**T. C.**

**ORDU ÜNİVERSİTESİ**

**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

# PARÇALI SİNGÜLER LİNEER MODELLERDE ALIŞILMIŞ EN KÜÇÜK KARELER TAHMİN EDİCİSİNİN WATSON ETKİNLİĞİNİN AYRIŞIMI

**ZEHRA İLHAN**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**ORDU 2023**

## TEZ BİLDİRİMİ

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan ve kullanılan intihal tespit programının sonuçlarına göre; bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

**ZEHRA İLHAN**

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

# ÖZET

**PARÇALI SİNGÜLER LİNEER MODELLERDE ALIŞILMIŞ EN KÜÇÜK KARELER TAHMİN EDİCİSİNİN WATSON ETKİNLİĞİNİN AYRIŞIMI**

**ZEHRA İLHAN**

**ORDU ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ, 81 SAYFA**

**(TEZ DANIŞMANI: PROF. DR. SELAHATTİN MADEN)**

Bu tez çalışması beş bölüm halinde düzenlenmiştir. Birinci bölümde çalışmanın amacından bahsedilerek deyatlı bir giriş verilmiştir. İkinci bölümde çalışmamızda gerekli olacak olan temel tanımlar, teoremler ve genel bilgiler ifade edilmiştir. Üçüncü bölümde genel lineer modeller ve parçalı singüler lineer modeller altında alışılmış en küçük kareler tahmin edicisi (OLSE) gözönüne alınmıştır. Ayrıca parçalı singüler lineer modeller altındaki en küçük kareler tahmin edicileri için Watson etkinliği araştırılmıştır. Dördüncü bölümde bazı sonuç ve öneriler verilmiştir. Beşinci bölümde tezde yararlanılan bazı kaynaklar listelenmiştir.



**Anahtar Kelimeler:** Matris, Matris Rankı, Bir Matrisin İnversi, Genellşetirilmiş İinvers, Moore-Penrose İnvers, Lineer Model, Parçalı Singüler Lineer Model, Kovaryans Matrisi, Alışılmış En Küçük Kareler Tahmin Edicisi, Watson Etkinliği.

## ABSTRACT

**THE DECOMPOSING OF THE WATSON EFFICIENCY OF ORDINARY LEAST SQUARES ESTIMATOR IN PARTITIONED SINGULAR LINEAR MODELS**

**ZEHRA İLHAN**

**ORDU UNIVERSITY INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES**

**MATHEMATICS**

**MASTER THESIS, 81 PAGES**

**(SUPERVISOR: PROF. DR. SELAHATTİN MADEN)**

This thesis is organized in five chapters. In the first chapter, an introduction is given by mentioning the purpose of the study. In the second part, the basic definitions, theorems and general information that will be required in our study are expressed. In the third section, the ordinary least squares estimators (OLSE), under a general linear models and partitioned singular linear models are considered. Also, Watson efficiently are investigated for the ordinary least squares estimators under the partitioned singular linear models. In the fourth chapter, some conclusions and recommendations are given. In the fifth chapter, some sources used in the thesis are listed.



**Keywords**: Matrix, Rank of Matrix, The Invers of a Matrix, Generalized Inverse, Moore-Penrose Inverse, Linear Model, Partitioned Singular Linear Model, Covariance Matrix, Ordinary Least Squares Estimator, Watson Efficiently.

## TEŞEKKÜR

Tez konusunun belirlenmesinde ve çalışmalarım boyunca her zaman bilgi ve deneyimleriyle yol gösteren danışman hocam Sayın Prof. Dr. Selahattin MADEN' e en içten duygularla teşekkür eder, saygılarımı sunarım.

Ayrıca Lisansüstü eğitimim sırasında kendilerinden ders aldığım ve engin tecrübelerinden en iyi şekilde yararlandığım Üniversitemiz Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümündeki tüm saygı değer hocalarıma teşekkür ederim.

Bu günlere gelmemde büyük emeği olan ve desteklerini hiç bir zaman esirgemeyen canım annem Fatma Kacar, babam Erdoğan Kacar ve kardeşlerim Enes Kacar ve Tuğba Değirmenciye,

Hayatımın her döneminde desteği ile yanımda olan çok sevdiğim kıymetli eşim Hasan İLHAN ve çocuklarım Yusuf Eymen, Yıldız Sena` ya;

Sonsuz Teşekkürler…

# İÇİNDEKİLER

# ŞEKİL LİSTESİ

# ÇİZELGE LİSTESİ

## SİMGELER ve KISALTMALAR LİSTESİ

| | |
|---|---|
| $\mathbb{C}$ | : Kompleks Sayılar Cismi |
| $\mathbb{N}$ | : Doğal Sayılar Kümesi |
| $\mathbb{R}$ | : Reel Sayılar Cismi |
| $\boldsymbol{K_n^m}, \boldsymbol{K^{mxn}}$ | : $K$ Cismi Üzerinde Tanımlı $m \times n$ Boyutlu Matrislerin Kümesi |
| $\boldsymbol{I_n}$ | : $n \times n$ Boyutlu Birim Matris |
| $\boldsymbol{A'}, \boldsymbol{A^T}$ | : $A$ Matrsinin Tranzpozu |
| $\mathbf{Ek}(\boldsymbol{A})$ | : $A$ Matrisinin Ek Matrisi |
| $\lvert\boldsymbol{A}\rvert$ | : $A$ Matrisinin Determinantı |
| $\boldsymbol{A^{-1}}$ | : $A$ Matrisinin İnversi |
| $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{A})$ | : $A$ Matrisinin Rankı |
| $\boldsymbol{A^{\perp}}$ | : $A$ Matrisinin Ortogonal Komplementi |
| $\boldsymbol{\mathcal{N}}(\boldsymbol{A})$ | : $A$ Matrisinin Sıfır Uzayı |
| $\boldsymbol{\Re}(\boldsymbol{A})$ | : $A$ Matrisinin Ranj (veya Sütun) Uzayı |
| $\boldsymbol{A^-}$ | : $A$ Matrisinin Genelleştirilmiş İnversi (veya İç İnversi) |
| $\boldsymbol{A^+}$ | : $A$ Matrisinin Moore-Penrose İnversi |
| $\boldsymbol{OLSE}(\boldsymbol{\beta})$ | : $\beta$ Parametresinin Alışılmış En Küçük Kareler Tahmin Edicisi |
| $\boldsymbol{BLUE}(\boldsymbol{\beta})$ | : $\beta$ Parametresinin En İyi Lineer Yansız Tahmin Edici |
| $\lVert\boldsymbol{u}\rVert$ | : $u$ Vektörünün Öklid Normu |
| $\boldsymbol{boy}(\mathbf{u})$ | : $u$ Vektörünün Boyutu |
| $\boldsymbol{min}\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\}$ | : $a$ ve $b$ Sayılarının Minimumu |
| $\boldsymbol{N}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{V})$ | : $a$ Ortalamalı $V$ Varyanslı Normal Dağılım |
| $\frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z})$ | : $f(z)$ Fonksiyonunun Türevi |
| $\boldsymbol{\sigma^2 V}$ | : Kovaryans Matrisi |
| $\boldsymbol{cov}(\boldsymbol{X})$ | : $X$ Değişkeninin Kovaryansı |
| $\boldsymbol{cov}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ | : $X$ ve $Y$ Değişkenleri Arasındaki Kovaryans |
| $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{X})$ | : $X$ Değişkeninin Beklenen Değeri |
| $\boldsymbol{var}(\boldsymbol{X})$ | : $X$ Değişkeninin Varyansı |

# 1. GİRİŞ

Matris teorisinin kavramları yardımıyla inşa edilen lineer modeler ve çeşitli uygulamaları bugün artık istatistik ve teorik matematik başta olmak üzere, sosyoloji, kimya, fizik ve mühendislik gibi pek çok teknik alanda oldukça önemli hale gelmiştir. Matris kavramı ise uzun yıllardır bilinmekte ve kullanılmaktadır. İngiliz matematikçi Sylvester, 1850 yılında matris kavramını ilk kez kullanmıştır. 1853 yılında bir diğer ingiliz bilgini Hamilton '*Linear and Vector Functions'* isimli eserinde matrislerin birtakım özelliklerinden faydalanmış ise de matris ismini henüz kullanmamıştır. Yine bir ingiliz matematikçi olan Cayley ise 1858 yılında *'Memorie on the Theory of Matrices*' isimli eserinde matris cebirinin bazı temel esaslarını ortaya koymuştur. Daha sonraki yıllarda Fransız matematikçi Laguerre ve Alman matematikçi Frobenius matrislerle ilgili bazı yeni kavramlar ve teoremler üzerinde çalışmalar yapmışlardır.

Singüler bir matrisin inversi kavramı ise ilk kez 1920 yılında Moore (1920, 1935) tarafından ortaya atılmıştır. Ancak 1950 li yılların ortalarına kadar bu konuda herhangi bir sistematik çalışmaya rastlanamamaktadır. 1955 yılında daha önce yapılan çalışmalardan bağımsız olarak, Penrose (1955, 1956) biraz daha farklı bir yoldan da olsa Moore tarafından verilen invers kavramını yeniden ele almıştır. Penrose ile aşağı yukarı aynı zamanda yaşayan bilim adamlarından Rao (1965) tarafından tanımlanan ve geliştirilen Pseuda invers ise Moore ile Penrose tarafından ortaya konulan kısıtlamaların tamamını sağlamamaktadır. Rao, daha sonraki çalışmalarında ise lineer denklemlerle ilgili birçok problemin çözümünde yeterli gelen ve Moore ile Penrose tarafından verilen tanımdan daha zayıf olan bir tanım vermiştir. Rao' nun verdiği bu invers, genelleştirilmiş invers (g-invers) olarak adlandırılmış ve bu inversin çeşitli uygulamaları Rao (1965)' nun çalışmalarında detaylı bir şekilde yer almıştır. Ayrıca genelleştirilmiş inverslerle ilgili gelişmeler ve bu inversin çeşitli uygulamaları Rao tarafından yazılan *Generalized Inverse of Matrices and Its Applications* (Wiley, 1971) isimli kitapta kapsamlı bir şekilde ele alınmıştır.

Matris rankı ile ilgili bilinen bir gerçek şudur ki aynı mertebeden $A$ ve $B$ gibi iki matris verildiğinde bunların benzer olması, yani $UAV = B$ olacak şekilde iki tersinir $U$ ve $V$ matrislerinin mevcut olması için gerek ve yeter şart $A$ ve $B$

matrislerinni ranklarının eşit olmasıdır. Verilen herhangi bir matrisin sütunlarının ya da satırlarının doğrusal bağımsızlığını belirlemek için en basit yöntem, matrisin elementer matris işlemleri yardımıyla satır veya sütun eşelon form indirgenmesidir.

Matrislerden oluşan herhangi bir matematiksel ifade için, bu ifade ile ilgili çeşitli rank eşitlikleri kurulabilir ve bu rank eşitliklerinden yararlanılarak verilen ifadenin çeşitli temel özellikleri ortaya konulabilir. Bazı rank formülleri ise çeşitli blok matrisler ve elementer matris blok işlemleri yardımıyla oluşturulabilir. Son zamanlarda yapılan çalışmalarda bu yöntemlerle pek çok yeni rank eşitlikleri elde edilmiş ve bu rank eşitliklerinden birçok önemli sonuç türetilmiştir.

Tahmin veya parametre tahmini istatistiğin en önemli meşguliyet alanıdır. Eğer bir parametreyi tahmin etmek için bir tek istatistik kullanılıyorsa, bu durumda parametrelerin nokta tahmin edicisi kullanılıyor demektir. Yani nokta tahmin edicisi, bir kitle parametresini tahmin etmek için kullanılan tek bir istatistiktir denilebilir. Genel olarak bir istatistikten bahsediliyorsa, buna bir tahmin edici ve eğer istatistik, belirtilen bir değeri alıyorsa buna da tahmin adı verilir. Bu durumda $\theta$ bir parametre olmak üzere $E(\hat{\theta}) = \theta$ ise, $\hat{\theta}$ istatistiğine $\theta$ parametresinin bir yansız tahmin edicisi, $E(\hat{\theta}) = \theta +$ (herhangi bir sayı) ise, bu durumda $\hat{\theta}$ istatistiğine $\theta$ parametresinin bir yanlı tahmin edicisi denir. Yanlı ve yansız tahmin ediciler arasında seçim söz konusu olduğunda yansız tahmin edicinin seçilmesi doğal olanıdır. Ancak iki yansız tahmin edici arasında seçim söz konusu olduğunda parametreye yakın olma olasılığı daha yüksek olan tahmin edici tercih edilmelidir. Bir parametrenin bir yansız tahmin edicisi, diğer herhangi bir yansız tahmin edicisinden daha küçük varyansa sahip ise, bu durumda bu istatistiğe parametrenin minimum varyanslı yansız tahmin edicisi denir. Öte yandan parametrelerin bir lineer fonksiyonu, gözlemler vektörünün beklenen değerinin bir lineer fonksiyonuna denk ise, bu durumda parametrelerin bu lineer fonksiyonuna tahmin edilebilirdir denir.

İstatistikte etkinlik, çeşitli istatistiksel yöntemlerin karşılaştırılmasında kullanılan bir terim olup özellikle bir tahmin edicinin, bir deneysel tasarımın ya da bir hipotez testinin en iyi olup-olmadığının ölçüsünü ifade emektedir. Etkinlikler genellikle varyans ve ortalama hata kareleri kullanılarak ifade edilmektedir. Genellikle verilen bir yöntem ile kuramsal bir yöntem arasında en iyi yöntemi belirlemek amacıyla karşılaştırma yapmak için kullanılan göreceli etkinlik, yöntemlerin etkinliklerinin oranı olarak da tanımlanmaktadır. Bu nedenle verilen iki yöntemin karşılaştırılmasında kullanılan etkinlik ve göreceli etkinlik aslında teorik olarak verilen yöntem için uygun olan örneklem büyüklüğüne bağlı olacaktır. Fakat çoğunlukla ölçümlerin karşılaştırılmasında temel olarak göreceli etkinliklerin limiti olarak tanımlanan asimptotik göreceli etkinlik kavramı kullanılmaktadır.

İstatistiksel tahminde etkinlik konusu ilk kez Fisher (1922) tarafından ortaya atılmıştır. Fisher tarafından kabul edilmiş olan kritere göre, bir tahmin edicinin varyansı diğer bir tahmin edicinin varyansından daha küçük ise bu onun daha etkin bir tahmin edici olduğu anlamına gelir. Wilks (1932), çalışmalarında dağılım matrislerinin determinantları olarak genelleştirilmiş varyans kavramını ilk kez ortaya atmış ve genelleştirilmiş varyansların oranını vektör değerli parametrelerin tahmininde etkinlik ölçüsü olarak tanımlamıştır. Aitken (1935) alışılmış en küçük kareler tahmin edicisi OLSE' nin genelleştirilmiş varyansını ele almıştır. Watson (1951) ise doktora tezinde genelleştirilmiş varyansların oranı olarak OLSE' nin etkinliğini incelemiştir. Bu nedenle bu etkinlik Watson etkinliği olarak bilinmektedir. OLSE' nin BLUE' ya göre etkinliğini karşılaştırmak için en sık kullanılan yöntemlerden birisi olan Watson etkinliği genelleştirilmiş varyansların (kovaryans matrislerinin determinantlarının) oranı olarak tanımlanır.

Literatürde OLSE ve BLUE tahmin edicilerinin eşitliği ile ilgili birçok çalışma bulunmaktadır. Etkinlik konusu ise literatürde halen yaygın bir şekilde çalışılmaktadır. Bunlardan Liski ve Ark. (1992) bir singüler lineer model için OLSE ve BLUE arasında etkinlik karşılaştırması yapmış ve etkinlik kriterinin üst sınırını elde etmişlerdir. Liu (2000) ise Liski ve arkadaşları tarafından ele alınan konuyu daha genel durum için ele almıştır. Liu ve King (2002) bir lineer modelde OLSE ve BLUE arasında etkinlik karşılaştırması yapmak için iki etkinlik kriteri tanımlamıştır. Balakrishnan ve Rao (2003) BLUE' nun bazı etkinlik özelliklerini vermiştir. Ayrıca Chu ve Styan (2003) çalışmalarında OLSE ve GLSE (genelleştirilmiş en küçük kareler) regresyon doğrularının paralel olduğu durumda üç basit lineer regresyonda OLSE' nin etkinliğini incelemiştir. Chu ve Ark. (2004) bir parçalanmış zayıf singüler lineer model ve bu modelle ilişkili modeller altında parametrenin ve parametrelerin bir alt kümesinin OLSE' lerinin Watson etkinliğinin bir ayrışımını vermişlerdir. Chu ve Ark. (2005) de ise Chu ve Ark. (2004) vermiş oldukları etkinlik ayrışımını alt modeller ve bunların dönüştürülmüş modelleri için ele alınmıştır. Ayrıca Chu ve Ark. (2007) dik parçalanmış model altında Watson etkinliği ile ilişkili olan bir etkinlik çarpanı tanımlamışlardır. Tian ve Wiens (2006) genel lineer modellerde OLSE, WLSE ve BLUE' nun eşitlikleri ve etkinlikleri arasındaki karşılaştırmaları matris rank metotları yardımıyla yapmışlardır. Yang ve Wang (2009) Watson etkinliğinin Öklid normuna dayanan bir alternatif formunu vermiştir. Kesriklioğlu ve Güler (2013) bir parçalanmış lineer model ve bu modelle ilişkili olan bazı modeller altında model matrisinin dik ve V-dik parçalanma koşulları altında bazı Watson etkinlik ayrışımları verilmiştir.

Bu çalışmada bir parçalanmış lineer model ve bu modelle ilgili bazı indirgenmiş modeller ve bir alternatif model ele alınarak ele alınan modeller altında parametrelerin ve alt parametrelerin OLSE' lerinin BLUE' larına göre etkinlikleri ve etkinlik ayrışımları incelenecektir.

## 2. GENEL BİLGİLER

### 2.1 Temel Tanım ve Teoremler

Bu kısımda birsonraki bölümde kullanılacak olan bazı önemli tanımlar ve teoremler ispatsız olarak verilecektir.

**Tanım 2.1**

**i.** $K$ cisim olsun. $m,n \in \mathbb{N}$ ve $1 \le i \le m, 1 \le j \le n$ olmak üzere bütün $(i, j)$ sıralı ikililerin kümesi $A = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ile gösterilsin. $f: A \to K$ fonksiyonu $(i, j) \to f(i, j) = a_{ij}$ olarak tanımlansın. $a_{ij} \in K$ olacak şekilde seçilen $m.$n tane elemanın oluşturduğu tabloya $K$ cismi üzerinde tanımlı $m \times n$ tipinde matris denir. Eğer $K = \mathbb{R}$, reel sayılar kümesi olarak alınırsa matrise reel matris, $K = \mathbb{C}$, kompleks sayılar kümesi olarak alınırsa, matrise kompleks matris denir (Branson R., 1999).

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & .... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .... & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{bmatrix}$$

matrisi kısaca $A = \left[a_{ij}\right]_{m \times n}$ şeklinde gösterilir. Burada $a_{ij}$ elemanı $A$ matrisinin $i.$ satır ve $j.$ sütununa karşılık gelen elemanıdır. $K$ cismi üzerinde seçilen bütün $A = \left[a_{ij}\right]_{m \times n}$ biçimindeki matrislerin kümesi $K^{m \times n}$ ile gösterilir.

**ii.** $A = \left[a_{ij}\right]_{m \times n}$ ve $B = \left[b_{ij}\right]_{m \times n}$ aynı boyutlu iki matris olmak üzere eğer her bir $(i, j)$ için $a_{ij} = b_{ij}$ ise $A$ ve $B$ matrislerine eşit matrisler denir.

**iii.** $A = \left[a_{ij}\right]_{m \times n}$ matrisinin her bir $a_{ij}$ elemanı sıfır ise, bu takdirde $A$ matrisine bir sıfır matris denir.

**Tanım 2.2**

**i.** Bir $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ matrisinde eğer $m=n$ ise bu durumda $A$ matrisine kare matris denir. Bu durumda $A$ matrisindeki $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ elemanlarına matrisin köşegen (esas köşegen) elemanları denir.

**ii.** Köşegen elemanları 1 ve diğer elemanları 0 olan bir kare matrise birim matris denir ve birim matris $I_n$ şeklinde gösterilir.

**iii.** $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ matrisinde aynı numaralı satır ve sütunların yer değiştirilmesi ile elde edilen $A^T = A' = \left[a_{ji}\right]_{n\times m}$ matrisine $A$ matrisinin transpozu denir. Uygun tipten matrisler için $(A+B)^T = A^T + B^T$ ve $(A.B)^T = B^T A^T$ eşitlikleri sağlanır.

**iv.** $A$ bir kare matris olmak üzere $A^T = A$ ise, $A$ matrisine simetrik matris denir.

**Teorem 2.1** $A, B$ ve $C$ bir $K$ cismi üzerinde tanımlı $m\times n$ boyutlu matrisleri ve $k_1, k_2 \in K$ skaler sayısı için aşağıdaki eşitlikler sağlanır (Hacısalihoğlu H.H., 1977).

**i.** $(A+B)+C = A+(B+C)$

**ii.** $A+0=0$

**iii.** $A+(-A)=0$

**iv.** $A+B=B+A$

**v.** $k_1(A+B)=k_1A+k_2A$

**vi.** $(k_1+k_2)A=k_1A+k_2A$

**vii.** $(k_1k_2)A=k_1(k_2)A$

**viii.** $1A=A$ ve $0A=0$

**Tanım 2.3** $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ vektörleri için $\sum a_i x_i = 0$ olacak şekilde hepsi birden sıfır olmayan $a_1, a_2, \ldots, a_n$ skaler sayıları bulunuyorsa $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vektörlerine lineer bağımlıdır denir, aksi halde bu vektörler lineer bağımsızdır denir (Hacısalihoğlu H.H., 1977).

**Tanım 2.4** $A$ matrisi $m\times n$ boyutlu ve $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sütunlarına sahip bir matris olsun. $x' = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ vektörü için $Ax = x_1a_1 + x_2a_2 + \ldots + x_na_n$ ifadesi $A$ matrisinin sütunlarının bir lineer kombinasyonunu gösterir. Bu durumda $A$ matrisinin sütunlarının lineer kombinasyonu olarak ifade edilebilen bütün vektörlerin kümesine $A$ matrisinin sütun uzayı denir ve $\mathfrak{R}(A)$ ile gösterilir. $\mathfrak{R}(A)$, $A$ matrisinin sütunları tarafından gerilir ve sütun uzayı

$$\mathfrak{R}(A) = \{y \in \mathbb{R}^{m\times 1}: y = Ax, x \in \mathbb{R}^{n\times 1}\}$$

ile ifade edilir (Hacısalihoğlu H.H., 1977).

**Tanım 2.5** $A$ matrisinin $a_1, a_2, \dots, a_n$ satırları tarafından üretilen $\mathbb{R}^{n\times 1}$ in alt uzayına $A$ matrisinin satır uzayı denir. $A$ matrisinin satır uzayı $\mathfrak{R}(A')$ olarak gösterilir (Hacısalihoğlu H.H., 1977).

**Teorem 2.2** $A$ matrisi $m\times n$ boyutlu ve $C$ matrisi, $A$ matrisinin satır indirgenmiş eşelon biçimi olsun. $A$ matrisinin satır uzayı ile $C$ matrisinin satır uzayı aynıdır (Hacısalihoğlu H.H., 1977).

**Tanım 2.6** Bir matrisin sütun uzayının boyutuna matrisin sütun rankı denir. Bir matrisin satır uzayının boyutuna ise matrisin satır rankı denir. Bir $A$ matrisinin satır indirgenmiş eşelon biçimindeki sıfırdan farklı satırların sayısına ise $A$ matrisinin rankı denir ve $r(A)$ ile gösterilir (Hacısalihoğlu H.H., 1977).

**Teorem 2.3** $A$ matrisi $m\times n$ boyutlu matris olsun. $A$ matrisinin satır rankı, sütun rankına eşittir (Hacısalihoğlu H.H., 1977).

**Teorem 2.4** Uygun boyutlu $A, B$ ve $C$ matrisleri için aşağıdaki ifadeler doğrudur:

**i.** $\mathfrak{R}(A{:}B) = \mathfrak{R}(A) + \mathfrak{R}(B)$,

**ii.** $\mathfrak{R}(AB) \subseteq \mathfrak{R}(A)$,

**iii.** $\mathfrak{R}(AA') = \mathfrak{R}(A)$,

**iv.** $\mathfrak{R}(C) \subseteq \mathfrak{R}(A) \Leftrightarrow C$ matrisi $AB$ biçimindedir.

**v.** $\mathfrak{R}(A) \subseteq \mathfrak{R}(B)$ ve $r(A) = r(B) \Longrightarrow \mathfrak{R}(A) = \mathfrak{R}(B)$ dir.

**vi.** $\mathfrak{R}(I_m) = \mathbb{R}^{m\times 1}$ dir.

**vii.** $boy\big(\mathfrak{R}(A)\big) = r(A)$,

**viii.** $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ için $r(A) \leq \min\{m, n\}$,

**ix.** Bir matrisin bazı satır ya da sütunlarının silinmesiyle elde edilen alt matrisin rankı matrisin rankını geçemez,

**x.** $r(A) = r(A') = r(A'A) = r(AA')$ dir (Hacısalihoğlu H.H., 1977).

**Teorem 2.5** $A_1$ ve $A_2$ tersi olan matrisler ise, bu durumda herhangi bir $A_3$ matrisi için $A_3$, $A_1A_3$ , $A_3A_2$ ve $A_1A_3A_2$ matrisleri aynı ranka sahiptir (Hacısalihoğlu H.H., 1977).

**Tanım 2.7** Eğer $P^2 = P$ olacak şekilde bir $P$ matrisi varsa $P$ matrisine idempotent matris denir (Hacısalihoğlu H.H., 1977).

**Tanım 2.8** $A$ matrisinin sıfır uzayı

$$\mathcal{N}(A) = \{x \in \mathbb{R}^{n\times 1}: Ax = 0\} \subseteq \mathbb{R}^{n\times 1}$$

şeklinde tanımlanır (Hacısalihoğlu H.H., 1977).

Eğer $AB = I$ eşitlşiği sağlanıyorsa $B$ matrisine $A$ matrisinin bir sağ tersi denir ve bu ters $B^{-R}$ ile gösterilir. $A$ matrisine ise $B$ matrisinin bir sol tersi denir ve bu ters $A^{-L}$ ile gösterilir. Buna göre bir $A$ matrisinin sağ tersi $A$ matrisi tam satır ranklı olduğu zaman mevcuttur. Benzer şekilde bir $B$ matrisinin sol tersi de $B$ matrisi tam sütun ranklı olduğu zaman mevcut olacaktır. Öte yandan sağ ters veya sol ters tek türlü olmayabilir. Örneğin $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ matrisi üçgensel bir matris olmak üzere, $m > n$ olduğunda sağ ters olmayabilir ve $m < n$ olduğunda da sol ters olmayabilir. Esas itibarıyla her iki tersin mevcut olması için gerek ve yeter şart $A$ matrisinin kare matris ve tam ranklı olmasıdır. Bu durumda matrisin sağ tersi ile sol tersi birbirine eşit olup bu matrise nonsingüler $A$ matrisinin tersi denir ve $A^{-1}$ ile gösterilir. O halde $A$ matrisinin tersinin mevcut ve tek türlü olması için gerek ve yeter şart $A$ matrisinin nonsingüler olmasıdır diyebiliriz. Bu durumda $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ eşitliği yazılır. Eğer $A$ ve $B$ matrislerinin her ikisi de nonsingüler aynı boyutlu matrisler ise bu takdirde $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ eşitliği geçerlidir.

Herhangi bir $A$ matrisi için $ABA = A$ oluyorsa, $B$ matrisine $A$ matrisinin bir genelleştirilmiş inversi denir ve $A$ matrisinin genelleştirilmiş inversi $A^{-}$ ile gösterilir. Buradan eğer $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ise bu takdirde $A^{-} \in \mathbb{R}^{n\times m}$ olacaktır. Bu durumda kolaylıkla gösterilebilir ki her matrisin en az bir genelleştirilmiş tersi vardır. Özel olarak her simetrik matrisin en az bir simetrik genelleştirilmiş tersi vardır. Genel olarak, $A^{-}$ tek değildir. $A^{-}$ matrisinin tek olması için gerek ve yeter koşul $A$ matrisinin nonsingüler olmasıdır ki bu durumda da $A^{-} = A^{-1}$ olacaktır.

**Tanım 2.9** Herhangi bir $A$ matrisi verildiğinde aşağıdaki koşullarını sağlayan bir $B$ matrisine $A$ matrisinin Moore-Penrose tersi (inversi) denir ve $A^+$ ile gösterilir.

**i.** $ABA = A$

**ii.** $BAB = B$

**iii.** $(AB)' = AB$

**iv.** $(BA)' = BA$.

Bir matrisin Moore-Penrose inversi tektir. Eğer $A$ matrisi tersi alınabilir bir matris ise bu durumda $A^+ = A^{-1}$ dir.

**Teorem 2.6** $A, B$ ve $C$ uygun boyutlu matrisler olmak üzere aşağıdakiler doğrudur:

**i.** $(A^+)^+ = A$

**ii.** $AA^+$ve $A^+A$ idempotenttir.

**iii.** $r(A) = r(A^+) = r(AA^+) = r(A^+A)$,

**iv.** $A'AA^+ = A' = A^+AA'$ ve $A'(A^+)'A^+ = A^+ = A^+(A^+)'A'$,

**v.** $A = 0 \Leftrightarrow A^+ = 0,\ AB = 0 \Leftrightarrow B^+A^+ = 0$ ve $A^+B = 0 \Leftrightarrow A'B = 0$,

**vi.** $r(A) = r(A^-A) = r(AA^-) \leq r(A^-)$,

**vii.** $BA^-C$ matris çarpımının $A$ matrisinin genelleştirilmiş tersinin seçimine göre değişmez olası için gerek ve yeter şart $\Re(B') \subseteq \Re(A')$ ve $\Re(C) \subseteq \Re(A)$ olmasıdır.

**viii.** $A^-A$ ve $AA^-$ matrislerinin her biri idempotent matrislerdir.

**ix.** Eğer $A$ matrisi simetrik ve idempotent bir matris ise bu takdirde $I - A$ matrisi de simetrik ve idempotent matristir (Hacısalihoğlu H.H., 1977).

**Tanım 2.10** $y = (y_i) \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ vektörü ve simetrik $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrisi için,

$$Q(y) = y'Ay = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} y_i y_j a_{ij}$$

ifadesine $y_i$ elemanlarının bir kuadratik formu ve $A$ matrisine de bu kuadratik formun matrisi denir.

Böylelikle $y'Ay$ kuadratik formu simetrik bir $A$ matrisi tarafından karakterize edilebilir ve bu matrise kuadratik formun matrisi denir.

Bir matris için aşağıdaki ifadeler sağlanır:

**i.** Eğer $\forall y \neq 0$ için $y'Ay > 0$ ise $A$ pozitif tanımlıdır.

**ii.** Eğer $\forall y \neq 0$ için $y'Ay < 0$ ise $A$ negatif tanımlıdır.

**iii.** Eğer $\forall y$ için $y'Ay \geq 0$ ise $A$ nonnegatif tanımlıdır (Hacısalihoğlu H.H., 1977).

**Teorem 2.8** $A$ matrisinin nonnegatif tanımlı ve $r$ ranklı bir matris olamsı için gerek ve yeter şart $A = RR'$ olacak şekilde $r$ ranklı bir $R$ matrisinin mevcut olmasıdır (Hacısalihoğlu H.H., 1977).

**Tanım 2.11** $A$ ve $B$ matrisleri nonnegatif tanımlı olmak üzere eğer $B - A$ matrisi de nonnegatif tanımlı ise $A$ matrisi $B$ matrisinden Löwner sıralamasına göre daha küçüktür denir ve bu durum $A \leq_L B$ veya $B \geq_L A$ notasyonuyla gösterilir.

**Tanım 2.12** $A \in \mathbb{R}^{n \times p}$ bilinenlerin bir matrisi ve $g \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ bilinenlerin vektörü olsun. Eğer $Ax = g$ olacak şekilde bir $x \in \mathbb{R}^{p \times 1}$ vektörü bulunabilirse bu takdirde $Ax = g$ lineer denklem sistemi tutarlıdır denir.

**Teorem 2.9** $Ax = g$ lineer denklem sisteminin tutarlı olması için gerek ve yeter şart $AA^{-}g = g$ olmasıdır. Bu durumda sistemin genel çözümü $h \in \mathbb{R}^{p \times 1}$ keyfi bir vektör olmak üzere $x = A^{-}g + (I - A^{-}A)h$ şeklindedir.

**Tanım 2.13** $A, B, C$ uygun mertebeden bilinenlerin matrisleri olmak üzere $AXB = C$ olacak şekilde uygun mertebeden bir $X$ matrisi bulunabilirse bu takdirde $AXB = C$ matris denklemi sistemi tutarlıdır denir.

**Teorem 2.10** $A, B, C$ uygun mertebeden bilinenlerin matrisleri olmak üzere $AXB = C$ matris denklemi sisteminin tutarlı olması için gerek ve yeter şart $AA^{-}CB^{-}B = C$ olmasıdır. Bu durumda sistemin genel çözümü $H$ uygun mertebeden keyfi bir matris olmak üzere $x = A^{-}CB^{-} + H - A^{-}AHBB^{-}$ şeklindedir.

## 2.2 Lineer Modellere Genel Bakış

**Tanım 2.14** Genel olarak bir lineer model $X \in \mathbb{R}^{n \times p}$ keyfi ranklı bir bilinenler matrisi, $y \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ gözlenebilir bir rasgele vektör, $\beta \in \mathbb{R}^{p \times 1}$ bir bilinmeyen parametre vektörü, $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ bilinen keyfi ranklı nonnegatif definit bir matris olmak üzere

$$y = X\beta + \varepsilon, \ E(y) = X\beta, \ cov(y) = V,$$

şeklinde tanımlanır ve kısaca

$M_\beta = \{y, X\beta, V\}$

ile gösterilir.

Bu model bazı özel durumlara sahiptir. Bu özel durumlar, $\varepsilon$ rasgele vektörünün dağılımına ve kovaryans matrisine ya da $X$ matrisinin yapısına ve rankına bağlı olarak ortaya çıkar. Aksi belirtilmedikçe, $r(X) = p$ olduğunu kabul edilecektir, başka bir deyişle modelimizdeki $X$ katsayı matrisi tam sütun ranklı bir matris olacaktır, $\varepsilon$ hata vektörünün dağılımı hakkında ise üç durum göz önüne alınabilir:

1. Durum: $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2 I)$
2. Durum: $\varepsilon$ bilinmeyen bir dağılıma sahip olup $E(\varepsilon)$=0 ve $Cov(\varepsilon) = \sigma^2 I$ dır.
3. Durum: $Cov(\varepsilon) = V$ dir, burada $V$ bilinen pozitif definit bir matristir.

Birinci durumda her bir $\varepsilon_i$ rasgele değişkeni 0 ortalamalı, bilinmeyen $\sigma^2$ varyanslı normal dağılıma sahip olup $\varepsilon_i$ , $i = 1,2,,\ldots,N$, ler kendi aralarında bağımsızdır. İkinci durumda, her bir $\varepsilon_i$ nin beklenen değeri sıfır ise, $\varepsilon_i$ ler ilişkisiz ve $\varepsilon_i$ ler bilinmeyen ortak $\sigma^2$ varyansına sahiptirler. Birinci ve üçüncü durumdaki varsayımlar altındaki modellere Gauss-Markov modeli denir. İkinci durumdaki modellere ise bazen en küçük kareler modelleri adı verilir. Ayrıca hata terimi normal dağılımlı olduğunda bu modellere hipotez modelleri de denilmektedir.

**Tanım 2.15** $Y = X\beta + \varepsilon$ lineer modeli verilmiş olsun. Bu durumda $X\beta$ vektörüne modelin deterministik kısmı, $Y$ ve $\varepsilon$ vektörlerine ise modelin stokastik kısmı adı verilir. $Y$ vektörü bağımlı değişken, tepki değişkeni veya açıklanan değişken adı verilen bir rastgele değişken ile ilgili gözlemler vektörüdür. $X$ matrisine tasarım matrisi, açıklayıcı değişkenlerin matrisi, bağımlı değişkenlerin gözlem matrisi gibi isimler verilmektedir, $\varepsilon$ vektörüne ise hata vektörü denilmektedir.

Gerçek yaşamda olayların lineer modeller yardımıyla modellenmesi çalışmalarında $Y$, $X$ , $\beta$ ve $\varepsilon$ değişkenlerine birçok değişik şekilde anlam verilebilir. Örneğin bazı modellerde Y üretim miktarı, bazılarında boy uzunluğu, bazılarında ağırlık iken bazılarında ise bir ekonomik değişken olabilir.

$\beta_0$ hızı ile hareketine başlayan ve ivmesi $\beta_1$ olan doğrusal hareket eden bir cismin zamana ($t$'ye) bağlı olarak aldığı yol $S = \beta_0 + \beta_1 t$ formülü ile verilir. Bu şekilde hareket eden bir cismin hızını ve ivmesini bilmek ve daha sonra belli bir zamanda aldığı yol miktarını belirlemek istediğimizi farzedelim. Bu durumda keyfi olarak seçtiğimiz $t_i$ , $i = 1,2,\dots,N,$ zamanlarında yol uzunluklarını gözlemlemeye kalkıştığımızda ölçümlerdeki hatalardan dolayı $S_i$ , $i = 1,2,\dots,N,$ gözlemleri için $S_i = \beta_0 + \beta_1 t_i + \varepsilon_i$ gibi bir model düşünmemiz daha uygun görünmektedir. Bu durumda

$$Y = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ \vdots \\ S_N \end{bmatrix}_{N\times 1} \quad , \quad \mathrm{X} = \begin{bmatrix} 1 & \mathrm{t}_1 \\ 1 & \mathrm{t}_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & \mathrm{t}_N \end{bmatrix}_{N\times 2} \quad , \quad \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_N \end{bmatrix}_{N\times 1} \quad , \quad \beta = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix}_{2\times 1}$$

gösterimleri altında yukarıda belirtilenler,

$$Y = X\beta + \varepsilon$$

şeklinde bir lineer model olarak ifade edilmektedir. Bu modelde eğer $Y$ gözlem vektöründeki gözlemleri veren açıklayıcı ya da bağımlı değişkeni $Y$ harfi, $X$ matrisinin ikinci sütunundaki gözlemler ile ilgili bağımsız değişkeni $X$ harfi ve hatayı da $\varepsilon$ harfi ile gösterirsek bu değişkenler arasındaki bağıntı

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X + \varepsilon$$

olarak da ifade edilebilir.

Bir diğer örnek olarak, belli bir cins kayısıdaki meyve suyu miktarını kayısının ağırlığına bağlı olarak incelemek isteyelim. Gerçekte bir kayısıdaki meyve suyu miktarı sadece kayısının ağırlığına bağlı değildir, ama ağırlık ile meyve suyu arasında bir fonksiyonel bağıntının (bilinmeyen parametrelere göre lineer bir ifade olabilir) varlığını kabul edip, gözlemlerin bunu doğrulayıp doğrulamadığını, gözlemlerden çıkarılan bir bağıntının bulunmasını ve bunların neticesinde ağırlığa bağlı olarak meyve suyu miktarını tahmin etmeyi düşünebiliriz. Bu örnekteki açıklayıcı değişken olan kayısının ağırlığı ile açıklanan(bağımlı) değişken olan kayısıdaki meyve suyu miktarı birer rasgele değişken olacaktır. Bu durumda eğer ağırlığı $X$ ile ve meyve suyu miktarını da $Y$ ile gösterirsek o zaman $X$ ve $Y$ değişkenlerinin bir ortak dağılımı söz konusu olacaktır. Bu durumda $E(Y|X = x) = g(x)$ ifadesine $Y$ nin $X$ üzerinde bir regresyon denklemi denildiğini ve $X$ ve $Y$ değişkenlerinin ortak dağılımının normal olması durumunda bunun $E(Y|X = x) = g(x) = \beta_0 + \beta_1 x$ şeklinde verildiğini hatırlatalım.

**Tanım 2.16** $(X,Y)$ iki boyutlu rastgele değişkeninin ortak dağılımından $N$ birimlik örneklem, $(X_i, Y_i)$ , $i = 1,2,\ldots,N$,olmak üzere

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i \ , i = 1,2,\ldots,N, \ \ \varepsilon_i \sim \left(0,\sigma^2 I\right)$$

veya

$$Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_N \end{bmatrix}_{N\times 1}, \mathrm{X} = \begin{bmatrix} 1 & \mathrm{X}_1 \\ 1 & \mathrm{X}_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & \mathrm{X}_N \end{bmatrix}_{N\times 2}, \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_N \end{bmatrix}_{N\times 1}, \beta = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix}_{2\times 1}$$

matris gösterimi altında

$$Y = X\beta + \varepsilon,$$

modeline bir basit lineer regresyon modeli denir. $X$ ve $Y$ rasgele değişkenleri arasında bir ortak dağılım düşünmeden sadece $Y$ bağımlı değişkeni ile ilgili gözlemlere dayalı olarak,

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i, i = 1,2,,\ldots,N$$

biçiminde bir ifade söz konusu olduğunda modele basit lineer model denir.

Öte yandan kayısının ağırlığı olan $X$ değişkeni ile kayısıdaki meyve suyu miktarı olan $Y$ değişkeninin ortak dağılımı normal olmayabilir. Bizim buradaki amacımız $X$ değişkeninin gözlenen değerine bağlı olarak $Y$ değişkeninin gözlenen değerini ön görmek olduğuna göre

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i, i = 1,2,\ldots,N,$$

biçiminde bir lineer modeli ele almak daha uygun olacaktır. Bu durumda $\varepsilon$ hata terimi, birinci örnekteki yol uzunluğunun ölçülmesi sırasındaki hataya benzer bir hatayı içermekle birlikte, $X$ değişkeninin belli bir değeri için $Y$ değişkenindeki rastgeleliği ve ayrıca model belirlemedeki hatayı da içerecektir.

Bir lineer modelde eğer açıklayıcı değişken sayısı birden çok ise bu modele çoklu lineer model (multiple linear model) denir. Bir lineer modelde eğer bağımlı değişken sayısı birden çok ise bu durumda da modele çok değişkenli model (multivariate model) adı verilir. Sıcaklık ve basıncın, sertlik üzerindeki etkisinin fonksiyon biçiminde bir bağıntı ile ifade edilip edilemeyeceği, bu bağıntının biçiminin ne olacağı veya sıcaklık ile basınç değişkenlerinin sertliği ne derece etkileyip etkilemediği gibi sorunlar ilk olarak metalürji biliminin sorunları gibi gözükmektedir. Metalürji biliminin kanunlarına göre sıcaklık ve basıncın sertlik üzerindeki etkisi tam olarak belirlenmiş olabilir veya bağıntı biçimsel olarak belirlenmiş ancak içinde bilinmeyen katsayılar mevcut ya da aralarında bir bağıntı var ama ne olduğu belirlenmemiş olabilir. İlk durumda istatistikçinin yapacağı fazla bir şey kalmamıştır. Belki sadece belirlenmiş olan modelin geçerliliğinin sınanmasında yardımcı olabilir. İkinci ve üçüncü durumlarda ise istatistikçiye önemli görevler düşmektedir. Amaç belirlendikten sonra gözlemlerin alınacağı en iyi deney tasarımının seçilmesi ve ardından da bir istatistiksel sonuç çıkarımının yapılması istatistik biliminin sorunudur.

Bir diğer örnek olarak belirli bir sebze türünün verimini incelemek istediğimizi varsayalım. Şüphesiz ki verim, toprak ve hava ile ilgili birçok tabiat özelliği yanında sulama, gübreleme, toprağı işleme gibi bazı etkenlere de bağlıdır. Bu nedenle modelleme sırasında, çok karmaşık olan gerçek hayattaki ilişkilerden bazılarını ihmal ederek, verim miktarı $(Y)$ için, toplam yağış miktarı $(X_1)$, sıcaklık ortalaması $(X_2)$, gübre miktarı $(X_3)$ ve birim metrekaredeki bitki sayısı $(X_4)$ değişkenlerine bağlı,

$$Y = \beta_0 + X_1\beta_1 + X_2\beta_2 + X_3\beta_3 + X_4\beta_4 + \varepsilon$$

biçiminde bir modelin geçerli olduğunu varsayalım. Bu durumda gerek model geçerliliğinin sınanması ve gerekse geçerli olan bir modelde açıklayıcı değişkenlerin etkilerinin yani parametrelerin tahmin edilmesi amacıyla yapılacak araştırmada veri toplama işlemi uygulamada kolay olmayacaktır. Modeldeki yağış miktarı ve sıcaklık ortalaması ile ilgili açıklayıcı değişkenler birer rasgele değişken olmasına rağmen gübre miktarı ile ilgili açıklayıcı değişken bir deterministik değişken olarak görülebilir. Bu nedenle açıklayıcı değişkenlerin rasgele değişken olup olmadığına bakılmaksızın, açıklayıcı değişkenler ile ilgili $X$ matrisini, gözlem değerlerinin bir matrisi, yani sabitlerin bir matrisi olarak düşünmek daha uygundur.

### 2.3 Basit Lineer Modellerde Parametre Tahmini

Şimdi bir denemenin $n$ kez tekrarlandığını ve bu süreçte aşağıdaki verinin elde edildiğini varsayalım. Bu durumda modelin

$$y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \cdots + \beta_p X_p + \varepsilon$$

olduğu ve gözlemlerin $n$-lilerinin aynı modele işleyeceği de kabul edilerek

$$y_1 = \beta_0 + \beta_1 x_{11} + \beta_2 x_{12} + \cdots + \beta_p x_{1p} + \varepsilon_1$$

$$y_2 = \beta_0 + \beta_1 x_{21} + \beta_2 x_{22} + \cdots + \beta_p x_{2p} + \varepsilon_2$$

$$\vdots$$

$$y_n = \beta_0 + \beta_1 x_{n1} + \beta_2 x_{n2} + \cdots + \beta_p x_{np} + \varepsilon_n$$

şeklinde bir bağıntı söz konusu olacaktır. Bu $n$ tane denklem matris formunda

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1p} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{np} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

olarak yazılabilir. Genelde, $p$ sayıda bağımsız değişkene sahip bir basit lineer model

$$y = X\beta + \varepsilon$$

olarak ifade edilebilir. Burada $\mathrm{y} = (\mathrm{y}_1, \mathrm{y}_2, \dots, \mathrm{y}_\mathrm{n})'$ inceleme değişkeni üzerinde $n$ sayıda gözlemin bir $n \times 1$ vektörüdür.

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1p} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{np} \end{bmatrix}$$

ise $p$ sayıda açıklayıcı değişkenin her birisi üzerinde $n$ sayıda gözlemin bir $n \times p$ matrisdir. Ayrıca $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p)'$ regresyon katsayılarının bir $p \times 1$ vektörü olup $\boldsymbol{\varepsilon} = (\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \dots, \boldsymbol{\varepsilon}_n)'$ ise rasgele hata bileşenlerinin veya hata teriminin bir $n$×1 vektörüdür. Eğer regresyon sabiti mevcut ise, $X$ in birinci sütunu $(1,1, \dots, 1)'$ olur. İstatistiksel çıkarımları ortaya koymak için $y = X\beta + \varepsilon$ modelinde bazı varsayımlara ihtiyaç duyulur. Bu varsayımlar regresyon katsayılarının tahmin edicisinin istatistiksel özelliklerini incelemek için kullanılır ve aşağıdaki gibi sıralanabilir:

**(i)** $E(\boldsymbol{\varepsilon}) = 0$.

**(ii)** $E(\varepsilon\varepsilon') = \sigma^2 I_n$.

**(iii)** $r(X) = p$

**(iv)** $X$ stokastik (rasgele) olmayan bir matristir.

**(v)** $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2 I_n)$.

$E(\varepsilon) = 0$ ve $cov(\varepsilon) = \sigma^2 I$ olmak üzere $y = X\beta + \varepsilon$ modelini tekrar gözönüne alalım. Bu takdirde regresyon katsayı vektörünün tahmini için bir genel yöntem, uygun şekilde seçilen bir $M$ fonksiyonu için,

$$\sum_{i=1}^{n} M(\varepsilon_i) = \sum_{i=1}^{n} M\left(y_i - x_{i1}\beta_1 - x_{i2}\beta_2 - \cdots - x_{ip}\beta_p\right)$$

ifadesini minimumlaştırmaktır. Bu durumda parametrelerin tahmini için $M(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^2$ ile ilgili olan en küçük kareler yöntemini göz önüne alalım. Tüm $\beta$ vektörlerinin kümesi $B$ olsun. Eğer özel bir ek bilgi verilmezse, $B$ kümesi $k-$boyutlu reel öklid uzayındadır. Amacımız $\varepsilon_i$ hatalarının karelerinin toplamını, yani,

$$S(\beta) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = \varepsilon'\varepsilon = (y - X\beta)'(y - X\beta)$$

ifadesini minimum yapan $B$ kümesinde bir $b' = \left(b_1, b_2, \dots, b_p\right)$ vektörü bulmaktır. Bu takdirde $S(\beta)$ reel değerli, konveks ve diferansiyellenebilir bir fonksiyon olduğunda, bir minimum daima mevcut olacaktır. Bunun için

$$S(\beta) = y'y + \beta'X'X\beta - 2\beta'X'y$$

yazılır ve $S(\beta)$ nın $\beta$ ya göre türevleri alınırsa

$$\frac{\partial S(\beta)}{\partial \beta} = 2X'X\beta - 2X'y \quad \text{ve} \quad \frac{\partial^2 S(\beta)}{\partial \beta^2} = 2X'X$$

eşitlikleri yazılabilir. Bu durumda normal denklem

$$\frac{\partial S(\beta)}{\partial \beta} = 0 \;\Rightarrow X'X\beta = X'y$$

dır. Bu durumda $r(X) = p$ olduğu kabul edildiğinden, bu durumda $X'X$ pozitif tanımlıdır ve normal denklemin yegane çözümü

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'y$$

dir ki bu $\beta$ nın alışılmış en küçük kareler tahmin edicisi (OLSE) olarak adlandırılır. $X$ in tam ranklı olmadığı durumda, $\left(X'X\right)^{-}$ matrisi $X'X$ matrisinin bir genelleştirilmiş inversi ve $\omega$ keyfi bir vektör olmak üzere

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-}X'y + [I - (X'X)^{-}X'X]\omega$$

olacaktır.

**Teorem 2.11**

**i.** $\hat{y} = X\hat{\beta}$; $y$ nin deneysel tahmin edicisi olsun. Bu takdirde $\hat{y}$ ; $X'X\beta = X'y$ nin tüm $\beta$ çözümleri için aynı değere sahiptir.

**ii.** $S(\beta)$; $X'X\beta = X'y$ nin herhangi bir çözümü için minimuma ulaşır (Rao, 1973).

**Teorem 2.12 (Gauss – Markov Teoremi)** Alışılmış en küçük kareler tahmin edicisi (OLSE) $\beta$ nın en iyi lineer yansız tahmin edicisi (BLUE) dir (Rao, 1973).

**Tanım 2.17** $X$ matrisinin tam sütun ranklı olduğu kabulü altında bilinen bir $V$ pozitif tanımlı matrisi için $E(\varepsilon) = 0$ ve $cov(\varepsilon) = V$ olarak dikkate alındığında $y = X\beta + \varepsilon$, modelinden elde edilen normal denklemlere karşılık gelen $X'V^{-1}X\beta = X'V^{-1}y$ normal denkleminin tek çözümü olan $\tilde{\beta} = (X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1}y$ tahmini genelleştirilmiş en küçük kareler edicisi olarak adlandırılır.

Bu tahmin edici aynı zaman da $\beta$ nın en iyi lineer yansız tahmin edicisidir. Yani $\beta$ parametre vektörünün alışılmış enküçük kareler ve en iyi lineer yansız tahmin edicileri sırasıyla

$$OLSE(\beta) = \hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'y$$

ve

$$BLUE(\beta) = \tilde{\beta} = (X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1}y$$

şeklinde yazılabilir. Bu durumda bu tahmin edicilerin kovaryans matrisleri sırasıyla

$$cov(\hat{\beta}) = (X'X)^{-1}X'VX(X'X)^{-1} \quad \text{ve} \quad cov(\tilde{\beta}) = (X'V^{-1}X)^{-1}$$

şeklinde olacaktır.

**Tanım 2.18** Watson etkinliği genelleştirilmiş varyansların (veya başka bir deyişle kovaryans matrislerinin determinantlarının) oranı tanımlanır. Yani OLSE ve BLUE arasındaki Watson etkinliği

$$\phi = \text{eff}(\hat{\beta}) = \frac{|cov(\tilde{\beta})|}{|cov(\hat{\beta})|} = \frac{|X'X|^2}{|X'VX||X'V^{-1}X|}$$

olarak tanımlanır. Ayrıca bu şekilde tanımlanan etkinlik OLSE' nin toplam etkinliği olarak da bilinir. Buradan Watson etkinliği için $0 < \phi \leq 1$ eşitsizliğinin geçerli olduğu kolayca gösterilebilir. Öte yandan $\phi = 1$ olması için gerek ve yeter şart $OLSE(\beta) = BLUE(\beta)$ olmasıdır (bkz. Puntanen ve Styan., 1989).

Genel lineer model altında değişik tahmin edicilerin karakterize edilmesinde matris rank metotlarının kullanılması oldukça önemlidir. Bu amaçla öncelikle aşağıdaki matrisleri tanımlayalım. $P_A$, $Q_A$ ve $F_A$ matrisleri sırasıyla

$$P_A = AA^+,\ Q_A = I - P_A = I - AA^+ \text{ ve } F_A = I - P_{A'} = I - A^+A$$

ortoganal izdüşümlerini göstersin.

**Tanım 2.19** $X \in \mathbb{R}^{n\times p}$ keyfi ranklı bir bilinenler matrisi, $y \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ gözlenebilir bir rasgele vektör, $\beta \in \mathbb{R}^{p\times 1}$ bilinmeyen parametre vektörü, $V \in \mathbb{R}^{n\times n}$ bilinen keyfi ranklı nonnegatif definit bir matris olmak üzere

$$y = X\beta + \varepsilon,\ E(y) = X\beta,\ cov(y) = V, \tag{2.1}$$

genel lineer modelinin verildiğini varsayalım. (2.1) modeli genellikle

$$\mathcal{M} = \{y, X\beta, V\} \tag{2.2}$$

şeklinde gösterilir. Burada (2.1) modelinin tutarlı olduğu yani bir çözüme sahip olduğu varsayılacaktır. Bunun için 1 olasılıkla

$$y \in \Re[X, V] \tag{2.3}$$

olmalıdır. Eğer $V$ matrisi singüler bir matris ise (2.1) modeline singüler lineer model veya singüler Gauss-Markov modeli de denir.

$\beta$ parametresinin (2.2) deki genel lineer model altındaki OLSE ve BLUE tahmin edicisi aşağıdaki gibi verilebilir. (2.1) bağıntısı ile ilgili normal denklem $X'X\beta = X'y$ şeklinde olup bu denklemin çözümü aşağıdaki iyi bilinen sonuçtur.

**Lemma 2.1** (2.2) modeli altında OLSE tahmin edicileri $v \in \mathbb{R}^{p\times 1}$ keyfi bir vektör olmak üzere aşağıdaki gibidir:

$$OLSE_{\mathcal{M}}(\beta) = (X'X)^+X'y + (I - X^+XX)v = X^+y + F_Xv \tag{2.4}$$

$$OLSE_{\mathcal{M}}(X\beta) = XOLSE_{\mathcal{M}}(\beta) = XX^+y = P_Xy. \tag{2.5}$$

Öte yandan (2.2) modeli altında $X\beta$ nın BLUE tahmin edicisi aşağıdaki lemma da verilmiştir (Rao, 1973).

**Lemma 2.2** Bir $Gy$ tahmin edicisinin (2.2) altında $X\beta$ nın bir BLUE tahmin edicisi olması için gerek ve yeter şart $G$ matrisinin

$$G[X, VE_X] = [X,0] \tag{2.6}$$

lineer matris denklemini sağlamasıdır (Marsaglia ve Styan, 1974).

Bu denklem tutarlıdır, yani $\Re([X,0]) \subseteq \Re([X, VE_X])$ dir veya buna denk olarak,

$$[X\ ,0][\ X, VE_X]^{+}[X, VE_X] = [X,0]$$

eşitliği gerçeklenir. Bu durumda (2.6) matris denkleminin genel çözümü, $P_{X\|V}$ ile gösterilir, $U \in \mathbb{R}^{nxn}$ keyfi olmak üzere

$$P_{X\|V} = [X,0][X, VE_X]^{+} + UE_{[X,VE_X]}, \tag{2.7}$$

ve $X\beta$ parametresinin BLUE tahmin edicisi

$$BLUE_{\mathcal{M}}(X\beta) = P_{X\|V}y \tag{2.8}$$

şeklindedir. Ayrıca $\{P_{X\|V}\}$ ve $\{BLUE_{\mathcal{M}}(X\beta)\}$ ile sırasıyla tüm $P_{X\|V}$ ve $BLUE_{\mathcal{M}}(X\beta)$ lerin ailesini gösterelim.

Lineer modeller teorisinde (2.2) modelindeki $X$ matrisinin tam sütun ranklı ve $V$ kovaryans matrisinin de pozitif definit olduğu durum en sık rastlanılan durumdur. Bu durumda, (2.2) modeli altında, $\beta$ ve $X\beta$ nın OLSE ve BLUE tahmin edicileri aşağıdaki standart formlarda tek türlü olarak yazılabilir:

$$OLSE_{\mathcal{M}}(\beta) = (X'X)^{-1}X'y\ ,$$

$$OLSE_{\mathcal{M}}(X\beta) = X(X'X)^{-1}X'y, \tag{2.9}$$

$$BLUE_{\mathcal{M}}(\beta) = (X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1}y\ ,$$

$$BLUE_{\mathcal{M}}(X\beta) = X(X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1}y. \tag{2.10}$$

Burada (2.2) modeli altında $\beta$ ve $X\beta$ için verilen bu tahmin edicilerin dördü de yansız tahmin edicilerdir.

Eğer $X = [X_1, X_2]$ matrisindeki $X_1$ ve $X_2$ alt matrisleri ortogonal ise, başka bir deyişle $X_1'X_2 = 0$ ise, bu takdirde (2.9) ifadesindeki $(X'X)^{-1}X'$ ve $X(X'X)^{-1}X'$ matrisleri sırasıyla

$$(X'X)^{-1}X' = \begin{bmatrix} (X_1'X_1)^{-1}X_1' \\ (X_2'X_2)^{-1}X_2' \end{bmatrix}$$

ve

$$X(X'X)^{-1}X' = X_1(X'_1X_1)^{-1}X'_1 + X_2(X'_2X_2)^{-1}X'_2 \tag{2.11}$$

olarak yazılabilir. Buna paralel olarak (2.9) daki $OLSE_{\mathcal{M}}(\beta)$ ve $OLSE_{\mathcal{M}}(X\beta)$ tahmin edicileri de sırasıyla

$$OLSE_{\mathcal{M}}(\beta) = \begin{bmatrix}(X_1'X_1)^{-1}X_1'y\\(X_2'X_2)^{-1}X_2'y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}OLSE_{\mathcal{M}}(\beta_1)\\OLSE_{\mathcal{M}}(\beta_2)\end{bmatrix} \tag{2.12}$$

ve

$$OLSE_{\mathcal{M}}(X\beta) = X_1(X_1'X_1)^{-1}X_1'y + X_2(X_2'X_2)^{-1}X_2'y \tag{2.13}$$

olarak yazılabilir.

Eğer $X = [X_1, X_2]$ matrisindeki $X_1$ ve $X_2$ alt matrisleri $V^{-1}$- ortogonal ise, yani $X_1'V^{-1}X_2 = 0$ eşitliği sağlanıyorsa, bu takdirde (2.10) deki $(X'V^{-1}X)^{-1}\, X'V^{-1}$ ve $X(X'V^{-1}X)^{-1}\, X'V^{-1}$ matrisleri sırasıyla

$$(X'V^{-1}X)^{-1}\, X'V^{-1} = \begin{bmatrix}(X_1'V^{-1}X_1)^{-1}X_1'V^{-1}\\(X_2'V^{-1}X_2)^{-1}X_2'V^{-1}\end{bmatrix} \tag{2.14}$$

ve

$$X(X'V^{-1}X)^{-1}\, X'V^{-1} = X_1(X_1'V^{-1}X_1)^{-1}X_1'V^{-1} + X_2(X_2'V^{-1}X_2)^{-1}X_2'V^{-1} \tag{2.15}$$

şeklinde yazılabilir. Buna paralel olarak (2.10) daki $BLUE_{\mathcal{M}}(\beta)$ ve $BLUE_{\mathcal{M}}(X\beta)$ tahmin edicileri sırasıyla

$$BLUE_{\mathcal{M}}(\beta) = \begin{bmatrix}(X_1'V^{-1}X_1)^{-1}X_1'V^{-1}y\\(X_2'V^{-1}X_2)^{-1}X_2'V^{-1}y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}BLUE_{\mathcal{M}_1}(\beta_1)\\BLUE_{\mathcal{M}_2}(\beta_2)\end{bmatrix}, \tag{2.16}$$

ve

$$\begin{aligned}BLUE_{\mathcal{M}}(X\beta) &= X_1(X_1'V^{-1}X_1)^{-1}X_1'V^{-1}y + X_2(X_2'V^{-1}X_2)^{-1}X_2'V^{-1}y\\ &= BLUE_{\mathcal{M}_1}(X_1\beta_1) + BLUE_{\mathcal{M}_2}(X_2\beta_2)\end{aligned} \tag{2.17}$$

olarak ayrıştırılabilir. Burada (2.16) ve (2.17) ifadelerinin sağ taraflarındaki gösterim $(X_i'V^{-1}X_i)^{-1}X_i'V^{-1}y$ ve $X_i(X_i'V^{-1}X_i)^{-1}X_i'V^{-1}y$ tahmin edicilerinin (2.2) modeli altında $\beta_i$ ve $X_i\beta_i$, i =1,2 nin BLUE tahmin edicilerinin sembolik gösterimi anlamındadır, bununla birlikte bu tahmin ediciler (2.1) modeli altında $\beta_i$ ve $X_i\beta_i\,, i = 1,2$ parametrelerinin BLUE tahmin edicileri değillerdir.

Açıkça gösterilebilir ki (2.12), (2.13), (2.16) ve (2.17) eşitliklerinde verilen ayrışımlar ortogonallik varsayımları altında $OLSE_{\mathcal{M}}(\beta)$, $OLSE_{\mathcal{M}}(X\beta)$, $BLUE_{\mathcal{M}}(\beta)$ ve

$BLUE_{\mathcal{M}}(X\beta)$ tahmin edicilerinin hesaplanmasına dönüştürülebilir. Ayrıca bunlar tahmin edicilerin çeşitli istatistiksel özelliklerinin türetilmesinde de kullanılabilir. Örneğin, (2.12), (2.13), (2.16) ve (2.17) de verilen $OLSE_{\mathcal{M}_i}(\beta)$, $OLSE_{\mathcal{M}_i}(X_i\beta_i)$, $BLUE_{\mathcal{M}_i}(\beta_i)$ ve $BLUE_{\mathcal{M}_i}(X_i\beta_i)$ tahmin edicileri $X_1'X_2 = 0$ veya $X_1'V^{-1}X_2 = 0$, i =1,2 varsayımları altında $\beta_i$ ve $X_i\beta_i$ için yansız tahmin edicilerdir. OLSE ve BLUE tahmin edicilerinin bu ayrışımına motive olarak, (2.2) de verilen $\mathcal{M}$ genel lineer modelinde de OLSE ve BLUE tahmin edicilerinin muhtemel ifadelerini gözönüne almak oldukça ilginç olacaktır.

(2.5) ve (2.8) de verilen Moore-Penrose inversler ve keyfi matrisler içeren $OLSE_{\mathcal{M}}(X\beta)$ ve $BLUE_{\mathcal{M}}(X\beta)$ tahmin edicilerini gözönüne alalım. (2.12) (2.13) (2.16) ve (2.17) ifadelerinin (2.6) ve (2.9) daki tahmin ediciler için kullanılması bazı kritik matris işlemleri içerecektir. Moore-Penrose inversler ve keyfi matrisler içeren değişik matris ifadelerini sadeleştirmek için Moore-Penrose inversler ve keyfi matrisler içeren bir dizi değişik rank formüllerine ihtiyaç duyulmaktadır. Parçalı matrisler için aşağıdaki rank formülleri Marsaglia & Styan (1974) tarafından verilmiştir.

**Lemma 2.3** $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{m\times k}$, $C \in \mathbb{R}^{1\times n}$ ve $D \in \mathbb{R}^{1\times k}$ matrisleri verilsin. Bu takdirde

**i.** $r[A, B] = r(A) + r(E_A B) = r(B) + r(E_B A)$ ,

**ii.** $r\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} = r(A) + r(CF_A) = r(C) + r(AF_C)$ ,

**iii.** $r\begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix} = r(B) + r(C) + r(E_B A F_C)$ ,

**iv.** $r\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = r(A) + r\begin{pmatrix} 0 & E_A B \\ CF_A & D - CA^+B \end{pmatrix}$ ,

**v.** Eğer $\Re(B) \subseteq \Re(A)$ ve $\Re(C') \subseteq \Re(A')$ ise bu takdirde

$$r\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = r(A) + r(D - CA^+B)$$

eşitlikleri vardır. Özel olarak

**vi.** $r[A, B] = r(A) \Leftrightarrow E_A B = 0 \Leftrightarrow \Re(B) \subseteq \Re(A)$,

**vii.** $r\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} = r(A) \Leftrightarrow CF_A = 0 \Leftrightarrow \Re(C') \subseteq \Re(A')$,

**viii.** $r\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = r(A) \Leftrightarrow \Re(B) \subseteq \Re(A),\ \Re(C') \subseteq \Re(A')$ ve $D = CA^{+}B$

**ix.** $r\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = r(B) + r(C) \Leftrightarrow BU_1 + U_2C = A$ lineer matris denklemi $U_1$ ve $U_2$ için çözülebilirdir.

ifadeleri yazılabilir. Diğer taraftan

$$r\left(B - AA^{+}B\right) \geq r\left(B\right) + r\left(AA^{+}B\right) = r\left(B\right) - r\left(A'B\right) \tag{2.18}$$

olduğu kolaylıkala gösterilebilir. Bu nedenle

$$r\left[A, B\right] \geq r\left(A\right) + r\left(B\right) - r\left(A'B\right) \tag{2.19}$$

eşitsizliği yazılabilir. Üstelik

$$\Re(B) \subseteq \Re(A) \Leftrightarrow AA^{+}B = B \Leftrightarrow r[A, B] = r(A),$$

$$\Re(A_1) = \Re(A_2),$$

$$\Re(B_1) = \Re(B_2) \Rightarrow r[A_1, B_1] = r[A_2, B_2]$$

ifadeleri de verilebilir (Marsaglia ve Styan, 1974).

**Lemma 2.4** (2.2) de verilen modelin tutarlı olduğunu varsayalım ve $L_1y + c_1$ ve $L_{21}y + c_2$ lineer tahmin edicileri $K\beta$ için yansız lineer tahmin ediciler olsun, yani $E(L_1y + c_1) = E(L_2y + c_2) = K\beta$ olsun. Bu takdirde $L_1y + c_1 = L_2y + c_2$ tahmin edicilerinin 1 olasılıkla eşit olması için gerek ve yeter şart $L_1V = L_2V$ eşitliğinin sağlanmasıdır (Tian, 2010).

**Lemma 2.5** $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ matrisi verilmiş olsun ve $Z_1, Z_2, Z_3 \in \mathbb{R}^{n\times m}$ matrisleri de $A$ matrisinin üç dış tersi, yani $Z_iAZ_i = Z_i$, $i = 1,2,3$ olsun. Ayrıca $\Re(Z_i) \subseteq \Re(Z_1)$ ve $\Re(Z_i') \subseteq \Re(Z_1')$ içermelerinin sağlandığı varsayılsın. Bu takdirde

$$r\left(Z_1 - Z_2 - Z_3\right) = r\left(Z_1\right) - r\left(Z_2\right) - r\left(Z_3\right) + r\left(Z_2AZ_3\right) + r\left(Z_3AZ_2\right) \tag{2.20}$$

eşitliği sağlanır (Rao, 1973).

**İspat:** Elementer blok matris işlemleri altında bir matrisin rankının değişmediği daha önce bifade edilmişti. Bu nedenle kolayca elementer blok matris işlemleri uygulanarak

$$r\begin{bmatrix} -Z_1 & 0 & 0 & Z_1 \\ 0 & Z_2 & 0 & Z_2 \\ 0 & 0 & Z_3 & Z_3 \\ Z_1 & Z_2 & Z_3 & 0 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} -Z_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Z_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Z_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Z_1 - Z_2 - Z_3 \end{bmatrix}$$

$$= r\left(Z_1 - Z_2 - Z_3\right) + r\left(Z_1\right) + r\left(Z_2\right) + r\left(Z_3\right) \qquad (2.21a)$$

eşitliğinin yazılabileceği kolayca gösterilebilir. Öte yandan Lemma 2.4 de verilen şartlar altında elementer blok matris işlemleri ile

$$r\begin{bmatrix} -Z_1 & 0 & 0 & Z_1 \\ 0 & Z_2 & 0 & Z_2 \\ 0 & 0 & Z_3 & Z_3 \\ Z_1 & Z_2 & Z_3 & 0 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} 0 & Z_1AZ_2 & Z_1AZ_3 & Z_1 \\ 0 & Z_2 & 0 & Z_2 \\ 0 & 0 & Z_3 & Z_3 \\ Z_1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= r\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & Z_1 \\ 0 & 0 & -Z_2AZ_3 & 0 \\ 0 & -Z_3AZ_2 & 0 & 0 \\ Z_1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= 2r\left(Z_1\right) + r\left(Z_2AZ_3\right) + r\left(Z_3AZ_2\right) \qquad (2.21b)$$

eşitlikleri yazılabilir. Buradan (2.21a) ve (2.21b) denklemleri birleştirilirse istenilen sonuç elde edilir.

# 3. PARÇALI LİNEER MODELDE PARAMETRE TAHMİNLERİ

## 3.1 Parçalı Model ve Alt Modellerinde Tahmin

Bu kısımda $\{y, X_1\beta_1 + X_2\beta_2\ , V\}$ parçalı tam lineer modeli ile bu modelden türetilen iki küçük $\{y, X_1\beta_1\ , V\}$ ve $\{y, X_2\beta_2\ , V\}$ alt modelleri dikkate alınarak,

(i) Tam model altında alışılmış en küçük kareler tahmin edicisinin iki küçük model altındaki alışılmış en küçük kareler tahmin edicilerinin toplamına eşit;

(ii) Tam model altında en iyi lineer yansız tahmin edicisinin iki küçük model altındaki en iyi lineer yansız tahmin edicilerinin toplamına eşit;

(iii) Tam model altında en iyi lineer yansız tahmin edicisinin iki küçük model altındaki alışılmış en küçük kareler tahmin edicilerinin toplamına eşit olmaları için gerek ve yeter şartlar verilmiştir. Temel sonuçların ispatları genel lineer modeller altında değişik tahmin edicilerin karakterize edilmesinde matris rank metodunun nasıl kullanıldığını da açıklamaktadır.

$$y = X_1\beta_1 + X_2\beta_2 + \varepsilon,\ E(\varepsilon)=0,\ Cov(\varepsilon) = V, \tag{3.1}$$

parçalı lineer modelinin verildiğini varsayalım, burada $X_1 \in \mathbb{R}^{n\times p_1}$ ve $X_2 \in \mathbb{R}^{n\times p_2}$ keyfi ranklı iki bilinenler matrisi, $y \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ gözlenebilir bir rastgele vektör, $\beta_1 \in \mathbb{R}^{p_1\times 1}$ ve $\beta_2 \in \mathbb{R}^{p_2\times 1}$ iki bilinmeyen parametreler vektörü, $V \in \mathbb{R}^{n\times n}$ bilinen keyfi ranklı non-negatif definit matristir. Eğer $V$ matrisi singüler bir matris ise (3.1) modeline singüler lineer model de denir. (3.1) modeli genellikle $X = [X_1, X_2]$ ve $\beta = [\beta_1', \beta_2']'$ olmak üzere

$$\mathcal{M} = \{y, X_1\beta_1 + X_2\beta_2, V\} \tag{3.2}$$

şeklinde gösterilir. $M$ tam modeli ile ilgili olarak iki küçük modeli de

$$\mathcal{M}_1 = \{y, X_1\beta_1, V\} \quad \text{ve} \quad \mathcal{M}_2 = \{y, X_2\beta_2, V\} \tag{3.3}$$

ile gösterelim. Bu kısımdaki amacımız (3.2) ve (3.3) modelleri altında tahmin ediciler arasındaki ilişkileri ortaya koymak olacaktır. Özellikle, $M$ modeli altında $X\beta$ nın alışılmış en küçük kareler tahmin edicisi (OLSE) ve en iyi lineer yansız tahmin edicisi (BLUE) nin $M_1$ ve $M_2$ modelleri altında sırasıyla $X_1\beta_1$ ve $X_2\beta_2$ nın alışılmış en küçük kareler tahmin edicisi (OLSE) ve en iyi lineer yansız tahmin edicisi (BLUE) nin toplamına eşit olması için gerek ve yeter şartlar türetilecektir. Bu konudaki bazı önemli araştırmalar Bhimasankaram ve Saharay (1997), Chu ve Ark. (2004), Grob ve Puntanen (2000), Nurhonen ve Puntanen (1992), Werner ve Yapar (1995,1996), Zhang ve Ark. (2004) tarafından yapılmıştır.

Bu kısım boyunca, $\mathbb{R}^{m\times n}$ $m \times n$ boyutlu tüm reel matrislerin uzayını, $A'$, $r(A)$ ve $\Re(A)$ ise bir $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ matrisinin sırasıyla transpozu, rankı ve ranj uzayını göstermektedir. $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ matrisinin Moore-Penrose inversi $A^+$ ile gösterilir ve $AGA = A$, $GAG = G$, $(AG)'=AG$ ve $(GA)'= GA$ matris denklemlerini sağlayan tek $G$ çözümü olarak tanımlanmaktadır.

Lemma 2.3 de verilen eşitlikler dikkate alınırsa ilave bazı rank eşitlikleri verilebilir. Örneğin, eğer $r(PNQ) \geq r(PN) + r(NQ) - r(N)$ Frobenius eşitsizliğini

$E_B A F_C$ çarpımına uygularsak $r(E_B A F_C) \geq r(E_B A) + r(AF_C) - r(A)$ elde edilir. Bu eşitsizlik kullanılarak aşağıdaki rank eşitsizliği yazılabilir.

$$r\begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} \geq r\begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} + r[A, B] - r(A) \tag{3.4}$$

**Lemma 3.1** $A \in R^{mxn}$, $B \in R^{mxk}$ ve $C \in R^{mxl}$ matrisleri verilmiş olsun. Bu durumda

$$r[A, B, C] \leq r[A, B] + r[A, C] - \mathrm{r(A)}, \tag{3.5}$$

$$r\begin{bmatrix} AA' & B \\ B' & 0 \end{bmatrix} = r[A, B] + \mathrm{r(B)}, \tag{3.6}$$

$$r\begin{bmatrix} AA' & B & C \\ B' & 0 & 0 \end{bmatrix} = r[A, B, C] + \mathrm{r(B)} \tag{3.7}$$

ifadeleri sağlanır. Bu durumda $D - CA^+B$ Schur bileşeninin rankı

$$r(D - CA^+B) = r\begin{bmatrix} A'AA' & A'B \\ CA' & D \end{bmatrix} - r(A), \tag{3.8}$$

ile hesaplanır (Tian, 2004).

**İspat:** Lemma 2.3 den (3.5) için istenildiği gibi

$$\begin{aligned} r[A, B, C] &= r(A) + r[E_A B, E_A C] \\ &\leq r(A) + r(E_A B) + r(E_A C) \\ &= r[A, B] + r[A, C] - r(A) \end{aligned}$$

yazılabilir. Herhangi bir $A$ matrisi için $r(AA') = r(A)$ eşitliğinin sağlandığını hatırlayalım. Bu durumda

$$r\begin{bmatrix} AA' & B \\ B' & 0 \end{bmatrix} = 2r(B) + r(E_B AA' E_B) = = 2r(B) + r(E_B A) = r(B) + r[A, B]$$

elde edilir ki bu da (3.6) yı sağlar. Ayrıca $r[AA', B] = r[A, B]$ dir. Böylece yukarıdaki rank eşitliği $\Re\begin{bmatrix} AA' \\ B' \end{bmatrix} \cap \Re\begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} = \{0\}$ eşitliğine denktir. Bu nedenle $\Re\begin{bmatrix} AA' \\ B' \\ 0 \end{bmatrix} = \{0\}$ olur ki bu da (3.7) ifadesine denktir.

**Lemma 3.2** $A \in R^{mxn}$, $B \in R^{mxk}$ ve $C \in R^{mxl}$ matrisleri verilmiş olsun. Bu durumda

$$r\begin{bmatrix} AA' & B \\ C' & 0 \end{bmatrix} \geq r[A, B, C] + r(B) + \mathrm{r(C)} - r[B, C] \geq r[A, B, C], \tag{3.9}$$

$$r\begin{bmatrix} AA' & B \\ C' & 0 \end{bmatrix} \geq r[A,B] - \mathrm{r}(A) + r[A,C] \geq r[A,B,C] \tag{3.10}$$

eşitsizlikleri gerçeklenir (Tian, 2004).

**İspat:** (3.6) eşitliğinden öncelikle

$$r\begin{bmatrix} AA' & B & C \\ B' & 0 & 0 \\ C' & 0 & 0 \end{bmatrix} = r[AA', B, C] + r[B,C] = r[A,B,C] + r[B,C]$$

eşitliği yazılabilir. Diğer taraftan (3.4) ve (3.7) eşitliklerinden

$$r\begin{bmatrix} AA' & B & C \\ B' & 0 & 0 \\ C' & 0 & 0 \end{bmatrix} \geq r\begin{bmatrix} AA' & B & C \\ C' & 0 & 0 \\ B' & 0 & 0 \end{bmatrix} + r\begin{bmatrix} AA' & B & C \\ C' & 0 & 0 \end{bmatrix} - r\begin{bmatrix} AA' & B \\ C' & 0 \end{bmatrix}$$

$$= 2r[A,B,C] + r(B) + r(C) - r\begin{bmatrix} AA' & B \\ C' & 0 \end{bmatrix}$$

yazılabilir. Bu iki ifade birleştirilerek (3.9) daki iki eşitsizlik elde edilir. Öte yandan (3.0) daki iki eşitsizlik ise (3.4) ve (3.5) ifadelerinden kolaylıkla gösterilebilir.

**Lemma 3.3** $\Re(A) \subseteq \Re(B_1)$, $\Re(C_2) \subseteq \Re(C_1)$, $\Re(A') \subseteq \Re(C_1')$ ve $\Re(B_2') \subseteq \Re(B_1')$ olsun. Bu takdirde

$$r\begin{bmatrix} A & B_1 & 0 \\ C_1 & 0 & C_2 \\ 0 & B_2 & 0 \end{bmatrix} = r(B_1) + r(C_1) + r(B_2 B_1^{+} \mathrm{A} C_1^{+} C_2)$$

dir (Tian, 2004).

**İspat:** Matrislerde Moore-penrose invers kavramı dikkate alınırsa, $\Re(A) \subseteq \Re(B_1)$, $\Re(C_2) \subseteq \Re(C_1)$, $\Re(A' \subseteq \Re(C_1')$ ve $\Re(B_2') \subseteq \Re(B_1')$ şartları

$$B_1 B_1{}^{+} A = A, \quad C_1 C_1{}^{+} C_2 = C_2, \quad \mathrm{A} C_1{}^{+} C_1 = A, \quad B_2 B_1{}^{+} B_1 = B_2$$

şartlarına denktir. Elementer işlemlerle bir matrisin rankı değişmeyeceği gerçeği dikkate alınırsa

$$r\begin{bmatrix} A & B_1 & 0 \\ C_1 & 0 & C_2 \\ 0 & B_2 & 0 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} 0 & B_1 & 0 \\ C_1 & 0 & C_2 \\ -B_2 B_1{}^{+} A & 0 & 0 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} 0 & B_1 & 0 \\ C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_2 B_1{}^{+} A C_1{}^{+} C_2 \end{bmatrix}$$

$$= r\,(B_1) + r\,(C_1) + r\,(B_2 B_1{}^{+} A C_1{}^{+} C_2\,)$$

yazılabilir ki bu da istenilen eşitliğin sağlandığını gösterir.

**Lemma 3.4** $A \in R^{mxn}$ ve $B \in R^{mxk}$ matrisleri verilmiş olsun. Bu takdirde

$$\min_{X \in R^{kxn}} r(A - BX) = r[A, B] - r(B)$$

dir. Bu durumda özel olarak, $BX = A$ denkleminin tutarlı olması için gerek ve yeter şart $r[A, B] = r(B)$ olmasıdır (Tian, 2004).

(3.2) modelinin bir doğru model olması varsayımı altında $[X, V][X, V]'[X, V]= [X, V]$ eşitliğinden

$$E([X, V][X, V]^{+}y - y) = [X, V][X, V]^{+}X\beta - X\beta = 0$$

$$cov([X, V][X, V]^{+}y - y) = ([X, V][X, V]^{+} - I)\, V([X, V][X, V]^{+} - I)' = 0$$

eşitlikleri kolaylıkla gösterilebilir. Bu iki eşitlik $[X, V][X, V]^{+}y = y$ eşitliğinin 1 olasılıkla sağlandığını veya buna denk olarak,

$$P\{y \in \Re[X, V]\} = 1 \tag{3.11}$$

dir. Rao (1971,1973) tarafından eğer (3.11) eşitliği sağlanırsa, bu takdirde (3.2) deki $M$ lineer modelinin tutarlı olduğu ifade edilmiştir.

(3.11) den kolayca görülür ki (3.2) deki modelin tutarlılığı (3.2) nin doğruluğunu sağlamaz. Gerçekten, eğer $r[X, V] = n$ ise bu takdirde (3.2) in tutarlı olduğu açıktır ancak doğru olup olmadığı söylenemez.

**Tanım 3.1** (3.2) deki $\mathcal{M}$ lineer modelinin doğru(tutarlı) olduğunu varsayalım ve $L_1y$ ve $L_2y$ $\mathcal{M}$ altında iki lineer tahmin edici olsunlar. Bu takdirde eğer $(L_1\text{-}L_2)[X, V] = 0$ eşitliği sağlanırsa $L_1y$ ve $L_2y$ tahmin edicileri 1 olasılıkla eşittir, yani her $y \in \Re[X, V]$ için $(L_1\text{-}L_2)y = 0$ eşitliği sağlanır (Tian, 2004).

Tanım 3.1 den kolayca görülebilir ki $(L_1\text{-}L_2)[X, V] = 0$ eşitliği $r[X, V] = \mathrm{n}$ olmadıkça $L_1 = L_2$ denkliğini gerektirmez. Bu nedenle $L_1y = L_2y$ eşitliğinin 1 olasılıkla sağlanması için gerek ve yeter şart $(L_1\text{-}L_2)[X, V]$ matris ifadesinin durumlarına göre değerlendirilir. Bu durum $X$ model matrisinde içerilen $L_1$ ve $L_2$ matrislerinin, $V$ kovaryans matrisinin ve bunların genelleştirilmiş inverslerinin durumlarına göre değişebilir.

### 3.2 Alışılmış En Küçük Kareler Tahmin Edicisi (OLSE) nin Ayrışımı

(2.5) eşitliğine göre, (3.3) de verilen $\mathcal{M}_1$ ve $\mathcal{M}_2$ alt modelleri altında $X_1\beta_1$ ve $X_2\beta_2$ nin OLSE tahmin edicileri sırasıyla

$$OLSE_{\mathcal{M}_1}(X_1\beta_1) = P_{X_1}y \quad \text{ve} \quad OLSE_{\mathcal{M}_2}(X_2\beta_2) = P_{X_2}y \tag{3.12}$$

olarak yazılabilir. Aşağıda verilen lemma (3.12) de verilen iki tahmin edicinin bazı önemli istatistiksel özelliklerini vermektedir.

**Lemma 3.5** $OLSE_{\mathcal{M}_1}(X_1\beta_1)$ ve $OLSE_{\mathcal{M}_2}(X_2\beta_2)$ tahmin edicileri (3.12) de verildikleri gibi olsunlar. Bu takdirde,

**i.** $OLSE_{\mathcal{M}_1}(X_1\beta_1)$, $OLSE_{\mathcal{M}_2}(X_2\beta_2)$ tahminleri ve toplamlarının beklenen değerleri

$$E[OLSE_{\mathcal{M}_1}(X_1\beta_1)] = X_1\beta_1+P_{X_1}X_2\beta_2,\ E[OLSE_{\mathcal{M}_2}(X_2\beta_2)] = P_{X_2}X_1\beta_1+X_2\beta_2 \tag{3.13}$$

$$E[OLSE_{\mathcal{M}_1}(X_1\beta_1) + OLSE_{\mathcal{M}_2}(X_2\beta_2)] = X\beta + [P_{X_2}X_1, P_{X_1}X_2]\beta \tag{3.14}$$

ile verilir.

**ii.** $OLSE_{\mathcal{M}i}(X_i\beta_i)$ tahmin edicilerinin kovaryans matrisi

$$cov[OLSE_{\mathcal{M}_i}(X_i\beta_i)] = P_{X_i}VP_{X_i},\ \text{i=1,2…} \tag{3.15}$$

$OLSE_{\mathcal{M}_1}(X_1\beta_1)$ ve $OLSE_{\mathcal{M}_2}(\ (X_2\beta_2)$ arasındaki kovaryans matrisi

$$cov\{OLSE_{\mathcal{M}_1}(X_1\beta_1), OLSE_{\mathcal{M}_2}(X_2\beta_2)\} = P_{X_1}VP_{X_2} \tag{3.16}$$

dir (Tian, 2007).

Bu durumda (3.13) ve (3.14) ifadelerindeki beklenen değerler (3.12) deki tahmin ediciler ve toplamlarının (3.2) ve (3.3) altında $X_1\beta_1$ , $X_2\beta_2$ ve onların toplamı olan $X\beta$ için yansızlığı gerektirmediğini gösterir.

(3.4) eşitliği $X_1'X_2 = 0$ ve $r(X) = p$ kısıtlamaları altında (3.2) deki genel lineer modelde $X\beta$ parametresinin OLSE tahmin edicisinin bir ayrışımını vermektedir. Öte yandan (3.2) deki genel lineer modelde $X\beta$ parametresinin OLSE tahmin edicisinin diğer ayrışımlarını türetebilmek için (2.5) ve (3.12) deki $P_X$ , $P_{X_1}$ ve $P_{X_2}$ ortogonal izdüşümleri ile ilgili aşağıdaki iki sonuca ihtiyaç vardır:

$$P_X = P_{X_1} + P_{X_2} \Leftrightarrow X_1'X_2 = 0, \tag{3.17}$$

$$P_X = P_{X_1} + P_{X_2} - P_{X_1}P_{X_2} \Leftrightarrow P_{X_1}P_{X_2} = P_{X_2}P_{X_1} \tag{3.18}$$

**Teorem 3.1** $OLSE_{\mathcal{M}}$(Xβ), $OLSE_{\mathcal{M}_1}(X_1\beta_1)$ ve $OLSE_{\mathcal{M}_2}(X_2\beta_2)$ tahmin edicileri (2.5) ve (3.12) verildikleri gibi olsunlar. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktir:

(a) 1 olasılıkla $OLSE_{\mathcal{M}}(X\beta)$ = $OLSE_{\mathcal{M}_1}(X_1\beta_1)$ + $OLSE_{\mathcal{M}_2}(X_2\beta_2)$ dir.

(b) $P_X = P_{X_1} + P_{X_2}$ dir.

(c) $X_1'X_2$ = 0 dir.

Bu durumda, $OLSE_{\mathcal{M}_1}(X_1\beta_1)$ ve $OLSE_{\mathcal{M}_2}(X_2\beta_2)$ tahmin ediciler (3.2) modeli altında sırasıyla $X_1\beta_1$ ve $X_2\beta_2$ için yansız tahmin edicilerdir (Tian, 2007).

**İspat:** (2.5) ve (3.12) eşitliklerinden kolayca görülebilir ki (a) daki eşitliğin 1 olasılıkla sağlanabilmesi için gerek ve yeter şart her $y \in \Re[X, V]$ için

$$OLSE_{\mathcal{M}}(X\beta) - OLSE_{\mathcal{M}_1}(X_1\beta_1) + E_{X_1}OLSE_{\mathcal{M}_2}(X_2\beta_2)$$

$$= (P_X - P_{X_1} - P_{X_2})y = 0$$

olmasıdır. Tanım 3.1 e göre bu ise

$$(P_X - P_{X_1} - P_{X_2})[X, V] = 0$$

ifadesine denktir. Bu çarpımı açarak ve $P_X P_{X_i} = P_{X_i}$ $i = 1,2$ eşitliğini kullanarak

$$[-P_{X_2} X_1 - P_{X_1}X_2,\ (P_X - P_{X_1} - P_{X_2})V] = 0$$

eşitliği elde edilir. Buradaki ilk iki eşitlik $X_1'X_2 = 0$ olduğunu gösterir. Bu nedenle bu eşitlik (c) ye denktir. Bu ve (3.17) eşitliği dikkate alınırsa (a), (b) ve (c) nin denkliği elde edilmiş olur.

**Teorem 3.2** $OLSE_{\mathcal{M}}(X\beta)$, $OLSE_{\mathcal{M}_1}(X_1\beta_1)$ ve $OLSE_{\mathcal{M}_2}(X_2\beta_2)$ tahmin edicileri (2.5) ve (3.12) verildikleri gibi olsunlar. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktir:

(a) 1 olasılıkla $OLSE_{\mathcal{M}}(X\beta)$ = $OLSE_{\mathcal{M}_1}(X_1\beta_1)$+ $E_{X_1}OLSE_{\mathcal{M}_2}(X_2\beta_2)$ dir.

(b) $P_X = P_{X_1} + P_{X_2} - P_{X_1}P_{X_2}$ dir.

(c) $P_{X_1}P_{X_2} = P_{X_2}P_{X_1}$ dir(Tian, 2007).

**İspat:** (3.18) den (b) ve (c) nin denkliğikolayca görülebilir. (2.5) ve (3.12) den (a) daki eşitliğin 1 olasılıkla sağlanabilmesi için gerek ve yeter şart her $y \in \Re[X, V]$ için

$$OLSE_{\mathcal{M}}(X\beta) - OLSE_{\mathcal{M}_1}(X_1\beta_1) + E_{X_1}OLSE_{\mathcal{M}_2}(X_2\beta_2)$$

$$= (P_X - P_{X_1} - P_{X_2} + P_{X_1}P_{X_2})y = 0$$

olmasıdır. Tanım 3.1 e göre bu ise

$$(P_X - P_{X_1} - P_{X_2} + P_{X_1}P_{X_2})[X, V]$$

$$= [-P_{X_2} X_1 + P_{X_1}P_{X_2}X_1, 0, (P_X - P_{X_1} - P_{X_2} + P_{X_1}P_{X_2})V] = 0$$

eşitliğine, yani

$$P_{X_2} P_{X_1} = P_{X_1}P_{X_2}P_{X_1} \text{ ve } (P_X - P_{X_1} - P_{X_2} + P_{X_1}P_{X_2})V = 0$$

ifadelerine denktir. $P_{X_1}P_{X_2}P_{X_1}$ simetrik olduğundan, buradaki ilk eşitlik (c) ye denktir. Böyle bir durumda (3.18) e göre ikinci eşitlik otomatik olarak sağlanır. Özel olarak eğer $V$ = I ise bu takdirde aşağıdaki sonuç verilebilir.

**Sonuç 3.1** Farz edelim ki (3.2) de $V$ = I olsun ve $OLSE_{\mathcal{M}}(X\beta)$, $OLSE_{\mathcal{M}_1}(X_1\beta_1)$ ve $OLSE_{\mathcal{M}_2}(X_2\beta_2)$ tahmin edicileri (2.5) ve (3.12) verildikleri gibi olsunlar. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktir (Tian, 2007):

(a) $OLSE_{\mathcal{M}}(X\beta) = OLSE_{\mathcal{M}_1}(X_1\beta_1) + OLSE_{\mathcal{M}_2}(X_2\beta_2)$

(b) $P_X = P_{X_1} + P_{X_2}$

(c) $X_1'X_2 = 0$

(d) $E[OLSE_{\mathcal{M}_i}(X_i\beta_i)] = (X_i\beta_i)$ , i=1,2,…

(e) $E[OLSE_{\mathcal{M}_1}(X_1\beta_1) + OLSE_{\mathcal{M}_2}(X_2\beta_2)] = E[OLSE_{\mathcal{M}}(X\beta)]$

(f) $cov\{OLSE_{\mathcal{M}_1}(X_1\beta_1) , OLSE_{\mathcal{M}_2}(X_2\beta_2)\} = 0$

(g) $cov[OLSE_{\mathcal{M}}(X\beta)] = cov[OLSE_{\mathcal{M}_1}(X_1\beta_1)] + cov[OLSE_{\mathcal{M}_2}(X_2\beta_2)]$

**İspat:** (a), (b) ve (c) ifadeleri Teorem 3.1 den direkt olarak görülür. (c), (d) ve (e) nin denkliği (3.13) ve (3.14) den görülebilir. (c), (f) ve (g) nin denkliği ise (3.15) ve (3.16) den kolayca görülebilir.

Lemma 2.2 den kolayca görülebilir ki (3.3) deki iki küçük model altında $X_1\beta_1$ ve $X_2\beta_2$ nin BLUE tahmin edicileri

$$BLUE_{\mathcal{M}_1}(X_1\beta_1) = P_{X_1\|V}y, \quad BLUE_{\mathcal{M}_2}(X_2\beta_2) = P_{X_2\|V}y, \tag{3.19}$$

şeklindedir, burada

$$P_{X_i\|V} = [X_i, 0][X_i, VE_{X_i}]^+ + U_iE_{[X_i, E_{X_i}]}, \quad i=1,2\ldots \tag{3.20}$$

dir. (3.2) nin bir doğru model olduğu varsayımı altında (3.39) daki tahmin ediciler gerçekte (3.3) deki alt modeller altında $X_1\beta_1$ ve $X_2\beta_2$ nın BLUE tahmin edicileri değillerdir, yani onlar (3.3) altında $X_1\beta_1$ ve $X_2\beta_2$ için ne yansızdırlar ne de minimum kovaryans matrislerine sahiptirler. Bununla beraber, (3.18) de gösterildiği gibi onların toplamı aynı şartlar altında (3.2) modelinde $X\beta$ vektörü için BLUE tahmin edicidir.

**3.3 En iyi Lineer Yansız Tahmin Edicisi (BLUE) nin Ayrışımı**

Bu kısımda (2.16) ve (2.17) deki ayrışımları (2.10) ve (3.19) da verilen BLUE tahmin edicilere genişleteceğiz. İlk olarak (2.10) ve (3.19) da verilen tahmin edicilerin bazı temel özelliklerini vereceğiz ve daha sonra da aşağıdaki iki ifade için gerek ve yeter şartlar ortaya koyacağız:

(I) $BLUE_{\mathcal{M}}(X\beta) = BLUE_{\mathcal{M}_1}(X_1\beta_1) + BLUE_{\mathcal{M}_2}(X_2\beta_2)$ olacak şekilde $BLUE_{\mathcal{M}_1}(X_1\beta_1)$ ve $BLUE_{\mathcal{M}_2}(X_2\beta_2)$ tahmin edicileri mevcuttur.

(II) Her $BLUE_{\mathcal{M}_1}(X_1\beta_1)$ve $BLUE_{\mathcal{M}_2}(X_2\beta_2)$ tahmin edicisi için

$$BLUE_{\mathcal{M}}(X\beta) = BLUE_{\mathcal{M}_1}(X_1\beta_1) + BLUE_{\mathcal{M}_2}(X_2\beta_2)$$

eşitliği gerçeklenir. Son olarak (2.16) ve (2.17) ifadelerinin sağlanması için bir dizi denklik vereceğiz. (2.7) ve (2.8) ifadelerinde verilen $P_{X\|\Sigma}$ ve $BLUE_{\mathcal{M}}(X\beta)$ nın bazı basit özellikleri aşağıda verilmiştir.

**Lemma 3.6** $P_{X\|V}$ ve $BLUE_{\mathcal{M}}(X\beta)$ ifadeleri (2.7) ve (2.8) deki gibi verilmiş olsunlar. Bu takdirde,

(a) $P_{X\|V}X = X$, $P_{X\|V}V\,E_x = 0$, ve $P_{X\|V}V$ çarpımı

$$P_{X\|V}V = [X, 0][X, VE_x]^{+}V \qquad (3.21)$$

olarak tek türlü yazılabilir.

(b) $P_{X\|V}$ tektir ancak ve ancak $r[X, V] = n$ dir.

(c) $BLUE_{\mathcal{M}}(X\beta)$ tahmin edicisi 1 olasılıkla tektir eğer $\mathcal{M}$ modeli tutarlı ise.

(d) $E[BLUE_M(X\beta)] = X\beta$ ve

$$cov[BLUE_{\mathcal{M}}(X\beta)] = [X, 0][X, V\,E_x]^{+}V([X, 0][X, V\,E_x]^{+})',$$

$$r(cov[BLUE_{\mathcal{M}}(X\beta)]) = r(X) + r(V) - r[X, V] = \dim[\Re(X) \cap \Re(V)]$$

dir (Tian, 2007).

Öte yandan (2.7) nin yanında, $BLUE_{\mathcal{M}}(X\beta)$ tahmin edicisi bazı alternatif formlarda da yazılabilir, örneğin,

$BLUE_{\mathcal{M}}(X\beta) = P_X y - P_X V E_X (E_X V E_X\ )^{-} E_X y$ ,

$BLUE_{\mathcal{M}}(X\beta) = \mathrm{y} - V E_X (E_X V E_X\ )^{-} E_X y$

$BLUE_{\mathcal{M}}(\mathcal{M}) = X[X'(V + XTX')^{-}X]^{-}X'(V + XTX')^{-}y,$

dir, burada T matrisi $\mathfrak{R}(V + XTX') = \mathfrak{R}[V, X]$ olacak şekilde bir simetrik matristir (bkz. Albert (1973) ve Rao (1973)). Bu durumda $P_{X\|V}$ , $P_{X_1\|V}$ ve $P_{X_2\|V}$ matris ifadeleri için aşağıdaki sonuçlara ihtiyaç duyulmaktatır ki bunlar yukarıdaki lemmalardan kolayca türetilebilir:

$$\mathfrak{R}([X_{i\,,}0]') \subseteq \mathfrak{R}([X_i, VX_i]'),\quad \mathrm{i}=1,2 \tag{3.22}$$

$$E_{X_i}E_X = E_X\ ,\ \ \mathrm{i}=1,2 \tag{3.23}$$

$$\mathfrak{R}[X, VE_X] = \mathfrak{R}[X, V]\ ,\ \mathfrak{R}[X_i, VE_{X_i}] = \mathfrak{R}[X_i, V],\ \mathrm{i}=1,2 \tag{3.24}$$

$$r\begin{bmatrix} V & X_1 \\ X_2' & 0 \end{bmatrix} = r[VE_{X_1}, X_2] + r(X_1) = r[VE_{X_2}, X_1] + r(X_2), \tag{3.25}$$

$$r\begin{bmatrix} V & X_1 \\ X_2' & 0 \end{bmatrix} \geq r[X, V] + r(X_1) + r(X_2) - r(X) \geq r[X, V], \tag{3.26}$$

$$r\begin{bmatrix} V & X_1 \\ X_2' & 0 \end{bmatrix} \geq \geq r[X, V] + r[X_2, V] - r(V) \geq r[X, V. \tag{3.27}$$

Aşağıdaki Lemma bize (3.19) da verilen iki tahmin edicinin özelliklerini vermektedir.

**Lemma 3.7** $BLUE_{\mathcal{M}_1}(X_1\beta_1)$ ve $BLUE_{\mathcal{M}_2}(X_2\beta_2)$ tahmin edicileri (3.19) verildikleri gibi olsunlar. Bu takdirde,

(a) $[X_i, 0]$ ve $[X_i, VE_{X_i}]$ matrisleri için

$$[X_i, 0\,][X_i, VE_{X_i}\,]^{+}[X_i, VE_{X_i}] = [X_i, 0]\ ,\ \mathrm{i}=1,2, \tag{3.28}$$

ve (3.19) da verilen iki $P_{X_1\|V}$ ve $P_{X_2\|V}$ matrisi için

$$P_{X_i\|V}X_i = X_i \text{ ve } \quad P_{X_i\|V}V = [X_i, 0\,][X_i, VE_{X_i}\,]^{+}V\ ,\ \mathrm{i}=1,2 \tag{3.29}$$

eşitlikleri sağlanır.

(b) $P_{X_i\|V}$ matrisi tektir ancak ve ancak $r[X_i, V] = n$, i = 1,2,…, dir.

(c) $BLUE_{\mathcal{M}_i}(X_i\beta_i)$ 1 olasılıkla tektir ancak ve ancak $\Re[X_i, V]$ = $\Re$[X, $V$], i=1,2,..., dir.

(d) $BLUE_{\mathcal{M}_1}(X_1\beta_1)$ ve $BLUE_{\mathcal{M}_2}(X_2\beta_2)$ tahmin edicileri ile bu tahmin edicilerin toplamının beklenen değerleri

$$E[BLUE_{\mathcal{M}_1}(X_1\beta_1)]=X_1\beta_1+P_{X_1\|\Sigma}X_2\beta_2\ , \tag{3.30}$$

$$E[BLUE_{\mathcal{M}_2}(X_2\beta_2)]=P_{X_1\|\Sigma}X_1\beta_1+X_2\beta_2\ , \tag{3.31}$$

$$E[BLUE_{\mathcal{M}_1}(X_1\beta_1)]+E[BLUE_{\mathcal{M}_2}(X_2\beta_2)]=X\beta+[P_{X_2\|V}\,X_1+P_{X_1\|V}X_2]\beta \tag{3.32}$$

şeklindedir.

(e) Aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:

(i) $P_{X_1\|V}X_2 = 0$ olacak şekilde bir $P_{X_1\|V}$ matrisi mevcuttur.

(ii) $P_{X_2\|V}X_1 = 0$ olacak şekilde bir $P_{X_2\|V}$ matrisi mevcuttur.

(iii) $r\begin{bmatrix} V & X_1 \\ X_2' & 0 \end{bmatrix} = r[X, V]$ dir.

Bu durumda, $BLUE_{\mathcal{M}_1}(X_1\beta_1)$, $BLUE_{\mathcal{M}_2}(X_2\beta_2)$ ve $BLUE_{\mathcal{M}_1}(X_1\beta_1) + BLUE_{\mathcal{M}_2}(X_2\beta_2)$ tahmin edicileri (3.2) de verilen $X_1\beta_1$ , $X_2\beta_2$ ve $X\beta$ için sırasıyla yansız olacak şekilde $BLUE_{\mathcal{M}_1}(X_1\beta_1)$ ve $BLUE_{\mathcal{M}_2}(X_2\beta_2)$ mevcuttur.

(f) $BLUE_{\mathcal{M}_i}(X_i\beta_i)$ nin kovaryans matrisi

$$cov\big[BLUE_{\mathcal{M}_i}(X_i\beta_i)\big] = [X_i, 0][X_i, E_{X_i}]^{+}V([X_i, 0\,]\big[X_i, E_{X_i}\big]^{+})' \tag{3.33}$$

şeklindedir, burada $r(cov[BLUE_{\mathcal{M}_i}(X_i\beta_i)] = r(X_i) + r\,(V) - r\,[X_i, V]$, i=1,2.. dir.

(g) $BLUE_{\mathcal{M}_1}(X_1\beta_1)$ ve $BLUE_{\mathcal{M}_2}(X_2\beta_2)$ arasındaki kovaryans matrisi

$$cov[BLUE_{\mathcal{M}_1}(X_1\beta_1), BLUE_{\mathcal{M}_2}(X_2\beta_2)]$$

$$= [X_i, 0][X_i, E_{X_i}] + V([X_2, 0]\big[X_2, E_{X_2}\big]^{+})' \tag{3.34}$$

şeklindedir, burada

$$r(cov\big[BLUE_{\mathcal{M}_1}(X_1\beta_1),\ BLUE_{\mathcal{M}_2}(X_2\beta_2)\big])$$

$$= r\begin{bmatrix} V & X_1 \\ X_2' & 0 \end{bmatrix} + r(V) - r[X_1, V] - r[X_2, V] \tag{3.35}$$

dir. Ayrıca herhangi iki $BLUE_{\mathcal{M}_1}(X_1\beta_1)$ ve $BLUE_{\mathcal{M}_2}(X_2\beta_2)$ tahmin edicisinin ilişkisiz olması için gerek ve yeter şart

$$r\begin{bmatrix} V & X_1 \\ X_2' & 0 \end{bmatrix} = r[V, X_1] + r[V, X_2] – r(V), \tag{3.36}$$

veya buna denk olarak, $r(E_{X_1}VE_{X_2}) = r(E_{X_1}V) + r(VE_{X_2}) - r(V)$ olmasıdır. Özel olarak

$$r\begin{bmatrix} V & X_1 \\ X_2' & 0 \end{bmatrix} = r[X,V] \tag{3.37}$$

ise bu takdirde $BLUE_{\mathcal{M}_1}(X_1\beta_1)$ ve $BLUE_{\mathcal{M}_2}(X_2\beta_2)$ tahmin edicileri mevcut olup hem ilişkisizdirler hem de (3.2) altında $X_1\beta_1$ ve $X_2\beta_2$ için yansızdırlar (Tian, 2007).

**İspat:** (a) da $P_{X_1\|\Sigma}$ ve $P_{X_2\|\Sigma}$ hakkındaki sonuçlar Lemma 3.6(a) dan kolaylıkla görülebilir. (b) deki sonuçlar ise $E_{[X_i,\Sigma E_{X_i}]} = 0$ , $i = 1,2$ katsayılar matrisinden türetilebilir. (3.19) un sonucu olarak $BLUE_{\mathcal{M}_i}(X_i\beta_i)$ tahmin edicisinin 1 olasılıkla tek türlü olması, yani her $y \in [X, V]$ için $P_{X_1\|V}y$ nin tek türlü olması için gerek ve yeter şart

$$E_{[X_i,\Sigma E_{X_i}]}[X , V] = 0, \text{ i} = 1,2,$$

eşitliğinin sağlanmasıdır. Bu ise (3.19) a göre

$$r[X_i, V ] = r[X, V ], \text{ i} = 1,2,$$

olması demektir. Ayrıca $\Re[X_i, V ]\subseteq \Re[X, V]$, i = 1,2 olduğundan bu eşitlik (c) de istenildiği gibi $\Re[X_i, V ]= \Re[X, V]$, i = 1,2 eşitliğine denktir. (a) varsayımı altında

$$E[BLUE_{\mathcal{M}_1}(X_1\beta_1)] = P_{X_1\|V} [X_1, X_2]\, \beta = X_1\beta_1 + P_{X_1\|V}\, X_2\beta_2,$$

$$E[BLUE_{\mathcal{M}_2}(X_2\beta_2) ] = P_{X_2\|V}[X_1, X_2]\, \beta = P_{X_2\|V}\, X_1\beta_1 + X_2\beta_2,$$

yazılabilir ki bunlar (3.30), (3.31) ve (3.32) nin sağlandığını gösterir. Öte yandan

$$P_{X_1\|V}\, X_2 = [ X_1, 0][ X_1 , VE_{X_1}]^{+} X_2 + U_1E_{[X_i,\Sigma E_{X_i}]}X_2$$

$$P_{X_2\|V}\, X_1 =[X_2, 0][X_2 , VE_{X_2} ]^{+}\, X_1 + U_2E_{[X_2,VE_{X_2}]}\, X_1$$

olduğundan (3.22) kullanarak elementer satır işlemleriyle,

$$\min_{P_{X_1\|\Sigma}} r(P_{X_1\|V}X_2)$$

$$= \min_{U_1} r([ X_1, 0]\, [X_1, VE_{X_i}] + X_2 + U_1E_{[X_i,VE_{X_i}]}\, X_2)$$

$$= r\begin{bmatrix} [X_1, 0\,]\,[\,X_1, VE_{X_i}] \;+ X_2 \\ E_{[X_i, VE_{X_i}]}\, X_2 \end{bmatrix} - r\,(E_{[X_i, VE_{X_i}]}\, X_2\,)$$

$$= r\begin{bmatrix} [X_1, 0\,]\,[\,X_1, VE_{X_i}] \;+ X_2 & 0 \\ X_2 & [X_1, VE_{X_i}] \end{bmatrix} - r\,[X_1, VE_{X_i}, X_2]$$

$$= r\begin{bmatrix} 0 & -\,[X_1, 0\,] \\ X_2 & [X_1, \mathrm{V}E_{X_i}] \end{bmatrix} \text{ - } r\,[X, V]$$

$$= r\,(\,X_1\,) + r\,[X_2, E_{X_i}\,] \text{ - } r\,[X,V]$$

$$= r\begin{bmatrix} V & X_1 \\ X_2' & 0 \end{bmatrix} - r\,[X, V]$$

olduğu görülür. Simetriklikten dolayı

$$\min_{P_{X_2\|\Sigma}} r(P_{X_2\|V} X_1) = \mathrm{r}\begin{bmatrix} V & X_1 \\ X_2' & 0 \end{bmatrix} \text{ - r } [X, V]$$

yazılabilir. (e) de verilen üç ifadenin denkliği bu eşitliklerden görülebilir. (f) deki sonuçlar ise Lemma 3.6(d) den elde edilir. Ayrıca (3.21) ve (3.29) eşitliklerinden (3.34) de istenildiği gibi

$$cov\{[BLUE_{\mathcal{M}_1}(X_1\beta_1), BLUE_{\mathcal{M}_2}(X_2\beta_2)\} = P_{X_1\|V}V$$

$$= \; [X_1, 0\,][X_1\,, VE_{X_i}] + V([X_2, 0]\,[X_2\,, VE_{X_i}\,]^{+})'$$

olduğu görülür. Öte yandan $\Re([X_i, VE_{X_i}]') \subseteq \Re(V')$ ve $\Re(V) \subseteq \Re[X_i, VE_{X_i}]$, i = 1,2 olduğunu belirtelim. Bu durumda elementer işlemler kullanılırsa

$$r([X_1, 0][X_1\,, VE_{X_i}] + V([X_2, 0][X_2\,, VE_{X_2}]^{+})'$$

$$= r\begin{bmatrix} V & X_1 & VE_{X_i} & 0 \\ X_2' & 0 & 0 & X_2' \\ E_{X_2}V & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ - } r[X_1\,, VE_{X_i}] \text{ - } r[X_2\,, VE_{X_2}]$$

$$= r\begin{bmatrix} V & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & X_2' \\ 0 & 0 & -\,E_{X_2}VE_{X_i} & 0 \end{bmatrix} \text{ - } r[X_1\,, V] \text{ - } r[X_2\,, V]$$

$$= r(E_{X_2}VE_{X_i}\,) + r\,(X_1) + r\,(X_2) + r\,(V) - r\,[X_1\,, V] \text{ - } r[X_2\,, V]$$

$$= r\begin{bmatrix} V & X_1 \\ X_2' & 0 \end{bmatrix} + r\,(V) - r\,[X_1\,, V] - r\,[X_2\,, V]$$

elde dilir ki bu da (3.35) in sağlandığını gösterir. Böylece eğer (3.37) sağlanırsa, bu takdirde $BLUE_{\mathcal{M}_1}(X_1\beta_1)$ ve $BLUE_{\mathcal{M}_2}(X_2\beta_2)$ tahminleri mevcut olup sırasıyla $X_1\beta_1$ ve $X_2\beta_2$ için yansızdırlar. Ayrıca eğer (3.37) sağlanırsa, bu takdirde (3.36) da sağlanır ve dolayısıyla (i) de istenildiği gibi $BLUE_{\mathcal{M}_1}(X_1\beta_1)$ ve $BLUE_{\mathcal{M}_2}(X_2\beta_2)$ tahmin edicileri ilişkisizdirler.

**Teorem 3.3** $BLUE_{\mathcal{M}}(X\beta)$, $BLUE_{\mathcal{M}_1}(X_1\beta_1)$ ve $BLUE_{\mathcal{M}_2}(X_2\beta_2)$ ifadeleri (2.5) ve (3.12) da verildikleri gibi olsunlar. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktir:

(a) Öyle $BLUE_{\mathcal{M}_1}(X_1\beta_1)$ ve $BLUE_{\mathcal{M}_2}(X_2\beta_2)$ tahmin edicileri mevcuttur ki

$$BLUE_{\mathcal{M}}(X\beta)= BLUE_{\mathcal{M}_1}(X_1\beta_1) + BLUE_{\mathcal{M}_2}(X_2\beta_2) \tag{3.38}$$

eşitliği 1 olasılıkla sağlanır.

(b) $P_{X\|V} = P_{X_1\|V} + P_{X_2\|V}$ olacak şekilde $P_{X\|V}$ , $P_{X_1\|V}$ ve $P_{X_2\|V}$ mevcuttur.

(c) $r\begin{bmatrix} V & X_1 \\ X_2' & 0 \end{bmatrix} = r\,[X, V]$ ve $r(X) = r\,(X_1) + r\,(X_2)$ dir.

Bu durumda, $BLUE_{\mathcal{M}_1}(X_1\beta_1)$ ve $BLUE_{\mathcal{M}_2}(X_2\beta_2)$ tahmin edicileri

$$E[BLUE_{\mathcal{M}_i}(X_i\beta_i)]= X_i\beta_i,\ \text{i=1,2} \tag{3.39}$$

$$cov[BLUE_{\mathcal{M}_1}(X_1\beta_1), BLUE_{\mathcal{M}_2}(X_2\beta_2)] = 0\ , \tag{3.40}$$

$$cov[BLUE_{\mathcal{M}}(X\beta) = cov[BLUE_{\mathcal{M}_1}(X_1\beta_1)]+cov[BLUE_{\mathcal{M}_2}(X_2\beta_2)] \tag{3.41}$$

eşitliklerini sağlar (Tian, 2007).

**İspat:** Öncelikle (b) ve (c) şiklarının denkliğini gösterelim. Bu durumda kolayca görülür ki (b) deki eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter

$$(P_{X_1\|V} + P_{X_2\|V})[X, VE_X] = [X, 0]$$

olacak şekilde $P_{X_1\|V}$ ve $P_{X_2\|V}$ nun mevcut olmasıdır. Bu durumda $P_{X_1\|V}$ ve $P_{X_2\|V}$ değerlerini bu eşitlikte yerlerine yazarsak

$$[U_1, U_2]\begin{bmatrix} E_{[\,X_1\,, VE_{X_i}]} & [\,\mathrm{X}, VE_X] \\ E_{[\,X_2\,, VE_{X_2}]} & [\mathrm{X}, VE_X] \end{bmatrix} = G$$

matris denklemi elde edilir, burada

$$G = [X, 0] - [X_1, 0][X_1, VE_{X_i}] + [X_1, VE_X] - [X_2, 0][X_2, VE_{X_2}] + [X, VE_X]$$

dir. Lemma 3.4 e göre böyle $U_1$ ve $U_2$ nin mevcut olması için gerek ve yeter şart

$$r\begin{bmatrix} G \\ E_{[X_1, VE_{X_i}]}[X, VE_X] \\ E_{[X_2, VE_{X_2}]}[X, VE_X] \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} E_{[X_1, VE_{X_i}]} & [X, VE_X] \\ E_{[X_2, VE_{X_2}]} & [X, VE_X] \end{bmatrix}$$

olmasıdır. Buradan gerekli düzenleme yapılırsa

$$r\begin{bmatrix} G \\ E_{[X_1, VE_{X_i}]}[X, VE_X] \\ E_{[X_2, VE_{X_2}]}[X, VE_X] \end{bmatrix}$$

$$= r\begin{bmatrix} G & 0 & 0 \\ [X, VE_X] & [X_1, VE_{X_i}] & 0 \\ [X, VE_X] & 0 & [X_2, VE_{X_2}] \end{bmatrix} - r[X_1, VE_{X_i}] - r[X_2, VE_{X_2}]$$

$$= r\begin{bmatrix} [X, 0] & [X_1, 0] & [X_2, 0] \\ [X, VE_X] & [X_1, VE_{X_i}] & 0 \\ [X, VE_X] & 0 & [X_2, VE_{X_2}] \end{bmatrix} - r[X_1, V] - r[X_2, V]$$

$$= r\begin{bmatrix} X & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_{X_2} & -X_2 & 0 \\ 0 & 0 & -X_1 & 0 & 0 & VE_{X_2} \end{bmatrix} - \boldsymbol{r}[X_1, V] - r[X_2, V]$$

$$= r(X) + r[VE_{X_i}, X_2] + r[VE_{X_2}, X_1] - r[X_1, V] - r[X_2, V]$$

$$= 2r\begin{bmatrix} V & X_1 \\ X_2' & 0 \end{bmatrix} + r(X) - r[X_1, V] - r[X_2, V] - r(X_1) - r(X_2)$$

ve

$$r\begin{bmatrix} E_{[X_1, VE_{X_i}]} & [X, VE_X] \\ E_{[X_2, VE_{X_2}]} & [X, VE_X] \end{bmatrix}$$

$$= r\begin{bmatrix} [X, VE_X] & [X_1, VE_{X_i}] & 0 \\ [X, VE_X] & 0 & E_{[X_2, VE_{X_2}]} \end{bmatrix} - r[X_1, VE_{X_i}] - r[X_2, VE_{X_2}]$$

$$= r\begin{bmatrix} X & V & X_1 & V & 0 & 0 \\ X & V & 0 & 0 & X_2 & V \end{bmatrix} - r[X_1, V] - r[X_2, V]$$

$$= 2r[X, V] - r[X_1, V] - r[X_2, V]$$

elde edilir. Bu iki rank eşitliği yukarıda yerlerine yazılırsa

$$2r\begin{bmatrix} V & X_1 \\ X_2' & 0 \end{bmatrix} = 2r[\,X, V] + r\,(X_1) + r\,(X_2) - r\,(X)$$

olduğu görülür ki bu eşitlik alternatif olarak

$$\left(r\begin{bmatrix} V & X_1 \\ X_2' & 0 \end{bmatrix} - \mathrm{r}[\,\mathrm{X}, V\,]\right) + \left(r\begin{bmatrix} V & X_1 \\ X_2' & 0 \end{bmatrix} - \mathrm{r}[\mathrm{X}, V] - \mathrm{r}(X_1) - \mathrm{r}(X_2) + \mathrm{r}(\mathrm{X})\right) = 0$$

şeklinde de yazılabilir. Bu durumda bu eşitliğin sol tarafındaki iki terimin nonnegatif olduğu kolayca görülebilir. Dolayısıyla (c) deki rank eşitliği elde edilmiş olur.

Öte yandan kolayca görülebilir ki (3.38) eşitliğinin sağlanması için gerek ve yeter şart her y ∈ $\Re[X, V]$ için

$$\mathrm{BLUE}_{\mathcal{M}}(X\beta) - BLUE_{\mathcal{M}_1}(X_1\beta_1) - BLUE_{\mathcal{M}_2}(X_2\beta_2) = (P_{X\|V} - P_{X_1\|V} - P_{X_2\|V})y = 0$$

olmasıdır. Bu ise Tanım 3.1 e göre

$$(P_{X\|V} - P_{X_1\|V} - P_{X_2\|V})[\,\mathrm{X}, V] = (P_{X\|V} - P_{X_1\|V} - P_{X_2\|V})[X_1\,, X_2\,, V] = 0 \qquad (3.42)$$

olmasına denktir. Bu nedenledir ki

$$P_{X\|V}\ X_1 = P_{X_1\|V}\ X_1 = X_1 \ \text{ ve } \ P_{X\|V}\ X_2 = P_{X_2\|V} = X_2$$

yazılabilir. Dolayısıyla (3.42) eşitliğinin sağlanması için gerek ve yeter şart

$$P_{X_2\|V}\,X_1 = 0,\ P_{X_1\|\Sigma}\,X_2 = 0 \text{ ve } P_{X\|V}\ V - P_{X_1\|V}V - P_{X_2\|V}V = 0 \qquad (3.43)$$

olacak şekilde $P_{X\|V}$, $P_{X_1\|V}$ve $P_{X_2\|V}$ izdüşümlerinin mevcut olmasıdır. Buradaki ilk iki eşitlik (c) deki ilk rank eşitliğine denktir. Benzer şekilde

$$(P_{X\|V} - P_{X_1\|V} - P_{X_2\|V})V$$

$$= [X, 0][\,\mathrm{X}, VE_X]^+V - [X_1, 0]\,[X_1, VE_{X_1}]^+\,V - [X_2, 0]\,[X_2, VE_{X_2}]^+V$$

$$=[[X, 0], [X_1\,, 0], [X_2, 0]]\begin{bmatrix} [X, VE_X] & 0 & 0 \\ 0 & -[X_1, VE_X] & 0 \\ 0 & 0 & -[X_2\,, VE_{X_2}\,] \end{bmatrix}^+\begin{bmatrix} V \\ V \\ V \end{bmatrix}$$

olduğu gösterilebilir. Öte yandan

$$\mathrm{t} = r\begin{bmatrix} [X, VE_X] & 0 & 0 \\ 0 & -[X_1, VE_X] & 0 \\ 0 & 0 & -[X_2\,, VE_{X_2}] \end{bmatrix}$$

$$= r\,[X, V\,] + r\,[X_1, V] + r\,[X_2\,, V]$$

alalım. Bu durumda gerekli hesaplamalar yapılarak

$$r(P_{X\|V}V - P_{X_1\|V}V - P_{X_2\|V}V)$$

$$= r\begin{bmatrix} -[X, VE_X] & 0 & 0 & V \\ 0 & [X_1, VE_X] & 0 & V \\ 0 & 0 & [X_2, VE_{X_2}] & V \end{bmatrix} - t$$

$$= r\begin{bmatrix} 0 & -VE_x & X_1 & 0 & X_2 & 0 & V \\ 0 & 0 & X_1 & VE_x & 0 & 0 & V \\ 0 & 0 & 0 & 0 & X_2 & VE_{X_2} & V \end{bmatrix} - t$$

$$= r\,[VE_{X_2}, X_1] + r\,[VE_{X_1}, X_2] + r\,(V) + r(X) - t$$

$$= 2r\begin{bmatrix} V & X_1 \\ X_2' & 0 \end{bmatrix} + r\,(V) + r(X) - r(X_1) - r\,(X_2) - t$$

olduğu görülür. Bu rank formülü gösterir ki (3.43) deki üçüncü eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter

$$2r\begin{bmatrix} V & X_1 \\ X_2' & 0 \end{bmatrix} = r[X, V] + r[X_1, V] + r[X_2, V] + r\,(X_1) + r\,(X_2) - r\,(V) - r\,(X)$$

olmasıdır. Bu eşitliği (c) deki ilk rank eşitliğiyle birleştirerek

$$(r[X, V] + r[X_1, V] + r[X_2, V] - r(V)) + (r(X_1) + r(X_2) - r(X)) = 0$$

elde edilir ki bu ise

$$r[X, V] = r\,[X_1, V] + r\,[X_2, V] - r\,(V) \text{ ve } r(X) = r\,(X_1) + r\,(X_2)$$

olmasına denktir. Bu eşitlikleri (c) deki birinci eşitlikle birleştirirsek (a) ve (c) ifadelerinin denk olduğu elde edilir.

**Teorem 3.4** $BLUE_{\mathcal{M}}(X\beta)$, $BLUE_{\mathcal{M}_1}(X_1\beta_1)$ ve $BLUE_{\mathcal{M}_2}(X_2\beta_2)$ ifadeleri (2.5) ve (3.12) da verildikleri gibi olsunlar. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktir:

(a) Herhangi bir $BLUE_{\mathcal{M}_1}(X_1\beta_1) + BLUE_{\mathcal{M}_2}(X_2\beta_2)$ toplamı 1 olasılıkla $\mathcal{M}$ modeli altında $X\beta$ nın BLUE tahmin edicisidir.

(b) $BLUE_{\mathcal{M}_1}(X_1\beta_1)$ ve $BLUE_{\mathcal{M}_2}(X_2\beta_2)$ tahmin edicileri 1 olasılıkla tektirler ve bunların toplamı da 1 olasılıkla $M$ altında $X\beta$ nın BLUE tahmin edicisidir.

(c) $\{P_{X_1\|V} + P_{X_2\|V}\} \subseteq \{P_{X\|V}\}$ dir.

(d) $r\begin{bmatrix} V & X_1 \\ X_2' & 0 \end{bmatrix} = r(V)$ ve $r(X) = r(X_1) + r(X_2)$ dir.

(e) $\Re(X) \subseteq \Re(V)$, $X_1' V^{+} X_2 = 0$ ve $\Re(X_1) \cap \Re(X_2) = \{0\}$ dir (Tian, 2007).

**İspat:** Öncelikle (c) ve (d) nin denkliğini gösterelim. Bu durumda (c) deki içerme bağıntısının sağlanması için gerek ve yeter şart

$$[U_1, U_2]\begin{bmatrix} E_{[X_1, VE_{X_i}]} & [X, VE_X] \\ E_{[X_2, VE_{X_2}]} & [X, VE_X] \end{bmatrix} = G$$

eşitliğinin herhangi $U_1$ ve $U_2$ için sağlanmasıdır ki bu da aşağıdaki üç eşitliğe denktir:

$$E_{[X_1, VE_{X_1}]}[X, VE_X] = 0,\ E_{[X_2, VE_{X_2}]}[X, VE_X] = 0,\ G = 0$$

Buradan gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$r(G) = r([X,0], [X_1, 0][X_1, VE_{X_1}]^{+} [X, VE_X] - [X_2, 0]\,[X_2, VE_{X_2}]^{+} [X, VE_X])$$

$$= r\begin{bmatrix} [X_1, VE_{X_1}] & 0 & [X, VE_X] \\ 0 & [X_2, VE_{X_2}] & [X, VE_X] \\ [X_1, 0] & [X_2, 0] & [X, 0] \end{bmatrix} - r[X_1, V] - r[X_2, V]$$

$$= r\begin{bmatrix} 0 & E_{X_1} & -X_2 & 0 & 0 & 0 \\ -X_1 & 0 & 0 & E_{X_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & X & 0 \end{bmatrix} - r[X_1, V] - r[X_2, V]$$

$$= r[VE_{X_1}, X_2] + r[VE_{X_2}, X_1] + r(X) - r[X_1, V] - r[X_2, V]$$

$$= 2r\begin{bmatrix} V & X_1 \\ X_2' & 0 \end{bmatrix} + r(X) - r[X_1, V] - r[X_2, V] - r(X_1) - r(X_2)$$

$$= 2r\begin{bmatrix} V & X_1 \\ X_2' & 0 \end{bmatrix} - 2r[X, V] - r(X_1) - r(X_2) + r(X)$$

$$= \left(r\begin{bmatrix} V & X_1 \\ X_2' & 0 \end{bmatrix} - r[X, V]\right) + \left(r\begin{bmatrix} V & X_1 \\ X_2' & 0 \end{bmatrix} - r[X, V] - r(X_1) - r(X_2) + r(X)\right)$$

elde edilir. Bu son ifadedeki iki ifade de nonnegatiftir. Bu nedenle

$$r\begin{bmatrix} V & X_1 \\ X_2' & 0 \end{bmatrix} = r[X, V] \quad \text{ve} \quad r(X) = r(X_1) + r(X_2)$$

eşitlikleri yazılabilir. Bu ifadeler (3.37) ile birleştirilirse $r[X, V] = r(V)$ eşitliği elde edilir. Bu nedenle (d) şıkkı sağlanmış olur. (d) ve (e) nin denkliği ise (3.22) den türetilebilir. Tanım 3.1 den ve $P_{X\|V}V$ , $P_{X_1\|V}V$ ve $P_{X_2\|V}V$ ifadelerinin tekliğinden (a) daki durumun sağlanması için gerek ve yeter şart

$$\max_{P_{X_1\|V}} \min_{P_{X\|V}} r\{(P_{X\|V} - P_{X_1\|V} - P_{X_2\|V})[X, V]\} \tag{3.44}$$

$$= \max_{P_{X_1\|V}\, P_{X_2\|V}} r[-P_{X_2\|V}X_1, \text{-} P_{X_1\|V}X_2, P_{X\|V}V - P_{X_1\|V}V - P_{X_2\|V}V]$$

$$= 0$$

olmasıdır. Bu ise aşağıdaki üç eşitliğe denktir:

$$\max_{P_{X_2\|V}} \mathrm{r}(P_{P_{X_2\|V}}\, X_1) = 0, \quad \max_{P_{P_{X_1\|V}}} \mathrm{r}(P_{X_1\|V}X_2\,) = 0, \quad P_{X\|V}V \text{ - } P_{X_1\|V}V \text{ - } P_{X_2\|V}V = 0$$

Bu durumda buradaki ilk iki eşitlik sırasıyla

$$[X_2,0]\left[X_2, VE_{X_2}\right] + X_1 = 0, \quad E_{[X_2,\ VE_{X_2}]}X_1 = 0,$$

$$[X_1,0]\left[X_1, VE_{X_1}\right] + X_2 = 0, \quad E_{[X_1,\ VE_{X_1}]}X_2 = 0$$

eşitliklerine denktir.

Farz edelim ki $V$ pozitif definit olsun. Bu takdirde aşağıdaki sonuç elde edilir.

**Sonuç 3.2** Eğer $V$ pozitif definit ise bu takdirde (2.5) ve (3.12) ifadelerinde verilen $BLUE_{\mathcal{M}}(X\beta)$, $BLUE_{\mathcal{M}_1}(X_1\beta_1)$ ve $BLUE_{\mathcal{M}_2}(X_2\beta_2)$ tahmin edicileri tek türlü olup aşağıdaki ifadeler denktir (Tian, 2007):

(a) $BLUE_{\mathcal{M}}(X\beta) = BLUE_{\mathcal{M}_1}(X_1\beta_1) + BLUE_{\mathcal{M}_2}(X_2\beta_2)$

(b) $P_{X\|V} = P_{X_1\|V} + P_{X_2\|V}$

(c) $X_1'V^{-1}X_2 = 0$

(d) $E[BLUE_{\mathcal{M}_i}(X_i\beta_i)] = X_i\beta_i$ , i = 1,2…

(e) $cov[BLUE_{\mathcal{M}_1}(X_1\beta_1) + BLUE_{\mathcal{M}_2}(X_2\beta_2)] = 0$

(f) $cov[BLUE_{\mathcal{M}}(X\beta)] = cov[BLUE_{\mathcal{M}_1}(X_1\beta_1)] + cov[BLUE_{\mathcal{M}_2}(X_2\beta_2)]$.

**Lemma 3.8** (3.2) modelinde $V$ pozitif definit ve $r(X) = p$ olduğunu varsayalım ve $T_1 = [I_{p_1}, 0]$ ve $T_2 = [0, I_{p_2}]$ olsun. Bu takdirde,

(a) $\mathcal{M}$ altında $\beta$ ve $X\beta$ nın tek BLUE tahmin edicisi (3.11) deki gibidir, burada

$$cov[BLUE_{\mathcal{M}}(\beta)] = (X'V^{-1}X)^{-1} , \tag{3.45}$$

$$cov[BLUE_{\mathcal{M}}(X\beta)] = X(X'V^{-1}X)^{-1}X' \tag{3.46}$$

dir.

(b) $\mathcal{M}$ altında $\beta_1$ ve $\beta_2$ nin tek BLUE tahmin edicisi

$$BLUE_{\mathcal{M}}(\beta_i) = T_i(XV^{-1}X)^{-1}X'V^{-1}y, i = 1,2. \tag{3.47}$$

dir, burada

$$BLUE_{\mathcal{M}}(\beta)=\begin{bmatrix} BLUE_{\mathcal{M}}(\beta_1) \\ BLUE_{\mathcal{M}}(\beta_2) \end{bmatrix},$$

$$E[BLUE_{\mathcal{M}}(\beta_i)] = \beta_i, \quad i = 1,2,$$

$$cov[BLUE_{\mathcal{M}}(\beta_i)] = T_i(X'V^{-1}X)^{-1}T_i', \ i = 1,2$$

$$cov\{BLUE_{\mathcal{M}}(\beta_1), BLUE_{\mathcal{M}}(\beta_2)\} = T_1(X'V^{-1}X)^{-1}T_2',$$

$$r(cov\{BLUE_{\mathcal{M}}(\beta_1), BLUE_{\mathcal{M}}(\beta_2)\}) = r(X_1'V^{-1}X_2)$$

şeklindedir.

(c) $\mathcal{M}$ altında $X_1\beta_1$ ve $X_2\beta_2$ nın BLUE tahmin edicisi

$$BLUE_{\mathcal{M}}(X_i\beta_i) = X_iT_i(X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1}y, i = 1,2 \tag{3.48}$$

şeklindedir, burada

$$BLUE_{\mathcal{M}}(X_1\beta_1) + BLUE_{\mathcal{M}}(X_2\beta_2) = \mathrm{BLUE}_{\mathcal{M}}(X\beta),$$

$$E[BLUE_{\mathcal{M}}(X_i\beta_i)] = X_i\beta_i, \ \mathrm{i}=1,2,$$

$$cov[BLUE_{\mathcal{M}}(X_i\beta_i)] = (X_iT_i)(X'V^{-1}X)^{-1}(X_iT_i)', \quad i = 1,2,$$

$$cov\{BLUE_{\mathcal{M}}(X_1\beta_1), BLUE_{\mathcal{M}}(X_2\beta_2)\} = (X_1T_1)(X'V^{-1}X)^{-1}(X_2T_2)'$$

$$r(Cov\{BLUE_{\mathcal{M}}(X_1\beta_1), BLUE_{\mathcal{M}}(X_2\beta_2)\}) = r(X_1'V^{-1}X_2)$$

dir (Tian, 2007).

**Sonuç 3.3** $\mathrm{BLUE}_{\mathcal{M}}(\beta)$, $\mathrm{BLUE}_{\mathcal{M}}(X\beta)$, $BLUE_{\mathcal{M}_i}(\beta_i)$ ve $BLUE_{\mathcal{M}}(X_i\beta_i)$, i=1,2 tahmin edicileri yukarıda verildikleri gibi olsunlar. $BLUE_{\mathcal{M}_i}(\beta_i)$ ve $BLUE_{\mathcal{M}_i}(X_i\beta_i)$

$$BLUE_{\mathcal{M}_i}(\beta_i) = (X_i'V^{-1}X_i)^{-1}X_i'V^{-1}y, \ i = 1,2, \tag{3.49}$$

$$BLUE_{\mathcal{M}_i}(X_i\beta_i) = X_i(X_i'V^{-1}X_i)^{-1}X_i'V^{-1}y, i = 1,2, \tag{3.50}$$

olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler birbirine denktir (Tian, 2007):

(a) $BLUE_{\mathcal{M}}(\beta) = \begin{bmatrix} BLUE_{\mathcal{M}_1}(\beta_1) \\ BLUE_{M_2}(\beta_2) \end{bmatrix}$,

(b) $BLUE_{\mathcal{M}}(X\beta) = BLUE_{\mathcal{M}_1}(X_1\beta_1) + BLUE_{\mathcal{M}_2}(X_2\beta_2)$ .

(c) $BLUE_{\mathcal{M}}(X_i\beta_i) = BLUE_{\mathcal{M}_i}(X_i\beta_i)$ , $i = 1,2,$

(d) $E[BLUE_{\mathcal{M}_i}(\beta_i)] = \beta_i$ , $i = 1,2$.

(e) $E[BLUE_{\mathcal{M}_i}(X_i\beta_i)]= X_i\beta_i$ , $i = 1,2$.

(f) $cov\{BLUE_{\mathcal{M}}(\beta_1), BLUE_{\mathcal{M}}(\beta_2)\}= 0$

(g) $cov\{BLUE_{\mathcal{M}}(X_1\beta_1), BLUE_{\mathcal{M}}(X_2\beta_2)\}= 0$

(h) $cov\{BLUE_{\mathcal{M}_1}(\beta_1), BLUE_{\mathcal{M}_2}(\beta_2)\} = 0$

(i) $cov\{BLUE_{\mathcal{M}_1}(X_1\beta_1), BLUE_{\mathcal{M}_2}(X_2\beta_2)\} =0$

(j) $cov[BLUE_{\mathcal{M}}(X\beta)] = cov[BLUE_{\mathcal{M}_1}(X_1\beta_1)] + cov[BLUE_{\mathcal{M}_2}(X_2\beta_2)]$.

(k) $P_{X\|V} = P_{X_1\|V} + P_{X_2\|V}$ .

(l) $X_1'V^{-1}X_2 = 0$.

**İspat:** Bu durumda (b), (e), (i), (j), (k) ve (l) şıklarının denkliği direkt olarak görülebilir. Ayrıca

$$BLUE_{\mathcal{M}}(X\beta) = XBLUE_{\mathcal{M}}(\beta),$$

$$BLUE_{\mathcal{M}}(X_i\beta_i) = X_iBLUE_{\mathcal{M}}(\beta_i),\ i = 1,2,$$

$$BLUE_{\mathcal{M}_i}(X_i\beta_i) = X_iBLUE_{\mathcal{M}_i}(\beta_i),\ i = 1,2,$$

$$X\begin{bmatrix} BLUE_{\mathcal{M}_1}(\beta_1) \\ BLUE_{\mathcal{M}_2}(\beta_2) \end{bmatrix} = BLUE_{\mathcal{M}_1}(X_1\beta_1) + BLUE_{\mathcal{M}_2}(X_2\beta_2),$$

$$cov\{BLUE_{\mathcal{M}}(X_1\beta_1), BLUE_{\mathcal{M}}(X_2\beta_2)\}=X_1cov\{BLUE_{\mathcal{M}}(\beta_1), BLUE_{\mathcal{M}}(\beta_2)\}X_2',$$

$$\mathrm{cov}\{BLUE_{\mathcal{M}_1}(X_1\beta_1), BLUE_{\mathcal{M}_2}(X_2\beta_2)\}=X_1cov\{BLUE_{\mathcal{M}_1}(\beta_1), BLUE_{\mathcal{M}_2}(\beta_2)\}X_2',$$

eşitlikleri yazılabilir. Bu eşitlikler altında (a) daki eşitliğin her iki tarafı $X$ ile soldan çarpılarak

$$BLUE_{\mathcal{M}}(X\beta) = XBLUE_{\mathcal{M}}(\beta) = X\begin{bmatrix} BLUE_{\mathcal{M}_1}(\beta_1) \\ BLUE_{\mathcal{M}_2}(\beta_2) \end{bmatrix}$$

$$= BLUE_{\mathcal{M}_1}(X_1\beta_1)+ BLUE_{\mathcal{M}_2}(X_2\beta_2)$$

elde edilir ki bu da (b) nin ta kendisidir. Ayrıca

$$X^+ = (X'X)^{-1}X'$$

olduğunu belirtelim. (b) deki eşitliğin her iki tarafı $X^+$ ile soldan çarpılarak (a) elde edilir. (a) ve (c) nin denkliği ise direkt olarak görülebilir. Benzer şekilde (d) ve (e) yukarıdaki eşitliklerden elde edilir. (f), (g), (h) ve (i) nin denkliği (3.27) ve (3.35) bağıntıları ve yukarıdaki eşitliklerden elde edilir ve böylece de sonucun ispatı tamamlanmış olur.

### 3.4. Parçalı Singüler Lineer Modellerde OLSE nin Etkinliği

Bu kısımda bir önceki kısımda verilen

$$y = X_1\beta_1 + X_2\beta_2 + \varepsilon,\ E(\varepsilon)=0,\ Cov(\varepsilon) = V, \quad (3.51)$$

parçalı lineer modeli yeniden ele alınacaktır, burada $X_1 \in \mathbb{R}^{n\times p_1}$ ve $X_2 \in \mathbb{R}^{n\times p_2}$ keyfi ranklı iki bilinenler matrisi, $y \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ gözlenebilir bir rasgele vektör, $\beta_1 \in \mathbb{R}^{p_1\times 1}$ ve $\beta_2 \in \mathbb{R}^{p_2\times 1}$ iki bilinmeyen parametreler vektörü, $V \in \mathbb{R}^{n\times n}$ bilinen keyfi ranklı non-negatif definit matristir. Eğer $V$ matrisi singüler bir matris ise modele bir singüler lineer model adı verilir. Burada daha önce ifade edildiği gibi $X = (X_1, X_2)$ ve

$$P_i = P_{X_i}\,,\ M_i = I - P_i\,,\ i = 1,2,\ H = P_X\,,\ M = I - H \quad (3.52)$$

gösterimlerini kullanacağız. Bu durumda (3.51) modeli (3.2) de olduğu gibi kısaca

$$\mathcal{M}_{12} = \{y, X_1\beta_1 + X_2\beta_2, V\} \quad (3.53)$$

şeklinde gösterilebilir. Öte yandan

$$\mathcal{M}_1 = \{y, X_1\beta_1\,, V\} \quad (3.54)$$
$$\mathcal{M}_{12.1} = \{M_1y, M_1X_2\beta_2, M_1VM_1\} \quad (3.55)$$
$$\mathcal{M}_{1H} = \{Hy, X_1\beta_1, HVH\} \quad (3.56)$$
$$\mathcal{M}_r = \{y, M_1X_2\beta_2, V\} \quad (3.57)$$

modellerini de tanımlayalım. Bu durumda daha önce de ifade edildiği gibi $X$ matrisi tam sütun ranklı ve $V$ matrisi pozitif tanımlı olduğunda $\beta$ parametre vektörünün $\mathcal{M}_{12}$ tam modeli altında tahmin edilebilir ve alışılmış en küçük tareler ve en iyi lineer yansız tahmin edicileri sırasıyla

$$OLSE(\beta) = \hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'y \ \text{ ve }\ BLUE(\beta) = \tilde{\beta} = (X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1}y \quad (3.58)$$

şeklinde yazılabilir. Bu durumda bu tahmin edicilerin kovaryans matrisleri sırasıyla

$$cov(\hat{\beta}) = (X'X)^{-1}X'VX(X'X)^{-1} \ \text{ ve }\ cov(\tilde{\beta}) = (X'V^{-1}X)^{-1} \quad (3.59)$$

olacağından

$$(X'X)^{-1}X'VX(X'X)^{-1} - (X'V^{-1}X)^{-1} \geq 0 \quad (3.60)$$

Löwner sıralaması elde edilir. Böylece Tanım 2.8 de verildiği gibi OLSE ve BLUE arasındaki Watson etkinliği

$$\phi_{12} = \text{eff}(\hat{\beta}) = \frac{|cov(\tilde{\beta})|}{|cov(\hat{\beta})|} = \frac{|X'X|^2}{|X'VX||X'V^{-1}X|} \tag{3.61}$$

olarak ifade edilebilir. Bu etkinliğe toplam Watson etkinliği adı verilir.

Bu kısımda yukarıda verilen $\phi_{12}$ toplam Watson etkinliğinin ilginç yeni bir ayışımı verilecektir. Ayrıca $\mathcal{M}_{12}$ tam modeli altında $\hat{\beta}$ nın $\hat{\beta}_2$ alt vektörünün Watson etkinliği özel olarak ele alınacaktır. $\mathcal{M}_{12}$ tam modeli, $\mathcal{M}_{12.1}$ dönüştürülmüş modeli $\mathcal{M}_r$ modeli arasındaki arasındaki ilişkiler incelenerek $\phi_{12}$ toplam Watson etkinliğinin $\hat{\beta}_2$ alt vektörünün Watson etkinliğine eşit olması için gerek ve yeter şartlar ortaya konulacaktır.

$X$ katsayı matrisi ve $V$ kovaryans matrisi keyfi ranklı olduğunda (3.52) de verilen modelin tutarlı olması varsayımı altında $BLUE(X\beta)$ tahmini ve kovaryans matrisinin genel gösteriminin

$$\begin{aligned} BLUE(X\beta) &= Hy - HVM(MVM)^{-}My \\ &= X(X'W^{-}X)^{-}X'W^{-}y \end{aligned} \tag{3.62}$$

ve

$$\begin{aligned} cov\big(BLUE(X\beta)\big) &= HVH - HVM(MVM)^{-}MVH \\ &= X(X'W^{-}X)^{-}X' - XUX' \end{aligned} \tag{3.63}$$

şeklinde olduğunu hatırlayalım. Burada $W = V + XUX'$ ve $U$ ise $\mathfrak{R}(W) = \mathfrak{R}(X, V)$ olacak şekilde keyfi bir matris olup $U$ nun bir seçiminin $U = I$ olduğu açıktır.

$X$ katsayı matrisi tam sütun ranklı olduğunda $BLUE(\beta) = \tilde{\beta}$ nın kovaryans matrisinin genel ifadesi $\hat{\beta} = OLSE(\beta)$ ve $Z$ de $\mathfrak{R}(WZ) = \mathfrak{R}(X)^{\perp}$ olacak şekilde bir matris olmak üzere

$$\begin{aligned} cov(\tilde{\beta}) &= (X'X)^{-1}[X'VX - X'VZ(Z'VZ)^{-}Z'VX](X'X)^{-1} \\ &= (X'X)^{-1}[X'VX - X'VM(MVM)^{-}M'VX](X'X)^{-1} \\ &= cov(\hat{\beta}) - (X'X)^{-1}X'VZ(Z'VZ)^{-}Z'VX(X'X)^{-1} \end{aligned} \tag{3.64}$$

şeklinde olacaktır. Bu durumda toplam Watson etkinliği için

$$\phi_{12} = \frac{|X'X|^2}{|X'VX||X'V^{-1}X|} \geq \prod_{i=1}^{n} \frac{4\lambda_i\lambda_{n-i+1}}{(\lambda_i+\lambda_{n-i+1})^2} \tag{3.65}$$

Bloomfield-Watson-Knott (BWK) eşitsizliği gerçeklenir, burada $m = \min(p, n-p)$ olup $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$ ise $V$ matrisinin pozitif özdeğerleridir.

$A$ nonsingüler bir matris olmak üzere eğer $X$ yerine $XA$ alınırsa Watson etkinliğinin değişmeyeceğini ifade edebiliriz. Bu nedenle $\phi_{12}$ Watson etkinliği $\Re(X)$ sütun uzayının bir fonksiyonu olacaktır, örneğin $\Re(X)$ için bir ortonormal taban seçilebilir. Bu durumda (3.65) de verilen BWK eşitsizliği

$$\min_X \phi_{12} = \min_{X'X=I} \frac{|X'X|^2}{|X'VX||X'V^{-1}X|} = \prod_{i=1}^{n} \frac{4\lambda_i\lambda_{n-i+1}}{(\lambda_i+\lambda_{n-i+1})^2} \tag{3.66}$$

olacaktır.

Watson etkinliği ile ilgili yukarıda verilen formüllerde $V$ kovaryans matrisinin pozitif olması gereklidir. Bununla beraber bu formüller $V$ kovaryans matrisinin singüler olduğu ancak

$$\Re(X) \subset \Re(V) \tag{3.67}$$

içerme bağıntısının sağlandığı duruma kolaylıkla genelleştirilebilir. Böyle bir modele zayıf singüler model adı verilir. Bu model altında $BLUE(\beta)$ ve onun kovaryans matrisi

$$BLUE(\beta) = \tilde{\beta} = (X'V^+X)^{-1}X'V^+y, \tag{3.68}$$

$$cov(\tilde{\beta}) = (X'V^+X)^{-1} \tag{3.69a}$$

$$= (X'X)^{-1}[X'VX - X'VM(MVM)^-M'VX](X'X)^{-1} \tag{3.69b}$$

$$= X^+[V - VM(MVM)^-M'VX]X^+ \tag{3.69c}$$

olacaktır. Böylece bir zayıf singüler modelde Watson etkinliği

$$\phi_{12} = \frac{|X'X|^2}{|X'VX||X'V^+X|} \tag{3.70a}$$

olarak yazılabilir. Öte yandan (3.67) içermesi sağlanmadığında (3.64) e göre

$$\phi_{12} = \frac{|cov(\tilde{\beta})|}{|ov(\hat{\beta})|} = \frac{|X'VX - X'VZ(Z'VZ)^-Z'VX|}{|X'VX|} \tag{3.70b}$$

$$= \left|I_p - X'VZ(Z'VZ)^-Z'VX(X'VX)^{-1}\right| \tag{3.70c}$$

şeklindedir, burada $\hat{\beta} = OLSE(\beta)$ olup $Z$ matrisi $\Re(Z) = \Re(M)$ olacak şekilde bir matristir. (3.71a) in tanimli olmasi için $|X'VX| \neq 0$ yani $\Re(X) \cap \Re(V)^{\perp} = \{0\}$ olmalıdır. Diğer yandan $r(cov(\tilde{\beta})) =$ dim $(\Re(X) \cap \Re(V)^{\perp})$ olduğundan $|X'VX| \neq 0$ olduğunda modelin zayıf singüler olmaması halinde (3.71a) ile tanımlanan Watson etkinliği sıfır olacaktır.

### 3.5 Parçalı Modelde Watson Etkinliğinin Ayrışımı

Bu kısımda $\beta_2$ alt parameter vekörü için Watson etkinliğinin belirlenmesini ele alalınacaktır. Bunun için öncelikle $\beta_2$ alt parametre vekörünün $\mathcal{M}_{12}$, $\mathcal{M}_{12.1}$ ve $\mathcal{M}_r$ modelleri altında alışılmış en küçük kareler tahin edicilerinin çakışacağını belirtelim. Yani tahmin edilebilirlik şartları altında

$$\hat{\beta}_2(\mathcal{M}_{12}) = \hat{\beta}_2(\mathcal{M}_{12.1}) = \hat{\beta}_2(\mathcal{M}_r) = (X_2'M_1X_2)^{-1}X_2'M_1y \tag{3.71}$$

olacaktır. Öte yandan $\beta_2$ alt parametre vekörünün $\mathcal{M}_{12}$, $\mathcal{M}_{12.1}$ ve $\mathcal{M}_r$ modelleri altında en iyi lineer yansız tahin edicileri $\tilde{\beta}_2$ için genel durumu gözönüne alaım. Ilk olarak $\Re(X_1) \cap \Re(X_2) = \{0\}$ eşitliğinin sağlandığını kabul edelim ki bu $\beta_2$ nin $\mathcal{M}_{12}$ tam modeli altında tahmin edilebilir olması demektir. Bu durumda Lemma 2.2 uygulanırsa $X_2$ matrisi tam sütun ranklı olmak şartıyla $\mathcal{M}_{12}$ tam modeli altında

$$\begin{aligned} BLUE_{\mathcal{M}_{12}}(\beta_2) &= \tilde{\beta}_2(\mathcal{M}_{12}) \\ &= (X_2'\dot{M}_1X_2)^{-1}X_2'\dot{M}_1y \\ &= (X_2'\ddot{M}_1X_2)^{-1}X_2'\ddot{M}_1y \end{aligned} \tag{3.72}$$

olacaktır, burada

$$\dot{M}_1 = M_1(M_1VM_1)^{-}M_1 \tag{3.72a}$$

ve

$$\ddot{M}_1 = P_V\dot{M}_1P_V = P_VM_1(M_1VM_1)^{-}M_1P_V \tag{3.72b}$$

dir. Öte yandan $\Re(X_2) \subset \Re(V)$ alınırsa bu takdirde

$$\Re(M_1X_2) \subset \Re(M_1V) = \Re(M_1VM_1)$$

yazılabilir ve dolayısıyla $\mathcal{M}_{12.1}$ dönüştürülmüş modeli de bir zayıf singüler lineer model olacaktır. Dolayısıyla da

$$\tilde{\beta}_2(\mathcal{M}_{12.1}) = [X_2' M_1 (M_1 V M_1)^- M_1 X_2]^{-1} X_2' M_1 (M_1 V M_1)^- M_1 y$$

$$= (X_2' \dot{M}_1 X_2)^{-1} X_2' \dot{M}_1 y \tag{3.73}$$

olacaktır ki bu da $\mathcal{M}_{12}$ modeli altında $\beta_2$ parametresinin en iyi lineer yansız tahmin edicisidir, yani

$$\tilde{\beta}_2(\mathcal{M}_{12.1}) = \tilde{\beta}_2(\mathcal{M}_{12}) \tag{3.74}$$

elde edilir.

Son olarak $\mathcal{M}_r$ modeli altında altında $\beta_2$ parametresinin en iyi lineer yansız tahmin edicisinin $\mathcal{M}_{12}$ ve $\mathcal{M}_{12}.1$ modelleri altında $\beta_2$ parametresinin en iyi lineer yansız tahmin edicileri ile çakışmayacağını belirtelim. Bunu göstermek için $\Re(M_1 X_2) \subset \Re(V)$ olduğunu varsayalım. Bu durum örneğin $\Re(X) \subset \Re(V)$ olduğunda sağlanır. Bu nedenle

$$\tilde{\beta}_2(\mathcal{M}_r) = [X_2' M_1 V^- M_1 X_2]^{-1} X_2' M_1 V^- y \tag{3.75}$$

elde edilir. Böylece (3.72) ve (3.73) eşitliklerinde verilen tahmin ediciler için

$$cov\left(\hat{\beta}_2(\mathcal{M}_{12})\right) = cov\left(\hat{\beta}_2(\mathcal{M}_{12.1})\right) = cov\left(\hat{\beta}_2(\mathcal{M}_r)\right)$$

$$= (X_2' M_1 X_2)^{-1} X_2' M_1 V M_1 X_2 (X_2' M_1 X_2)^{-1}, \tag{3.76}$$

$$cov\left(\tilde{\beta}_2(\mathcal{M}_{12})\right) = cov\left(\tilde{\beta}_2(\mathcal{M}_{12.1})\right) = (X_2' M_1 X_2)^{-1}, \tag{3.77}$$

$$cov\left(\tilde{\beta}_2(\mathcal{M}_r)\right) = (X_2' M_1 V^+ M_1 X_2)^{-1} \tag{3.78}$$

yazılabilir. Bu durumda

$$cov\left(\tilde{\beta}_2(\mathcal{M}_{12})\right) = (X_2' M_1 X_2)^{-1} = [X_2' M_1 (M_1 V M_1)^- M_1 X_2]^{-1}$$

$$= (X_2' [V^+ - V^+ X_1 (X_1' V^+ X_1)^{-1} X_1' V^+] X_2)^{-1}$$

$$= (X_2' M_1 V^+ [V - X_1 (X_1' V^+ X_1)^{-1} X_1'] V^+ M_1 X_2)^{-1} \tag{3.79}$$

elde edilir. Buradan zayıf singüler model altında Watson etkinlikler için

$$\phi_{12} = \text{eff}\left(\hat{\beta}(\mathcal{M}_{12})\right) = \frac{cov\left(\tilde{\beta}(\mathcal{M}_{12})\right)}{cov\left(\hat{\beta}(\mathcal{M}_{12})\right)} = \frac{|X'X|^2}{|X'VX||X'V^+X|} \tag{3.80}$$

$$\text{eff}\left(\hat{\beta}_2(\mathcal{M}_{12})\right) = \frac{cov\left(\tilde{\beta}_2(\mathcal{M}_{12})\right)}{cov\left(\hat{\beta}_2(\mathcal{M}_{12})\right)} = \frac{|X_2' M_1 X_2|^2}{|X_2' M_1 V M_1 X_2||X_2' \dot{M}_1 X_2|} \tag{3.81}$$

yazılabilir. Buradan

$$\phi_{2/12} := \text{eff}\left(\hat{\beta}_2(\mathcal{M}_{12})\right) = \text{eff}\left(\hat{\beta}_2(\mathcal{M}_{12.1})\right) \tag{3.82}$$

olduğu aşikardır. Ayrıca $\mathcal{M}_1 = \{y, X_1\beta_1, V\}$ modeli altında

$$\phi_{\frac{1}{1}} := \text{eff}\left(\hat{\beta}_1(\mathcal{M}_1)\right) = \frac{cov\left(\tilde{\beta}_1(\mathcal{M}_1)\right)}{cov\left(\hat{\beta}_1(\mathcal{M}_1)\right)}$$

$$= \frac{|X_1'X_1|^2}{|X_1'VX_1||X_1'V^+X_1|} \tag{3.83}$$

olacaktır. Son olarak $\mathcal{M}_r$ modeli altında $\hat{\beta}_2$ nın Watson etkinliğinin

$$\phi_r := \text{eff}\left(\hat{\beta}_2(\mathcal{M}_r)\right) = \frac{cov\left(\tilde{\beta}_2(\mathcal{M}_r)\right)}{cov\left(\hat{\beta}_2(\mathcal{M}_r)\right)}$$

$$= \frac{(X_2'M_1X_2)^2}{|X_2'M_1VM_1X_2||X_2'M_1V^+M_1X_2|} \tag{3.84}$$

olduğunu ifade edebiliriz. Bu durumda toplam Watson etkinliğinin ayrışımı ile ilgili olarak aşağıdaki teorem verilebilir.

**Teorem 3.5** Yukarıda verilen notasyonlar altında

$$\phi_{12} = \phi_{1/1}.\phi_{2/12}.\alpha_1 \tag{3.85}$$

eşitliği sağlanır, burada

$$\alpha_1 = \frac{|X_2'M_1VM_1X_2|}{|X_2'M_1(M_1V^+M_1)^-M_1X_2|} \geq 1 \tag{3.86}$$

dir, $\alpha_1$ çarpanına modele ilişkin etkinlik çarpanı adı verilir. Bu durumda (3.86) de verilen eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter koşul $X_2{}'M_1VX_1 = 0$ eşitliğinin sağlanmasıdır (Chu ve Ark. (2004)).

**İspat.** Bu durumda $X = (X_1, X_2)$ olduğundan parçalı matrislerde determinantın özellikleri kullanılırsa

$$|X'X| = |X_1'X_1||X_2'M_1X_2| \tag{3.87}$$

$$|X'VX| = |X_1'VX_1||X_2'[V - VX_1(X_1'VX_1)^{-1}X_1'V]X_2|$$

$$= |X_1'VX_1||X_2'M_1(M_1V^+M_1)^-M_1X_2| \tag{3.88}$$

ve

$$|X'V^+X| = |X_1'V^+X_1||X_2'[V^+ - V^+X_1(X_1'V^+X_1)^{-1}X_1'V^+]X_2|$$

$$= |X_1'V^+X_1||X_2'M_1(M_1VM_1)^-M_1X_2| \qquad (3.89)$$

eşitlikleri yazilabilir. Bu ifadeler (3.70a) eşitliğinde yerlerine yazılırsa

$$\phi_{12} = \frac{|X_1'X_1|^2}{|X_1'VX_1||X_2'M_1(M_1V^+M_1)^-M_1X_2|} \cdot \frac{|X_2'M_1X_2|^2}{|X_1'V^+X_1||X_2'M_1(M_1VM_1)^-M_1X_2|}$$

$$= \frac{|X_1'X_1|^2}{|X_1'VX_1||X_1'V^+X_1|} \cdot \frac{|X_2'M_1X_2|^2}{|X_2'M_1VM_1X_2||X_2'M_1X_2|} \cdot \frac{|X_2'M_1VM_1X_2|}{|X_2'M_1(M_1V^+M_1)^-M_1X_2|} \qquad (3.90)$$

olduğu elde edilir. Bu ise (3.85) ifadesinin sağlandığını gösterir. Öte yandan $\alpha_1 \geq 1$ olduğunu göstermek için yukarıda verilenler dikkate alınırsa

$$\alpha_1 = \frac{|X_2'M_1VM_1X_2|}{|X_2'M_1(M_1V^+M_1)^-M_1X_2|}$$

$$= \frac{|X_2'M_1VM_1X_2|}{|X_2'M_1VM_1X_2 - X_2'M_1VX_1(X_1'VX_1)^{-1}X_1'VM_1X_2|} \geq 1$$

yazılabilir. Buarada eşitlik halinin sağlanması için gerek ve yeter şart $X_2'M_1VX_1 = 0$ olmasıdır. Bu da ispatı tamamlar.

**Sonuç 3.4** Yukarıdaki verilenler ışığı altında aşağıdaki durumlar sağlanır (Chu ve Ark. (2004)):

**i.** $M_1V = VM_1 \Leftrightarrow \phi_{1/1} = 1$

**ii.** $M_1VM = MVM_1 \Leftrightarrow \phi_{2/12} = 1$

**iii.** $VM = MV \Leftrightarrow \phi_{12} = 1$

**iv.** $P_{M_1X_2}V = MP_{M_1X_2} \Leftrightarrow \phi_r = 1.$

**Sonuç 3.5** Yukarıdaki verilenler ışığı altında eğer $X$ matrisi tam sütun ranklı ise $\hat{\beta},\ \hat{\beta}_1$, $\hat{\beta}_2$ tahminlerinin $\phi$ Watson etkinlikleri arasında

$$\phi_{12} \geq maks\{\phi_{1/1}.\phi_{2/12},\ \phi_{1/12}.\phi_{2/2}\}$$

eşitsizliği sağlanır. Ayrıca

$$\phi_{12} = \phi_{1/1}.\phi_{2/12} \geq \ \phi_{1/12}.\phi_{2/2} \Leftrightarrow X_1'y \ \ ve\ X_2'M_1y \text{ ilişkisizdir}$$

ve

$$\phi_{12} = \phi_{1/12}.\phi_{2/2} \geq \ \phi_{1/1}.\phi_{2/12} \Leftrightarrow X_2'y \ \ ve\ X_1'M_2y \text{ ilişkisizdir.}$$

durumları söz konusudur (Chu ve Ark. (2004)):

**Örnek 3.1** Yukarıdaki sonuçları görmek için

$$(X_1, X_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ ve } V = \begin{pmatrix} 1 & \rho_1 & 0 \\ \rho_1 & 1 & \rho_2 \\ 0 & \rho_2 & 1 \end{pmatrix}$$

alalım. Bu takdirde $V$ nin pozitif definit olması için gerek ve yeter şart $\rho_1^2 + \rho_2^2 < 1$ olmasıdır. $V$ matrisi süngüler olduğunda bu modelin zayıf singüler olamayacağı kolayca görülebilir. Teorem 3.5 e göre $\phi_{12} = \phi_{1/1}.\phi_{2/12}.\alpha_1$ yazılabilir. Bu nedenle

$$\phi_{12} = \text{eff}\left(\hat{\beta}(\mathcal{M}_{12})\right) = \frac{1-\rho_1^2-\rho_2^2}{1-\rho_1^2},$$

$$\phi_{1/1} = \text{eff}\left(\hat{\beta}_1(\mathcal{M}_1)\right) = \frac{1-\rho_1^2-\rho_2^2}{1-\rho_2^2},$$

$$\phi_{2/12} = \text{eff}\left(\hat{\beta}_2(\mathcal{M}_{12})\right) = 1 - \rho_2^2,$$

olup buradan da etkinlik çarpanının

$$\alpha_1 = \frac{|X_2' M_1 V M_1 X_2|}{|X_2' M_1 (M_1 V^+ M_1)^- M_1 X_2|} = \frac{1}{1-\rho_1^2}$$

şeklinde olacağı ve dolayısıyla (3.85) eşitliğinin

$$\frac{1-\rho_1^2-\rho_2^2}{1-\rho_1^2} = \frac{1-\rho_1^2-\rho_2^2}{1-\rho_2^2}.(1-\rho_2^2).\frac{1}{1-\rho_1^2}$$

şeklinde sağlandığı görülür.

Şimdi de $\mathcal{M}_r = \{y, M_1 X_2 \beta_2, V\}$ modeline bakalım. Bu durumda (3.79) eşitliği dikkate alınırsa aşağıdaki sonuçlar verilebilir:

**Sonuç 3.6** $X$ tam sütun ranklı ve $V$ muhtemelen singüler olmak üzere $\mathcal{M}_{12}$ zayıf singüler parçalı lineer modeli verilmiş olsun. Bu takdirde

**i.** $X_2' M_1 V^+ X_1 = 0$,

**ii.** $\tilde{\beta}_2(\mathcal{M}_{12}) = \tilde{\beta}_r(\mathcal{M}_{12})$,

**iii.** $\phi_{2/12} = \phi_r$.

ifadeleri birbirine denk olacaktır (Chu ve Ark. (2004)).

**Sonuç 3.7** $X$ tam sütun ranklı ve $V$ muhtemelen singüler olmak üzere $\mathcal{M}_{12}$ zayıf singüler parçalı lineer modeli verilmiş olsun. Bu takdirde eğer $\hat{\beta}_1$ tahmin edicisi $\mathcal{M}_1 = \{y, X_1\beta_1, V\}$ küçük modelinde tam olarak etki ise, yani $M_1V = VM_1$ ise

**i.** $X_2'M_1VX_1 = 0$ ve $\alpha_1 = 1$ ,

**ii.** $X_2'M_1V^+X_1 = 0$ ve $\phi_{2/12} = \phi_r$ ,

**iii.** $\phi_{12} = \phi_{2/12} = \phi_r$

dir (Chu ve Ark. (2004)).

**İspat.** $M_1V = VM_1$ ise bu takdirde $X_2'M_1VX_1 = X_2{}'VM_1X_1 = 0$ olduğu açıktır. Bu durumda Teorem 3.5 e göre $\alpha_1 = 1$ olduğu elde edilir. Diğer yandan $M_1V = VM_1 \Leftrightarrow M_1V^+ = V^+M_1$ olduğundan $X_2'M_1V^+X_1 = X_2{}'V^+M_1X_1 = 0$ eşitliğinin de sağlandığı görülür. Buradan da ii. ve dolayısyla da iii. şıklarının sağlandığı görülür.

**Teorem 3.6** $X$ tam sütun ranklı ve $V$ matrisi ise muhtemelen singüler olmak üzere $\mathcal{M}_{12} = \{y, X\beta, V\} = \{y, X_1\beta_1 + X_2\beta_2, V\}$ zayıf singüler parçalı lineer modeli verilmiş olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler birbirine denktir (Chu ve Ark. (2004)):

**a.** $\phi_{12} = \phi_{2/12}$ , yani $\text{eff}\left(\hat{\beta}(\mathcal{M}_{12})\right) = \text{eff}\left(\hat{\beta}_2(\mathcal{M}_{12})\right)$ dir.

**b.** $\phi_{1/1} = \frac{1}{\alpha_1}$ dir.

**c.** $X_1'VX_1 - X_1'VM_1X_2(X_2'M_1VM_1X_2)^{-1}X_2'M_1VX_1 = X_1'X_1(X_1'V^+X_1)^{-1}X_1'X_1$ dir.

**d.** $MV^+X_1 = 0$ dir.

**e.** $\Re(V^+X_1) \subset \Re(X)$ dir.

**f.** $\Re(X_1) \subset \Re(VX)$ dir.

**İspat.** Teoremin ispatı burada verilmeyecektir. Ancak ispat için Chu ve Ark.(2004) e bakılabilir.

### 3.6 Watson Etkinliğinin Ayrışımı ile İlgili İlave Sonuçlar

Bu kısımda daha önceki kısımlarda (3.53)-(3.56) ifadeleriyle tanımlanan

$$\mathcal{M}_{12} = \{y, X_1\beta_1 + X_2\beta_2, V\}$$

$$\mathcal{M}_1 = \{y, X_1\beta_1, V\}$$

$$\mathcal{M}_{12.1} = \{M_1y, M_1X_2\beta_2, M_1VM_1\}$$

$$\mathcal{M}_{1H} = \{Hy, X_1\beta_1, HVH\}$$

modellerini tekrar gözönüne alalım. Bu durumda $\mathcal{M}_{12}$ modeline tam model, $\mathcal{M}_1$ modeline küçük model ve $\mathcal{M}_{12.1}$ modeline de indirgenmiş model adı verilmişti. Buradan $\mathcal{M}_{12.1}$ modelinin $\mathcal{M}_{12}$ modelinin $M_1$ ortogonal izdüşümüyle soldan çarpılarak elde edildiğine dikkat edelim. Benzer şekilde $\mathcal{M}_{1H}$ modeli de yine $\mathcal{M}_1$ modelinin $H$ ortogonal izdüşümüyle soldan çarpılmasıyla elde edilmiştir. Bu nedenle $\mathcal{M}_{1H}$ modeline $\mathcal{M}_1$ modelinin bir dönüştürülmüş versiyonu da diyebiliriz. Bu durumda $Z$ matrisi

$$\Re(Z) = \Re(X)^{\perp} = \Re(M)$$

olacak şekilde tam sütun ranklı bir matris olmak üzere

$$y = X_1\beta_1 + Z\beta_Z + \varepsilon \tag{3.91}$$

modelini göz önüne alalım. Bu model $H$ matrisi ile soldan çarpılırsa $\mathcal{M}_{1H}$ modelinin elde edileceğini belirtelim. Bir önceki kısımda $\phi_{12} = \text{eff}\left(\hat{\beta}(\mathcal{M}_{12})\right)$ olmak üzere

$$\text{eff}\left(\hat{\beta}(\mathcal{M}_{12})\right) = \text{eff}\left(\hat{\beta}_1(\mathcal{M}_1)\right).\text{eff}\left(\hat{\beta}_2(\mathcal{M}_{12})\right).\alpha_1 \tag{3.92}$$

eşitliği verilmişti. Bu kısımda öncelikli amacımız $\frac{1}{\alpha_1}$ ifadesinin aslında $\mathcal{M}_{1H}$ modeli altında $\hat{\beta}_1$ tahmininin etkinliği olduğunu göstermektir. Ikinci olarak da $\phi_{12}$ toplam etkinliği ile $\hat{\beta}_2$ altvektörünün etkinliğinin eşit olduğu yani

$$\text{eff}\left(\hat{\beta}(\mathcal{M}_{12})\right) = \text{eff}\left(\hat{\beta}_2(\mathcal{M}_{12})\right) \tag{3.93}$$

eşitliği ile ilgilenilecektir.

OLS nin etkinliğinin bir diğer ölçüsü $HV - VH$ matrisinin Oklid büyüklüğüne bağlı olarak Bloomfield ve Watson (1975) tarafından

$$\begin{aligned}\text{eff}_{BW}\left(\hat{\beta}(\mathcal{M}_{12})\right) &:= \psi_{12} = \frac{1}{2}\|HV - VH\|^2 = \|HVM\|^2 \\ &= \frac{1}{2}tr(HV - VH)(HV - VH)'\end{aligned} \tag{3.94}$$

şeklinde verilmiştir. Bu durumda kolayca görülebilir ki $\psi_{12} = 0$ olması için gerek ve yeter şart OLSE nin BLUE ya eşit olmasıdır. $\psi_{12}$ ye Bloomfield-Watson etkinliği adı verilir. Burada (3.94) kullanmak için $X$ ve $V$ matrisleri üzerinde rank kısılamasının olmadığına dikkat edelim. İleriki kısımlarda $\psi_{12}$ etkinliği için (3.92) ye karşılık gelen bir ayrışım verilecektir. Ayrıca $\psi_{12}$ nin

$$\mathrm{eff}_{BW}\left(\hat{\beta}(\mathcal{M}_{12})\right)=\mathrm{eff}_{BW}\left(\hat{\beta}_2(\mathcal{M}_{12})\right)=:\psi_{2/12} \tag{3.95}$$

olarak yazılabilmesi için bir gerek ve yeter şart ortaya konulacaktır. Ayrıca $\mathcal{M}_1 = \{y, X_1\beta_1\,, V\}$ modeli altında $OLSE(\beta_1)$ tahmin edicisinin Watson etkinliği

$$\phi_{1/1}=\mathrm{eff}\left(\hat{\beta}_1(\mathcal{M}_1)\right)=\frac{|X_1'X_1|^2}{|X_1'VX_1||X_1'V^+X_1|}$$

iken

$$\phi_{\frac{2}{12}}=\mathrm{eff}\left(\hat{\beta}_2(\mathcal{M}_{12})\right)=\mathrm{eff}\left(\hat{\beta}_2(\mathcal{M}_{12.1})\right)$$

$$=\frac{|X_2'M_1X_2|^2}{|X_2'M_1VM_1X_2||X_2'\dot{M}_1X_2|}$$

olduğu daha önce verilmişti. Burada

$$\dot{M}_1=M_1(M_1VM_1)^-M_1 \text{ ve } \ddot{M}_1=P_V\dot{M}_1P_V$$

dir. Buradan $P_1P_VM_1=0$ olduğunda

$$\ddot{M}_1=P_VM_1(M_1VM_1)^-M_1P_V=V^+-V^+X_1(X_1'V^+X_1)^-X_1'V^+ \tag{3.96a}$$

$$\ddot{M}_1=M_1\ddot{M}_1=\ddot{M}_1M_1=M_1\ddot{M}_1M_1=P_V(M_1VM_1)^+P_V \tag{3.96b}$$

eşitlikleri yazılabilir. Özel olarak

$$A'\ddot{M}_1B=A'\dot{M}_1B,\ \forall\, A,B\text{: } \Re(A)\subset\Re(V),\ \ \Re(B)\subset\Re(V) \tag{3.97}$$

yazılabilir.

$\beta_2$ parametresinin $\mathcal{M}_{12}$ modeli altındaki BLU tahmin edicisinin $\mathcal{M}_{12.1}$ modeli altındaki BLU tahmin edicisine eşit olduğunu yani $\tilde{\beta}_2(\mathcal{M}_{12})=\tilde{\beta}_2(\mathcal{M}_{12.1})$ olduğunu bir kez daha belirtelim.

Şimdi toplam Watson etkinliği için Teorem 3.5 de verilen ifadenin revize edilmiş yeni bir versiyonunu verebiliriz.

**Teorem 3.7** $X$ tam sütun ranklı olmak üzere $\mathcal{M}_{12}=\{y, X\beta, V\}$ zayıf singüler parçalı lineer modeli altında $OLSE(\beta)$ nın $\phi_{12}$ toplam Watson etkinliği

$$\phi_{12}=\mathrm{eff}\left(\hat{\beta}(\mathcal{M}_{12})\right)=\mathrm{eff}\left(\hat{\beta}_1(\mathcal{M}_1)\right).\mathrm{eff}\left(\hat{\beta}_2(\mathcal{M}_{12})\right).\frac{1}{\mathrm{eff}\left(\hat{\beta}_1(\mathcal{M}_{1H})\right)} \tag{3.98}$$

çarpımı şeklinde yazılabilir, burada

$$\text{eff}\left(\hat{\beta}_1(\mathcal{M}_{1H})\right) := \phi_{1H} = \frac{|X_1'X_1|^2}{|X_1'VX_1||X_1'(HVH)^- X_1|} \tag{3.99a}$$

$$= \left|I_{p_1} - X_1'VM_1X_2(X_2'M_1VM_1X_2)^{-1}X_2'M_1VX_1'(X_1'VX_1)^{-1}\right| \tag{3.99b}$$

dir (Chu ve Ark. (2005)).

**İspat.** İlk olarak (3.99a) ve (3.99b) nin eşit olduğunu gösterelim. $\mathcal{M}_{1H}$ modeli bir zayıf singüler lineer model olduğundan

$$\text{cov}\left(\hat{\beta}_1(\mathcal{M}_{1H})\right) = (X_1'(HVH)^- X_1)^{-1} \tag{3.100}$$

olacaktır ve böylece (3.99a) nın sağlandığı kolayca görülebilir. Ayrıca (3.69) eşitlikleri dikkate alınırsa

$$X_1'X_1(X_1'(HVH)^- X_1)^{-1}X_1'X_1$$

$$= X_1'HVHX_1 - X_1'HVHM_1(M_1HVHM_1)^- M_1HVHX_1 \tag{3.101a}$$

$$= X_1'VX_1 - X_1'VP_{M_1X_2}(P_{M_1X_2}VP_{M_1X_2})^- P_{M_1X_2}VX_1 \tag{3.101b}$$

$$= X_1'VX_1 - X_1'VM_1X_2(X_2'M_1VM_1X_2)^- X_2'M_1VX_1 \tag{3.101c}$$

eşitlikleri yazılabilir, burada

$$HM_1 = \left(P_1 + P_{M_1X_2}\right)M_1 = P_{M_1X_2} \tag{3.102}$$

eşitliği kullanılmıştır. Bu durumda (3.101c) eşitliği (3.99a) da yerine yazılırsa (3.99b) eşitliği elde edilir. Teorem 3.5 de $\phi_{12} = \phi_{1/1}.\phi_{2/12}.\alpha_1$ eşitliğinin sağlandığı ve

$$\alpha_1 = \frac{|X_2'M_1VM_1X_2|}{|X_2'M_1(M_1V^+M_1)^- M_1X_2|} \tag{3.103}$$

olduğu gösterilmişti. Bu nedenle geriye kalan

$$\text{eff}\left(\hat{\beta}_1(\mathcal{M}_{1H})\right) = \frac{1}{\alpha_1} \tag{3.104}$$

olduğunun gösterilmesidir. Bu durumda (3.96) ve (3.97) de verilen eşitliklerde $V^+$ ve $V$ matrislerinin roller değiştirilerek

$$X_2'M_1(M_1V^+M_1)^- M_1X_2 = X_2'M_1VM_1X_2 - X_2'M_1VX_1(X_1'VX_1)^{-1}X_1'VM_1X_2 \tag{3.105}$$

eşitliğinin sağlandığı görülür. Bu eşitlik (3.103) de yerine yazılır ve yeniden bir düzenleme yapılırsa istenilenler elde edilmiş olur ve böylece ispat tamamlanır.

**Tanım 3.2** Bir $Fy$ lineer istatistiğine $\mathcal{M} = \{y, X\beta, V\}$ modeli altında $X\beta$ için lineer olarak yeterlidir denir eğer $AFy = BLUE(X\beta)$ olacak şekilde bir $A$ matrisi varsa.

Şimdi toplam Watson etkinliğinin özel bir formu için şartlar geliştirilecektir. Aşağıdaki teorem $\phi_{12}$ toplam etkinliğinin $\mathcal{M}_{12}$ modeli altında $\hat{\beta}_2$ alt vektör tahmininin etkinliğine eşit olması için gerek ve yeter şartlar vermektedir. Teorem 3.8 deki a. ve b. nin denkliği Teorem 3.6 da verilmişti.

**Teorem 3.8** $X$ tam sütun ranklı ve $V$ matrisi ise muhtemelen singüler olmak üzere $\mathcal{M}_{12} = \{y, X\beta, V\} = \{y, X_1\beta_1 + X_2\beta_2, V\}$ zayıf singüler parçalı lineer modeli verilmiş olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler birbirine denktir (Chu ve Ark. (2005)):

**a.** $\phi_{12} = \phi_{2/12}$, yani $\mathrm{eff}\left(\hat{\beta}(\mathcal{M}_{12})\right) = \mathrm{eff}\left(\hat{\beta}_2(\mathcal{M}_{12})\right)$ dir.

**b.** $\Re(X_1) \subset \Re(VX)$ dir.

**c.** $Hy$ vektörü $\mathcal{M}_1$ modeli altında $X_1\beta_1$ için lineer olarak yeterlidir.

**İspat.** a. daki ifade $\phi_{1/1} = \frac{1}{\alpha_1}$ eşitliğine denktir. Bu durumda Teorem 3.7 den

$$\mathrm{eff}\left(\hat{\beta}_1(\mathcal{M}_1)\right) = \mathrm{eff}\left(\hat{\beta}_1(\mathcal{M}_{1H})\right)$$

yazılabilir. Öte yandan $cov\left(\hat{\beta}_1(\mathcal{M}_1)\right) = cov\left(\hat{\beta}_1(\mathcal{M}_{1H})\right)$ olduğundan

$$\left|cov\left(\hat{\beta}_1(\mathcal{M}_1)\right)\right| = c\left|ov\left(\hat{\beta}_1(\mathcal{M}_{1H})\right)\right|$$

eşitliği ve dolayısıyla (3.96) ve (3.97) eşitliklerinde $M_1$ ve $H$ nin roller değiştirilerek

$$|X_1'V^+X_1| = |X_1'(HVH)^-X_1| = |X_1'V^+X_1 - X_1'V^+M(MV^+M)^-MX_1| \qquad (3.106)$$

eşitliği yazılabilir. Bu durumda Löwner anlamında

$$cov\left(\tilde{\beta}_1(\mathcal{M}_1)\right) \geq cov\left(\tilde{\beta}_1(\mathcal{M}_{1H})\right) \qquad (3.107)$$

olacağı dikkate alınırsa (3.106) determinant eşitliği bunlara karşılık gelen matrislerin eşitliğine denk olacaktır. Bu nedenle (3.106) eşitliğinin sağlanması için gerek ve yeter şart $X_1'V^+M = 0$ olmasıdır. Bu ise açıkcası b. şıkkına denktir. Son olarak lineer olarak yeterlilik tanımı ve $\mathcal{M}_1$ zayıf singüler modeli dikkate alınırsa b. şıkkının $\mathcal{M}_1$ altında $Hy$ vektörünün lineer yeterlilik şartını sağladığı anlamına geldiği söylenebilir ve böylece ispat tamamlanır.

Bu kısmı $\alpha_1$ etkinlik çarpanı ile ilgili bazı hatırlatmaları vererek tamamlayalım. Öncelikle belirtelim ki

$$\text{eff}\left(\tilde{\beta}_1(\mathcal{M}_{1H})\right) = 1 \Leftrightarrow \alpha_1 = 1 \Leftrightarrow X_2' M_1 V X_1 = 0 \tag{3.108}$$

yazılabilir. Ayrıca (3.107) den $\phi_{1/1} \leq \frac{1}{\alpha_1}$ olduğu, yani

$$\phi_{1/1}.\alpha_1 \leq 1 \tag{3.109}$$

olduğu görülür.

**Sonuç 3.8** $X$ matrisi $p = p_1 + p_2$ tam sütun ranklı, $m = \min\{p_1, p_2\}$ ve $V$ matrisi ise muhtemelen singüler olmak üzere $\mathcal{M}_{12}$ zayıf singüler parçalı lineer modeli verilmiş olsun. Ayrıca $\Re(X)$ sütun uzayı sabit olsun. Bu takdirde $\alpha_1$ etkinlik çarpanı için üst sınır $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \cdots \geq \mu_p > 0$ değerleri $HVH$ matrisinin sıfırdan farklı (pozitif) öz değerleri olmak üzere

$$\alpha_1 \leq \prod_{i=1}^{m} \frac{(\mu_i + \mu_{p-i+1})^2}{4\mu_{i.}\mu_{p-i+1}} \tag{3.109}$$

ile verilir.

Şimdi de Bloomfield ve Watson (1975) tarafından verilen $\psi_{12}$ komütatör kriteri için bir ayrışım verilecektir.

**Teorem 3.9** $\mathcal{M}_{12} = \{y, X_1\beta_1 + X_2\beta_2, V\}$ genel parçalı lineer modeli verilmiş olsun. Bu durumda

$$\text{eff}_{BW}\left(\hat{\beta}(\mathcal{M}_{12})\right) = \psi_{12} = \frac{1}{2}\|HV - VH\|^2 = \|HVM\|^2$$

Bloomfield-Watson etkinliği

$$\psi_{12} = \psi_{1/1} + \psi_{2/12} - \psi_{1H} \tag{3.110}$$

şeklinde parçalanır, burada $\psi_{1/1}$, $\psi_{2/12}$ ve $\psi_{1H}$ etkinlikleri sırasıyla

$$\psi_{1/1} = \text{eff}_{BW}\left(\hat{\beta}_1(\mathcal{M}_1)\right) = \|P_1 V M_1\|^2$$

$$\psi_{2/12} = \text{eff}_{BW}\left(\hat{\beta}_2(\mathcal{M}_{12})\right) = \left\|P_{M_1X_2} V M\right\|^2$$

$$\psi_{1H} = \text{eff}_{BW}\left(\hat{\beta}_1(\mathcal{M}_{1H})\right) = \left\|P_1 V P_{M_1X_2}\right\|^2$$

şeklindedir.

**İspat.** Açık bir şekilde

$$\psi_{1/1} = \frac{1}{2}\|P_1V - VP_1\|^2 = \|P_1VM_1\|^2 := \|A\|^2$$

yazılabilir. Benzer şekilde

$$\psi_{2/12} = \frac{1}{2}\left\|P_{M_1X_2}M_1VM_1 - M_1VM_1P_{M_1X_2}\right\|^2$$

$$= \left\|P_{M_1X_2}M_1VM_1(I - P_{M_1X_2})\right\|^2$$

$$= \left\|P_{M_1X_2}VM\right\|^2 := \|B\|^2$$

ve $H = P_1 + P_{M_1X_2}$ olmak üzere $\mathcal{M}_{1H} = \{Hy, X_1\beta_1, HVH\}$ modeli altında

$$\psi_{1H} = \frac{1}{2}\|P_1HVH - HVHP_1\|^2 = \|P_1HVHM_1\|^2 = \left\|P_1VP_{M_1X_2}\right\|^2 := \|C\|^2$$

yazılabilir. Buradan

$$\psi_{12} = \|HVM\|^2 = \|A + B - C\|^2$$

olduğu koalyca görülebilir. Ayrıca

$$A'B = 0,\ \ B'C = 0 \text{ ve } tr(A'C) = tr(C'C) = \|C\|^2$$

olduğundan

$$\psi_{12} = \|A +\|^2 + \|B\|^2 + \|C\|^2$$

yazılabilir ve böylece de ispat tamamlanmış olur.

**Teorem 3.10** $\mathcal{M}_{12} = \{y, X_1\beta_1 + X_2\beta_2, V\}$ genel parçalı lineer modeli verilmiş olsun. Bu durumda $\psi_{12} = \psi_{2/12}$ olması için gerek ve yeter koşul $\Re(VX_1) \subset \Re(X)$ olmasıdır. Zayıf singüler lineer model altında ise $\psi_{12} = \psi_{2/12}$ olması için gerek ve yeter koşul $\Re(X_1) \subset \Re(V^+X)$ olmasıdır.

**İspat.** Öncelikle belirtelim ki $\psi_{12} = \psi_{2/12}$ olması için gerek ve yeter şart $\psi_{1/1} = \psi_{1H}$ olmasıdır. Buradan $tr(P_1VM_1VP_1) = tr(P_1VP_{M_1X_2}VP_1)$ veya buna denk olarak $tr[P_1V(M_1 - P_{M_1X_2})VP_1] = 0$ eşitliği yazılabilir. Eğer bu durumda $M_1 - P_{M_1X_2} = M$ olduğu dikkate alınırsa $MVP_1 = 0$ elde edilir ki bu da $\Re(VX_1) \subset \Re(X)$ olması demektir. Öte yandan zayıf singüler lineer model durumunda ise $MVP_1 = 0$ olması demek $\Re(X_1) \subset \Re(V^+X)$ olması anlamına gelir. Böylelikle ispat tamamlanmış olur.

## 3.7 Parçalı Modelde Watson Etkinliğinin Ayrışımı ile İlgili Bazı Örnekler

Bu kısımda bir önceki kısımda verilen

$$y = X_1\beta_1 + X_2\beta_2 + \varepsilon,\ E(\varepsilon)=0,\ Cov(\varepsilon) = V, \tag{3.111}$$

parçalı lineer modeli yeniden ele alalım ve $X = (X_1, X_2)$ matrisi tam $p = p_1 + p_2$ sütun ranklı olsun. Modelimizi yine $\beta = \begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\end{pmatrix}$ olmak üzere yine

$$\mathcal{M}_{12} = \{y, X\beta, V\} = \{y, X_1\beta_1 + X_2\beta_2, V\}$$

ile gösterelim, burada $X_1 \in \mathbb{R}^{n\times p_1}$ ve $X_2 \in \mathbb{R}^{n\times p_2}$ keyfi ranklı iki bilinenler matrisi, $y \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ gözlenebilir bir rasgele vektör, $\beta_1 \in \mathbb{R}^{p_1\times 1}$ ve $\beta_2 \in \mathbb{R}^{p_2\times 1}$ iki bilinmeyen parametreler vektörü, $V \in \mathbb{R}^{n\times n}$ kovaryans matrisi negatif definit matristir. Bu takdirde daha önve belirtildiği gibi $\mathcal{M}_{12}$ tam modeli altında $\beta$ nın OLSE ve BLUE tahmin edicileri sırasıyla

$$OLSE(\beta) = \hat{\beta}(\mathcal{M}_{12}) = \begin{pmatrix}\hat{\beta}_1\\ \hat{\beta}_2\end{pmatrix} = (X'X)^{-1}X'y \tag{3.112a}$$

$$BLUE(\beta) = \tilde{\beta}(\mathcal{M}_{12}) = \begin{pmatrix}\tilde{\beta}_1\\ \tilde{\beta}_2\end{pmatrix} = (X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1}y \tag{3.112b}$$

şeklinde yazılabilir. Bu durumda bu tahmin edicilerin kovaryans matrisleri de sırasıyla

$$cov(\hat{\beta}(\mathcal{M}_{12})) = (X'X)^{-1}X'VX(X'X)^{-1} \tag{3.113a}$$

$$cov(\tilde{\beta}(\mathcal{M}_{12})) = (X'V^{-1}X)^{-1} \tag{3.113b}$$

şeklinde yazılabilir. Bu nedenle Löwner sıralaması

$$cov(\hat{\beta}(\mathcal{M}_{12})) \geq_L cov(\tilde{\beta}(\mathcal{M}_{12})) \tag{3.114}$$

olacaktır. Bu durumda $\mathcal{M}_{12}$ modeli altında $\hat{\beta}$ nın OLSE sinin toplam Watson etkinliği

$$\text{eff}\left(\hat{\beta}(\mathcal{M}_{12})\right) = \frac{cov\left(\tilde{\beta}(\mathcal{M}_{12})\right)}{cov\left(\hat{\beta}(\mathcal{M}_{12})\right)} = \frac{|X'X|^2}{|X'VX||X'V^{-1}X|} \tag{3.115}$$

şeklinde idi. Benzer şekilde $\mathcal{M}_{12}$ modeli altında $\hat{\beta}_i, (i = 1,2)$ nin Watson etkinliğini

$$\text{eff}\left(\hat{\beta}_1(\mathcal{M}_{12})\right) = \frac{cov\left(\tilde{\beta}_1(\mathcal{M}_{12})\right)}{cov\left(\hat{\beta}_1(\mathcal{M}_{12})\right)} \ \text{ ve } \ \text{eff}\left(\hat{\beta}_2(\mathcal{M}_{12})\right) = \frac{cov\left(\tilde{\beta}_2(\mathcal{M}_{12})\right)}{cov\left(\hat{\beta}_2(\mathcal{M}_{12})\right)} \tag{3.116}$$

ile ve $\gamma_{12}$ etkinlik faktörizasyon çarpanını

$$\gamma_{12} = \frac{\text{eff}\left(\hat{\beta}(\mathcal{M}_{12})\right)}{\text{eff}\left(\hat{\beta}_1(\mathcal{M}_{12})\right)\text{eff}\left(\hat{\beta}_2(\mathcal{M}_{12})\right)} \tag{3.117}$$

veya buna denk olarak

$$\text{eff}\left(\hat{\beta}(\mathcal{M}_{12})\right) = \gamma_{12}.\text{eff}\left(\hat{\beta}_1(\mathcal{M}_{12})\right).\text{eff}\left(\hat{\beta}_2(\mathcal{M}_{12})\right) \quad (3.118)$$

ile gösterelim. Bu kısımda $\gamma_{12} > 1$, $\gamma_{12} = 1$ veya $\gamma_{12} < 1$ durumlarını karakterize edeceğiz. Bu durumda $\gamma_{12} = 1$ olduğunda

$$\text{eff}\left(\hat{\beta}(\mathcal{M}_{12})\right) = \text{eff}\left(\hat{\beta}_1(\mathcal{M}_{12})\right).\text{eff}\left(\hat{\beta}_2(\mathcal{M}_{12})\right)$$

olacaktır. Bu durumda Watson etkinliği çarpanlarına ayrılabilir denir. Watson etkinliği nonnegatif olup 1 i geçemeyeceğinden

$$\text{eff}\left(\hat{\beta}(\mathcal{M}_{12})\right) = 1 \text{ ve } \gamma_{12} = 1 \Longrightarrow \text{eff}\left(\hat{\beta}_1(\mathcal{M}_{12})\right) = 1 \text{ ve eff}\left(\hat{\beta}_2(\mathcal{M}_{12})\right) = 1 \quad (3.119)$$

yazılabilir. Buradan da

$$\text{eff}\left(\hat{\beta}(\mathcal{M}_{12})\right) = 1 \Longrightarrow \gamma_{12} = 1 \text{ ve eff}\left(\hat{\beta}_1(\mathcal{M}_{12})\right) = 1 \text{ ve eff}\left(\hat{\beta}_2(\mathcal{M}_{12})\right) = 1 \quad (3.120)$$

yazılabilir. (3.120) ifadesini göstermek için (3.114) eşitsizliğinden

$$cov(\hat{\beta}(\mathcal{M}_{12})) \geq cov(\tilde{\beta}(\mathcal{M}_{12})) \quad (3.121)$$

eşitsizliği yazılabilir. Eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter şart (3.121) deki kovaryans matrisleri eşit olmalıdır. Dolayısıyla $\mathcal{M}_{12}$ modeli altında $\hat{\beta} = \tilde{\beta}$ eşitliği 1 olasılıkla gerçeklenir. Bu sonuç (3.117) tanımıyla birleştirilirse (3.120) ifadesi elde edilir. Diğer taraftan

$$\text{eff}\left(\hat{\beta}(\mathcal{M}_{12})\right) = \text{eff}\left(\hat{\beta}_1(\mathcal{M}_{12})\right) \Leftrightarrow \gamma_{12}.\text{eff}\left(\hat{\beta}_2(\mathcal{M}_{12})\right) = 1$$

veya

$$\text{eff}\left(\hat{\beta}(\mathcal{M}_{12})\right) = \text{eff}\left(\hat{\beta}_2(\mathcal{M}_{12})\right) \Leftrightarrow \gamma_{12}.\text{eff}\left(\hat{\beta}_1(\mathcal{M}_{12})\right) = 1$$

olduğunda 1. Tipten Watson etkinliği düzeltmesi vardır denir. Benzer şekilde

$$\text{eff}\left(\hat{\beta}(\mathcal{M}_{12})\right) = \gamma_{12}.\text{eff}\left(\hat{\beta}_1(\mathcal{M}_{12})\right) \Leftrightarrow \text{eff}\left(\hat{\beta}_2(\mathcal{M}_{12})\right) = 1$$

veya

$$\text{eff}\left(\hat{\beta}(\mathcal{M}_{12})\right) = \gamma_{12}.\text{eff}\left(\hat{\beta}_2(\mathcal{M}_{12})\right) \Leftrightarrow \text{eff}\left(\hat{\beta}_1(\mathcal{M}_{12})\right) = 1$$

olduğunda 2. Tipten Watson etkinliği düzeltmesi vardır denir.

Şimdi bu formülleri bazı örneklerle açıklayalım.

**Örnek 3.2** ($n = 4, p = 2$ olan basit bir örnek) $X$ model matrisi ve $V$ kovaryans matrisi

$$X = (X_1, X_2) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ ve } V = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 3\rho \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 3\rho & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \tag{3.122}$$

olarak alınsın (Chu ve Ark. (2007)). Bu takdirde $-\frac{2}{3} < \rho < 1$ olduğunda $V$ matrisi pozitif definitttir. Çünkü $V$ matrisinin pozitif definit olduğunu göetermek için sol üst 3x3 lük alt matris Schur bileşeni için

$$3 - (3\rho, 1,1)\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3\rho \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 - (3\rho, 1,1)\begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3\rho \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{6}{5}(1-\rho)(2+3\rho) > 0$$

yazılabilir. Böylece $X$ model matrisi ve $V$ kovaryans matrisi pozitif definit olduğunda

$$var(\tilde{\beta}_1) = \frac{2(2+\rho)}{3(1+\rho)}, \qquad var(\hat{\beta}_1) = \frac{11+3\rho}{8}$$

$$var(\tilde{\beta}_2) = \frac{3(1-\rho)}{2(7-6\rho)}, \qquad var(\hat{\beta}_2) = \frac{11-3\rho}{50}$$

olduğu görülür. Ayrıca $cov(\tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2) = cov(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2) = 0$ olduğundan genelleştirilmiş varyanslar karşılık gelen varyansların çarpımı olacağından

$$|cov(\tilde{\beta})| = \frac{(2+\rho)(1-\rho)}{(1+\rho)(7-6\rho)} \quad \text{ve} \quad |cov(\hat{\beta})| = \frac{(11+3\rho)(11-3\rho)}{400}$$

ifadeleri elde edilir. Bu durumda Watson etkinlikleri

$$\text{eff}(\hat{\beta}_1) = \frac{16(2+3\rho)}{3(1+\rho)(11+3\rho)} \quad \text{ve} \quad \text{eff}(\hat{\beta}_2) = \frac{75(1-\rho)}{(7-6\rho)(11-3\rho)}$$

ve toplam Watson etkinliği bu iki Watson etkinliğinin çarpımı olup

$$\text{eff}(\hat{\beta}) = \frac{400(2+3\rho)(1-\rho)}{(1+\rho)(11+3\rho)(7-6\rho)(11-3\rho)} = \text{eff}(\hat{\beta}_1).\text{eff}(\hat{\beta}_2)$$

olarak yazılabilir. Dolayısıyla bu örnekte etkinlik faktörizasyon çarpanı $\gamma_{12} = 1$ bulunur. Ayrıca $\gamma_{12} = 1$ olmak üzere bu örnek için

$$\text{eff}(\hat{\beta}) = 1 \Leftrightarrow \text{eff}(\hat{\beta}_1) = 1 \Leftrightarrow \text{eff}(\hat{\beta}_2) = 1 \Leftrightarrow \rho = \frac{1}{3}$$

olduğu görülür ve bu nedenle burada hem 1. Tipten hem de 2. Pipten Watson etkinliği düzeltmesi söz konusudur.

Şimdi model matrisimizde küçük bir değişiklik yapalım ve

$$X = (X_1, X_2) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \text{ ve } V = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 3\rho \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 3\rho & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \tag{3.123}$$

durumunu göz önüne alalım. Bu durumda

$$var(\tilde{\beta}_1) = \frac{317-198\rho-99\rho^2}{3(77-70\rho-3\rho^2)}, \qquad var(\hat{\beta}_1) = \frac{11+3\rho}{8}$$

$$var(\tilde{\beta}_2) = \frac{12(1-\rho^2)}{77-70\rho-3\rho^2}, \qquad var(\hat{\beta}_2) = \frac{4+3\rho}{25}$$

olduğu görülür. Bu durumda alt Watson etkinlikleri

$$\text{eff}(\hat{\beta}_1) = \frac{8(317-198\rho-99\rho^2)}{3(77-70\rho-3\rho^2)(11+3\rho)}$$

ve

$$\text{eff}(\hat{\beta}_2) = \frac{300(1-\rho^2)}{(77-70\rho-3\rho^2)(4+3\rho)}$$

şeklinde olacaktır. Öte yandan genelleştirilmiş varyanslar

$$\left|cov(\tilde{\beta})\right| = \frac{8(2+3\rho)(1-\rho)}{77-70\rho-3\rho^2} \quad \text{ve} \quad \left|cov(\hat{\beta})\right| = \frac{343+414\rho-9\rho^2}{1600}$$

olarak bulunur ve dolayısıyla da toplam Watson etkinliği

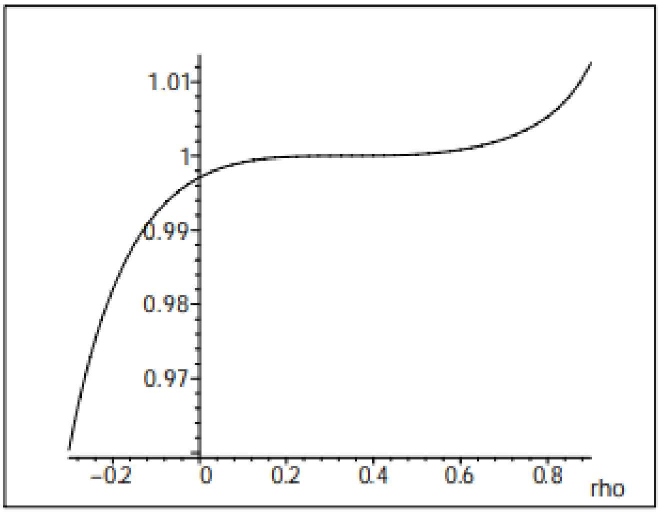
$$\text{eff}(\hat{\beta}) = \frac{12800(2+3\rho)(1-\rho)}{(3\rho^2+70\rho-77)(343+414\rho-9\rho^2)}$$

şeklinde elde edilmiş olur. Bu durumda

$$\gamma = \frac{\text{eff}(\hat{\beta})}{\text{eff}(\hat{\beta}_1).\text{eff}(\hat{\beta}_2)}$$

$$= \frac{16(2+3\rho)(4+3\rho)(11+3\rho)(77-70\rho-3\rho^2)}{(1+\rho)(317-198\rho-99\rho^2)(343+414\rho-9\rho^2)}$$

olarak bulunur. Bu ifade daha fazla sadeleştirilemez. Ayrıca $\gamma$ $\rho$ nun artan bir fonksiyonu olarak düşünülebilir. Öte yandan $\rho < 0$ olduğunda $\gamma < 1$ olacağını da belirtelim. Bu durumda ilginçtir ki $\rho = 0$ olduğunda $\gamma = \frac{108,416}{108,731} \approx 0,9971$ ve $\rho = \frac{1}{3}$ olduğunda $\gamma = 1$ olmaktadır.




**Şekil 3. 1** (3.123) deki $X$ ve $V$ matrisleri için γ nin $\rho$ ya Göre Etkinlik Ayrışımı

**Örnek 3.3** (Delozier'in Torna Verileri). Weisberg (2005) tarafından tartışılan M.R. Delozier' in torna verilerini ele alalım. Tablo 3.1 deki veri bir kesici alet malzemesinin bir tornada çelik kesmedeki performansını ölçmek için alınan bir deneyin sonuçlarıdır (Chu ve Ark. (2007)).

Kesme hızı (dakikada feet olarak) ve kesme oranı () olmak üzere iki faktörlü 20 denemelik tamamen rasgele bir deney kullanılmıştır. Uygunluk için iki faktör

$$S = \frac{(hız - 900)}{300} \text{ ve } F = \frac{(\text{besleme oranı} - 13)}{6}$$

şeklinde merkezileştirerek kodlanmıştır. Sonuç $Y$ = malzemenin ömrü (dakika olarak) olacaktır.

**Çizelge 3.1** Delozier'in Torna Verileri İçin Kodlanmış Veriler

| $S$ | $F$ | $Y$ | $S$ | $F$ | $Y$ |
|---|---|---|---|---|---|
| -1 | -1 | 54,5 | $\sqrt{2}$ | 0 | 20,1 |
| -1 | -1 | 66,0 | $-\sqrt{2}$ | 0 | 2,9 |
| 1 | -1 | 11,8 | 0 | 0 | 3,8 |
| 1 | -1 | 14,0 | 0 | 0 | 2,2 |
| -1 | 1 | 5,2 | 0 | 0 | 3,2 |
| -1 | 1 | 3,0 | 0 | 0 | 4,0 |
| 1 | 1 | 0,8 | 0 | 0 | 2,8 |
| 1 | 1 | 0,5 | 0 | 0 | 3,2 |
| 0 | $\sqrt{2}$ | 46,5 | 0 | 0 | 4,0 |
| 0 | $\sqrt{2}$ | 0,4 | 0 | 0 | 3,5 |

Bu durumda $S$ nin $F$ ye göre serpilme diyagramı aşağıda Şekil 3.2 de verilmiştir, buradaki sayılar herbir deneysel veriye karşılık gelen değerleri göstermektedir.

Wiesberg $S$ ve $F$ ye bağlı olarak ikinci mertebeden tam modeli log $(Y)$ olarak almış ve bunu

$$\log(Y) = \beta_0 + \beta_1 S^2 + \beta_2 F^2 + \beta_3 S + \beta_4 F + \beta_5 SF + \varepsilon$$

olarak kurmuştur. Dolayısyla $X_1$ ve $X_2$ nin her ikisi de 20x3 tipinde matrisler olmak üzere $X = (X_1, X_2)$ model matrisi 20x6 ortogonal parçalanmış yani $X_1'X_2 = 0$ olan bir matristir. Bu durumda $X$ model matrisi

$$X' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

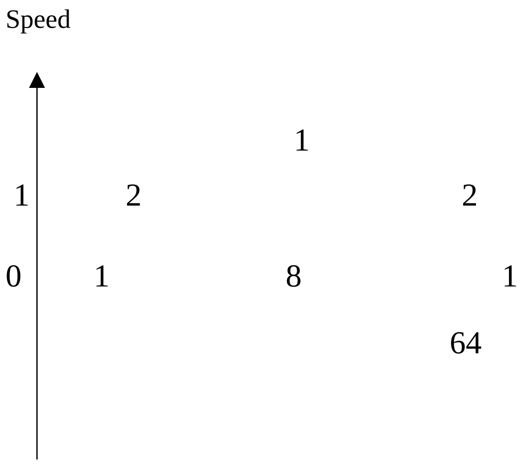
şeklinde yazılabilir.

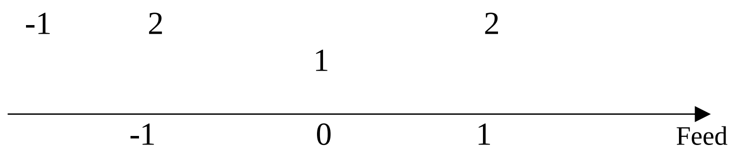
Buradan

$$X'X = \begin{bmatrix} X_1'X_1 & X_1'X_2 \\ X_2'X_1 & X_2'X_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 20 & 12 & 12 & 0 & 0 & 0 \\ 12 & 16 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 12 & 8 & 16 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

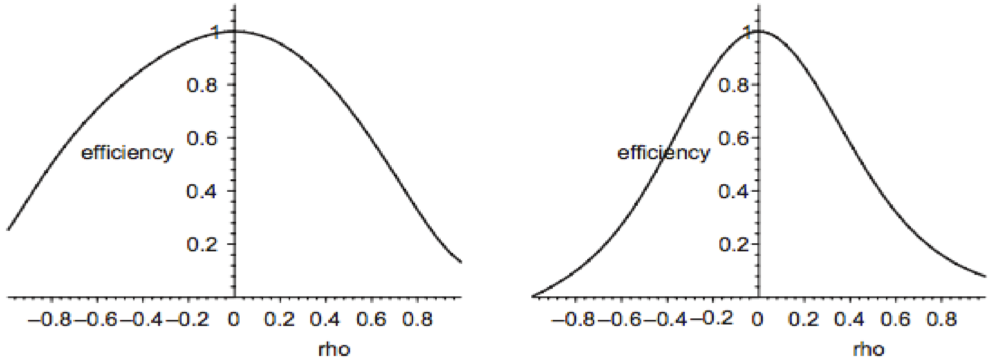
olup $X_1'X_2 = 0$ olduğu görülür.






**Şekil 3.2** Tablo 3.1' deki Torna Verileri için S - F Dağılım Grafiği.

Şimdi bu 20 gözlemin $\rho$ seri korelasyon katsayısına sahip zamana göre dizisel olarak yapıldığını ve bu nedenle de kovaryans matrisinin aşağıdaki şekilde veridiğini belirtelim.

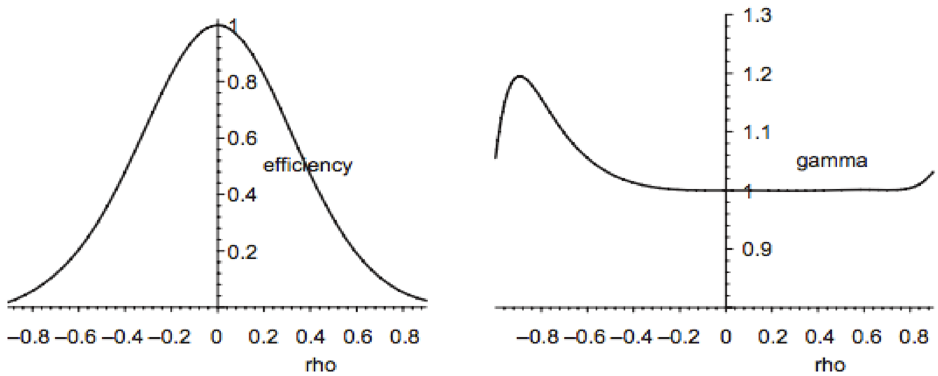



**Şekil 3.3** Torna Verisi için Alt Küme Watson ile Seri Korelasyon Katsayısı.

Bu durumda $V$ kovaryans matrisi

$$V = \begin{bmatrix} 1 & \rho & \rho^2 & \cdots & \cdots & \rho^{19} \\ \rho & 1 & \rho & \cdots & \cdots & \rho^{18} \\ \rho^2 & \rho & 1 & \cdots & \cdots & \rho^{17} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \rho^{19} & \rho^{18} & \rho^{17} & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} = A'A,$$

biçiminde olacaktır.

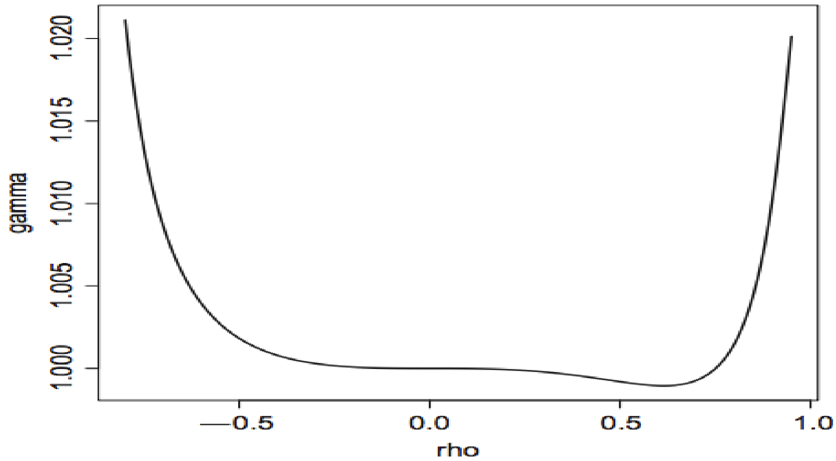


**Şekil 3.4** Torna Verisi için Toplam Watson Etkinliği ve Seri Korelasyon Katsayısı.

Burada $\lambda = \sqrt{1-\rho^2}$ olmak üzere $A$ maitrisi

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & \lambda\rho & \lambda\rho^2 & \cdots & \cdots & \lambda\rho^{19} \\ 0 & 1 & \rho & \cdots & \cdots & \rho^{18} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \cdots & \rho^{17} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

şeklindedir.




**Şekil 3.5** Seri Korelasyon Katsayısına Karşı Etkinlik Ayrışımı Çarpanının Grafiği.

Bu durumda $V$ matrisinin determinant $|V| = \lambda^2 = \frac{1}{1-\rho^2}$ şeklinde olur ve dolayısyla $V$ matrisinin inversinin

$$V^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\rho & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -\rho & 1+\rho^2 & -\rho & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -\rho & 1+\rho^2 & -\rho & \cdots & \cdots & \rho^{17} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\rho & 1+\rho^2 & -\rho \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\rho & 1 \end{bmatrix}$$

şeklinde olduğu görülür. Bu durumda $-0{,}8 \le \rho \le +0{,}8$ olmak üzere $\mathrm{eff}(\hat{\beta}_1)$ ve $\mathrm{eff}(\hat{\beta}_2)$ altküme Watson etkinliklerinin grafiği Şekil 3.3 de verilmiştir. Burada maksimum etkinlik $\rho = 0$ da 1 e eşit minimum etkinlikler $\mathrm{eff}(\hat{\beta}_1) \approx 0{,}329$ ve $\mathrm{eff}(\hat{\beta}_2) \approx 0{,}099$ olup $\rho = -0{,}8$ de $\mathrm{eff}(\hat{\beta}_1) \approx 0{,}502$ ve $\rho = +0{,}8$ de $\mathrm{eff}(\hat{\beta}_2) \approx$

$0{,}159$ a eşit olan bir parabol gösterecektir. Bu durumda hem $\text{eff}(\hat{\beta})$ toplam Watson etkinliği ve hem de $\gamma_{12}$ etkinlik ayrışım çarpanı yine $\rho$ serikorelasyon katsayısına karşılık geleceklerdir. Şekil 3.5 den görüleceği gibi toplam Watson etkinliğinin $\rho = 0$ da 1 eşit maksimum etkinlikli ve $\rho = -0{,}8$ de $\text{eff}(\hat{\beta}) \approx 0{,}053$ ve $\rho = +0{,}8$ de $\text{eff}(\hat{\beta}) \approx 0{,}058$ a eşit minimum etkinliklerine sahip bir parabol olan bir parabol gösterecektir. Şekil 3.4 ün sağındaki grafikten $\gamma_{12} \geq 1$ olduğu görülür. Pozitif $\rho$ lar için $\gamma_{12}$ 1 e çok yakın olacaktır ancak $\rho = +0{,}8$ de $\gamma_{12} = 1{,}004$ olacaktır. Negatif $\rho$ lar için $\gamma_{12}$ maksimumu $\rho = -0{,}8$ de 1,195 olan oldukça farklı davranışlar gösterecektir. Bununla beraber çok ilginçtir ki $\gamma_{12} = 1$ olması için gerek ve yeter şart $\rho = 0$ olmasıdır.

**Çizelge 3.2** Worsley ve Ark., Tarafından Verilen fMRI Verinin Ilk 10 Gözlemi.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | −1 | 1 | −1 | 0.000590719 | 0 |
| 1 | −0.982759 | 0.965815 | −0.949163 | 0.348491 | 0 |
| 1 | −0.965517 | 0.932224 | −0.900078 | 1.26704 | 0 |
| 1 | −0.948276 | 0.899227 | −0.852715 | 1.50206 | 0 |
| 1 | −0.931034 | 0.866825 | −0.807044 | 0.926492 | 0 |
| 1 | −0.913793 | 0.835018 | −0.763034 | −0.176833 | 0 |
| 1 | −0.896552 | 0.803805 | −0.720653 | −0.481519 | 0.000590719 |
| 1 | −0.87931 | 0.773187 | −0.679871 | −0.271114 | 0.348491 |
| 1 | −0.862069 | 0.743163 | −0.640658 | −0.0896224 | 1.26704 |
| 1 | −0.844828 | 0.713734 | −0.602982 | −0.0210606 | 1.50206 |

**Örnek 3.4** (Worsley'nin işlevsel Manyetik Rezonans Görüntüleme (fMRI) verileri). Son örneğimiz olarak Keith Worsley tarafından verilen bir dizi fMRI verisini göz önüne alalım. Worsley ve Arkadaşları tarafından gözlemlendiği gibi; $k$ farklı uyaran türünün $i$ tarayıcısındaki veriler üzerindeki birleşik etkisinin, $k$ farklı sonucunun $x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ik}$ ile gösterildiğini, genellikle toplamsal olduğu ancak farklı $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ çarpan katsayıları ile vokselden voksele değiştiğini varsayalım. Birleşik fMRI verisi, $x_{i1}\beta_1 + x_{i2}\beta_2 + \cdots + x_{ik}\beta_k$ (Fristonetal.,1995) lineer modeli olarak modellenmiştir. Bu durumda fMRI zaman serisi verilerindeki bazı vokseller, zaman içinde göz önüne alınabilir öölçüde kayma gösterir. Burada kayma, lineer veya daha genel bir yavaş varyasyonda olabilir. Eğer kayma ortadan kaldırılmazsa bu durumda özellikle uyaranlar zaman içinde yavaş değişiyorsa, ya fMRI yanıtıyla karıştırılabilir ya da rastgele gürültü tahminine katkıda bulunabilir. Birincisi, uyaranların etkisinin

tahminlerinde yanlılığa neden olurken ikincisi tahmin edilen etkinin hatasının tahmininde yanlılığa neden olacaktır. Bu durumda kayma, yüksek geçişli filtrelemeyle veya kosinüsler, polinomlar veya spline'lar gibi düşük frekanslı kayma terimlerini lineer modelde giderilebilir. Biz burada q mertebeden bir polinom kayması kullanacağız. Bunu yapmak için lineer modele i zamanında fazladan $w_{i1}, w_{i2}, \dots, w_{im}$ sonuçlarını ekleyelim. Örneğin, q mertebeden bir polinom kayması, lineer modele $w_{ij} = t_i^{j-1}, j = 1,2, \dots, m = q - 1$, eklenerek kaldırılabilir. Son olarak, gözlemlenen fMRI' yi elde etmek için modele i zamanında rastgele bir $\varepsilon_i$ hata terimi eklenir. Bu durumda i zamanında model

$$Y_i = w_{i1}\alpha_1 + w_{i2}\alpha_2 + \cdots + w_{im}\alpha_m + x_{i1}\beta_1 + x_{i2}\beta_2 + \cdots + x_{ik}\beta_k + \varepsilon_i. \qquad (2.25)$$

şeklinde yazılabilir. Zamansal korelasyon yapısının en basit modeli birinci dereceden otoregresif modeldir (bkz. Bullmore ve Ark., 1996). Burada mevcut tarama için hata: $\varepsilon_i = \rho\varepsilon_{i-1} + \xi_{i1}$, olup $|\rho| < 1$ ve $\xi_{i1}$, ortalaması 0 ve standart sapması $\sigma_1$ olan bağımsız ve aynı türden dağılmış bir normal rastgele değişkenler dizisidir, yani $\xi_{i1} \sim N(0, \sigma_1^2)$ dir (ki bu "beyaz gürültü" olarak bilinir). Bu durumda $h$ gecikmesinde ortaya çıkan otokorelasyon, $cor(\varepsilon_i, \varepsilon_{i-h}) = \rho^{|h|}$ şeklinde olacaktır.

Veri kümemiz için fMRI yanıtında k = 2 uyarana sahip olup sapmaya kübik bir trend uydurabiliriz ve bu nedenle m = 4 ve q = 3 alınabilir. Veri kümemizde toplam n = 117 gözlem mevcut olup bunlardan ilk 10 tanesi Çizelge 3.2' de verilmiştir, 117 gözlemin tamamı için Chu (2004, Tablo 01-3) e bakılabilir. Çizelge 3.2'deki ilk m = 4 sütun kaymayı ve son k = 2 sütun ise fMRI yanıtını ifade etmektedir. Gösterimimizde $X$ model matrisimiz 117 × 6 tipinde olup ilk sütunun elemanlarının tümü 1'e eşittir ve 2. sütundaki elemanlar doğrusal bir eğilim, 3. sütundaki elemanlar ikinci dereceden bir eğilim ve 4. sütundaki elemanlar ise kübik bir eğilim göstermektedir. $X$ model matrisinin 5. sütunu sıcak bir uyaranı temsil ederken, 6. sütun soğuk bir uyaranı temsil etmektedir. 1-4 üncü sütunlar gürültü değişkenleri yani kaymayı temsil ederken 5. ve 6. sütunlar gerçekten ilgi çekici olup fMRI yanıtlarını gösterir. Bu durumda $X_1$ matrisi 117×4 tipinde ve $X_2$ matrisi 117×2 tipinde olmak üzere $X$ model matrisimiz $X = (X_1, X_2)$ olarak parçalansın. Bu durumda $X$ model matrisimizin ortogonal olarak parçalanması için $X_2$ yerine $M_1 = I - X_1(X_1'X_1)^{-1}X_1'$ olmak üzere $M_1X_2$ alınmalıdır. $V$ kovaryans matrisi yukarıda Örnek 3.3' de olduğu gibi birinci dereceden $\{\rho^{|i-j|}\}$

otokorelasyon yapısını kullanabiliriz fakat bu durumda $V$ kovaryans matrisi 117×117 tipinde olacaktır. $\gamma$ etkinlik ayrışımı çarpanı, $\rho$ seri korelasyon katsayısını her $\rho < 0$ için $\gamma > 1$ olduğunu not ederek Çizelge 3.3 de gösterilmiştir. $\rho > 0$ için $\gamma$ nın davranışı merak uyandırıcıdır; Şekil 3.5' e bakınız. Çizelge 3.3' ten, yaklaşık olarak $0{,}02 < \rho < 0{,}75$ için $\gamma < 1$ olduğu görülür, bu durumda minimum değer $\rho = 0{,}61$ de yaklaşık olarak $\gamma$ =0,9989476. Ayrıca $\rho = 0$ ve $\rho \approx 0.751$ olduğunda $\gamma = 1$ olduğunu da görürüz.

**Çizelge 3.3** Worsley ve Ark. (2002) fMRI Verileri için Seri Korelasyon Katsayısı ve Etkinlik Ayrışımı Çarpanı

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| −0.99 | 3.7036775 | −0.49 | 1.0016779 | 0.01 | 1.0000000 | 0.51 | 0.9991626 |
| −0.98 | 1.9251338 | −0.48 | 1.0015487 | 0.02 | 0.9999999 | 0.52 | 0.9991308 |
| −0.97 | 1.4808892 | −0.47 | 1.0014285 | 0.03 | 0.9999998 | 0.53 | 0.9991002 |
| −0.96 | 1.3041294 | −0.46 | 1.0013166 | 0.04 | 0.9999994 | 0.54 | 0.9990712 |
| −0.95 | 1.2146460 | −0.45 | 1.0012123 | 0.05 | 0.9999989 | 0.55 | 0.9990442 |
| −0.94 | 1.1619827 | −0.44 | 1.0011152 | 0.06 | 0.9999981 | 0.56 | 0.9990194 |
| −0.93 | 1.1277016 | −0.43 | 1.0010249 | 0.07 | 0.9999970 | 0.57 | 0.9989974 |
| −0.92 | 1.1037646 | −0.42 | 1.0009407 | 0.08 | 0.9999955 | 0.58 | 0.9989787 |
| −0.91 | 1.0861861 | −0.41 | 1.0008624 | 0.09 | 0.9999937 | 0.59 | 0.9989637 |
| −0.90 | 1.0727861 | −0.40 | 1.0007896 | 0.10 | 0.9999913 | 0.60 | 0.9989532 |
| −0.89 | 1.0622767 | −0.39 | 1.0007219 | 0.11 | 0.9999885 | 0.61 | 0.9989476 |
| −0.88 | 1.0538489 | −0.38 | 1.0006590 | 0.12 | 0.9999851 | 0.62 | 0.9989478 |
| −0.87 | 1.0469687 | −0.37 | 1.0006005 | 0.13 | 0.9999812 | 0.63 | 0.9989545 |
| −0.86 | 1.0412691 | −0.36 | 1.0005463 | 0.14 | 0.9999766 | 0.64 | 0.9989686 |
| −0.85 | 1.0364892 | −0.35 | 1.0004960 | 0.15 | 0.9999713 | 0.65 | 0.9989911 |
| −0.84 | 1.0324387 | −0.34 | 1.0004494 | 0.16 | 0.9999653 | 0.66 | 0.9990230 |
| −0.83 | 1.0289751 | −0.33 | 1.0004062 | 0.17 | 0.9999585 | 0.67 | 0.9990655 |
| −0.82 | 1.0259899 | −0.32 | 1.0003664 | 0.18 | 0.9999510 | 0.68 | 0.9991200 |
| −0.81 | 1.0233990 | −0.31 | 1.0003295 | 0.19 | 0.9999425 | 0.69 | 0.9991878 |
| −0.80 | 1.0211363 | −0.30 | 1.0002956 | 0.20 | 0.9999332 | 0.70 | 0.9992707 |
| −0.79 | 1.0191489 | −0.29 | 1.0002643 | 0.21 | 0.9999230 | 0.71 | 0.9993704 |
| −0.78 | 1.0173947 | −0.28 | 1.0002356 | 0.22 | 0.9999119 | 0.72 | 0.9994891 |
| −0.77 | 1.0158389 | −0.27 | 1.0002093 | 0.23 | 0.9998997 | 0.73 | 0.9996290 |
| −0.76 | 1.0144534 | −0.26 | 1.0001852 | 0.24 | 0.9998866 | 0.74 | 0.9997929 |
| −0.75 | 1.0132146 | −0.25 | 1.0001632 | 0.25 | 0.9998724 | 0.75 | 0.9999837 |
| −0.74 | 1.0121032 | −0.24 | 1.0001432 | 0.26 | 0.9998571 | 0.76 | 1.0002049 |
| −0.73 | 1.0111027 | −0.23 | 1.0001250 | 0.27 | 0.9998408 | 0.77 | 1.0004603 |
| −0.72 | 1.0101993 | −0.22 | 1.0001085 | 0.28 | 0.9998233 | 0.78 | 1.0007545 |
| −0.71 | 1.0093814 | −0.21 | 1.0000936 | 0.29 | 0.9998047 | 0.79 | 1.0010926 |
| −0.70 | 1.0086388 | −0.20 | 1.0000803 | 0.30 | 0.9997850 | 0.80 | 1.0014805 |
| −0.69 | 1.0079631 | −0.19 | 1.0000683 | 0.31 | 0.9997642 | 0.81 | 1.0019252 |
| −0.68 | 1.0073468 | −0.18 | 1.0000577 | 0.32 | 0.9997422 | 0.82 | 1.0024345 |
| −0.67 | 1.0067835 | −0.17 | 1.0000483 | 0.33 | 0.9997191 | 0.83 | 1.0030176 |
| −0.66 | 1.0062678 | −0.16 | 1.0000400 | 0.34 | 0.9996949 | 0.84 | 1.0036851 |
| −0.65 | 1.0057947 | −0.15 | 1.0000327 | 0.35 | 0.9996696 | 0.85 | 1.0044490 |
| −0.64 | 1.0053600 | −0.14 | 1.0000264 | 0.36 | 0.9996432 | 0.86 | 1.0053230 |
| −0.63 | 1.0049600 | −0.13 | 1.0000210 | 0.37 | 0.9996157 | 0.87 | 1.0063221 |
| −0.62 | 1.0045914 | −0.12 | 1.0000165 | 0.38 | 0.9995872 | 0.88 | 1.0074627 |
| −0.61 | 1.0042512 | −0.11 | 1.0000126 | 0.39 | 0.9995578 | 0.89 | 1.0087616 |
| −0.60 | 1.0039370 | −0.10 | 1.0000094 | 0.40 | 0.9995274 | 0.90 | 1.0102345 |
| −0.59 | 1.0036464 | −0.09 | 1.0000068 | 0.41 | 0.9994962 | 0.91 | 1.0118931 |
| −0.58 | 1.0033774 | −0.08 | 1.0000048 | 0.42 | 0.9994643 | 0.92 | 1.0137407 |
| −0.57 | 1.0031281 | −0.07 | 1.0000032 | 0.43 | 0.9994316 | 0.93 | 1.0157642 |
| −0.56 | 1.0028969 | −0.06 | 1.0000020 | 0.44 | 0.9993984 | 0.94 | 1.0179239 |
| −0.55 | 1.0026823 | −0.05 | 1.0000011 | 0.45 | 0.9993648 | 0.95 | 1.0201378 |
| −0.54 | 1.0024830 | −0.04 | 1.0000006 | 0.46 | 0.9993308 | 0.96 | 1.0222654 |
| −0.53 | 1.0022979 | −0.03 | 1.0000002 | 0.47 | 0.9992967 | 0.97 | 1.0240946 |
| −0.52 | 1.0021257 | −0.02 | 1.0000001 | 0.48 | 0.9992627 | 0.98 | 1.0253455 |
| −0.51 | 1.0019656 | −0.01 | 1.0000000 | 0.49 | 0.9992288 | 0.99 | 1.0257114 |
| −0.50 | 1.0018166 | 0.00 | 1.0000000 | 0.50 | 0.9991954 | | |

## 4. SONUÇ ve ÖNERİLER

Bu çalışmada parçalı zayıf singüler lineer model altında regrasyon katsayılarının tahmini ele alınmış olup parametre vektörünün alışılmış en küçük kareler tahmin edicisinin en iyi lineer yansız tahmin edicisine göre Watson etkinlikleri ile ilgili ifadeler verilmiştir. Bir takim alt modeler ele alınarak tam model ile altmodeller ve dönüştürülmüş modeleer altında parameter tahminleri arasındaki ilişkiler verilmiştir. Kovaryans matrisinin pozitif definit olması şartıyla alışılmış en küçük kareler tahmin edicisinin Watson etkinliğinin alt Watson etkinliklerinin çarpımıyla ilgili etkinlik çarpanı ayrışımı geliştirilmiştir. Ayrıca tam modeldeki Watson etkinlikleriyle alt modellerdeki Watson etkinlikleri arasındaki ilişkiler incelenmiştir. Elde edilen bulgular çeşitli örnekler üzerinde de ayrıca gösterilmiştir. Bu yapılanlara ilaveten

**i.** Parçalanmış modeler ve alt modelleri altında $X\beta$ ve $\beta$ parametre vektörlerinin ağırlıklı en küçük kareler tahmin edicileri verilerek alışılmış en küçük kareler tahmin edicileri ile ağırlıklı en küçük kareler tahmin edicileri arasındaki ilişkiler ya da en iyi lineer yansız tahmin ediciler ile ağırlıklı en küçük kareler tahmin edicileri le ilgili Watson etkinlikleri arasındaki ilişkiler incelenebilir.

**ii.** Parçalı lineer modeler altında ağırlıklı en küçük kareler tahmin edicilerinin toplam ayrışımları hakkında araştırma yapılabilir.

**iii.** i. durumunda $X\beta$ parameter vektörü için yapılan incelemeler genel durumlar olarak $K\beta$ beklenen değer vektörü ve $\beta$ parametresi için araştırılabilir.

**iv.** $\mathcal{M} = \{y, X_1\beta_1 + X_2\beta_2, \sigma^2 V\}$ parçalı tam lineer modeli ve bu modelin $\mathcal{M}_i = \{y, X_i\beta_i, \sigma^2 V\}$, $i = 1,2$ şeklinde verilen iki küçük alt modeli için

$$OLSE_{\mathcal{M}}(X_1\beta_1 + X_2\beta_2) = OLSE_{\mathcal{M}_1}(X_1\beta_1) + OLSE_{\mathcal{M}_2}(X_2\beta_2)$$

$$BLUE_{\mathcal{M}}(X_1\beta_1 + X_2\beta_2) = OLSE_{\mathcal{M}_1}(X_1\beta_1) + OLSE_{\mathcal{M}_2}(X_2\beta_2)$$

$$OLSE_{\mathcal{M}}(X_1\beta_1 + X_2\beta_2) = BLUE_{\mathcal{M}_1}(X_1\beta_1) + BLUE_{\mathcal{M}_2}(X_2\beta_2)$$

$$BLUE_{\mathcal{M}}(X_1\beta_1 + X_2\beta_2) = BLUE_{\mathcal{M}_1}(X_1\beta_1) + BLUE_{\mathcal{M}_2}(X_2\beta_2)$$

toplam ayrışımlarının sağlanması ile ilgili gerek ve yeter şartlar araştırılabilir.

## 5. KAYNAKLAR

Aitken, AC. (1935) On least squares and linear combination of observations, Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, 55.

Anderson, TW. (1948). On the theory of testing serial correlation. Skandinavisk Aktuarietidskrift. 31:88–116.

Amemiya, T. (1985). Advanced econometrics. Basil Blackwell, Oxford.

Balakrishnan, N. & Rao, CR. (2003). Some efficiency properties of best linear unbiased estimators, J. Statist. Plann. Inf., 113, 551-555.

Baksalary, J.K. (1984). A study of the equivalence between Gauss- Markoff model and its augmentation by nuisance parameters. Math. Operationsforsch stat. ser. Stat. 15:3-35.

Baksalary, J.K. & Pordzik, P.R. (1992). Implied linear restrictions in the general Gauss Markov model. J. Stat. Plan Inference. 23: 132-143.

Baksalary, J.K., Puntanen, S. & Styan, G.P.H. (1990). A property of the dispersion matrix of the best linear unbiased estimator in the general Gauss-Markov model. *Sankhya Ser.* A 52, 279-296.

Chu, KL. & Styan, GPH. (2003). On the efficiency of OLS in simple linear regression, with special reference to the situation where the OLS and GLS regression lines are paralel, Report 2003-04, Dept. of Mathematics and Statistics, McGill University, Montr´eal (Qu´ebec), Canada.

Chu, KL. (2004). Inequalities and equalities associated with ordinary least squares and generalized least squares in partitioned linear models. Ph.D. Dissertation, Department of Mathematics and Statistics, McGill University, Montréal, (Qu´ebec), Canada.

Chu, K.L., Isotalo, J., Puntanen, S. & Styan, GPH. (2004), On decomposing the Watson efficiency of ordinary least squares in a partitioned weakly singular linear model, Sankhyā: The Indian Journal of Statistics, 66(4): 634-651.

Chu, K.L., Isotalo, J., Puntanen, S. & Styan, GPH. (2005), Some further results concerning the decomposition of the Watson efficiency in partitioned linear models, Sankhyā, The Indian Journal of Statistics, 67(1): 74–89.

Chu, K.L., Isotalo, J., Puntanen, S. & Styan, GPH. (2007), The efficiency factorization multiplier for the Watson efficiency in partitioned linear models: some examples and a literature review. Journal of Statistical Planning and Inference, 137, 3336–3351, 2007.

Fisher, RA. (1922). On the mathematical foundations of theoretical statistics, Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Series A: Mathematical and Fhysical Sciences, 222, 309-368.

Groß, J. (2004). The general Gauss–Markov model with possibly singular dispersion matrix. Stat. Pap. 45:311–336.

Groß, J. & Puntanen, S. (2000). Estimation under a general partitioned linear model. Linear Algebra Appl. 321, 131-144

Groß, J. & Trenkler, G. (1998). On the equality linear statistics in General Markov model. In: Mukherjee SP, Basu SK, Sinha BK (eds) Frontiers of Statistics. Narosa Publishing House, New Delhi, pp. 189–194.

Groß, J, Trenkler, G. &Werner HJ. (2001). The equality of linear transforms of the ordinary least squares estimator and the best linear unbiased estimator. *Sankhya Ser* A 63:118–127.

Haslett, SJ. & Puntanen, S. (2010). Effect of adding regressors on the equality of the BLUEs under two linear models, Journal of Statistical Planning and Inference, 140, 104–110.

Isolata, J. & Puntanen, S. (2009). A note on the equality of the OLSE and the BLUE of the parametric function in the general Gauss–Markov model. Stat. Papers, 50:185-193.

Kesriklioğlu E. (2013). Genel parçalanmış lineer modeller altında tahmin edicilerin etkinliklerinin karşılaştırılması, Yüksek Lisans Tezi, Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Sakarya.

Kesriklioğlu E. & Güler N. (2013). Dik parçalanmış lineer model ve bu modelin indirgenmiş modelleri altında parametrelerin OLSE'leri ile ilişkili bazı Watson etkinlik ayrışımları, Beykent Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Fen ve Mühendislik Bilimleri Dergisi, 6(1), 77-86.

Liski, EP., Puntanen, S. & Wang, SG. (1992). Bounds for the trace of the difference of the covariance matrices of the OLSE and BLUE, Linear Algebra and its Applications, 176, 121–130.

Liu, S. (2000). Efficiency comparisons between the OLSE and the BLUE in a singular linear model, Journal of Statistical Planning and Inference, 84, 191–200.

Liu, S. & King, ML. (2002). Two Kantorovich-type inequalities and efficiency comparisons between the OLSE and BLUE, Journal of Inequalities and Application, 7, 169–177

Marsaglia, G. & Stvan, GPH. (1974). Equalities and inequalities for ranks of matrices. *Linear and Multilinear Algebra*, 2, 269-292.

Moore, EH. (1920). On the Reciprocal of the General Algebraic Matrix. (Abstract) Bulletin of American Mathematical Society, 26, 394-395.

Moore, EH. (1935). General Analysis. Memoirs of the American Philosophical Society, I. American Philosophical Society, Philadelphia, Pennsylvania, 1935.

Nurhonen, M. & Puntanen, S. (1992). A property of partitioned generalized reression. *Commun. Statist. Theor. Meth.*, 21, 1579-1583.

Penrose, R. (1955). A generalized inverse for matrices. Mathematical Proc. Cambridge Philos. Soc. 51:406–413.

Penrose, R. (1956). On best approximate solutions of linear matrix equations. Mathematical Proc. Cambridge Philos. Soc. 52: 17- 19.

Pordzik, P.R. (2012). A bound for the Euclidian distance between restricted and unrestricted estimators of parametric functions in the general linear model. Stat. Papers, 53:299-304.

Puntanen S, Styan GPH. (1989). The equality of the ordinary least squares estimator and the best linear unbiased estimator [with comments by Oscar Kempthorne & by Shayle R. Searle and with “Reply” by the authors]. Am Stat 43:153–164

Puntanen, S., Styan, GPH. & Tian, Y. (2005). Three rank formulas associated with the covariance matrices of the BLUE and the OLSE in the general linear model. *Econometric Theor.*, 21, 659-664.

Puntanen, S., Styan, GPH. & Isotalo, J. (2011). Matrix Tricks for Linear Statistical Models, Our Personal Top Twenty, Springer, Heidelberg.

Qian, H. & Tian, Y. (2006). Partially superfluous observations. *Econometric Theor.*, 22, 529-536.

Rao, CR. (1965). Linear Statistical Inference and Its Applications. Wiley, New York.

Rao, CR. (1967). Least squares theory using an estimated dispersion matrix and its application to measurement of signals. In: Le Cam LM, Neyman J (eds) Proceedings of the 5th Berkeley symposium on mathematical statistics and probability: Berkeley, California, 1965/1966, vol 1. University of California Press, Berkeley, pp. 355–372.

Rao CR. (1968). A note on a previous lemma in the theory of least squares and some further results. *Sankhya Ser* A 30:245–252

Rao, CR. (1971). Unified theory of linear estimation. *Sankhya Ser*, A 33: 371-394.

Rao, CR. (1972). A nte on the IPM method in the unified theory of linear estimation. *Sankhya Ser*, A 34: 371-394.

Rao CR. (1973) Representations of best linear unbiased estimators in the Gauss-Markoff model with a singular disperison matrix. *Journal of Multivariate Anal*. 3: 276-292.

Rao, CR. (1976). Estimation of parameters in a linear model. Ann. Stat. 4:1023–1037.

Rao, CR. & Mitra, SK. (1971a). Further contributions to the theroy of generalized inverse of matrices and its applications. *c* A 33, 289-300.

Rao, CR. & Mitra, SK. (1971b). *Generalized Inverse of Matrices and Its Applications.New York: Wiley.*

Tian, Y. (2002). The maximal and minimal ranks of some expressions of generalized inverses of matrices. *Southeast Asian Bull. Math*, 25,745-755.

Tian, Y. (2010). On equalities of estimatios of parametric functions under a general linear model and its restricted models. Metrika, 72:313-330.

Tian, Y. & Wiens, DP. (2006). On equality and proportionality of ordinary of least-squares, weighted least-squares and best linear unbiased estimators in the general linear model. *Statist. Probab. Lett*,76,1265-1272.

Tian, Y. & Puntanen, S. (2009). On the equivalence of estimations under a general linear model and its transformed models, Linear Algebra and Its Appl. 430, 2622–2641.

Tian, Y., Beisiegel, M. Dagenais, E. & Haines, C. (2008). On the natural restrictions in the singular Gauss–Markov model. Stat. Papers. 49:553-564.

Watson, GS. (1951). Serial correlation in regression analysis. Ph.D. Thesis, Dept. of Experimental Statistics, North Carolina State College, Raleigh.

Watson, GS., Alpargu, G., Styan, GPH. (1997). Some comments on six inequalities associated with the inefficiency of ordinary least squares with one regressor. Linear Algebra Appl. 264, 13–53.

Weisberg, S. (2005). Applied Linear Regression. third ed. Wiley, New York. (Original version: 1980; Second edition: 1985)

Wilks, SS. (1932). Certain genelalizations in the analysis of variance, Biometrika, 24, 471-494.

Yang, H. & Wang, L. (2009). An alternative form of the Watson efficiency, Journal of Statistical Planning and Inference, 139, 2767–2774.

Zyskind, G. (1967). On canonical forms, nonnegative covariance matrices, and best and simple least squares estimators in linear models. Ann. Stat. 38:1092–1110.

**ÖZGEÇMİŞ**

| Kişisel Bilgiler | |
|---|---|
| Adı Soyadı | Zehra İLHAN |
| Doğum Yeri | |
| Doğum Tarihi | |
| Uyruğu | × T.C. ❒ Diğer: |
| Telefon | |
| E-Posta Adresi | |

| Eğitim Bilgileri | |
|---|---|
| **Lisans** | |
| Üniversite | Uşak Üniversitesi |
| Fakülte | Fen Edebiyat Fakültesi |
| Bölümü | Matematik |
| Mezuniyet Yılı | 18.06.2011 |
| **Yüksek Lisans** | |
| Üniversite | |
| Enstitü Adı | |
| Anabilim Dalı | |
| Programı | |
| Mezuniyet Tarihi | |
| **Doktora** | |
| Üniversite | |
| Enstitü Adı | |
| Anabilim Dalı | |
| Programı | |
| Mezuniyet Tarihi | |