



T. C.

ORDU ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**BAZI LAKTASYON MODELLERİNİN
PARAMETRELERİNİN BİYOLOJİK ANLAMLI
PARAMETRELERE DÖNÜŞTÜRÜLMESİ ÜZERİNE BİR
ÇALIŞMA**

BÜŞRA GÜLÇİÇEK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ORDU 2023

TEZ BİLDİRİMİ

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan ve kullanılan intihal tespit programının sonuçlarına göre; bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

BÜŞRA GÜLÇİÇEK

Bu çalışma Ordu Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinatörlüğünün B-2220 numaralı projesi ile desteklenmiştir.

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

BAZI LAKTASYON MODELLERİNİN PARAMETRELERİNİN BİYOLOJİK ANLAMLI PARAMETRELERE DÖNÜŞTÜRÜLMESİ ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA

BÜŞRA GÜLÇİÇEK

ORDU ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ, 104 SAYFA

(TEZ DANIŞMANI: Doç. Dr. MEHMET KORKMAZ)

Süt hayvanlarının doğum ile süt üretimine başlayan ve süt üretiminin bitmesi ile sona eren döneme laktasyon adı verilir. Süt veriminin laktasyon süresince değişimini gösteren grafikler laktasyon eğrisi olarak adlandırılır. Bu eğrilerde ortaya çıkan şekil doğrultusunda laktasyonu ifade eden matematiksel modeller ortaya konmuştur. Bu modellerde kullanılan laktasyon sabitleri (a, b, c, d, f, k) doğrudan biyolojik olarak bir anlam ifade etmemektedirler. Oluşturulan laktasyon modellerinin birinci ve ikinci türevleri yardımı ile $t_{\max}, y_{\max}, \mu_m$ gibi biyolojik anlama sahip parametreler elde edilebilmektedir. Biyolojik anlama sahip parametreler ile laktasyon sabitleri için uygun eşitlikler elde edildikten sonra elde edilen eşitliklerin laktasyon modellerinde yerine yazılması sonucunda model denklemleri biyolojik anlamlı parametrelere bağlı olarak yeniden düzenlenebilir. Bu çalışmada on beş adet laktasyon modeli biyolojik anlamlı parametrelere bağlı olarak ifade edilmeye çalışılmıştır. Laktasyon modellerinin biyolojik anlamlı parametrelere bağlı ifade edilebilmesi için yapılan tüm matematiksel işlemler dört model için anlatılmış ve kalan on bir model için tablolarla sunulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Biyolojik Anlamlı Parametre, Laktasyon Eğrisi, Laktasyon Modelleri, Laktasyon Sabiti.

ABSTRACT

A STUDY ON THE CONVERSION OF PARAMETERS OF SOME LACTATION MODELS INTO BIOLOGICALLY MEANINGFUL PARAMETERS

BÜŞRA GÜLÇİÇEK

ORDU UNIVERSITY INSTITUTE OF NATURAL AND SCIENCES

MATHEMATICS

MASTER THESIS, 104 PAGES

(SUPERVISOR: Doç. Dr. MEHMET KORKMAZ)

The period that begins milk production of dairy animals with birth and ends with the end of milk production is called lactation. Graphs showing the change in milk yield during lactation are called lactation curve. Mathematical models expressing lactation in accordance with the shape appearing in these curves have been put forward. The lactation constants (a, b, c, d, f, k) used in these models do not make directly biological sense. With the help of the first and second derivatives of the lactation models created, parameters with biological meaning such as $t_{\max}, y_{\max}, \mu_m$ can be obtained. After obtaining appropriate equations for parameters with biological meaning and lactation constants, the model equations can be rearranged depending on biologically significant parameters as a result of replacing the obtained equations in lactation models. In this study, fifteen lactation models were tried to be expressed depending on biologically significant parameters. All mathematical operations performed to express lactation models depending on biologically significant parameters were described for four models and presented with tables for the remaining eleven models.

Keywords: Biologically Meaningful Parameter, Lactation Constant, Lactation Curve, Lactation Models.

TEŞEKKÜR

Tez konunun belirlenmesi, alıőmanın yürütölmesi ve yazımı esnasında baőta danıőman hocam Sayın Do. Dr. Mehmet KORKMAZ'a teşekkür ederim.

Aynı zamanda, manevi desteklerini her an üzerimde hissettiĐim aileme teőekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
TEZ BİLDİRİMİ	I
ÖZET	I
ABSTRACT	III
TEŞEKKÜR	IV
İÇİNDEKİLER	V
ŞEKİL LİSTESİ	VI
ÇİZELGE LİSTESİ	VII
SİMGELER ve KISALTMALAR LİSTESİ	VIII
EKLER LİSTESİ	IX
1. GİRİŞ	1
2. LİTERATÜR ÖZETİ	3
3. MATERYAL VE YÖNTEM	5
3.1 Laktasyon Modelleri.....	5
3.2 Yöntem.....	7
4. LAKTASYON MODELLERİNİN DÖNÜŞÜMLERİ	8
4.1 Eksik Gama Fonksiyonunun Dönüşüm Aşamaları.....	8
4.2 Parabolik Üstel Modelin Dönüşümü.....	11
4.3 Üçüncü Dereceden Polinomial Modelin Dönüşüm Aşamaları.....	14
4.4 Kuadratik Logaritmik Modelin Dönüşüm Aşamaları.....	18
5. BULGULAR	22
6. SONUÇ	36
7. KAYNAKLAR	38
EKLER	40
ÖZGEÇMİŞ	93

ŞEKİL LİSTESİ

	<u>Sayfa</u>
Şekil 3.1 Standart Laktasyon Eğrisi	6

ÇİZELGE LİSTESİ

	<u>Sayfa</u>
Çizelge 3.1 Laktasyon Modelleri.....	6
Çizelge 5.1 Laktasyon Modelleri.....	22
Çizelge 5.2 Laktasyon Modellerinin Birinci Türevleri	23
Çizelge 5.3 Laktasyon Modellerinin İkinci Türevleri.....	24
Çizelge 5.4 Laktasyon modellerinin t_{\max} ve y_{\max} değerleri	25
Çizelge 5.5 Laktasyon Modellerinin t_i ve y_i Değerleri	27
Çizelge 5.6 Laktasyon Modellerinin μ_m Değeri.....	28
Çizelge 5.7 a, b, c vb. Parametrelerin $t_{\max}, y_{\max}, t_i, y_i, \mu_m$ Parametreleri Cinsinden Eşiti.....	29
Çizelge 5.8 $t_{\max}, y_{\max}, t_i, y_i, \mu_m$ Parametrelere Göre Düzenlenmiş Laktasyon Modellerinin Denklemleri	31

SİMGELER ve KISALTMALAR LİSTESİ

y	: Süt verimi
t	: Süt verim kontrolünün yapıldığı zaman
e	: Matematiksel üs fonksiyonu
a, b, c, d, f, k	: Laktasyon sabitleri
t_{max}	: Süt veriminin en fazla olduğu zaman
y_{max}	: Elde edilen en fazla süt miktarı
t_i	: Süt veriminin azalma hızının düştüğü an
y_i	: Azalma hızının düştüğü anda ki süt miktarı
μ_m	: Azalan fazın eğimi

EKLER LİSTESİ

	<u>Sayfa</u>
EK 1: Bilgisayar Programı Görüntüleri.....	41

1. GİRİŞ

Süt hayvanlarında, buzağılama ile süt üretmeye başlayıp, kuruya çıkma olarak adlandırılan süt üretiminin durduğu döneme kadar ki geçen süreye laktasyon adı verilmektedir. Doğumla başlayan süt verimi, belirli bir süre (2-6 hafta) tedricen artarak maksimum düzeye ulaşır. Bu üretim düzeyi bir süre (ortalama bir ay) devam eder ve daha sonra başlangıçtaki artıştan daha düşük bir hızla azalarak ineğin kuruya çıkması ile sona erer (Berberoğlu, 2018; Güler, 2020; Keskin vd., 2009).

Süt, hayvancılık sektörü için önemli bir gelir kaynağı olurken, insanlar içinse önemli bir besin kaynağıdır. İnsan nüfusundaki artış düşünüldüğünde süt ve süt ürünlerinin tüketiminin de artacağı görülmektedir. Dolayısıyla süt hayvanından ya da ait olduğu sürüden, bir laktasyon dönemi boyunca alınabilecek en fazla verim alınmak istenir. Bu amaçla süt hayvanı yetiştiriciliği yapan çiftliklerde, sürüdeki hayvan sayısı artırılabilir ya da hayvan ıslahı yöntemi uygulanabilir. Bu tür kararların doğru olabilmesi için, sürünün ve sürüdeki her bir hayvanın laktasyon dönemi hakkında detaylı bilgiye sahip olmak gerekir. Laktasyon döneminin en iyi şekilde yorumlanabilmesi ve geleceğe dönük kararlar verilebilmesi için laktasyon eğrisi incelenebilir.

Laktasyon döneminde üretilen süt miktarının zamana bağlı olarak grafik ile gösterilmesine laktasyon eğrisi denilmektedir. Standart bir laktasyon eğrisinin şekli, nispeten yüksek bir oranda, üst sınır üretimin elde edildiği noktaya kadar artan, daha sonra süt üretiminin sonuna kadar daha yavaş bir oranda azalan olarak tanımlanabilir (Elahi Torshizi vd., 2011).

Laktasyon eğrisine olan ilgi, onu tanımlamak veya tahmin etmek için önerilen çeşitli matematiksel modellerle yansıtılmaktadır. Bu modeller, basit bir biyolojik veya ekonomik yoruma sahip oldukları için takdir edilmekte ve kullanılmaktadır (Bouallegue & M'Hamdi, 2020). Laktasyon eğrilerini tanımlamak için kullanılan matematiksel modeller farklı bilgiler elde etmek için kullanılmaktadır. Bunlar genel olarak tamamlanmamış laktasyonlarda toplam süt verimini tahmin etmek için, çevre ve sürü yönetim faktörlerinden de modelleme çalışmaları yapılırken kullanılır (Ali & Schaeffer, 1987).

Laktasyon modelleri, bireysel bir hayvanın veya sürünün gelecekteki süt veriminin tahmininde de kullanılabilir. Tahminde laktasyon eğrisi kullanılırken amaç, altta yatan süt verimi modelini belirlemek amacıyla, çevresel ve diğer faktörlerin bir sonucu olarak varyasyon varlığında minimum hata ile laktasyonun her günündeki verimi tahmin etmektir. Bir laktasyon modelinin yararlılığının derecesi, biyolojik laktasyon sürecini taklit etmede ne kadar başarılı olduğuna ve üretimi etkileyebilecek çevresel ve diğer faktörlere ne kadar iyi uyum sağladığına bağlıdır (Olori vd., 1999).

Birçok araştırmacı, laktasyon eğrisini matematiksel olarak ifade edebilmek için çalışmalarda bulunmuştur. Yeni modeller üretilmiş ya da daha önce üretilen modelleri inceleyerek düzenlemeler, eklemeler yapmışlardır. Bu sayede laktasyon eğrisini tanımlayan çok sayıda matematiksel model ortaya çıkmıştır. Bu modelleri parametre sayılarına göre, fonksiyon çeşidine göre ya da hangi süt hayvanı için ortaya konulduğuna göre birçok farklı kategoriye ayırabiliriz. Modelleri oluşturan denklemlere odaklanacak olursak, denklemlerin üstel ve doğrusal fonksiyonlar kullanılarak tasarlandığı görülmektedir. Bu nedenle, laktasyon modellerini üstel ve doğrusal modeller olarak inceleyebiliriz. Ancak her modelde ortak olan amaç, laktasyon eğrisini ve laktasyon dönemini en iyi şekilde ifade edebilmektir.

Bu çalışmada, daha önceden büyüme modelleri için “Bakteri büyüme eğrisinin modellenmesi (Zwietering vd., 1990)” isimli makale ve “Bazı Sigmoidal Büyüme Modellerinin Biyolojik Anlamlı Mekanik Modellere Dönüştürülmesi (Oda, 2019)” isimli tez de yapılmış olan orijinal denklemdeki her bir parametrenin biyolojik anlamı parametrelere bağlı birer eşitliğin elde edilmesi ve elde edilen orijinal denklemdeki parametrelerin yerine yazılması ile modelleri ifade eden denklemlerin biyolojik anlamı parametrelere bağlı denklemlere dönüştürülmesi çalışmaları örnek alınarak aynı çalışmalar bazı laktasyon modelleri için denenecektir.

2. LİTERATÜR ÖZETLERİ

Laktasyon eğrilerini tanımlamaya yönelik ilk çalışma Brody ve arkadaşları (1923) tarafından üstel fonksiyonu kullanarak $y=ae^{-ct}$ biçiminde tanımladıkları modeldir. Bu modeldeki bazı kısıtlamalar nedeniyle Brody ve arkadaşları (1924) bir yıl sonrasında $y = ae^{-ct} - ae^{-bt}$ biçiminde yeni bir model ortaya koymuşlardır.

Bu çalışmalardan sonra Sikka (1950) tarafından parabolik üstel olarak adlandırılan yeni bir model tanımlanmıştır. Bu modelin fonksiyonu $y = ae^{-ct^2+bt}$ biçimindedir.

Nelder (1966), laktasyon eğrisini polinom yardımı ile modellemeye çalışmış ve modelin fonksiyonu $y = \frac{t}{at^2 + bt + c}$ biçiminde ifade edilen ters (invers) polinomiyal modeli tanımlamıştır.

Bir yıl sonra Wood (1967) tarafından şu anda laktasyon modelleri arasında en çok tercih edilen eksik gama fonksiyonunu tanımlandı. Wood (1967) modelinin fonksiyonu $y = at^b e^{-ct}$ biçimindedir.

Dave (1971) laktasyonu tanımlamak için $y = a + bt - ct^2$ biçiminde ikinci dereceden bir fonksiyon geliştirdi.

Sauvant ve Fehr (1975) üçüncü derece polinom yardımı ile $y = a + bt + ct^2 + dt^3$ biçiminde bir model geliştirdi.

Cobby ve Lee Du (1978) ilk üstel modelde değişiklikler yaparak $y = a - bt - ae^{-ct}$ biçiminde bir model geliştirdiler.

Singh ve Gopal (1982) logaritma fonksiyonunu kullanarak ve birinci dereceden ve ikinci dereceden olacak şekilde iki yeni model geliştirdiler. Modeller $y = a + bt + c \ln(t)$ biçiminde ifade edilen logaritmik lineer model ve $y = a + bt + ct^2 + d \ln(t)$ biçiminde ifade edilen kuadratik logaritmik modeldir.

Jenkins ve Ferrell (1984), Wood'un modelinin modifikasyonu ile $y=ate^{-ct}$ biçimindeki modeli tanımlamışlardır.

Wilmink (1987), Cobby ve Lee Du modelinden esinlenerek doğrusal bir model geliştirdi. Modelin fonksiyonu $y=a+be^{-kt}+ct$ biçimindedir.

Ali ve Schaeffer (1987), Singh ve Gopal' in ikinci modeline ekleme yaparak beş parametrelili $y=a+bt+ct^2+f\ln\left(\frac{1}{t}\right)+e\ln^2\left(\frac{1}{t}\right)$ biçiminde ifade ettikleri modeli geliştirdiler.

Guo ve Swalve (1995), Singh ve Gopal' in ikinci modelinden esinlenerek karışık logaritmik modeli; $y = a + bt^{\frac{1}{2}} + c \ln(t)$ biçiminde oluşturdu.

Guo ve Swalve ile aynı yılda tanımlanan bir başka model ise Cappio-Borlino (1995) modelidir. Modelin fonksiyonu; $y = at^{be^{-ct}}$ biçimindedir.

3. MATERYAL VE YÖNTEM

3.1 Laktasyon Modelleri

Laktasyon modelleri, süt üretiminin zaman içerisindeki değişimini gösteren laktasyon eğrilerini matematiksel olarak ifade eder. Şekil 3.1’ de gösterilen standart laktasyon eğrisi incelendiğinde, laktasyon için üç aşamadan bahsedilebilir. Birinci aşamada, süt veriminin artarak maksimum seviyeye ulaştığı, ikinci aşamada süt veriminin maksimum seviyede kaldığı, üçüncü ve son aşamada ise süt veriminin maksimum seviyeden laktasyonun sonuna kadar geçen süre boyunca azalma trendine girdiği açıkça görülür. Laktasyon eğrisinde bu bilgileri elde edebildiğimiz gibi laktasyon modellerinden de laktasyon dönemi hakkında bilgi edinebiliriz. Bu yüzden modellerde kullanılan parametrelerin anlamları önemlidir. Ancak modellerde kullanılmış olan a, b, c gibi parametreler, laktasyon dönemi hakkında yorumda bulunabileceğimiz biyolojik anlamlara sahip değildir. Laktasyon modellerinin birinci ve ikinci türevleri yardımı ile biyolojik anlama sahip olmayan a, b, c gibi parametreler, biyolojik olarak anlam ifade eden $t_{\max}, y_{\max}, t_i, y_i, \mu_m$ gibi parametrelere dönüşümleri sağlanabilmektedir. Bu parametrelerin anlamları şu şekildedir;

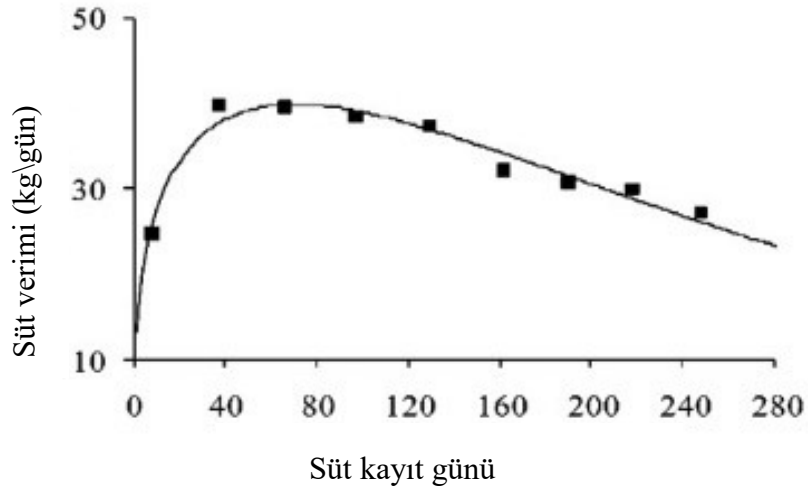
t_{\max} : süt veriminin en fazla olduğu zaman,

y_{\max} : en fazla elde edilen süt miktarı,

t_i : süt üretiminde azalma hızının düştüğü an,

y_i : azalma hızının düştüğü andaki süt miktarı,

μ_m : azalan fazın eğimi.



Şekil 3.1 Standart Laktasyon Eğrisi (Macciotta vd., 2011)

Anlatılan dönüşüme uygun olan laktasyon modelleri içerisinde dönüşüm aşamaları anlatılacak olan laktasyon modelleri çizelge 3.1’ de gösterilmiştir.

Çizelge 3.1 Laktasyon modelleri

Laktasyon Modelinin Adı	Laktasyon Modelinin Denklemini
Eksik Gama Fonksiyonu	$y = at^b e^{-ct}$
Parabolik Üstel Fonksiyonu	$y = ae^{bt-ct^2}$
Üçüncü Dereceden Polinomiyal Fonksiyon	$y = dt^3 + ct^2 + bt + a$
Kuadratik Logaritmik Model	$y = a + bt + ct^2 + d \ln(t)$

Çizelge 3.1.1’de gösterilen modellerde;

y : süt verimini,

t : kontrolün yapıldığı laktasyon günü,

e : matematiksel üs fonksiyonu

a, b, c, d parametreleri: laktasyon sabitleridir.

3.2. Yöntem

Çizelge 3.1’de gösterilen laktasyon modellerindeki a, b, c, d parametrelerinin $t_{\max}, y_{\max}, t_i, y_i, \mu_m$ parametreleri cinsinden yazılabilmesi ve her model için yeniden düzenlenen a, b, c, d parametrelerinin model denklemlerinde yerine yazılması ile oluşacak olan biyolojik anlamlı parametrelere sahip laktasyon modellerinin elde edilmesi için yapılan tüm gerekli işlemler bilgisayar programı kullanılarak yapılmıştır.

4. LAKTASYON MODELLERİNİN DÖNÜŞÜMLERİ

4.1 Eksik Gama Fonksiyonunun Dönüşümü

Wood (1967) tarafından tanımlanan eksik gama fonksiyonunun modelini ifade eden denklem aşağıda (4.1.1) numaralı denklem ile gösterilmiştir.

$$y=at^b e^{-ct} \quad (4.1.1)$$

Eksik gama modelinin biyolojik anlamlı parametreler ile yeniden düzenlenmiş halinin elde edilmiş aşamaları için gerekli işlemlerin tümü aşağıda sırasıyla açıklanmıştır. Öncelikli olarak laktasyonun ulaştığı maksimum seviyeyi (y_{max}) ve bu seviyeye ulaştığı günü (t_{max}) bulabilmek için (4.1.1) numaralı denkleminin birinci türevi hesaplanmalıdır.

$$y' = \frac{dy}{dt} = e^{-ct} a \left(t^{b-1} b - t^b c \right) \quad (4.1.2)$$

Birinci türev sıfıra eşitlendiğinde maksimum süt veriminin gerçekleştiği gün;

$$\frac{dy}{dt} = e^{-ct} a \left(t^{b-1} b - t^b c \right) = 0$$

eşitliği çözüldüğünde;

$$t_{max} = \frac{b}{c} \quad (4.1.3)$$

olarak bulunur. Bulunan t_{max} değeri (4.1.1) numaralı denklemde yerine yazıldığında süt veriminin ulaştığı en yüksek seviye (y_{max}) elde edilir.

$$y_{max} = (y)_{t=\frac{b}{c}} = a \left(\frac{b}{c} \right)^b e^{-b} \quad (4.1.4)$$

Laktasyonun üçüncü aşamasında gerçekleşen durumda, süt veriminin kuruya çıkmaya kadar ki geçen sürede azalma trendine girmesi, azalma hızının azaldığı anı yani denklemin büküm noktasının zaman değerini (t_i) bulmak için öncelikle ikinci türev hesaplanmalıdır.

$$y'' = \frac{d^2y}{dt^2} = \left((b^2 - b)t^{b-2} - 2t^{b-1}bc + t^b c^2 \right) a e^{-ct} \quad (4.1.5)$$

İkinci türevin sifira eşitlenmesi ile t_i elde edilir.

$$y'' = \frac{d^2y}{dt^2} = \left((b^2 - b)t^{b-2} - 2t^{b-1}bc + t^b c^2 \right) a e^{-ct} = 0$$

eşitliği çözüldüğünde;

$$\frac{b+\sqrt{b}}{c}, \frac{b-\sqrt{b}}{c}$$

olacak şekilde iki adet eşlenik çözüm elde edilir. t_i değeri, laktasyon boyunca hayvanın süt veriminin azalmaya başladığı an olduğu için bir tane olması gerekir. Yukarıda verilen iki eşlenik çözümden hangisinin anlamlı hangisinin anlamsız olduğu aslında parametrelerin tahmini ile netleşir. (4.1.1) numaralı denklemdeki parametreler ele alındığında y süt verimini ifade ettiği için pozitif bir değer alması gerektiği için $a > 0$ olmalıdır. t_i için elde edilen kökler göz önüne alındığında ve (4.1.3) numaralı eşitlikte verilen t_{\max} eşitliği incelendiğinde $b, c > 0$ olmalıdır. Aksi halde t_i parametresi için reel sayılarda bir değer elde edilemez. Yapılan örnek çalışmalarda, t_i değeri olarak, eşlenik çözümün pozitif olanının alınması gerektiği anlaşılmış ve t_i değerinin eşitliği (4.1.6) numaralı eşitlikte verilmiştir.

$$t_i = \frac{b+\sqrt{b}}{c} \quad (4.1.6)$$

Dönüm noktası zamanında elde edilen süt miktarı (y_i) için t_i değerinin (4.1.1) numaralı denklemdeki değeri hesaplanır.

$$y_i = (y)_{t=\frac{b+\sqrt{b}}{c}} = a \left(\frac{b+\sqrt{b}}{c} \right)^b e^{-b-\sqrt{b}} \quad (4.1.7)$$

Azalan fazın eğimini (μ_m) yani t_i 'nin eğimini bulmak için t_i değeri birinci türevde yerine yazılarak;

$$\mu_m = \left(\frac{dy}{dt} \right) \left(t = \frac{b+\sqrt{b}}{c} \right) = \frac{a \left(\frac{b+\sqrt{b}}{c} \right)^b b c e^{(-b-\sqrt{b})}}{b+\sqrt{b}} - a \left(\frac{b+\sqrt{b}}{c} \right)^b c e^{(-b-\sqrt{b})} \quad (4.1.8)$$

olarak elde edilir.

(4.1.1) numaralı denklemde yer alan a, b, c parametrelerini biyolojik anlamlı parametreler cinsinden yazabilmek için (4.1.3), (4.1.6) ve (4.1.8) numaralı eşitlikler kullanılacaktır. (4.1.3), (4.1.6) ve (4.1.8) numaralı eşitlikleri incelendiği zaman, a, b, c parametrelerinin t_{\max}, t_i ve μ_m parametrelerine bağlı bir çözümünün elde edilebilmesi için, a, b, c parametrelerinin aynı anda çözülmesi sonucunda elde edilen eşitlikler (4.1.9), (4.1.10) ve (4.1.11) numaralı eşitlikler ile verilmiştir.

$$a = \frac{\mu_m t_i (t_i - t_{\max})}{\left(\frac{t_{\max}}{t_i - t_{\max}} \right)^2 e^{\left(\frac{t_i t_{\max}}{t_i - t_{\max}} \right)} t_{\max}} \quad (4.1.9)$$

$$b = \left(\frac{t_{\max}}{t_i - t_{\max}} \right)^2 \quad (4.1.10)$$

$$c = \frac{t_{\max}}{(t_i - t_{\max})^2} \quad (4.1.11)$$

Yukarıda verilen eşitlikler (4.1.1) numaralı denklemde yerine yazıldıktan ve sadeleştirme işlemi yapıldıktan sonra eksik gama modelinin biyolojik anlamlı parametrelere göre düzenlenmiş denklemini elde edilir. Elde edilen denklem aşağıda (4.1.12) numaralı eşitlikte verilmiştir.

$$y = \frac{\mu_m t_i (t_i - t_{\max})^t \left(\frac{t_{\max}}{t_i - t_{\max}} \right)^2 e^{\left(-\frac{t t_{\max}}{(t_i - t_{\max})^2} \right)}}{\left(\frac{t_{\max}}{t_i - t_{\max}} \right)^2 e^{\left(-\frac{t t_{\max}}{(t_i - t_{\max})^2} \right)}}_{t_i}^{t_{\max}} \quad (4.1.12)$$

4.2. Üstel Parabolik Modelin Dönüşüm Aşamaları

Sikka (1950) tarafından tanımlanan üstel parabolik modelini ifade eden denklem aşağıda (4.2.1) numaralı denklem ile gösterilmiştir.

$$y = a e^{-ct^2 + bt} \quad (4.2.1)$$

Üstel parabolik modelinin biyolojik anlamlı parametreler ile yeniden düzenlenmiş halinin elde edilişi aşamaları aşağıda sırasıyla açıklanmıştır.

Laktasyonun ulaştığı maksimum seviyeyi (y_{\max}) ve bu seviyeye ulaştığı günü (t_{\max}) bulabilmek için (4.2.1) numaralı denkleminin birinci türevi hesaplanmalıdır.

$$y' = \frac{dy}{dt} = a(-2ct + b) e^{(-ct^2 + bt)} \quad (4.2.2)$$

Birinci türev sıfıra eşitlendiğinde maksimum süt veriminin gerçekleştiği gün;

$$\frac{dy}{dt} = a(-2ct + b) e^{(-ct^2 + bt)} = 0$$

eşitliği çözüldüğünde;

$$t_{\max} = \frac{b}{2c} \quad (4.2.3)$$

olarak bulunur. Bulunan t_{\max} değeri (4.2.1) numaralı denklemde yerine yazıldığında süt veriminin ulaştığı en yüksek seviye y_{\max} elde edilir.

$$y_{max} = (y)_{t=\frac{b}{2c}} = ae^{\frac{b^2}{4c}} \quad (4.2.4)$$

Laktasyonun üçüncü aşamasında gerçekleşen durumda, süt veriminin kuruya çıkmaya kadar ki geçen sürede azalma trendine girmesi, azalma hızının azaldığı anı yani denklemin büküm noktasının zaman değerini (t_i) bulmak için öncelikle ikinci türev hesaplanmalıdır.

$$y'' = \frac{d^2y}{dt^2} = -2ace^{(-ct^2+bt)} + a(-2ct+b)^2 e^{(-ct^2+bt)} \quad (4.2.5)$$

İkinci türevin sıfıra eşitlenmesi ile t_i elde edilir.

$$y'' = \frac{d^2y}{dt^2} = -2ace^{(-ct^2+bt)} + a(-2ct+b)^2 e^{(-ct^2+bt)} = 0$$

eşitliği çözüldüğünde;

$$\frac{b+\sqrt{2c}}{2c}, \frac{b-\sqrt{2c}}{2c}$$

olacak şekilde iki adet eşlenik çözüm elde edilir. t_i değeri, laktasyon boyunca hayvanın süt veriminin azalmaya başladığı an olduğu için bir tane olması gerekir. (4.2.1) numaralı denklemdaki parametreler ele alındığında y süt verimini ifade ettiği için pozitif bir değer alması gerektiği için $a > 0$ olmalıdır. t_i için elde edilen kökler göz önüne alındığında ve (4.2.3) numaralı eşitlikte verilen t_{max} eşitliği incelendiğinde $b, c > 0$ olmalıdır. Aksi halde t_i parametresi için reel sayılarda bir değer elde edilemez. Yapılan örnek çalışmalarda, t_i değeri olarak, eşlenik çözümün pozitif olanının alınması gerektiği anlaşılmış ve t_i değerinin eşitliği (4.2.6) numaralı eşitlikte verilmiştir.

$$t_i = \frac{b + \sqrt{2c}}{2c} \quad (4.2.6)$$

Dönüm noktasında elde edilen süt miktarı (y_i) için t_i değerinin (4.2.1) numaralı denklemdaki değeri hesaplanır.

$$y_i = y \left(t = \frac{b + \sqrt{b}}{c} \right) = ae^{\frac{(2b - (b + \sqrt{2c}))(b + \sqrt{2c})}{4c}} \quad (4.2.7)$$

Azalan fazın eğimini (μ_m) yani t_i 'nin eğimini bulmak için t_i değeri birinci türevde yerine yazılarak;

$$\mu_m = \left(\frac{dy}{dt} \right) \left(t = \frac{b + \sqrt{2c}}{2c} \right) = -a\sqrt{2c}e^{\left(\frac{(2b - (b + \sqrt{2c}))(b + \sqrt{2c})}{4c} \right)} \quad (4.2.8)$$

olarak elde edilir.

(4.2.1) numaralı denklemde yer alan a, b, c parametrelerini biyolojik anlamlı parametreler cinsinden yazabilmek için (4.2.3), (4.2.6) ve (4.2.8) numaralı eşitlikler kullanılacaktır. (4.2.3), (4.2.6) ve (4.2.8) numaralı eşitlikleri incelendiği zaman, a, b, c parametrelerinin t_{\max}, t_i ve μ_m parametrelerine bağlı bir çözümünün elde edilebilmesi için, a, b, c parametrelerinin aynı anda çözülmesi sonucunda elde edilen eşitlikler (4.2.9), (4.2.10) ve (4.2.11) numaralı eşitlikler ile verilmiştir.

$$a = - \frac{\mu_m (t_i - t_{\max})}{e^{\left(\frac{t_i (t_i - 2t_{\max})}{2(t_i - t_{\max})^2} \right)}} \quad (4.2.9)$$

$$b = \frac{t_{\max}}{(t_i - t_{\max})^2} \quad (4.2.10)$$

$$c = \frac{1}{2(t_i - t_{\max})^2} \quad (4.2.11)$$

Parabolik üstel modelinde a, b, c parametreleri yerine (4.2.9), (4.2.10) ve (4.2.11) numaralı eşitlikler yazılırsa aşağıda (4.2.12) numaralı eşitlikte gösterilen denklem elde edilir. Elde edilmiş olan denklem parabolik üstel modelin biyolojik anlamlı parametrelere göre yeniden düzenlenmiş biçimidir.

$$y = -\mu_m(t_i - t_{\max}) e^{\left(\frac{(t - t_i)(2t_{\max} - t - t_i)}{2(t_i - t_{\max})^2} \right)} \quad (4.2.12)$$

4.3. Üçüncü Dereceden Polinomial Modelin Dönüşüm Aşamaları

Sauvant ve Fehr (1975) tarafından tanımlanan üçüncü dereceden polinomial modeli ifade eden denklem aşağıda (4.3.1) numaralı denklem ile gösterilmiştir.

$$y = at^3 + bt^2 + ct + d \quad (4.3.1)$$

Bu denklem içerisinde yer alan a, b, c laktasyon sabitleri $a > 0$ ve $b, c < 0$ olarak kabul edilmiştir. Üçüncü dereceden polinomial modelinin biyolojik anlamlı parametreler ile yeniden düzenlenmiş biçiminin elde edilmiş aşamaları için gerekli işlemlerin tümü aşağıda sırasıyla açıklanmıştır.

Öncelikli olarak laktasyonun ulaştığı maksimum seviyeyi (y_{\max}) ve bu seviyeye ulaştığı günü (t_{\max}) bulabilmek için (4.3.1) numaralı denkleminin birinci türevi hesaplanmalıdır.

$$y' = \frac{dy}{dt} = 3at^2 + 2bt + c \quad (4.3.2)$$

Birinci türev sıfıra eşitlendiğinde maksimum süt veriminin gerçekleştiği gün elde edilecektir.

$$y' = \frac{dy}{dt} = 3at^2 + 2bt + c = 0$$

eşitliği çözüldüğünde;

$$\frac{-b+\sqrt{-3ac+b^2}}{3a}, \frac{b+\sqrt{-3ac+b^2}}{3a}$$

olacak şekilde iki adet eşlenik çözüm elde edilir. Yukarıda verilen iki eşlenik çözümden hangisinin anlamlı hangisinin anlamsız olduğu aslında parametrelerin tahmini ile netleşir. Laktasyon boyunca süt hayvanı bir kez maksimum süt verimine ulaşabileceği için t_{\max} parametresini pozitif reel sayı olacak şekilde bir değeri olmalıdır. $a > 0$ ve $b, c < 0$ olarak kabul edildiği için t_{\max} parametresinin eşitliği aşağıda (4.3.3) numaralı eşitliği ile verilmiştir.

$$t_{\max} = \frac{-b+\sqrt{-3ac+b^2}}{3a} \quad (4.3.3)$$

Bulunan t_{\max} değeri (4.3.1) numaralı denklemde yerine yazıldığında süt veriminin ulaştığı en yüksek seviye (y_{\max}) elde edilir.

$$y_{\max} = (y) \left(\begin{array}{c} -b+\sqrt{-3ac+b^2} \\ t = \frac{\quad}{3a} \end{array} \right) \quad (4.3.4)$$

$$= \left(\frac{-b+\sqrt{-3ac+b^2}}{3a} \right) \left(\left(\frac{-b+\sqrt{-3ac+b^2}}{3} \right)^2 + b \left(\frac{-b+\sqrt{-3ac+b^2}}{3} \right) + c \right) + d$$

Laktasyonun üçüncü aşamasında gerçekleşen durumda, süt veriminin kuruya çıkmaya kadar ki geçen sürede azalma trendine girmesi, azalma hızının azaldığı anı yani denklemin büküm noktasının zaman değerini (t_i) bulmak için öncelikle ikinci türev hesaplanmalıdır.

$$y'' = \frac{d^2y}{dt^2} = 6at + 2b \quad (4.3.5)$$

İkinci türevin sifıra eşitlenmesi ile t_i elde edilir.

$$y'' = \frac{d^2y}{dt^2} = 6at + 2b = 0$$

eşitliği çözüldüğünde;

$$t_i = -\frac{b}{3a} \quad (4.3.6)$$

olarak bulunur.

Dönüm noktasında elde edilen süt miktarı (y_i) için t_i değerinin (4.3.2) numaralı denklemdeki değeri hesaplanır.

$$y_i = y\left(t = -\frac{b}{3a}\right) = \frac{2b^3}{27a^2} - \frac{cb}{3a} + d \quad (4.3.7)$$

Azalan fazın eğimini (μ_m) yani t_i 'nin eğimini bulmak için t_i değeri birinci türevde yerine yazılarak;

$$\mu_m = \left(\frac{dy}{dt}\right)\left(t = -\frac{b}{3a}\right) = -\frac{b^2}{3a} + c$$

(4.3.8) olarak elde edilir.

t_i, t_{\max} ve μ_m parametrelerinin gösterildiği eşitlikler incelendiğinde bu üç parametrenin a, b ve c parametrelerine bağlı olarak yazıldığı görülür. Bu nedenle a, b ve c parametrelerinin biyolojik anlamlı parametreler cinsinden eşitinin elde edilebilmesi için bu üç parametrenin beraber çözülmesi ile elde edilir. a, b ve c parametrelerinin t_i, t_{\max} ve μ_m parametreleri cinsinden eşitinin elde edilmiş olan eşitlikleri (4.3.9), (4.3.10) ve (4.3.11) numaralı eşitlikler ile gösterilmiştir.

$$a = -\frac{\mu_m}{3(t_i - t_{\max})^2} \quad (4.3.9)$$

$$b = \frac{t_i \mu_m}{(t_i - t_{\max})^2} \quad (4.3.10)$$

$$c = -\frac{\mu_m t_{\max} (2t_i - t_{\max})}{(t_i - t_{\max})^2} \quad (4.3.11)$$

d parametresinin anlamlı parametrelere bağlı bir eşitliğinin elde edilebilmesi için y_{\max} eşitliği kullanılır. Öncelikli olarak d ve y_{\max} parametresinin (4.3.4) numaralı eşitlikte yer değiştirmesi gerekir.

$$d = y_{\max} - \left(\frac{-b + \sqrt{-3ac + b^2}}{3a} \right) \left(\left(\frac{-b + \sqrt{-3ac + b^2}}{3} \right)^2 + b \left(\frac{-b + \sqrt{-3ac + b^2}}{3} \right) + c \right) \quad (4.3.12)$$

Yukarıda elde edilen d parametresinin eşitliğinde a, b ve c parametrelerinin olduğu görülmektedir. (4.3.9), (4.3.10) ve (4.3.11) numaralı eşitliklerde yer alan a, b ve c parametreleri (4.3.12) numaralı eşitlikte yerlerine yazılıp sadeleştirme yapıldıktan sonra d parametresinin t_{\max}, y_{\max}, t_i ve μ_m parametrelerine bağlı olarak elde edilen eşitliği aşağıda (4.3.13) numaralı eşitlikte verilmiştir.

$$d = \frac{\left(\mu_m \left(t_i (2t_i - 3t_{\max})^2 - 2t_{\max}^3 \right) \right)}{3(t_i - t_{\max})^2} - 1 \quad (4.3.13)$$

Üçüncü dereceden polinomial modelin biyolojik anlamlı parametrelere bağlı olarak ifade edilebilmesi için (4.3.9), (4.3.10), (4.3.11) ve (4.3.13) numaralı eşitliklerin (4.3.1) numaralı eşitlikte yerlerine yazılması gerekir. Son işlemde sonra sadeleştirme işlemi yapıldıktan sonra (4.3.14) numaralı eşitlik ile üçüncü dereceden polinomial modelin biyolojik anlamlı parametrelere göre yeniden düzenlenmiş biçimi gösterilmiştir.

$$y = \frac{\mu_m \left(t_i (2t_i - 3t_{\max})^2 - 3t_i (2t_{\max} - t) + t_{\max}^2 (-2t_{\max}^3 + 3t) - t^3 \right)}{3(t_i - t_{\max})^2} - y_{\max} \quad (4.3.14)$$

4.4. Kuadratik Logaritmik Modelin Dönüşüm Aşamaları

Singh ve Gopal (1982) tarafından tanımlanan kuadratik logaritmik modeli ifade eden denklem aşağıda (4.4.1) numaralı denklem ile gösterilmiştir.

$$y = a + bt + ct^2 + d \ln(t) \quad (4.4.1)$$

Kuadratik logaritmik modelinin biyolojik anlamlı parametreler ile yeniden düzenlenmiş halinin elde edilmiş aşamaları için gerekli işlemlerin tümü aşağıda sırasıyla açıklanmıştır.

Laktasyonun ulaştığı maksimum seviyeyi (y_{\max}) ve bu seviyeye ulaştığı günü (t_{\max}) bulabilmek için (4.4.1) numaralı denkleminin birinci türevi hesaplanmalıdır.

$$y' = \frac{dy}{dt} = b + 2ct + \frac{d}{t} \quad (4.4.2)$$

Birinci türev sıfıra eşitlendiğinde maksimum süt veriminin gerçekleştiği gün elde edilcektir.

$$y' = \frac{dy}{dt} = b + 2ct + \frac{d}{t} = 0$$

eşitliği çözüldüğünde;

$$\frac{-b + \sqrt{b^2 - 8cd}}{4c}, -\frac{b + \sqrt{b^2 - 8cd}}{4c}$$

olacak şekilde iki adet eşlenik çözüm elde edilir. Yukarıda verilen iki eşlenik çözümden hangisinin anlamlı hangisinin anlamsız olduğu aslında parametrelerin tahmini ile netleşir. Laktasyon boyunca süt hayvanı bir kez maksimum süt verimine ulaşabileceği için t_{\max} parametresini pozitif reel sayı olacak şekilde bir değeri olmalıdır. $b > 0, c < 0$ olarak kabul edildiği için t_{\max} parametresinin eşitliği aşağıda (4.4.3) numaralı eşitliği ile verilmiştir.

$$t_{\max} = -\frac{b + \sqrt{b^2 - 8cd}}{4c} \quad (4.4.3)$$

Bulunan t_{\max} değeri (4.4.1) numaralı denklemde yerine yazıldığında süt veriminin ulaştığı en yüksek seviye (y_{\max}) elde edilir.

$$y_{\max} = y \left(t = -\frac{b + \sqrt{b^2 - 8cd}}{4c} \right) = a + \frac{\left(\sqrt{b^2 - 8cd} - 3b \right) \left(b + \sqrt{b^2 - 8cd} \right)}{16c} + d \ln \left(-\frac{b + \sqrt{b^2 - 8cd}}{4c} \right) \quad (4.4.4)$$

Laktasyonun üçüncü aşamasında gerçekleşen durumda, süt veriminin kuruya çıkmaya kadar ki geçen sürede azalma trendine girmesi, azalma hızının azaldığı anı yani denklemin büküm noktasının zaman değerini (t_i) bulmak için öncelikle ikinci türev hesaplanmalıdır.

$$y'' = \frac{d^2 y}{dt^2} = 2c - \frac{d}{t^2} \quad (4.4.5)$$

İkinci türevin sıfıra eşitlenmesi ile t_i elde edilir.

$$y'' = \frac{d^2 y}{dt^2} = 2c - \frac{d}{t^2} = 0$$

eşitliği çözüldüğünde;

$$\frac{\sqrt{2cd}}{2c}, -\frac{\sqrt{2cd}}{2c}$$

olacak şekilde iki adet eşlenik çözüm elde edilir. Yukarıda verilen iki eşlenik çözümden hangisinin anlamlı hangisinin anlamsız olduğu aslında parametrelerin tahmini ile netleşir. t_i değeri, laktasyon boyunca hayvanın süt veriminin azalmaya başladığı an olduğu için bir tane olması gerekir. Yapılan örnek çalışmalarda, t_i değeri olarak, eşlenik çözümün negatif olanının alınması gerektiği anlaşılmıştır. $b > 0, c < 0$ olarak kabul edildiğinde t_i değerinin eşitliği (4.4.6) numaralı eşitlikte verilmiştir.

$$t_i = -\frac{\sqrt{2cd}}{2c} \quad (4.4.6)$$

Dönüm noktasında elde edilen süt miktarı (y_i) için t_i değerinin (4.4.1) numaralı denklemdaki değeri hesaplanır.

$$y_i = y \left(t = -\frac{\sqrt{2cd}}{2c} \right) = a - \frac{b\sqrt{2cd}}{2c} + \frac{d}{2} + d \ln \left(-\frac{\sqrt{2cd}}{2c} \right) \quad (4.4.7)$$

Azalan fazın eğimini (μ_m) yani t_i 'nin eğimini bulmak için t_i değeri birinci türevde yerine yazılarak;

$$\mu_m = \left(\frac{dy}{dt} \right) \left(t = -\frac{\sqrt{2cd}}{2c} \right) = b - 2\sqrt{2cd} \quad (4.4.8)$$

olarak elde edilir.

t_i, t_{\max} ve μ_m parametrelerinin gösterildiği eşitlikler incelendiğinde bu üç parametrenin b, c ve d parametrelerine bağlı olarak yazıldığı görülür. Bu nedenle b, c ve d parametrelerinin biyolojik anlamlı parametreler cinsinden eşitinin elde edilebilmesi için bu üç parametrenin ortak çözümü ile elde edilir. b, c ve d parametrelerinin t_i, t_{\max} ve μ_m parametreleri cinsinden eşitinin elde edilmiş olan eşitlikleri (4.4.9), (4.4.10) ve (4.4.11) numaralı eşitlikler ile gösterilmiştir.

$$b = \frac{(t_i^2 + t_{\max}^2) \mu_m}{(t_i - t_{\max})^2} \quad (4.4.9)$$

$$c = -\frac{\mu_m t_{\max}}{2(t_i - t_{\max})^2} \quad (4.4.10)$$

$$d = -\frac{\mu_m t_{\max} t_i^2}{(t_i - t_{\max})^2} \quad (4.4.11)$$

a parametresinin anlamlı parametrelere bağlı bir eşitliğinin elde edilebilmesi için eşitliği kullanılır. Öncelikli olarak a ve y_{\max} parametresinin (4.4.4) numaralı eşitlikte yer değiştirmesi gerekir.

$$a = \frac{\left(\frac{-b + \sqrt{b^2 - 8cd}}{4c} \right) \left(\frac{3b + \sqrt{b^2 - 8cd}}{4c} \right)}{4c} + d \ln \left(\frac{-b + \sqrt{b^2 - 8cd}}{4c} \right) - y_{\max} \quad (4.4.12)$$

Yukarıda elde edilen a parametresinin eşitliğinde b, c ve d parametrelerinin olduğu görülmektedir. (4.4.9), (4.4.10) ve (4.4.11) numaralarla verilen eşitlikler, (4.4.12) numaralı eşitlikte yerlerine yazılıp sadeleştirme işlemi yapıldığında a parametresinin t_i, t_{\max}, y_{\max} ve μ_m parametrelerin bağlı eşitliği aşağıda (4.4.13) numaralı eşitlikte verilmiştir.

$$a = \frac{\left(\ln(t_{\max})^{2\mu_m t_{\max} t_i^2} - \mu_m t_{\max} (2t_i^2 - t_{\max}^2) \right)}{4(t_i - t_{\max})^2} + y_{\max} \quad (4.4.13)$$

Kuadratik logaritmik modelin biyolojik anlamlı parametrelere bağlı olarak ifade edilebilmesi için (4.4.9), (4.4.10), (4.4.11) ve (4.4.13) numaralı eşitliklerin (4.4.1) numaralı eşitlikte yerlerine yazılması gerekir. (4.4.14) numaralı eşitlik ile kuadratik logaritmik modelin biyolojik anlamlı parametrelere göre yeniden düzenlenmiş biçimi gösterilmiştir.

$$y = \frac{\left(\ln\left(\frac{t_{\max}}{t}\right)^{\left(\mu_m t_{\max} t_i^2\right)} + 2\mu_m \left((2t - t_{\max}) \left(t_{\max}^2 + 2t_i^2 \right) - t_{\max} t^2 \right) \right)}{(t_i - t_{\max})^2} + 4y_{\max} \quad (4.4.14)$$

5. BULGULAR

Bu bölüm içerisinde literatür özetleri bölümünde yer alan laktasyon modelleri içerisinde, biyolojik anlamlı parametrelere göre yeniden düzenlenme aşamaları anlatılmamış olan laktasyon modellerinin, çizelgeler halinde düzenlenme aşamaları anlatılacaktır. İlk olarak biyolojik anlamlı parametrelere yeniden düzenlenmesi hedeflenen 11 model çizelge 5.1’ de gösterilmiştir.

Çizelge 5.1 Laktasyon Modelleri

LAKTASYON MODELLERİ		MODELLERİN DENKLEMLERİ
Model 1	Üstel fonksiyon (Brody ve ark., 1923)	$y = ae^{-ct}$
Model 2	Üstel fonksiyon (Brody ve ark., 1924)	$y = ae^{-ct} - ae^{-bt}$
Model 3	Ters (İnvers) Polinomial Model (Nelder,1966)	$y = \frac{t}{at^2 + bt + c}$
Model 4	Dave,1971	$y = -ct^2 + bt + a$
Model 5	Cobby ve Lee Du, 1978	$y = a - bt - ae^{-ct}$
Model 6	Logaritmik Lineer Model (Singh ve Gopal,1982)	$a + bt + c \ln(t)$
Model 7	Jenkins ve Ferrell,1984	$y = ate^{-ct}$
Model 8	Wilmink,1987	$y = a + be^{-kt} + ct$
Model 9	Ali ve Schaeffer,1987	$y = a + bt + ct^2 + d \ln\left(\frac{1}{t}\right) + f \ln\left(\frac{1}{t^2}\right)$
Model 10	Karışık Logaritmik Model (Guo ve Swalve, 1995)	$a + b\sqrt{t} + c \ln(t)$
Model 11	Cappio-Borlino Modeli (Cappio-Borlino,1995)	$y = at^{be^{-ct}}$

Çizelge 5.1’ de ki modellerin birinci ve ikinci türevleri sırasıyla çizelge 5.2 ve çizelge 5.3’ de gösterilmiştir.

Çizelge 5.2 Laktasyon Modellerinin Birinci Türevleri

LAKTASYON MODELLERİ	MODEL DENKLEMLERİNİN BİRİNCİ TÜREVLERİ
Model 1	$y' = -ace^{-ct}$
Model 2	$y' = -ace^{-ct} + abe^{-bt}$
Model 3	$y' = \frac{-at^2 + 2bt + c}{(at^2 + bt + c)^2}$
Model 4	$y' = -2ct + b$
Model 5	$y' = -b + ace^{-ct}$
Model 6	$y' = b + \frac{c}{t}$
Model 7	$y' = ae^{-ct} - atce^{-ct}$
Model 8	$y' = -bke^{-kt} + c$
Model 9	$y' = b + 2ct - \frac{d}{t} - \frac{2f}{t}$
Model 10	$y' = \frac{b}{2\sqrt{t}} + \frac{c}{t}$
Model 11	$y' = at^{be^{-ct}} \left(-bce^{-ct} \ln(t) + \frac{be^{-ct}}{t} \right)$

Çizelge 5.3 Laktasyon Modellerinin İkinci Türevleri

LAKTASYON MODELLERİ	MODEL DENKLEMLERİNİN İKİNCİ TÜREVLERİ
Model 1	$y'' = ac^2 e^{-ct}$
Model 2	$y'' = ac^2 e^{-ct} - ab^2 e^{-bt}$
Model 3	$y'' = \frac{-6at - 2b}{(at^2 + bt + c)^2} + \frac{2t(2at + b)^2}{(at^2 + bt + c)^3}$
Model 4	$y'' = -2c$
Model 5	$y'' = -ac^2 e^{-ct}$
Model 6	$y'' = -\frac{c}{t^2}$
Model 7	$y'' = -2ace^{-ct} + atc^2 e^{-ct}$
Model 8	$y'' = bk^2 e^{-kt}$
Model 9	$y'' = 2c + \frac{d + 2f}{t^2}$
Model 10	$y'' = -\frac{b}{4t^{3/2}} - \frac{c}{t^2}$
Model 11	$y'' = at^{be^{-ct}} \left((be^{-ct}) \left(-c \ln(t) + \frac{1}{t} \right)^2 + \left(c^2 e \ln(t) - \frac{2c-1}{t^2} \right) \right) be^{-ct}$

Çizelge 5.2' de gösterilen modellerin birinci türevleri kullanılarak elde edilen t_{\max} ve y_{\max} değerleri çizelge 5.4' de gösterilmiştir.

Çizelge 5.4 Laktasyon modellerinin t_{\max} ve y_{\max} değerleri

LAKTASYON MODELLERİ	t_{\max} ve y_{\max} değerleri
Model 1	Çözüm yok
Model 2	$t_{\max} = -\frac{\ln\left(\frac{c}{b}\right)}{b-c}$ $y_{\max} = ae \frac{c \ln\left(\frac{c}{b}\right)}{b-c} - ae \frac{b \ln\left(\frac{c}{b}\right)}{b-c}$
Model 3	$t_{\max} = -\frac{\sqrt{ac}}{a}$ $y_{\max} = -\frac{\sqrt{ac}}{a\left(2c - \frac{b\sqrt{ac}}{a}\right)}$
Model 4	$t_{\max} = \frac{b}{2c}$ $y_{\max} = \frac{b^2}{4c} + a$
Model 5	$t_{\max} = -\frac{\ln\left(\frac{b}{ac}\right)}{c}$ $y_{\max} = a + \frac{b \ln\left(\frac{b}{ac}\right)}{c} - \frac{b}{c}$
Model 6	$t_{\max} = -\frac{c}{b}$ $y_{\max} = a - c + c \ln\left(-\frac{c}{b}\right)$
Model 7	$t_{\max} = \frac{1}{c}$ $y_{\max} = \frac{a}{ce}$

Çizelge 5.4 Laktasyon modellerinin t_{\max} ve y_{\max} değerleri (devamı)

Model 8	$t_{\max} = -\frac{1}{k} \ln\left(\frac{c}{bk}\right)$ $y_{\max} = a + \frac{c}{k} \left(1 - \ln\left(\frac{c}{bk}\right)\right)$
Model 9	$t_{\max} = -\frac{b + \sqrt{b^2 + 8cd + 16cf}}{4c}$ $y_{\max} = a + \frac{\left(\sqrt{b^2 + 8cd + 16cf} - b\right)\left(b + \sqrt{b^2 + 8cd + 16cf}\right)}{16c}$ $+ \ln(-1)^d \left(\frac{4c}{\left(b + \sqrt{b^2 + 8cd + 16cf}\right)}\right)^{2f+d}$
Model 10	$t_{\max} = \left(\frac{2c}{b}\right)^2$ $y_{\max} = a + 2b\sqrt{\frac{c^2}{b^2}} + c \ln\left(\frac{2c}{b}\right)^2$
Model 11	$t_{\max} = \lambda$ $y_{\max} = a\lambda be^{-c\lambda}$

Çizelge 5.4' de verilen eşitlikler içerisinde model 11 için verilen eşitlikte yer alan λ parametresi $c\text{LambertW}\left(\frac{1}{c}\right)$ ifadesini temsil etmek için kullanılmıştır.

Çizelge 5.3' de modellerin ikinci türevleri kullanılarak t_i ve y_i değerleri çizelge 5.5' de gösterilmiştir.

Çizelge 5.5 Laktasyon Modellerinin t_i ve y_i Değerleri

LAKTASYON MODELLERİ	t_i ve y_i değerleri
Model 1	Çözüm yok
Model 2	$t_i = -\frac{\ln\left(\frac{c^2}{b^2}\right)}{b-c}$ $y_i = a\epsilon \frac{c \ln\left(\frac{c^2}{b^2}\right)}{b-c} - a\epsilon \frac{b \ln\left(\frac{c^2}{b^2}\right)}{b-c}$
Model 3	$t_i = \frac{4^{1/3} \left(c \left(b + \sqrt{-4ac + b^2} \right) a \right)^{1/3}}{2a} + \frac{c 4^{2/3}}{2 \left(c \left(b + \sqrt{-4ac + b^2} \right) a \right)^{1/3}}$ $y_i = \left[\begin{array}{l} t \\ a \left(\frac{4^{1/3} \left(c \left(b + \sqrt{-4ac + b^2} \right) a \right)^{1/3}}{2a} + \frac{c 4^{2/3}}{2 \left(c \left(b + \sqrt{-4ac + b^2} \right) a \right)^{1/3}} \right)^2 \\ + b \left(\frac{4^{1/3} \left(c \left(b + \sqrt{-4ac + b^2} \right) a \right)^{1/3}}{2a} + \frac{c 4^{2/3}}{2 \left(c \left(b + \sqrt{-4ac + b^2} \right) a \right)^{1/3}} \right) + c \end{array} \right]$
Model 4	Çözüm yok
Model 5	Çözüm yok
Model 6	Çözüm yok
Model 7	$t_i = \frac{2}{c}$ $y_i = \frac{2a\epsilon^{-2}}{c}$
Model 8	Çözüm yok

Çizelge 5.5 Laktasyon Modellerinin t_i ve y_i Değerleri (devamı)

Model 9	$t_i = -\frac{\sqrt{-2c(d+2f)}}{2c}$ $y_i = a - \frac{b\sqrt{-2c(d+2f)}}{2c} - \frac{d}{2} - f$ $+ d \ln\left(-\frac{2c}{\sqrt{-2c(d+2f)}}\right) + f \ln\left(-\frac{2c}{d+2f}\right)$
Model 10	$t_i = \left(\frac{4c}{b}\right)^2$ $y_i = a + 4b\sqrt{\frac{c^2}{b^2}} + 2c \ln\left(\frac{4c}{b}\right)$
Model 11	$t_i = \varphi$ $y_i = a\varphi b e^{(-c\varphi)}$

Çizelge 5.3' de verilen t_i değerlerinin çizelge 5.2' de verilen modellerin birinci türevlerinde ki karşılığı olan μ_m değerleri çizelge 5.6' da gösterilmiştir.

Çizelge 5.6 Laktasyon Modellerinin μ_m Değeri

LAKTASYON MODELLERİ	μ_m Değeri
Model 1	Çözüm yok
Model 2	$-\frac{ace}{b-c} \frac{2c \ln\left(\frac{c}{b}\right)}{b-c} + \frac{2b \ln\left(\frac{c}{b}\right)}{b-c}$
Model 3	0
Model 4	Çözüm yok
Model 5	Çözüm yok
Model 6	Çözüm yok
Model 7	$-ae^{-2}$

Çizelge 5.6 Laktasyon Modellerinin μ_m Değeri (devamı)

Model 8	Çözüm yok
Model 9	$b - \sqrt{-2c(d+2f)} + \frac{2dc+4fc}{\sqrt{-2c(d+2f)}}$
Model 10	$\frac{b}{8\sqrt{\left(\frac{c}{b}\right)^2}} + \frac{b^2}{16c}$
Model 11	$-a\varphi be^{-c\varphi} - 1 be^{-c\varphi} (\ln(\varphi) \delta c - 1)$

Çizelge 5.5 ve çizelge 5.6' da model 11 için verilen eşitliklerde yer alan φ parametresi

$$\varphi = \text{RootOf} \left(-Z^2 bc^2 e^{-ce^{-Z}} + 2 - Z + e^{2-Z} - Zc^2 - 2 - Zbce^{-Z} - ce^{-Z} - 2ce^{-Z} + be^{-ce^{-Z}} - 1 \right)$$

ifadesini temsil etmek için kullanılmıştır.

Çizelge 5.4, çizelge 5.5 ve çizelge 5.6'da ki biyolojik anlamlı parametrelerin eşitlikleri kullanılarak her modelde ki a, b, c gibi parametrelerin biyolojik anlamlı parametrelere bağlı eşitlikleri çizelge 5.7' de gösterilmiştir.

Çizelge 5.7 a, b, c vb. Parametrelerin $t_{\max}, y_{\max}, t_i, y_i, \mu_m$ Parametreleri Cinsinden Eşiti

Laktasyon Modelleri	a, b, c vb. Parametrelerin $t_{\max}, y_{\max}, t_i, y_i, \mu_m$ Parametreler Cinsinden Eşiti
Model 1	Çözüm yok
Model 2	a, b, c parametrelerinin çözümlerinde <i>RootOf</i> ifadesi ve <i>LambertW</i> fonksiyonu yer aldığı için elde edilen eşitlikler buraya eklenmemiştir.

Çizelge 5.7 a, b, c vb. Parametrelerin $t_{\max}, y_{\max}, t_i, y_i, \mu_m$ Parametreleri Cinsinden Eşiti (devamı)

Model 3	$a = \frac{t_{\max}^2}{y_{\max}(t_i^3 - 3t_it_{\max}^2 + 2t_{\max}^3)}$ $b = \frac{t_i(t_i^2 - 3t_{\max}^2)}{y_{\max}(t_i^3 - 3t_it_{\max}^2 + 2t_{\max}^3)}$ $c = \frac{t_{\max}^4}{y_{\max}(t_i^3 - 3t_it_{\max}^2 + 2t_{\max}^3)}$
Model 4	Çözüm yok
Model 5	Çözüm yok
Model 6	Çözüm yok
Model 7	$(a_1, c_1) = \left(-\mu_m e^2, \frac{2}{t_i}\right), (a_2, c_2) = \left(-\mu_m e^2, \frac{1}{t_{\max}}\right)$ $(a_3, c_3) = \left(\frac{ey_{\max}}{t_{\max}}, \frac{1}{t_{\max}}\right), (a_4, c_4) = \left(\frac{2ey_{\max}}{t_i}, \frac{2}{t_i}\right)$
Model 8	Çözüm yok
Model 9	$a = \text{tanımsız}$ $b = \frac{\mu_m(t_i^2 + t_{\max}^2)}{(t_i - t_{\max})^2}$ $c = -\frac{\mu_m t_{\max}}{2(t_i - t_{\max})^2}$ $d = \text{tanımsız}$ $f = \text{tanımsız}$
Model 10	a, b, c parametrelerinin çözümlerinde <i>RootOf</i> ifadesi aldığı için elde edilen eşitlikler buraya eklenmemiştir

Çizelge 5.7 a, b, c vb. Parametrelerin $t_{\max}, y_{\max}, t_i, y_i, \mu_m$ Parametreleri Cinsinden Eşiti (devamı)

Model 11	$a = \frac{y_{\max}}{\frac{\ln(t_{\max}) \left(\ln(t_{\max})^2 t_{\max}^2 + 2 \ln(t_{\max}) t_i t_{\max} - t_i^2 \ln(t_i) \right) e^{\frac{t_i - t_{\max}}{\ln(t_{\max}) t_{\max}}}}{(\ln(t_i) t_i - \ln(t_{\max}) t_{\max})^2}}$ $b = \frac{e^{\left(\frac{t_i}{\ln(t_{\max}) t_{\max}} \right)} (\ln(t_i) t_i - \ln(t_{\max}) t_{\max})^2}{(\ln(t_i) t_i - \ln(t_{\max}) t_{\max})^2}$ $c = \frac{1}{\ln(t_{\max}) t_{\max}}$
-----------------	---

Çizelge 5.8 $t_{\max}, y_{\max}, t_i, y_i, \mu_m$ Parametrelerine Göre Düzenlenmiş Laktasyon Modellerinin Denklemleri

Laktasyon Modelleri	Laktasyon modellerinin yeni denklemleri
Model 1	Çözüm yok
Model 2	Çözüm yok
Model 3	$y = \frac{t y_{\max} (t_i + 2 t_{\max}) (t_i - t_{\max})^2}{t_{\max}^4 + t(t - 3 t_i) t_{\max}^2 + t_i^3}$
Model 4	Çözüm yok
Model 5	Çözüm yok
Model 6	Çözüm yok
Model 7	$y_1 = -e^{2 \mu_m t} e^{-\frac{2t}{t_i}}, y_2 = -e^{2 \mu_m t} e^{-\frac{t}{t_{\max}}}$ $y_3 = \frac{y_{\max} t e^{\left(1 - \frac{t}{t_{\max}}\right)}}{t_{\max}}, y_4 = \frac{2 y_{\max} t e^{\left(1 - \frac{2t}{t_i}\right)}}{t_i}$

Çizelge 5.8 $t_{\max}, y_{\max}, t_i, y_i, \mu_m$ Parametrelerine Göre Düzenlenmiş Laktasyon Modellerinin Denklemleri (devamı)

Model 8	Çözüm yok
Model 9	Çözüm yok
Model 10	Çözüm yok
Model 11	$y = \frac{y_{\max} t^{\frac{t_i - t}{\ln(t_{\max}) t_{\max} - \ln(t_i) t_i^2}}}{e^{\frac{\ln(t_{\max}) (\ln(t_i) t_i - \ln(t_{\max}) t_{\max})^2 e^{\frac{t_i - t_{\max}}{\ln(t_{\max}) t_{\max}}}}{(\ln(t_i) t_i - \ln(t_{\max}) t_{\max})^2}}}$

Çizelge 5.1.1’ de verilen modellerin biyolojik anlamlı parametreler cinsinden ifade edilebilmesi için her modeli oluşturan denklemin içerdiği laktasyon sabiti (a, b, c, d, f, k) adeti kadar biyolojik anlamlı parametreye ihtiyaç vardır. Çünkü biyolojik anlamlı parametrelere bağlı denklemler yazılmak istendiğinde önce laktasyon sabitleri için biyolojik anlamlı parametrelere bağlı eşitlik elde edilir. Bu eşitliğin elde edilebilmesi için yeterli sayıda biyolojik anlamlı parametreye ihtiyaç duyulur. Çizelgelere bakıldığında her model için yeterli sayıda biyolojik anlamlı parametre elde edilememiştir.

Bu bölümdeki tüm çizelgelere bakıldığı zaman 11 modelin de, iki kez türevlenebildiği görülür. Ancak birinci ve ikinci türeve bağlı olarak elde edilen biyolojik anlamlı parametreler ($t_{\max}, y_{\max}, t_i, y_i, \mu_m$) 11 modelin hepsi için elde edilememiştir. t_{\max} ve y_{\max} parametreleri sadece model 1 için elde edilememiştir. t_i ve y_i parametreleri model 1, model 4, model 5, model 6 ve model 8 için elde edilememiştir. t_i parametresi olmayan modellerde μ_m parametresi de elde edemeyiz. Bu durumda μ_m parametresi model 1, model 4, model 5, model 6 ve model 8 için elde edilememiştir.

Model 1' in orijinal denkleminde iki adet parametre, bu nedenle en az iki adet biyolojik anlamlı parametreye ihtiyaç duyulur. Ancak modelin birinci ve ikinci türevleri üstel fonksiyon formunda olduğu için hiçbir t değeri için sıfır olmaz. Bu durumda da t_{\max} ve t_i parametreleri elde edilemez. Bu iki parametreye bağlı olarak elde edilmesi gereken y_{\max}, y_i, μ_m parametreleri de elde edilememiş olacaktır. Böylece model 1 için biyolojik anlamlı parametre elde edilememiş olup model 1' i biyolojik anlamlı parametrelere bağlı olarak ifade edilemez.

Model 2 için en az üç adet biyolojik anlamlı parametreye ihtiyaç vardır. Bu modelde birinci ve ikinci türevler elde edilmiş olup beş adet biyolojik anlamlı parametre eşitliği vardır. $t_{\max}, y_{\max}, t_i, y_i, \mu_m$ parametrelerini eşitliklerinin üçlü kombinasyonları ile yapılan çözümlerde laktasyon sabitleri (a, b, c) için çözüm bulunamamış ya da elde edilen çözümler içerdikleri ifadeler (*RootOf*) yüzünden kullanışsızdır. *RootOf* terimi kullanılan bilgisayar programında tek değişkenli terimin köklerini ifade etmektedir. Bu ortaya bir belirsizlik çıkardığı için model 2' de ki laktasyon sabitleri (a, b, c) için biyolojik anlamlı parametreler bağlı anlamlı bir eşitlik elde edilemediği için model 2 biyolojik anlamlı parametrelere bağlı olarak ifade edilememiştir.

Model 3' ün orijinal denkleminde üç adet parametre vardır ve her parametre için biyolojik anlamlı parametrelere bağlı olarak bir eşitlik elde edilmiştir. Elde edilen bu eşitlikler ile model 3' ün denklemini biyolojik anlamlı parametrelere bağlı olarak ifade edilmiştir.

Model 4' ü oluşturan denklemde üç adet laktasyon sabiti vardır. Ancak bu model için sadece t_{\max}, y_{\max} parametreleri elde edilmiştir. Model 4' ün ikinci türevi t parametresi içermediği için yani ikinci türevin reel sayıya eşit olması nedeniyle t_i parametresi yoktur. t_i parametresinin olmaması y_i, μ_m parametrelerinin elde edilememesine neden olmuştur. Yeterli sayıda biyolojik anlamlı parametrenin elde edilememesinden dolayı model 4 biyolojik anlamlı parametrelere bağlı olarak ifade edilememiştir.

Model 5' i oluşturan denklemde üç adet laktasyon sabiti vardır. Ancak bu model için sadece t_{\max}, y_{\max} parametreleri elde edilmiştir. Model 5' in ikinci türevi üstel fonksiyon formunda olduğu için t_i parametresi yoktur. t_i parametresinin olmaması y_i, μ_m parametrelerinin elde edilememesine neden olmuştur. Yeterli sayıda biyolojik anlamlı parametrenin elde edilememesinden dolayı model 5 biyolojik anlamlı parametrelere bağlı olarak ifade edilememiştir.

Model 6 için en az üç adet biyolojik anlamlı parametreye ihtiyaç vardır. Bu model için t_{\max}, y_{\max} parametreleri elde edilmiştir. Ancak ikinci türevi oluşturan denklemden kaynaklı olarak t_i parametresi elde edilemez. t_i parametresinin olmaması y_i, μ_m parametrelerinin elde edilememesine neden olmuştur. Yeterli sayıda biyolojik anlamlı parametrenin elde edilememesinden dolayı model 6 biyolojik anlamlı parametrelere bağlı olarak ifade edilememiştir.

Model 7' ye bakıldığında orijinal denklemde iki parametre ve yapılan işlemler sonucunda elde edilen beş biyolojik anlamlı parametreye sahip olduğu görülür. Bu modelin orijinal denklemindeki iki parametre biyolojik anlamlı parametreler cinsinden ifade edilmek istendiği zaman her iki parametre için de dört farklı eşitlik ortaya çıkar. Bu dört farklı eşitlik model 7' nin orijinal denkleminde sırasıyla yazıldığında, ortaya bu model için dört tane biyolojik anlamlı parametrelere bağlı yeni denklem ortaya çıkar.

Model 8' i oluşturan denklemde dört adet laktasyon sabiti vardır. Ancak bu model için sadece t_{\max}, y_{\max} parametreleri elde edilmiştir. Model 8' in ikinci türevi üstel fonksiyon formunda olduğu için t_i parametresi yoktur. t_i parametresinin olmaması y_i, μ_m parametrelerinin elde edilememesine neden olmuştur. Yeterli sayıda biyolojik anlamlı parametrenin elde edilememesinden dolayı model 8 biyolojik anlamlı parametrelere bağlı olarak ifade edilememiştir.

Model 9' un orijinal denkleminde beş adet parametre vardır ve her parametre için biyolojik anlamlı parametrelere bağlı olarak bir eşitlik elde edilememiştir. b, c parametreleri için biyolojik anlamlı parametrelere bağlı bir eşitlik elde edilmiştir.

Ancak a, d, f parametreleri için elde edilen eşitlikler tanımıdır. Bundan dolayı model 9 biyolojik anlamlı parametrelere bağlı olarak yazılamaz.

Model 10 için en az üç adet biyolojik anlamlı parametreye ihtiyaç vardır. Bu model de birinci ve ikinci türevler elde edilmiş olup beş adet biyolojik anlamlı parametre eşitliği vardır. $t_{\max}, y_{\max}, t_i, y_i, \mu_m$ parametrelerini eşitliklerinin üçlü kombinasyonları ile yapılan çözümlerde laktasyon sabitleri (a, b, c) için çözüm bulunamamış ya da elde edilen çözümler içerdikleri ifadeler yüzünden kullanışsızdır. *RootOf* terimi tek değişkenli terimin köklerini ifade etmektedir. *LambertW* fonksiyonu karmaşık sayılar için çözüm ifade eder. *RootOf* ve *LambertW* fonksiyonu ortaya bir belirsizlik çıkardığı için model 10' da ki laktasyon sabitleri (a, b, c) için biyolojik anlamlı parametreler bağlı anlamlı bir eşitlik elde edilemediği için model 10 biyolojik anlamlı parametrelere bağlı olarak ifade edilememiştir.

Model 11 incelendiğinde, orijinal denkleminde üç adet parametre ve yapılan işlemler sonucunda elde edilen beş biyolojik anlamlı parametreye sahip olduğu görülür. Elde edilen biyolojik anlamlı ifadelerin eşitlikleri *RootOf* ve *LambertW* fonksiyonunu içermektedir. Ancak bu parametrelerden t_{\max}, y_{\max}, t_i parametrelerinin ortak çözümü ile laktasyon sabitleri (a, b, c) için elde edilen eşitlikte *RootOf* ve *LambertW* fonksiyonunu bulunmamaktadır. Bu nedenle model 11 biyolojik anlamlı parametrelere bağlı olarak ifade edilmiştir.

6. SONUÇ

Bu çalışmada laktasyon dönemini matematiksel olarak ifade eden modellerden on beş modelin denklemleri üzerinde durulmuştur. Bu on beş model içerisinde eksik gama fonksiyonu, parabolik üstel model, üçüncü dereceden polinomial modelin ve kuadartik logaritmik modelin denklemlerinin biyolojik anlamlı parametreler cinsinden düzenlenmiş biçimlerinin matematiksel olarak elde edilmiş aşamaları anlatılmıştır. Kalan on bir model için beşinci bölümde yapılan matematiksel işlemler çizelgeler ile gösterilmiş olup buradaki modellerin herbirinin biyolojik anlamlı parametreler cinsinden düzenlenemediği görülmüştür.

Bu tezde incelenmiş olan on beş model içerisinde sadece sekiz tane model biyolojik anlamlı parametrelere $(t_{\max}, y_{\max}, t_i, y_i, \mu_m)$ bağlı olarak ifade edilebilmiştir. Bu modeller; eksik gama fonksiyonu (Wood,1967), parabolik üstel fonksiyonu (Sikka,1950), üçüncü dereceden polinomial model (Sauvant ve Fehr, 1975), kuadratik logaritmik model (Singh ve Gopal, 1982), ters (invers) polinomial model (Nelder,1966), Jenkins ve Ferrellsau (1984), karışık logaritmik model (Guo ve Swalve, 1995) ve Cappio-Borlino modelidir (1995).

Laktasyon modellerinin orijinal denklemlerine yapılan matematiksel işlemler sonucunda model denkleminin yazılışında farklılıklar meydana gelir. Bu farklılığın sebebi orijinal denklemdeki parametreler (a, b, c, d, f, k) yerine, bu parametreler için elde edilen biyolojik anlamlı parametrelere $(t_{\max}, y_{\max}, t_i, y_i, \mu_m)$ bağlı eşitliklerin yazılmasından kaynaklanmaktadır. Bu nedenle yeni elde edilen denklemler genelde daha karışık ve uzun bir şekilde elde edilmişlerdir. Biyolojik anlamlı parametrelere $(t_{\max}, y_{\max}, t_i, y_i, \mu_m)$ bağlı olarak ifade edilen denklemlerde parametrelerin sayısal değerlerinin tahmin edilebilirliği çok daha kolaydır. Çünkü bir laktasyon sürecinde düzenli aralıklarla (gün, hafta) kayıt altına alınan süt miktarından biyolojik anlamlı parametrelerin sayısal değerleri elde edilebilmektedir. Yani kayıt altına alınan bu süt miktarı ile en fazla verimi (y_{\max}) , en fazla verimin olduğu zamanı (t_{\max}) , süt veriminin azalma hızının azaldığı zamanı (t_i) ve bu zamandaki süt verimini (y_i) kolayca elde edilebilir. μ_m parametresinin elde edilmesi içinse kayıt altına alınan süt

verilerinin grafik (laktasyon eğrisi) ile gösterildiğinde t_i 'nin bulunduğu noktanın eğimi hesaplanmalıdır. Elde edilen sayısal değerler biyolojik anlamlı parametrelere $(t_{\max}, y_{\max}, t_i, y_i, \mu_m)$ göre düzenlenmiş denklemlerde yerine yazılması sonucunda bu denklemler zamana (t) bağlı tek değişkene sahip bir denklem formatına dönüşürler. Bu formata dönüşen laktasyon modellerinin yorumlanması ve bir süt hayvanının laktasyonu hakkında doğru bir fikre sahip olmak daha kolay bir hale gelmiş olacaktır.

Bu tezde yapılan çalışmalar laktasyon modellerinin oluşturan denklemlerdeki parametrelerin biyolojik anlamlı parametrelere dönüştürülerek laktasyon modellerinin denklemlerini düzenlemeye yönelik işlemleri içerdiği için bu tez teorik olup bu çalışma içerisinde herhangi bir sayısal veriye yer verilmemiştir. Bundan sonraki çalışmalarda araştırmacılar, biyolojik anlamlı parametreler ile ifade edilen modeller için sayısal veriler kullanarak anlamlı parametreleri tahmin edebilir ve bunlar hakkında yorumlar yapabilirler.

7. KAYNAKLAR

- Ali, T. E., & Schaeffer, L. R. (1987). Accounting For Covariances Among Test Day Milk Yields In Dairy Cows. *Canadian Journal of Animal Science*, 67(3), 637-644. <https://doi.org/10.4141/cjas87-067>
- Berberoğlu, E. (2018). Süt sığırlarında zaman serisi yöntemleriyle laktasyon eğrilerinin modellenmesi [DoctoralThesis, Fen Bilimleri Enstitüsü]. <https://acikbilim.yok.gov.tr/handle/20.500.12812/377470>
- Bouallegue, M., & M'Hamdi, N. (2020). Mathematical Modeling of Lactation Curves: A Review of Parametric Models. İçinde N. M'Hamdi (Ed.), *Lactation in Farm Animals—Biology, Physiological Basis, Nutritional Requirements, and Modelization*. IntechOpen. <https://doi.org/10.5772/intechopen.90253>
- Brody, S., Ragsdale, A. C., & Turner, C. W. (1923). The Rate Of Decline Of Milk Secretion With The Advance Of The Period Of Lactation. *Journal of General Physiology*, 5(4), 441-444. <https://doi.org/10.1085/jgp.5.4.441>
- Brody, S., Turner, C. W., & Ragsdale, A. C. (1924). The Relation Between The Initial Rise And The Subsequent Decline Of Milk Secretion Following Parturition. *The Journal of General Physiology*, 6(5), 541-545.
- Cappio-Borlino, A., Pulina, G., & Rossi, G. (1995). A non-linear modification of Wood's equation fitted to lactation curves of Sardinian dairy ewes. *Small Ruminant Research*, 18(1), 75-79. [https://doi.org/10.1016/0921-4488\(95\)00713-U](https://doi.org/10.1016/0921-4488(95)00713-U)
- Cobby, J. M., & Du, Y. L. P. L. (1978). On fitting curves to lactation data. *Animal Science*, 26(2), 127-133. <https://doi.org/10.1017/S0003356100039532>
- Dave, B. K. (1971). First lactation curve of the Indian water buffalo. *JNKVV Res J*.
- Elahi Torshizi, M., Aslamenejad, A., Nassiri, M., & Farhangfar, H. (2011). Comparison and evaluation of mathematical lactation curve functions of Iranian primiparous Holsteins. *South African Journal of Animal Science*, 41(2), 104-115. <https://doi.org/10.4314/sajas.v41i2.71013>
- Guo, Z., & Swalve, H. H. (1995). Modelling of the lactation curve as a sub-model in the evaluation of test day records. *Interbull Bulletin*, 11, Art. 11. <https://journal.interbull.org/index.php/ib/article/view/403>
- Güler, O. (2020). Atatürk Üniversitesi tarım işletmesi koşullarında yetiştirilen siyah alaca sığırlarda laktasyon eğrisi parametrelerinin ve persistensi değerlerinin farklı modellerle tespiti ve etkili çevre faktörlerinin belirlenmesi [DoctoralThesis, Fen Bilimleri Enstitüsü]. <https://acikbilim.yok.gov.tr/handle/20.500.12812/50901>
- Jenkins, T. G., & Ferrell, C. L. (1984). A note on lactation curves of crossbred cows. *Animal Science*, 39(3), 479-482. <https://doi.org/10.1017/S0003356100032232>
- Keskin, İ., ÇiLek, S., & İlhan, F. (2009). Lactation Curve Traits of Holstein Cows Raised at Polatlı State Farm. *Kafkas Üniversitesi Veteriner Fakültesi Dergisi*. <https://doi.org/10.9775/kvfd.2009.034-A>

- Macciotta, N. P. P., Dimauro, C., Rasso, S. P. G., Steri, R., & Pulina, G. (2011). The mathematical description of lactation curves in dairy cattle. *Italian Journal of Animal Science*, 10(4), e51. <https://doi.org/10.4081/ijas.2011.e51>
- Nelder, J. A. (1966). Inverse Polynomials, a Useful Group of Multi-Factor Response Functions. *Biometrics*, 22(1), 128-141. <https://doi.org/10.2307/2528220>
- Oda, V. (2019). Bazı sigmoidal büyüme modellerinin biyolojik anlamlı mekanik modellere dönüştürülmesi [MasterThesis, Fen Bilimleri Enstitüsü]. <https://acikbilim.yok.gov.tr/handle/20.500.12812/102350>
- Olori, V. E., Brotherstone, S., Hill, W. G., & McGuirk, B. J. (1999). Fit of standard models of the lactation curve to weekly records of milk production of cows in a single herd. *Livestock Production Science*, 58(1), 55-63. [https://doi.org/10.1016/S0301-6226\(98\)00194-8](https://doi.org/10.1016/S0301-6226(98)00194-8)
- Sauvant, D. ve Morand-Fehr, P. (1975). Lait de la chevre bileşiminin laktasyon ve evrim türlerinin sınıflandırılması. *Reç. Ovine Caprine*, 1, 90.
- Sikka, LC (1950). 424. Kalıtım ve çevreden etkilenen laktasyon çalışması. *Süt Ürünleri Araştırma Dergisi*, 17 (3), 231-252.
- Singh, R. P., & Gopal, R. (1982). Lactation curve analysis of buffaloes maintained under village conditions. *Indian Journal of Animal Sciences*.
- Wilmink, J. B. M. (1987). Adjustment of test-day milk, fat and protein yield for age, season and stage of lactation. *Livestock Production Science*, 16(4), 335-348. [https://doi.org/10.1016/0301-6226\(87\)90003-0](https://doi.org/10.1016/0301-6226(87)90003-0)
- Wood, PDP (1967). Sığırlarda laktasyon eğrisinin cebirsel modeli. *Tabiat*, 216 (5111), 164-165.
- Zwietering, M. H., Jongenburger, I., Rombouts, F. M., & van 't Riet, K. (1990). Modeling of the Bacterial Growth Curve. *Applied and Environmental Microbiology*, 56(6), 1875-1881. <https://doi.org/10.1128/aem.56.6.1875-1881.1990>

EKLER

Ek: Bilgisayar Programı Görüntüleri

```

> # y=laktasyon modelin denklemleri
> # z1= denklemin 1. türevi
> # z2= denklemin 2. türevi
> # t[max]= maximum verimin zaman değeri
> # y[max]= maximum verim
> # t[i]= azalma hızının düştüğü zaman değeri
> # y[i]= azalma hızının düştüğü anda ki verim değeri
> # mu[m]= spesifik büyüme hızı
> # Y= laktasyon modelinin biyolojik anlamlı parametrelere göre yeniden düzenlenmiş biçimi
>
>
> # 4.BÖLÜM ÇÖZÜMÜ
> restart :
> #Eksik Gama Fonksiyonu
> y := a·tb·exp(-c·t)
> z1 := diff(y, t)
> z2 := diff(z1, t)
> t[max] := b/c
> y[max] := eval(a·tb·exp(-c·t), t = b/c)
> solve(z1, t)
> solve(z2, t)

```

$$y := a t^b e^{-ct} \quad (1)$$

$$z1 := \frac{a t^b b e^{-ct}}{t} - a t^b c e^{-ct} \quad (2)$$

$$\text{simplify}(z1) \quad e^{-ct} a (t^{b-1} b - t^b c) \quad (3)$$

$$z2 := \frac{a t^b b^2 e^{-ct}}{t^2} - \frac{a t^b b e^{-ct}}{t^2} - \frac{2 a t^b b c e^{-ct}}{t} + a t^b c^2 e^{-ct} \quad (4)$$

$$\text{simplify}(z2) \quad a ((b^2 - b) t^{b-2} - 2 t^{b-1} b c + t^b c^2) e^{-ct} \quad (5)$$

$$\text{solve}(z1, t) \quad \frac{b}{c} \quad (6)$$

$$t_{\max} := \frac{b}{c} \quad (7)$$

$$y_{\max} := a \left(\frac{b}{c} \right)^b e^{-b} \quad (8)$$

$$\text{solve}(z2, t) \quad (9)$$

$$\frac{b + \sqrt{b}}{c}, \frac{b - \sqrt{b}}{c} \quad (9)$$

$$> t[i] := \frac{b + \sqrt{b}}{c}$$

$$t_i := \frac{b + \sqrt{b}}{c} \quad (10)$$

$$> y[i] := \text{eval}\left(a \cdot t^b \cdot \exp(-c \cdot t), t = \frac{b + \sqrt{b}}{c}\right)$$

$$y_i := a \left(\frac{b + \sqrt{b}}{c}\right)^b e^{-b - \sqrt{b}} \quad (11)$$

$$> \text{mu}[m] := \text{eval}\left(zI, t = \frac{b + \sqrt{b}}{c}\right)$$

$$\mu_m := \frac{a \left(\frac{b + \sqrt{b}}{c}\right)^b b c e^{-b - \sqrt{b}}}{b + \sqrt{b}} - a \left(\frac{b + \sqrt{b}}{c}\right)^b c e^{-b - \sqrt{b}} \quad (12)$$

> restart :

$$> \text{solve}\left(\left\{t[i] = \frac{b + \sqrt{b}}{c}, \text{mu}[m] = \frac{a \left(\frac{b + \sqrt{b}}{c}\right)^b b c e^{-b - \sqrt{b}}}{b + \sqrt{b}}\right.\right.$$

$$\left.\left. - a \left(\frac{b + \sqrt{b}}{c}\right)^b c e^{-b - \sqrt{b}}, t[\text{max}] = \frac{b}{c}, \{a, b, c\}\right\}$$

$$\left. \left\{ a = -\frac{\mu_m t_i (t_i - t_{\text{max}})}{\frac{t_{\text{max}}^2}{t_i} - 2 t_i t_{\text{max}} + t_{\text{max}}^2} e^{-\frac{t_i^2 - 2 t_i t_{\text{max}} + t_{\text{max}}^2}{t_i}} - \frac{t_i t_{\text{max}}}{t_{\text{max}}}, b = \frac{t_{\text{max}}^2}{t_i^2 - 2 t_i t_{\text{max}} + t_{\text{max}}^2}, c \right. \right. \quad (13)$$

$$\left. \left. = \frac{t_{\text{max}}}{t_i^2 - 2 t_i t_{\text{max}} + t_{\text{max}}^2} \right\}$$

$$> a := -\frac{\mu_m t_i (t_i - t_{\text{max}})}{\frac{t_{\text{max}}^2}{t_i} - 2 t_i t_{\text{max}} + t_{\text{max}}^2} e^{-\frac{t_i^2 - 2 t_i t_{\text{max}} + t_{\text{max}}^2}{t_i}} - \frac{t_i t_{\text{max}}}{t_{\text{max}}}; b := \frac{t_{\text{max}}^2}{t_i^2 - 2 t_i t_{\text{max}} + t_{\text{max}}^2}; c :=$$

$$\frac{t_{\max}}{t_i^2 - 2 t_i t_{\max} + t_{\max}^2};$$

$$a := - \frac{\mu_m t_i (t_i - t_{\max})}{\frac{t_{\max}^2}{t_i^2 - 2 t_i t_{\max} + t_{\max}^2} - \frac{t_i t_{\max}}{t_i^2 - 2 t_i t_{\max} + t_{\max}^2}}$$

$$b := \frac{t_{\max}^2}{t_i^2 - 2 t_i t_{\max} + t_{\max}^2}$$

$$c := \frac{t_{\max}}{t_i^2 - 2 t_i t_{\max} + t_{\max}^2}$$

(14)

$$> Y := a \cdot b \cdot \exp(-c \cdot t)$$

$$Y := - \frac{\mu_m t_i (t_i - t_{\max}) t_i^{\frac{t_{\max}^2}{t_i^2 - 2 t_i t_{\max} + t_{\max}^2} - \frac{t_i t_{\max}}{t_i^2 - 2 t_i t_{\max} + t_{\max}^2}}{\frac{t_{\max}^2}{t_i^2 - 2 t_i t_{\max} + t_{\max}^2} - \frac{t_i t_{\max}}{t_i^2 - 2 t_i t_{\max} + t_{\max}^2}}$$

(15)

> restart :

> # Üstel Parabolik Modeli

$$> y := a \cdot \exp(b \cdot t - c \cdot t^2)$$

$$y := a e^{-c t^2 + b t}$$

(16)

$$> z1 := \text{diff}(y, t)$$

$$z1 := a (-2 c t + b) e^{-c t^2 + b t}$$

(17)

$$> z2 := \text{diff}(z1, t)$$

$$z2 := -2 a c e^{-c t^2 + b t} + a (-2 c t + b)^2 e^{-c t^2 + b t}$$

(18)

$$> \text{solve}(z2, t)$$

$$\frac{b}{2 c}$$

(19)

$$> t[\text{max}] := \frac{b}{2 c}$$

$$t_{\max} := \frac{b}{2 c}$$

(20)

$$> y[\text{max}] := \text{eval}\left(a \cdot \exp(b \cdot t - c \cdot t^2), t = \frac{b}{2 c}\right)$$

$$y_{\max} := a e^{\frac{b^2}{4 c}}$$

(21)

$$\begin{aligned} &> \text{solve}(z2, t) \\ &\qquad \frac{b + \sqrt{2} \sqrt{c}}{2c}, \frac{b - \sqrt{2} \sqrt{c}}{2c} \end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned} &> t[i] := \frac{b + \sqrt{2} \sqrt{c}}{2c} \\ &\qquad t_i := \frac{b + \sqrt{2} \sqrt{c}}{2c} \end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned} &> y[i] := \text{eval}\left(a \cdot \exp(b \cdot t - c \cdot t^2), t = \frac{b + \sqrt{2} \sqrt{c}}{2c}\right) \\ &\qquad y_i := a e^{-\frac{(b + \sqrt{2} \sqrt{c})^2}{4c} + \frac{b(b + \sqrt{2} \sqrt{c})}{2c}} \end{aligned} \tag{24}$$

$$\begin{aligned} &> \mu[m] := \text{eval}\left(z1, t = \frac{b + \sqrt{2} \sqrt{c}}{2c}\right) \\ &\qquad \mu_m := -a \sqrt{2} \sqrt{c} e^{-\frac{(b + \sqrt{2} \sqrt{c})^2}{4c} + \frac{b(b + \sqrt{2} \sqrt{c})}{2c}} \end{aligned} \tag{25}$$

> restart :

$$\begin{aligned} &> \text{solve}\left(\left\{\mu_m = -a \sqrt{2} \sqrt{c} e^{-\frac{(b + \sqrt{2} \sqrt{c})^2}{4c} + \frac{b(b + \sqrt{2} \sqrt{c})}{2c}}, t_i = \frac{b + \sqrt{2} \sqrt{c}}{2c}, t_{\max} = \frac{b}{2c}\right\}, \{a, b, c\}\right) \\ &\qquad \left\{a = -\frac{\mu_m (t_i - t_{\max})}{\frac{t_i (t_i - 2t_{\max})}{2(t_i - t_{\max})^2}}, b = \frac{t_{\max}}{(t_i - t_{\max})^2}, c = \frac{1}{2(t_i - t_{\max})^2}\right\} \end{aligned} \tag{26}$$

$$\begin{aligned} &> a := -\frac{\mu_m (t_i - t_{\max})}{\frac{t_i (t_i - 2t_{\max})}{2(t_i - t_{\max})^2}}; b := \frac{t_{\max}}{(t_i - t_{\max})^2}; c := \frac{1}{2(t_i - t_{\max})^2}; \\ &\qquad a := -\frac{\mu_m (t_i - t_{\max})}{\frac{t_i (t_i - 2t_{\max})}{2(t_i - t_{\max})^2}} \\ &\qquad b := \frac{t_{\max}}{(t_i - t_{\max})^2} \end{aligned} \tag{27}$$

$$c := \frac{1}{2 (t_i - t_{\max})^2} \quad (27)$$

$$> y := a \cdot \exp(b \cdot t - c \cdot t^2)$$

$$y := -\frac{\mu_m (t_i - t_{\max}) e^{-\frac{t^2}{2(t_i - t_{\max})^2} + \frac{t_{\max} t}{(t_i - t_{\max})^2}}}{e^{-\frac{t_i(t_i - 2t_{\max})}{2(t_i - t_{\max})^2}}} \quad (28)$$

> restart :

> #Üçüncü Dereceden Polinomial Modelin

$$> y := a \cdot t^3 + b \cdot t^2 + c \cdot t + d$$

$$y := a t^3 + b t^2 + c t + d \quad (29)$$

$$> z1 := \text{diff}(y, t)$$

$$z1 := 3 a t^2 + 2 b t + c \quad (30)$$

$$> z2 := \text{diff}(z1, t)$$

$$z2 := 6 a t + 2 b \quad (31)$$

$$> \text{solve}(z2, t)$$

$$\frac{-b + \sqrt{-3 a c + b^2}}{3 a}, \frac{-b + \sqrt{-3 a c + b^2}}{3 a} \quad (32)$$

$$> t[\max] := \frac{-b + \sqrt{-3 a c + b^2}}{3 a}$$

$$t_{\max} := \frac{-b + \sqrt{-3 a c + b^2}}{3 a} \quad (33)$$

$$> y[\max] := \text{eval}\left(a t^3 + b t^2 + c t + d, t = \frac{-b + \sqrt{-3 a c + b^2}}{3 a}\right)$$

$$y_{\max} := \frac{(-b + \sqrt{-3 a c + b^2})^3}{27 a^2} + \frac{b (-b + \sqrt{-3 a c + b^2})^2}{9 a^2} + \frac{c (-b + \sqrt{-3 a c + b^2})}{3 a} + d \quad (34)$$

$$> \text{solve}(z2, t)$$

$$-\frac{b}{3 a} \quad (35)$$

$$> t[i] := -\frac{b}{3 a}$$

$$t_i := -\frac{b}{3 a} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} &> y[i] := \text{eval}\left(a t^3 + b t^2 + c t + d, t = -\frac{b}{3a}\right) \\ & \quad y_i := \frac{2b^3}{27a^2} - \frac{cb}{3a} + d \end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} &> \text{mu}[m] := \text{eval}\left(z1, t = -\frac{b}{3a}\right) \\ & \quad \mu_m := -\frac{b^2}{3a} + c \end{aligned} \quad (38)$$

> restart :

$$\begin{aligned} &> \text{solve}\left(\left\{t[i] = -\frac{b}{3a}, \text{mu}[m] = -\frac{b^2}{3a} + c, t[\text{max}] = \frac{-b + \sqrt{-3ac + b^2}}{3a}\right\}, \{a, b, c\}\right) \\ & \quad \left\{a = -\frac{\mu_m}{3(t_i^2 - 2t_i t_{\text{max}} + t_{\text{max}}^2)}, b = \frac{t_i \mu_m}{t_i^2 - 2t_i t_{\text{max}} + t_{\text{max}}^2}, c = -\frac{\mu_m t_{\text{max}}(2t_i - t_{\text{max}})}{t_i^2 - 2t_i t_{\text{max}} + t_{\text{max}}^2}\right\} \end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} &> a := -\frac{\mu_m}{3(t_i^2 - 2t_i t_{\text{max}} + t_{\text{max}}^2)}; b := \frac{t_i \mu_m}{t_i^2 - 2t_i t_{\text{max}} + t_{\text{max}}^2}; c := -\frac{\mu_m t_{\text{max}}(2t_i - t_{\text{max}})}{t_i^2 - 2t_i t_{\text{max}} + t_{\text{max}}^2}; \\ & \quad a := -\frac{\mu_m}{3t_i^2 - 6t_i t_{\text{max}} + 3t_{\text{max}}^2} \\ & \quad b := \frac{t_i \mu_m}{t_i^2 - 2t_i t_{\text{max}} + t_{\text{max}}^2} \\ & \quad c := -\frac{\mu_m t_{\text{max}}(2t_i - t_{\text{max}})}{t_i^2 - 2t_i t_{\text{max}} + t_{\text{max}}^2} \end{aligned} \quad (40)$$

$$\begin{aligned} &> d := \frac{(-b + \sqrt{-3ac + b^2})^3}{27a^2} + \frac{b(-b + \sqrt{-3ac + b^2})^2}{9a^2} + \frac{c(-b + \sqrt{-3ac + b^2})}{3a} \\ & \quad - y[\text{max}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d := & \frac{1}{27\mu_m^2} \left(\left(-\frac{t_i \mu_m}{t_i^2 - 2t_i t_{\text{max}} + t_{\text{max}}^2} \right. \right. \\ & + \sqrt{-\frac{3\mu_m^2 t_{\text{max}}(2t_i - t_{\text{max}})}{(3t_i^2 - 6t_i t_{\text{max}} + 3t_{\text{max}}^2)(t_i^2 - 2t_i t_{\text{max}} + t_{\text{max}}^2)} + \frac{t_i^2 \mu_m^2}{(t_i^2 - 2t_i t_{\text{max}} + t_{\text{max}}^2)^2}} \\ & \left. \left. \right)^3 + \frac{1}{9\mu_m(t_i^2 - 2t_i t_{\text{max}} + t_{\text{max}}^2)} \left(t_i \left(\right. \right. \end{aligned} \quad (41)$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{t_i \mu_m}{t_i^2 - 2 t_i t_{\max} + t_{\max}^2} \\
& + \sqrt{\frac{3 \mu_m^2 t_{\max} (2 t_i - t_{\max})}{(3 t_i^2 - 6 t_i t_{\max} + 3 t_{\max}^2) (t_i^2 - 2 t_i t_{\max} + t_{\max}^2)} + \frac{t_i^2 \mu_m^2}{(t_i^2 - 2 t_i t_{\max} + t_{\max}^2)^2}} \\
& \left. \left(3 t_i^2 - 6 t_i t_{\max} + 3 t_{\max}^2 \right)^2 \right) + \frac{1}{3 (t_i^2 - 2 t_i t_{\max} + t_{\max}^2)} \left(t_{\max} (2 t_i - t_{\max}) \left(\right. \right. \\
& - \frac{t_i \mu_m}{t_i^2 - 2 t_i t_{\max} + t_{\max}^2} \\
& + \sqrt{\frac{3 \mu_m^2 t_{\max} (2 t_i - t_{\max})}{(3 t_i^2 - 6 t_i t_{\max} + 3 t_{\max}^2) (t_i^2 - 2 t_i t_{\max} + t_{\max}^2)} + \frac{t_i^2 \mu_m^2}{(t_i^2 - 2 t_i t_{\max} + t_{\max}^2)^2}} \left. \left. \right) (3 t_i^2 \right. \\
& \left. - 6 t_i t_{\max} + 3 t_{\max}^2) \right) - y_{\max}
\end{aligned}$$

> simplify(d)

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{3 (t_i - t_{\max})^2} \left(-2 (t_i - t_{\max})^4 \sqrt{\frac{\mu_m^2}{(t_i - t_{\max})^2}} + 2 \mu_m t_i^3 + (-6 \mu_m t_{\max} - 3 y_{\max}) t_i^2 + (3 \mu_m \right. \\
& \left. t_{\max}^2 + 6 t_{\max} y_{\max}) t_i - 3 t_{\max}^2 y_{\max} \right) \quad (42)
\end{aligned}$$

> restart :

$$\begin{aligned}
> d := & \frac{1}{3 (t_i - t_{\max})^2} \left(-2 (t_i - t_{\max})^4 \sqrt{\frac{\mu_m^2}{(t_i - t_{\max})^2}} + 2 \mu_m t_i^3 + (-6 \mu_m t_{\max} - 3 y_{\max}) t_i^2 \right. \\
& \left. + (3 \mu_m t_{\max}^2 + 6 t_{\max} y_{\max}) t_i - 3 t_{\max}^2 y_{\max} \right); a := -\frac{\mu_m}{3 (t_i^2 - 2 t_i t_{\max} + t_{\max}^2)}; b := \\
& \frac{t_i \mu_m}{t_i^2 - 2 t_i t_{\max} + t_{\max}^2}; c := -\frac{\mu_m t_{\max} (2 t_i - t_{\max})}{t_i^2 - 2 t_i t_{\max} + t_{\max}^2};
\end{aligned}$$

$$d := \frac{1}{3 (t_i - t_{\max})^2} \left(-2 (t_i - t_{\max})^4 \sqrt{\frac{\mu_m^2}{(t_i - t_{\max})^2}} + 2 \mu_m t_i^3 + (-6 \mu_m t_{\max} - 3 y_{\max}) t_i^2 \right. \\ \left. + (3 \mu_m t_{\max}^2 + 6 t_{\max} y_{\max}) t_i - 3 t_{\max}^2 y_{\max} \right)$$

$$a := -\frac{\mu_m}{3 t_i^2 - 6 t_i t_{\max} + 3 t_{\max}^2}$$

$$b := \frac{t_i \mu_m}{t_i^2 - 2 t_i t_{\max} + t_{\max}^2}$$

$$c := -\frac{\mu_m t_{\max} (2 t_i - t_{\max})}{t_i^2 - 2 t_i t_{\max} + t_{\max}^2} \quad (43)$$

$$> a \cdot t^3 + b \cdot t^2 + c \cdot t + d$$

$$-\frac{\mu_m t^3}{3 t_i^2 - 6 t_i t_{\max} + 3 t_{\max}^2} + \frac{t_i \mu_m t^2}{t_i^2 - 2 t_i t_{\max} + t_{\max}^2} - \frac{\mu_m t_{\max} (2 t_i - t_{\max}) t}{t_i^2 - 2 t_i t_{\max} + t_{\max}^2} + \frac{1}{3 (t_i - t_{\max})^2} \left(\right. \\ \left. -2 (t_i - t_{\max})^4 \sqrt{\frac{\mu_m^2}{(t_i - t_{\max})^2}} + 2 \mu_m t_i^3 + (-6 \mu_m t_{\max} - 3 y_{\max}) t_i^2 + (3 \mu_m t_{\max}^2 \right. \\ \left. + 6 t_{\max} y_{\max}) t_i - 3 t_{\max}^2 y_{\max} \right) \quad (44)$$

$$> \text{simplify}(\%)$$

$$\frac{1}{3 (t_i - t_{\max})^2} \left(-2 (t_i - t_{\max})^4 \sqrt{\frac{\mu_m^2}{(t_i - t_{\max})^2}} + 2 \mu_m t_i^3 + (-6 \mu_m t_{\max} - 3 y_{\max}) t_i^2 + (3 \mu_m t_{\max}^2 \right. \\ \left. + (-6 t \mu_m + 6 y_{\max}) t_{\max} + 3 t^2 \mu_m) t_i + (3 t \mu_m - 3 y_{\max}) t_{\max}^2 - \mu_m t^3 \right) \quad (45)$$

> restart :

$$> Y := \frac{1}{3 (t_i - t_{\max})^2} \left(-2 (t_i - t_{\max})^4 \sqrt{\frac{\mu_m^2}{(t_i - t_{\max})^2}} + 2 \mu_m t_i^3 + (-6 \mu_m t_{\max} - 3 y_{\max}) t_i^2 \right.$$

$$Y := \frac{1}{3(t_i - t_{\max})^2} \left(-2(t_i - t_{\max})^4 \sqrt{\frac{\mu_m^2}{(t_i - t_{\max})^2}} + 2\mu_m t_i^3 + (-6\mu_m t_{\max} - 3y_{\max}) t_{\max}^2 - \mu_m t^3 \right) + (3\mu_m t_{\max}^2 + (-6t\mu_m + 6y_{\max}) t_{\max} + 3t^2\mu_m) t_i + (3t\mu_m - 3y_{\max}) t_{\max}^2 - \mu_m t^3 \quad (46)$$

> restart :

> #Kuadratik Logaritmik Modeli

> $y := a + b \cdot t + c \cdot t^2 + d \cdot \log(t)$

$$y := a + b t + c t^2 + d \ln(t) \quad (47)$$

> $z1 := \text{diff}(y, t)$

$$z1 := b + 2 c t + \frac{d}{t} \quad (48)$$

> $z2 := \text{diff}(z1, t)$

$$z2 := 2 c - \frac{d}{t^2} \quad (49)$$

> solve(z1, t)

$$\frac{-b + \sqrt{b^2 - 8 c d}}{4 c}, -\frac{b + \sqrt{b^2 - 8 c d}}{4 c} \quad (50)$$

> $t[\max] := \frac{-b + \sqrt{b^2 - 8 c d}}{4 c}$

$$t_{\max} := \frac{-b + \sqrt{b^2 - 8 c d}}{4 c} \quad (51)$$

> $y[\max] := \text{eval}\left(a + b t + c t^2 + d \ln(t), t = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 8 c d}}{4 c}\right)$

$$y_{\max} := a + \frac{b(-b + \sqrt{b^2 - 8 c d})}{4 c} + \frac{(-b + \sqrt{b^2 - 8 c d})^2}{16 c} + d \ln\left(\frac{-b + \sqrt{b^2 - 8 c d}}{4 c}\right) \quad (52)$$

> solve(z2, t)

$$\frac{\sqrt{2} \sqrt{c d}}{2 c}, -\frac{\sqrt{2} \sqrt{c d}}{2 c} \quad (53)$$

> $t[i] := \frac{\sqrt{2} \sqrt{c d}}{2 c}$

$$t_i := \frac{\sqrt{2} \sqrt{c d}}{2 c} \quad (54)$$

$$\begin{aligned} > y[i] := \text{eval}\left(a + b t + c t^2 + d \ln(t), t = \frac{\sqrt{2} \sqrt{c d}}{2 c}\right) \\ y_i := a + \frac{b \sqrt{2} \sqrt{c d}}{2 c} + \frac{d}{2} + d \ln\left(\frac{\sqrt{2} \sqrt{c d}}{2 c}\right) \end{aligned} \quad (55)$$

$$\begin{aligned} > \text{mu}[m] := \text{eval}\left(b + 2 c t + \frac{d}{t}, t = \frac{\sqrt{2} \sqrt{c d}}{2 c}\right) \\ \mu_m := b + \sqrt{2} \sqrt{c d} + \frac{d c \sqrt{2}}{\sqrt{c d}} \end{aligned} \quad (56)$$

> restart :

$$\begin{aligned} > \text{solve}\left(\left\{\mu_m = b + \sqrt{2} \sqrt{c d} + \frac{d c \sqrt{2}}{\sqrt{c d}}, t_i = \frac{\sqrt{2} \sqrt{c d}}{2 c}, t_{\max} = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 8 c d}}{4 c}\right\}, \{b, c, d\}\right) \\ \left\{b = \frac{(t_i^2 + t_{\max}^2) \mu_m}{t_i^2 - 2 t_i t_{\max} + t_{\max}^2}, c = -\frac{\mu_m t_{\max}}{2 (t_i^2 - 2 t_i t_{\max} + t_{\max}^2)}, d = -\frac{\mu_m t_{\max} t_i^2}{t_i^2 - 2 t_i t_{\max} + t_{\max}^2}\right\} \end{aligned} \quad (57)$$

$$\begin{aligned} > b := \frac{(t_i^2 + t_{\max}^2) \mu_m}{t_i^2 - 2 t_i t_{\max} + t_{\max}^2}; c := -\frac{\mu_m t_{\max}}{2 (t_i^2 - 2 t_i t_{\max} + t_{\max}^2)}; d := -\frac{\mu_m t_{\max} t_i^2}{t_i^2 - 2 t_i t_{\max} + t_{\max}^2}; \\ b := \frac{(t_i^2 + t_{\max}^2) \mu_m}{t_i^2 - 2 t_i t_{\max} + t_{\max}^2} \\ c := -\frac{\mu_m t_{\max}}{2 t_i^2 - 4 t_i t_{\max} + 2 t_{\max}^2} \\ d := -\frac{\mu_m t_{\max} t_i^2}{t_i^2 - 2 t_i t_{\max} + t_{\max}^2} \end{aligned} \quad (58)$$

$$\begin{aligned} > a = \frac{b(-b + \sqrt{b^2 - 8 c d})}{4 c} + \frac{(-b + \sqrt{b^2 - 8 c d})^2}{16 c} + d \ln\left(\frac{-b + \sqrt{b^2 - 8 c d}}{4 c}\right) \\ - y[\max] \\ a = -\frac{1}{4 (t_i^2 - 2 t_i t_{\max} + t_{\max}^2) t_{\max}} \left((t_i^2 + t_{\max}^2) \left(-\frac{(t_i^2 + t_{\max}^2) \mu_m}{t_i^2 - 2 t_i t_{\max} + t_{\max}^2} \right. \right. \\ \left. \left. + \sqrt{\frac{(t_i^2 + t_{\max}^2)^2 \mu_m^2}{(t_i^2 - 2 t_i t_{\max} + t_{\max}^2)^2} - \frac{8 \mu_m^2 t_{\max}^2 t_i^2}{(2 t_i^2 - 4 t_i t_{\max} + 2 t_{\max}^2) (t_i^2 - 2 t_i t_{\max} + t_{\max}^2)}} \right) (2 t_i^2 \right) \end{aligned} \quad (59)$$

$$\begin{aligned}
& -4 t_i t_{\max} + 2 r_{\max}^2) \left) - \frac{1}{16 \mu_m t_{\max}} \left(\left(-\frac{(t_i^2 + r_{\max}^2) \mu_m}{t_i^2 - 2 t_i t_{\max} + r_{\max}^2} \right. \right. \right. \\
& + \left. \left. \sqrt{\frac{(t_i^2 + r_{\max}^2)^2 \mu_m^2}{(t_i^2 - 2 t_i t_{\max} + r_{\max}^2)^2} - \frac{8 \mu_m^2 r_{\max}^2 t_i^2}{(2 t_i^2 - 4 t_i t_{\max} + 2 r_{\max}^2) (t_i^2 - 2 t_i t_{\max} + r_{\max}^2)}} \right)^2 (2 t_i^2 \right. \\
& \left. - 4 t_i t_{\max} + 2 r_{\max}^2) \right) - \frac{1}{t_i^2 - 2 t_i t_{\max} + r_{\max}^2} \left(\mu_m t_{\max} r_{\max}^2 \ln \left(-\frac{1}{4 \mu_m t_{\max}} \left(\left(\right. \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. \frac{(t_i^2 + r_{\max}^2) \mu_m}{t_i^2 - 2 t_i t_{\max} + r_{\max}^2} \right. \right. \right. \right. \\
& + \left. \left. \sqrt{\frac{(t_i^2 + r_{\max}^2)^2 \mu_m^2}{(t_i^2 - 2 t_i t_{\max} + r_{\max}^2)^2} - \frac{8 \mu_m^2 r_{\max}^2 t_i^2}{(2 t_i^2 - 4 t_i t_{\max} + 2 r_{\max}^2) (t_i^2 - 2 t_i t_{\max} + r_{\max}^2)}} \right)^2 (2 t_i^2 \right. \\
& \left. - 4 t_i t_{\max} + 2 r_{\max}^2) \right) \left. \right) \left. \right) - y_{\max}
\end{aligned}$$

> simplify(%)

$$\begin{aligned}
a = & \frac{1}{4 (t_i - t_{\max})^2 t_{\max}} \left(-4 \mu_m r_{\max}^2 t_i^2 \ln \left(\frac{-(t_i - t_{\max})^2 \sqrt{\frac{\mu_m^2 (t_i + t_{\max})^2}{(t_i - t_{\max})^2} + (t_i^2 + r_{\max}^2) \mu_m}}{\mu_m t_{\max}} \right) \right) \quad (60) \\
& - (t_i^2 + r_{\max}^2) (t_i - t_{\max})^2 \sqrt{\frac{\mu_m^2 (t_i + t_{\max})^2}{(t_i - t_{\max})^2}} + 4 \mu_m r_{\max}^2 t_i^2 \ln(2) + \mu_m t_{\max}^4 - 4 r_{\max}^3 y_{\max} \\
& + (4 \mu_m r_{\max}^2 + 8 t_i y_{\max}) r_{\max}^2 - 4 t_i^2 t_{\max} y_{\max} + \mu_m t_i^4
\end{aligned}$$

> restart :

$$\begin{aligned}
> a &:= \frac{1}{4(t_i - t_{\max})^2 t_{\max}} \left(-4\mu_m r_{\max}^2 \right. \\
&\quad \left. r_i^2 \ln \left(\frac{-(t_i - t_{\max})^2 \sqrt{\frac{\mu_m^2 (t_i + t_{\max})^2}{(t_i - t_{\max})^2} + (r_i^2 + r_{\max}^2) \mu_m}}{\mu_m t_{\max}} \right) - (r_i^2 + r_{\max}^2) (t_i \right. \\
&\quad \left. - t_{\max})^2 \sqrt{\frac{\mu_m^2 (t_i + t_{\max})^2}{(t_i - t_{\max})^2} + 4\mu_m r_{\max}^2 r_i^2 \ln(2) + \mu_m t_{\max}^4 - 4r_{\max}^3 y_{\max} + (4\mu_m r_i^2 \right. \\
&\quad \left. + 8t_i y_{\max}) r_{\max}^2 - 4r_i^2 t_{\max} y_{\max} + \mu_m t_i^4} \right); b := \frac{(r_i^2 + r_{\max}^2) \mu_m}{r_i^2 - 2t_i t_{\max} + r_{\max}^2}; c := \\
&\quad - \frac{\mu_m t_{\max}}{2(r_i^2 - 2t_i t_{\max} + r_{\max}^2)}; d := - \frac{\mu_m t_{\max} r_i^2}{r_i^2 - 2t_i t_{\max} + r_{\max}^2}; \\
a &:= \frac{1}{4(t_i - t_{\max})^2 t_{\max}} \left(-4\mu_m r_{\max}^2 \right. \\
&\quad \left. r_i^2 \ln \left(\frac{-(t_i - t_{\max})^2 \sqrt{\frac{\mu_m^2 (t_i + t_{\max})^2}{(t_i - t_{\max})^2} + (r_i^2 + r_{\max}^2) \mu_m}}{\mu_m t_{\max}} \right) - (r_i^2 + r_{\max}^2) (t_i \right. \\
&\quad \left. - t_{\max})^2 \sqrt{\frac{\mu_m^2 (t_i + t_{\max})^2}{(t_i - t_{\max})^2} + 4\mu_m r_{\max}^2 r_i^2 \ln(2) + \mu_m t_{\max}^4 - 4r_{\max}^3 y_{\max} + (4\mu_m r_i^2 \right. \\
&\quad \left. + 8t_i y_{\max}) r_{\max}^2 - 4r_i^2 t_{\max} y_{\max} + \mu_m t_i^4} \right) \\
&\quad b := \frac{(r_i^2 + r_{\max}^2) \mu_m}{r_i^2 - 2t_i t_{\max} + r_{\max}^2} \\
&\quad c := - \frac{\mu_m t_{\max}}{2r_i^2 - 4t_i t_{\max} + 2r_{\max}^2}
\end{aligned}$$

(61)

$$d := -\frac{\mu_m t_{\max} r_i^2}{r_i^2 - 2 t_i t_{\max} + r_{\max}^2} \quad (61)$$

> $a + b \cdot t + c \cdot r^2 + d \cdot \log(t)$

$$\frac{1}{4 (t_i - t_{\max})^2 t_{\max}} \left(-4 \mu_m r_{\max}^2 r_i^2 \ln \left(\frac{-(t_i - t_{\max})^2 \sqrt{\frac{\mu_m^2 (t_i + t_{\max})^2}{(t_i - t_{\max})^2} + (r_i^2 + r_{\max}^2) \mu_m}}{\mu_m t_{\max}} \right) \right) \quad (62)$$

$$- (r_i^2 + r_{\max}^2) (t_i - t_{\max})^2 \sqrt{\frac{\mu_m^2 (t_i + t_{\max})^2}{(t_i - t_{\max})^2} + 4 \mu_m r_{\max}^2 r_i^2 \ln(2) + \mu_m t_{\max}^4 - 4 r_{\max}^3 y_{\max}}$$

$$+ (4 \mu_m r_i^2 + 8 t_i y_{\max}) r_{\max}^2 - 4 r_i^2 t_{\max} y_{\max} + \mu_m t_i^4 \left. + \frac{(r_i^2 + r_{\max}^2) \mu_m t}{r_i^2 - 2 t_i t_{\max} + r_{\max}^2} \right)$$

$$- \frac{\mu_m t_{\max} r_i^2}{2 r_i^2 - 4 t_i t_{\max} + 2 r_{\max}^2} - \frac{\mu_m t_{\max} r_i^2 \ln(t)}{r_i^2 - 2 t_i t_{\max} + r_{\max}^2}$$

> *simplify(%)*

$$\frac{1}{4 (t_i - t_{\max})^2 t_{\max}} \left(-4 \mu_m r_{\max}^2 r_i^2 \ln \left(\frac{-(t_i - t_{\max})^2 \sqrt{\frac{\mu_m^2 (t_i + t_{\max})^2}{(t_i - t_{\max})^2} + (r_i^2 + r_{\max}^2) \mu_m}}{\mu_m t_{\max}} \right) \right) \quad (63)$$

$$- (r_i^2 + r_{\max}^2) (t_i - t_{\max})^2 \sqrt{\frac{\mu_m^2 (t_i + t_{\max})^2}{(t_i - t_{\max})^2} + 4 \mu_m r_{\max}^2 r_i^2 \ln(2) - 4 \mu_m r_{\max}^2 r_i^2 \ln(t)}$$

$$+ \mu_m t_{\max}^4 + (4 t \mu_m - 4 y_{\max}) r_{\max}^3 + (-2 r^2 \mu_m + 4 \mu_m r_i^2 + 8 t_i y_{\max}) r_{\max}^2 + 4 r_i^2 (t \mu_m - y_{\max}) t_{\max} + \mu_m t_i^4$$

(64)

$$> Y := \frac{1}{4 (t_i - t_{\max})^2 t_{\max}} \left(-4 \mu_m r_{\max}^2 \right)$$

$$\begin{aligned}
& r_i^2 \ln \left(\frac{-(t_i - t_{\max})^2 \sqrt{\frac{\mu_m^2 (t_i + t_{\max})^2}{(t_i - t_{\max})^2} + (r_i^2 + r_{\max}^2) \mu_m}}{\mu_m t_{\max}} \right) - (r_i^2 + r_{\max}^2) (t_i \\
& - t_{\max})^2 \sqrt{\frac{\mu_m^2 (t_i + t_{\max})^2}{(t_i - t_{\max})^2} + 4 \mu_m r_{\max}^2 r_i^2 \ln(2) - 4 \mu_m r_{\max}^2 r_i^2 \ln(t) + \mu_m t_{\max}^4 + (4 t \mu_m \\
& - 4 y_{\max}) r_{\max}^3 + (-2 r^2 \mu_m + 4 \mu_m r_i^2 + 8 t_i y_{\max}) r_{\max}^2 + 4 r_i^2 (t \mu_m - y_{\max}) t_{\max} + \mu_m t_i^4 \Big) \\
Y := & \frac{1}{4 (t_i - t_{\max})^2 t_{\max}} \left(-4 \mu_m r_{\max}^2 \right. \\
& r_i^2 \ln \left(\frac{-(t_i - t_{\max})^2 \sqrt{\frac{\mu_m^2 (t_i + t_{\max})^2}{(t_i - t_{\max})^2} + (r_i^2 + r_{\max}^2) \mu_m}}{\mu_m t_{\max}} \right) - (r_i^2 + r_{\max}^2) (t_i \\
& - t_{\max})^2 \sqrt{\frac{\mu_m^2 (t_i + t_{\max})^2}{(t_i - t_{\max})^2} + 4 \mu_m r_{\max}^2 r_i^2 \ln(2) - 4 \mu_m r_{\max}^2 r_i^2 \ln(t) + \mu_m t_{\max}^4 + (4 t \mu_m \\
& - 4 y_{\max}) r_{\max}^3 + (-2 r^2 \mu_m + 4 \mu_m r_i^2 + 8 t_i y_{\max}) r_{\max}^2 + 4 r_i^2 (t \mu_m - y_{\max}) t_{\max} + \mu_m t_i^4 \Big)
\end{aligned} \tag{65}$$

> #BULGULAR

>

> restart :

> # Model 1 (üstel fonksiyon, Brody ve ark., 1923)

> y := a·exp(-c·t)

$$y := a e^{-ct} \tag{66}$$

> z1 := diff(y, t)

$$z1 := -a c e^{-ct} \tag{67}$$

> z2 := diff(z1, t)

$$z2 := a c^2 e^{-ct} \tag{68}$$

> solve(z1, t)

> # t[max] değeri yoktur.

> solve(z2, t)

> # t[i] değeri yoktur.

```

>
> restart :
> # Model 2 ( Brody ve ark., 1924)
>
> y := a·exp(-c·t) - a·exp(-b·t)
y := a e^{-ct} - a e^{-bt} (69)
> z1 := diff(y, t)
z1 := -a c e^{-ct} + a b e^{-bt} (70)
>
z1 := a ( e^{-bt} b - e^{-ct} c ) (71)
> z2 := diff(z1, t)
z2 := a c^2 e^{-ct} - a b^2 e^{-bt} (72)
> solve(z1, t)
ln(c/b)
- (73)
b - c

> t[max] := ln(b/c) / (b - c)
ln(b/c)
t_max := (74)
b - c

> y[max] := eval(y, t=t[max])
c ln(b/c) b ln(b/c)
y_max := a e^{- (75)
b - c} - a e^{- (b - c)}

> simplify(%)
-a ( (b/c)^{-b/(b-c)} - (b/c)^{-c/(b-c)} ) (76)

> solve(z2, t)
ln(c^2/b^2)
- (77)
b - c

> t[i] := %
ln(c^2/b^2)
t_i := - (78)
b - c

> y[i] := eval(a e^{-ct} - a e^{-bt}, t=t[i])

```

$$y_i := a e^{\frac{c \ln\left(\frac{c^2}{b^2}\right)}{b-c}} - a e^{\frac{b \ln\left(\frac{c^2}{b^2}\right)}{b-c}} \quad (79)$$

> simplify(%)

$$a \left(\left(\frac{c^2}{b^2} \right)^{\frac{c}{b-c}} - \left(\frac{c^2}{b^2} \right)^{\frac{b}{b-c}} \right) \quad (80)$$

> mu[m] := eval(zl, t=t[i])

$$\mu_m := -a c e^{\frac{c \ln\left(\frac{c^2}{b^2}\right)}{b-c}} + a b e^{\frac{b \ln\left(\frac{c^2}{b^2}\right)}{b-c}} \quad (81)$$

> simplify(%)

$$a \left(\left(\frac{c^2}{b^2} \right)^{\frac{b}{b-c}} b - \left(\frac{c^2}{b^2} \right)^{\frac{c}{b-c}} c \right) \quad (82)$$

> restart :

$$\text{solve} \left(\left\{ t[\max] = \frac{\ln\left(\frac{b}{c}\right)}{b-c}, y[\max] = a e^{-\frac{c \ln\left(\frac{b}{c}\right)}{b-c}} - a e^{-\frac{b \ln\left(\frac{b}{c}\right)}{b-c}}, t[i] = \frac{\ln\left(\frac{b^2}{c^2}\right)}{b-c} \right\}, \{a, b, c\} \right)$$

> restart :

$$\text{solve} \left(\left\{ t[\max] = \frac{\ln\left(\frac{b}{c}\right)}{b-c}, y[\max] = a e^{-\frac{c \ln\left(\frac{b}{c}\right)}{b-c}} - a e^{-\frac{b \ln\left(\frac{b}{c}\right)}{b-c}}, y[i] = a \left(\left(\frac{b^2}{c^2} \right)^{-\frac{c}{b-c}} - \left(\frac{b^2}{c^2} \right)^{-\frac{b}{b-c}} \right) \right\}, \{a, b, c\} \right)$$

> restart :

$$\text{solve} \left(\left\{ t[\max] = \frac{\ln\left(\frac{b}{c}\right)}{b-c}, y[\max] = a e^{-\frac{c \ln\left(\frac{b}{c}\right)}{b-c}} - a e^{-\frac{b \ln\left(\frac{b}{c}\right)}{b-c}}, \mu[m] = \frac{a b}{\left(\frac{b^2}{c^2} \right)^{\frac{b}{b-c}}} \right\} \right)$$

$$\left. - \frac{ac}{\left(\frac{b^2}{c^2}\right)^{\frac{c}{b-c}}}, \{a, b, c\} \right\}$$

Warning, solutions may have been lost

>

>

> restart :

$$\text{> solve} \left(\left\{ t[\max] = \frac{\ln\left(\frac{b}{c}\right)}{b-c}, y[i] = a \left(\left(\frac{b^2}{c^2}\right)^{-\frac{c}{b-c}} - \left(\frac{b^2}{c^2}\right)^{-\frac{b}{b-c}} \right), t[i] = \frac{\ln\left(\frac{b^2}{c^2}\right)}{b-c} \right\}, \{a, b, c\} \right)$$

Warning, solutions may have been lost

>

>

> restart :

$$\text{> solve} \left(\left\{ t[\max] = \frac{\ln\left(\frac{b}{c}\right)}{b-c}, \mu[m] = a \left(b \left(\frac{b^2}{c^2}\right)^{-\frac{b}{b-c}} - c \left(\frac{b^2}{c^2}\right)^{-\frac{c}{b-c}} \right), t[i] = \frac{\ln\left(\frac{b^2}{c^2}\right)}{b-c} \right\}, \{a, b, c\} \right)$$

Warning, solutions may have been lost

>

>

> restart :

$$\text{> solve} \left(\left\{ t[\max] = \frac{\ln\left(\frac{b}{c}\right)}{b-c}, \mu[m] = a \left(b \left(\frac{b^2}{c^2}\right)^{-\frac{b}{b-c}} - c \left(\frac{b^2}{c^2}\right)^{-\frac{c}{b-c}} \right), y[i] = a \left(\left(\frac{b^2}{c^2}\right)^{-\frac{c}{b-c}} - \left(\frac{b^2}{c^2}\right)^{-\frac{b}{b-c}} \right) \right\}, \{a, b, c\} \right)$$

$$\left. \begin{aligned}
a &= \frac{y_i \left(e^{\frac{\text{RootOf}\left((e^Z)^2 \mu_{m \max} + Z e^{-Z y_i - \mu_{m \max}}\right) e^{\text{RootOf}\left((e^Z)^2 \mu_{m \max} + Z e^{-Z y_i - \mu_{m \max}}\right)}}{\text{RootOf}\left((e^Z)^2 \mu_{m \max} + Z e^{-Z y_i - \mu_{m \max}}\right)} - 1 \right)^2}{\left(e^{\text{RootOf}\left((e^Z)^2 \mu_{m \max} + Z e^{-Z y_i - \mu_{m \max}}\right)} \right)^2 - 1}, b = \\
& - \frac{\mu_m \left(e^{\text{RootOf}\left((e^Z)^2 \mu_{m \max} + Z e^{-Z y_i - \mu_{m \max}}\right)} + 1 \right)}{y_i}, c = \\
& \left. \frac{\mu_m \left(e^{\text{RootOf}\left((e^Z)^2 \mu_{m \max} + Z e^{-Z y_i - \mu_{m \max}}\right)} + 1 \right)}{\frac{\text{RootOf}\left((e^Z)^2 \mu_{m \max} + Z e^{-Z y_i - \mu_{m \max}}\right)}{e} y_i} \right\} \\
> a &:= \frac{y_i \left(e^{\frac{\text{RootOf}\left((e^Z)^2 \mu_{m \max} + Z e^{-Z y_i - \mu_{m \max}}\right) e^{\text{RootOf}\left((e^Z)^2 \mu_{m \max} + Z e^{-Z y_i - \mu_{m \max}}\right)}}{\text{RootOf}\left((e^Z)^2 \mu_{m \max} + Z e^{-Z y_i - \mu_{m \max}}\right)} - 1 \right)^2}{\left(e^{\text{RootOf}\left((e^Z)^2 \mu_{m \max} + Z e^{-Z y_i - \mu_{m \max}}\right)} \right)^2 - 1}; b := \\
& - \frac{\mu_m \left(e^{\text{RootOf}\left((e^Z)^2 \mu_{m \max} + Z e^{-Z y_i - \mu_{m \max}}\right)} + 1 \right)}{y_i}; c := \\
& - \frac{\mu_m \left(e^{\text{RootOf}\left((e^Z)^2 \mu_{m \max} + Z e^{-Z y_i - \mu_{m \max}}\right)} + 1 \right)}{\frac{\text{RootOf}\left((e^Z)^2 \mu_{m \max} + Z e^{-Z y_i - \mu_{m \max}}\right)}{e} y_i} \\
a &:= \frac{y_i \left(e^{\frac{\text{RootOf}\left((e^Z)^2 \mu_{m \max} + Z e^{-Z y_i - \mu_{m \max}}\right) e^{\text{RootOf}\left((e^Z)^2 \mu_{m \max} + Z e^{-Z y_i - \mu_{m \max}}\right)}}{\text{RootOf}\left((e^Z)^2 \mu_{m \max} + Z e^{-Z y_i - \mu_{m \max}}\right)} - 1 \right)^2}{\left(e^{\text{RootOf}\left((e^Z)^2 \mu_{m \max} + Z e^{-Z y_i - \mu_{m \max}}\right)} \right)^2 - 1} \\
b &:= - \frac{\mu_m \left(e^{\text{RootOf}\left((e^Z)^2 \mu_{m \max} + Z e^{-Z y_i - \mu_{m \max}}\right)} + 1 \right)}{y_i}
\end{aligned} \right. \quad (83)$$

$$c := -\frac{\mu_m \left(e^{\text{RootOf}\left((e-Z)^2 \mu_{m \max} + Z e^{-Z y_i - \mu_{m \max} t}\right)} + 1 \right)}{e^{\text{RootOf}\left((e-Z)^2 \mu_{m \max} + Z e^{-Z y_i - \mu_{m \max} t}\right)} y_i} \quad (84)$$

> $a \cdot \exp(-c \cdot t) - a \cdot \exp(-b \cdot t)$

$$\frac{1}{\left(e^{\text{RootOf}\left((e-Z)^2 \mu_{m \max} + Z e^{-Z y_i - \mu_{m \max} t}\right)} - 1 \right)^2} y_i \quad (85)$$

$$\left(\frac{\text{RootOf}\left((e-Z)^2 \mu_{m \max} + Z e^{-Z y_i - \mu_{m \max} t}\right) e^{\text{RootOf}\left((e-Z)^2 \mu_{m \max} + Z e^{-Z y_i - \mu_{m \max} t}\right)}}{e^{\text{RootOf}\left((e-Z)^2 \mu_{m \max} + Z e^{-Z y_i - \mu_{m \max} t}\right)} - 1} \right)^2$$

$$\frac{\mu_m \left(e^{\text{RootOf}\left((e-Z)^2 \mu_{m \max} + Z e^{-Z y_i - \mu_{m \max} t}\right)} + 1 \right) t}{e^{\text{RootOf}\left((e-Z)^2 \mu_{m \max} + Z e^{-Z y_i - \mu_{m \max} t}\right)} y_i}$$

$$- \frac{1}{\left(e^{\text{RootOf}\left((e-Z)^2 \mu_{m \max} + Z e^{-Z y_i - \mu_{m \max} t}\right)} - 1 \right)^2} y_i$$

$$\left(\frac{\text{RootOf}\left((e-Z)^2 \mu_{m \max} + Z e^{-Z y_i - \mu_{m \max} t}\right) e^{\text{RootOf}\left((e-Z)^2 \mu_{m \max} + Z e^{-Z y_i - \mu_{m \max} t}\right)}}{e^{\text{RootOf}\left((e-Z)^2 \mu_{m \max} + Z e^{-Z y_i - \mu_{m \max} t}\right)} - 1} \right)^2$$

$$\frac{\mu_m \left(e^{\text{RootOf}\left((e-Z)^2 \mu_{m \max} + Z e^{-Z y_i - \mu_{m \max} t}\right)} + 1 \right) t}{e^{\text{RootOf}\left((e-Z)^2 \mu_{m \max} + Z e^{-Z y_i - \mu_{m \max} t}\right)} y_i}$$

> $Y := \text{simplify}(\%)$

$$Y := \frac{1}{\left(e^{2 \text{RootOf}\left(e^{-2 Z \mu_{m \max} t} + Z e^{-Z y_i - \mu_{m \max} t}\right)} - 1 \right)^2} \quad (86)$$

$$\begin{aligned}
& - 1) \\
& \left(\frac{2 \operatorname{RootOf}\left(e^{-Z \mu_m t_{\max}} + Z e^{-Z y_i - \mu_m t_{\max}}\right) e^{\operatorname{RootOf}\left(e^{-Z \mu_m t_{\max}} + Z e^{-Z y_i - \mu_m t_{\max}}\right)}}{e^{\operatorname{RootOf}\left(e^{-Z \mu_m t_{\max}} + Z e^{-Z y_i - \mu_m t_{\max}}\right)} - 1} \right) y_i \\
& \left(\frac{\mu_m t_{\max} \left(1 + e^{-\operatorname{RootOf}\left(e^{-Z \mu_m t_{\max}} + Z e^{-Z y_i - \mu_m t_{\max}}\right)}\right)}{e^{y_i}} \right) \\
& \left. - e^{\frac{\mu_m \left(e^{\operatorname{RootOf}\left(e^{-Z \mu_m t_{\max}} + Z e^{-Z y_i - \mu_m t_{\max}}\right)} + 1\right) t}{y_i}} \right)
\end{aligned}$$

> restart :

$$> \operatorname{solve} \left(\left\{ \begin{aligned} t[i] &= \frac{\ln\left(\frac{b^2}{c^2}\right)}{b-c}, y[\max] = a e^{-\frac{c \ln\left(\frac{b}{c}\right)}{b-c}} - a e^{-\frac{b \ln\left(\frac{b}{c}\right)}{b-c}}, y[i] = a e^{-\frac{c \ln\left(\frac{b^2}{c^2}\right)}{b-c}} \\ & - a e^{-\frac{b \ln\left(\frac{b^2}{c^2}\right)}{b-c}} \end{aligned} \right\}, \{a, b, c\} \right)$$

> restart :

$$> \operatorname{solve} \left(\left\{ \begin{aligned} \mu[m] &= \frac{a b}{\left(\frac{b^2}{c^2}\right)^{\frac{b}{b-c}}} - \frac{a c}{\left(\frac{b^2}{c^2}\right)^{\frac{c}{b-c}}}, y[\max] = a e^{-\frac{c \ln\left(\frac{b}{c}\right)}{b-c}} - a e^{-\frac{b \ln\left(\frac{b}{c}\right)}{b-c}}, t[i] \\ & = \frac{\ln\left(\frac{b^2}{c^2}\right)}{b-c} \end{aligned} \right\}, \{a, b, c\} \right)$$

> restart :

$$\begin{aligned}
 &> \text{solve} \left(\left\{ \begin{array}{l} \mu[m] = \frac{ab}{\left(\frac{b^2}{c^2}\right)^{\frac{b}{b-c}}} - \frac{ac}{\left(\frac{b^2}{c^2}\right)^{\frac{c}{b-c}}}, y[\text{max}] = a e^{-\frac{c \ln\left(\frac{b}{c}\right)}{b-c}} - a e^{-\frac{b \ln\left(\frac{b}{c}\right)}{b-c}}, y[i] \right. \right. \\ \left. \left. = a e^{-\frac{c \ln\left(\frac{b^2}{c^2}\right)}{b-c}} - a e^{-\frac{b \ln\left(\frac{b^2}{c^2}\right)}{b-c}} \right\}, \{a, b, c\} \right)
 \end{aligned}$$

restart :

$$\begin{aligned}
 &> \text{solve} \left(\left\{ \begin{array}{l} \mu[m] = \frac{ab}{\left(\frac{b^2}{c^2}\right)^{\frac{b}{b-c}}} - \frac{ac}{\left(\frac{b^2}{c^2}\right)^{\frac{c}{b-c}}}, y[i] = a \left(\left(\frac{b^2}{c^2}\right)^{-\frac{c}{b-c}} - \left(\frac{b^2}{c^2}\right)^{-\frac{b}{b-c}} \right), t[i] \\ = \frac{\ln\left(\frac{b^2}{c^2}\right)}{b-c} \end{array} \right\}, \{a, b, c\} \right)
 \end{aligned}$$

$$a = \left(y_i \mu_m^2 \right)$$

(87)

r_i^2

$$e^{\left(2 \operatorname{RootOf}\left(-(eZ)^2 \mu_m^2 \rho_i^2 + eZ_{-Z}^2 y_i^2 + 2eZ \mu_m^2 \rho_i^2 - \mu_m^2 \right) \right)}$$

$$\rho_i^2 e^{2 \operatorname{RootOf}\left(-(eZ)^2 \mu_m^2 \rho_i^2 + eZ_{-Z}^2 y_i^2 + 2eZ \mu_m^2 \rho_i^2 - \mu_m^2 \right) y_i}$$

$$- e^{\operatorname{RootOf}\left(-(eZ)^2 \mu_m^2 \rho_i^2 + eZ_{-Z}^2 y_i^2 + 2eZ \mu_m^2 \rho_i^2 - \mu_m^2 \right)} \ln \left(\operatorname{RootOf}\left(-(eZ)^2 \mu_m^2 \rho_i^2 + eZ_{-Z}^2 y_i^2 \right) \right)$$

$$+ 2eZ \mu_m^2 \rho_i^2 - \mu_m^2 \rho_i^2 y_i^2 \Big/ \left(\mu_m^2 \rho_i^2 \left(e^{\operatorname{RootOf}\left(-(eZ)^2 \mu_m^2 \rho_i^2 + eZ_{-Z}^2 y_i^2 + 2eZ \mu_m^2 \rho_i^2 - \mu_m^2 \right)} - 1 \right)^2 \right) \Big) \mu_m^t$$

$$+ \ln \left(\frac{\text{RootOf}\left(-(\mathbf{e}^Z)^2 \mu_m^2 t_i^2 + \mathbf{e}^Z _Z^2 y_i^2 + 2 \mathbf{e}^Z \mu_m^2 t_i^2 - \mu_m^2 t_i^2\right) y_i^2}{\mu_m^2 t_i \left(\mathbf{e}^{\text{RootOf}\left(-(\mathbf{e}^Z)^2 \mu_m^2 t_i^2 + \mathbf{e}^Z _Z^2 y_i^2 + 2 \mathbf{e}^Z \mu_m^2 t_i^2 - \mu_m^2 t_i^2\right) - 1} \right)^2} \right) \mu_m t_i \Bigg) /$$

$$\left(\mathbf{e}^{\text{RootOf}\left(-(\mathbf{e}^Z)^2 \mu_m^2 t_i^2 + \mathbf{e}^Z _Z^2 y_i^2 + 2 \mathbf{e}^Z \mu_m^2 t_i^2 - \mu_m^2 t_i^2\right)} \text{RootOf}\left(-(\mathbf{e}^Z)^2 \mu_m^2 t_i^2 + \mathbf{e}^Z _Z^2 y_i^2 + 2 \mathbf{e}^Z \mu_m^2 t_i^2 - \mu_m^2 t_i^2\right) \right)$$

$$\left. \left(\mathbf{e}^{\text{RootOf}\left(-(\mathbf{e}^Z)^2 \mu_m^2 t_i^2 + \mathbf{e}^Z _Z^2 y_i^2 + 2 \mathbf{e}^Z \mu_m^2 t_i^2 - \mu_m^2 t_i^2\right)} \mu_m t_i - \mu_m t_i \right) \right) / \left(\left(\text{RootOf}\left(-(\mathbf{e}^Z)^2 \mu_m^2 t_i^2 + \mathbf{e}^Z _Z^2 y_i^2 + 2 \mathbf{e}^Z \mu_m^2 t_i^2 - \mu_m^2 t_i^2\right) \right) \right)$$

$$-(\mathbf{e}^Z)^2 \mu_m^2 t_i^2 + \mathbf{e}^Z _Z^2 y_i^2 + 2 \mathbf{e}^Z \mu_m^2 t_i^2 - \mu_m^2 t_i^2 \Big)^2 y_i^2 + \mu_m^2 t_i^2$$

$$\mathbf{e}^{\text{RootOf}\left(-(\mathbf{e}^Z)^2 \mu_m^2 t_i^2 + \mathbf{e}^Z _Z^2 y_i^2 + 2 \mathbf{e}^Z \mu_m^2 t_i^2 - \mu_m^2 t_i^2\right) - \mu_m^2 t_i^2}, b = \left(\left(\text{RootOf}\left(-(\mathbf{e}^Z)^2 \mu_m^2 t_i^2 + \mathbf{e}^Z _Z^2 y_i^2 + 2 \mathbf{e}^Z \mu_m^2 t_i^2 - \mu_m^2 t_i^2\right) \right) \right)$$

$$+ \mathbf{e}^Z _Z^2 y_i^2 + 2 \mathbf{e}^Z \mu_m^2 t_i^2 - \mu_m^2 t_i^2 \Big) y_i - \mu_m t_i \Big) \mathbf{e}^{\text{RootOf}\left(-(\mathbf{e}^Z)^2 \mu_m^2 t_i^2 + \mathbf{e}^Z _Z^2 y_i^2 + 2 \mathbf{e}^Z \mu_m^2 t_i^2 - \mu_m^2 t_i^2\right)}$$

$$+ \mu_m t_i \Big) / \left(y_i t_i \left(\mathbf{e}^{\text{RootOf}\left(-(\mathbf{e}^Z)^2 \mu_m^2 t_i^2 + \mathbf{e}^Z _Z^2 y_i^2 + 2 \mathbf{e}^Z \mu_m^2 t_i^2 - \mu_m^2 t_i^2\right) - 1} \right) \right), c = \left(\left(\right) \right)$$

```

-RootOf(- (e^Z)^2 μ_m^2 t_i^2 + e^Z Z^2 y_i^2 + 2 e^Z μ_m^2 t_i^2 - μ_m^2 t_i^2) μ_m y_i + μ_m^2 t_i
RootOf(- (e^Z)^2 μ_m^2 t_i^2 + e^Z Z^2 y_i^2 + 2 e^Z μ_m^2 t_i^2 - μ_m^2 t_i^2) - μ_m^2 t_i) /
( e^Z RootOf(- (e^Z)^2 μ_m^2 t_i^2 + e^Z Z^2 y_i^2 + 2 e^Z μ_m^2 t_i^2 - μ_m^2 t_i^2) RootOf(- (e^Z)^2 μ_m^2 t_i^2 + e^Z Z^2 y_i^2 + 2 e^Z
μ_m^2 t_i^2 - μ_m^2 t_i^2) y_i^2 ) }
>
>
>
> restart :
> # Model 3 (Ters(invser) Polinom Modeli, Nelder,1966)
> y := t / (a*t^2 + b*t + c)
y := t / (a*t^2 + b*t + c) (88)
> z1 := diff(y, t)
z1 := 1 / (a*t^2 + b*t + c) - t*(2*a*t + b) / (a*t^2 + b*t + c)^2 (89)
> z2 := diff(z1, t)
z2 := -2*(2*a*t + b) / (a*t^2 + b*t + c)^2 + 2*t*(2*a*t + b)^2 / (a*t^2 + b*t + c)^3 - 2*t*a / (a*t^2 + b*t + c)^2 (90)
> solve(z1, t)
sqrt(a*c) / a, -sqrt(a*c) / a (91)
> t[max] := -sqrt(a*c) / a
t_max := -sqrt(a*c) / a (92)
> y[max] := eval(y, t=t[max])
y_max := -sqrt(a*c) / (a*(2*c - b*sqrt(a*c) / a)) (93)
> solve(z2, t)

```

$$\frac{4^{1/3} (c (b + \sqrt{-4ac + b^2}) a)^{1/3}}{2a} + \frac{c 4^{2/3}}{2 (c (b + \sqrt{-4ac + b^2}) a)^{1/3}}, \quad (94)$$

$$- \frac{4^{1/3} (c (b + \sqrt{-4ac + b^2}) a)^{1/3}}{4a} - \frac{c 4^{2/3}}{4 (c (b + \sqrt{-4ac + b^2}) a)^{1/3}}$$

$$+ \frac{\text{I}\sqrt{3} \left(\frac{4^{1/3} (c (b + \sqrt{-4ac + b^2}) a)^{1/3}}{2a} - \frac{c 4^{2/3}}{2 (c (b + \sqrt{-4ac + b^2}) a)^{1/3}} \right)}{2},$$

$$- \frac{4^{1/3} (c (b + \sqrt{-4ac + b^2}) a)^{1/3}}{4a} - \frac{c 4^{2/3}}{4 (c (b + \sqrt{-4ac + b^2}) a)^{1/3}}$$

$$- \frac{\text{I}\sqrt{3} \left(\frac{4^{1/3} (c (b + \sqrt{-4ac + b^2}) a)^{1/3}}{2a} - \frac{c 4^{2/3}}{2 (c (b + \sqrt{-4ac + b^2}) a)^{1/3}} \right)}{2}$$

$$> t[i] := \frac{4^{1/3} (c (b + \sqrt{-4ac + b^2}) a)^{1/3}}{2a} + \frac{c 4^{2/3}}{2 (c (b + \sqrt{-4ac + b^2}) a)^{1/3}}$$

$$t_i := \frac{4^{1/3} (c (b + \sqrt{-4ac + b^2}) a)^{1/3}}{2a} + \frac{c 4^{2/3}}{2 (c (b + \sqrt{-4ac + b^2}) a)^{1/3}} \quad (95)$$

$$> \text{simplify}(\%)$$

$$\frac{2 \cdot 2^{1/3} ac}{(c (b + \sqrt{-4ac + b^2}) a)^{1/3}} + \frac{2^{2/3} (c (b + \sqrt{-4ac + b^2}) a)^{1/3}}{2a} \quad (96)$$

$$> y[i] := \text{eval} \left(\frac{t}{a \cdot t^2 + b \cdot t + c}, t \right)$$

$$= \frac{\frac{2 \cdot 2^{1/3} ac}{(c (b + \sqrt{-4ac + b^2}) a)^{1/3}} + \frac{2^{2/3} (c (b + \sqrt{-4ac + b^2}) a)^{1/3}}{2a}}{2a} \quad (97)$$

$$y_i := \left(\frac{2 \cdot 2^{1/3} a c}{\left(c \left(b + \sqrt{-4 a c + b^2} \right) a \right)^{1/3}} + 2^{2/3} \left(c \left(b + \sqrt{-4 a c + b^2} \right) a \right)^{1/3} \right) / \quad (97)$$

$$\left(2 a \left(\frac{\left(\frac{2 \cdot 2^{1/3} a c}{\left(c \left(b + \sqrt{-4 a c + b^2} \right) a \right)^{1/3}} + 2^{2/3} \left(c \left(b + \sqrt{-4 a c + b^2} \right) a \right)^{1/3} \right)^2}{4 a} \right. \right.$$

$$\left. \left. + \frac{b \left(\frac{2 \cdot 2^{1/3} a c}{\left(c \left(b + \sqrt{-4 a c + b^2} \right) a \right)^{1/3}} + 2^{2/3} \left(c \left(b + \sqrt{-4 a c + b^2} \right) a \right)^{1/3} \right)}{2 a} + c \right) \right)$$

$$\begin{aligned} & \gg \text{mu}[m] := \text{eval}(z1, t=t[\text{max}]) \\ & \mu_m := \frac{1}{2c - \frac{b\sqrt{ac}}{a}} + \frac{\sqrt{ac}(-2\sqrt{ac} + b)}{a \left(2c - \frac{b\sqrt{ac}}{a} \right)^2} \quad (98) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \gg \text{restart :} \\ & \gg \text{solve} \left\{ \left\{ t_i = \frac{2 \cdot 2^{1/3} a c}{\left(c \left(b + \sqrt{-4 a c + b^2} \right) a \right)^{1/3}} + 2^{2/3} \left(c \left(b + \sqrt{-4 a c + b^2} \right) a \right)^{1/3} \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{\sqrt{ac}}{a \left(2c - \frac{b\sqrt{ac}}{a} \right)}, t_{\text{max}} = -\frac{\sqrt{ac}}{a} \right\}, \{a, b, c\} \right\} \\ & \left\{ a = \frac{t_{\text{max}}^2}{y_{\text{max}} \left(t_i^3 - 3 t_i t_{\text{max}}^2 + 2 t_{\text{max}}^3 \right)}, b = \frac{t_i \left(t_i^2 - 3 t_{\text{max}}^2 \right)}{\left(t_i^3 - 3 t_i t_{\text{max}}^2 + 2 t_{\text{max}}^3 \right) y_{\text{max}}}, c \right. \\ & \left. = \frac{t_{\text{max}}^4}{y_{\text{max}} \left(t_i^3 - 3 t_i t_{\text{max}}^2 + 2 t_{\text{max}}^3 \right)} \right\} \quad (99) \\ & \gg a := \frac{t_{\text{max}}^2}{y_{\text{max}} \left(t_i^3 - 3 t_i t_{\text{max}}^2 + 2 t_{\text{max}}^3 \right)}; b := \frac{t_i \left(t_i^2 - 3 t_{\text{max}}^2 \right)}{\left(t_i^3 - 3 t_i t_{\text{max}}^2 + 2 t_{\text{max}}^3 \right) y_{\text{max}}}; c := \\ & \frac{t_{\text{max}}^4}{y_{\text{max}} \left(t_i^3 - 3 t_i t_{\text{max}}^2 + 2 t_{\text{max}}^3 \right)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a &:= \frac{r_{\max}^2}{y_{\max} (r_i^3 - 3 t_i r_{\max}^2 + 2 r_{\max}^3)} \\
 b &:= \frac{t_i (r_i^2 - 3 r_{\max}^2)}{(r_i^3 - 3 t_i r_{\max}^2 + 2 r_{\max}^3) y_{\max}} \\
 c &:= \frac{r_{\max}^4}{y_{\max} (r_i^3 - 3 t_i r_{\max}^2 + 2 r_{\max}^3)}
 \end{aligned} \tag{100}$$

$$\begin{aligned}
 > Y := \frac{t}{a \cdot r^2 + b \cdot t + c} \\
 Y &:= t \left/ \left(\frac{r_{\max}^2 r^2}{y_{\max} (r_i^3 - 3 t_i r_{\max}^2 + 2 r_{\max}^3)} + \frac{t_i (r_i^2 - 3 r_{\max}^2) t}{(r_i^3 - 3 t_i r_{\max}^2 + 2 r_{\max}^3) y_{\max}} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{r_{\max}^4}{y_{\max} (r_i^3 - 3 t_i r_{\max}^2 + 2 r_{\max}^3)} \right) \right.
 \end{aligned} \tag{101}$$

$$\begin{aligned}
 > \text{simplify}(\%) \\
 &\frac{t y_{\max} (t_i + 2 t_{\max}) (-t_{\max} + t_i)^2}{r_{\max}^4 + t (t - 3 t_i) r_{\max}^2 + t t_i^3}
 \end{aligned} \tag{102}$$

> restart :
 > # Model 4 (Dave, 1971)

$$\begin{aligned}
 > y := a + b \cdot t + c \cdot r^2 & \qquad y := c r^2 + b t + a
 \end{aligned} \tag{103}$$

$$\begin{aligned}
 > z1 := \text{diff}(y, t) & \qquad z1 := 2 c t + b
 \end{aligned} \tag{104}$$

$$\begin{aligned}
 > z2 := \text{diff}(z1, t) & \qquad z2 := 2 c
 \end{aligned} \tag{105}$$

$$\begin{aligned}
 > \text{solve}(z1, t) & \qquad -\frac{b}{2 c}
 \end{aligned} \tag{106}$$

$$\begin{aligned}
 > t[\text{max}] := -\frac{b}{2 c} & \qquad t_{\max} := -\frac{b}{2 c}
 \end{aligned} \tag{107}$$

```
> y[max] := eval(y, t=t[max])
```

$$y_{\max} := -\frac{b^2}{4c} + a \quad (108)$$

```
=
> solve(z2, t)
> # t[i] degeri yoktur.
> # 2 parametre ile dönüşüm sağlanamaz.
> solve(z2, t)
>
>
```

```
> restart :
> # Model 5 (Cobby ve Lee Du, 1978)
```

```
> y := a - b*t - a*exp(-c*t)
```

$$y := a - b t - a e^{-ct} \quad (109)$$

```
> z1 := diff(y, t)
```

$$z1 := -b + a c e^{-ct} \quad (110)$$

```
> z2 := diff(z1, t)
```

$$z2 := -a c^2 e^{-ct} \quad (111)$$

```
> solve(z1, t)
```

$$-\frac{\ln\left(\frac{b}{ac}\right)}{c} \quad (112)$$

```
> t[max] := -\frac{\ln\left(\frac{b}{ac}\right)}{c}
```

$$t_{\max} := -\frac{\ln\left(\frac{b}{ac}\right)}{c} \quad (113)$$

```
> y[max] := eval(y, t=t[max])
```

$$y_{\max} := a + \frac{b \ln\left(\frac{b}{ac}\right)}{c} - \frac{b}{c} \quad (114)$$

```
=
> solve(z2, t)
> # t[i] degeri yoktur.
> # 2 parametre ile dönüşüm sağlanamaz.
>
>
```

```
> restart :
> # Model 6 (Logaritmik Lineer Model, Singh ve Gopal, 1982)
```

```
> y := a + b*t + c*log(t)
```

$$y := a + b \cdot t + c \cdot \log(t) \quad (115)$$

```

|
|                                      $y := a + b t + c \ln(t)$                                      (115)
| > z1 := diff(y, t)
|                                      $z1 := b + \frac{c}{t}$                                      (116)
| > z2 := diff(z1, t)
|                                      $z2 := -\frac{c}{t^2}$                                      (117)
| > solve(z1, t)
|                                      $-\frac{c}{b}$                                      (118)
| > t[max] :=  $-\frac{c}{b}$ 
|                                      $t_{\max} := -\frac{c}{b}$                                      (119)
| > y[max] := eval(y, t=t[max])
|                                      $y_{\max} := a - c + c \ln\left(-\frac{c}{b}\right)$  (120)
| > solve(z2, t)
| > # t[i] degeri yoktur.
| > # 2 parametre ile dönüşüm sağlanamaz.
| >
| > restart :
| > # Model 7 (Jenkins ve Ferrell, 1984)
| >
| >  $y := a \cdot t \cdot \exp(-c \cdot t)$ 
|                                      $y := a t e^{-ct}$                                      (121)
| > z1 := diff(y, t)
|                                      $z1 := a e^{-ct} - a t c e^{-ct}$  (122)
| > z2 := diff(z1, t)
|                                      $z2 := -2 a c e^{-ct} + a t c^2 e^{-ct}$  (123)
| > solve(z1, t)
|                                      $\frac{1}{c}$                                      (124)
| > t[max] :=  $\frac{1}{c}$ 
|                                      $t_{\max} := \frac{1}{c}$                                      (125)
| > y[max] := eval(y, t=t[max])

```

$$y_{\max} := \frac{a e^{-1}}{c} \quad (126)$$

> solve(z2, t)

$$\frac{2}{c} \quad (127)$$

> t[i] := $\frac{2}{c}$

$$t_i := \frac{2}{c} \quad (128)$$

> y[i] := eval(y, t=t[i])

$$y_i := \frac{2 a e^{-2}}{c} \quad (129)$$

> mu[m] := eval(z1, t=t[i])

$$\mu_m := -a e^{-2} \quad (130)$$

> restart :

> solve($\left\{ \mu_m = -a e^{-2}, t_i = \frac{2}{c} \right\}, \{a, c\}$)

$$\left\{ a = -\frac{\mu_m}{e^{-2}}, c = \frac{2}{t_i} \right\} \quad (131)$$

> a := $-\frac{\mu_m}{e^{-2}}$; c := $\frac{2}{t_i}$

$$\begin{aligned} a &:= -\frac{\mu_m}{e^{-2}} \\ c &:= \frac{2}{t_i} \end{aligned} \quad (132)$$

> Y := a*t*exp(-c*t)

$$Y := -\frac{\mu_m t e^{-\frac{2t}{t_i}}}{e^{-2}} \quad (133)$$

> restart :

> solve($\left\{ \mu_m = -a e^{-2}, t_{\max} = \frac{1}{c} \right\}, \{a, c\}$)

$$\left\{ a = -\frac{\mu_m}{e^{-2}}, c = \frac{1}{t_{\max}} \right\} \quad (134)$$

> a := $-\frac{\mu_m}{e^{-2}}$; c := $\frac{1}{t_{\max}}$

$$a := -\frac{\mu_m}{e^{-2}}$$

$$c := \frac{1}{t_{\max}}$$
(135)

> $Y := a \cdot t \cdot \exp(-c \cdot t)$

$$Y := -\frac{\mu_m t e^{-\frac{t}{t_{\max}}}}{e^{-2}}$$
(136)

> restart :

$$\text{solve}\left(\left\{y_{\max} = \frac{a e^{-1}}{c}, t_{\max} = \frac{1}{c}\right\}, \{a, c\}\right)$$

$$\left\{a = \frac{y_{\max}}{e^{-1} t_{\max}}, c = \frac{1}{t_{\max}}\right\}$$
(137)

$$a := \frac{y_{\max}}{e^{-1} t_{\max}}; c := \frac{1}{t_{\max}}$$

$$a := \frac{y_{\max}}{e^{-1} t_{\max}}$$

$$c := \frac{1}{t_{\max}}$$
(138)

> $Y := a \cdot t \cdot \exp(-c \cdot t)$

$$Y := \frac{y_{\max} t e^{-\frac{t}{t_{\max}}}}{e^{-1} t_{\max}}$$
(139)

> restart :

$$\text{solve}\left(\left\{y_{\max} = \frac{a e^{-1}}{c}, t_i = \frac{2}{c}\right\}, \{a, c\}\right)$$

$$\left\{a = \frac{2 y_{\max}}{e^{-1} t_i}, c = \frac{2}{t_i}\right\}$$
(140)

$$a := \frac{2 y_{\max}}{e^{-1} t_i}; c := \frac{2}{t_i}$$

$$a := \frac{2 y_{\max}}{e^{-1} t_i}$$

$$c := \frac{2}{t_i}$$
(141)

> $Y := a \cdot t \cdot \exp(-c \cdot t)$

$$Y := \frac{2 y_{\max} t e^{-\frac{2t}{t_i}}}{e^{-1} t_i} \quad (142)$$

> restart :
> # Model 8 (Wilink, 1987)

> $y := a + b \cdot \exp(-k \cdot t) + c \cdot t$ (143)

> $z1 := \text{diff}(y, t)$ (144)

> $z2 := \text{diff}(z1, t)$ (145)

> solve(z1, t) (146)

> $t[\max] := -\frac{\ln\left(\frac{c}{b k}\right)}{k}$

> $t_{\max} := -\frac{\ln\left(\frac{c}{b k}\right)}{k}$ (147)

> $y[\max] := \text{eval}(y, t=t[\max])$ (148)

> solve(z2, t)
> # t[i] degeri yoktur. ikinci türev üstel fonksiyon olduğu için .
> # 2 parametre ile dönüşüm sağlanamaz.
> restart :
> # Model 9 (Ali ve Schaffer , 1987)

> $y := a + b \cdot t + c \cdot t^2 + d \cdot \log\left(\frac{1}{t}\right) + f \cdot \log\left(\frac{1}{t^2}\right)$ (149)

> $z1 := \text{diff}(y, t)$ (150)

$$\begin{aligned} &> z2 := \text{diff}(z1, t) \\ & z2 := 2c + \frac{d}{t^2} + \frac{2f}{t^2} \end{aligned} \quad (151)$$

$$\begin{aligned} &> \text{solve}(z1, t) \\ & -\frac{b + \sqrt{b^2 + 8cd + 16cf}}{4c}, -\frac{b + \sqrt{b^2 + 8cd + 16cf}}{4c} \end{aligned} \quad (152)$$

$$\begin{aligned} &> t[\text{max}] := -\frac{b + \sqrt{b^2 + 8cd + 16cf}}{4c} \\ & t_{\text{max}} := -\frac{b + \sqrt{b^2 + 8cd + 16cf}}{4c} \end{aligned} \quad (153)$$

$$\begin{aligned} &> y[\text{max}] := \text{eval}(y, t=t[\text{max}]) \\ y_{\text{max}} := a - \frac{b(b + \sqrt{b^2 + 8cd + 16cf})}{4c} + \frac{(b + \sqrt{b^2 + 8cd + 16cf})^2}{16c} + d \ln \left(\right. \\ & \left. - \frac{4c}{b + \sqrt{b^2 + 8cd + 16cf}} \right) + f \ln \left(\frac{16c^2}{(b + \sqrt{b^2 + 8cd + 16cf})^2} \right) \end{aligned} \quad (154)$$

$$\begin{aligned} &> \text{solve}(z2, t) \\ & \frac{\sqrt{-2c(d+2f)}}{2c}, -\frac{\sqrt{-2c(d+2f)}}{2c} \end{aligned} \quad (155)$$

$$\begin{aligned} &> t[i] := -\frac{\sqrt{-2c(d+2f)}}{2c} \\ & t_i := -\frac{\sqrt{-2c(d+2f)}}{2c} \end{aligned} \quad (156)$$

$$\begin{aligned} &> y[i] := \text{eval} \left(a + b \cdot t + c \cdot t^2 + d \cdot \log \left(\frac{1}{t} \right) + f \cdot \log \left(\frac{1}{t^2} \right), t=t[i] \right) \\ y_i := a - \frac{b\sqrt{-2c(d+2f)}}{2c} - \frac{d}{2} - f + d \ln \left(-\frac{2c}{\sqrt{-2c(d+2f)}} \right) + f \ln \left(-\frac{2c}{d+2f} \right) \end{aligned} \quad (157)$$

$$\begin{aligned} &> \mu_m := \text{eval}(z1, t=t[i]) \\ \mu_m := b - \sqrt{-2c(d+2f)} + \frac{2dc}{\sqrt{-2c(d+2f)}} + \frac{4fc}{\sqrt{-2c(d+2f)}} \end{aligned} \quad (158)$$

> restart :

$$\begin{aligned} &> \text{solve} \left(\left\{ t_{\text{max}} = -\frac{b + \sqrt{b^2 + 8cd + 16cf}}{4c}, y_{\text{max}} = a - \frac{b(b + \sqrt{b^2 + 8cd + 16cf})}{4c} \right\} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{(b + \sqrt{b^2 + 8cd + 16cf})^2}{16c} + d \ln \left(-\frac{4c}{b + \sqrt{b^2 + 8cd + 16cf}} \right) \\
& + f \ln \left(\frac{16c^2}{(b + \sqrt{b^2 + 8cd + 16cf})^2} \right), t_i = -\frac{\sqrt{-2c(d+2f)}}{2c}, y_i = a \\
& - \frac{b\sqrt{-2c(d+2f)}}{2c} - \frac{d}{2} - f + d \ln \left(-\frac{2c}{\sqrt{-2c(d+2f)}} \right) + f \ln \left(-\frac{2c}{d+2f} \right), \mu_m \\
& = b - \sqrt{-2c(d+2f)} + \frac{2dc}{\sqrt{-2c(d+2f)}} + \frac{4fc}{\sqrt{-2c(d+2f)}} \Bigg\}, \{a, b, c, d, f\} \\
\left. \begin{aligned}
& a = - \left(2 \ln \left(\frac{1}{t_i} \right) \ln \left(\frac{1}{t_{\max}} \right) \mu_m t_i^2 t_{\max} - 2 \ln \left(\frac{1}{t_{\max}^2} \right) \ln \left(\frac{1}{t_i} \right) \mu_m t_i^2 t_{\max} + 2 \ln \left(\frac{1}{t_i} \right) \mu_m t_i^2 t_{\max} \right. \\
& + \ln \left(\frac{1}{t_i^2} \right) \mu_m t_{\max}^3 + 4 \ln \left(\frac{1}{t_{\max}} \right) \mu_m t_i^3 - 2 \ln \left(\frac{1}{t_{\max}} \right) \mu_m t_{\max} t_i^2 + 4 \ln \left(\frac{1}{t_{\max}} \right) \mu_m t_i t_{\max}^2 \\
& - 2 \ln \left(\frac{1}{t_{\max}^2} \right) \mu_m t_i^3 + \ln \left(\frac{1}{t_{\max}^2} \right) \mu_m t_i^2 t_{\max} - 2 \ln \left(\frac{1}{t_{\max}^2} \right) \mu_m t_i t_{\max}^2 - 4 \ln \left(\frac{1}{t_i} \right) \mu_m t_{\max} t_i^2 \\
& - 2 \ln \left(\frac{1}{t_i} \right) \mu_m t_{\max}^3 - 2 \ln \left(\frac{1}{t_i^2} \right) t_i^2 y_{\max} + 4 \ln \left(\frac{1}{t_i} \right) t_i t_{\max} y_{\max} - 2 \ln \left(\frac{1}{t_i^2} \right) t_{\max}^2 y_{\max} \\
& - 4 \ln \left(\frac{1}{t_{\max}} \right) t_i^2 y_i + 8 \ln \left(\frac{1}{t_{\max}} \right) t_i t_{\max} y_i - 4 \ln \left(\frac{1}{t_{\max}} \right) t_{\max}^2 y_i + 2 \ln \left(\frac{1}{t_{\max}^2} \right) t_i^2 y_i \\
& \left. - 4 \ln \left(\frac{1}{t_{\max}^2} \right) t_i t_{\max} y_i + 2 \ln \left(\frac{1}{t_{\max}^2} \right) t_{\max}^2 y_i + 4 \ln \left(\frac{1}{t_i} \right) t_i^2 y_{\max} - 8 \ln \left(\frac{1}{t_i} \right) t_i t_{\max} y_{\max} \right) \quad (159)
\end{aligned} \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 4 \ln\left(\frac{1}{t_i}\right) t_{\max}^2 y_{\max} \Big/ \left(2 \ln\left(\frac{1}{t_i^2}\right) t_i^2 - 2 \ln\left(\frac{1}{t_i^2}\right) t_i t_{\max} + \ln\left(\frac{1}{t_i^2}\right) t_{\max}^2 \right. \\
& + 2 \ln\left(\frac{1}{t_{\max}}\right) t_i^2 - 4 \ln\left(\frac{1}{t_{\max}}\right) t_i t_{\max} + 2 \ln\left(\frac{1}{t_{\max}}\right) t_{\max}^2 - \ln\left(\frac{1}{t_{\max}^2}\right) t_i^2 \\
& + 2 \ln\left(\frac{1}{t_{\max}^2}\right) t_i t_{\max} - \ln\left(\frac{1}{t_{\max}^2}\right) t_{\max}^2 - 2 \ln\left(\frac{1}{t_i}\right) t_i^2 + 4 \ln\left(\frac{1}{t_i}\right) t_i t_{\max} - 2 \ln\left(\frac{1}{t_i}\right) \\
& \left. t_{\max}^2 \right), b = \frac{\mu_m (t_i^2 + t_{\max}^2)}{t_i^2 - 2 t_i t_{\max} + t_{\max}^2}, c = -\frac{\mu_m t_{\max}}{2 (t_i^2 - 2 t_i t_{\max} + t_{\max}^2)}, d = \left(\ln\left(\frac{1}{t_i}\right) \mu_m t_i^2 t_{\max} \right. \\
& - \ln\left(\frac{1}{t_{\max}^2}\right) \mu_m t_i^2 t_{\max} + 2 \mu_m t_i^3 - 3 \mu_m t_{\max} t_i^2 + 2 \mu_m t_{\max}^2 t_i - \mu_m t_{\max}^3 - 2 t_i^2 y_i + 2 t_i^2 y_{\max} \\
& + 4 t_i t_{\max} y_i - 4 t_i t_{\max} y_{\max} - 2 t_{\max}^2 y_i + 2 t_{\max}^2 y_{\max} \Big/ \left(\ln\left(\frac{1}{t_i^2}\right) t_i^2 - 2 \ln\left(\frac{1}{t_i^2}\right) t_i t_{\max} \right. \\
& + \ln\left(\frac{1}{t_i^2}\right) t_{\max}^2 + 2 \ln\left(\frac{1}{t_{\max}}\right) t_i^2 - 4 \ln\left(\frac{1}{t_{\max}}\right) t_i t_{\max} + 2 \ln\left(\frac{1}{t_{\max}}\right) t_{\max}^2 - \ln\left(\frac{1}{t_{\max}^2}\right) t_i^2 \\
& + 2 \ln\left(\frac{1}{t_{\max}^2}\right) t_i t_{\max} - \ln\left(\frac{1}{t_{\max}^2}\right) t_{\max}^2 - 2 \ln\left(\frac{1}{t_i}\right) t_i^2 + 4 \ln\left(\frac{1}{t_i}\right) t_i t_{\max} - 2 \ln\left(\frac{1}{t_i}\right) \\
& \left. t_{\max}^2 \right), f = \left(2 \ln\left(\frac{1}{t_{\max}}\right) \mu_m t_{\max} t_i^2 - 2 \ln\left(\frac{1}{t_i}\right) \mu_m t_{\max} t_i^2 - 2 \mu_m t_i^3 + 3 \mu_m t_{\max} t_i^2 - 2 \mu_m \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left. \left(\begin{aligned}
& \ell_{\max}^2 t_i + \mu_m \ell_{\max}^3 + 2 \ell_i^2 y_i - 2 \ell_i^2 y_{\max} - 4 t_i t_{\max} y_i + 4 t_i t_{\max} y_{\max} + 2 \ell_{\max}^2 y_i - 2 \ell_{\max}^2 y_{\max} \\
& \left/ \left(2 \left(\ln \left(\frac{1}{\ell_i^2} \right) \ell_i^2 - 2 \ln \left(\frac{1}{\ell_i^2} \right) t_i t_{\max} + \ln \left(\frac{1}{\ell_i^2} \right) \ell_{\max}^2 + 2 \ln \left(\frac{1}{\ell_{\max}^2} \right) \ell_i^2 \right. \right. \right. \\
& - 4 \ln \left(\frac{1}{\ell_{\max}^2} \right) t_i t_{\max} + 2 \ln \left(\frac{1}{\ell_{\max}^2} \right) \ell_{\max}^2 - \ln \left(\frac{1}{\ell_{\max}^2} \right) \ell_i^2 + 2 \ln \left(\frac{1}{\ell_{\max}^2} \right) t_i t_{\max} \\
& \left. \left. \left. - \ln \left(\frac{1}{\ell_{\max}^2} \right) \ell_{\max}^2 - 2 \ln \left(\frac{1}{\ell_i^2} \right) \ell_i^2 + 4 \ln \left(\frac{1}{\ell_i^2} \right) t_i t_{\max} - 2 \ln \left(\frac{1}{\ell_i^2} \right) \ell_{\max}^2 \right) \right) \right\} \\
> a := & - \left(2 \ln \left(\frac{1}{\ell_i^2} \right) \ln \left(\frac{1}{\ell_{\max}^2} \right) \mu_m \ell_i^2 t_{\max} - 2 \ln \left(\frac{1}{\ell_{\max}^2} \right) \ln \left(\frac{1}{\ell_i^2} \right) \mu_m \ell_i^2 t_{\max} + 2 \ln \left(\frac{1}{\ell_i^2} \right) \mu_m \ell_i^2 t_{\max} \right. \\
& + \ln \left(\frac{1}{\ell_i^2} \right) \mu_m \ell_{\max}^3 + 4 \ln \left(\frac{1}{\ell_{\max}^2} \right) \mu_m \ell_i^3 - 2 \ln \left(\frac{1}{\ell_{\max}^2} \right) \mu_m t_{\max} \ell_i^2 + 4 \ln \left(\frac{1}{\ell_{\max}^2} \right) \mu_m t_i \ell_{\max}^2 \\
& - 2 \ln \left(\frac{1}{\ell_{\max}^2} \right) \mu_m \ell_i^3 + \ln \left(\frac{1}{\ell_{\max}^2} \right) \mu_m \ell_i^2 t_{\max} - 2 \ln \left(\frac{1}{\ell_{\max}^2} \right) \mu_m t_i \ell_{\max}^2 - 4 \ln \left(\frac{1}{\ell_i^2} \right) \mu_m t_{\max} \ell_i^2 \\
& - 2 \ln \left(\frac{1}{\ell_i^2} \right) \mu_m \ell_{\max}^3 - 2 \ln \left(\frac{1}{\ell_i^2} \right) \ell_i^2 y_{\max} + 4 \ln \left(\frac{1}{\ell_i^2} \right) t_i t_{\max} y_{\max} - 2 \ln \left(\frac{1}{\ell_i^2} \right) \ell_{\max}^2 y_{\max} \\
& - 4 \ln \left(\frac{1}{\ell_{\max}^2} \right) \ell_i^2 y_i + 8 \ln \left(\frac{1}{\ell_{\max}^2} \right) t_i t_{\max} y_i - 4 \ln \left(\frac{1}{\ell_{\max}^2} \right) \ell_{\max}^2 y_i + 2 \ln \left(\frac{1}{\ell_{\max}^2} \right) \ell_i^2 y_i \\
& - 4 \ln \left(\frac{1}{\ell_{\max}^2} \right) t_i t_{\max} y_i + 2 \ln \left(\frac{1}{\ell_{\max}^2} \right) \ell_{\max}^2 y_i + 4 \ln \left(\frac{1}{\ell_i^2} \right) \ell_i^2 y_{\max} - 8 \ln \left(\frac{1}{\ell_i^2} \right) t_i t_{\max} y_{\max} \\
& + 4 \ln \left(\frac{1}{\ell_i^2} \right) \ell_{\max}^2 y_{\max} \left. \right) \left/ \left(2 \left(\ln \left(\frac{1}{\ell_i^2} \right) \ell_i^2 - 2 \ln \left(\frac{1}{\ell_i^2} \right) t_i t_{\max} + \ln \left(\frac{1}{\ell_i^2} \right) \ell_{\max}^2 \right. \right. \right. \\
& + 2 \ln \left(\frac{1}{\ell_{\max}^2} \right) \ell_i^2 - 4 \ln \left(\frac{1}{\ell_{\max}^2} \right) t_i t_{\max} + 2 \ln \left(\frac{1}{\ell_{\max}^2} \right) \ell_{\max}^2 - \ln \left(\frac{1}{\ell_{\max}^2} \right) \ell_i^2 \\
& + 2 \ln \left(\frac{1}{\ell_{\max}^2} \right) t_i t_{\max} - \ln \left(\frac{1}{\ell_{\max}^2} \right) \ell_{\max}^2 - 2 \ln \left(\frac{1}{\ell_i^2} \right) \ell_i^2 + 4 \ln \left(\frac{1}{\ell_i^2} \right) t_i t_{\max} - 2 \ln \left(\frac{1}{\ell_i^2} \right) \\
& \left. \left. \left. \ell_{\max}^2 \right) \right) ; b = \frac{\mu_m (\ell_i^2 + \ell_{\max}^2)}{\ell_i^2 - 2 t_i t_{\max} + \ell_{\max}^2} ; c := - \frac{\mu_m t_{\max}}{2 (\ell_i^2 - 2 t_i t_{\max} + \ell_{\max}^2)} ; d := \left(\ln \left(\frac{1}{\ell_i^2} \right) \mu_m \right. \\
& \ell_i^2 t_{\max} - \ln \left(\frac{1}{\ell_{\max}^2} \right) \mu_m \ell_i^2 t_{\max} + 2 \mu_m \ell_i^3 - 3 \mu_m t_{\max} \ell_i^2 + 2 \mu_m \ell_{\max}^2 t_i - \mu_m \ell_{\max}^3 - 2 \ell_i^2 y_i + 2 \\
& \left. \left. \left. \ell_i^2 y_{\max} + 4 t_i t_{\max} y_i - 4 t_i t_{\max} y_{\max} - 2 \ell_{\max}^2 y_i + 2 \ell_{\max}^2 y_{\max} \right) \right) \left/ \left(\ln \left(\frac{1}{\ell_i^2} \right) \ell_i^2 \right. \right. \\
& \left. \left. - 2 \ln \left(\frac{1}{\ell_i^2} \right) t_i t_{\max} + \ln \left(\frac{1}{\ell_i^2} \right) \ell_{\max}^2 + 2 \ln \left(\frac{1}{\ell_{\max}^2} \right) \ell_i^2 - 4 \ln \left(\frac{1}{\ell_{\max}^2} \right) t_i t_{\max} + 2 \ln \left(\frac{1}{\ell_{\max}^2} \right) \right) \right)
\end{aligned}
\right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\begin{aligned}
& t_{\max}^2 - \ln\left(\frac{1}{t_{\max}^2}\right) t_i^2 + 2 \ln\left(\frac{1}{t_{\max}^2}\right) t_i t_{\max} - \ln\left(\frac{1}{t_{\max}^2}\right) t_{\max}^2 - 2 \ln\left(\frac{1}{t_i}\right) t_i^2 \\
& + 4 \ln\left(\frac{1}{t_i}\right) t_i t_{\max} - 2 \ln\left(\frac{1}{t_i}\right) t_{\max}^2 \Big); f := \left(2 \ln\left(\frac{1}{t_{\max}}\right) \mu_m t_{\max} t_i^2 \right. \\
& - 2 \ln\left(\frac{1}{t_i}\right) \mu_m t_{\max} t_i^2 - 2 \mu_m t_i^3 + 3 \mu_m t_{\max} t_i^2 - 2 \mu_m t_{\max}^2 t_i + \mu_m t_{\max}^3 + 2 t_i^2 y_i - 2 t_{\max}^2 y_{\max} \\
& \left. - 4 t_i t_{\max} y_i + 4 t_i t_{\max} y_{\max} + 2 t_{\max}^2 y_i - 2 t_{\max}^2 y_{\max} \right) / \left(2 \left(\ln\left(\frac{1}{t_i}\right) t_i^2 - 2 \ln\left(\frac{1}{t_{\max}}\right) t_i t_{\max} \right. \right. \\
& \left. \left. + \ln\left(\frac{1}{t_{\max}}\right) t_{\max}^2 + 2 \ln\left(\frac{1}{t_{\max}}\right) t_i^2 - 4 \ln\left(\frac{1}{t_{\max}}\right) t_i t_{\max} + 2 \ln\left(\frac{1}{t_{\max}}\right) t_{\max}^2 - \ln\left(\frac{1}{t_{\max}^2}\right) t_i^2 \right. \right. \\
& \left. \left. + 2 \ln\left(\frac{1}{t_{\max}^2}\right) t_i t_{\max} - \ln\left(\frac{1}{t_{\max}^2}\right) t_{\max}^2 - 2 \ln\left(\frac{1}{t_i}\right) t_i^2 + 4 \ln\left(\frac{1}{t_i}\right) t_i t_{\max} - 2 \ln\left(\frac{1}{t_i}\right) \right. \right. \\
& \left. \left. t_{\max}^2 \right) \right) \\
a := & - \left(2 \ln\left(\frac{1}{t_i}\right) \ln\left(\frac{1}{t_{\max}}\right) \mu_m t_i^2 t_{\max} - 2 \ln\left(\frac{1}{t_{\max}}\right) \ln\left(\frac{1}{t_i}\right) \mu_m t_i^2 t_{\max} + 2 \ln\left(\frac{1}{t_i}\right) \mu_m t_i^2 t_{\max} \right. \\
& + \ln\left(\frac{1}{t_i}\right) \mu_m t_{\max}^3 + 4 \ln\left(\frac{1}{t_{\max}}\right) \mu_m t_i^3 - 2 \ln\left(\frac{1}{t_{\max}}\right) \mu_m t_{\max} t_i^2 + 4 \ln\left(\frac{1}{t_{\max}}\right) \mu_m t_i t_{\max}^2 \\
& - 2 \ln\left(\frac{1}{t_{\max}}\right) \mu_m t_i^3 + \ln\left(\frac{1}{t_{\max}}\right) \mu_m t_i^2 t_{\max} - 2 \ln\left(\frac{1}{t_{\max}}\right) \mu_m t_i t_{\max}^2 - 4 \ln\left(\frac{1}{t_i}\right) \mu_m t_{\max} t_i^2 \\
& - 2 \ln\left(\frac{1}{t_i}\right) \mu_m t_{\max}^3 - 2 \ln\left(\frac{1}{t_i}\right) t_i^2 y_{\max} + 4 \ln\left(\frac{1}{t_i}\right) t_i t_{\max} y_{\max} - 2 \ln\left(\frac{1}{t_i}\right) t_{\max}^2 y_{\max} \\
& - 4 \ln\left(\frac{1}{t_{\max}}\right) t_i^2 y_i + 8 \ln\left(\frac{1}{t_{\max}}\right) t_i t_{\max} y_i - 4 \ln\left(\frac{1}{t_{\max}}\right) t_{\max}^2 y_i + 2 \ln\left(\frac{1}{t_{\max}}\right) t_i^2 y_i \\
& - 4 \ln\left(\frac{1}{t_{\max}}\right) t_i t_{\max} y_i + 2 \ln\left(\frac{1}{t_{\max}}\right) t_{\max}^2 y_i + 4 \ln\left(\frac{1}{t_i}\right) t_i^2 y_{\max} - 8 \ln\left(\frac{1}{t_i}\right) t_i t_{\max} y_{\max} \\
& \left. + 4 \ln\left(\frac{1}{t_i}\right) t_{\max}^2 y_{\max} \right) / \left(2 \ln\left(\frac{1}{t_i}\right) t_i^2 - 4 \ln\left(\frac{1}{t_i}\right) t_i t_{\max} + 2 \ln\left(\frac{1}{t_i}\right) t_{\max}^2 \right. \\
& \left. + 4 \ln\left(\frac{1}{t_{\max}}\right) t_i^2 - 8 \ln\left(\frac{1}{t_{\max}}\right) t_i t_{\max} + 4 \ln\left(\frac{1}{t_{\max}}\right) t_{\max}^2 - 2 \ln\left(\frac{1}{t_{\max}}\right) t_i^2 \right. \\
& \left. + 4 \ln\left(\frac{1}{t_{\max}}\right) t_i t_{\max} - 2 \ln\left(\frac{1}{t_{\max}}\right) t_{\max}^2 - 4 \ln\left(\frac{1}{t_i}\right) t_i^2 + 8 \ln\left(\frac{1}{t_i}\right) t_i t_{\max} - 4 \ln\left(\frac{1}{t_i}\right) \right. \\
& \left. t_{\max}^2 \right)
\end{aligned}
\end{aligned}$$

$$b = \frac{\mu_m (r_i^2 + r_{\max}^2)}{r_i^2 - 2 t_i t_{\max} + r_{\max}^2}$$

$$c := -\frac{\mu_m t_{\max}}{2 r_i^2 - 4 t_i t_{\max} + 2 r_{\max}^2}$$

$$\begin{aligned}
d := & \left(\ln\left(\frac{1}{r_i^2}\right) \mu_m r_i^2 t_{\max} - \ln\left(\frac{1}{r_{\max}^2}\right) \mu_m r_i^2 t_{\max} + 2 \mu_m r_i^3 - 3 \mu_m t_{\max} r_i^2 + 2 \mu_m r_{\max}^2 t_i - \mu_m r_{\max}^3 \right. \\
& \left. - 2 r_i^2 y_i + 2 r_i^2 y_{\max} + 4 t_i t_{\max} y_i - 4 t_i t_{\max} y_{\max} - 2 r_{\max}^2 y_i + 2 r_{\max}^2 y_{\max} \right) / \left(\ln\left(\frac{1}{r_i^2}\right) r_i^2 \right. \\
& \left. - 2 \ln\left(\frac{1}{r_i^2}\right) t_i t_{\max} + \ln\left(\frac{1}{r_i^2}\right) r_{\max}^2 + 2 \ln\left(\frac{1}{t_{\max}}\right) r_i^2 - 4 \ln\left(\frac{1}{t_{\max}}\right) t_i t_{\max} + 2 \ln\left(\frac{1}{t_{\max}}\right) \right. \\
& \left. r_{\max}^2 - \ln\left(\frac{1}{r_{\max}^2}\right) r_i^2 + 2 \ln\left(\frac{1}{r_{\max}^2}\right) t_i t_{\max} - \ln\left(\frac{1}{r_{\max}^2}\right) r_{\max}^2 - 2 \ln\left(\frac{1}{t_i}\right) r_i^2 \right. \\
& \left. + 4 \ln\left(\frac{1}{t_i}\right) t_i t_{\max} - 2 \ln\left(\frac{1}{t_i}\right) r_{\max}^2 \right) \\
f := & \left(2 \ln\left(\frac{1}{t_{\max}}\right) \mu_m t_{\max} r_i^2 - 2 \ln\left(\frac{1}{t_i}\right) \mu_m t_{\max} r_i^2 - 2 \mu_m r_i^3 + 3 \mu_m t_{\max} r_i^2 - 2 \mu_m r_{\max}^2 t_i + \mu_m \right. \\
& \left. r_{\max}^3 + 2 r_i^2 y_i - 2 r_i^2 y_{\max} - 4 t_i t_{\max} y_i + 4 t_i t_{\max} y_{\max} + 2 r_{\max}^2 y_i - 2 r_{\max}^2 y_{\max} \right) / \\
& \left(2 \ln\left(\frac{1}{r_i^2}\right) r_i^2 - 4 \ln\left(\frac{1}{r_i^2}\right) t_i t_{\max} + 2 \ln\left(\frac{1}{r_i^2}\right) r_{\max}^2 + 4 \ln\left(\frac{1}{t_{\max}}\right) r_i^2 - 8 \ln\left(\frac{1}{t_{\max}}\right) t_i t_{\max} \right. \\
& \left. + 4 \ln\left(\frac{1}{t_{\max}}\right) r_{\max}^2 - 2 \ln\left(\frac{1}{r_{\max}^2}\right) r_i^2 + 4 \ln\left(\frac{1}{r_{\max}^2}\right) t_i t_{\max} - 2 \ln\left(\frac{1}{r_{\max}^2}\right) r_{\max}^2 - 4 \ln\left(\frac{1}{t_i}\right) \right. \\
& \left. r_i^2 + 8 \ln\left(\frac{1}{t_i}\right) t_i t_{\max} - 4 \ln\left(\frac{1}{t_i}\right) r_{\max}^2 \right)
\end{aligned} \tag{160}$$

> simplify(a)

$$\begin{aligned}
& \left(\left(2 \ln\left(\frac{1}{r_i^2}\right) \mu_m t_{\max} r_i^2 + (2 \mu_m t_i - 2 y_i) r_{\max}^2 + (-\mu_m r_i^2 + 4 t_i y_i) t_{\max} + 2 \mu_m r_i^3 - 2 \right. \right. \\
& \left. \left. r_i^2 y_i \right) \ln\left(\frac{1}{r_{\max}^2}\right) + \left(-2 \ln\left(\frac{1}{r_i^2}\right) \mu_m r_i^2 t_{\max} + (-4 \mu_m t_i + 4 y_i) r_{\max}^2 + (2 \mu_m r_i^2 - 8 t_i y_i) t_{\max} \right. \right. \\
& \left. \left. - 4 \mu_m r_i^3 + 4 r_i^2 y_i \right) \ln\left(\frac{1}{t_{\max}}\right) - 2 \left(\ln\left(\frac{1}{r_i^2}\right) - 2 \ln\left(\frac{1}{t_i}\right) \right) \left(\frac{\mu_m r_{\max}^3}{2} - r_{\max}^2 y_{\max} \right) \right)
\end{aligned} \tag{161}$$

$$\begin{aligned}
& -t_{\max} \left(\frac{\mu_m t_{\max}^2}{2} + \left(-\frac{\mu_m t_i}{2} + y_i - y_{\max} \right) t_{\max} + t_i (\mu_m t_i - y_i + y_{\max}) \right) \Bigg) \Bigg/ \left(\left(t_i \right. \right. \\
& \left. \left. - t_{\max} \right)^2 \left(\ln \left(\frac{1}{t_i^2} \right) - 2 \ln \left(\frac{1}{t_i} \right) - \ln \left(\frac{1}{t_{\max}^2} \right) + 2 \ln \left(\frac{1}{t_{\max}} \right) \right) \right); f := \\
& \left(2 \ln \left(\frac{1}{t_{\max}} \right) \mu_m t_{\max} t_i^2 - 2 \ln \left(\frac{1}{t_i} \right) \mu_m t_{\max} t_i^2 - 2 (t_i - t_{\max}) \left(\frac{\mu_m t_{\max}^2}{2} + \left(-\frac{\mu_m t_i}{2} + y_i \right. \right. \right. \\
& \left. \left. - y_{\max} \right) t_{\max} + t_i (\mu_m t_i - y_i + y_{\max}) \right) \Bigg) \Bigg/ \left(2 (t_i - t_{\max})^2 \left(\ln \left(\frac{1}{t_i^2} \right) - 2 \ln \left(\frac{1}{t_i} \right) \right. \right. \\
& \left. \left. - \ln \left(\frac{1}{t_{\max}^2} \right) + 2 \ln \left(\frac{1}{t_{\max}} \right) \right) \right); \\
a := & \left(\left(2 \ln \left(\frac{1}{t_i} \right) \mu_m t_{\max} t_i^2 + (2 \mu_m t_i - 2 y_i) t_{\max}^2 + (-\mu_m t_i^2 + 4 t_i y_i) t_{\max} + 2 \mu_m t_i^3 - 2 \right. \right. \\
& \left. \left. t_i^2 y_i \right) \ln \left(\frac{1}{t_{\max}^2} \right) + \left(-2 \ln \left(\frac{1}{t_i^2} \right) \mu_m t_i^2 t_{\max} + (-4 \mu_m t_i + 4 y_i) t_{\max}^2 + (2 \mu_m t_i^2 - 8 t_i y_i) t_{\max} \right. \right. \\
& \left. \left. - 4 \mu_m t_i^3 + 4 t_i^2 y_i \right) \ln \left(\frac{1}{t_{\max}} \right) - 2 \left(\ln \left(\frac{1}{t_i^2} \right) - 2 \ln \left(\frac{1}{t_i} \right) \right) \left(\frac{\mu_m t_{\max}^3}{2} - t_{\max}^2 y_{\max} \right. \right. \\
& \left. \left. + t_i (\mu_m t_i + 2 y_{\max}) t_{\max} - t_i^2 y_{\max} \right) \right) \Bigg/ \left(2 (t_i - t_{\max})^2 \left(\ln \left(\frac{1}{t_i^2} \right) - 2 \ln \left(\frac{1}{t_i} \right) \right. \right. \\
& \left. \left. - \ln \left(\frac{1}{t_{\max}^2} \right) + 2 \ln \left(\frac{1}{t_{\max}} \right) \right) \right) \\
b := & \frac{\mu_m (t_i^2 + t_{\max}^2)}{t_i^2 - 2 t_i t_{\max} + t_{\max}^2} \\
c := & -\frac{\mu_m t_{\max}}{2 t_i^2 - 4 t_i t_{\max} + 2 t_{\max}^2} \\
d := & \left(-\ln \left(\frac{1}{t_{\max}^2} \right) \mu_m t_i^2 t_{\max} + \ln \left(\frac{1}{t_i^2} \right) \mu_m t_i^2 t_{\max} + 2 (t_i - t_{\max}) \left(\frac{\mu_m t_{\max}^2}{2} + \left(-\frac{\mu_m t_i}{2} + y_i \right. \right. \right. \\
& \left. \left. - y_{\max} \right) t_{\max} + t_i (\mu_m t_i - y_i + y_{\max}) \right) \Bigg) \Bigg/ \left((t_i - t_{\max})^2 \left(\ln \left(\frac{1}{t_i^2} \right) - 2 \ln \left(\frac{1}{t_i} \right) \right. \right. \\
& \left. \left. - \ln \left(\frac{1}{t_{\max}^2} \right) + 2 \ln \left(\frac{1}{t_{\max}} \right) \right) \right)
\end{aligned}$$

$$f := \left(2 \ln\left(\frac{1}{t_{\max}}\right) \mu_m t_{\max} t_i^2 - 2 \ln\left(\frac{1}{t_i}\right) \mu_m t_{\max} t_i^2 - 2 (t_i - t_{\max}) \left(\frac{\mu_m t_{\max}^2}{2} + \left(-\frac{\mu_m t_i}{2} + y_i - y_{\max} \right) t_{\max} + t_i (\mu_m t_i - y_i + y_{\max}) \right) \right) / \left(2 (t_i - t_{\max})^2 \left(\ln\left(\frac{1}{t_i^2}\right) - 2 \ln\left(\frac{1}{t_i}\right) - \ln\left(\frac{1}{t_{\max}^2}\right) + 2 \ln\left(\frac{1}{t_{\max}}\right) \right) \right) \quad (164)$$

$$\triangleright Y := a + b \cdot t + c \cdot t^2 + d \cdot \log\left(\frac{1}{t}\right) + f \cdot \log\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

$$Y := \left(\left(2 \ln\left(\frac{1}{t_i}\right) \mu_m t_{\max} t_i^2 + (2 \mu_m t_i - 2 y_i) t_{\max}^2 + (-\mu_m t_i^2 + 4 t_i y_i) t_{\max} + 2 \mu_m t_i^3 - 2 t_i^2 y_i \right) \ln\left(\frac{1}{t_{\max}^2}\right) + \left(-2 \ln\left(\frac{1}{t_i^2}\right) \mu_m t_i^2 t_{\max} + (-4 \mu_m t_i + 4 y_i) t_{\max}^2 + (2 \mu_m t_i^2 - 8 t_i y_i) t_{\max} - 4 \mu_m t_i^3 + 4 t_i^2 y_i \right) \ln\left(\frac{1}{t_{\max}}\right) - 2 \left(\ln\left(\frac{1}{t_i^2}\right) - 2 \ln\left(\frac{1}{t_i}\right) \right) \left(\frac{\mu_m t_{\max}^3}{2} - t_{\max}^2 y_{\max} + t_i (\mu_m t_i + 2 y_{\max}) t_{\max} - t_i^2 y_{\max} \right) \right) / \left(2 (t_i - t_{\max})^2 \left(\ln\left(\frac{1}{t_i^2}\right) - 2 \ln\left(\frac{1}{t_i}\right) - \ln\left(\frac{1}{t_{\max}^2}\right) + 2 \ln\left(\frac{1}{t_{\max}}\right) \right) \right) + \frac{\mu_m (t_i^2 + t_{\max}^2) t}{t_i^2 - 2 t_i t_{\max} + t_{\max}^2} - \frac{\mu_m t_{\max} t^2}{2 t_i^2 - 4 t_i t_{\max} + 2 t_{\max}^2} + \left(\left(-\ln\left(\frac{1}{t_{\max}^2}\right) \mu_m t_i^2 t_{\max} + \ln\left(\frac{1}{t_i^2}\right) \mu_m t_i^2 t_{\max} + 2 (t_i - t_{\max}) \left(\frac{\mu_m t_{\max}^2}{2} + \left(-\frac{\mu_m t_i}{2} + y_i - y_{\max} \right) t_{\max} + 2 \ln\left(\frac{1}{t_{\max}}\right) \right) \right) + \left(\left(2 \ln\left(\frac{1}{t_{\max}}\right) \mu_m t_{\max} t_i^2 - 2 \ln\left(\frac{1}{t_i}\right) \mu_m t_{\max} t_i^2 - 2 (t_i - t_{\max}) \left(\frac{\mu_m t_{\max}^2}{2} + \left(-\frac{\mu_m t_i}{2} + y_i - y_{\max} \right) t_{\max} + t_i (\mu_m t_i - y_i + y_{\max}) \right) \right) \ln\left(\frac{1}{t_i^2}\right) \right) \right) / \left(2 (t_i - t_{\max})^2 \left(\ln\left(\frac{1}{t_i^2}\right) - 2 \ln\left(\frac{1}{t_i}\right) - \ln\left(\frac{1}{t_{\max}^2}\right) + 2 \ln\left(\frac{1}{t_{\max}}\right) \right) \right)$$

\triangleright *simplify*(%)

$$\left(\left(2 \ln\left(\frac{1}{t}\right) \mu_m t_i^2 t_{\max} - 2 \ln\left(\frac{1}{t_i}\right) \mu_m t_{\max} t_i^2 + (2 \mu_m t - 2 \mu_m t_i + 2 y_i) t_{\max}^2 + (-t^2 \mu_m + \mu_m t_i^2) \right) \right) \quad (166)$$

$$\begin{aligned}
& -4 t_i y_i t_{\max} + 2 t_i^2 (\mu_m t - \mu_m t_i + y_i) \ln\left(\frac{1}{t_{\max}^2}\right) + \left(-2 \ln\left(\frac{1}{t^2}\right) \mu_m t_i^2 t_{\max}\right. \\
& + 2 \ln\left(\frac{1}{t_i^2}\right) \mu_m t_{\max}^2 t + (-4 \mu_m t + 4 \mu_m t_i - 4 y_i) t_{\max}^2 + (2 t^2 \mu_m - 2 \mu_m t_i^2 + 8 t_i y_i) t_{\max} \\
& - 4 t_i^2 (\mu_m t - \mu_m t_i + y_i) \ln\left(\frac{1}{t_{\max}}\right) + \left(2 \ln\left(\frac{1}{t_i}\right) \mu_m t_{\max} t_i^2 + 2 (t_i - t_{\max}) \left(\frac{\mu_m t_{\max}^2}{2}\right.\right. \\
& \left.\left. + \left(-\frac{\mu_m t_i}{2} + y_i - y_{\max}\right) t_{\max} + t_i (\mu_m t_i - y_i + y_{\max})\right)\right) \ln\left(\frac{1}{t^2}\right) + \left(-2 \ln\left(\frac{1}{t_i^2}\right) \mu_m t_i^2 t_{\max}\right. \\
& \left. - 4 (t_i - t_{\max}) \left(\frac{\mu_m t_{\max}^2}{2} + \left(-\frac{\mu_m t_i}{2} + y_i - y_{\max}\right) t_{\max} + t_i (\mu_m t_i - y_i + y_{\max})\right)\right) \\
& \left. \ln\left(\frac{1}{t}\right) - 2 \left(\ln\left(\frac{1}{t_i}\right) - \frac{\ln\left(\frac{1}{t_i^2}\right)}{2}\right) \left(\mu_m t_{\max}^3 + (-2 \mu_m t - 2 y_{\max}) t_{\max}^2 + (t^2 \mu_m + 2 \mu_m t_i^2\right.\right. \\
& \left.\left. + 4 t_i y_{\max}) t_{\max} - 2 t_i^2 (\mu_m t + y_{\max})\right)\right) \Bigg/ \left(2 (t_i - t_{\max})^2 \left(-\ln\left(\frac{1}{t^2}\right) + 2 \ln\left(\frac{1}{t_i}\right)\right.\right. \\
& \left.\left. + \ln\left(\frac{1}{t_{\max}^2}\right) - 2 \ln\left(\frac{1}{t_{\max}}\right)\right)\right)
\end{aligned}$$

>

>

> restart :

> # Model 10 (Karışık logaritmik model, Guo ve Swalve, 1995)

> $y := a + b \cdot t^{\frac{1}{2}} + c \cdot \log(t)$

$$y := a + b \sqrt{t} + c \ln(t) \tag{167}$$

>

> $z1 := \text{diff}(y, t)$

$$\tag{168}$$

$$z1 := \frac{b}{2\sqrt{t}} + \frac{c}{t} \quad (168)$$

> $z2 := \text{diff}(z1, t)$

$$z2 := -\frac{b}{4t^{3/2}} - \frac{c}{t^2} \quad (169)$$

> $\text{solve}(z1, t)$

$$\frac{4c^2}{b^2} \quad (170)$$

> $t[\text{max}] := \frac{4c^2}{b^2}$

$$t_{\text{max}} := \frac{4c^2}{b^2} \quad (171)$$

> $y[\text{max}] := \text{eval}(y, t=t[\text{max}])$

$$y_{\text{max}} := a + b\sqrt{4} \sqrt{\frac{c^2}{b^2}} + c \ln\left(\frac{4c^2}{b^2}\right) \quad (172)$$

> $\text{solve}(z2, t)$

$$\frac{16c^2}{b^2} \quad (173)$$

> $t[i] := \frac{16c^2}{b^2}$

$$t_i := \frac{16c^2}{b^2} \quad (174)$$

> $y[i] := \text{eval}\left(a + b \cdot t^{\frac{1}{2}} + c \cdot \log(t), t=t[i]\right)$

$$y_i := a + b\sqrt{16} \sqrt{\frac{c^2}{b^2}} + c \ln\left(\frac{16c^2}{b^2}\right) \quad (175)$$

> $\mu[m] := \text{eval}(z1, t=t[i])$

$$\mu_m := \frac{b\sqrt{16}}{32 \sqrt{\frac{c^2}{b^2}}} + \frac{b^2}{16c} \quad (176)$$

> $\text{restart} :$

> $\text{solve}\left(\left\{t[\text{max}] = \frac{4c^2}{b^2}, y[\text{max}] = a + b\sqrt{4} \sqrt{\frac{c^2}{b^2}} + c \ln\left(\frac{4c^2}{b^2}\right), t[i] = \frac{16c^2}{b^2}\right\}, \{a, b, c\}\right)$

> $\text{restart} :$

$$\begin{aligned} &> \text{solve} \left(\left\{ t[\max] = \frac{4c^2}{b^2}, y[\max] = a + b\sqrt{4} \sqrt{\frac{c^2}{b^2}} + c \ln \left(\frac{4c^2}{b^2} \right), y[i] = a + b\sqrt{16} \sqrt{\frac{c^2}{b^2}} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + c \ln \left(\frac{16c^2}{b^2} \right) \right\}, \{a, b, c\} \right) \end{aligned}$$

$$\left\{ a = -\frac{1}{2(-1 + \ln(2))} \left(2 \text{RootOf}(-Z^2 t_{\max} - 1) \sqrt{t_{\max}} y_i - 2 \text{RootOf}(-Z^2 t_{\max} \right. \right. \quad (177)$$

$$\left. - 1) \sqrt{t_{\max}} y_{\max} + \ln(t_{\max}) y_i - \ln(t_{\max}) y_{\max} - 2 y_{\max} \ln(2) + 2 y_{\max} \right), b =$$

$$-\frac{2 \text{RootOf}(-Z^2 t_{\max} - 1) (y_i - y_{\max})}{2 - 2 \ln(2)}, c = -\frac{y_i - y_{\max}}{2 - 2 \ln(2)} \left. \right\}, \left\{ a =$$

$$-\frac{1}{2(1 + \ln(2))} \left(2 \text{RootOf}(-Z^2 t_{\max} - 1) \sqrt{t_{\max}} y_i - 2 \text{RootOf}(-Z^2 t_{\max} - 1) \sqrt{t_{\max}} y_{\max} \right.$$

$$\left. + \ln(t_{\max}) y_i - \ln(t_{\max}) y_{\max} - 2 y_{\max} \ln(2) - 2 y_{\max} \right), b =$$

$$-\frac{2 \text{RootOf}(-Z^2 t_{\max} - 1) (y_i - y_{\max})}{-2 - 2 \ln(2)}, c = -\frac{y_i - y_{\max}}{-2 - 2 \ln(2)} \left. \right\}$$

>

> restart :

$$\begin{aligned} &> \text{solve} \left(\left\{ t[\max] = \frac{4c^2}{b^2}, y[\max] = a + b\sqrt{4} \sqrt{\frac{c^2}{b^2}} + c \ln \left(\frac{4c^2}{b^2} \right), \mu[m] = \frac{b\sqrt{16}}{32 \sqrt{\frac{c^2}{b^2}}} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{b^2}{16c} \right\}, \{a, b, c\} \right) \end{aligned}$$

$$\left\{ a = y_{\max} - 8 \text{RootOf}(-Z^2 - t_{\max}) \mu_m \sqrt{t_{\max}} + 4 t_{\max} \mu_m \ln(t_{\max}), b = 8 \text{RootOf}(-Z^2 \right. \quad (178)$$

$$\left. - t_{\max}) \mu_m, c = -4 t_{\max} \mu_m \right\}, \left\{ a = -\frac{4 t_{\max} \mu_m \ln(t_{\max})}{3} - \frac{8 \text{RootOf}(-Z^2 - t_{\max}) \mu_m \sqrt{t_{\max}}}{3} \right.$$

$$\left. + y_{\max}, b = \frac{8 \text{RootOf}(-Z^2 - t_{\max}) \mu_m}{3}, c = \frac{4 t_{\max} \mu_m}{3} \right\}$$

>

>

> restart :

$$\begin{aligned}
&> \text{solve} \left(\left\{ t[\max] = \frac{4c^2}{b^2}, y[i] = a + b\sqrt{16} \sqrt{\frac{c^2}{b^2}} + c \ln \left(\frac{16c^2}{b^2} \right), t[i] = \frac{16c^2}{b^2} \right\}, \{a, b, c\} \right) \\
&> \\
&> \\
&> \text{restart :} \\
&> \text{solve} \left(\left\{ t[\max] = \frac{4c^2}{b^2}, \text{mu}[m] = \frac{b\sqrt{16}}{32\sqrt{\frac{c^2}{b^2}}} + \frac{b^2}{16c}, t[i] = \frac{16c^2}{b^2} \right\}, \{a, b, c\} \right) \\
&> \\
&> \text{restart :} \\
&> \text{solve} \left(\left\{ t[\max] = \frac{4c^2}{b^2}, \text{mu}[m] = \frac{b\sqrt{16}}{32\sqrt{\frac{c^2}{b^2}}} + \frac{b^2}{16c}, y[i] = a + b\sqrt{16} \sqrt{\frac{c^2}{b^2}} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + c \ln \left(\frac{16c^2}{b^2} \right) \right\}, \{a, b, c\} \right) \\
&\left\{ a = y_i - 16 \text{RootOf}(-Z^2 - t_{\max}) \mu_m \sqrt{t_{\max}} + 4 t_{\max} \mu_m \ln(4 t_{\max}), b = 8 \text{RootOf}(-Z^2 \right. \\
&\quad \left. - t_{\max}) \mu_m, c = -4 t_{\max} \mu_m \right\}, \left\{ a = -\frac{4 t_{\max} \mu_m \ln(4 t_{\max})}{3} \right. \\
&\quad \left. - \frac{16 \text{RootOf}(-Z^2 - t_{\max}) \mu_m \sqrt{t_{\max}}}{3} + y_i, b = \frac{8 \text{RootOf}(-Z^2 - t_{\max}) \mu_m}{3}, c = \frac{4 t_{\max} \mu_m}{3} \right\} \quad (179) \\
&> \\
&> \\
&> \text{restart :} \\
&> \text{solve} \left(\left\{ t[i] = \frac{16c^2}{b^2}, y[\max] = a + b\sqrt{4} \sqrt{\frac{c^2}{b^2}} + c \ln \left(\frac{4c^2}{b^2} \right), y[i] = a + b\sqrt{16} \sqrt{\frac{c^2}{b^2}} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + c \ln \left(\frac{16c^2}{b^2} \right) \right\}, \{a, b, c\} \right) \\
&\left\{ a = -\frac{1}{2(-1 + \ln(2))} \left(2 \text{RootOf}(-Z^2 t_i - 1) \sqrt{t_i} y_i - 2 \text{RootOf}(-Z^2 t_i - 1) \sqrt{t_i} y_{\max} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \ln \left(\frac{t_i}{4} \right) y_i - \ln \left(\frac{t_i}{4} \right) y_{\max} - 2 y_{\max} \ln(2) + 2 y_{\max} \right), b = \right. \\
&\quad \left. -\frac{4 \text{RootOf}(-Z^2 t_i - 1) (y_i - y_{\max})}{2 - 2 \ln(2)}, c = -\frac{y_i - y_{\max}}{2 - 2 \ln(2)} \right\}, \left\{ a = \right. \quad (180)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{2(1 + \ln(2))} \left(2 \operatorname{RootOf}(\underline{Z}^2 t_i - 1) \sqrt{t_i} y_i - 2 \operatorname{RootOf}(\underline{Z}^2 t_i - 1) \sqrt{t_i} y_{\max} \right. \\
& \left. + \ln\left(\frac{t_i}{4}\right) y_i - \ln\left(\frac{t_i}{4}\right) y_{\max} - 2 y_{\max} \ln(2) - 2 y_{\max} \right), b = \\
& \left. - \frac{4 \operatorname{RootOf}(\underline{Z}^2 t_i - 1) (y_i - y_{\max})}{-2 - 2 \ln(2)}, c = - \frac{y_i - y_{\max}}{-2 - 2 \ln(2)} \right\}
\end{aligned}$$

>
>
>

restart :

$$\begin{aligned}
> \text{solve} \left(\left[\begin{aligned} \mu[m] &= \frac{b \sqrt{16}}{32 \sqrt{\frac{c^2}{b^2}}} + \frac{b^2}{16c}, y[\max] = a + b \sqrt{4} \sqrt{\frac{c^2}{b^2}} + c \ln\left(\frac{4c^2}{b^2}\right), t[i] \\ &= \frac{16c^2}{b^2} \end{aligned} \right], \{a, b, c\} \right)
\end{aligned}$$

$$\left\{ a = y_{\max} - 2 \operatorname{RootOf}(\underline{Z}^2 - t_i) \mu_m \sqrt{t_i} + t_i \mu_m \ln\left(\frac{t_i}{4}\right), b = 4 \operatorname{RootOf}(\underline{Z}^2 - t_i) \mu_m, c = -t_i \mu_m \right\}, \quad (181)$$

$$\begin{aligned}
\left\{ a = - \frac{t_i \mu_m \ln\left(\frac{t_i}{4}\right)}{3} - \frac{2 \operatorname{RootOf}(\underline{Z}^2 - t_i) \mu_m \sqrt{t_i}}{3} + y_{\max}, b = \frac{4 \operatorname{RootOf}(\underline{Z}^2 - t_i) \mu_m}{3}, c \right. \\
\left. = \frac{t_i \mu_m}{3} \right\}
\end{aligned}$$

>
>
>

restart :

$$\begin{aligned}
> \text{solve} \left(\left[\begin{aligned} \mu[m] &= \frac{b \sqrt{16}}{32 \sqrt{\frac{c^2}{b^2}}} + \frac{b^2}{16c}, y[\max] = a + b \sqrt{4} \sqrt{\frac{c^2}{b^2}} + c \ln\left(\frac{4c^2}{b^2}\right), y[i] = a \\ &+ b \sqrt{16} \sqrt{\frac{c^2}{b^2}} + c \ln\left(\frac{16c^2}{b^2}\right) \end{aligned} \right], \{a, b, c\} \right)
\end{aligned}$$

$$\left\{ a = \frac{1}{2(\ln(2) - 1)} \left(4 \operatorname{RootOf}((8 \ln(2) \mu_m - 8 \mu_m) \underline{Z}^2 + y_i \right. \right. \quad (182)$$

$$\begin{aligned}
& -y_{\max}) \mu_m \sqrt{-\frac{2(y_i \ln(2) - y_i - y_{\max} \ln(2) + y_{\max})}{\mu_m}} + 2y_{\max} \ln(2) - \ln\left(\right. \\
& \left. -\frac{y_i - y_{\max}}{8\mu_m(\ln(2) - 1)} \right) y_i + \ln\left(-\frac{y_i - y_{\max}}{8\mu_m(\ln(2) - 1)} \right) y_{\max} - 2y_{\max} \right), b \\
& = 8 \text{RootOf}\left((8\ln(2)\mu_m - 8\mu_m) _Z^2 + y_i - y_{\max}) \mu_m, c = \frac{y_i - y_{\max}}{2(\ln(2) - 1)} \right), \left\{ a = \right. \\
& \left. -\frac{1}{6(\ln(2) + 1)} \left(4 \text{RootOf}\left((8\ln(2)\mu_m + 8\mu_m) _Z^2 - 3y_i \right. \right. \right. \\
& \left. \left. + 3y_{\max}) \mu_m \sqrt{2} \sqrt{3} \sqrt{\frac{y_i \ln(2) + y_i - y_{\max} \ln(2) - y_{\max}}{\mu_m}} - 6y_{\max} \ln(2) \right. \right. \\
& \left. \left. + 3 \ln\left(\frac{3(y_i - y_{\max})}{8\mu_m(\ln(2) + 1)} \right) y_i - 3 \ln\left(\frac{3(y_i - y_{\max})}{8\mu_m(\ln(2) + 1)} \right) y_{\max} - 6y_{\max} \right) \right), b \\
& \left. = \frac{8 \text{RootOf}\left((8\ln(2)\mu_m + 8\mu_m) _Z^2 - 3y_i + 3y_{\max}) \mu_m, c = \frac{y_i - y_{\max}}{2(\ln(2) + 1)} \right) \right\}
\end{aligned}$$

>
>
>

restart :

$$\begin{aligned}
> \text{solve} \left(\left\{ \begin{aligned} \mu[m] &= \frac{b\sqrt{16}}{32\sqrt{\frac{c^2}{b^2}}} + \frac{b^2}{16c}, y[i] = a + b\sqrt{16}\sqrt{\frac{c^2}{b^2}} + c \ln\left(\frac{16c^2}{b^2}\right), t[i] \\ &= \frac{16c^2}{b^2} \end{aligned} \right\}, \{a, b, c\} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \{a = y_i - 4 \text{RootOf}(_Z^2 - t_i) \mu_m \sqrt{t_i} + t_i \mu_m \ln(t_i), b = 4 \text{RootOf}(_Z^2 - t_i) \mu_m, c = -t_i \mu_m\}, \left\{ a \right. \quad (183) \\
& = -\frac{t_i \mu_m \ln(t_i)}{3} - \frac{4 \text{RootOf}(_Z^2 - t_i) \mu_m \sqrt{t_i}}{3} + y_i, b = \frac{4 \text{RootOf}(_Z^2 - t_i) \mu_m}{3}, c \\
& = \frac{t_i \mu_m}{3} \left. \right\}
\end{aligned}$$

>
>

```

> restart :
> # Model 11 (Cappio – Borlino, 1995)
=
> y := a * t^b * exp(-c*t)
                                     y := a t^b e^{-ct} (184)
=
> z1 := diff(y, t)
                                     z1 := a t^b e^{-ct} \left( -b c e^{-ct} \ln(t) + \frac{b e^{-ct}}{t} \right) (185)
=
> simplify(%)
                                     -a t^b e^{-ct} - 1 b e^{-ct} (\ln(t) c t - 1) (186)
=
> z2 := diff(z1, t)
z2 := a t^b e^{-ct} \left( -b c e^{-ct} \ln(t) + \frac{b e^{-ct}}{t} \right)^2 + a t^b e^{-ct} \left( b c^2 e^{-ct} \ln(t) - \frac{2 b c e^{-ct}}{t} - \frac{b e^{-ct}}{t^2} \right) (187)
=
> solve(z1, t)
                                     \frac{1}{c \operatorname{LambertW}\left(\frac{1}{c}\right)} (188)
=
> t[max] := \frac{1}{c \operatorname{LambertW}\left(\frac{1}{c}\right)}
                                     t_{\max} := \frac{1}{c \operatorname{LambertW}\left(\frac{1}{c}\right)} (189)
=
> y[max] := eval(y, t=t[max])
                                     y_{\max} := a \left( \frac{1}{c \operatorname{LambertW}\left(\frac{1}{c}\right)} \right)^b e^{-\frac{1}{\operatorname{LambertW}\left(\frac{1}{c}\right)}} (190)
=
> solve(z2, t)
e^{\operatorname{RootOf}\left(\_Z^2 b^2 e^{-c e^{-Z}} + 2\_Z + e^2\_Z\_Z^2 - 2\_Z b c e^{-Z} - c e^{-Z} - 2 c e^{-Z} + b e^{-c e^{-Z}} - 1\right)} (191)
=
> t[i] := e^{\operatorname{RootOf}\left(\_Z^2 b^2 e^{-c e^{-Z}} + 2\_Z + e^2\_Z\_Z^2 - 2\_Z b c e^{-Z} - c e^{-Z} - 2 c e^{-Z} + b e^{-c e^{-Z}} - 1\right)}
t_i := e^{\operatorname{RootOf}\left(\_Z^2 b^2 e^{-c e^{-Z}} + 2\_Z + e^2\_Z\_Z^2 - 2\_Z b c e^{-Z} - c e^{-Z} - 2 c e^{-Z} + b e^{-c e^{-Z}} - 1\right)} (192)
=
> y[i] := eval(a * t^b * exp(-c*t), t=t[i])
y_i :=
a
\left( e^{\operatorname{RootOf}\left(\_Z^2 b^2 e^{-c e^{-Z}} + 2\_Z + e^2\_Z\_Z^2 - 2\_Z b c e^{-Z} - c e^{-Z} - 2 c e^{-Z} + b e^{-c e^{-Z}} - 1\right)} \right)^b (193)

```

$$\begin{aligned}
& e^{-c} e^{\text{RootOf}(_Z^2 b^2 e^{-c e^{-Z}} + 2_Z + e^2_Z_Z c^2 - 2_Z b c e^{-Z - c e^{-Z}} - 2 c e^{-Z} + b e^{-c e^{-Z}} - 1)} \\
> \mu[m] := \text{eval}(z1, t=t[i]) \\
\mu_m := & \\
& a \\
& \left(e^{\text{RootOf}(_Z^2 b^2 e^{-c e^{-Z}} + 2_Z + e^2_Z_Z c^2 - 2_Z b c e^{-Z - c e^{-Z}} - 2 c e^{-Z} + b e^{-c e^{-Z}} - 1)} \right)^b \\
& e^{-c} e^{\text{RootOf}(_Z^2 b^2 e^{-c e^{-Z}} + 2_Z + e^2_Z_Z c^2 - 2_Z b c e^{-Z - c e^{-Z}} - 2 c e^{-Z} + b e^{-c e^{-Z}} - 1)} \left(\right. \\
& \left. - b c e^{-c} e^{\text{RootOf}(_Z^2 b^2 e^{-c e^{-Z}} + 2_Z + e^2_Z_Z c^2 - 2_Z b c e^{-Z - c e^{-Z}} - 2 c e^{-Z} + b e^{-c e^{-Z}} - 1)} \right) \\
& \ln \left(e^{\text{RootOf}(_Z^2 b^2 e^{-c e^{-Z}} + 2_Z + e^2_Z_Z c^2 - 2_Z b c e^{-Z - c e^{-Z}} - 2 c e^{-Z} + b e^{-c e^{-Z}} - 1)} \right) \\
& + \frac{b e^{-c} e^{\text{RootOf}(_Z^2 b^2 e^{-c e^{-Z}} + 2_Z + e^2_Z_Z c^2 - 2_Z b c e^{-Z - c e^{-Z}} - 2 c e^{-Z} + b e^{-c e^{-Z}} - 1)}}{e^{\text{RootOf}(_Z^2 b^2 e^{-c e^{-Z}} + 2_Z + e^2_Z_Z c^2 - 2_Z b c e^{-Z - c e^{-Z}} - 2 c e^{-Z} + b e^{-c e^{-Z}} - 1)}} \Big) \\
= & \\
> \text{restart :} \\
= & \\
> \mu_m := & \\
& \text{simplify} \left(a \right. \\
& \left. \left(e^{\text{RootOf}(_Z^2 b^2 e^{-c e^{-Z}} + 2_Z + e^2_Z_Z c^2 - 2_Z b c e^{-Z - c e^{-Z}} - 2 c e^{-Z} + b e^{-c e^{-Z}} - 1)} \right)^b \right. \\
& \left. e^{-c} e^{\text{RootOf}(_Z^2 b^2 e^{-c e^{-Z}} + 2_Z + e^2_Z_Z c^2 - 2_Z b c e^{-Z - c e^{-Z}} - 2 c e^{-Z} + b e^{-c e^{-Z}} - 1)} \left(\right. \right. \\
& \left. \left. - b c e^{-c} e^{\text{RootOf}(_Z^2 b^2 e^{-c e^{-Z}} + 2_Z + e^2_Z_Z c^2 - 2_Z b c e^{-Z - c e^{-Z}} - 2 c e^{-Z} + b e^{-c e^{-Z}} - 1)} \right) \right. \\
& \left. \ln \left(e^{\text{RootOf}(_Z^2 b^2 e^{-c e^{-Z}} + 2_Z + e^2_Z_Z c^2 - 2_Z b c e^{-Z - c e^{-Z}} - 2 c e^{-Z} + b e^{-c e^{-Z}} - 1)} \right) \right)
\end{aligned}$$

$$\mu_m := \left. \left. \left. \left. \left. \frac{b e^{-c \operatorname{RootOf}(_Z^2 b^2 e^{-c e^{-Z}} + 2_Z + e^2_Z_Z c^2 - 2_Z b c e^{-Z} - c e^{-Z} - 2 c e^{-Z} + b e^{-c e^{-Z}} - 1)}}{\operatorname{RootOf}(_Z^2 b^2 e^{-c e^{-Z}} + 2_Z + e^2_Z_Z c^2 - 2_Z b c e^{-Z} - c e^{-Z} - 2 c e^{-Z} + b e^{-c e^{-Z}} - 1)}} \right) \right) \right) \right) \quad (195)$$

$$-a$$

$$\left(e^{\operatorname{RootOf}(_Z^2 b^2 e^{-c e^{-Z}} + 2_Z + e^2_Z_Z c^2 - 2_Z b c e^{-Z} - c e^{-Z} - 2 c e^{-Z} + b e^{-c e^{-Z}} - 1)} \right)^b$$

$$e^{-c \operatorname{RootOf}(_Z^2 b^2 e^{-c e^{-Z}} + 2_Z + e^2_Z_Z c^2 - 2_Z b c e^{-Z} - c e^{-Z} - 2 c e^{-Z} + b e^{-c e^{-Z}} - 1)}$$

$$e^{-c \operatorname{RootOf}(_Z^2 b^2 e^{-c e^{-Z}} + 2_Z + e^2_Z_Z c^2 - 2_Z b c e^{-Z} - c e^{-Z} - 2 c e^{-Z} + b e^{-c e^{-Z}} - 1)}$$

$$- \operatorname{RootOf}(_Z^2 b^2 e^{-c e^{-Z}} + 2_Z + e^2_Z_Z c^2 - 2_Z b c e^{-Z} - c e^{-Z} - 2 c e^{-Z} + b e^{-c e^{-Z}} - 1)$$

$$\left(\ln \left(e^{\operatorname{RootOf}(_Z^2 b^2 e^{-c e^{-Z}} + 2_Z + e^2_Z_Z c^2 - 2_Z b c e^{-Z} - c e^{-Z} - 2 c e^{-Z} + b e^{-c e^{-Z}} - 1)} \right) \right)$$

$$e^{\operatorname{RootOf}(_Z^2 b^2 e^{-c e^{-Z}} + 2_Z + e^2_Z_Z c^2 - 2_Z b c e^{-Z} - c e^{-Z} - 2 c e^{-Z} + b e^{-c e^{-Z}} - 1)} c - 1$$

>
> restart :

$$\text{solve} \left(\left(\left(t_{\max} = \frac{1}{c \operatorname{LambertW}\left(\frac{1}{c}\right)}, y_{\max} = a \left(\frac{1}{c \operatorname{LambertW}\left(\frac{1}{c}\right)} \right)^{b e^{-\frac{1}{\operatorname{LambertW}\left(\frac{1}{c}\right)}}}} \right), t_i \right) \right)$$

$$= e^{\operatorname{RootOf}(_Z^2 b^2 e^{-c e^{-Z}} + 2_Z + e^2_Z_Z c^2 - 2_Z b c e^{-Z} - c e^{-Z} - 2 c e^{-Z} + b e^{-c e^{-Z}} - 1)} \left. \right\}, \{a, b, c\}$$

$$a = \frac{y_{\max}}{e^{\frac{\ln(t_{\max}) \left(\ln(t_{\max})^2 t_{\max}^2 + 2 \ln(t_{\max}) t_i t_{\max} - t_i^2 \ln(t_i) \right) e^{\frac{\ln(t_{\max}) t_{\max}}{\ln(t_{\max}) t_{\max}}}}}{\ln(t_{\max})^2 t_{\max}^2 - 2 \ln(t_{\max}) \ln(t_i) t_i t_{\max} + \ln(t_i)^2 t_i^2}}, b \quad (196)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{e^{\frac{t}{\ln(t_{\max}) t_{\max}}} (\ln(t_{\max})^2 t_{\max}^2 + 2 \ln(t_{\max}) t_i t_{\max} - t_i^2 \ln(t_i))}{\ln(t_{\max})^2 t_{\max}^2 - 2 \ln(t_{\max}) \ln(t_i) t_i t_{\max} + \ln(t_i)^2 t_i^2}, c = \frac{1}{\ln(t_{\max}) t_{\max}} \\
> a = \frac{y_{\max}}{\frac{t_i - t_{\max}}{\ln(t_{\max}) t_{\max}}}; b = \frac{\ln(t_{\max}) (\ln(t_{\max})^2 t_{\max}^2 + 2 \ln(t_{\max}) t_i t_{\max} - t_i^2 \ln(t_i)) e^{\frac{t_i - t_{\max}}{\ln(t_{\max}) t_{\max}}}}{\ln(t_{\max})^2 t_{\max}^2 - 2 \ln(t_{\max}) \ln(t_i) t_i t_{\max} + \ln(t_i)^2 t_i^2} \\
e &= \frac{e^{\frac{t}{\ln(t_{\max}) t_{\max}}} (\ln(t_{\max})^2 t_{\max}^2 + 2 \ln(t_{\max}) t_i t_{\max} - t_i^2 \ln(t_i))}{\ln(t_{\max})^2 t_{\max}^2 - 2 \ln(t_{\max}) \ln(t_i) t_i t_{\max} + \ln(t_i)^2 t_i^2}; c = \frac{1}{\ln(t_{\max}) t_{\max}}; \\
a &= \frac{y_{\max}}{\frac{t_i - t_{\max}}{\ln(t_{\max}) t_{\max}}}; \\
b &= \frac{e^{\frac{t}{\ln(t_{\max}) t_{\max}}} (\ln(t_{\max})^2 t_{\max}^2 + 2 \ln(t_{\max}) t_i t_{\max} - t_i^2 \ln(t_i))}{\ln(t_{\max})^2 t_{\max}^2 - 2 \ln(t_{\max}) \ln(t_i) t_i t_{\max} + \ln(t_i)^2 t_i^2} \\
c &= \frac{1}{\ln(t_{\max}) t_{\max}} \tag{197} \\
> Y := a \cdot t^b \cdot \exp(-c \cdot t) \\
Y &:= a t^b e^{-ct} \tag{198} \\
> simplify(%) \\
a t^b e^{-ct} & \tag{199} \\
> restart : \\
e^{\left(\frac{t_i - t}{\ln(t_{\max}) t_{\max}} \right)} & \frac{(\ln(t_{\max})^2 t_{\max}^2 + 2 \ln(t_{\max}) t_i t_{\max} - t_i^2 \ln(t_i))}{(\ln(t_{\max}) t_{\max} - \ln(t_i) t_i)^2} \\
> Y := a t
\end{aligned}$$

$$Y := at \frac{\frac{t-t}{i}}{e^{\ln(t_{\max})t_{\max}} \left(\ln(t_{\max})^2 t_{\max}^2 + 2 \ln(t_{\max}) \frac{t}{i} t_{\max} - \frac{t^2}{i} \ln(t_i) \right)} \frac{1}{\left(\ln(t_{\max}) \frac{t}{\max} - \ln\left(\frac{t}{i}\right) \right)^2} \quad (200)$$

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler	
Adı Soyadı	Büşra GÜLÇİÇEK
Doğum Yeri	
Doğum Tarihi	
Uyruğu	<input checked="" type="checkbox"/> T.C. <input type="checkbox"/> Diğer:
Telefon	
E-Posta Adresi	
Eğitim Bilgileri	
Lisans	
Üniversite	Bayburt Üniversitesi
Fakülte	Eğitim Fakültesi
Bölümü	İlköğretim Matematik Öğretmenliği
Mezuniyet Yılı	24.05.2019