



T.C.

ORDU ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**ÜSTEL OLARAK ZAYIFLAYAN HAFIZA ETKİSİNİ
İÇEREN BİR AV İKİ AVCI ETKİLEŞİMLERİNİN BİR
MATEMATİKSEL MODELLEMESİ**

ZEYNEP YILMAZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ORDU 2023

TEZ BİLDİRİMİ

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan ve kullanılan intihal tespit programının sonuçlarına göre; bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içlerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

ZEYNEP YILMAZ

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

ÜSTEL OLARAK ZAYIFLAYAN HAFIZA ETKİSİNİ İÇEREN BİR AV İKİ AVCI ETKİLEŞİMLERİNİN BİR MATEMATİKSEL MODELLEMESİ

ZEYNEP YILMAZ

ORDU ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ, 72 SAYFA

(TEZ DANIŞMANI: PROF.DR. SELAHATTİN MADEN)

Bu tezde, avcılardan birinin hafızaya bağımlı olduğu aynı zamanda avcılar arasında rekabetin söz konusu olduğu matematiksel modelde bir av iki avcı türünün dinamiklerine ve kararlılık analizine odaklanılmıştır. Oluşturulan model incelendiğinde beş dengenin var olduğunu göstermektedir. Her denge etrafındaki yerel kararlılık analizi karakteristik polinomun özdeğerlerinin araştırılması ile incelenmiştir. Analitik çözümler, düşük ve yüksek bellek değerleri için sayısal simülasyonlar ile desteklenmiştir. Elde ettiğimiz sonuçlar, zayıflayan hafıza ve avcılar arasında rekabetin her üç popülasyonun da dinamikleri üzerinde önemli bir etkiye sahiptir ve ekolojide etkileşim halindeki türlerin daha iyi anlaşılmasına ışık tutuyor.

Anahtar Kelimeler : Av avcı etkileşimi, Zayıflayan hafıza, Rekabet, Kararlılık analizi

ABSTRACT

A MATHEMATICAL MODELING OF PREY-TWO PREDATOR INTERACTIONS INVOLVING EXPONENTIALLY WEAKENING MEMORY EFFECT.

ZEYNEP YILMAZ

ORDU UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE

MATHEMATICS

MSC THESIS, 72 PAGES

(SUPERVISOR: PROF.DR. SELAHATTİN MADEN)

In this thesis, we focused on the dynamics and stability analysis of one prey and two predator species in the mathematical model where one of the predators is memory dependent and there is competition among the predators at the same time. The investigation of the constructed model shows that there exist five equilibria. The local stability analysis around each equilibrium is investigated by searching the eigenvalues of the characteristic polynomial. Analytical solutions are supported by numerical simulations for low and high memory values. Our results show that fading memory and competition between predators have a substantial impact on the dynamics of all three populations and may shed lights on further understanding of interacting species in ecology.

Keywords : Prey predator interaction, Fading memory, Competition, Stability analysis

TEŞEKKÜR

Tez konunun belirlenmesi, çalışmanın yürütölmesi ve yazımı esnasında başta danıőman hocam Sayın Prof. Dr. Selahattin MADEN ile yüksek lisans eğitimim boyunca bütün bilgi ve deneyimleriyle beni yönlendiren, çalıőmalarımın her aőamasında emeği olan, desteklerini esirgemeyen ve kendisinden çok őey öğrendiğim Sayın Doç. Dr. Aytöl Gökçe'ye en içten saygıyla teşekkür ederim.

Aynı zamanda, öğrenim hayatım boyunca maddi manevi desteklerini her an üzerimde hissettiğim çok değerli aileme teőekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET	I
ABSTRACT	II
TEŞEKKÜR	III
İÇİNDEKİLER	IV
ŞEKİL LİSTESİ	V
ÇİZELGE LİSTESİ	VII
1. GİRİŞ	1
1.1 Av-Avcı İlişkilerine Genel Bakış	2
1.2 Lojistik Büyüme Modeli	4
1.3 Tür İçi ve Türler Arası Etkileşim	8
1.3.1 Mutualizm	8
1.3.2 Kommensalizm	9
1.3.3 Parazitlik	9
1.3.4 Nötralizm	10
1.3.5 Rekabet	10
1.4 Hafıza Terimi	13
2. HOLLİNG TİPİ YANIT FONKSİYONLARI	16
2.1 Holling Tip I	17
2.2 Holling Tip II	17
2.3 Holling Tip III	19
2.4 Holling Tip IV	20
3. LOTKA VOLTERRA AV AVCI İLİŞKİSİ MODELİ	22
3.1 Biyolojik Motivasyon	22
3.2 Model Tanımı	24
3.3 Simülasyonlar	26
3.4 Modelin Sabit Noktaları	28
3.5 Kararlılık Analizi	30
4. AV AVCI İLİŞKİSİ ÜZERİNE YENİ BİR MODEL	37
4.1 Model Tanımı	38
4.1.1 Modelin Boyutsuz Formu	40
4.2 Modelin Sabit Noktaları	42
4.2.1 Tüm Türlerin Var Olduğu Sabit Nokta	44
4.3 Kararlılık Analizi	46
5. NÜMERİK SİMÜLASYONLAR	57
6. SONUÇLAR	61
KAYNAKLAR	62
ÖZGEÇMİŞ	72

ŞEKİL LİSTESİ

	<u>Sayfa</u>
Şekil 1.1 Matematiksel biyoloji döngüsü.	2
Şekil 1.2 Üstel büyüme ve lojistik büyümenin grafiksel gösterimi.	8
Şekil 1.3 Gause deneyinin grafiksel gösterimi.	12
Şekil 2.1 Holling Fonksiyonel Tepki Fonksiyon Grafiği.	21
Şekil 3.1 Simülasyonun parametre değerleri ($a=0.03, b=0.001, c=0.005, d=0.1$) incelendiğinde av popülasyonunun başlangıç sayısı 100 avcı popülasyonunun başlangıç sayısı 8 dir. İki popülasyonda da erken zaman aralıklarında hızlı bir artış görülmektedir. Bu hızlı artışın ardından avcılar avı tüketerek avcı oranında artış, av oranında azalma görülmektedir. Avcı yoğunluğunun fazla olması av popülasyonunun nesli tükenmesine yol açmaktadır. Av popülasyonun nesli tükenmesinden dolayı avcı popülasyonu av yetersizliği nedeniyle nesli yok olmaktadır.	26
Şekil 3.2 Bu simülasyon $a=0.5, b=0.5, c=0.100, d=1.7$ değerlerine baktığımızda dinamikler kararsız bir davranış sergilemektedir. Başlangıçta av ve avcı sayısı 20 dir. Avcılar hızlı bir şekilde avı tüketir ve av yetersizliğinden dolayı kendi türünde azalmaya başlar. Avcı popülasyonu azaldıkça avlanmada az olacağı için av yoğunluğu tekrar artmaya başlar. Bu döngü sonsuza kadar devam etmektedir.	27
Şekil 3.3 Bu simülasyon $a=0.3, b=0.01, c=0.001, d=0.1$ değerleri incelendiğinde av popülasyonun başlangıç oranı 100, avcı popülasyonunun başlangıç oranı 8 dir. Kararsız bir sistem karşımıza çıkmaktadır. Fakat dalgalanma sıklığı azalmıştır. Av yoğunluğu avcı yoğunluğuna göre daha fazladır.	28
Şekil 3.4 Simülasyonun parametre değerleri $a = 0.7, b = 0.6, c = 0.09, d = 1.7$. Sistem dinamikleri kararsız bir davranış göstermektedir. Başlangıçta av sayısı 100 avcı sayısı 16. Faz diyagramı olarak adlandırılan ikinci figür fizik, kimya vb birçok alanda kullanılan bir grafik çeşididir. İlk grafikte popülasyonun zamana göre değişimini incelemek mümkün iken ikinci grafikte avcını ava göre değişimini analiz edebiliriz.	29
Şekil 3.5 Simülasyonun parametre değerleri $a = 0.5, b = 0.01, c = 0.002, d = 0.4$ Başlangıçta av sayısı 100 avcı sayısı 0 dır. Faz diyagramını incelediğimizde sarmal şekilde bir döngü karşımıza çıkmaktadır. Yani av sayısının artması avcılarının çoğalmasına neden olurken çok fazla avlanmadan dolayı av sayısı düştükten sonra avcı sayısında da azalma görülmektedir. Bu döngü bu şekilde devam etmektedir.	30
Şekil 3.6 Simülasyonun parametre değerleri $a = 0.9, b = 0.02, c = 0.05, d = 1.4$. Başlangıçta av sayısı 0.61 avcı sayısı 254. Avcı yoğunluğu av yoğunluğuna göre fazladır. İlk grafikte sık salınımlar gözlemlenirken ikinci grafikte sarmal bir yapı karşımıza çıkmaktadır.	31

Şekil 3.7	Simülasyonun parametre değerleri $a = 0.9, b = 0.22, c = 0.055, d = 0.2$. Başlangıçta av sayısı 100 avcı sayısı 34. Av yoğunluğu avcı yoğunluğuna göre fazladır. Her iki grafikte de salınımlar seyrekdir.	31
Şekil 3.8	$\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$ ise kararsız düğüm grafiği ve $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$ ise kararlı düğüm grafiği (Chou & Friedman, 2016)	35
Şekil 3.9	(a) $\lambda_1 > 0$ ve $\lambda_2 < 0$ ise eyer nokta (b) $\lambda_1 = i\beta$ ise merkez noktası (Chou & Friedman, 2016) ile gösterilmiştir.	35
Şekil 3.10	$\lambda_1 = a + i\beta, (a > 0)$ ise kararsız spiral ve $\lambda_1 = a + i\beta, (a < 0)$ ise kararlı spiral grafiği (Chou & Friedman, 2016) ile gösterilmiştir.	36
Şekil 5.1	Av ve avcı türlerinin yoğunlukları rekabet olmadığında ve $\omega = 0.1$ (a) ve $\omega = 1$ (b) olarak kabul ettiğimizde ortaya çıkan simülasyonlar ve buna karşılık gelen faz portresi (c). Siyah ve mavi portreler, sırasıyla $\omega = 0.1$ ve $\omega = 1$ olan durumlar. Yörüngelerin başlangıç ve bitiş noktaları kırmızı ve macenta noktalarla gösterilir. Diğer parametreler ise $\alpha = 0.4, \beta = 0.2, d_1 = d_2 = 0.1, c_1 = c_2 = 0$. Başlangıç koşulu $(0.5, 0.4, 0.4, 0.5)$ olarak seçilir.	58
Şekil 5.2	$\omega = 0.1$ (a) ve $\omega = 1$ (b) olduğunda av ve avcı popülasyonlarının zaman evrimleri ve karşılık gelen faz portreleri (c,d). Yörüngelerin başlangıç ve bitiş noktaları kırmızı ve macenta noktalarla gösterilir. Diğer parametreler $\alpha = 0.64, \beta = 0.33, d_1 = d_2 = 0.1, c_1 = c_2 = 0.2$. Başlangıç koşulları $(0.5, 0.4, 0.4, 0.5)$ olarak seçilmiştir.	59
Şekil 5.3	$\omega = 0.1$ değeri için av ve avcı popülasyonlarının zamana göre değişimi verilmiştir. Parametre değerleri ise $\alpha_1 = 0.55, \alpha_2 = 0.36, \beta_1 = 0.8, \beta_2 = 0.7, d_1 = d_2 = 0.2, c_1 = 0.4, c_2 = 0.1$. Başlangıç koşulları $(0.77, 0.5, 0.5, 0.5)$ olarak seçilmiştir.	60
Şekil 5.4	$\omega = 1.0$ değeri için av ve avcı popülasyonlarının zamana göre değişimi verilmiştir. Diğer parametreler ise $\alpha_1 = 0.99, \alpha_2 = 0.9, \beta_1 = 0.72, \beta_2 = 0.70, d_1 = d_2 = 0.1, c_1 = 0.6, c_2 = 0.7$. Başlangıç koşulları $(0.9, 0.6, 0.6, 0.6)$ olarak seçilmiştir.	60

ÇİZELGE LİSTESİ

	<u>Sayfa</u>
Çizelge 4.1 Model (4.1.4)-(4.1.7) için değişken ve parametrelerin tanımı.....	40

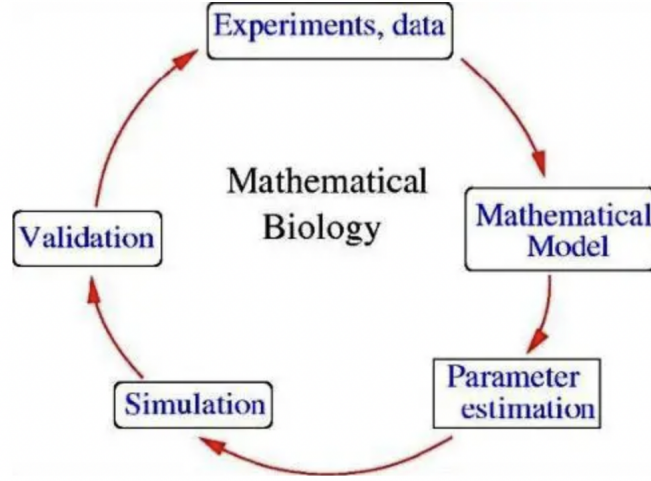
1. GİRİŞ

Ekoloji ve biyolojideki etkileşimler için tahmin, yorum ve çıkarımlar çeşitli matematiksel tekniklerle yapılabilir. Matematik, insanın var olduğu günden bugüne kadarki süreçte kullanılan kendine özgü yapısıyla iletişim aracı rolü üstlenen evrensel bir dildir. Evrendeki olayları daha anlaşılabilir kılması ise hayatı anlamlandırma yolculuğunda kilit bir faktördür. Aynı zamanda soyut kavramları somutlaştıran, sistemlerin yapılarını, koşullarını irdeleyen bir disiplindir. Çeşitli alanlarla köprü oluşturduğu için pek çok çalışmanın bir parçası olmuştur. Bu çalışmalar kimya, matematik, biyoloji gibi alanların daha fazla önem kazanmasını sağlamıştır.

Son yıllarda ise çoğu uygulamada ihtiyaç duyulan matematik, biyoloji ile olan etkileşimlerini arttırmıştır. Böylece "Matematiksel Biyoloji" alanını ortaya çıkarmıştır. Biyoloji, matematikçiler için yararlı ve dikkat çekici çalışma alanları açmıştır (Murray, 2002). Bir matematikçi için biyoloji yeni ve ilgi çekiçi dallar ortaya koyarken, bir biyolog için gerçek yaşam problemlerini anlayabilmek ve açıklayabilmek için geliştirilen matematiksel modelleme güçlü laboratvar tekniklerine uygun yeni araştırma aracı sunar (Murray, 2002). Bu çalışma alanları ve araçları birçok tür (popülasyon, molekül, hücre vb.) arasındaki etkileşimleri, komplike olayları modeller aracılığıyla ifade etmeye olanak sunar.

Modelleme birçok alanda gerçek hayattan bir objenin veya bir durumun fiziksel, sembolik ya da soyut modelini oluşturma anlamında kullanılan yaygın bir terimdir (Erbaş et al., 2014). Matematiksel modelleme ise durum ve koşulların işleyiş ve yapısını ifade edebilmek için matematiğin sembolik diline aktararak ifade edilmesi sürecidir (Gravemeijer, Lehrer, van Oers, & Verschaffel, 2013). Modeller oluşturulurken bir problem ve bu probleme ait bağımlı bağımsız değişkenler belirlenir. Değişkenler belirlendikten sonra modelin davranışını anlayabilmek için bazı varsayımlar altında parametre tahminleri yapılır ve bu varsayımlarla beraber modele yeni fonksiyonlar eklenebilir. Aynı zamanda modeli daha gerçekçi hale getirmek için özel teorem teknikleri uygulanabilir. Uygulanan bu işlemlerle beraber modelin derin analizi yapılabilir. Matematiksel model oluşturulduktan sonra ardından simülasyonlar çıkartılır ve bunların doğrulukları kontrol edilir. Biyoloji, fizik, matematik, ekonomi

gibi pek çok alanda kullanılır. Matematiksel modeller sayesinde av avcı etkileşimleri ve popülasyon dinamikleri başta olmak üzere birçok sistemin davranışı tahmin edilebilmektedir. Şekil 1.1’de matematiksel biyoloji döngüsü verilmiştir (Çağlar, 2019).



Şekil 1.1 Matematiksel biyoloji döngüsü.

Bu tez altı bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde etkileşimlerden ve genel bilgilerden söz edilmektedir. İkinci bölümde matematiksel modelimizde kullandığımız fonksiyon ve onun çeşitlerinden, ve üçüncü bölümde modelimizin temelini oluşturan çalışmadan bahsedilmektedir. Dördüncü bölümde ise oluşturduğumuz yeni matematiksel model ve ortaya çıkan sistemin denge koşulları ve kararlılık analizi incelenmiştir. Sistemin odak noktası ise zayıflayan hafızaya sahip avcının diğer popülasyonlar üzerindeki etkisidir. Beşinci bölümde modelimizi sayısal verilerle desteklemek amacıyla oluşturduğumuz simülasyonlar son bölümde ise çalışmalarımızdan elde ettiğimiz sonuçlar yer almaktadır.

1.1 Av-Avcı İlişkilerine Genel Bakış

Son zamanlarda doğayı, doğadaki canlıları ve aralarındaki ilişkiyi anlamak, yorumlamak için pek çok çalışmalar yapılmıştır. Bu çalışmaların öncü alanlarından biri olan matematiksel biyoloji, farklı türler arasındaki ilişkileri karakterize ederek türler arasındaki ilişkileri ve bu ilişkilerin doğasında var olan karmaşıklıkları anlamamıza olanak sunar. Bu alanda türleri, ilişkileri incelemek için birçok matematiksel model kurulmuştur. Bu modeller, yukarıda belirttiğimiz gibi, bir sistemin

ayrıntılı olarak açıklanmasını ifade eder ve çeşitli alanlarda kullanılır. Bu modellerin arasında en popüler sistemlerden biri olan popülasyon dinamikleri ve av avcı ilişkileri ekolojinin temel bileşenleridir.

Canlılar hayatları boyunca besine ya da enerjiye muhtaçtır. Yaşam alanlarında sınırlı kaynak (besin) bulunması, değişken çevre koşulları vb. sebeplerden dolayı aynı türden bireyler birlikte yaşamaktadır. Popülasyon, içinde aynı tür ya da birden fazla türü barındıran canlı topluluğu olarak tanımlanabilir. Diğer bir deyişle popülasyonun meydana gelebilmesi için doğumlar, ölümler ve göçlerden etkilenen belli bir tür bir arada bulunmalıdır. Popülasyon modelleri tek bir türü içeren tek bir denklemden oluşabileceği gibi iki veya daha fazla türü içeren iki-üç boyutlu sistemlerle de ifade edilebilir. Ayrıca bir popülasyon sınırlı besin kaynaklarından dolayı sonsuza kadar büyüyemez. Dolayısıyla bir popülasyonun yoğunluğu iklim şartları, coğrafi unsurlardan dolayı da değişebilir. Popülasyon üzerine çok sayıda çalışmanın olmasının sebebi ise bu değişkenliktir.

Popülasyonda av ve avcı arasındaki ilişki incelendiğinde türlerin varoluş mücadelesini görmüş oluruz. Avcı, çabalarını av oranının daha yüksek olduğu bölgelerde yoğunlaştırarak avla beslenir, ve doğal ölümler ya da av yetersizliğinden dolayı soyu tükenebilir. Av ise çevreden besin kaynağı olarak yaşamını sürdürmeye çalışır ve her ne kadar avcılardan kaçınmaya çalışsalar da çoğu av, avcılar tarafından avlandığından dolayı yaşamları son bulur. Av avcı ilişkisi av ve avcı etkileşimlerinin zamana göre değişimini ifade eder. Örneğin avcının besin kaynağı olan av popülasyonunun azalması avcı popülasyonunun azalmasına ve rekabete yol açacaktır. Benzer şekilde avcı popülasyonunun yoğun olması ise av popülasyonunun azalmasına neden olmaktadır. Bu ilişki bu döngüde devam edecektir. Bu döngüye örnek olarak sürdürülen uzun dönemli çalışmalardan biri olarak Minnesota'da kurtların ve geyiklerin arasındaki ilişkiyi gösterebiliriz (Flores, 1988).

Ekolojik sistemlerin kararlılığı ve türlerin bu sistemler içinde devamlılığı, ekolojinin temel unsurlarıdır. Bu unsurları yansıtan ekolojik sistemlerin matematiksel modelleri, Lotka Volterra'nın öncü çalışmalarından bu yana çeşitli sistemlerin dinamiklerini, kararlılıklarını analiz etmemize olanak sağlar (Volterra, 1939).

Av-avcı etkileşimleri ifade edilirken ya da modelleri oluşturulurken sıklıkla lineer olmayan diferansiyel denklemler, fark denklemleri, adi ya da kısmi diferansiyel denklem sistemi kullanılır. Bu tezde de av avcı etkileşimine örnek bir model adi diferansiyel denklem sistemi yardımıyla kurulacaktır.

1.2 Lojistik Büyüme Modeli

Biyolojik sistemlerde popülasyondaki büyümeyi modellemek için bir çok model kullanılmıştır. Büyümenin modellenmesinde popülasyondaki canlıların türüne, çevre şartlarına vb. durumlara bakılır. Bu modellerden biri olan Lojistik Büyüme Modeli ilk olarak Belçikalı matematikçi Pierre Verhulst tarafından ortaya atılmıştır(Schtickzelle, 1981). Daha sonra Verhulst çalışmalarını Thomas Robert Malthus'un 1803'te öne sürdüğü nüfusla ilgili felsefi fikirlerine dayandırdı. Bu dönemde dünya nüfusu hızla artmaktaydı ve Malthus büyümenin bu hızda devam edemeyeceğine ve doğal kaynakların sınırlı olduğuna inanıyordu (Patzek & Croft, 2010). Bu dönemde gittikçe artan nüfus sorununa yönelik tarihsel açıdan çözüm üretilmeye çalışıldı (Cohen, 1995). Bu çözümlerin temelindeki ilk varsayım nüfusun katlanarak artacağı bir diğeri ise kaynak sınırlama yoluyla bu katlanan büyümeyi kontrol etmektir (Brauer, Castillo-Chavez, & Castillo-Chavez, 2012). Malthus (üstel) ve Verhulst (lojistik) modelleri gibi basit popülasyon modelleri, nüfus ve popülasyonun büyüme süreçlerini incelenmesinde önemli bir başlangıç olarak kabul edildi.

Lojistik modeller başlangıçta nüfus artışını modellemek için kullanılmış olsa da aynı zamanda maya büyümesi ve yeni ürünlerin pazara girişini modellemek için de kullanılmıştır (Tsoularis & Wallace, 2002). Verhulst, büyümenin lojistik yasasını sistemin doğasında var olan bir üst sınıra veya taşıma kapasitesine yaklaşılan kadar sistemlerin katlanarak büyüdüğünü varsayar (Verhulst, 1838). Bu noktadan itibaren büyümenin hızı yavaşlayarak doygun hale gelir. Taşıma kapasitesi ise popülasyonun ulaşabileceği maksimum büyüklüğüdür. Yani popülasyonda az sayıda birey ve çok sayıda kaynak varsa, üstel büyüme bir süreliğine gerçekleşebilir. Ancak birey sayısı yeterince büyüdüğünde kaynaklar tükenmeye başlar ve büyüme hızı yavaşlayarak satüre olur. Popülasyonda sınırlı kaynaklardan faydalanan canlıların sayısının artması canlıların bu kaynakları elde etmelerini ve faydalanmalarını etkiler. Bu nedenle popülasyonda zamanla kişi başına düşen kaynaklarda azalma olur. Çünkü

popülasyonlardaki canlılar sınırlı kaynaklar üzerinden geçinirler.

Verhulst lojistik büyüme modeli, bu modele yeni parametreler eklenerek oluşturulan sistemlerin temel kaynağı olmuştur. Morgan, Afrika filllerinden oluşan popülasyonun davranışlarını analiz etmek için (Morgan, 1976), Krebs, Peru hamsilerinin popülasyonu için (Krebs, 1985) Verhulst lojistik denklemini kullanmışlardır. Young ise son zamanlarda teknolojik tahmin için kullanılan büyüme eğrilerini araştırmıştır (Young, 1993).

Lojistik Büyüme Modelinin matematiksel ifadesini anlamak için zaman içinde bir popülasyondaki birey sayısındaki değişimi ifade eden genel bir denkleme bakarak başlayalım:

$$\frac{dN}{dt} = rN, \quad (1.2.1)$$

Bu denklemde $\frac{dN}{dt}$ belirli bir anda popülasyonun büyüme hızıdır, N popülasyonun büyüklüğüdür, t zaman, r ise bireylerin popülasyona girip çıkmadığını varsayarsak, sadece doğum ve ölüm oranlarının bir fonksiyonudur. Popülasyonda kişi başına düşen artış oranı olarak ifade edebiliriz. Bu genel denklemin çözümü:

$$\frac{dN}{dt} - rN = 0,$$

integral çarpanı yöntemi kullanarak

$$e^{-rt} \frac{dN}{dt} - r e^{-rt} N = 0,$$
$$\frac{d}{dt} [e^{-rt} N] = 0,$$

elde edilir. Her iki tarafın integrali alınırsa

$$e^{-rt} N = N_0,$$
$$N(t) = N_0 e^{rt}. \quad (1.2.2)$$

Burada r ye doğum ve ölüm oranlarının bir fonksiyonu demiştik. Yani biz r yi $r = b - m$ şeklinde gösterebiliriz. Burada b doğum oranını, m ölüm oranını ifade eder. Eğer $r > 0$ yani $b > m$ ise popülasyon katlanarak (üssel) büyür. Eğer $r < 0$ yani $b < m$ ise popülasyon katlanarak küçülür. Pratikte doğum ve ölüm oranları sabit değildir ve sınırsız bir büyüme ya da küçülme söz konusu değildir. Bu yüzden gerçekçi sonuçlar için daha gelişmiş modellere ihtiyaç duyarız.

Yukarıda da ifade edildiği gibi sınırsız büyümeyi ortadan kaldırmak için Verhulst(Verhulst, 1838) dengeli bir popülasyonun doyma seviyesine sahip olacağını düşünerek genel denkleme taşıma kapasitesini içeren $1 - \frac{N}{K}$ çarpım faktörünü eklemiştir (Tsoularis & Wallace, 2002). Çözümüne baktığımızda :

$$\frac{dN}{dt} = f(N), \quad (1.2.3)$$

Burada f , popülasyon için net büyüme oranı olup (1.2.3) ve (1.2.4) numaralı denklemler bize popülasyonda hiçbir bireyin olmaması durumunda büyümenin olmayacağını gösterir. Ayrıca

$$N = 0 \text{ için } f(0) = 0. \quad (1.2.4)$$

Popülasyonda birey olmadığında büyüme olmayacağı için Lotka (1.2.3) numaralı denklemi Taylor serisine genişleterek daha yüksek terimlerin ihmal edilebilir olduğu kabul edilen aşağıdaki kuvvet serilerini elde etmiştir (Tsoularis & Wallace, 2002).

$$\begin{aligned} f(N) &= Nf'(0) + \frac{N^2}{2}f''(0), \\ &= N \left[f'(0) + \frac{N}{2}f''(0). \right] \end{aligned}$$

Bu işlemler bizi Verhulst lojistik denklemine yönlendirir:

$$\frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{N}{K}\right). \quad (1.2.5)$$

Burada $K - N$ ifadesi bir popülasyonun büyümesi sırasında herhangi bir zamanda popülasyonun taşıma kapasitesine ulaşmadan önce kaç tane daha birey eklenebileceğini söyler. Bu denklemin çözümü için aşağıdaki yol izlenebilir.

(1.2.5) numaralı denklem ayrılabilir bir diferansiyel denklemdir.

$$\frac{dN}{N \left(1 - \frac{N}{K}\right)} = r dt, \quad (1.2.6)$$

Burada (1.2.6) denkleminin sol tarafı

$$\frac{K}{N(K - N)} = \frac{A}{N} + \frac{B}{K - N}, \quad (1.2.7)$$

elde edilir. Buradan $A = 1$ ve $B = 1$ elde edilir böylece (1.2.6) nolu denkleminin integrali alınırsa

$$\int \frac{dN}{N} + \int \frac{dN}{K - N} = \int r dt,$$

$$\begin{aligned}
\ln|N| - \ln|K - N| &= rt + c, \\
\ln\left|\frac{K - N}{N}\right| &= -rt - c, \\
\left|\frac{K - N}{N}\right| &= e^{-rt} e^{-c}, \\
\frac{K}{N} - 1 &= \pm e^{-c}.
\end{aligned}$$

Burada $\alpha = \pm e^{-c}$ olsun. Böylece $\frac{K}{N} = 1 + \alpha e^{-rt}$ yazılabilir. N popülasyon büyüklüğü

$$N = \frac{K}{1 + \alpha e^{-rt}}. \quad (1.2.8)$$

Şimdi α sayısını bulalım. Başlangıçta yani $t = 0$ için popülasyon büyüklüğü $N(0) = N_0$ 'dür. Bu durumda

$$\frac{K - N_0}{N_0} = \alpha,$$

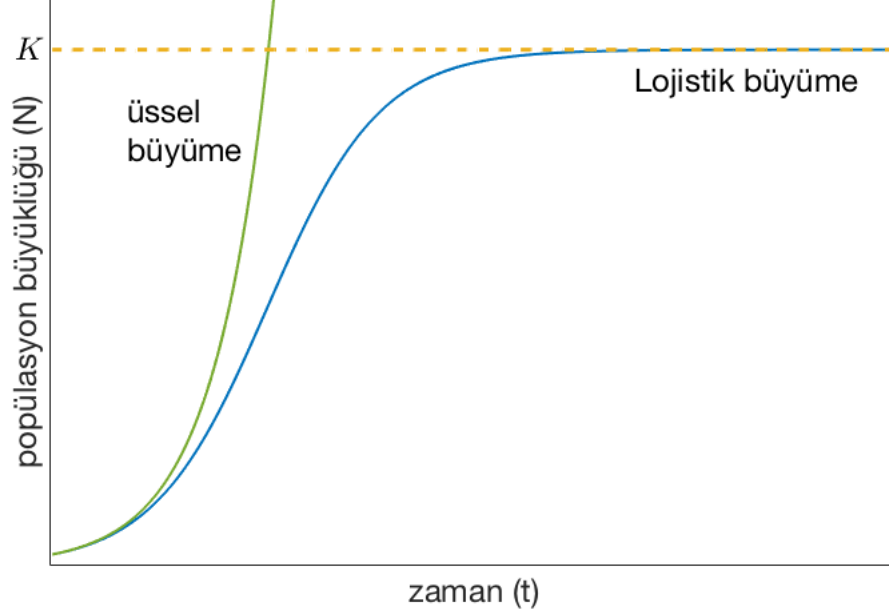
bulunur. Bu ifade (1.2.8) denkleminde yerine yazılırsa

$$N(t) = \frac{K N_0 e^{rt}}{K + N_0 (e^{rt} - 1)}, \quad (1.2.9)$$

elde edilir. Burada $N(t)$ popülasyonun büyüklüğünü t zamanı, N_0 $t = 0$ zamanındaki popülasyonun büyüklüğünü, r büyüme oranını ve K taşıma kapasitesini ifade eder. Popülasyonun büyümesi, popülasyonun büyüklüğü K taşıma kapasitesine ulaştınca durur.

Şekil 1.2'de popülasyon büyüklüğünün zamana bağlı olarak değişimi denklem (1.2.2) ile verilen üssel büyüme ve denklem (1.2.9) ile verilen lojistik büyüme cinsinden gösterilmiştir. Görüldüğü üzere üssel büyüme sonsuza kadar kesintisiz büyümeyi temsil eder ve bu durum biyolojik açıdan gerçekçi olmasa da basitliğinden dolayı matematiksel yaklaşımlara izin vermesi sebebiyle çokca tercih edilmiştir. Diğer yandan lineer olmayan ve zamana bağlı olarak saturasyona uğrayan lojistik büyüme de daha gerçekçi sonuçlar vermesi sebebiyle av-avcı ilişkileri modellerinde sıklıkla kullanılmıştır. Modelin grafine baktığımızda S şeklinde bir eğri üretir ve daha gerçekçi veriler ve grafikler elde ederiz. Bakteri ve parazit gibi basit yapılı canlıların verilerine çok iyi uyum sağlar (Beneden, 1875). Lojistik model genellikle popülasyon büyüklüğünü tanımlama aracı olarak kullanılır ve en önemli özelliklerinden biri ise

$$\lim_{x \rightarrow \infty} N(t) = K$$



Şekil 1.2 Üstel büyüme ve lojistik büyümenin grafiksel gösterimi.

popülasyon büyümenin sonunda taşıma kapasitesine ulaşacak olmasıdır.

1.3 Tür İçi ve Türler Arası Etkileşim

Tür içi etkileşim bir popülasyondaki aynı tür canlıların birbirleri ile olan ilişkileridir. Bu ilişkiler zayıf, güçlü ya da yararlı olabileceği gibi erkek-dişi ilişkileri ya da rekabet şeklinde olabilir. Sih'e göre (Sih, 1984) ise bu ilişkilerin, baskın olan popülasyon türüne göre değişim göstereceğini belirtmiştir. Türler arası etkileşim ise farklı iki ya da daha fazla türün bireyleri arasındaki etkileşimdir. Bir popülasyon başka bir popülasyonla ya da bir tür başka bir tür ile etkileşim içindedir. Bu etkileşimlerden birkaçı aşağıdaki gibidir.

1.3.1 Mutualizm

Mutualizm terimini ilk olarak Belçikalı biyolog Pierre van Beneden 1875 tarihinde yayınlanan bir kitabında kullanmıştır (Beneden, 1875). Beneden kitapta bahsedilen çalışmasında parazitlere ek olarak karşılıklı olarak birbirine yardım eden yapılara parazit ya da ortak demek yerine Mutualizm terimini kullanmayı daha doğru bulmuştur. Bu terim uzun süre tartışmalara yol açmasına rağmen 1893'te

konu, Roscoe Pound'un yazdığı *American Naturalist*'te bir inceleme makalesi niteliğinde kabul görülecek kadar geliştirildi (Pound, 1893). Pound, tozlaşma, baklagil kök nodülasyonu ve çeşitli hayvan örnekleri dahil olmak üzere bugün üzerinde çalıştığımız başlıca mutualizm türlerinin çoğunu tanıttı. 1902'de mutualizmin insan toplumunda iş birliğine benzetildiği yıllarda Peter Kropotkin tarafından *Mutual Aid: A Factor in Evolution*'in yayınlanmasıyla mutualizm siyasi bir mesele haline getirildi (Kropotkin, 1902). Bu çok satan çalışma dünyadaki işbirliği örneklerini gösteriyordu. Kropotkin'in kitabıyla mutualizm konusu daha bilinir bir konu haline geldi ve daha sonraki yıllarda biyologlar ve ekologlar arasında tartışılan bir konu olmaya devam etti. Hayvan Ekolojisi İlkeleri adlı kitabın yazarlarından biri olan Warder C. Alice insan ve hayvan işbirliği üzerine (Allee et al., 1949), Yucca'nın mutualizm bağımlılığı vb. çalışmalar mevcuttur. Mutualizm her iki türünde birbirine fayda sağladığı etkileşimdir (Bennett, 2008). Popülasyonda bazı canlılar besin ihtiyaçlarını tek olarak karşılayamadıkları için başka bir canlının varlığına ihtiyaç duyabilirler. Bu karşılıklı ilişki içinde olan, birbirine fayda sağlayan, her iki canlınında birbirine hizmet ettiği ilişkiler yararlıdır ve işbirliğine dayalıdır. Mantarlar ve bitkiler arasındaki ilişkide mutualisttir. Mantarlar bitkiye topraktaki minarelleri daha iyi bir şekilde almasını sağlarken, bitki de mantarlara besin sağlar (Thompson, 1999).

1.3.2 Kommensalizm

Ekolojide, iki canlının oluşturduğu yaşamdan bir canlının yarar, ötekisinin ise bu işbirliğinden ne yarar ne de zarar gördüğü etkileşimdir. Tek taraflı birliktelik olarak adlandırılabilir. Bu etkileşimin örneklerinden biri ise Lian sarılcı bitkileridir. Kökleri toprağa bağlı olmasına rağmen dik durabilmeleri için ortamda başka bir canlının varlığına ihtiyaçları vardır (Dönmez & Çelik, 2017).

1.3.3 Parazitlik

Parazitlik ilişkisinde canlılardan biri zarar görürken diğerinin fayda sağladığı negatif bir etkileşimdir (Dönmez & Çelik, 2017). Fayda sağlayan canlı öteki canlıya bağımlı olarak yaşadığı için öteki canlının zayıf düşmesine veya hasta olmasına sebep olur. Bağımlı olan canlı genellikle diğer canlının üzerinde veya vücudunun içerisinde

yaşamaktadır. Bu birliktelikte zarar gören canlıya "konak" adı verilir. Bu ilişkiye en iyi örnek insanlarda görülen bit, pire gibi parazitlerdir.

1.3.4 Nötralizm

Her iki canlı ya da her iki popülasyondan aynı ortamda bulunmasına rağmen yararlı ya da zararlı olarak adlandırılabilen bir ilişki yoktur. Diğer bir deyişle iki tarafta birbirlerinden etkilenmez.

1.3.5 Rekabet

Ekolojinin ana konularından biri olan rekabet aynı zamanda çoğu ekolojik sistemin temelini oluşturur. Rekabet, türler arasındaki ilişkileri doğrudan etkiler ve türlerin bir arada yaşamasını belirlemede kilit öneme sahiptir (Pimm, 1979; Arribas, Touchon, & Gomez-Mestre, 2018). Tür içi ve türler arası rekabet konuları üzerine çok çeşitli araştırmalar ve incelemeler bulunmaktadır. Thomas W.Schoener ve Joseph H.Connell türler arası rekabetin varlığını tespit edebilmek için 150 den fazla deney incelemelerinde bulundular (Schoener, 1983; Connell, 1983). Brenda B.Casper ve Robert B.Jackson yer altı bitki rekabeti çalışmaları (Casper & Jackson, 1997), M.P.Hassel iki tür rekabeti için ayrık zaman modeli (M. Hassell & Comins, 1976), 1972'de MacArthur gıda için rekabet eden iki avcı iki av modelini oluşturdu (Hsu & Hubbell, 1979).

Rekabet, popülasyondaki her bir canlının hayatta kalabilmesi için gerekli kaynakları (su, yiyecek, yaşama alanı vb.) ele geçirmesidir. Dolayısıyla rekabetin olabilmesi için sınırlı kaynak bulunması gerekmektedir. Popülasyonda avcılarının varlığı avın yiyecek arama faaliyetini azaltmasına, farklı yaşam alanları seçmesine neden olabileceği gösterilmiştir (Persson & Diehl, 1990; Persson, 1991). L.C.Birch hayvanlar arasındaki rekabeti şöyle tanımlar: Rekabet birden fazla hayvanın (aynı veya farklı türden) sınırlı olan ortak kaynakları kullanmasıdır (Birch, 1957). G.F.Gausen'e göre rekabet tanımı ise şöyledir: Aynı kaynağı kullanan canlılar bir arada yaşayamazlar (Gause & Witt, 1935). Başka bir deyişle iki tür aynı ortamda aynı kaynakları kullanıyorsa bir türün yok olması gerektiğini vurgulamaktadır. Bir türün nesli yok olmuyorsa bir arada var olan türlerden birinin farklı kaynaklardan yararlanmalarını

sağlayacak şekilde farklı bir yaşam alanına geçmelidir (MacArthur & Levins, 1967). Volterra ise daha az av kaynağı için rekabet eden iki veya daha fazla avcının bir arada var olmasının imkansız olduğunu savundu ve bu iddiaya rekabetçi dışlama ilkesi adı verildi (Armstrong & McGehee, 1980; Brauer et al., 2012; Hardin, 1960).

Tür içi rekabet ise popülasyondaki aynı tür canlılar arasındaki rekabete denir. Bu rekabet canlıların azalmasına yol açar ve diğerine göre üstün olan canlılar hayatta kalır. Diğer bir deyişle avcı yoğunluğunun artmasıyla üremede azalma veya ölüm oranında artış olarak gözlemlenir (Guin & Mandal, 2014). Yani bu rekabet doğum ve ölüm oranlarını etkiler. Bundan dolayı tür içi rekabet popülasyon dinamikleri üzerinde yoğun etkiye sahiptir. Örnek olarak, buğday tarlasındaki buğdaylar arasında topraktaki su ve minerallere ulaşmak için yapılan mücadeleyi söyleyebiliriz.

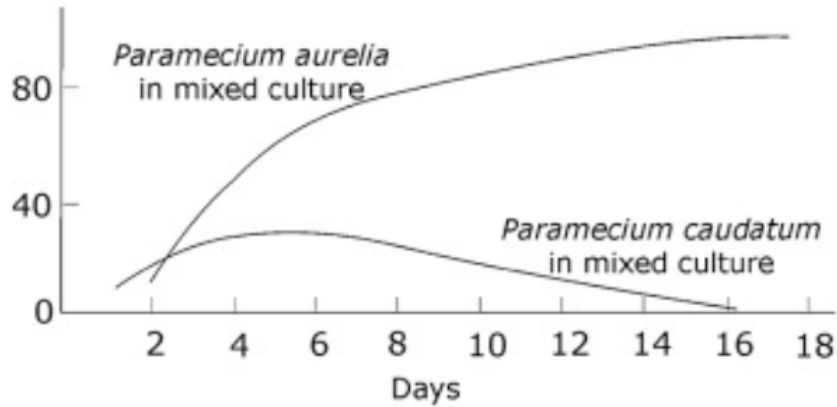
Doğadaki mevcut kaynakların sonsuz olduğunu varsayarsak tür içi rekabetin popülasyon üzerinde herhangi bir etkisi olmayacaktır. Bu varsayım popülasyonda üstel büyümeye yol açacaktır(Shome, Maiti, & Poria, 2016). Bundan dolayı tür içi rekabetin sistemlere dahil edilmesi daha gerçekçi sonuçlar elde etmemizi sağlar.

Tür içi rekabet, birçok tür için önemli bir etkileşimdir. Genellikle rekabet popülasyondaki canlıların bazılarını diğerlerine göre daha fazla etkiler. Bazı canlıların daha fazla etkilenmesi arasındaki başlıca sebepler için boyut farklılıkları, iyi rakipler, erken doğumlar, rekabet yetenekleri, tür sayıları vb. sayılabilir. Bu sebepler popülasyondaki bireylerin yoğunluğunu önemli hale getirir. Popülasyonda ne kadar çok rekabetçi varsa bireyleri o kadar fazla etkiler. Bundan dolayı aynı türe ait bireylerin yoğunluğunun artması tür içi rekabetin artmasına neden olacaktır. Yani tür içi rekabet yoğunluğa bağlıdır.

Aynı zamanda tür içi rekabet sonrasında yaşayan birey sayısında azalmanın yanı sıra popülasyondaki canlıların üreme oranı ve popülasyonun büyüme oranı geriler ve genellikle bu rekabet türlerin geçmiş yaşamını etkileyebilecek kaynaklardan ve eş arama gibi sebeplerden dolayı meydana gelir (Shome et al., 2016).

Türler arası rekabet iki veya daha fazla türden canlının karşılıklı ihtiyaç duydukları kaynaklar için yaşam mücadelesi vermeleridir. Diğer bir deyişle popülasyonlardan herhangi birinin büyüklüğündeki artışın diğer popülasyonun

büyüme oranını düşürme eğiliminde olduğu anlamına gelir (Brauer et al., 2012). Türler arası rekabet sonrasında ise ya iki türden biri yok olabilir ya da canlıların yaşam alanları sınırlanabilir. Türler arası rekabetin en önemli deneylerinden biri ise yukarıda adından söz ettiğimiz G.F.Gause tarafından yapılmıştır. Bu deneyde birbirine benzer tür olan *Paramecium caudatum* ve *Paramecium aurelia* adı verilen basit yapıları iki ökaryot canlı kullanmıştır (Gause & Witt, 1935). Gause, bu iki canlıyı iki ayrı kültür ortamına alarak her gün sabit miktarda beslemiştir. Ayrı ortamlarda yetişen bu iki canlının popülasyonları hızla artmış olmasına rağmen belirli bir seviyeden sonra canlı sayısı aynı seviyede kalmıştır (Şişli, n.d.; Jørgensen et al., 2007), Şekil ?? yi görünüz. Bunlara ek olarak Gause diğer deneyinde ise bu iki canlıyı aynı ortamda yetiştirdiğinde 16. günün sonunda *Paramecium caudatum* neslinin tükendiğini sadece *Paramecium aurelia* hayatta kaldığını gözlemlemiştir. Sonuç olarak bu rekabette *Paramecium aurelia* türü üstün çıkmıştır. Goldberg ve Barton (Goldberg & Barton,



Şekil 1.3 Gause deneyinin grafiksel gösterimi.

1992) ve Gurevitch (Gurevitch, Morrow, Wallace, & Walsh, 1992) tür içi ve türler arası rekabeti karşılaştıran birkaç araştırmayı inceleyip üzerinde çalıştılar fakat bu karşılaştırma çalışmalarında en büyük katkı sağlayan isimlerden biri ise Joseph H. Connell'dir. Connell (Connell, 1983) çalışmasında tür içi ve türler arası rekabetin güçlü yönlerinin karşılaştırılmasını inceledi. İncelemeler sonucunda varılan sonuç şu ki türler arası rekabette bir tür diğerinden üstünse süreçte bir kesinti olmadığı sürece üstün tür diğerini ortadan kaldırır ve aynı zamanda baskın olan popülasyondaki türler arası rekabet diğer popülasyondaki türler arası rekabetten daha güçlüyse, baskın olan

popülasyon, yoğunluğun altında kendi kendini sınırlayabileceğini söyler.

1.4 Hafıza Terimi

Hafıza, geleceği tahmin etmek ve geçmişte yaşanan olayları aktarmak için doğa ve canlılar açısından yaşamın önemli bir özelliğidir. Biyolojik sistemlerde de hafıza etkisi önemli bir faktördür çünkü popülasyonun büyümesi yoğunluğa ve canlıların büyüdükleri ortamın geçmişine bağlıdır. Bu nedenle geçmiş olayların hafızası gelecek planlarını oluştururken hesaba katılır ve avcı popülasyonunun büyüme hızı üzerinde büyük bir etkiye sahiptir. Yani farklı biyolojik süreçler hafızaya bağlıdır. Örneğin av türü bir grup içinde yaşadıkları zaman izole yaşadıkları zamana kıyasla daha az avcı saldırısıyla karşı karşıya kalır. Av önceki bilgilerini akılda tutarak güvenli bir yerde doğurmakta rahat hisseder, yiyeceklerinin olduğu yerlerde yaşamak ister, daha az avcı saldırısı alır (Debnath, Majumdar, Sarkar, & Ghosh, 2022).

Av avcı arasındaki etkileşimde hafıza etkisini şöyle tanımlayabiliriz. Tür, bellek oluşturur ve herhangi bir tehlike karşısında kaçma gibi durumları deneyimlerinden öğrenir, nereden av (besin kaynağı) bulabileceğini belleğinde tutar. Sürü davranışı söz konusu olduğunda hafıza etkisinin, avcıları savunmak için sürü üzerindeki avın kalabalıklaşmasında görülebileceğini ve avcının sürüdeki ava saldırmak için yöntemlerini uyarladığını söyleyebiliriz (Ghanbari & Djilali, 2020).

Bu konu üzerinde az çalışma olmasına rağmen yapılan çalışmalar bizleri bilgilendirecek niteliktedir. Uttam Ghosh, Swadesh Pal ve Malay Banerjee çalışmalarında hafızaya bağlı popülasyonda uzun belleğin karmaşık dinamikler üzerindeki etkisini (Ghosh, Pal, & Banerjee, 2021), Behzad Ghanbari ve Devendra Kumar kesirli sıralı av avcı modelinde hafıza etkisini incelediler (Ghanbari & Kumar, 2019). M. Saeedian, M. Khalighi ve diğerleri hafızaya bağlı popülasyon artışını modellemenin yollarını araştırdılar (Saeedian, Khalighi, Azimi-Tafreshi, Jafari, & Ausloos, 2017). En önemli çalışmalarla bize yol gösteren araştırma ise N.MacDonald tarafından yapılmıştır (MacDonald, 1976, 1977).

Hafıza teriminin genellikle av ve avcı türünden oluşan matematiksel modellerde kullanılmasının temel amacı avcı popülasyonunun büyümesi incelenirken geçmişteki av yoğunluğunda hesaba katarak gerçekçi veriler elde etmektir.

Avın büyüme hızının şimdiki zamandaki avcı yoğunluğundan etkilenebileceğini söyleyebiliriz fakat avcılarının yoğunluğu sadece şimdiki zamandaki av yoğunluğundan değil aynı zamanda geçmişteki av yoğunluğundan da etkilenir (Sahoo & Poria, 2019; Cavani & Farkas, 1994). Bellek terimi, avcının şu andaki büyüme hızının yakın geçmişteki av yoğunluğuna bağlı olduğu varsayımı altında kullanılır (Sahoo & Poria, 2019). Yani hafıza özelliği yakın geçmişteki anılarla birlikte son yaşananlara bağlıdır. Ancak uzak geçmişte yaşanan anlar kolay hatırlanamayacağı için dikkate alınmaz. Yani giderek zayıflayan bir hafıza söz konusudur. Yukarıda bahsettiğimiz gibi N.MacDonald ve M.Farkas'ın (M. Farkas, 1984) çalışmaları doğrultusuyla hafıza terimini sistemlere dahil etmek için sürekli yoğunluk fonksiyonu kullanılır:

$$Q(t) = \int_{-\infty}^t G(\tilde{t})R(t - \tilde{t}) d\tilde{t}. \quad (1.4.1)$$

Burada $R : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ $R(a) \geq 0$ $a \in [0, \infty)$

$$\int_0^{\infty} R(a) da = 1,$$

özelliklerini sağlayan olasılık yoğunluk fonksiyonudur. Önceki çalışmalar (Cavani & Farkas, 1994; Sahoo & Poria, 2019) geçmiş etkinin katlanarak azaldığını varsaydığı için bu çalışmalar altında en basit olasılık yoğunluk fonksiyonunu şu şekilde tanımlayabiliriz :

$$R(t) = \omega e^{-\omega t}. \quad (1.4.2)$$

Bu R seçimine üstel olarak azalan bellek diyoruz (Sahoo & Poria, 2019) çünkü en büyük ağırlık yakın anlara veriliyor. Zamanda geriye doğru gittiğimizde ağırlık katlanarak azalıyor. Dolayısıyla hafıza terimine sönümlü hafıza diyebiliriz. Bu nedenle, sönümlü hafıza bir çok biyolojik sistemin modellenmesi için makul bir varsayımdır (Sahoo & Poria, 2019). Burada ω geçmiş etkinin ölçüsüdür (Sahoo & Poria, 2019). Örneğin daha büyük ω dikkate alındığında geçmiş etki, daha uzun bir zaman aralığında yaşanır. (1.4.1) denklemini yeniden şu şekilde ifade edilebilir:

$$\frac{dR(t)}{dt} = \omega(G(t) - R(t)). \quad (1.4.3)$$

Av-avcı türü etkileşimler için sistem dinamiklerinde önemli rol oynayan bellek teriminin tanıtılması ekolojik mekanizmalar aracılığıyla sağlanabilir. Popülasyonda

doğal ölüm herhangi bir zamanda gerçekleşebilir fakat yaşlı bireylerin katkısı fazladır (Safdari et al., 2016). Av arasındaki grup savunma mekanizmaları, avlanma oranlarını azaltabilir fakat avcı türündeki bazı canlılar sürüden çıkabilir ve av yoğunluğunun daha düşük olduğu bir yer bulmaya çalışabilirler (Melchionda, Pastacaldi, Perri, Banerjee, & Venturino, 2018). Bunlar hafıza etkisine dayalı bazı mekanizma örnekleridir.

N.Mac donald makalesinde bellek terimini eşleşmiş adi diferansiyel denklemler (ODE) cinsinden formüle edilmiş, etkileşen türlerin modellerine de eklemenin mümkün olacağını gösterdi. Örneğin, bir avcı ve av modelinde, avcı popülasyonu K 'nın artış hızının, N avcı popülasyonunun yakın geçmişine bağlı olduğunu varsaymak mantıklıdır(MacDonald, 1976).

$$\begin{aligned}\frac{dN}{dt} &= f(N, K), \\ \frac{dK}{dt} &= g(N, K).\end{aligned}$$

N ve K 'nin artış oranlarının yalnızca mevcut değerlerine bağlı olduğu durumlarda, ikinci denklemde N şu şekilde değiştirilebilir (MacDonald, 1976):

$$Q(t) = \int_{-\infty}^t N(t)G(t - T)dT.$$

Bu denklem modelimizde hafıza terimi oluşturulurken kullanılacaktır.

2. HOLLİNG TİPİ YANIT FONKSİYONLARI

Popülasyon dinamiğindeki önemli temalardan biri avcı ve av arasındaki dinamik ilişkiyi anlamaktır. Bu tür bir ilişkinin matematiksel olarak açıklanıp analiz edilmesinde katkı sağlayan fonksiyona işlevsel fonksiyon (fonksiyonel tepki) denir. Av-avcı teorisinin geliştiği süre boyunca ekologlar bir avcının beslenme hızının ayrıntılarını anlamının önemini kabul ettiler (Nicholson & Bailey, 1935; Holling, 1959b). Gerçekçi bir av-avcı etkileşim fonksiyonu, av bol olsa bile avcının gelişi güzel hızlı büyümesine izin vermeyecek şekilde olmalıdır (Sahoo & Poria, 2019). Beslenme hızı konusunda teorik çalışmalara J. van der Meer (Van Der Meer & Ens, 1997) gibi bir çok araştırmacı katkıda bulunmuştur.

Av ve avcılar arasındaki etkileşimleri karakterize etmemize yardımcı olan fonksiyonel tepki terimi ilk olarak M.E.Solomon tarafından kullanılmıştır (Sepúlveda & Carrillo, 2008). Solomon'un çalışmaları aynı zamanda Crawford Stanley Holling'in çalışmaları ile de ilişkilendirilmiştir. Holling'in çalışmaları (Holling, 1959a, 1965, 1959b) av avcı sistemlerindeki avcılarının besin kullanım oranlarını etkileyen faktörlerin en kapsamlı analizleridir. Holling, bir avcının avlanma süresi ile avının yoğunluğu arasındaki fonksiyonel tepkiyi tanımlamıştır (Holling, 1959a). Bu bir avcı için saldırı döngüsünün 2 temel unsurudur. Bu bağlamda 1950'lerin sonlarına doğru Holling üç tip fonksiyonel tepki formunu ele almıştır (Holling, 1959a). Çalışmalarındaki temel amaç avlanmayı ana hatlarıyla açıklamaktır.

Fonksiyonel tepki, av yoğunluğunun bir fonksiyonu olarak avcı başına başarılı bir şekilde saldırıya uğrayan av sayısıdır. Bir avcının, avının değişen yoğunluğuna nasıl tepki verdiğini ve avcı davranışlarının av yoğunluğundan nasıl etkilendiğini açıklar. Av-avcı etkileşimlerinin gücünü yönetir ve şekli, etkileşime giren türlerin ve tüm besin ağlarının kararlılığını etkiler. Avcılık normal olarak av ve avcı büyüme hızları üzerindeki etkileri olan fonksiyonel ve sayısal tepkiler açısından ölçülür. Genel Holling tipindeki yanıt fonksiyonlar şu şekildedir;

$$F(N) = \frac{aN^x}{1 + acN^x}. \quad (2.0.1)$$

Burada a , avcının av popülasyonuna saldırı hızını temsil eder (Denny, 2014). Holling, avcılarının birbirlerinin faaliyetlerine müdahale etmediğini varsayar ve bu nedenle

avcılar arasındaki yiyecek rekabeti yalnızca avın tükenmesi yoluyla gerçekleşir (Holling, 1959a).

2.1 Holling Tip I

Tip I fonksiyonel tepki, üç tip fonksiyonel tepkinin en basitidir. Burada av yoğunluğu ile öldürülen maksimum av sayısı arasında doğrusal bir ilişki vardır. Grafikselsel olarak baktığımızda da fonksiyonel tepkilerde artış, avlanma oranının sabit kaldığı bir çizgi av yoğunluğuna ulaşılanaya kadar doğrusaldır. Çizginin eğimi, avcının saldırı hızına eşittir. Birden büyük bir eğim için, av yoğunluğu arttıkça avlanma riski artar. Bu doğrusal artışta, avcının avı yakalama ve tüketmek için ihtiyaç duyduğu sürenin önemsiz olduğu varsayılır.

Tip I fonksiyonel tepki, Lotka-Volterra avcı-av modelinde kullanılır (Holling, 1959b). Bu modelde yeni avcılarının oluşumunun doğrudan av tüketimine bağlı olduğu varsayılır. Lotka-Volterra modeli ile ilgili detaylar için (Shim & Fishwick, 2008) bölümünü ziyaret ediniz. Basit olması sebebiyle Holling Tip I fonksiyonel tepki örnekleri az bulunmakla beraber en yaygın örneği otçul-bitki etkileşimleridir (Kalaisekar, Padmaja, Bhagwat, & Patil, 2017). Bu fonksiyonel yanıtın genellikle popülasyon dinamikleri üzerinde dengeleyici bir etkiye sahip olduğu da varsayılır (Begon, Harper, Townsend, et al., 1986) ve av popülasyonunun bir avcının mevcut olduğu sistem için uygundur. Genel formu aşağıdaki gibidir:

$$F(N) = aN. \quad (2.1.1)$$

Burada $a > 0$ avcılarının avla karşılaşma hızı tarafından belirlenen sabit bir katsayı, N ise av yoğunluğudur.

2.2 Holling Tip II

En sık kullanılan fonksiyonel tepki Holling tip II'dir. En yaygın örneklerden biri olarak teoride disklerin toplanma aşaması verilebilir: zaman harcamasından dolayı öğrencilerin disk toplama performansı disk yoğunluğu arttıkça azalacaktır çünkü daha yüksek yoğunluklarda, çok sayıda disk bulunduğunda, mevcut zamanın büyük bir kısmı diskleri aramak için değil, masadan diskleri çıkarmak için harcanmalıdır (Holling, 1959b). Bu yüzden disk yoğunluğu ve öğrenci tarafından toplanan disk sayısı arasındaki ilişki bir doğru değil eğri belirtir. Bu ilişki matematiksel olarak ilk

defa 1959 C.S Holling tarafından özetlenmiştir ve $y = T_t ax / (1 - abx)$ denklemi ile gösterilmiştir (Holling, 1959b). Burada y uzaklaştırılan disk sayısı, x disk yoğunluğu, T_t toplam deneye harcanan zaman, a sabit verilen yoğunlukta diski bulma olasılığı ve b bir diski toplamak için harcanan zamanı temsil eder.

Tip II fonksiyonel yanıtta, bir avcı tarafından av tüketimi oranı, av yoğunluğu arttıkça artar, ancak sonunda, av yoğunluğundaki artışlardan bağımsız olarak tüketim oranının sabit kaldığı bir asimptotta seviyelenir (Gross, Beals, & Harrell, 2019). Bir avcı, tüketebileceği av öğelerinin sayısını sınırlamak için sınırlı sayıda av öğesiyle uğraşmak için zaman harcar. Av öğelerinin sayısı arttıkça, her bir avı avlamak için gereken süre artar. Bu süreç, avcıların daha fazla av saldırma süresini sınırlar. Yani tüketilen avın oranı av yoğunluğu ile monoton olarak azalır. Grafik olarak bakıldığında fonksiyonel tepkilerde, tüketim oranı eğrisel bir artış göstermektedir.

Av türünün yoğunluğu arttıkça, av arayışının avcı popülasyonu oranı üzerindeki önemi azalır. Bu durumda avların yerini belirlemek kolaylaşır fakat yeri belirlendiğinde yakalanması, etkisiz hale getirilmesi, öldürülmesi ve yenmesi gibi süreçler daha çok avcının av öğesiyle uğraştığı zamanla ilişkilidir. Başka bir deyişle av aramaktan ziyade o av ile uğraşmak daha önemli bir hale gelir. Dolayısıyla av tüketimindeki artış azalma gösterir.

Avcının avlanma hızının av yoğunluğuyla birlikte arttığı, ancak av yoğunluğundan bağımsız olarak avlanma oranının sabit kaldığı bir asimptota ulaşılan kadar kademeli olarak yavaşladığı bir sistem için genel olarak aşağıdaki fonksiyon dikkate alınır:

$$F(N) = \frac{aN}{1 + atN}. \quad (2.2.1)$$

Burada a sabit ve t işlem süresidir. Tip II tepkiler genellikle omurgasız avcılarla ilişkilidir. Dolayısıyla bu denklem bir çok avcının tepkisini yeterince tanımlar fakat Tip III tepkisini modelleyemez. Tip II tepkiler, avcı-av etkileşimleri için sistemi kararsız hale getirir çünkü profesyonel bir avcı, av düşük yoğunluklu bir eşğin altına düştüğünde bir av popülasyonunu yok olmaya sürükleyebilir (Oaten & Murdoch, 1975).

2.3 Holling Tip III

Holling, 1965 tarihli makalesinde, avcılığın bileşenlerini uzun uzadıya tartışarak Tip III'ü ele aldı (Holling, 1965). Holling alternatif av ve öğrenme davranışı olan omurgalı bir avcı için bu fonksiyonel tepkiyi keşfeder ve Hassel ve diğerleri (M. P. Hassell, 2020) omurgasız hayvanlarda da bu fonksiyonel tepkinin kullanılabilirliğini iddia eder. Avcılar, avlanma veya av idaresi için daha özel teknikler öğrenir veya aramalarını çevre içindeki belirli yerlere odaklamayı öğrenir. Bu davranışlar Tip III formunu Tip II den ayıracak altı farklı davranış varsayımından birkaçıdır (Dawes & Souza, 2013). Holling bu hayvanların hem yavaş öğrenme eğiliminde olduklarını hem de oldukça sık karşılaşmadıkça bir yiyeceğin değerini unuttuklarını düşündü. Bundan dolayı var olan bir av (besin) az olduğunda, orantılı olarak daha az besin yenecek ve fonksiyonel tepkide bir gecikme ortaya çıkacaktır (Real, 1977).

Popülasyondaki avcılar avlanma yeteneği kazanmak için zamana ihtiyaç duyarlar ve bu nedenle başlangıçta avlanma oranı daha düşüktür. Tip III, tüketilen av oranının, bazı av yoğunluğu bölgelerine göre pozitif olarak yoğunluğa bağlı olduğu bir sigmoid ilişki ile tanımlanır. Fonksiyonel tepkiler, yoğunluğa bağlı bir etkiden kaynaklanır. Tip III fonksiyonel tepkisi çoğunlukla, avın bulunmaması nedeniyle avcı popülasyonunun av popülasyonu ile çok daha düşük bir miktarda karşılaştığı durumlarda kullanılır, ancak av mevcut olduğunda, tepki Holling II tipi fonksiyonel tepki gibi davranır (Majumdar, Debnath, Sarkar, & Ghosh, 2022).

Tip III fonksiyonel tepki, yüksek av yoğunluğu seviyelerinde doyma meydana gelmesi bakımından Tip II'ye benzerdir. Avcı, av yoğunluğu arttığında daha aktif avlanırsa ve av yoğunluğu azaldığında daha az aktifse, Holling tip III formu diyebiliriz. Holling tip III formunun kanıtı niteliğinde bir örnek ise göllerde yaygın olan bir pelajik otobur *Daphnia*'nın fonksiyonel tepkisidir (Sarnelle & Wilson, 2008). Genel formu:

$$F(N) = \frac{aN^2}{1 + atN^2}. \quad (2.3.1)$$

Bu formülasyon, iki bağlanma yeri olan bir enzim ile bir analogi olarak türetilmiştir (Real, 1977). Tip III fonksiyonel tepkinin, iki av türü üzerinde avlanan bir avcı ile

yapılan deneylerde meydana geldiği gösterilmiştir (Holling, 1959a, 1965).

2.4 Holling Tip IV

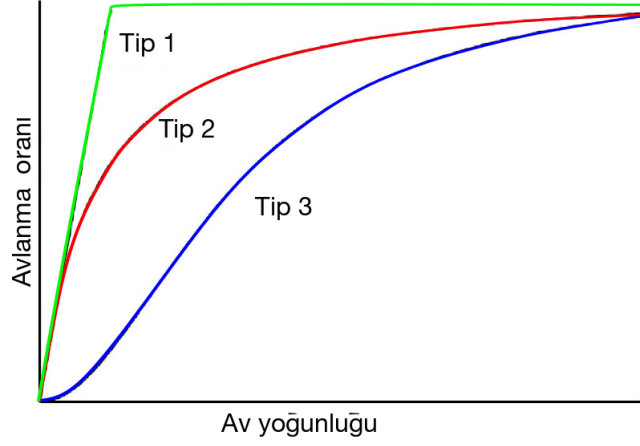
Nadir kullanılan tiptir ve ilk olarak 1930'da enzimler konusunda Haldene tarafından tanıtılmıştır. Ardından Andrew'e göre Tip IV fonksiyonel tepki fonksiyonunda, yeterince yüksek av yoğunluklarında avcının kişi başına düşen avlanma oranı azalır. Parametre (avcının avdan bağışıklığının veya toleransının bir ölçüsüdür) azaldıkça, avcının yiyecek arama etkinliği azalır. Parametreler, kişi başına maksimum avlanma oranı ve herhangi bir engelleyici etkinin yokluğunda yarı doygunluk sabiti olarak yorumlanabilir. Genel formu:

$$F(N) = \frac{aN}{mN^2 + cN + 1}. \quad (2.4.1)$$

Burada a ve m pozitif sabitlerdir ve c sabittir. Bu fonksiyon Monod-Haldane veya Holling Tip IV fonksiyonel yanıt olarak adlandırılır. Monod-Haldan fonksiyonu kavramı, çeşitli organizmaların çeşitli koşullara fizyolojik tepkisini tanımlamak için kullanılır (Huang, Ruan, & Song, 2014; Baydemir, 2018). Grafik olarak baktığımızda fonksiyon maksimuma çıkar ve sonra azalır, N sonsuza yaklaştıkça sifıra yaklaşır. Avın popülasyonları yeterince arttığında kendilerini daha iyi savunabileceği veya kılık değiştirebileceği durumu modellemek için kullanılır, bu fenomene grup savunması denir (Freedman & Wolkowicz, 1986).

Tip IV ilk teorik olarak elde edildi ve sadece omurgalılarda meydana gelmesi bekleniyordu (Holling, 1961). Holling'in diğer tip tepki fonksiyonlarında yakalama sıklığı belirli bir av yoğunluğunda maksimuma ulaşıp ardından belirli bir asimptotta sabit kalıyor iken Tip IV yakalama frekansının yüksek yoğunlukta elde edilen maksimum değerinin altına düştüğü tek tiptir (Líznavová & Pekár, 2013). Holling (Holling, 1965) bu düşüşü avcının avı aramaktan ve yakalamaktan vazgeçtiği durumlara bağladı.

Holling tip fonksiyonel tepkiye sahip av avcı sistemi üzerine Yann Lamontagne ve diğerlerinin (Lamontagne, Coutu, & Rousseau, 2008) yakınlı tarihli, N.D.Kazarinoff ve P.Van Den Driessche (Kazarinoff & Van Den Driessche, 1978), Dongmei Xiao (Xiao & Ruan, 2001) ve Mark Denny (Denny, 2014) gibi bir çok araştırmacı bu konu üzerinde ayrıntılı incelemelerde bulunmuştur.



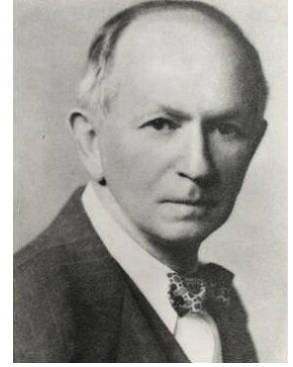
Şekil 2.1 Holling Fonksiyonel Tepki Fonksiyon Grafiği.

Şekil 2.1’de görüldüğü üzere üç tip tepkinin grafiğine baktığımızda Tip I yanıt fonksiyonunda doğrusal bir artış gözlemlenirken Tip II de eğrisel artışın sonunda satüre olmaktadır. Tip 3 de ise başlangıçta artış yavaştır daha sonra Tip II ye benzer şekilde satüre olur. Tip II ve III genellikle kararsız yapıya sahiptir ve Tip II ve III’ün her ikisi de monoton artış gösterir ve av sayısı fazla olduğunda doygunluk etkisi gösterir. Tip II fonksiyonel tepkinin esas olarak uzman avcı hayvanlarda meydana geldiği düşünülürken, Tip III fonksiyonel tepki genel avcılarla ilişkilidir (Andersson & Erlinge, 1977).

3. LOTKA VOLTERRA AV AVCI İLİŞKİSİ MODELİ

3.1 Biyolojik Motivasyon

Ekolojide popülasyon dinamiklerinin analizi için ilk fikri atan ve model oluşturan Amerikalı matematikçi Alfred J. Lotka ve bu denkleme büyük katkılar sağlayan İtalyan matematikçi Vito Volterra av avcı türünün varoluş mücadelesini matematiksel olarak modelleyen denkleme verilen isim Lotka Volterra iki bilim adamının ismini taşıyor. Alfred J. Lotka (2 Mart 1880 - 5 Aralık 1949) 1901'de İngiltere, Birmingham Üniversitesi'nde ve 1901-1902'de Leipzig Üniversitesi'nde fiziksel kimya alanında yüksek lisans yaptı. 1909'dan 1912 ye kadar Cornell Üniversitesi'nde Fizik alanında çalışmalarına devam etti. Daha sonra Johns Hopkins Üniversitesi'nde kimyager yardımcısı, fizikçi yardımcısı olarak çalıştı ve kariyerinin son basamağında New York Metropolitan Life Insurance Company'de istatistikçiydi. Lotka emekli olana kadar nüfus dinamiği ve enerji alanındaki çalışmalarıyla ünlü ABD'li bir matematikçi, fiziksel kimyacı ve istatistikçi olarak akıllarda yer edindi ve fizik, biyoloji, istatistik alanlarında çok sayıda makalesi ayrıca 6 kitabı mevcuttur.



Vito Volterra (3 Mayıs 1860 - 1 Ekim 1940) 1883'te Pisa Üniversitesi'ne girdi ve daha sonraki yıllarda rasyonel mekanik profesörü olarak görev aldı. Yoğun olarak çalıştığı konular integral denklemleri üzerineydi. Bu konular üzerine 1884'te çalışmaya başladı ve 1896'da şimdi Volterra tipi integral denklemler olarak adlandırılan sistem üzerine makaleler yayınladı. 1892'de Torino Üniversitesi'nde mekanik profesörü ve ardından 1900'de Roma La Sapienza Üniversitesi'nde matematiksel fizik profesörü oldu.

Alfred J. Lotka 1920 yılında "Organik sistemlerde belirli ritmik ilişkiler üzerine analitik not" başlıklı bir makale yayınladı (Lotka, 1920). Birkaç yıldır laboratuvarında kimyasal reaksiyonlarla ilgileniyordu ve makalesinin amacı ise iki biyolojik türden

oluşan bir sistemin kalıcı olarak salınabileceğini önermekti (Bacaër & Bacaër, 2011). Böylece bir kimyasal reaksiyonu tanımlamak için çoğu sistemin temeli olan Lotka-Volterra denklemini ortaya attı(De Vrese et al., 2001). Lotka daha sonra sistemi geliştirerek av avcı modellerini incelemek için bu denklem sisteminden kitabında bahsederek nüfus dinamiği teorisi için büyük bir katkı sağladı (Lotka, 1925). Aynı denklemler 1926'da ünlü matematikçi Vito Volterra tarafından kullanıldı (Goel, Maitra, & Montroll, 1971). Vito Volterra savaş yıllarında Adriyatik Denizi'nde yırtıcı balıkları inceledi ve Birinci Dünya Savaşı sırasında avlanma çabalarının azaldığı dönemde bu balıkların oranının arttığını fark etmişti. Lotka'nın çalışmasından haberi olmayan Volterra, bu gözlemini aynı modeli kullanarak açıkladı. Bu sorunu Lotka'nın 1920 de Volterra'nın 1926 da ele almasına rağmen iki türün etkileşiminin popülasyonlarında periyodik salınımlara yol açacağı sonucu aynıydı. Volterra makalesini ilk olarak 1926'da yayınladı (Volterra, 1926). Lotka, Volterra ve diğer bilim adamlarına avcı-av sistemleri üzerine yaptığı çalışmanın önceliği hakkında bilgi verdi ve Volterra, Lotka'nın önceliğini kabul etti. Daha sonra Lotka çalışmalarını insan nüfusu üzerine odaklarken Volterra, on yıl boyunca avcı-av sisteminin varyantları üzerinde çalışmaya devam etti.

Lotka-Volterra modeli bir av ile bir avcının yani iki türün etkileşime girdiği ekolojik sistemlerin dinamiklerini açıklamak için kullanılan bir çift birinci dereceden doğrusal olmayan diferansiyel denklemdir. Aynı zamanda model rekabet, hastalık ve ekonomi gibi dinamiklerle genişletilebilir. Geçmişten bugüne birçok araştırmacı Lotka Volterra modeli üzerinde araştırma ve incelemelerde bulunmuştur (Fujii, 1977; Takeuchi, 1996; Baydemir, 2018). Ekoloji de bir çok sistemin temelini oluşturduğu için en çok atıfta bulunulan bu basit av avcı modeli ile ilgili varsayımlar şunlardır:

- Av türü doğar ve sınırsız besin kaynağına sahiptir. Avlanmaya maruz kalmadıkça av popülasyonu üstel olarak büyür.
- Avcılar doğar ve büyümeleri ise tamamen av oranına bağlıdır. Av ne kadar çoksa avcı o kadar fazla avlanma gerçekleştirebilir ve doğal ölümler yolu ile ölürlür.
- Avcılar ve av arasındaki temas, avcı sayısını artırır ve av sayısını azaltır.

- Avcı ve av sayıları sıfıra düşmediği sürece bu döngü süresiz olarak tekrarlanabilir.
- Popülasyonun değişim hızı, büyüklüğü ile doğru orantılıdır.

Bu modelin özelliği ise av ile avcı popülasyonunun değişiminin birlikte açıklanmasıdır (Jorgensen & Fath, 2014). Bu dinamiklerin sabit noktaları, kararlılık analizi gibi veriler sayısal yöntemlerle açıklanabilir. Denklemin genel formu aşağıdaki gibidir:

3.2 Model Tanımı

$$\frac{dx}{dt} = ax - bxy, \quad (3.2.1)$$

$$\frac{dy}{dt} = cxy - dy, \quad (3.2.2)$$

Bu denklem sistemini örnek yoluyla açıklayacak olursak x tavşan yani av popülasyonunu, y vaşak avcı popülasyonu ifade eder. Burada ax bileşeni ile tavşanların sınırsız bir besin kaynağına sahip olduğu ve avlanmaya maruz kalmadıkça katlanarak çoğaldığı varsayılır, bxy vaşakların tavşanları avlama hızının, vaşaklarla tavşanın karşılaşma hızıyla orantılı olduğunu, cxy vaşakların avlanma sonucu büyüme oranını, dy doğal ölümleri ve t zamanı ifade eder. Ayrıca a, b, c, d pozitif katsayılardır.

Modelde avcı popülasyonunun olmadığı ortamlarda $a > 0$ için av popülasyonundaki değişim $\frac{dx}{dt} = ax$ oranında artacaktır. Av popülasyonunun olmadığı ortamlarda, $d > 0$ için avcı popülasyonu $\frac{dy}{dt} = -dy$ oranında azalacaktır. Bu artma ve azalma oranları türlerin aynı ortamda bulduklarında karşılaşma ve etkileşimde bulunma sıklıklarına göre değişecektir. Modelde:

- x : Av popülasyonu
- y : Avcı popülasyonu
- t : Zaman
- $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ popülasyonların zaman göre büyüme oranları
- a : Avcıların yokluğunda avın doğal üreme oranı
- b : Avcılar ile avların etkileşime girmesi sonucunda avların ölüm oranı

- c : Avcıların avlanma oranı
- d : Avların yokluğunda avcılarının ölüm oranı

olarak tanımlanabilir. Matematiksel modeller zaman, yer vb. faktörlere bağlı olduğundan dolayı adi diferansiyel denklemler, fark denklemleri veya kısmi diferansiyel denklemler kullanılarak kurulur. Sürekli sistemler diferansiyel denklemler kullanılarak modellendiği için Lotka Volterra modeli sürekli sistemlerin örneklerinden biridir.

Lotka Volterra modelini temel alarak çalışmalar yapılmış olup hala üzerine çalışılmaya devam edilmektedir. Mevcut çalışmalara bir örnek verecek olursak "SIR modeli" (hassas, bulaşıcı, iyileşen) bölmeli bir teknik olarak kabul edilen ve genellikle bulaşıcı hastalıkların modellemesine uygulanan temeli Lotka Volterra modeline dayanan bir modelledir. Epidemoloji alanında R.Kermack ve McKendrick (Kermack ve Mckendrick, 1927) tarafından başlatıldı (Kermack & McKendrick, 1927). Bu modeller bir salgın hastalığının yayılma sürecini tahmin etmek ya da aşı olunacak bireyler için etkili teknikleri incelemek adına yardımcı olur. C.Huffaker (1958), laboratuvarında avcı ve av yoğunluklarının salınımlarını göstermek için iki akar türü yetiştirerek incelemelerde bulundu (Huffaker et al., 1958). Bazı araştırmacılar av-avcı sistemlerinde avcıya hafıza terimi ekleyerek dinamikleri inceledi (Sahoo, 2012; MacDonald, 1977, 1976; Sahoo & Poria, 2019; M. Farkas, 1984). Bazı araştırmacılar ise dinamiklere rekabet faktörünü ekleyerek sistemleri inceledi (Gökçe, 2022; Gause & Witt, 1935; Moore, 1993).

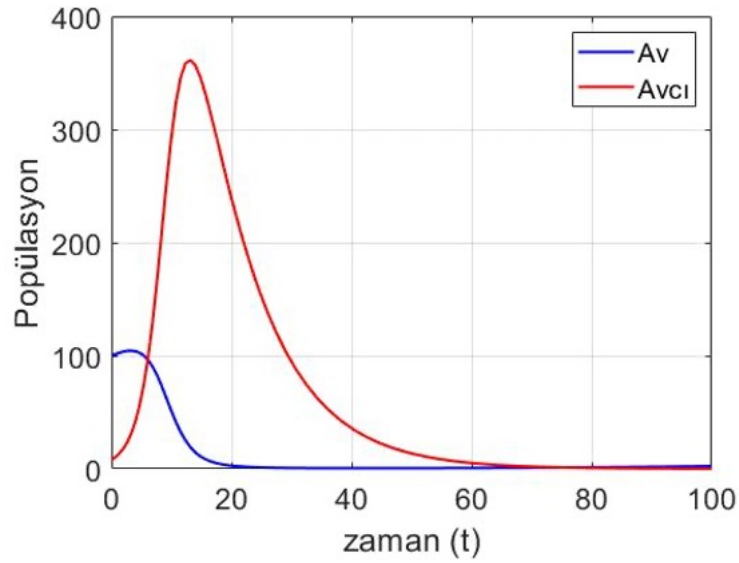
Dinamik sistemlerde kendini tekrar eden süreçler söz konusudur. Bu gibi durumlarda sistem periyodik çözümler bulundurur (Karakulak, Tan, & Mutlu, 2021). Periyodik çözümlerin varlığını ele alan teoriler arasında en önemlilerinden biri E.Hopf tarafından geliştirilmiştir (Xu, Liao, & He, 2011).

Sistemlerde incelenen diğer bir konu ise dinamiklere farklı fonksiyonel tepkiler eklenerek çatallanma analizleri ve simülasyonların analizleridir (Yılmaz, Maden, & Gökçe, 2022; Baydemir, 2018). Yani Lotka Volterra modeli biyoloji (Gavin, Pokrovskii, Prentice, & Sobolev, 2006), fizik (Ma & Qian, 2015), kimya (Sharma &

Kumar, 2006) vb. gibi çeşitli bilim alanlarında uygulama bulmuştur.

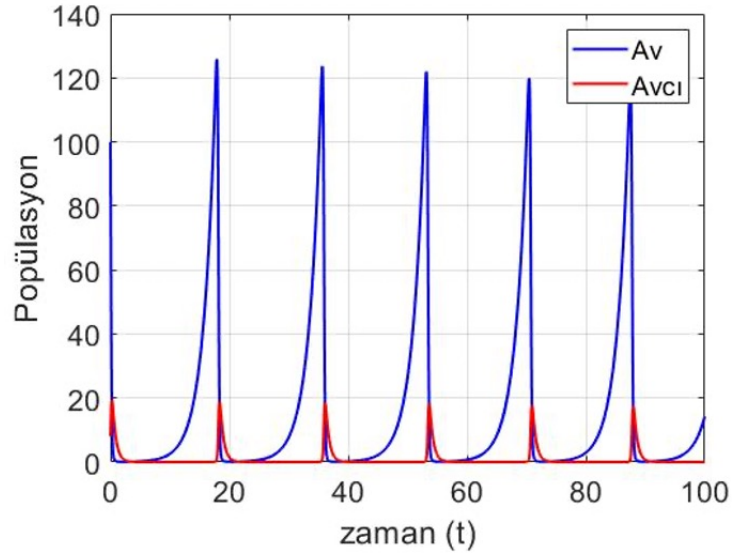
3.3 Simülasyonlar

Bu bölümde verilen simülasyonlar iki türün zaman içindeki değişimlerini, periyodik değerlerini göstermektedir. Burada parametre değişimi keyfidir. Simülasyonları incelediğimizde Şekil 3.1’te iki popülasyonun da türü yok olmaktadır. Şekil 3.2 ve 3.3 için bir döngüden bahsedebiliriz. Avcı popülasyonu avı tüketir



Şekil 3.1 Simülasyonun parametre değerleri ($a=0.03, b=0.001, c=0.005, d=0.1$) incelendiğinde av popülasyonunun başlangıç sayısı 100, avcı popülasyonunun başlangıç sayısı 8 dir. İki popülasyonda da erken zaman aralıklarında hızlı bir artış görülmektedir. Bu hızlı artışın ardından avcılar avı tüketerek avcı oranında artış, av oranında azalma görülmektedir. Avcı yoğunluğunun fazla olması av popülasyonunun nesli tükenmesine yol açmaktadır. Av popülasyonunun nesli tükenmesinden dolayı avcı popülasyonu av yetersizliği nedeniyle nesli yok olmaktadır.

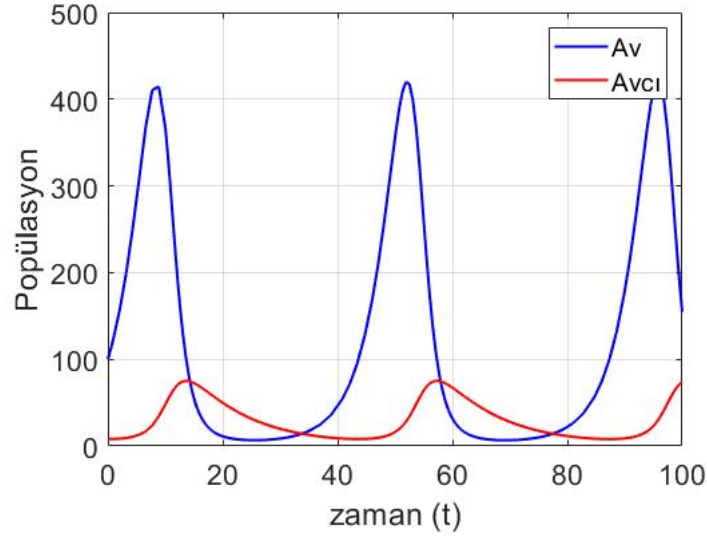
ve avcı popülasyonu arttıkça, av popülasyonu düşer, bu da avcı popülasyonun azalmasına ve sistemin dengesinin korunmasına yol açar. Avcıların azalmasından dolayı av popülasyonu hızlı bir şekilde artmaya başlayacaktır ve bu döngü böyle devam edecektir. Bu grafiklerde sistem kararsızdır fakat Şekil 3.3’te dalgalanma sıklığı Şekil 3.2’e göre azalmıştır. Şekil 3.2’de beş dalgalanma gözlenirken Şekil 3.3’te üç dalga



Şekil 3.2 Bu simülasyon $a=0.5, b=0.5, c=0.100, d=1.7$ değerlerine baktığımızda dinamikler kararsız bir davranış sergilemektedir. Başlangıçta av ve avcı sayısı 20 dir. Avcılar hızlı bir şekilde avı tüketir ve av yetersizliğinden dolayı kendi türünde azalmaya başlar. Avcı popülasyonu azaldıkça avlanmada az olacağı için av yoğunluğu tekrar artmaya başlar. Bu döngü sonsuza kadar devam etmektedir.

görülür, yani dalga sıklığı azalmıştır. Sonuç olarak av sınırsız besin kaynağına sahip olduğu için sonsuza kadar büyüyebilir ve avcılarının doygunluğu yoktur. Model rekabeti dikkate almaz. Bundan dolayı Lotka-Volterra modeli tek başına çok gerçekçi değildir.

Şekil 3.4 itibariyle kullanılan diğer bir grafik ise faz diyagramı olarak adlandırılan faz yörüngeleri fizik, kimya vb. birçok alanda kullanılır. Faz yörüngeleri (x, y) uzayında kapalı eğrilerdir. Her bir yörünge farklı bir $(x(0), y(0))$ başlangıç noktasına karşılık gelir ve böylece sistem için ayrı bir çözüm ifade eder. Şekil 3.4 ve 3.5 karşılaştırıldığında birinci grafikte av ve avcının nesli belirli bir yerde tükenmiştir fakat şekil ikide av avcı arasındaki ilişki döngü şeklinde devam etmektedir. Her iki sistem de kararsızdır. Şekil 3.6 ve 3.7 karşılaştırıldığında birinci grafikte avcı sayısı av sayısına göre ikinci grafikte av sayısı avcı sayısına göre fazladır. Aynı zamanda birinci grafiğin dalgalanma sıklığı ikiye göre fazladır. Her iki sistem de kararsızdır.



Şekil 3.3 Bu simülasyon $a=0.3, b=0.01, c=0.001, d=0.1$ değerleri incelendiğinde av popülasyonunun başlangıç oranı 100, avcı popülasyonunun başlangıç oranı 8 dir. Kararsız bir sistem karşımıza çıkmaktadır. Fakat dalgalanma sıklığı azalmıştır. Av yoğunluğu avcı yoğunluğuna göre daha fazladır.

3.4 Modelin Sabit Noktaları

Denge kendisini özel bir hareket veya değişim durumu, yani sıfır hızla hareket veya değişim olarak sunar. Aslında, çok küçük olan ve yok denecek kadar küçük olmayan hızlarda da çok benzer bir denge oluşur. Dengenin ya da daha doğrusu durağan bir durumun genel koşulu, sistemin her bir bileşeninin büyüme hızının sıfıra eşitlenmesiyle elde edilir (Lotka, 1925):

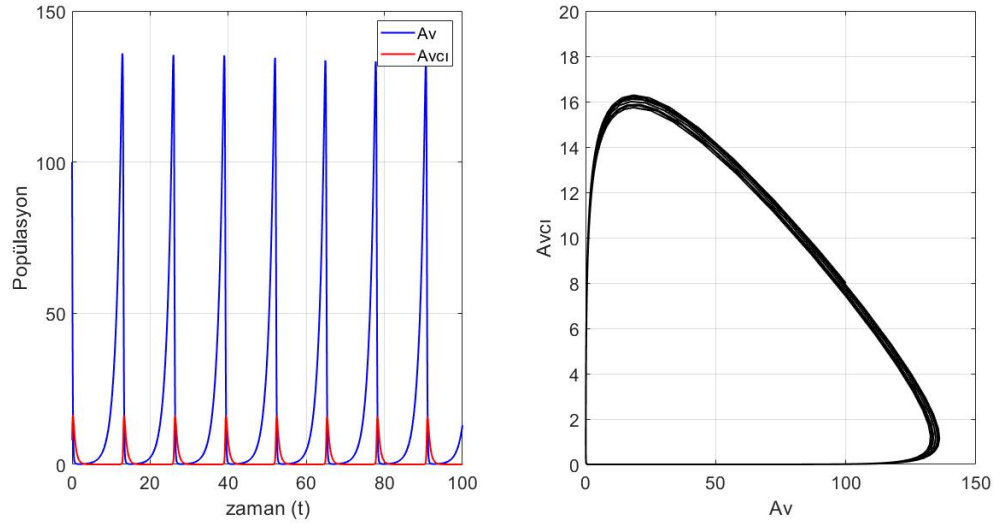
$$\frac{dX_i}{dt} = F_i(X_1, X_2, \dots, X_n),$$

$$F_1 = F_2 = \dots = F_n.$$

Bu koşul, genel olarak, X değişkenlerinin bir veya daha fazla değer kümesini belirleyen n bağımsız denklem sağlar;

$$X_1 = C_1, \quad X_2 = C_2, \quad \dots, \quad X_n = C_n,$$

Bu şekilde belirlenen C değerleri gerçek ve pozitif ise, açıkça bir dengeyi veya kararlı bir durumu tanımlarlar (Lotka, 1925). Yapılan lineerleştirme işleminin sonuçları



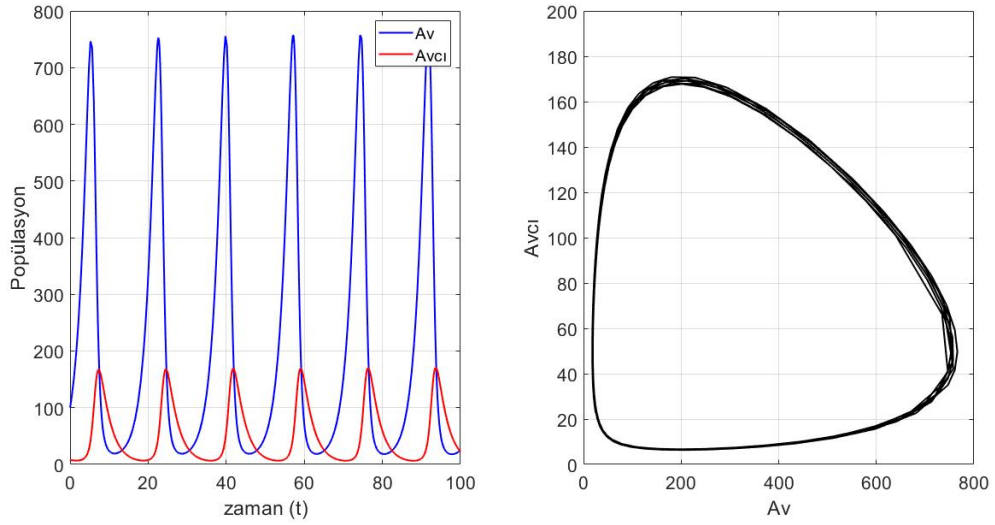
Şekil 3.4 Simülasyonun parametre değerleri $a = 0.7, b = 0.6, c = 0.09, d = 1.7$. Sistem dinamikleri kararsız bir davranış göstermektedir. Başlangıçta av sayısı 100 avcı sayısı 16. Faz diyagramı olarak adlandırılan ikinci figür fizik, kimya vb birçok alanda kullanılan bir grafik çeşididir. İlk grafikte popülasyonun zamana göre değişimini incelemek mümkün iken ikinci grafikte avcını ava göre değişimini analiz edebiliriz.

sadece bir dengeye yakın çözümlerin davranışları hakkında bilgi verebilir. Yani bir dengeye yakın çözümlerin davranışı, dengedeki lineerleştirme çözümlerinin davranışı tarafından belirlenir (Brauer et al., 2012). Lotka Volterra modelinde sabit noktaları bulmak için iki popülasyonun birbiri ile dengede olduğu durumlara bakılır. Denge, popülasyonların zamana göre değişmediği anlamına geldiğinden, matematiksel olarak aşağıdaki iki koşul karşılanırsa sistem dengededir (Błaszak & Hu, 2019):

$$\frac{dx}{dt} = 0 \text{ ve } \frac{dy}{dt} = 0$$

ifadesi ile sabit nokta bulunur.

$$\begin{aligned} x(a - by) &= 0, & f(x, y) &= x(a - by), \\ y(cx - d) &= 0, & g(x, y) &= y(cx - d), \end{aligned}$$



Şekil 3.5 Simülasyonun parametre değerleri $a = 0.5, b = 0.01, c = 0.002, d = 0.4$ Başlangıçta av sayısı 100 avcı sayısı 0 dır. Faz diyagramını incelediğimizde sarmal şekilde bir döngü karşımıza çıkmaktadır. Yani av sayısının artması avcıların çoğalmasına neden olurken çok fazla avlanmadan dolayı av sayısı düştükten sonra avcı sayısında da azalma görülmektedir. Bu döngü bu şekilde devam etmektedir.

çözümleri aşağıdaki gibidir:

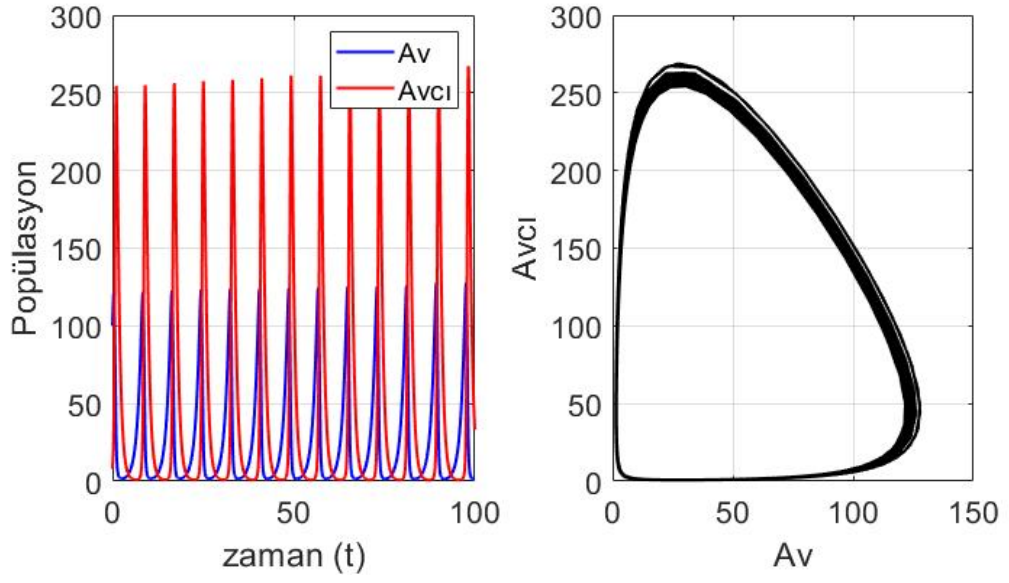
$$(x^*, y^*) = (0, 0), \quad (3.4.1)$$

$$(x^*, y^*) = \left(\frac{d}{c}, \frac{a}{b} \right) \quad (3.4.2)$$

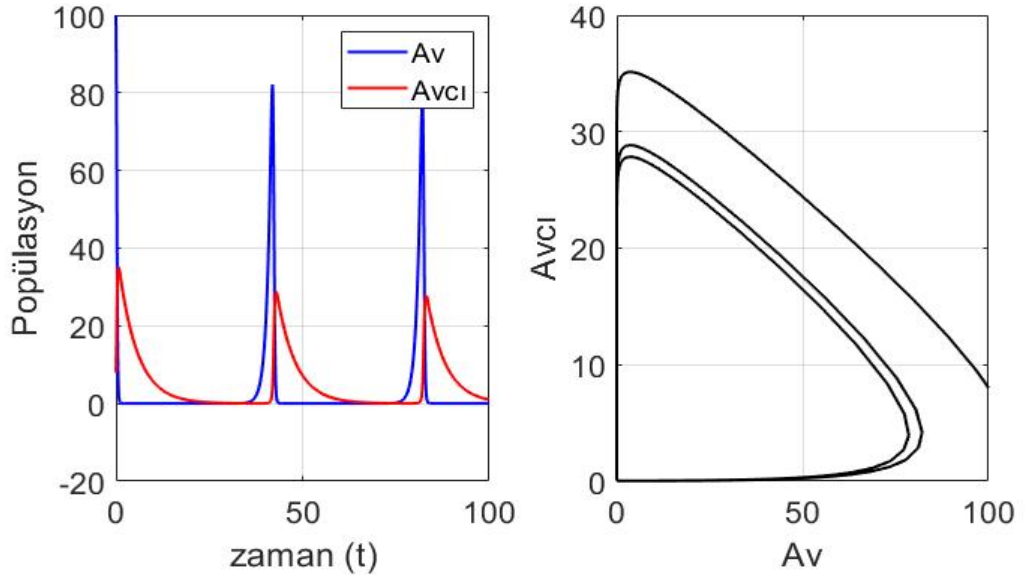
İlk çözüm, her iki popülasyonun da soyu tükenirse, bir dış faktör bunu değiştirenceye kadar neslinin tükenmeye devam edeceğini gösteriyor. İkinci çözüm ise her iki popülasyonun ekosistemde var olma durumudur.

3.5 Kararlılık Analizi

Diferansiyel denklem sistemleri için önemli konulardan biri sistemin sabit noktalarının perturbasyonlara olan kararlılığıdır. Sistem parametrelerinin değişmesi ve başlangıç noktalarının küçük değişimleri çözümleri nasıl etkiler, çözümlerin asimptotik davranışları nasıldır, sistemin periyodik çözümleri var mıdır gibi sorular önem kazanmaktadır. Sistemin analitik çözümleri elde edilerek bu tarz davranışların incelenmesi mümkündür.



Şekil 3.6 Simülasyonun parametre değerleri $a = 0.9, b = 0.02, c = 0.05, d = 1.4$. Başlangıçta av sayısı 0.61 avcı sayısı 254. Avcı yoğunluğu av yoğunluğuna göre fazladır. İlk grafikte sık salınımlar gözlemlenirken ikinci grafikte sarmal bir yapı karşımıza çıkmaktadır.



Şekil 3.7 Simülasyonun parametre değerleri $a = 0.9, b = 0.22, c = 0.055, d = 0.2$. Başlangıçta av sayısı 100 avcı sayısı 34. Av yoğunluğu avcı yoğunluğuna göre fazladır. Her iki grafikte de salınımlar seyrektrir.

Kararlılık analizi, bir dengeden sonsuz derecede uzakta bozulan bir sistemin sonunda ondan uzaklaşıp uzaklaşmayacağını araştırmak için bir yöntemdir (In, n.d.). Eğer model kararlı bir noktaya sahipse çözümlerin genel olarak $t \rightarrow \infty$ için bu kararlı noktalardan birine yaklaşması beklenir. Kararlılık analizi jakobiyen matris kullanılarak yapılır. Jakobiyen matris karakteristik değerleri bulmak için kullanışlı bir yöntem olup vektör hesabında kullanılır. Bu yöntemde matris, fonksiyonun bütün birinci derece kısmi türevlerini içerir.

Sabit noktalar (x^*, y^*) olsun. Sabit nokta civarında pertürbasyon uygulanıp

$$x(t) = x^* + \epsilon x(t), \quad y(t) = y^* + \epsilon y(t), \quad (3.5.1)$$

Taylor teorimi kullanılırsa

$$\frac{dx}{dt} = x \frac{df}{dx}(x^*, y^*) + y \frac{df}{dy}(x^*, y^*) + 0(\epsilon), \quad (3.5.2)$$

$$\frac{dy}{dt} = x \frac{dg}{dx}(x^*, y^*) + y \frac{dg}{dy}(x^*, y^*) + 0(\epsilon), \quad (3.5.3)$$

elde edilir. Kritik nokta civarında sistem yaklaşık olarak lineerdir ($0(\epsilon)$ yok sayıldığında) ve lineerize edilmiş sistem kritik nokta civarında sistemin davranışını belirlemek için analiz edilebilir. O halde $0(\epsilon)$ terimleri yok edilirse sistem

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x}, \quad (3.5.4)$$

şeklinde yazılabilir. Burada $\mathbf{x} = (x, y)$ olup A aşağıdaki gibidir:

$$A = \begin{pmatrix} f_x(x^*, y^*) & f_y(x^*, y^*) \\ g_x(x^*, y^*) & g_y(x^*, y^*) \end{pmatrix}$$

ve çözümler üssel formda

$$\mathbf{x} = (x, y) = r e^{\lambda t}, \quad r \text{ sabit vektör}$$

yazılır. Bu ifade denklem (3.5.4)'de yerine yazılırsa

$$Ax - x' = 0, \quad (3.5.5)$$

$$A r e^{\lambda t} - r \lambda e^{\lambda t} = 0, \quad (3.5.6)$$

$$(A - \lambda I)r = 0, \quad (3.5.7)$$

elde edilir. Bu sistem $\det(A - I\lambda) = 0$ ın sağlanması durumunda aşikar olmayan çözümlere sahiptir. Böylece λ , A matrisinin öz değeridir, bu λ değerinin $(A - I\lambda)x = 0$ yerine koyulmasıyla elde edilen çözümler A matrisinin bu özdeğerine karşılık gelen özvektörleridir.

$$x = ax + by,$$

$$y = cx + dy,$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

Burada $\text{Det}(\lambda I - A) = 0$ ifadesinden

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

olup

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - bc = 0,$$

$$\lambda^2 - \text{tr}(J)\lambda + \text{det}(J) = 0,$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{\text{tr}J}{2} \pm \frac{\sqrt{\text{tr}(J)^2 - 4\text{Det}(J)}}{2}.$$

Bu karakteristik polinomunun bir köküdür. Eğer tüm özdeğerler negatif reel kısma sahipse, sistem sonunda yeterince küçük pertürbasyonlardan sonra dengeye geri dönecektir; tersine, özdeğerlerden herhangi birinin pozitif reel kısmı varsa, sistem her bozulduğunda dengeden uzaklaşacaktır. Burada $\lambda > 0$ ise sistem kararsız, $\lambda < 0$ ise sistem kararlıdır.

Faz düzlemi denklemleri ile bir yörünge boyunca popülasyonun nasıl değiştiğini belirlemek için zamana bağlı denklemlerde değişim yönünü gösteren ok işaretleri ile grafiksel gösterim yapılabilir. λ_1 ve λ_2 , $|A - \lambda I| = 0$ denkleminin kökleridir. Dolayısıyla bu kökler gerçek veya karmaşık sayılar olabilir. Aşağıda λ yani özdeğer durumlarını inceleyelim :

- $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ise genel çözüm:

$x = \alpha_1 r_1 e^{\lambda_1 t} + \alpha_2 r_2 e^{\lambda_2 t}$ olup α_i keyfi sabitler, r_i ise λ_i özdeğerleri ile ilişkili öz vektörleri temsil eder.

- $\lambda_1 = \lambda_2$ ise genel çözüm:

$x = (R_1 + \alpha_1 t r_1) e^{\lambda t}$ elde edilir. Burada r_1 özdeğer vektörü temsil eder, α_1 ise keyfi bir sabiti temsil eder. Ayrıca $R_1, (A - \lambda I)R_1 = \alpha_1 r_1$ i sağlar.

Kritik nokta civarında lokal davranışı $Re(\lambda_1)$ ve $Re(\lambda_2)$ nin işaretleri ile karakterize edilir. Eğer herhangi biri pozitif ise kritik nokta kararsız olur. Çünkü yakınlarda oluşan çözümler zaman içinde üssel olarak büyür. Kararlılık için her iki reel kısmın da negatif olması gerekir. Kritik nokta civarında meydana gelebilecek dinamiksel davranışlar:

- Kararsız düğüm $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$

$$x = \alpha_1 r_1 e^{\lambda_1 t} + \alpha_2 r_2 e^{\lambda_2 t}$$

Oklar zaman geçtikçe oluşan çözümlerin yönünü gösterir. Kritik noktadan herhangi bir sapma çözümü kritik noktadan uzağa taşır bundan dolayı kararsızdır.

- Kararlı düğüm $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$

$$x = \alpha_1 r_1 e^{\lambda_1 t} + \alpha_2 r_2 e^{\lambda_2 t}$$

Tipik faz yörüngeleri şekil 3.8 gibidir. Tüm yaklaşık çözümler kritik noktaya yaklaşır bundan dolayı kararlıdır.

- Eyer nokta $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$ (Kararsız)

$$x = \alpha_1 r_1 e^{\lambda_1 t} + \alpha_2 r_2 e^{\lambda_2 t}$$

r_2 vektörü boyunca oluşan yörüngeler kritik noktaya varır ($\alpha_1 = 0$).

r_1 vektörü boyunca oluşan faz yörüngeleri ($\alpha_2 = 0$) kritik noktayı terk eder ve bu yüzden kararsızdır.

- Spiral Noktalar $\lambda_{1,2} = a \pm ib$

$$x = \alpha_1 r_1 e^{\lambda_1 t} + \alpha_2 r_2 e^{\lambda_2 t} \\ = e^{at} (c_1 \cos(bt) + c_2 \sin(bt)).$$

Burada c_1 ve c_2 sabit vektörlerdir.

Kritik noktaya yakın faz yörüngeleri spiral oluşturur.

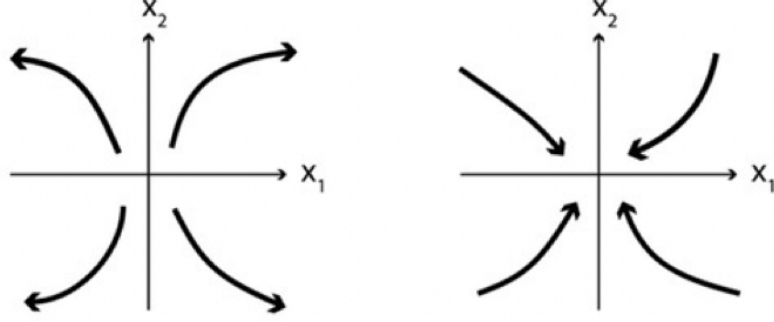
Eğer $Re(\lambda_{1,2}) < 0$ ise çözüm kritik nokta yönünde ilerler. Eğer $Re(\lambda_{1,2}) > 0$ ise çözüm kritik noktadan uzağa spiral çizer.

- Merkez Nokta $\lambda_{1,2} = \pm ib$ $b \in R$ (Nötral kararlı)

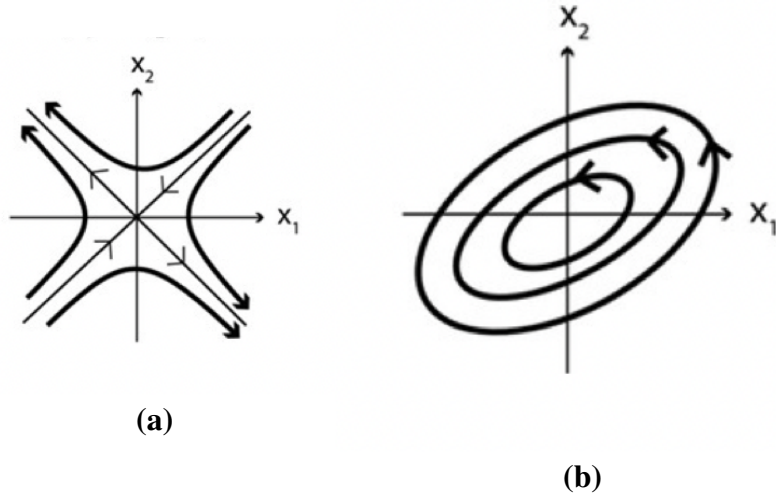
$$x = \alpha_1 r_1 e^{\lambda_1 t} + \alpha_2 r_2 e^{\lambda_2 t}$$

$c_1 \cos(bt) + c_2 \sin(bt)$ olup c_1 ve c_2 sabit vektörlerdir.

Özdeğerler sadece kompleks kısma sahip olduğunda, faz yörüngeleri yerel olarak eliptik şekil çizer. Çözümde küçük sapmalar eklendiğinde, zaman içinde çözüm değişmez. Bu sebeple kritik nokta kararlıdır.



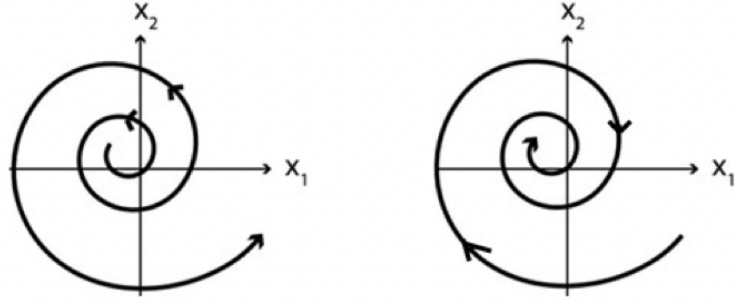
Şekil 3.8 $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$ ise kararsız düğüm grafiği ve $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$ ise kararlı düğüm grafiği (Chou & Friedman, 2016)



Şekil 3.9 (a) $\lambda_1 > 0$ ve $\lambda_2 < 0$ ise eyer nokta (b) $\lambda_1 = i\beta$ ise merkez noktası (Chou & Friedman, 2016) ile gösterilmiştir.

Lotka volterra denkleminin kararlılık analizine bakacak olursak jakobiyen matris aşağıdaki gibidir:

$$J(x^*, y^*) = \begin{pmatrix} a - by^* & -bx^* \\ cy^* & cx^* - d \end{pmatrix},$$



Şekil 3.10 $\lambda_1 = a + i\beta, (a > 0)$ ise kararsız spiral ve $\lambda_1 = a + i\beta, (a < 0)$ ise kararlı spiral grafiği (Chou & Friedman, 2016) ile gösterilmiştir.

Bu matris $(0,0)$ durumunda değerlendirildiğinde:

$$J(0,0) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -d \end{pmatrix},$$

yazılabilir ve özdeğerleri; $\lambda_1 = a$ ve $\lambda_2 = -d$ dir. Burada a ve d her zaman sıfırdan büyük olacağı için özdeğerlerin işareti her zaman farklı olacaktır. Dolayısıyla orijindeki sabit nokta bir eyer noktasıdır.

Matris $(\frac{d}{c}, \frac{a}{b})$ noktasında değerlendirildiğinde:

$$J(\frac{d}{c}, \frac{a}{b}) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{bd}{c} \\ \frac{ac}{b} & 0 \end{pmatrix},$$

yazılır ve bu matrisin özdeğerleri; $\lambda_1 = -i\sqrt{ad}$ ve $\lambda_2 = i\sqrt{ad}$ dir. Özdeğerler hem tamamen hayali hem de birbirine eşlenik olduğundan, bu sabit nokta ya yerel yakınlardaki kapalı yörüngeler için bir merkezdir.

4. AV AVCI İLİŞKİSİ ÜZERİNE YENİ BİR MODEL

Av-avcı ilişkilerinde iki veya daha fazla türün etkileşimleri birçok araştırmacının ilgi konusu olmuştur. Son zamanlarda, bir av ve iki avcıya sahip birkaç model ortaya çıktı ve derin araştırmalar yapıldı. Bu bağlamda, her iki avcının da genellikle eşit özelliklere sahip olduğu ve her ikisinde aynı avdan beslendiği kabul edildi (M. Liu & Mandal, 2015; Savitri, Suryanto, Kusumawinahyu, et al., 2019; Sayekti, Malik, & Aldila, 2017). Öte yandan bazı modellerde avcılardan biri farklı özelliklere sahip olabilir. Örneğin, bir avcı hem avı hem de diğer avcıyı besleyen süper bir avcı olabilir (Mbava, Mugisha, & Gonsalves, 2017). Aslında ekolojik ve biyolojik sistemler sadece iki tür popülasyonla sınırlı değildir. Bu karmaşık etkileşimler, ekolojik toplulukların yapılanmasında önemli bir yere sahiptir.

Bu sistemler için diğer bir genel görüş ise bir avcının kendi bölgesini avlanma ve diğer avcılarının varlığı için belirlediği yönündedir. Aynı alanda birden fazla avcının bulunması bu avcılar arasında bir rekabete yol açar (Arditi, Abillon, & Da Silva, 1978; Bodine & Yust, 2017; Persson, 1991). Buna örnek olarak S.B.Hsu ve arkadaşlarının çalışmasında bir av ve iki avcıdan oluşan üç türlü bir modelde avcılar zamanla yok olma eğilimindedir (Hsu, Hubbell, & Waltman, 1978). B.Dubey ve R.K.Upadhyay ise bir av ve iki avcı modelinin neslinin tükenmesi ve devamlılığı için koşulları analiz etti (Dubey & Upadhyay, 2004). Ayrıca korkunun rolü bir av-iki avcı modelinde (Mukherjee, 2021) Debasis Mukherjee tarafından incelenmiştir. Bir av iki avcı sisteminde sadece birine odaklanan daha fazla çalışma bulunabilir (Alebraheem & Hasan, 2014; Q. Liu & Jiang, 2019; Llibre & Xiao, 2014).

Ekoloji ve biyolojideki çeşitli bileşenler, matematiksel yöntemlerle etkili bir şekilde tahmin edilebilir. Bu çok önemli bileşenlerden biri türler için etkileşim işlevidir. Literatürde belirli etkileşim biçimlerine sahip birçok fonksiyonel form türleri geliştirilmiş olmasına rağmen en popüler fonksiyonel işlev ise doğrusal olmayan Holling tipi fonksiyonel tepkiler olup gerçek dünya olaylarının modellenmesinde popüler bir seçim olmuştur (Djilali & Ghanbari, 2021; Holling, 1959b; Jeschke et al., 2021). Holling tip II sistemde av tüketimi oranı, av yoğunluğu ile orantılı olduğunu varsaydığı için modellerde daha yaygın olarak kullanılır.

Genellikle av ve avcı türlerinin büyüme oranlarında avcının büyüme hızı mevcut av yoğunlukları tarafından belirlenir. Avcı yoğunluğunun o andaki avın yoğunluğuna bağlı olabileceği düşüncesi ne kadar doğru bir varsayım gibi gözüksede avcı yoğunluğunu avın hem şimdi hem de geçmişteki oranlarından etkilendiği yaklaşımı daha gerçekçi bir varsayımdır (Ali, Raut, Sarkar, & Ghosh, 2021; Cavani & Farkas, 1994; Ghosh et al., 2021; Sahoo & Poria, 2019). Bu nedenle, av-avcı etkileşimlerinin dinamiklerine silikleşen bellek faktörü eklenebilir. Bu yaklaşımı kullanarak, hafızanın rolünü etkili bir şekilde keşfedebiliriz.

Tür etkileşimlerini kritik olarak etkileyen bir diğer önemli faktör avcılar arası rekabettir. Türler için mevcut kaynaklar genellikle sınırlıdır ve bu nedenle aynı bölgede yaşayan avcılar rekabet etmek zorunda kalacaklardır. Öyleyse, rekabetçi avcılar sistemdeki başka bir belirleyici olabilir ve sıklıkla gözlemlenebilir (Arribas et al., 2018; Chesson & Kuang, 2008; Savitri et al., 2019).

4.1 Model Tanımı

Bu bölümde Lotka Volterra modeline dayanan fakat daha gerçekçi sonuçlar elde etmek için Lotka Volterra modelinden farklı olarak dinamiklere avcılar arası rekabet ve bir avcıya hafıza etkisi eklediğimiz matematiksel modelimizi inceleyeceğiz. Lotka volterra av-avcı ilişkisi modelindeki varsayımlarda av popülasyonunda üstel büyüme olduğu varsayılırken biz modelimizde sınırsız büyüme olamayacağı için lojistik büyümeyi modele dahil ediyoruz. Bir av iki avcı üzerine oluşturduğumuz modelde avcılardan birinde hafıza etkisi bulunmaktadır. Hafıza etkisini odak noktası olarak görmemizin sebebi ise iki avcı tek bir av ile beslenmektedir bundan dolayı avcılarının yoğunluğu av yoğunluğuna bağlıdır fakat avcılarının yoğunluğu hem şimdiki av yoğunluğundan hem de geçmişteki av yoğunluğundan etkilendiği için hafıza etkisinin rolü büyüktür. Aynı zamanda sınırlı besinden dolayı avcılar arasında rekabet söz konusudur. Yukarıda da söz ettiğimiz gibi diğer türde işlevsel tepkiler mümkün olsa da, av azsa avlanma hızının av yoğunluğuyla orantılı olduğu varsayımına dayanan Holling tip II tepki fonksiyonunu kullanıyoruz. Bir av-iki avcı modeli aşağıdaki varsayımlarla ele alınmaktadır:

- Her iki avcıda aynı bölgede yaşamaktadır.

- Avcılardan birinde hafıza etkisi vardır. Yani yoğunluğu hem mevcut hem de geçmiş av yoğunluğu ile değişir.
- Her iki avcıda aynı av ile beslendiği için avcılar arasında rekabet vardır.
- Holling tip II tepki fonksiyonu kullanılmıştır.
- Avcıların yokluğunda avlar, çevresel taşıma kapasitesini içeren lojistik büyümeye sahiptir.

Çevresel taşıma kapasitesi popülasyonun ulaşabileceği maksimum büyüklüğüdür. Popülasyon için bir üst sınır diyebiliriz. Yani büyüme, besin gibi kaynaklarla sınırlıysa, bu kaynaklar için rekabet arttıkça popülasyonun üstel büyümesi yavaşlamaya başlar ve devreye taşıma kapasitesi girer. Popülasyon maksimum büyüklüğüne ulaştığında saturasyona uğrar.

Rekabetin olabilmesi için sınırlı kaynak olması gerekmektedir. Modelimizde avcılarının ava göre sayısı fazla olduğu için sınırlı sayıdaki av için rekabet ederler. Diğerine göre üstün olan avcı hayatta kalır.

Avcılardan biri hafıza etkisine sahip olduğu için avcılarının yoğunluğu şimdiki zamanda ve geçmişteki av yoğunluğu ile ilişkilidir. Hafıza etkisini dahil etmek için sürekli yoğunluk fonksiyonu kullanılır. Hafıza etkisi ile ilgili Farkas (A. Farkas, Farkas, & Szabó, 1988; M. Farkas, 1984), MacDonald (MacDonald, 1976, 1977) tarafından sunulan fikirlerin ardından hafıza etkisi terimi, yoğunluk fonksiyonu R aracılığıyla modele dahil edilebilir. Burada, avın şimdiki değeri, geçmişteki av yoğunluğunun zaman ortalaması ile değiştirilir:

$$R(t) = \int_{-\infty}^t G(t')R(t-t') dt'. \quad (4.1.1)$$

Burada $R : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ olasılık yoğunluk fonksiyonudur ve $R(s) \geq 0 \quad s \in [0, \infty)$ $\int_0^{\infty} R(s) ds = 1$. Temel bir olasılık yoğunluk fonksiyonu şu şekilde yazılabilir:

$$R(t) = \omega e^{-\omega t}, \quad (4.1.2)$$

Burada ω geçmiş etkinin ölçüsüdür (Cavani & Farkas, 1994). Yani daha küçük ω daha büyük zaman aralığı için geçmiş etkinin varlığını ima eder (Cavani & Farkas, 1994;

Ghosh et al., 2021; Sahoo & Poria, 2019). Denklem 4.1.1 yola çıkarak aşağıdaki diferansiyel denklem elde edilir.

$$\frac{dR(t)}{dt} = \omega(G(t) - R(t)), \quad (4.1.3)$$

Bir av-iki avcı içeren dört bileşenli modeli şu şekilde tanımlıyoruz:

$$\frac{dG}{dt} = \rho G \left(1 - \frac{G}{K}\right) - \frac{\beta_1 G Q_1}{\alpha_1 + G} - \frac{\beta_2 G Q_2}{\alpha_2 + G}, \quad (4.1.4)$$

$$\frac{dQ_1}{dt} = \frac{\epsilon_1 \beta_1 G Q_1}{\alpha_1 + G} - d_1 Q_1 - c_1 Q_1 Q_2, \quad (4.1.5)$$

$$\frac{dQ_2}{dt} = \frac{\epsilon_2 \beta_2 R Q_2}{\alpha_2 + R} - d_2 Q_2 - c_2 Q_1 Q_2, \quad (4.1.6)$$

$$\frac{dR}{dt} = \omega(G - R), \quad (4.1.7)$$

Çizelge 4.1 Model (4.1.4)-(4.1.7) için değişken ve parametrelerin tanımı.

Değişken	Tanım
G	Av popülasyonu yoğunluğu
Q_1	Birinci avcı popülasyon yoğunluğu
Q_2	İkinci avcı popülasyon yoğunluğu
R	Hafıza etkisi
Parametre	Tanım
ρ	Avın büyüme oranı
K	Çevresel taşıma kapasitesi
β_1, β_2	Av ile avcılarının karşılaşma oranı
α_1, α_2	Yarı doygunluk sabitleri
ϵ_1, ϵ_2	Sırasıyla birinci avcının ve ikinci avcının avı tüketme oranı
d_1, d_2	Sırasıyla birinci avcı ve ikinci avcının ölüm oranları
c_1, c_2	Avcıların rekabet oranı
ω	Geçmişin etkisi

4.1.1 Modelin Boyutsuz Formu

Boyutsal olarak homojen bir denklemin her bir terimini değişken ve sabitlerden oluşan bir gruba böldüğümüzde, denklemi boyutsuzlaştırmış oluruz. Böyle

denklemlere boyutsuz denklem denir. Boyutsuzlaştırma işlemi yapmamızdaki temel amaçlardan biri parametre sayısını azaltarak zamandan tasarruf yapmaktır. Böylece işlemler daha kolaylıkla yapılarak anlaşılması kolay hale gelir, daha az simülasyon ihtiyacı olur.

Modelin parametre sayısını azaltmak için yeni boyutsuz değişkenler şu şekilde tanıtlır:

$$G = a_1 G', \quad Q_1 = a_2 Q'_1, \quad Q_2 = a_3 Q'_2, \quad R = a_4 R', \quad t = \mu t' \quad (4.1.8)$$

Verilen değişkenler yerine yazılırsa:

$$\begin{aligned} \frac{a_1}{\mu} \cdot \frac{dG'}{dt'} &= \rho a_1 G' \left(1 - \frac{a_1}{K} G'\right) - \frac{\beta_1 a_2 a_1 G' Q'_1}{\alpha_1 + a_1 G'} - \frac{\beta_2 a_1 G' a_3 Q'_2}{\alpha_2 + a_1 G'} \\ \frac{a_2}{\mu} \frac{dQ'_1}{dt'} &= \frac{\epsilon_1 \beta_1 a_1 G' a_2 Q'_1}{\alpha_1 + a_1 G'} - d_1 a_2 Q'_1 - c_1 a_2 a_3 Q'_1 Q'_2 \\ \frac{a_3}{\mu} \cdot \frac{dQ'_2}{dt'} &= \frac{\epsilon_2 \beta_2 a_4 R' a_3 Q'_2}{\alpha_2 + a_4 R'} - d_2 a_3 Q'_2 - c_2 a_2 a_3 Q'_1 Q'_2 \\ \frac{a_4}{\mu} \cdot \frac{dR'}{dt'} &= \omega (a_1 G' - a_4 R') \end{aligned}$$

düzenlemelerin ardından

$$\begin{aligned} \frac{dG'}{dt'} &= \mu \rho G' \left(1 - \frac{a_1}{K} G'\right) - \frac{\mu \beta_1 a_2}{a_1} \cdot \frac{G' Q'_1}{\frac{\alpha_1}{a_1} + G'} - \frac{\mu \beta_2 a_3}{a_1} \cdot \frac{G' Q'_2}{\frac{\alpha_2}{a_1} + G'} \\ \frac{dQ'_1}{dt'} &= \frac{\epsilon_1 \beta_1 \mu G' Q'_1}{\frac{\alpha_1}{a_1} + G'} - \mu d_1 Q'_1 - c_1 a_3 \mu Q'_1 Q'_2 \\ \frac{dQ'_2}{dt'} &= \frac{\mu \epsilon_2 \beta_2 R' Q'_2}{\frac{\alpha_2}{a_1} + R'} - d_2 \mu Q'_2 - c_2 \mu a_2 Q'_1 Q'_2 \\ \frac{dR'}{dt'} &= \mu \omega \left(\frac{a_1}{a_4} G' - R'\right) \end{aligned}$$

elde edilir.

Yeni değişkenleri göz önünde bulundurarak yeni parametrelerimiz:

$$a_1 = a_4 = K \quad \mu = \frac{1}{\rho} \quad a_2 = \frac{K \rho}{\beta_1} \quad a_3 = \frac{K \rho}{\beta_2}$$

$$\begin{aligned} \alpha_i &= \frac{\alpha_i}{K}, \quad \beta_i = \frac{\epsilon_i \beta_i}{\rho}, \quad d_i = \frac{d_i}{\rho}, \quad i = 1, 2, \\ c_1 &= \frac{c_1 K}{\beta_2}, \quad c_2 = \frac{c_2 K}{\beta_2}, \quad \omega = \frac{\omega}{\rho}, \end{aligned}$$

Yeni değişkenlerimiz:

$$G = KG', \quad Q_1 = \frac{K\rho}{\beta_1}Q'_1, \quad Q_2 = \frac{K\rho}{\beta_2}Q'_2, \quad R = KR', \quad t = \frac{1}{\rho}t'$$

Parametreler ve değişkenler yerine yazılırsa boyutsuz modelimizi elde ederiz. Sade bir görünüm için bütün ' kaldırırsak boyutsuz modelimiz:

$$\frac{dG}{dt} = G(1 - G) - \frac{GQ_1}{\alpha_1 + G} - \frac{GQ_2}{\alpha_2 + G}, \quad (4.1.9)$$

$$\frac{dQ_1}{dt} = \frac{\beta_1 G Q_1}{\alpha_1 + G} - d_1 Q_1 - c_1 Q_1 Q_2, \quad (4.1.10)$$

$$\frac{dQ_2}{dt} = \frac{\beta_2 R Q_2}{\alpha_2 + R} - d_2 Q_2 - c_2 Q_1 Q_2, \quad (4.1.11)$$

$$\frac{dR}{dt} = \omega(G - R) \quad (4.1.12)$$

4.2 Modelin Sabit Noktaları

Modelin (4.1.9)-(4.1.12) beş sabit noktası vardır. Bunlar, bütün değişkenlerin yok olduğu durum, bütün değişkenlerin var olduğu durum, birinci avcının türünün yok olması, ikinci avcı türünün yok olması ve her iki avcı türünün de yok olmasıdır. Burada açıkça görülüyor ki bütün değişkenlerin yok olduğu durum her zaman tüm parametre değerleri için mevcuttur.

- Tüm türlerin yok olduğu durum: $E_0 = (0, 0, 0, 0)$,
- Her iki avcı türünde yok olduğu durum: $E_1 = (1, 0, 0, 1)$ Denklem (4.1.12) den $G^* = R^*$ elde edilir ve denklem (4.1.9) den $G^*(1 - G^*) = 0$ buradan $G^* = 1$
- Birinci avcı türünün yok olduğu durum: $E_2 = (G_*^{(1)}, 0, Q_{2*}^{(1)}, R_*^{(1)})$, $Q_*^{(1)} = 0$ ise denklem (4.1.9) ve (4.1.11)

$$G_*^{(1)}(1 - G_*^{(1)}) - \frac{G_*^{(1)}Q_{2*}^{(1)}}{\alpha_2 + G_*^{(1)}} = 0, \quad (4.2.1)$$

$$\frac{\beta_2 G_*^{(1)}Q_{2*}^{(1)}}{\alpha_2 + G_*^{(1)}} - d_2 Q_{2*}^{(1)} = 0, \quad (4.2.2)$$

Denklem (4.2.2) te $Q_*^{(2)}$ leri sadeleştirirsek :

$$\frac{\beta_2 G_*^{(1)}}{\alpha_2 + G_*^{(1)}} = d_2, \quad (4.2.3)$$

$$\beta_2 G_*^{(1)} = d_2 \alpha_2 + d_2 G_*^{(1)}, \quad (4.2.4)$$

$$(\beta_2 - d_2) G_*^{(1)} = d_2 \alpha_2, \quad (4.2.5)$$

$$G_*^{(1)} = \frac{d_2 \alpha_2}{\beta_2 - d_2} \quad \beta_2 \neq d_2. \quad (4.2.6)$$

Denklem (4.2.1) de G_* leri sadeleştirip denklem (4.2.6) de bulduğumuz G_* burada yerine yazarsak :

$$Q_{2_*}^{(1)} = \frac{G_*^{(1)}(1 - G_*^{(1)})(\alpha_2 + G_*^{(1)})}{G_*^{(1)}}, \quad (4.2.7)$$

$$Q_{2_*}^{(1)} = (1 - G_*^{(1)})(\alpha_2 + G_*^{(1)}), \quad (4.2.8)$$

$$Q_{2_*}^{(1)} = \left(1 - \frac{d_2 \alpha_2}{\beta_2 - d_2}\right) \left(\alpha_2 + \frac{d_2 \alpha_2}{\beta_2 - d_2}\right), \quad (4.2.9)$$

$$Q_{2_*}^{(1)} = \frac{\beta_2 \alpha_2 (\beta_2 - d_2 - d_2 \alpha_2)}{(\beta_2 - d_2)^2}. \quad (4.2.10)$$

Dolayısıyla

$$E_2 = \left(\frac{d_2 \alpha_2}{\beta_2 - d_2}, 0, \frac{\beta_2 \alpha_2 (\beta_2 - d_2 - d_2 \alpha_2)}{(\beta_2 - d_2)^2}, \frac{d_2 \alpha_2}{\beta_2 - d_2} \right). \quad (4.2.11)$$

- İkinci avcı türünün yok olduğu durum: $E_3 = (G_*^{(2)}, Q_{1_*}^{(2)}, 0, R_*^{(2)})$, $Q_2 = 0$ ise denklem (4.1.9) ve (4.1.10)

$$G_*^{(1)}(1 - G_*^{(1)}) - \frac{G_*^{(1)} Q_*^{(1)}}{\alpha_1 + G_*^{(1)}} = 0, \quad (4.2.12)$$

$$\frac{\beta_1 G_*^{(1)} Q_*^{(1)}}{\alpha_1 + G_*^{(1)}} - d_1 Q_*^{(1)} = 0. \quad (4.2.13)$$

$$(4.2.14)$$

Denklem (4.2.12) den $G_*^{(1)}$ leri denklem (4.2.13) den $Q_*^{(1)}$ leri sadeleştirirsek denklem (4.2.13):

$$\frac{\beta_1 G_*^{(1)}}{\alpha_1 + G_*^{(1)}} = d_1,$$

$$\beta_1 G_*^{(1)} = d_1 \alpha_1 + d_1 G_*^{(1)},$$

$$G_*^{(1)} = \frac{d_1 \alpha_1}{\beta_1 - d_1} \quad \beta_1 \neq d_1.$$

Burada bulduğumuz $G_*^{(1)}$ 1 Denklemin (4.2.12) de yerine yazarsak

$$\begin{aligned} Q_*^{(1)} &= (1 - G_*^{(1)})(\alpha_1 + G_*^{(1)}), \\ Q_*^{(1)} &= \left(1 - \frac{d_1\alpha_1}{\beta_1 - d_1}\right)\left(\alpha_1 + \frac{d_1\alpha_1}{\beta_1 - d_1}\right), \\ Q_*^{(1)} &= \frac{\alpha_1\beta_1(\beta_1 - d_1 - d_1\alpha_1)}{(\beta_1 - d_1)^2}. \end{aligned}$$

Dolayısıyla

$$E_3 = \left(\frac{d_1\alpha_1}{\beta_1 - d_1}, \frac{\alpha_1\beta_1(\beta_1 - d_1 - d_1\alpha_1)}{(\beta_1 - d_1)^2}, 0, \frac{d_1\alpha_1}{\beta_1 - d_1} \right). \quad (4.2.15)$$

- Tüm türlerin var olduğu durum: $E_4 = (G^*, Q_1^*, Q_2^*, R^*)$

4.2.1 Tüm Türlerin Var Olduğu Sabit Nokta

$E_4 = (G^*, Q_1^*, Q_2^*, R^*)$ durumunu detaylı bir şekilde inceleyelim. Denklem (4.1.12) den $G^* = R^*$ olduğunu biliyoruz. Buradan sırasıyla denklem (4.1.9),(4.1.10),(4.1.11) aşağıdaki gibidir:

$$G_*^{(1)}(1 - G_*^{(1)}) - \frac{G_*^{(1)}Q_*^{(1)}}{\alpha_1 + G_*^{(1)}} - \frac{G_*^{(1)}Q_*^{(2)}}{\alpha_2 + G_*^{(1)}} = 0, \quad (4.2.16)$$

$$\frac{\beta_1 G_*^{(1)} Q_*^{(1)}}{\alpha_1 + G_*^{(1)}} - d_1 Q_*^{(1)} - c_1 Q_*^{(1)} Q_*^{(2)} = 0, \quad (4.2.17)$$

$$\frac{\beta_2 G_*^{(1)} Q_*^{(2)}}{\alpha_2 + G_*^{(1)}} - d_2 Q_*^{(2)} - c_2 Q_*^{(1)} Q_*^{(2)} = 0. \quad (4.2.18)$$

Denklem (4.2.16) den $G_*^{(1)}$ leri, denklem (4.2.17) den $Q_*^{(1)}$ leri ve denklem (4.2.18) dan $Q_*^{(2)}$ leri sadeleştirirsek elde edeceğimiz denklem sistemi:

$$(1 - G_*^{(1)}) - \frac{Q_*^{(1)}}{\alpha_1 + G_*^{(1)}} - \frac{Q_*^{(2)}}{\alpha_2 + G_*^{(1)}} = 0 \quad (4.2.19)$$

$$\frac{\beta_1 G_*^{(1)}}{\alpha_1 + G_*^{(1)}} - d_1 - c_1 Q_*^{(2)} = 0 \quad (4.2.20)$$

$$\frac{\beta_2 G_*^{(1)}}{\alpha_2 + G_*^{(1)}} - d_2 - c_2 Q_*^{(1)} = 0 \quad (4.2.21)$$

Denklem (4.2.20) den $Q_*^{(2)}$ ve denklem (4.2.21) den $Q_*^{(1)}$ çekilirse :

$$Q_2^* = \frac{1}{c_1} \left(\frac{\beta_1 G^*}{\alpha_1 + G^*} - d_1 \right) \quad \text{ve} \quad Q_1^* = \frac{1}{c_2} \left(\frac{\beta_2 G^*}{\alpha_2 + G^*} - d_2 \right).$$

Burada bulduğumuz $Q_*^{(1)}$ ve $Q_*^{(2)}$ yi denklem (4.2.19) de yerine yazarsak:

$$1 - G_*^{(1)} - \frac{G_*^{(1)}(\beta_2 - d_2) - d_2\alpha_2}{c_2(\alpha_1 + G_*^{(1)})(\alpha_2 + G_*^{(1)})} - \frac{G_*^{(1)}(\beta_1 - d_1) - d_1\alpha_1}{c_1(\alpha_1 + G_*^{(1)})(\alpha_2 + G_*^{(1)})} = 0,$$

$$c_1c_2(1 - G_*^{(1)})(\alpha_1 + G_*^{(1)})(\alpha_2 + G_*^{(1)}) - c_1[G_*^{(1)}(\beta_2 - d_2) - d_2\alpha_2] \\ - c_2[G_*^{(1)}(\beta_1 - d_1) - d_1\alpha_1] = 0,$$

$$c_1c_2(1 - G_*^{(1)})(\alpha_1 + G_*^{(1)})(\alpha_2 + G_*^{(1)}) - G_*^{(1)}[c_1(\beta_2 - d_2) + c_2(\beta_1 - d_1)] \\ + c_1d_2\alpha_2 + c_2d_1\alpha_1 = 0,$$

olup burada

$$e_1 = c_1(\beta_2 - d_2) + c_2(\beta_1 - d_1),$$

$$e_2 = c_1d_2\alpha_2 + c_2d_1\alpha_1,$$

$$e_3 = c_1c_2,$$

ve

$$(1 - G_*^{(1)})(\alpha_1 + G_*^{(1)})(\alpha_2 + G_*^{(1)}) = -G_*^{(3)} + G_*^{(2)}(1 - \alpha_1 - \alpha_2) \\ + G_*^{(1)}(\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_1\alpha_2) + \alpha_1\alpha_2,$$

yoluyla

$$e_4 = 1 - \alpha_1 - \alpha_2,$$

$$e_5 = \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_1\alpha_2,$$

$$e_6 = \alpha_1\alpha_2,$$

dersek yeni denklem sistemimiz:

$$e_3(-G_*^{(3)} + e_4G_*^{(2)} + e_5G_*^{(1)} + e_6) - e_1G_*^{(1)} + e_2 = 0, \\ -e_3G_*^{(3)} + e_3e_4G_*^{(2)} + e_3e_5G_*^{(1)} + e_3e_6 - e_1G_*^{(1)} + e_2 = 0, \\ G_*^{(3)} - e_4G_*^{(2)} - e_5G_*^{(1)} - e_6 + \frac{e_1}{e_3}G_*^{(1)} - \frac{e_2}{e_3} = 0, \\ G_*^{(3)} - e_4G_*^{(2)} + \left(\frac{e_1}{e_3} - e_5\right)G_*^{(1)} - \left(\frac{e_2}{e_3} + e_6\right) = 0.$$

Burada

$$f_0 = -e_4 \quad f_1 = \frac{e_1}{e_3} - e_5 \quad \text{ve} \quad f_2 = -\left(\frac{e_2}{e_3} + e_6\right),$$

denirse

$$G^{*3} + f_0 G^{*2} + f_1 G^* + f_2 = 0, \quad (4.2.22)$$

yazılabilir. Böylece bütün türlerin var olduğu durum

$$E_4 = \left(G^*, \frac{G^*(\beta_2 - d_2) - d_2 \alpha_2}{c_2(\alpha_2 + G^*)}, \frac{G^*(\beta_1 - d_1) - d_1 \alpha_1}{c_1(\alpha_1 + G^*)}, G^* \right). \quad (4.2.23)$$

Cardano teoremine göre denklem (4.2.22) ün çözümü:

$$\sqrt[3]{\left(\frac{-b^3}{27a^3} + \frac{bc}{6a^2} - \frac{d}{2a}\right) + \sqrt{\left(\frac{-b^3}{27a^3} + \frac{bc}{6a^2} - \frac{d}{2a}\right)^2 + \left(\frac{c}{3a} - \frac{b^2}{9a^2}\right)^3}} +$$

$$\sqrt[3]{\left(\frac{-b^3}{27a^3} + \frac{bc}{6a^2} - \frac{d}{2a}\right) - \sqrt{\left(\frac{-b^3}{27a^3} + \frac{bc}{6a^2} - \frac{d}{2a}\right)^2 + \left(\frac{c}{3a} - \frac{b^2}{9a^2}\right)^3}} - \frac{b}{3a}$$

$$G^* = -\frac{1}{3} \left(f_0 + C + \frac{p}{C} \right)$$

$$C = \left(\frac{q + \sqrt{q^2 - 4p^3}}{2} \right)^{1/3},$$

$$p = f_0^2 - 3f_1, \quad q = 2f_0^3 - 9f_0f_1 + 27f_2.$$

4.3 Kararlılık Analizi

(4.1.9)-(4.1.12) ile tanımlanan modelin yerel kararlılığı, lineerleştirme argümanı ile araştırılabilir. $G = G^* + \epsilon G'$, $Q_1 = Q_1^* + \epsilon Q_1'$, $Q_2 = Q_2^* + \epsilon Q_2'$ ve $R = R^* + \epsilon R'$ ($\epsilon \ll 1$) boyutsuz modelde yerine yazılır

$$\frac{d(G^* + \epsilon G')}{dt} = (G^* + \epsilon G')(1 - G^* - \epsilon G') - \frac{(G^* + \epsilon G')(Q_1^* + \epsilon Q_1')}{\alpha_1 + G^* + \epsilon G'} -$$

$$\frac{(G^* + \epsilon G')(Q_2^* + \epsilon Q_2')}{\alpha_2 + G^* + \epsilon G'}.$$

Buradan $\epsilon^2 \rightarrow 0$ ve

$$\frac{A}{B + \epsilon} = \frac{A}{B} - \frac{A\epsilon}{B^2}$$

varsayımları göz önüne alınarak

$$\frac{dG^*}{dt} + \epsilon \frac{dG'}{dt} = G^* - G^{*2} - \epsilon G^* G' + \epsilon G' - \epsilon G^* G' - \epsilon^2 G'^2$$

$$- \frac{G^* Q_1^* + \epsilon G^* Q_1' + \epsilon Q_1^* G' + \epsilon^2 G' Q_1'}{\alpha_1 + G^* + \epsilon G'} \quad (4.3.1)$$

$$- \frac{(G^* Q_2^* + \epsilon G^* Q_2' + \epsilon Q_2^* G' + \epsilon^2 G' Q_2')}{\alpha_2 + G^* + \epsilon G'},$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \epsilon \frac{dG'}{dt} &= G^* - G^{*2} + \epsilon(-2G^* + 1)G' - \frac{G^*Q_1^*}{\alpha_1 + G^* + \epsilon G'} \\ &\quad - \frac{\epsilon G^*Q_1'}{\alpha_1 + G^* + \epsilon G'} - \frac{\epsilon Q_1^*G'}{\alpha_1 + G^* + \epsilon G'} - \frac{G^*Q_2^*}{\alpha_2 + G^* + \epsilon G'} \\ &\quad - \frac{\epsilon G^*Q_2'}{\alpha_2 + G^* + \epsilon G'} - \frac{\epsilon Q_2^*G'}{\alpha_2 + G^* + \epsilon G'}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \epsilon \frac{dG'}{dt} &= G^* - G^{*2} - \epsilon(-2G^* + 1)G' - \frac{G^*Q_1^*}{\alpha_1 + G^*} + \frac{G^*Q_1^*\epsilon G'}{(\alpha_1 + G^*)^2} - \\ &\quad \frac{\epsilon G^*Q_1'}{\alpha_1 + G^*} + \frac{\epsilon G^*Q_1'\epsilon G'}{(\alpha_1 + G^*)^2} - \frac{\epsilon Q_1^*G'}{\alpha_1 + G^*} + \frac{\epsilon Q_1^*G'\epsilon G'}{(\alpha_1 + G^*)^2} - \\ &\quad \frac{G^*Q_2^*}{\alpha_2 + G^*} + \frac{G^*Q_2^*\epsilon G'}{(\alpha_2 + G^*)^2} + \frac{\epsilon G^*Q_2'}{\alpha_2 + G^*} + \frac{\epsilon G^*Q_2'\epsilon G'}{(\alpha_2 + G^*)^2} - \\ &\quad \frac{\epsilon Q_2^*G'}{\alpha_2 + G^*} + \frac{\epsilon Q_2^*G'\epsilon G'}{(\alpha_2 + G^*)^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \epsilon \frac{dG'}{dt} &= G^* - G^{*2} - \frac{G^*Q_1^*}{\alpha_1 + G^*} - \frac{G^*Q_2^*}{\alpha_2 + G^*} + \epsilon(-2G^* + 1)G' + \\ &\quad \epsilon \frac{G^*Q_1^*}{(\alpha_1 + G^*)^2}G' - \epsilon \frac{G^*Q_1'}{\alpha_1 + G^*} - \epsilon \frac{Q_1^*G'}{\alpha_1 + G^*} + \epsilon \frac{G^*Q_2^*}{(\alpha_2 + G^*)^2}G' \\ &\quad - \epsilon \frac{G^*}{\alpha_2 + G^*}Q_2' - \epsilon \frac{Q_2^*G'}{\alpha_2 + G^*}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{dG'}{dt} &= \left[-2G^* + 1 - \frac{\alpha_1 Q_1^*}{(\alpha_1 + G^*)^2} - \frac{\alpha_2 Q_2^*}{(\alpha_2 + G^*)^2} \right] G' \\ &\quad - \frac{G^*}{\alpha_1 + G^*}Q_1' - \frac{G^*}{\alpha_2 + G^*}Q_2' + 0R'. \end{aligned} \quad (4.3.2)$$

Diğer yandan

$$\begin{aligned} \frac{d(Q_1^* + \epsilon Q_1')}{dt} &= \frac{\beta_1(G^* + \epsilon G')(Q_1^* + \epsilon Q_1')}{\alpha_1 + G^* + \epsilon G'} - d_1(Q_1^* + \epsilon Q_1') \\ &\quad - c_1(Q_1^* + \epsilon Q_1')(Q_2^* + \epsilon Q_2'), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dQ_1^*}{dt} + \epsilon \frac{dQ_1'}{dt} &= \frac{\beta_1(G^*Q_1^* + \epsilon G^*Q_1' + \epsilon G'Q_1^* + \epsilon^2 G'Q_1')}{\alpha_1 + G^* + \epsilon G'} \\ &\quad - d_1Q_1^* - d_1\epsilon Q_1' - c_1(Q_1^*Q_2^* + \epsilon Q_1^*Q_2' + \epsilon Q_1'Q_2^* + \epsilon^2 Q_1'Q_2'), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \epsilon \frac{dQ'_1}{dt} = \frac{\beta_1(G^*Q_1^* + \epsilon G^*Q'_1 + \epsilon G'Q_1^*)}{\alpha_1 + G^* + \epsilon G'} - d_1Q_1^* - d_1\epsilon Q'_1 \\
&\quad - c_1(Q_1^*Q_2^* + \epsilon Q_1^*Q'_2 + \epsilon Q'_1Q_2^*), \\
&\Rightarrow \epsilon \frac{dQ'_1}{dt} = \frac{\beta_1G^*Q_1^*}{\alpha_1 + G^* + \epsilon G'} + \frac{\beta_1\epsilon G^*Q'_1}{\alpha_1 + G^* + \epsilon G'} + \frac{\beta_1\epsilon G'Q_1^*}{\alpha_1 + G^* + \epsilon G'} \\
&\quad - d_1Q_1^* - d_1\epsilon Q'_1 - c_1Q_1^*Q_2^* - c_1\epsilon Q_1^*Q'_2 - c_1\epsilon Q'_1Q_2^*, \\
&\Rightarrow \epsilon \frac{dQ'_1}{dt} = \frac{\beta_1G^*Q_1^*}{\alpha_1 + G^*} - \frac{\beta_1G^*Q_1^*\epsilon G'}{(\alpha_1 + G^*)^2} + \frac{\beta_1\epsilon G^*Q'_1}{\alpha_1 + G^*} - \frac{\beta_1\epsilon G^*Q_1^*\epsilon G'}{(\alpha_1 + G^*)^2} + \\
&\quad \frac{\beta_1\epsilon G'Q_1^*}{\alpha_1 + G^*} - \frac{\beta_1\epsilon G'Q_1^*\epsilon G'}{(\alpha_1 + G^*)^2} - d_1Q_1^* - d_1\epsilon Q'_1 - c_1Q_1^*Q_2^* \\
&\quad - c_1\epsilon Q_1^*Q'_2 - c_1\epsilon Q'_1Q_2^*, \\
&\Rightarrow \epsilon \frac{dQ'_1}{dt} = \frac{\beta_1G^*Q_1^*}{\alpha_1 + G^*} - \frac{\beta_1G^*Q_1^*\epsilon G'}{(\alpha_1 + G^*)^2} + \frac{\beta_1\epsilon G^*Q'_1}{\alpha_1 + G^*} + \frac{\beta_1\epsilon G'Q_1^*}{\alpha_1 + G^*} \\
&\quad - d_1Q_1^* - d_1\epsilon Q'_1 - c_1Q_1^*Q_2^* - c_1\epsilon Q_1^*Q'_2 - c_1\epsilon Q'_1Q_2^*, \\
&\Rightarrow \epsilon \frac{dQ'_1}{dt} = \frac{\beta_1G^*Q_1^*}{\alpha_1 + G^*} - d_1Q_1^* - c_1Q_1^*Q_2^* - \epsilon \frac{\beta_1G^*Q_1^*}{(\alpha_1 + G^*)^2}G' + \epsilon \\
&\quad \frac{\beta_1G^*Q'_1}{\alpha_1 + G^*} + \epsilon \frac{\beta_1Q_1^*}{\alpha_1 + G^*}G' - \epsilon d_1Q'_1 - \epsilon c_1Q_1^*Q'_2 - \epsilon c_1Q'_1Q_2^*, \\
&\Rightarrow \frac{dQ'_1}{dt} = -\frac{\beta_1G^*Q_1^*}{(\alpha_1 + G^*)^2}G' + \frac{\beta_1G^*Q'_1}{\alpha_1 + G^*} + \frac{\beta_1Q_1^*}{\alpha_1 + G^*}G' \\
&\quad - d_1Q'_1 - c_1Q_1^*Q'_2 - c_1Q'_1Q_2^*, \\
&\Rightarrow \frac{dQ'_1}{dt} = \left[-\frac{\beta_1G^*Q_1^*}{(\alpha_1 + G^*)^2} + \frac{\beta_1Q_1^*}{\alpha_1 + G^*}\right]G' + \left[\frac{\beta_1G^*}{\alpha_1 + G^*} - d_1 - c_1Q_2^*\right]Q'_1 \\
&\quad - c_1Q_1^*Q'_2, \\
&\Rightarrow \frac{dQ'_1}{dt} = \frac{\beta_1\alpha_1Q_1^*}{(\alpha_1 + G^*)^2}G' + \left(\frac{\beta_1G^*}{\alpha_1 + G^*} - d_1 - c_1Q_2^*\right)Q'_1 \tag{4.3.3} \\
&\quad - c_1Q_1^*Q'_2 + 0R', \tag{4.3.4}
\end{aligned}$$

bulunur. İkinci avcı için benzer şekilde

$$\begin{aligned}
\frac{d(Q_2^* + \epsilon Q'_2)}{dt} &= \frac{\beta_2(R^* + \epsilon R')(Q_2^* + \epsilon Q'_2)}{\alpha_2 + R^* + \epsilon R'} - d_2(Q_2^* + \epsilon Q'_2) \\
&\quad - c_2[(Q_1^* + \epsilon Q'_1)(Q_2^* + \epsilon Q'_2)],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dQ_2^*}{dt} + \epsilon \frac{dQ_2'}{dt} &= \frac{\beta_2(Q_2^*R^* + \epsilon Q_2'R^* + \epsilon Q_2^*R')}{\alpha_2 + R^* + \epsilon R'} - d_2Q_2^* \\
&\quad - d_2\epsilon Q_2' - c_2(Q_1^*Q_2^* + \epsilon Q_1^*Q_2' + \epsilon Q_1'Q_2^*), \\
\Rightarrow \epsilon \frac{dQ_2'}{dt} &= \frac{\beta_2Q_2^*R^*}{\alpha_2 + R^* + \epsilon R'} + \frac{\beta_2\epsilon Q_2'R^*}{\alpha_2 + R^* + \epsilon R'} + \frac{\beta_2\epsilon Q_2^*R'}{\alpha_2 + R^* + \epsilon R'} - d_2Q_2^* \\
&\quad - d_2\epsilon Q_2' - c_2Q_1^*Q_2^* - c_2\epsilon Q_1^*Q_2' - c_2\epsilon Q_1'Q_2^*, \\
\Rightarrow \epsilon \frac{dQ_2'}{dt} &= \frac{\beta_2Q_2^*R^*}{\alpha_2 + R^*} - \frac{\beta_2Q_2^*R^*\epsilon R'}{(\alpha_2 + R^*)^2} + \frac{\beta_2\epsilon Q_2'R^*}{\alpha_2 + R^*} - \frac{\beta_2\epsilon Q_2'R^*\epsilon R'}{(\alpha_2 + R^*)^2} + \\
&\quad \frac{\beta_2\epsilon Q_2^*R'}{\alpha_2 + R^*} - \frac{\beta_2\epsilon Q_2^*R'\epsilon R'}{(\alpha_2 + R^*)^2} - d_2Q_2^* - d_2\epsilon Q_2' - c_2Q_1^*Q_2^* \\
&\quad - c_2\epsilon Q_1^*Q_2' - c_2\epsilon Q_1'Q_2^*, \\
\Rightarrow \epsilon \frac{dQ_2'}{dt} &= \frac{\beta_2Q_2^*R^*}{\alpha_2 + R^*} - \frac{\beta_2Q_2^*R^*\epsilon R'}{(\alpha_2 + R^*)^2} + \frac{\beta_2\epsilon Q_2'R^*}{\alpha_2 + R^*} + \frac{\beta_2\epsilon Q_2^*R'}{\alpha_2 + R^*} \\
&\quad - d_2Q_2^* - d_2\epsilon Q_2' - c_2Q_1^*Q_2^* - c_2\epsilon Q_1^*Q_2' - c_2\epsilon Q_1'Q_2^*, \\
\Rightarrow \epsilon \frac{dQ_2'}{dt} &= \frac{\beta_2Q_2^*R^*}{\alpha_2 + R^*} - d_2Q_2^* - c_2Q_1^*Q_2^* - \epsilon \frac{\beta_2Q_2^*R^*}{(\alpha_2 + R^*)^2}R' \\
&\quad + \epsilon \frac{\beta_2R^*}{\alpha_2 + R^*}Q_2' + \epsilon \frac{\beta_2Q_2^*}{\alpha_2 + R^*}R' - \epsilon d_2Q_2' \\
&\quad - \epsilon c_2Q_1^*Q_2' - \epsilon c_2Q_2^*Q_1', \\
\Rightarrow \frac{dQ_2'}{dt} &= 0G' - c_2Q_2^*Q_1' + \left(\frac{\beta_2R^*}{\alpha_2 + R^*} - d_2 - c_2Q_1^*\right)Q_2' \\
&\quad + \left(-\frac{\beta_2Q_2^*R^*}{(\alpha_2 + R^*)^2} + \frac{\beta_2Q_2^*}{\alpha_2 + R^*}\right)R', \\
\Rightarrow \frac{dQ_2'}{dt} &= 0G' - c_2Q_2^*Q_1' + \left(\frac{\beta_2R^*}{\alpha_2 + R^*} - d_2 - c_2Q_1^*\right)Q_2' \tag{4.3.5} \\
&\quad + \frac{\beta_2\alpha_2Q_2^*}{(\alpha_2 + R^*)^2}R'. \tag{4.3.6}
\end{aligned}$$

Son olarak

$$\frac{d(R^* + \epsilon R')}{dt} = \omega[(G^* + \epsilon G')(R^* + \epsilon R')],$$

$$\frac{dR^*}{dt} + \epsilon \frac{dR'}{dt} = \omega(G^* + \epsilon G' - R^* - \epsilon R'),$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \epsilon \frac{dR'}{dt} &= \omega G^* + \omega \epsilon G' - \omega R^* - \omega \epsilon R', \\
\Rightarrow \epsilon \frac{dR'}{dt} &= \omega G^* - \omega R^* + \omega \epsilon G' - \omega \epsilon R', \\
\Rightarrow \epsilon \frac{dR'}{dt} &= \epsilon \omega G' - \epsilon \omega R', \\
\Rightarrow \frac{dR'}{dt} &= \omega G' - \omega R'. \tag{4.3.7}
\end{aligned}$$

Model

$$\frac{dG}{dt} = G(1 - G) - \frac{GQ_1}{\alpha_1 + G} - \frac{GQ_2}{\alpha_2 + G} = f(G, Q_1, Q_2, R), \tag{4.3.8}$$

$$\frac{dQ_1}{dt} = \frac{\beta_1 G Q_1}{\alpha_1 + G} - d_1 Q_1 - c_1 Q_1 Q_2 = g(G, Q_1, Q_2, R), \tag{4.3.9}$$

$$\frac{dQ_2}{dt} = \frac{\beta_2 R Q_2}{\alpha_2 + R} - d_2 Q_2 - c_2 Q_1 Q_2 = h(G, Q_1, Q_2, R), \tag{4.3.10}$$

$$\frac{dR}{dt} = \omega(G - R) = p(G, Q_1, Q_2, R), \tag{4.3.11}$$

olarak tanımlanırsa jakobiyen matris:

$$\frac{d\mathcal{F}}{dt} = \mathcal{A}|_{E_j} \mathcal{F}, \quad j = 0, 1, 2, 3, 4. \tag{4.3.12}$$

Burada $\mathcal{F} = [G', Q'_1, Q'_2, R']^T$.

$$\mathcal{A}|_{E_j} = \begin{bmatrix} f_G & f_{Q_1} & f_{Q_2} & f_R \\ g_G & g_{Q_1} & g_{Q_2} & g_R \\ h_G & h_{Q_1} & h_{Q_2} & h_R \\ p_G & p_{Q_1} & p_{Q_2} & p_R \end{bmatrix} \Big|_{E_j}, \quad j = 0, 1, 2, 3, 4,$$

O halde

$$f_G = 1 - 2G - \frac{\alpha_1 Q_1}{(\alpha_1 + G)^2} - \frac{\alpha_2 Q_2}{(\alpha_2 + G)^2}, \quad f_{Q_1} = \frac{G}{\alpha_1 + G}, \quad f_{Q_2} = \frac{G}{\alpha_2 + G}, \quad f_R = 0,$$

$$g_G = \frac{\beta_1 Q_1 \alpha_1}{(\alpha_1 + G)^2}, \quad g_{Q_1} = \frac{\beta_1 G}{\alpha_1 + G} - d_1 - c_1 Q_2, \quad g_{Q_2} = -c_1 Q_1, \quad g_R = 0,$$

$$h_G = 0, \quad h_{Q_1} = -c_2 Q_2, \quad h_{Q_2} = \frac{\beta_2 R}{\alpha_2 + R} - d_2 - c_2 Q_1, \quad h_R = \frac{\beta_2 Q_2 \alpha_2}{(\alpha_2 + R)^2},$$

$$p_G = \omega, \quad p_{Q_1} = 0, \quad p_{Q_2} = 0, \quad p_R = -\omega.$$

Şimdi her bir sabit noktanın yerel kararlılığını inceleyeceğiz.

Teorem 4.3.1 $E_0 = (0, 0, 0, 0)$ civarındaki sabit nokta her zaman vardır ve kararsızdır.

İspat 4.3.2

$$\mathcal{A}|_{E_0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -d_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -d_2 & 0 \\ \omega & 0 & 0 & -\omega \end{bmatrix},$$

Sistemin özdeğerleri

Det $[\mathcal{A}|_{E_0} - \lambda I] = 0$ ile bulunacağından karakteristik matris aşağıdaki gibidir:

$$\mathcal{A}|_{E_0} = \det \begin{bmatrix} 1 - \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -d_1 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -d_2 - \lambda & 0 \\ \omega & 0 & 0 & -\omega - \lambda \end{bmatrix},$$

Determinant işlemi yapıldığında polinom elde ederiz:

$$(\lambda^2 - d_1\lambda - \lambda + d_1)(d_2 - \lambda)(-\lambda - \omega) = 0$$

Burada

$$\begin{aligned} \lambda^2 - d_1\lambda - \lambda + d_1 &= \lambda^2 + \lambda(-1 - d_1) + d_1 \\ \Rightarrow \lambda_{1,2} &= \frac{1 + d_1 \pm \sqrt{(-1 - d_1)^2 - 4d_1}}{2} \end{aligned}$$

O halde

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -d_1, \quad \lambda_3 = -d_2 \quad \text{ve} \quad \lambda_4 = -\omega.$$

İlk özdeğer pozitif olduğundan, $(0, 0, 0, 0)$ civarındaki sabit nokta kararsız bir düğümdür.

Teorem 4.3.3 $E_1 = (1, 0, 0, 1)$ Avcı türünün olmadığı sabit nokta $\beta_2 > d_2(\alpha_2 + 1)$ or $\beta_1 > (d_1 + 1)(\alpha_1 + 1)$ koşulları altında kararsızdır.

İspat 4.3.4

$$\mathcal{A}|_{E_1} = \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{\alpha_1+1} & \frac{1}{\alpha_2+1} & 0 \\ 0 & \frac{\beta_1}{\alpha_1+1} - d_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\beta_2}{\alpha_2+1} - d_2 & 0 \\ \omega & 0 & 0 & -\omega \end{bmatrix},$$

Karakteristik matris $\text{Det} [\mathcal{A}|_{E_1} - \mu I_4] = 0$:

$$\mathcal{A}|_{E_1} = \det \begin{bmatrix} -1 - \lambda & \frac{1}{\alpha_1 + 1} & \frac{1}{\alpha_2 + 1} & 0 \\ 0 & \frac{\beta_1}{\alpha_1 + 1} - d_1 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\beta_2}{\alpha_2 + 1} - d_2 - \lambda & 0 \\ \omega & 0 & 0 & -\omega - \lambda \end{bmatrix},$$

Determinant işleminin ardından polinom elde ederiz:

$$(-\lambda - \omega)(\lambda^2 + \lambda + d_1\lambda - \frac{\lambda\beta_1}{\alpha_1 + 1} - \frac{\beta_1}{\alpha_1 + 1} + d_1)(-d_2 + \frac{\beta_2}{\alpha_2 + 1} - \lambda) = 0 \quad (4.3.13)$$

$$\Rightarrow \lambda_{3,4} = \frac{-(1 + d_1 - \frac{\beta_1}{\alpha_1 + 1}) \pm \sqrt{(1 + d_1 - \frac{\beta_1}{\alpha_1 + 1})^2 - 4(d_1 - \frac{\beta_1}{\alpha_1 + 1})}}{2}$$

Özdeğerlerimiz:

$$\lambda_1 = \frac{\beta_2}{\alpha_2 + 1} - d_2, \quad \lambda_2 = -\omega, \quad 2\lambda_{3,4} = -1 - d_1 + \frac{\beta_1}{\alpha_1 + 1} \pm \left| -1 + d_1 - \frac{\beta_1}{\alpha_1 + 1} \right|.$$

Böylece sistem $\beta_2 > d_2(\alpha_2 + 1)$ ya da $\beta_1 > (d_1 + 1)(\alpha_1 + 1)$ koşulları altında kararsızlaştırılabilir.

Teorem 4.3.5 $E_2 = (G^*, 0, Q_2^*, R^*)$ Birinci avcı türünün olmadığı sabit noktanın kararlılığı:

İspat 4.3.6

$$\mathcal{A}|_{E_2} = \det \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{bmatrix},$$

$$b_{11} = 1 - 2G^* - \frac{\alpha_2 Q_2^*}{(\alpha_2 + G^*)^2} \quad b_{12} = \frac{G^*}{\alpha_1 + G^*} \quad b_{13} = \frac{G^*}{\alpha_2 + G^*} \quad b_{14} = 0,$$

$$b_{21} = 0 \quad b_{22} = \frac{\beta_1 G^*}{\alpha_1 + G^*} - d_1 - c_1 Q_2 \quad b_{23} = 0 \quad b_{24} = 0,$$

$$b_{31} = 0, \quad b_{32} = -c_2 Q_2^* \quad b_{33} = \frac{\beta_2 R^*}{\alpha_2 + R^*} - d_2 \quad b_{34} = \frac{\beta_2 Q_2^* \alpha_2}{(\alpha_2 + R^*)^2}$$

$$b_{41} = \omega, \quad b_{42} = 0, \quad b_{43} = 0 \quad b_{44} = -\omega.$$

Karakteristik matris $\text{Det} [\mathcal{A}|_{E_2} - \lambda I_4] = 0$

$$\mathcal{A}|_{E_2} = \det \begin{bmatrix} b_{11} - \lambda & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} - \lambda & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} - \lambda & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} - \lambda \end{bmatrix},$$

Elde ettiğimiz karakteristik polinomumuz:

$$(1 - 2G^* - \frac{\alpha_2 Q_2^*}{(\alpha_2 + G^*)^2} - \lambda) (\frac{\beta_1 G^*}{\alpha_1 + G^*} - d_1 - c_1 Q_2 - \lambda) (\frac{\beta_2 R^*}{\alpha_2 + R^*} - d_2 - \lambda) (-\omega - \lambda) \\ + (\frac{G^*}{\alpha_2 + G^*}) (\frac{\beta_1 G^*}{\alpha_1 + G^*} - d_1 - c_1 Q_2 - \lambda) (\frac{\beta_2 Q_2^* \alpha_2}{(\alpha_2 + R^*)^2}) (\omega) = 0,$$

$$\Rightarrow (\lambda - g_{Q_1}) [(\lambda - p_R) (\lambda^2 - (f_G + h_{Q_2})\lambda + f_G h_{Q_2}) + f_{Q_2} h_R P_G] |_{E_2} = 0,$$

Üçüncü dereceden bir denklemin genel çözümü için ikinci dereceden denklemlerde olduğu gibi diskriminant yöntemi ile bulunur. Diskriminant sıfırdan büyük ise üç farklı gerçek kök vardır. Diskriminant sıfıra eşit ise ya üç eşit gerçek kök ya da iki çift kök ve ayrı basit bir kök bulunur. Diskriminant sıfırdan küçük ise iki kök karmaşık eşlenik diğeri ise gerçek köktür. Kübik bir polinomun özdeğerlerini bulmak için Cardano'nun tekniğini kullanıyoruz:

$$\lambda_1 = g_{Q_1} = \frac{\beta_1 G^*}{\alpha_1 + G^*} - d_1 - c_1 Q_2^*,$$

$$\lambda_2 = s + t - a_1/3,$$

$$\lambda_{3,4} = -\frac{s+t}{2} - \frac{a_1}{3} \pm \frac{i\sqrt{3}}{2}(s-t),$$

Buradaki ifadelerin karşılıkları:

$$s = (r + (q^3 + r^2)^{1/2})^{1/3}, \quad t = (r - (q^3 + r^2)^{1/2})^{1/3},$$

$$q = \frac{3a_2 - a_1^2}{9}, \quad r = \frac{9a_1 a_2 - 27a_3 - 2a_1^3}{54},$$

$$a_1 = -(f_G + h_{Q_2} + p_R), \quad a_2 = f_G h_{Q_2} + f_G p_R + h_{Q_2} p_R,$$

$$a_3 = f_{Q_2} h_R p_G - f_G h_{Q_2} p_R.$$

Böylece birinci avcı türünün yok olduğu sabit noktanın kararlılığı aşağıdaki durumlar sağlandığında kararsız olduğu bulunmuştur.

$$\begin{aligned}
(i) \quad & \beta_1 G^* > (\alpha_1 + G^*)(d_1 + c_1 Q_2^*), \\
(ii) \quad & (s + t) > a_1, \\
(iii) \quad & 3(s + t) + 2a_1 < 0,
\end{aligned} \tag{4.3.14}$$

Teorem 4.3.7 $E_3 = (G^*, Q_1^*, 0, R^*)$ İkinci avcı türünün Q_2^* yok olduğu sabit nokta $\beta_2 R^* > (d_2 + c_2 Q_1^*)(\alpha_2 + R^*)$ veya $\text{Tr}(f_G + g_{Q_1})|_{E_3} = 0$ olduğu durumlarda kararsızdır.

İspat 4.3.8

$$\mathcal{A}|_{E_3} = \det \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned}
c_{11} &= 1 - 2G^* - \frac{\alpha_1 Q_1^*}{(\alpha_1 + G^*)^2} & c_{12} &= \frac{G^*}{\alpha_1 + G^*} & c_{13} &= \frac{G^*}{\alpha_2 + R^*} & c_{14} &= 0, \\
c_{21} &= \frac{\beta_1 Q_1^* \alpha_1}{(\alpha_1 + G^*)^2} & c_{22} &= \frac{\beta_1 G^*}{\alpha_1 + G^*} - d_1 & c_{23} &= -c_1 Q_1^* & c_{24} &= 0, \\
c_{31} &= 0, & c_{32} &= 0 & c_{33} &= \frac{\beta_2 R^*}{\alpha_2 + R^*} - d_2 - c_2 Q_1^* & c_{34} &= 0 \\
c_{41} &= \omega, & c_{42} &= 0, & c_{43} &= 0 & c_{44} &= -\omega.
\end{aligned}$$

Karakteristik matris $\text{Det} [\mathcal{A}|_{E_3} - \lambda I_4] = 0$

$$\mathcal{A}|_{E_3} = \det \begin{bmatrix} c_{11} - \lambda & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} - \lambda & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} - \lambda & c_{34} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} - \lambda \end{bmatrix},$$

Elde ettiğimiz karakteristik polinom :

$$\begin{aligned}
& (1 - 2G^* - \frac{\alpha_1 Q_1^*}{(\alpha_1 + G^*)^2} - \lambda) (\frac{\beta_1 G^*}{\alpha_1 + G^*} - d_1 - \lambda) (\frac{\beta_2 R^*}{\alpha_2 + R^*} - d_2 - c_2 Q_1^* - \lambda) \\
& (-\omega - \lambda) - (\frac{G^*}{\alpha_1 + G^*}) (\frac{\beta_1 Q_1^* \alpha_1}{(\alpha_1 + G^*)^2}) (\frac{\beta_2 R^*}{\alpha_2 + R^*} - d_2 - c_2 Q_1^* - \lambda) (-\omega - \lambda) = 0
\end{aligned}$$

$$(h_{Q_2} - \lambda) (P_R - \lambda) [\lambda^2 - \text{Tr}(\mathcal{D})\lambda + \text{Det}(\mathcal{D})]|_{E_3} = 0, \quad \mathcal{D} = \begin{bmatrix} f_G & f_{Q_1} \\ g_G & g_{Q_1} \end{bmatrix},$$

Özdeğerlerimiz

$$\lambda_1 = -\omega, \quad \lambda_2 = \frac{\beta_2 R^*}{\alpha_2 + R^*} - d_2 - c_2 Q_1^*, \quad \lambda_{3,4} = \frac{\text{Tr}(D)}{2} \pm \sqrt{\frac{\text{Tr}(D)^2 - 4\text{Det}(D)}{4}}$$

Böylece $\beta_2 R^* > (d_2 + c_2 Q_1^*)(\alpha_2 + R^*)$ veya $\text{Tr}(D) > 0$ şartlar sağlandığında ikinci avcı türünün olmadığı sabit nokta kararsızdır.

Teorem 4.3.9 $E_4 = (G^*, Q_1^*, Q_2^*, R^*)$ Bütün türlerin var olduğu sabit nokta

İspat 4.3.10

$$\mathcal{A}|_{E_4} = \det \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & d_{34} \\ d_{41} & d_{42} & d_{43} & d_{44} \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} d_{11} &= 1 - 2G^* - \frac{\alpha_1 Q_1^*}{(\alpha_1 + G^*)^2} - \frac{\alpha_2 Q_2^*}{(\alpha_2 + G^*)^2}, & d_{12} &= \frac{G^*}{\alpha_1 + G^*}, & d_{13} &= \frac{G^*}{\alpha_2 + G^*}, \\ d_{14} &= 0, & d_{21} &= \frac{\beta_1 Q_1^* \alpha_1}{(\alpha_1 + G^*)^2}, & d_{22} &= \frac{\beta_1 G^*}{\alpha_1 + G^*} - d_1 - c_1 Q_2^*, & d_{23} &= -c_1 Q_1^*, \\ d_{24} &= 0, & d_{31} &= 0, & d_{32} &= -c_2 Q_2^*, & d_{33} &= \frac{\beta_2 R^*}{\alpha_2 + R^*} - d_2 - c_2 Q_1^*, \\ d_{34} &= \frac{\beta_2 Q_2^* \alpha_2}{(\alpha_2 + R^*)^2}, & d_{41} &= \omega, & d_{42} &= 0, & d_{43} &= 0, & d_{44} &= -\omega. \end{aligned}$$

Karakteristik matris $\text{Det} [\mathcal{A}|_{E_4} - \lambda I_4] = 0$

$$\mathcal{A}|_{E_4} = \det \begin{bmatrix} d_{11} - \lambda & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\ d_{21} & d_{22} - \lambda & d_{23} & d_{24} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} - \lambda & d_{34} \\ d_{41} & d_{42} & d_{43} & d_{44} - \lambda \end{bmatrix},$$

Elde ettiğimiz karakteristik polinom :

$$\begin{aligned}
& (1 - 2G^* - \frac{\alpha_1 Q_1^*}{(\alpha_1 + G^*)^2} - \frac{\alpha_2 Q_2^*}{(\alpha_2 + G^*)^2} - \lambda) (\frac{\beta_1 G^*}{\alpha_1 + G^*} - d_1 - c_1 Q_2^* - \lambda) \\
& (\frac{\beta_2 R^*}{\alpha_2 + R^*} - d_2 - c_2 Q_1^* - \lambda) (-\omega - \lambda) + \frac{G^*}{\alpha_2 + G^*} (\frac{\beta_1 Q_1^* \alpha_1}{(\alpha_1 + G^*)^2}) (-c_2 Q_2^*) \\
& (-\omega - \lambda) \frac{G^*}{\alpha_2 + G^*} (\frac{\beta_1 G^*}{\alpha_1 + G^*} - d_1 - c_1 Q_2^* - \lambda) (\frac{\beta_2 Q_2^* \alpha_2}{(\alpha_2 + R^*)^2} \omega \\
& - (1 - 2G^* - \frac{\alpha_1 Q_1^*}{(\alpha_1 + G^*)^2} - \frac{\alpha_2 Q_2^*}{(\alpha_2 + G^*)^2} - \lambda) (-c_1 Q_1^*) (-c_2 Q_2^*) (-\omega - \lambda) \\
& - (\frac{G^*}{\alpha_1 + G^*}) (\frac{\beta_1 Q_1^* \alpha_1}{(\alpha_1 + G^*)^2}) (\frac{\beta_2 R^*}{\alpha_2 + R^*} - d_2 - c_2 Q_1^* - \lambda) (-\omega - \lambda) \\
& - (\frac{G^*}{\alpha_1 + G^*}) (-c_1 Q_1^*) (\frac{\beta_2 Q_2^* \alpha_2}{(\alpha_2 + R^*)^2}) \omega = 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (p_R - \lambda) [(h_{Q_2} - \lambda) (\lambda^2 - \text{Tr}(D) + \text{Det}(D)) - h_{Q_1} (f_G g_{Q_2} - f_{Q_2} g_G \\
& - g_{Q_2} \lambda)] + p_G (f_{Q_2} h_R \lambda + f_{Q_1} g_{Q_2} h_R - f_{Q_2} g_{Q_1} h_R) = 0.
\end{aligned} \tag{4.3.15}$$

Denklem (4.3.15) e karşılık gelen özdeğerler klasik Ferrari yöntemi kullanılarak bulunur.

$$\begin{aligned}
\lambda_{1,2} &= -\frac{b_1}{4} - u \pm \frac{1}{2} \sqrt{-4u^2 - 2y_1 + \frac{y_2}{u}}, \\
\lambda_{3,4} &= -\frac{b_1}{4} + u \pm \frac{1}{2} \sqrt{-4u^2 - 2y_1 - \frac{y_2}{u}},
\end{aligned}$$

Burada

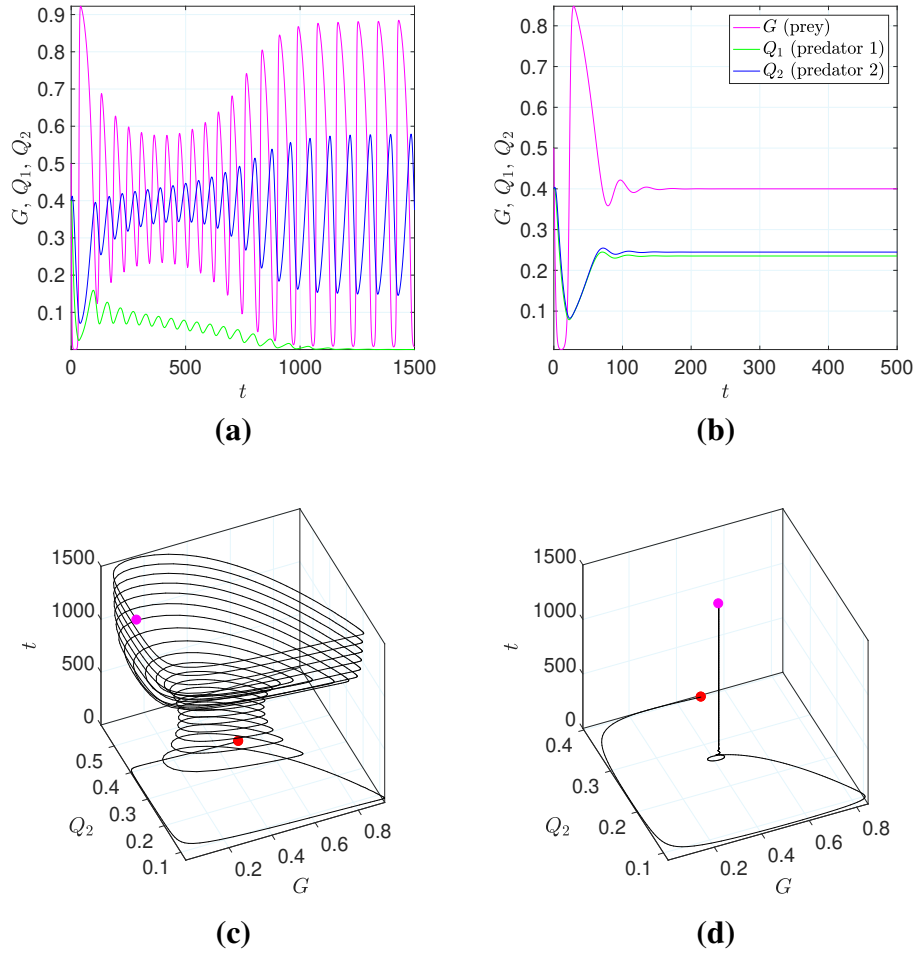
$$\begin{aligned}
y_1 &= \frac{8b_2 - 3b_1^2}{8}, \quad y_2 = \frac{b_1^3 - 4b_1 b_2 + 8b_3}{8}, \\
u &= \frac{1}{2} \sqrt{-\frac{2}{3} y_1 + \frac{1}{3} \left(v + \frac{\Delta_0}{v} \right)}, \quad v = \left(\frac{\Delta_1 + \sqrt{\Delta_1^2 - 4\Delta_0^3}}{2} \right)^{1/3}, \\
\Delta_0 &= b_2^2 - 3b_1 b_3 + 12b_4, \quad \Delta_1 = 2b_2^3 - 9b_1 b_2 b_3 + 27b_1^2 b_4 + 27b_3^2 - 72b_2 b_4.
\end{aligned}$$

5. NÜMERİK SİMÜLASYONLAR

Bu bölümde düşük ve yüksek ω değerleri için av ve avcıların simülasyonları ve bunlara karşılık gelen evre portreleri verilmiştir. Burada küçük ω , geçmiş etkinin büyük bir zaman aralığı için var olduğunu ima eder. Bir avcıda yani Q_2 de geçmişin etkisini incelemek için yarı doygunluk sabitlerini (α_1 ve α_2) ve av ile avcıların karşılaşma oranları yani dönüşüm sabitleri (β_1 ve β_2) hem Q_1 hem de Q_2 ile ilişkili olduğu için eşit seçtik. Böylece $\alpha = \alpha_1 = \alpha_2$ ve $\beta = \beta_1 = \beta_2$. Aksi belirtilmedikçe verilen zaman simülasyonları için parametreler $\beta = 0.5, d_1 = d_2 = 0.1, c_1 = c_2 = 0.2$. Aynı zamanda bellek sabitinin küçük değeri için ($\omega = 0.1$) büyük değeri için ($\omega = 1$) olarak kabul ediyoruz. Simülasyonda yeşil renk Q_1 birinci avcı türünü, mavi renk Q_2 ikinci avcı türünü pembe renk ise G av türünü temsil etmektedir.

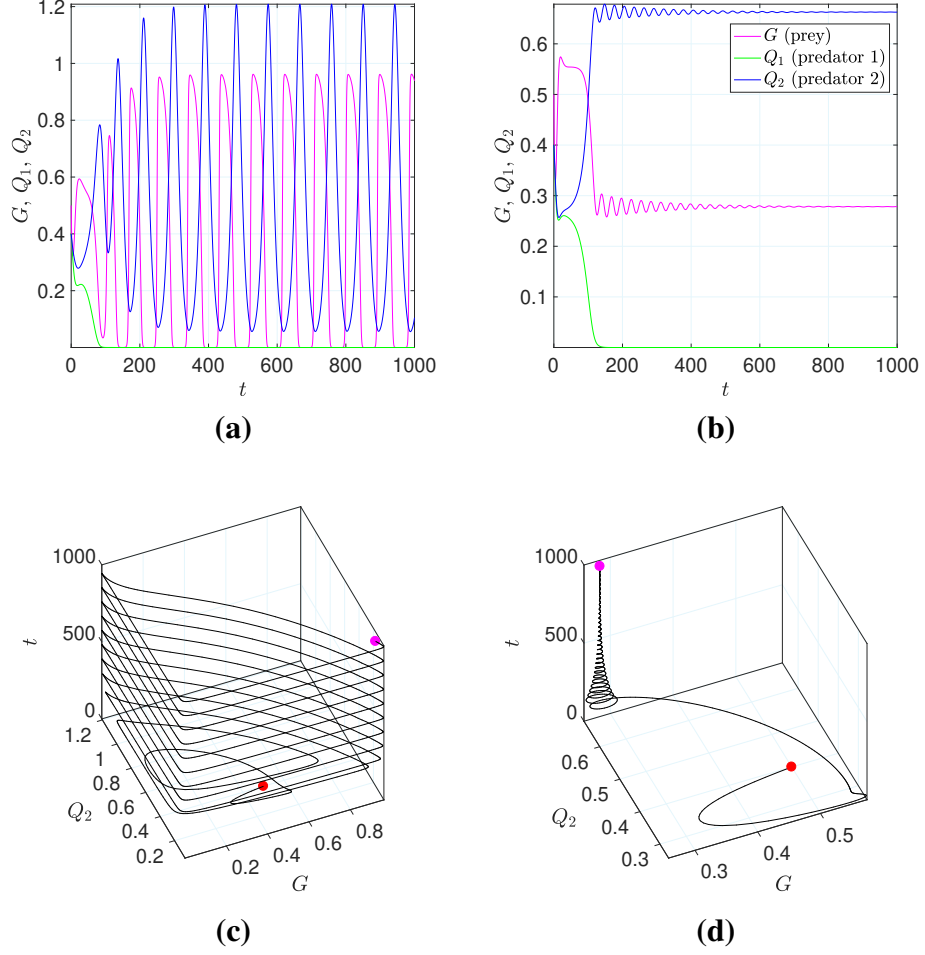
Şekil 5.1 hafıza parametresinin ω küçük ve büyük değerleri için avın ve iki avcının zaman içindeki evrimi, rekabet olmadığında gösterilmiştir. Rekabet olmadan uzun süreli belleğin (küçük ω) av G ve avcı Q_2 'nin dinamiklerinde kararsız davranışlara yol açtığı gözlemlenmiştir. Düşük ω parametre değerinde yeşil ile gösterilen Q_1 avcının yoğunluğu salınımlı bir yapıyla başlar ve $t = 1000$ 'den sonra sifira düşer. Şekil 5.1(b) de görüldüğü gibi rekabet olmadığında ve ω değeri arttırıldığında salınımlı davranış ortadan kalkar. Çözümlerin davranışı ve sönme eğilimi onu kararlı denge haline getirir. Av ve diğer avcı ise kararsızlık durumundan kararlılık durumuna geçiş yapıyor. Ayrıca yoğunluklar ilk zamanlarda düşük yüksekliğe sahipken ileriki zamanlarda daha geniş aralıklarda görülüyor. Böylece hafızayla ilgili parametreler ve hafızanın zayıflaması popülasyon yoğunluklarının kararlılığı üzerinde önemli bir etkiye sahiptir. Şekil 5.2 de ω nın düşük ($\omega = 0.1$) ve yüksek ($\omega = 1$) değerleri için tür dinamiklerine odaklanılmıştır. Hafıza parametresinin yanı sıra her iki avcıyı da etkileyen eşit güçte bir rekabet vardır. Her iki durumda da Q_1 avcısının nesli tükenir, ancak avcı Q_2 'nin kararlılığı kararsızdan kararlıya geçer.

Şekil 5.3 de ω nın düşük değeri için incelenmiştir. Başlangıçta av ve birinci avcı türünün yoğunluğu düşüktür. $t = 500$ den sonra ikinci avcı türünün yoğunluğu artmıştır. Birinci avcı türü Q_1 in nesli tükenmektedir fakat şekil 5.2 ve 5.4 ile bir kıyaslama yapıldığında birinci avcı türü biraz daha fazla hayatta kaldıktan sonra nesli

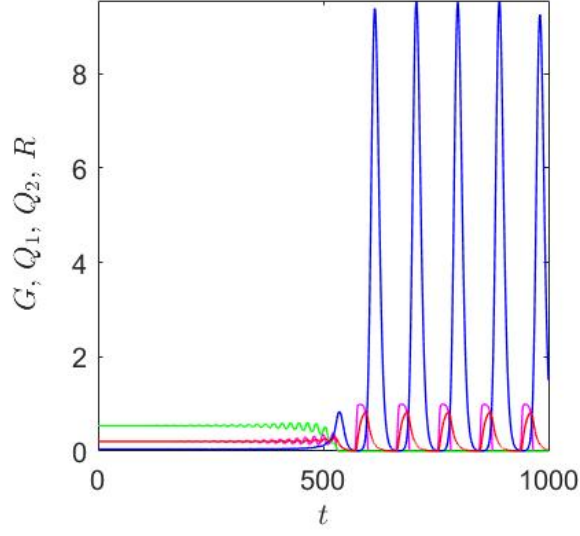


Şekil 5.1 Av ve avcı türlerinin yoğunlukları rekabet olmadığında ve $\omega = 0.1$ (a) ve $\omega = 1$ (b) olarak kabul ettiğimizde ortaya çıkan simülasyonlar ve buna karşılık gelen faz portresi (c). Siyah ve mavi portreler, sırasıyla $\omega = 0.1$ ve $\omega = 1$ olan durumlar. Yörüngelerin başlangıç ve bitiş noktaları kırmızı ve macenta noktalarla gösterilir. Diğer parametreler ise $\alpha = 0.4, \beta = 0.2, d_1 = d_2 = 0.1, c_1 = c_2 = 0$. Başlangıç koşulu $(0.5, 0.4, 0.4, 0.5)$ olarak seçilir.

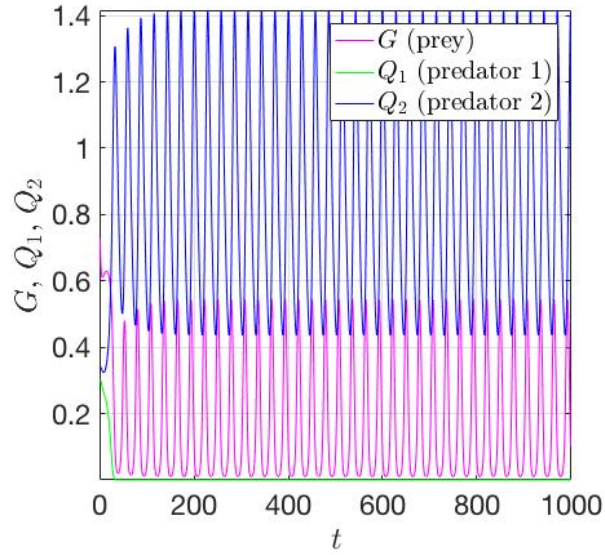
yok olmaktadır. Aynı zamanda dalgalanma sıklığı azalmıştır. İkinci avcı türünün sayısı av türüne göre fazladır. Şekil 5.4 de ω nın yüksek değeri için incelenmiştir. Yukarıdaki simülasyonlarda olduğu gibi burada da Q_1 in nesli yok olmaktadır. Fakat şekil 5.3e göre dalgalanma sıklığı daha fazladır. Başlangıçta birinci avcı türünün yoğunluğu fazla olmasına rağmen ikinci avcı türünün yoğunluğu birinci avcı türüne göre fazladır.



Şekil 5.2 $\omega = 0.1$ (a) ve $\omega = 1$ (b) olduğunda av ve avcı popülasyonlarının zaman evrimleri ve karşılık gelen faz portreleri (c,d). Yörüngelerin başlangıç ve bitiş noktaları kırmızı ve macenta noktalarla gösterilir. Diğer parametreler $\alpha = 0.64, \beta = 0.33, d_1 = d_2 = 0.1, c_1 = c_2 = 0.2$. Başlangıç koşulları $(0.5, 0.4, 0.4, 0.5)$ olarak seçilmiştir.



Şekil 5.3 $\omega = 0.1$ değeri için av ve avcı popülasyonlarının zamana göre değişimi verilmiştir. Parametre değerleri ise $\alpha_1 = 0.55, \alpha_2 = 0.36, \beta_1 = 0.8, \beta_2 = 0.7, d_1 = d_2 = 0.2, c_1 = 0.4, c_2 = 0.1$. Başlangıç koşulları $(0.77, 0.5, 0.5, 0.5)$ olarak seçilmiştir.



Şekil 5.4 $\omega = 1.0$ değeri için av ve avcı popülasyonlarının zamana göre değişimi verilmiştir. Diğer parametreler ise $\alpha_1 = 0.99, \alpha_2 = 0.9, \beta_1 = 0.72, \beta_2 = 0.70, d_1 = d_2 = 0.1, c_1 = 0.6, c_2 = 0.7$. Başlangıç koşulları $(0.9, 0.6, 0.6, 0.6)$ olarak seçilmiştir.

6. SONUÇLAR

Bu çalışmada Lotka Volterra modelinden yola çıkarak bir av iki avcı türü mevcut olan aynı zamanda ikinci avcı türünün hafızaya bağımlı olduğu dört bileşenli yeni bir matematiksel model oluşturulmuştur. Çalışmamızın ana odak noktası olan hafıza terimi, birinci avcı türünde bulunmaması kabul edilebilir bir varsayımdır. Yani Q_1 avcısı yalnızca avın mevcut yoğunluğuna bağlıdır. Ancak Q_2 avcısı hafızaya bağımlı olduğu için yoğunluğunun yalnızca o andaki avın yoğunluğundan değil, aynı zamanda yakın geçmişteki av yoğunluğundan etkilendiği gözlemlenmiştir. Bu şekilde, sistem dinamikleri üzerinde doğrudan hafızanın etkisi incelenebilmektedir. Hafıza etkisinin düşük $\omega = 0.1$ ve yüksek $\omega = 1$ değerleri için ω parametresi seçilerek simülasyonlar oluşturulmuştur. Daha büyük ω dikkate alındığında geçmiş etkinin daha uzun bir zaman aralığında yaşandığı gözlemlenmiştir. Böylece ω geçmiş etkinin ölçüsü olarak kabul edilebilir. Simülasyonlarımızda rekabet olmadığında küçük ω değeri için av ve ikinci avcı türünde kararsızlık olduğu ve aynı zamanda birinci avcı türünün yok olma eğiliminde olduğu sonuçlarını elde ettik. Öte yandan, büyük ω üç türün de kararlılığını etkiler. Yani geçmiş etki daha büyük bir zaman aralığı için mevcut olduğunda tüm türlerin kararlılığı ve kalıcılığı mümkündür. Bulgularımız, avcılardan birinin neslinin tükenme eğiliminde olduğunu gösteriyor. Bu şuradan da görülebilir şekil 5.2 de Q_1 avcısının bellek parametresine bağlı olmadan neslinin tükendiği yer. Ayrıca, ω nın düşük ve yüksek oranlarında Q_1 ve Q_2 avcıları yok olma eğilimindedir. Böylece, zayıflayan hafıza, modelin dinamiklerini ve kararlılığını önemli ölçüde etkiler. Modele dahil edilen bellek terimi yerel olmayan bir yapıya sahip olduğundan, Klasik yerel av-avcı modellerle karşılaştırıldığında daha karmaşık ve gerçekçi sonuçlar elde etmek mümkündür.

KAYNAKLAR

- Alebraheem, J., & Hasan, Y. A. (2014). Dynamics of a two predator–one prey system. *Computational and Applied Mathematics*, 33, 767–780.
- Ali, M. R., Raut, S., Sarkar, S., & Ghosh, U. (2021). Unraveling the combined actions of a holling type iii predator–prey model incorporating allee response and memory effects. *Computational and Mathematical Methods*, 3(2), e1130.
- Allee, W. C., Park, O., Emerson, A. E., Park, T., Schmidt, K. P., et al. (1949). *Principles of animal ecology*. (No. Edn 1). WB Saundere Co. Ltd.
- Andersson, M., & Erlinge, S. (1977). Influence of predation on rodent populations. *Oikos*, 591–597.
- Arditi, R., Abillon, J., & Da Silva, J. V. (1978). A predator-prey model with satiation and intraspecific competition. *Ecological Modelling*, 5(3), 173–191.
- Armstrong, R. A., & McGehee, R. (1980). Competitive exclusion. *The American Naturalist*, 115(2), 151–170.
- Arribas, R., Touchon, J. C., & Gomez-Mestre, I. (2018). Predation and competition differentially affect the interactions and trophic niches of a neotropical amphibian guild. *Frontiers in Ecology and Evolution*, 6, 28.
- Bacaër, N., & Bacaër, N. (2011). Lotka, volterra and the predator–prey system (1920–1926). *A short history of mathematical population dynamics*, 71–76.
- Baydemir, P. (2018). *Leslie tipi bir ayırık av-avcı popülasyon modelinin kararlılık ve neimark-sacker çatallanma analizi* (Unpublished master’s thesis). TOBB ETÜ Fen Bilimleri Enstitüsü.
- Begon, M., Harper, J. L., Townsend, C. R., et al. (1986). *Ecology. individuals, populations and communities*. Blackwell scientific publications.
- Beneden, P. J. (1875). *Les commensaux et les parasites dans le règne animal* (Vol. 9). Baillière.
- Bennett, R. E. (2008). *Dynamical models in epidemiology and evolution*. The University of Liverpool (United Kingdom).
- Birch, L. C. (1957). The meanings of competition. *The American Naturalist*, 91(856), 5–18.

- Blaszak, T., & Hu, D. W. (2019). Lotka-volterra models of predator-prey relationships. *web. mst. edu, Retrieved*, 09–30.
- Bodine, E. N., & Yust, A. E. (2017). Predator-prey dynamics with intraspecific competition and an allee effect in the predator population. *Letters in Biomathematics*, 4(1), 23–38.
- Brauer, F., Castillo-Chavez, C., & Castillo-Chavez, C. (2012). *Mathematical models in population biology and epidemiology* (Vol. 2). Springer.
- Casper, B. B., & Jackson, R. B. (1997). Plant competition underground. *Annual review of ecology and systematics*, 545–570.
- Cavani, M., & Farkas, M. (1994). Bifurcations in a predator-prey model with memory and diffusion. i: Andronov-hopf bifurcation. *Acta Mathematica Hungarica*, 63(3), 213–229.
- Çağlar, S. (2019). Matematik ve Biyoloji Birleşirse: Biyomatematik Yani Matematiksel Biyoloji. <https://www.matematikselsel.org/matematik-ile-biyoloji-arasinda-bir-kopru-biyomatematik/>. ([Accessed 05-Jul-2023])
- Chesson, P., & Kuang, J. J. (2008). The interaction between predation and competition. *Nature*, 456(7219), 235–238.
- Chou, C.-S., & Friedman, A. (2016). *Introduction to mathematical biology*. Springer.
- Cohen, J. E. (1995). How many people can the earth support? *The Sciences*, 35(6), 18–23.
- Connell, J. H. (1983). On the prevalence and relative importance of interspecific competition: evidence from field experiments. *The American Naturalist*, 122(5), 661–696.
- Dawes, J., & Souza, M. (2013). A derivation of holling’s type i, ii and iii functional responses in predator–prey systems. *Journal of theoretical biology*, 327, 11–22.
- Debnath, S., Majumdar, P., Sarkar, S., & Ghosh, U. (2022). Memory effect on prey-predator dynamics: Exploring the role of fear effect, additional food and anti-predator behavior of prey. *Journal of Computational Science*, 101929.
- Denny, M. (2014). Buzz holling and the functional response. *Bulletin of the Ecological Society of America*, 95(3), 200–203.

- De Vrese, M., Stegelmann, A., Richter, B., Fenselau, S., Laue, C., & Schrezenmeir, J. (2001). Probiotics—compensation for lactase insufficiency. *The American journal of clinical nutrition*, 73(2), 421s–429s.
- Djilali, S., & Ghanbari, B. (2021). Dynamical behavior of two predators–one prey model with generalized functional response and time-fractional derivative. *Advances in difference Equations*, 2021(1), 1–19.
- Dönmez, S., & Çelik, M. A. (2017). Tek taraflı birliktelik (kommensalizm), karşılıklı fayda birlikteliği (mutualizm) ve asalaklık (parazitizm) üçgeninde insan-doğa ilişkileri. *İnsan ve İnsan*, 4(14), 301–313.
- Dubey, B., & Upadhyay, R. (2004). Persistence and extinction of one-prey and two-predators system. *Nonlinear Analysis: Modelling and Control*, 9(4), 307–329.
- Erbaş, A. K., Kertil, M., Çetinkaya, B., Çakıroğlu, E., Alacacı, C., & Baş, S. (2014). Matematik eğitiminde matematiksel modelleme: Temel kavramlar ve farklı yaklaşımlar. *Kuram ve Uygulamada Eğitim Bilimleri*, 14(4), 1–21.
- Farkas, A., Farkas, M., & Szabó, G. (1988). Multiparameter bifurcation diagrams in predator-prey models with time lag. *Journal of Mathematical biology*, 26(1), 93–103.
- Farkas, M. (1984). Stable oscillations in a predator-prey model with time lag. *Journal of mathematical analysis and applications*, 102(1), 175–188.
- Flores, D. L. (1988). Wildlife ecology and management. by william l. robinson and eric g. bolen.(new york: Macmillan publishing co., 1985. 478 pp. index, bibliography, photographs, charts, tables. 23.95).
- Freedman, H. I., & Wolkowicz, G. S. (1986). Predator-prey systems with group defence: the paradox of enrichment revisited. *Bulletin of Mathematical Biology*, 48(5-6), 493–508.
- Fujii, K. (1977). Complexity-stability relationship of two-prey-one-predator species system model: Local and global stability. *Journal of Theoretical Biology*, 69(4), 613–623.
- Gause, G. F., & Witt, A. (1935). Behavior of mixed populations and the problem of natural selection. *The American Naturalist*, 69(725), 596–609.

- Gavin, C., Pokrovskii, A., Prentice, M., & Sobolev, V. (2006). Dynamics of a lotka-volterra type model with applications to marine phage population dynamics. In *Journal of physics: Conference series* (Vol. 55, p. 80).
- Ghanbari, B., & Djilali, S. (2020). Mathematical analysis of a fractional-order predator-prey model with prey social behavior and infection developed in predator population. *Chaos, Solitons & Fractals*, *138*, 109960.
- Ghanbari, B., & Kumar, D. (2019). Numerical solution of predator-prey model with beddington-deangelis functional response and fractional derivatives with mittag-leffler kernel. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, *29*(6), 063103.
- Ghosh, U., Pal, S., & Banerjee, M. (2021). Memory effect on bazykin's prey-predator model: Stability and bifurcation analysis. *Chaos, Solitons & Fractals*, *143*, 110531.
- Goel, N. S., Maitra, S. C., & Montroll, E. W. (1971). On the volterra and other nonlinear models of interacting populations. *Reviews of modern physics*, *43*(2), 231.
- Gökçe, A. (2022). The influence of past in a population system involving intraspecific competition and allee effect. *The European Physical Journal Plus*, *137*(2), 200.
- Goldberg, D. E., & Barton, A. M. (1992). Patterns and consequences of interspecific competition in natural communities: a review of field experiments with plants. *The American Naturalist*, *139*(4), 771–801.
- Gravemeijer, K. P., Lehrer, R., van Oers, H., & Verschaffel, L. (2013). *Symbolizing, modeling and tool use in mathematics education* (Vol. 30). Springer Science & Business Media.
- Gross, L., Beals, M., & Harrell, S. (2019). Type ii functional response: Holling's disk equation.
- Guin, L. N., & Mandal, P. K. (2014). Spatiotemporal dynamics of reaction–diffusion models of interacting populations. *Applied Mathematical Modelling*, *38*(17-18), 4417–4427.
- Gurevitch, J., Morrow, L. L., Wallace, A., & Walsh, J. S. (1992). A meta-analysis of competition in field experiments. *The American Naturalist*, *140*(4), 539–572.

- Hardin, G. (1960). The competitive exclusion principle: An idea that took a century to be born has implications in ecology, economics, and genetics. *science*, 131(3409), 1292–1297.
- Hassell, M., & Comins, H. (1976). Discrete time models for two-species competition. *Theoretical Population Biology*, 9(2), 202–221.
- Hassell, M. P. (2020). *The dynamics of arthropod predator-prey systems.(mpb-13), volume 13* (Vol. 111). Princeton University Press.
- Holling, C. S. (1959a). The components of predation as revealed by a study of small-mammal predation of the european pine sawfly¹. *The Canadian Entomologist*, 91(5), 293–320.
- Holling, C. S. (1959b). Some characteristics of simple types of predation and parasitism¹. *The Canadian Entomologist*, 91(7), 385–398.
- Holling, C. S. (1961). Principles of insect predation. *Annual review of entomology*, 6(1), 163–182.
- Holling, C. S. (1965). The functional response of predators to prey density and its role in mimicry and population regulation. *The Memoirs of the Entomological Society of Canada*, 97(S45), 5–60.
- Hsu, S., Hubbell, S., & Waltman, P. (1978). A contribution to the theory of competing predators. *Ecological Monographs*, 48(3), 337–349.
- Hsu, S., & Hubbell, S. P. (1979). Two predators competing for two prey species: an analysis of macarthur's model. *Mathematical Biosciences*, 47(3-4), 143–171.
- Huang, J., Ruan, S., & Song, J. (2014). Bifurcations in a predator–prey system of leslie type with generalized holling type iii functional response. *Journal of Differential Equations*, 257(6), 1721–1752.
- Huffaker, C., et al. (1958). Experimental studies on predation: dispersion factors and predator-prey oscillations. *Hilgardia*, 27(14), 343–383.
- In, R. (n.d.). A tour of the generalized lotka-volterra model.
- Jeschke, J. M., Laforsch, C., Diel, P., Diller, J. G., Horstmann, M., & Tollrian, R. (2021). Predation.
- Jørgensen, S., FATH, B., BASTIANONI, S., MARQUES, J., MULLER, F., NIELSEN, S., et al. (2007). Ecosystem principles have broad explanatory power in ecology.

A new ecology: systems perspective. Oxford: Elsevier.

- Jorgensen, S. E., & Fath, B. D. (2014). *Encyclopedia of ecology*. Newnes.
- Kalaisekar, A., Padmaja, P., Bhagwat, V., & Patil, J. (2017). Chapter 3 - biology, behavior, and ecology. In A. Kalaisekar, P. Padmaja, V. Bhagwat, & J. Patil (Eds.), *Insect pests of millets* (p. 73-121). Academic Press. doi: <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-804243-4.00003-3>
- Karakulak, E., Tan, R. K., & Mutlu, R. (2021). Stm32f429 discovery board-based emulator for lotka-volterra equations. *Journal of the Institute of Science and Technology, 11*(3), 1887–1895.
- Kazarinoff, N., & Van Den Driessche, P. (1978). A model predator-prey system with functional response. *Mathematical Biosciences, 39*(1-2), 125–134.
- Kermack, W. O., & McKendrick, A. G. (1927). A contribution to the mathematical theory of epidemics. *Proceedings of the royal society of london. Series A, Containing papers of a mathematical and physical character, 115*(772), 700–721.
- Krebs, C. J. (1985). *Ecology; the experimental analysis of distribution and abundance*.
- Kropotkin, P. A. (1902). *Mutual aid: a factor or evolution*. McClure Phillips and Company.
- Lamontagne, Y., Coutu, C., & Rousseau, C. (2008). Bifurcation analysis of a predator–prey system with generalised holling type iii functional response. *Journal of Dynamics and Differential Equations, 20*(3), 535–571.
- Liu, M., & Mandal, P. S. (2015). Dynamical behavior of a one-prey two-predator model with random perturbations. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 28*(1-3), 123–137.
- Liu, Q., & Jiang, D. (2019). Stationary distribution and extinction of a stochastic one-prey two-predator model with holling type ii functional response. *Stochastic Analysis and Applications, 37*(3), 321–345.
- Líznarová, E., & Pekár, S. (2013). Dangerous prey is associated with a type 4 functional response in spiders. *Animal Behaviour, 85*(6), 1183–1190.
- Llibre, J., & Xiao, D. (2014). Global dynamics of a lotka–volterra model with two predators competing for one prey. *SIAM Journal on Applied Mathematics, 74*(2),

434–453.

- Lotka, A. J. (1920). Analytical note on certain rhythmic relations in organic systems. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 6(7), 410–415.
- Lotka, A. J. (1925). *Elements of physical biology*. Williams & Wilkins.
- Ma, Y.-A., & Qian, H. (2015). A thermodynamic theory of ecology: Helmholtz theorem for lotka–volterra equation, extended conservation law, and stochastic predator–prey dynamics. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 471(2183), 20150456.
- MacArthur, R., & Levins, R. (1967). The limiting similarity, convergence, and divergence of coexisting species. *The american naturalist*, 101(921), 377–385.
- MacDonald, N. (1976). Time delay in prey-predator models. *Mathematical biosciences*, 28(3-4), 321–330.
- MacDonald, N. (1977). Time delay in prey-predator models—ii. bifurcation theory. *Mathematical biosciences*, 33(3-4), 227–234.
- Majumdar, P., Debnath, S., Sarkar, S., & Ghosh, U. (2022). The complex dynamical behavior of a prey-predator model with holling type-iii functional response and non-linear predator harvesting. *International Journal of Modelling and Simulation*, 42(2), 287–304.
- Mbava, W., Mugisha, J., & Gonsalves, J. W. (2017). Prey, predator and super-predator model with disease in the super-predator. *Applied Mathematics and Computation*, 297, 92–114.
- Melchionda, D., Pastacaldi, E., Perri, C., Banerjee, M., & Venturino, E. (2018). Social behavior-induced multistability in minimal competitive ecosystems. *Journal of Theoretical Biology*, 439, 24–38.
- Moore, J. F. (1993). Predators and prey: a new ecology of competition. *Harvard business review*, 71(3), 75–86.
- Morgan, B. J. (1976). Stochastic models of grouping changes. *Advances in Applied Probability*, 8(1), 30–57.
- Mukherjee, D. (2021). Effect of fear on two predator-one prey model in deterministic and fluctuating environment. *Mathematics in Applied Sciences and Engineering*, 2(1), 55–71.

- Murray, J. D. (2002). *Mathematical biology: I. an introduction. interdisciplinary applied mathematics. Mathematical Biology, Springer, 17.*
- Nicholson, A. J., & Bailey, V. A. (1935). The balance of animal populations.—part i. In *Proceedings of the zoological society of london* (Vol. 105, pp. 551–598).
- Oaten, A., & Murdoch, W. W. (1975). Functional response and stability in predator-prey systems. *The American Naturalist, 109*(967), 289–298.
- Patzek, T. W., & Croft, G. D. (2010). A global coal production forecast with multi-hubbert cycle analysis. *Energy, 35*(8), 3109–3122.
- Persson, L. (1991). Behavioral response to predators reverses the outcome of competition between prey species. *Behavioral ecology and sociobiology, 28*, 101–105.
- Persson, L., & Diehl, S. (1990). Mechanistic individual-based approaches in the population/community ecology of fish. In *Annales zoologici fennici* (pp. 165–182).
- Pimm, S. L. (1979). The structure of food webs. *Theoretical population biology, 16*(2), 144–158.
- Pound, R. (1893). Symbiosis and mutualism. *The American Naturalist, 27*(318), 509–520.
- Real, L. A. (1977). The kinetics of functional response. *The American Naturalist, 111*(978), 289–300.
- Saeedian, M., Khalighi, M., Azimi-Tafreshi, N., Jafari, G., & Ausloos, M. (2017). Memory effects on epidemic evolution: The susceptible-infected-recovered epidemic model. *Physical Review E, 95*(2), 022409.
- Safdari, H., Zare Kamali, M., Shirazi, A., Khalighi, M., Jafari, G., & Ausloos, M. (2016). Fractional dynamics of network growth constrained by aging node interactions. *PLOS one, 11*(5), e0154983.
- Sahoo, B. (2012). A predator-prey model with general holling interactions in presence of additional food. *International Journal of Plant Research, 2*(1), 47–50.
- Sahoo, B., & Poria, S. (2019). Dynamics of predator–prey system with fading memory. *Applied Mathematics and Computation, 347*, 319–333.
- Sarnelle, O., & Wilson, A. E. (2008). Type iii functional response in daphnia. *Ecology,*

89(6), 1723–1732.

- Savitri, D., Suryanto, A., Kusumawinahyu, W. M., et al. (2019). A dynamics behaviour of two predators and one prey interaction with competition between predators. In *Iop conference series: Materials science and engineering* (Vol. 546, p. 052069).
- Sayekti, I., Malik, M., & Aldila, D. (2017). One-prey two-predator model with prey harvesting in a food chain interaction. In *Aip conference proceedings* (Vol. 1862, p. 030124).
- Schoener, T. W. (1983). Field experiments on interspecific competition. *The american naturalist*, 122(2), 240–285.
- Schtickzelle, M. (1981). Pierre-françois verhulst (1804-1849). la première découverte de la fonction logistique. *Population (french edition)*, 541–556.
- Sepúlveda, F., & Carrillo, R. (2008). Functional response of the predatory mite chileseius camposi (acarina: Phytoseiidae) on densities of it prey, panonychus ulmi (acarina: Tetranychidae). *Revista de Biología Tropical*, 56(3), 1255–1260.
- Sharma, M., & Kumar, P. (2006). Chemical oscillations: 2. mathematical modelling. *Resonance*, 11, 61–69.
- Shim, H., & Fishwick, P. (2008). Visualization and interaction design for ecosystem modeling. In S. E. Jørgensen & B. D. Fath (Eds.), *Encyclopedia of ecology* (p. 3685-3693). Oxford: Academic Press. doi: <https://doi.org/10.1016/B978-008045405-4.00225-1>
- Shome, P., Maiti, A., & Poria, S. (2016). Effects of intraspecific competition of prey in the dynamics of a food chain model. *Modeling Earth Systems and Environment*, 2(4), 1–11.
- Sih, A. (1984). The behavioral response race between predator and prey. *The American Naturalist*, 123(1), 143–150.
- Şişli, M. (n.d.). Competition between insect species. *Plant Protection Bulletin*, 6(3).
- Takeuchi, Y. (1996). *Global dynamical properties of lotka-volterra systems*. World Scientific.
- Thompson, J. N. (1999). Specific hypotheses on the geographic mosaic of coevolution. *the american naturalist*, 153(S5), S1–S14.
- Tsoularis, A., & Wallace, J. (2002). Analysis of logistic growth models. *Mathematical*

biosciences, 179(1), 21–55.

- Van Der Meer, J., & Ens, B. J. (1997). Models of interference and their consequences for the spatial distribution of ideal and free predators. *Journal of Animal Ecology*, 846–858.
- Verhulst, P.-F. (1838). Notice sur la loi que la population suit dans son accroissement. *Corresp. Math. Phys.*, 10, 113–126.
- Volterra, V. (1926). Fluctuations in the abundance of a species considered mathematically. *Nature*, 118(2972), 558–560.
- Volterra, V. (1939). The general equations of biological strife in the case of historical actions. *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, 6(1), 4–10.
- Xiao, D., & Ruan, S. (2001). Global analysis in a predator-prey system with nonmonotonic functional response. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 61(4), 1445–1472.
- Xu, C., Liao, M., & He, X. (2011). Stability and hopf bifurcation analysis for a lotka-volterra predator-prey model with two delays. *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*, 21(1), 97–107.
- Yılmaz, Z., Maden, S., & Gökçe, A. (2022). Dynamics and stability of two predators–one prey mathematical model with fading memory in one predator. *Mathematics and Computers in Simulation*, 202, 526–539.
- Young, P. (1993). Technological growth curves: a competition of forecasting models. *Technological forecasting and social change*, 44(4), 375–389.

ÖZGEÇMİŞ

Kışisel Bilgiler	
Adı Soyadı	Zeynep Yılmaz
Doğum Yeri	
Doğum Tarihi	
Uyruğu	<input checked="" type="checkbox"/> T.C. <input type="checkbox"/> Diğer:
Telefon	
E-Posta Adresi	
Eğitim Bilgileri	
Lisans	
Üniversite	Ordu Üniversitesi
Fakülte	Fen Edebiyat Fakültesi
Bölümü	Matematik
Mezuniyet Yılı	28.06.2021
Zeynep Yılmaz, Selahattin Maden, ve Aytül Gökçe. "Dynamics and stability of two predators–one prey mathematical model with fading memory in one predator." Mathematics and Computers in Simulation 202 (2022): 526-539.	