}{6^{p+1}}\right]^{\frac{1}{p}} \\
&\times\left[\left(\frac{|\hbar'(x)|^q+|\hbar'(\tau)|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{|\hbar'(\tau)|^q+|\hbar'(x)|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}\right]
\end{aligned}
$$

yazılır ve ispat biter.

4. TARTIŞMA ve SONUÇ

Bu tezin ana bulgularını oluşturan üçüncü bölümde, ilk olarak s-konveks, quasi-konveks ve P fonksiyonu için genişletilmiş genelleştirilmiş Bullen, Simpson, Orta nokta ve Yamuk tipli eşitsizlikler elde edilmiştir. Bu sonuçların bazı özel halleri daha önce elde edilen çalışmaları kapsamaktadır. Bu tezde elde edilen yeni sonuçlar makale formatında hazırlanarak "Generalizations of Different Type Inequalities for s-Convex, Quasi-Convex and P-Function" başlıklı çalışma altında "Konuralp Journal of Mathematics" adlı dergide yayımlanmıştır. Bu alanda çalışan araştırmacılar tezde sunulan yöntemlerden, özdeşliklerden ve sonuçlardan yararlanarak konveksliğin farklı türleri için yeni Hermite-Hadamard, Bullen, Simpson, orta nokta ve yamuk tipli integral eşitsizlikleri elde edebilirler.

KAYNAKLAR

[1] Alomari, M., Darus, M. & Dragomir, SS. (2009). New inequalities of Simpson's type for s-convex functions with applications. *RGMIA Res. Rep. Coll.*, 12(4), 1-18.

[2] Breckner, WW. (1978). Stetigkeitsaussagenf ureine Klass ever all gemeinerter konvexer funktionen in topologisc henlinearen Raumen. *Publications de l'Institut Mathé-matique*, 23, 13-20.

[3] Bullen, PS. (1978). Error estimates for some elementary quadrature rules, *Publikacije Elektrotehnickog fakulteta. Serija Matematika i fizika*, (602/633), 97-103.

[4] Çakmak, M. (2019). On some Bullen-type inequalities via conformable fractional integrals. *Journal of Scientific Perspectives,* 3(4), 285-298.

[5] Çakmak, M. (2021). The differentiable h-convex functions involving the Bullen inequalitiy. *Acta Universitatis Apulensis,* 65, 29-36.

[6] Dragomir, SS. & Pearce, CEM. (2000). Selected topics on Hermite-Hadamard inequalities and applications. RGMIA Monographs, Victoria University.

[7] Dragomir, SS. & Agarwal, RP. (1998). Two inequalities for differentiable mappings and applications to special means of real numbers and to trapezoidal formula. *Applied Mathematics Letters*, 11(5), 91-95.

[8] Dragomir, SS. , Pečarić, J. & Person, LE. (1995). Some inequalities of Hadamard Type. *Soochow Journal of Mathematics,* 21(3), 335-341.

[9] Dragomir, SS. & Fitzpatrick, S. (1999). The Hadamard's inequality for s-convex functions in the second sense. *Demonstratio Mathematica,* 32(4), 687-696.

[10] Du, T., Li, Y. & Yang, Z. (2017). A generalization of Simpson's inequality via differentiable mapping using extended (s, m)-convex functions, *Applied Mathematics and Computation*, 293, 358-369.

[11] Du, T., Luo, C. & Cao, Z. (2021). On the Bullen-type inequalities via generalized fractional integrals and their applications. *Fractals*, 29(7), 2150188-718.

[12] Ertuğral, F. & Sarıkaya, MZ. (2019). Simpson type integral inequalities for generalized fractional integral. *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Serie A. Matemáticas,* 113(4), 3115-3124.

[13] Fejer, L. (1906). Uber die fourierreihen, ii, *Math. Naturwise. Anz Ungar. Akad., Wiss,* 24, 369-390.

[14] Hadamard, J. (1893). Etude sur les proprietes des fonctions entiéres en particulier d'une fonction consideree par. Riemann. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 58, 171-215.

[15] Hezenci, F., Budak, H. & Kara, H. (2021). New version of Fractional Simpson type inequalities for twice differentiable functions, *Advances in Difference Equations,* 2021(460), 1-10.

[16] Hudzik, H. & Maligranda, L. (1994). Some remarks on s-convex functions. *Aequationes Mathematicae*, 48, 100-111.

[17] Hussain, S. & Qaisar, S. (2016). More results on Simpson's type inequalty throug h-convexity for twice differentiable continuous mappings. *Springer Plus*, 5, Article Number: 77, 1-9.

[18] Ion. DA, (2007). Some estimates on the Hermite-Hadamard inequality through quasi-convex functions, *Annals of University of Craiova, Mathematics and Computer Science Series,* 34, 82-87.

[19] İşcan, İ. (2014). Hermite-Hadamard and Simpson-like type inequalities for differentiable harmonically convex functions, *Journal of Mathematics,* Article ID 346305, 10 pages.

[20] Kavurmacı, H., Akdemir, AO., Set E. & Sarıkaya, MZ. (2014). Simpson's type inequalities for m-and (α, m)-geometrically convex functions, *Konuralp Journal of Mathematics,* 2(1), 90-101.

[21] Kirmaci, US. (2004). Inequalities for differentiable mappings and applications to special means of real numbers and to midpoint formula. *Applied Mathematics and Computation* 147, 137-146.

[22] Orlicz, W. (1961). A note on modular spaces I. *Bulletin L'Académie Polonaise des Science, Série des Sciences Mathématiques, Astronomiques et Physiques,* 9, 157-162.

[23] Pecaric, J. & Varosanec, S. (2000). Anote on Simpson's inequality for functions of bounded variation. *Tamkang Journal of Mathematics*, 31(3), 239-242.

[24] Pečarić, JE., Prochan, F. & Tong, Y. (1992). Convex functions, partial orderings and statical applications, Academic Press, New York, USA, 467 pp.

[25] Sarıkaya, MZ., Set, E. & Özdemir, ME. (2010). On new inequalies of Simpson's type for s-convex functions. *Computers & Mathematics with Applications*, 60, 2191-2199.

[26] Sarıkaya, MZ. (2023). On the some generalization of inequalities associated with Bullen, Simpson, Midpoint and Trapezoid type. *Acta Universitatis Apulensis,* 73, 35-52.

[27] Sarıkaya, MZ., Erden, S. & Budak. H. (2017). Some integral inequalities for local fractional integrals. *Intenational Journal of Analysis and Applications,* 14(1), 9-19.

[28] Set, E. (2012). New inequalities of Ostrowski type for mappings whose derivatives are s-convex in the second sense via fractional integrals, *Computers & Mathematics with Applications*, 63(7), 1147-1154.

[29] Set, E., Akdemir, AO. & Özdemir, ME. (2017). Simpson type integral inequalities for convex functions via Riemann-Liouville integrals, *Filomat*, 31(14), 4415-4420.

[30] Ujevic, N. (2004). Double integral inequalities of Simpson type and applications, *Journal of Applied Mathematics and Computing*, 14(1-2), 213-223.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler	
Adı Soyadı	Hanife AZAKLI
Doğum Yeri	
Doğum Tarihi	
Uyruğu	✓ T.C. ❒ Diğer:
Telefon	
E-Posta Adresi	

Eğitim Bilgileri	
Lisans	
Üniversite	Ordu Üniversitesi
Fakülte	Fen-Edebiyat Fkültesi
Bölümü	Mtematik
Mezuniyet Yılı	06.07.2020

Yayınlar

[1] Sarıkaya M.Z., Çelik B., Set E. and Azaklı H, "Generalizations of Different Type Inequalities for s-Convex, Quasi-Convex and P-Function", Konuralp Journal of Mathematics, 10(2), 341-354, (2023).