T. C.

ORDU ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KESİRLİ İNTEGRAL OPERATÖRLER İÇEREN HERMİTE-HADAMARD-MERCER TİPLİ İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ

MÜCAHİT ASLAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ORDU 2022

TEZ BİLDİRİMİ

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan ve kullanılan intihal tespit programının sonuçlarına göre; bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

MÜCAHİT ASLAN

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

KESİRLİ İNTEGRAL OPERATÖRLER İÇEREN HERMİTE-HADAMARD-MERCER TİPLİ İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ

MÜCAHİT ASLAN

ORDU ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ, 133 SAYFA

(TEZ DANIŞMANI: PROF. DR. ERHAN SET)

Bu tez çalışması, dört bölümden oluşmaktadır. Tezin birinci bölümü, giriş kısmını içermektedir. İkinci bölümün ilk kısmında, konveks fonksiyonlar ile ilgili tanımlara, teoremlere, örneklere, özel bazı fonksiyonlara, fonksiyon uzaylarına ve literatürde tanımlanan bazı eşitsizliklere yer verilmiştir. İkinci kısmında ise farklı türden kesirli integral operatörleri içeren Hermite-Hadamard-Mercer tipli eşitsizliklerin genelleştirmeleri, genişlemeleri ve farklı versiyonları üzerine yapılmış literatürdeki eşitsizliklere yer verilmiştir. Üçüncü bölümde, Raina'nın genelleştirilmiş kesirli integral operatörleri için Hermite-Hadamard-Mercer tipli eşitsizlikler elde edilmiştir. Dördüncü bölümde ise bazı sonuç ve önerilerden bahsedilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Jensen-Mercer eşitsizliği, Konveks fonksiyonlar, Hermite-Hadamard-Mercer eşitsizliği, Kesirli integral operatörleri, Kesirli türevler, Genelleştirilmiş kesirli integral operatörü.

ABSTRACT

HERMITE-HADAMARD-MERCER TYPE INTEGRAL INEQUALITIES INVOLVING FRACTIONAL INTEGRAL OPERATORS

MÜCAHİT ASLAN

ORDU UNIVERSITY INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

MATHEMATICS

MASTER THESIS, 133 PAGES

(SUPERVISOR: PROF. DR. ERHAN SET)

This thesis consists of four parts. The first part of the thesis includes the introduction part. In the first part of the second chapter, definitions of convex functions, theorems, examples, some special functions, function spaces and some inequalities defined in the literature are given. In the second part, inequalities in the literature on generalizations, extensions and different versions of Hermite-Hadamard-Mercer type inequalities containing different kinds of fractional integral operators are given. In the third chapter, Hermite-Hadamard-Mercer type inequalities are obtained for Raina's generalized fractional integral operators. In the fourth chapter, some conclusions and recommendations are mentioned.

Anahtar Kelimeler: Jensen-Mercer inequalities, Convex functions, Hermite-Hadamard-Mercer inequalities, Fractional integral operators, Fractional derivatives, Generalized fractional integral operator.

TEŞEKKÜR

Tez konumun belirlenmesi, çalışmanın yürütülmesi ve yazımı süresince gösterdiği her türlü destekten dolayı başta danışman hocam Sayın Prof. Dr. Erhan SET'e ve tez yazım aşamasında desteklerini esirgemeyen arkadaşlarıma teşekkür ederim.

Aynı zamanda, maddi ve manevi desteklerini her an üzerimde hissettiğim değerli aileme teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER ve KISALTMALAR LİSTESİ

$\mathbb{R}$	:	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	:	Kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	:	Tam sayılar kümesi
$\boldsymbol{\Gamma}$	:	Gama fonksiyonu
$\boldsymbol{\Gamma_k}$	:	k-Gama fonksiyonu
$\boldsymbol{B}$	:	Beta fonksiyonu
$\mathbf{B}_x(\alpha, \beta)$	:	Tamamlanmamış beta fonksiyonu
$L\,[a, b]$	:	[a, b] aralığında integrallenebilen fonksiyonların kümesi
f'	:	*f* fonksiyonunun birinci mertebeden türevi
J_{a+}^{α}	:	α. mertebeden sol taraflı Riemann-Liouville kesirli integrali
J_{b-}^{α}	:	α. mertebeden sağ taraflı Riemann-Liouville kesirli integrali
${}^{C}D_{a+}^{\alpha}$	:	α. mertebeden sol taraflı Caputo kesirli türev operatörü
${}^{C}D_{b^-}^{\alpha}$	:	α. mertebeden sağ taraflı Caputo kesirli türev operatörü
${}_{a}^{\beta}\tilde{\mathfrak{J}}^{\alpha}$	:	α. mertebeden sol taraflı yeni uyumlu kesirli integral operatörü
${}^{\beta}\tilde{\mathfrak{J}}_{b}^{\alpha}$	:	α. mertebeden sağ taraflı yeni uyumlu kesirli integral operatörü
${}_{k}I_{a^+}^{\alpha;\Psi}$	:	α. mertebeden sol $\Psi-$Riemann-Liouville k-kesirli integrali
${}_{k}I_{b^-}^{\alpha;\Psi}$	:	α. mertebeden sağ Ψ-Riemann-Liouville k-kesirli integrali
${}^{C}D_{a+}^{\alpha,k}$	:	α. mertebeden sol taraflı Caputo k-kesirli türev operatörü
${}^{C}D_{b^-}^{\alpha,k}$	:	α. mertebeden sağ taraflı Caputo k-kesirli türev operatörü
H_{a+}^{α}	:	α. mertebeden sol taraflı Hadamard kesirli integrali
H_{b-}^{α}	:	α. mertebeden sağ taraflı Hadamard kesirli integrali
${}^{\rho}I_{a+}^{\alpha}$	:	α. mertebeden sol taraflı Katugampola kesirli integrali
${}^{\rho}I_{b-}^{\alpha}$	:	α. mertebeden sağ taraflı Katugampola kesirli integrali
${}_{k}J_{a^+}^{\alpha}$	:	α. mertebeden sol taraflı Riemann-Liouville k-kesirli integrali
${}_{k}J_{b^-}^{\alpha}$	:	α. mertebeden sağ taraflı Riemann-Liouville k-kesirli integrali
I_{α}^{a}	:	α. mertebeden sol taraflı uyumlu kesirli integral operatörü
${}^{b}I_{\alpha}$	:	α. mertebeden sağ taraflı uyumlu kesirli integral operatörü
${}_{k}^{\beta}\tilde{\mathfrak{J}}_{a^+}^{\alpha}$	:	α. mertebeden sol taraflı yeni uyumlu k-kesirli integral operatörü
${}_{k}^{\beta}\tilde{\mathfrak{J}}_{b^-}^{\alpha}$	:	α. mertebeden sağ taraflı yeni uyumlu k-kesirli integral operatörü
$\mathcal{J}_{a+}^{\beta,k}$	:	Sol taraflı genelleştirilmiş orantılı kesirli integral operatörü
$\mathcal{J}_{b-}^{\beta,k}$	:	Sağ taraflı genelleştirilmiş orantılı kesirli integral operatörü
${}_{a}^{AB}I_{t}^{\alpha}$	:	Atangana-Baleanu kesirli integral operatörü
${}_{h}^{GRL}I_{a^+}$	:	Sol taraflı Genelleştirilmiş kesirli integral operatörü
${}_{h}^{GRL}I_{b^-}$	:	Sağ taraflı Genelleştirilmiş kesirli integral operatörü
$I_{a+}^{\alpha;\Psi}$	:	α. mertebeden sol taraflı $\Psi-$Riemann-Liouville kesirli integrali
$I_{b-}^{\alpha;\Psi}$	:	α. mertebeden sağ taraflı Ψ-Riemann-Liouville kesirli integrali
$\mathcal{J}_{\rho,\lambda,a^+;\omega}^{\sigma}$	:	Sol taraflı genelleştirilmiş kesirli integral operatörü
$\mathcal{J}_{\rho,\lambda,b^-;\omega}^{\sigma}$	:	Sağ taraflı genelleştirilmiş kesirli integral operatörü
$\varepsilon_{\rho,\lambda,a^+;\omega}^{\gamma}$	:	Prabhakar sol taraflı kesirli integral operatörü
$\varepsilon_{\rho,\lambda,,b^-;\omega}^{\gamma}$	:	Prabhakar sağ taraflı kesirli integral operatörü

1. GİRİŞ

Eşitsizlikler ve konveks fonksiyonlar matematiğin birçok alanında kullanılan önemli bir yere sahiptir. Eşitsizlikler hakkında yapılan ilk inceleme Hardy, Littlewood ve Polyá tarafından 1934'te yazılan "Inequalities" adlı kitap olmuştur [27]. E. F. Beckenbach ve R. Bellman (1961) tarafından 1934'ten 1960'a kadar olan döneminde eşitsizlikler üzerine elde edilen bazı ilginç sonuçları içeren "Inequalities" adlı ikinci kitap olmuştur [13]. Bununla birlikte 1970'te Mitrinović tarafından yayınlanan "Analytic Inequalities" adlı kitap yukarıda adı geçen iki kitapta da yer almayan yeni konular içermektedir [44]. Bu üç ana kaynağın yanı sıra Mitrinović ve arkadaşları (1993) tarafından "Classical and New Inequalities in Analysis" [45], Pachpatte (2005) tarafından "Mathematical Inequalities" [51] ve son yıllarda da Sever S. Dragomir, V. Lakshmikantham, Ravi P. Agarwal gibi araştırmacılar tarafından eşitsizlikler konusunda pek çok kitap, makale ve monografi yazılmıştır. Konveks fonksiyon sınıfının eşitsizlikler teorisinde birçok uygulaması vardır ve bu fonksiyon sınıfının yardımıyla birçok önemli eşitsizlik elde edilir. Son yıllarda eşitsizlik teorisinde yeni sonuçların elde edilmesinde sık kullanılan yöntemlerden biri de literatürde iyi bilinen Hölder, Minkowski eşitsizlikleri gibi temel eşitsizlikler ile birlikte kesirli integral operatörlerini kullanarak klasik integral eşitsizliklerinin yeni genelleştirmelerini, genişlemelerini ve farklı varyasyonlarını elde etmektir. Bu bakımdan birçok klasik integral eşitsizliğinin kesirli integral operatörleri yardımıyla yeni versiyonları birçok araştırmacı tarafından literatüre kazandırılmıştır. Bu eşitsizliklerinden biri de Hermite-Hadamard-Mercer eşitsizliği olup bu eşitsizliğin birçok kesirli integral operatörü yardımıyla genelleştirmesi, genişlemesi ve yeni versiyonları M. Z. Sarıkaya, A. O. Akdemir, S. I. Butt, T. Abdeljawad, J. Zhao, M. A. Ali, H-H. Chu gibi araştırmacılar tarafından elde edilmiştir.

Bu tez çalışmasında, ilk olarak literatürde 2021 yılı ve öncesinde yapılmış Riemann-Liouville kesirli integralleri, Riemann-Liouville k-kesirli integralleri, Caputo k-kesirli türevleri, uyumlu kesirli integralleri, yeni uyumlu kesirli integralleri, yeni uyumlu k-kesirli integralleri, Ψ-Riemann-Liouville kesirli integralleri, Ψ-Riemann-Liouville k-kesirli integralleri, Atangana Baleanu kesirli integralleri ve genelleştirilmiş kesirli integral operatörleri kullanılarak elde edilen Hermite-Hadamard-Mercer tipli eşitsizlikler konu sınıflandırmasına göre bir arada sunulacaktır. Daha sonra tezin son bölümünde, Raina ve arkadaşları tarafından tanımlanan kesirli integral operatörü kullanılarak elde edilen Hermite-Hadamard-Mercer tipli eşitsizlikler sunulacaktır. Böylece kesirli integral operatörleri için Hermite-Hadamard-Mercer tipli eşitsizlikler bir arada sunulmuş olacaktır.

2. LİTERATÜR TARAMASI

2.1 Temel Kavramlar

Bu bölümde tez boyunca ihtiyaç duyulacak olan genel bilgilere yer verilecektir.

2.1.1 Bazı Özel Fonksiyonlar

Tanım 2.1.1 I, $\mathbb{R}$ de bir aralık ve $f : I \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda her $x, y \in I$ ve $t \in [0,1]$ için,

$$f\left(tx + (1-t)y\right) \leq tf(x) + (1-t)f(y) \tag{2.1.1}$$

eşitsizliği sağlanıyorssa f fonksiyonuna I üzerinde konveks fonksiyon denir. Eşitsizliğin yönü ters olması durumunda f fonksiyonuna konkav fonksiyon denir [54].

Tanım 2.1.2 $z \in \mathbb{C}$ olsun.

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona Gama fonksiyonu veya Euler-Gama fonksiyonu denir. Bu fonksiyon $\mathrm{Re}(z) > 0$ için yakınsaktır. Gama fonksiyonunun en temel özelliği $\alpha = n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$$

eşitliğidir. Ayrıca $\Gamma(1) = 1$ ve $n \in \mathbb{N}$ için tümevarım yöntemiyle

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n!$$

eşitliğine ulaşılır [31].

Tanım 2.1.3 $\Gamma(\alpha)$, Euler-Gama fonksiyonu ve $\mathbb{Z}_0^-$ pozitif olmayan tam sayılar kümesi olsun. Bu durumda

$$B(\alpha, \beta) = \begin{cases} \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1} dt & (\mathrm{Re}(\alpha) > 0; \mathrm{Re}(\beta) > 0) \\ \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} & \left(\alpha, \beta \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{Z}_0^-\right) \end{cases}$$

fonksiyonuna beta fonksiyonu denir. Ayrıca tamamlanmamış Beta fonksiyonu

$$B_x(\alpha, \beta) := \int_0^x t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1} dt \qquad (\mathrm{Re}(\alpha) > 0)$$

şeklinde ve genişletilmiş Beta fonksiyonu

$$B_p(\alpha,\beta)=\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}e^{\frac{p}{t(1-t)}}dt \qquad (\alpha,\beta,p>0)$$

şeklinde tanımlanır [67]. Burada Re$(p)>0$'dır.

2.1.2 Bazı Fonksiyon Uzayları

Tanım 2.1.4 $[a,b]$ aralığında tanımlı ve $p\geq 1$ için

$$||f||_p:=\left[\int_a^b |f(s)|^p ds\right]^{\frac{1}{p}}<\infty$$

normuna sahip tüm reel değerli Lebesque anlamında ölçülebilir fonksiyonların kümesi $L_p[a,b]$ ile gösterilir. Burada

$$||f||_\infty := \text{esssup}_{s\in[a,b]}|f(s)|<\infty$$

olarak tanımlanır.

Özel olarak $L_1[a,b]$ uzayı

$$||f||_1=\int_a^b |f(x)|dx<\infty$$

normuna sahip fonksiyonlar uzayıdır. Tez boyunca $L_1[a,b]$ uzayı $L[a,b]$ ile gösterilecektir [11].

Tanım 2.1.5 (a,b) aralığındaki $||\varphi||_{X_c^p}<\infty$ şartını sağlayan kompleks değerli Lebesque ölçülebilir φ dönüşümlerinin uzayı $X_c^p(a,b)$ $(c\in\mathbb{R},\quad 1\leq p\leq\infty)$ olsun. Burada

$$||\varphi||_{X_c^p}=\left(\int_a^b |x^c\varphi(x)|^p\frac{dx}{x}\right)^{\frac{1}{p}} \qquad (1\leq p\leq\infty)$$

ve

$$||\varphi||_{X_c^p}=\text{esssup}_{x\in(a,b)}\left[x^c|\varphi(x)|\right]$$

şeklinde tanımlıdır.
$c=1/p$ $(1\leq p\leq\infty)$ için X_c^p uzayı

$$||f||_p=\left(\int_a^b |f(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}<\infty \qquad (1\leq p\leq\infty)$$

$$||f||_\infty = \mathrm{esssup}_{a\leq t\leq b}|f(t)|$$

normları ile klasik $L_p[a,b]$ uzayına dönüşür [32].

2.1.3 Bazı Önemli Eşitsizlikler

Teorem 2.1.1 $p > 1$ ve $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ olmak üzere f ve g, $[a,b]$ aralığında tanımlı reel fonksiyonlar olsun. $|f|^p$ ve $|g|^q$, $[a,b]$ aralığında integrallenebilen fonksiyonlar ise

$$\int_a^b |f(x)g(x)|dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir [45].

Benzer şekilde iki katlı integraller için Hölder eşitsizliği aşağıdaki gibi verilir:

$$\int_a^b\int_a^b |f(x)g(x)|dxdy \leq \left(\int_a^b\int_a^b |f(x)|^p dxdy\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b\int_a^b |g(x)|^q dxdy\right)^{\frac{1}{q}}$$

Ayrıca Hölder eşitsizliğinin bir sonucu olan ve daha iyi sonuçlar elde etmek için kullanılan Power-Mean eşitsizliği aşağıdaki gibi ifade edilir.

Sonuç 2.1.1 $q \geq 1$ olsun. f ve g, $[a,b]$ aralığında tanımlı reel fonksiyonlar olmak üzere $|f|$ ve $|g|^q$, $[a,b]$ aralığında integrallenebilir fonksiyonlar ise

$$\int_a^b |f(x)g(x)|dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|dx\right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_a^b |f(x)||g(x)|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği elde edilir.

$0 < x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n$ ve $i=1,2,\ldots,n$ olmak üzere $\lambda_i > 0$ ve $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i = 1$ olsun. Bu takdirde Jensen eşitsizliği aşağıdaki gibidir.

Teorem 2.1.2 (Jensen Eşitsizliği) f, x_i $(i=1,2,\ldots,n)$'leri içeren bir aralıkta konveks bir fonksiyon ise,

$$f\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\right) \leq \left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f(x_i)\right) \tag{2.1.2}$$

eşitsizliği geçerlidir [45].

Lemma 2.1.1 f, konveks bir fonksiyon ise,

$$f\left(x_1+x_n-x_i\right) \leq f(x_1)+f(x_n)-f(x_i), \quad (1 \leq i \leq n) \tag{2.1.3}$$

eşitsizliği geçerlidir [42].

İspat. $y_i = x_1 + x_n - x_i$ olsun. Bu durumda $x_1 + x_n = x_i + y_i$ olur. Böylece x_1, x_n ve x_i, y_i çiftleri aynı orta noktaya sahiptir. Bu durumda öyle bir λ vardır ki,

$$x_i = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_n$$

$$y_i = (1-\lambda)x_1 + \lambda x_n$$

olur. Burada $0 \leq \lambda \leq 1$ ve $1 \leq i \leq n$ olur. Bundan dolayı (2.1.2) eşitsizliğini iki kez uygulayarak

$$\begin{aligned}
f(y_i) &\leq (1-\lambda)f(x_1)+\lambda f(x_n)\\
&= f(x_1)+f(x_n)-\left[\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_n)\right]\\
&\leq f(x_1)+f(x_n)-f\left(\lambda x_1+(1-\lambda)x_n\right)\\
&= f(x_1)+f(x_n)-f(x_i)
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $y_i = x_1 + x_n - x_i$ olduğu için lemmanın ispatı tamamlanır.

Teorem 2.1.3 (Jensen-Mercer Eşitsizliği) Teorem 2.1.2'nin şartları altında

$$f\left(x_1+x_n-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\right) \leq f(x_1)+f(x_n)-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f(x_i)$$

eşitsizliği geçerlidir [42].

İspat. (2.1.2) ve (2.1.3) eşitsizlikleri kullanılarak

$$\begin{aligned}
f\left(x_1+x_n-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\right) &\leq f\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(x_1+x_n-x_i)\right)\\
&\leq \sum_{i=1}^{n}\lambda_i f(x_1+x_n-x_i)\\
&\leq \sum_{i=1}^{n}\lambda_i\left[f(x_1)+f(x_n)-f(x_i)\right]
\end{aligned}$$

$$= \quad f(x_1) + f(x_n) - \sum_{i=1}^{n} \lambda f(x_i)$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Örnek 2.1.1 $\tilde{A} = x_1 + x_n - A$ ve $\tilde{G} = \frac{x_1 x_n}{G}$ olsun. Burada A ve G, x_i'nin aritmetik ve geometrik ortalamalarıdır.

i) $f(x) = -\log x$ konveks fonksiyonu göz önüne alınırsa Teorem 2.1.3'den

$$\tilde{A} \geq \tilde{G}$$

elde edilir. Bu eşitsizlik [43]'de farklı bir yöntemle bulunan bir eşitsizlik ailesinin özel bir durumudur.

ii) $0 < x \leq \frac{1}{2}$ olmak üzere $f(x) = \log \frac{1-x}{x}$ konveks fonksiyonu göz önüne alınırsa Teorem 2.1.3'den

$$\frac{\tilde{A}(x)}{\tilde{A}(1-x)} \leq \frac{\tilde{G}(x)}{\tilde{G}(1-x)}$$

elde edilir. Burada her i için $x_i \in (0, \frac{1}{2}]$'dir. Bu eşitsizlik ise [45]'de Ky-Fan eşitsizliğinin bir benzeridir.

Şimdi konveks fonksiyonlar kullanılarak elde edilen bir diğer önemli eşitsizlik verilecektir.

Teorem 2.1.4 (Hermite-Hadamard Eşitsizliği) I, R de bir aralık, $a, b \in I$ ve $a < b$ olmak üzere $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, konveks bir fonksiyon olsun. Bu takdirde;

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx \leq \frac{f(a) + f(b)}{2} \tag{2.1.4}$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada eşitsizliğin ters olması durumunda f fonksiyonu konkavdır [53].

Kian ve Moslehian, 2013 yılında Jensen-Mercer eşitsizliğini kullanarak aşağıdaki Hermite-Hadamard-Mercer tipli eşitsizlikleri elde etmişlerdir.

Teorem 2.1.5 f, $[a, b]$ aralığında konveks bir fonksiyon olsun. Bu durumda her $x, y \in$

$[a,b]$ için

$$\begin{aligned} f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right) &\leq f(a)+f(b)-\int_0^1 f\left(tx+(1-t)y\right)dt \\ &\leq f(a)+f(b)-f\left(\frac{x+y}{2}\right) \end{aligned} \tag{2.1.5}$$

ve

$$f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{1}{y-x}\int_x^y f(a+b-t)dt \leq f(a)+f(b)-\frac{f(x)+f(y)}{2} \tag{2.1.6}$$

eşitsizlikleri geçerlidir [36].

İspat. Her $m, M \in [a,b]$ için Jensen-Mercer eşitsizliği kullanılarak

$$f\left(a+b-\frac{m+M}{2}\right) \leq f(a)+f(b)-\frac{f(m)+f(M)}{2} \tag{2.1.7}$$

eşitsizliği yazılır. $t \in [0,1]$ ve $x, y \in [a,b]$ olmak üzere (2.1.7)'de m yerine $tx+(1-t)y$ ve M yerine $(1-t)x+ty$ olarak değişken değiştirmesi yapılırsa

$$f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right) \leq f(a)+f(b)-\frac{f\big(tx+(1-t)y\big)+f\big((1-t)x+ty\big)}{2} \tag{2.1.8}$$

elde edilir. (2.1.8)'in her iki tarafını $[0,1]$ aralığında t değişkenine göre integrali alınırsa

$$\begin{aligned} f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right) &\leq f(a)+f(b) \\ &\quad -\frac{1}{2}\int_0^1 \big(f(tx+(1-t)y)\big)+\big((1-t)x+ty\big)dt \end{aligned} \tag{2.1.9}$$

olur. Buradan

$$\int_0^1 f\big(tx+(1-t)y\big)dt = \int_0^1 f\big((1-t)x+ty\big)dt = \frac{1}{y-x}\int_x^y f(t)dt \tag{2.1.10}$$

olduğu göz önüne alınırsa (2.1.10), (2.1.9)'da yerine yazılırsa (2.1.5)'in ilk eşitsizliği elde edilir. (2.1.5)'deki ikinci eşitsizliğin ispatı, doğrudan Hermite-Hadamard eşitsizliğinden elde edilir. Şimdi ise (2.1.6)'nın ispatı verilecektir. Hermite-Hadamard eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} \int_0^1 f\big(a+b-(tx+(1-t)y\big)dt &= \int_0^1 f\big(t(a+b-x)+(1-t)(a+b-y)\big)dt \\ &\geq f\left(\frac{a+b-x+a+b-y}{2}\right) \end{aligned}$$

$$= \; f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right) \tag{2.1.11}$$

yazılır. Diğer taraftan Mercer eşitsizliği kullanılarak

$$f\big(a+b-(tx+(1-t)y\big) \leq f(a)+f(b)-\big(tf(x)+(1-t)f(y)\big) \tag{2.1.12}$$

yazılır. (2.1.12)'nin her iki tarafını $[0,1]$ aralığında t değişkenine göre integrali alınırsa

$$\begin{aligned}\int_0^1 f\big(a+b-(tx+(1-t)y\big)dt &\leq f(a)+f(b)-\int_0^1 \big(tf(x)+(1-t)f(y)\big)dt \\ &= f(a)+f(b)-\frac{f(x)+f(y)}{2} \end{aligned} \tag{2.1.13}$$

ifadesi elde edilir. Böylece (2.1.10), (2.1.11) ve (2.1.13)'den (2.1.6)'daki eşitsizlik elde edilir ve ispat tamamlanır.

2.2 Kesirli İntegraller Yardımıyla Hermite-Hadamard-Mercer Tipli Eşitsizlikler

Bu bölümde, bazı kesirli integraller ve bu integraller aracılığıyla elde edilen Hermite-Hadamard-Mercer tipli eşitsizlikler verilecektir.

2.2.1 Riemann-Liouville Kesirli İntegralleri İçin Hermite-Hadamard-Mercer Tipli Eşitsizlikler

Bu bölümde, konveks fonksiyonlar için Riemann-Liouville kesirli integral operatörleri içeren Hermite-Hadamard-Mercer tipli eşitsizlikler verilecektir.

Tanım 2.2.1 (Riemann-Liouville Kesirli İntegralleri) $f \in L[a,b]$ olsun. Bu durumda $\alpha > 0$ ve $[a,b](-\infty < a < b < \infty)$ reel eksen üzerinde sonlu bir aralık olmak üzere α. mertebeden sol ve sağ taraflı Riemann-Liouville kesirli integralleri sırasıyla,

$$J_{a^+}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt, \qquad x > a \tag{2.2.1}$$

ve

$$J_{b^-}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (t-x)^{\alpha-1} f(t)dt, \qquad x < b \tag{2.2.2}$$

şeklinde tanımlanır [58]. Burada $\Gamma(\alpha)$, gama fonksiyonu olup

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} dt$$

şeklinde tanımlanır. Eğer $\alpha = 1$ olması durumunda Riemann-Liouville kesirli integrali klasik integrale indirgenir. Ayrıca $\alpha = 0$ için $J_{a^+}^0 f(x) = J_{b^-}^0 f(x) = f(x)$'dir.

Öğülmüş ve Sarıkaya, 2021 yılında Riemann-Liouville kesirli integralleri yardımıyla aşağıdaki sonuçları elde etmişlerdir.

Teorem 2.2.1 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, konveks bir fonksiyon olsun. Bu durumda her $x, y \in [a, b]$ ve $\alpha > 0$ için

$$\begin{aligned} f\left(a + b - \frac{x+y}{2}\right) &\leq f(a) + f(b) - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(y-x)^\alpha}\left[J_{x^+}^\alpha f(y) + J_{y^-}^\alpha f(x)\right] \\ &\leq f(a) + f(b) - f\left(\frac{x+y}{2}\right) \end{aligned} \tag{2.2.3}$$

ve

$$\begin{aligned} f\left(a + b - \frac{x+y}{2}\right) &\leq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(y-x)^\alpha}\left[J_{(a+b-y)^+}^\alpha f(a+b-x) + J_{(a+b-x)^-}^\alpha f(a+b-y)\right] \\ &\leq \frac{f(a+b-x) + f(a+b-y)}{2} \\ &\leq f(a) + f(b) - \frac{f(x) + f(y)}{2} \end{aligned} \tag{2.2.4}$$

eşitsizlikleri geçerlidir [50].

İspat. Jensen-Mercer eşitsizliği kullanılarak her $x_1, y_1 \in [a, b]$ için

$$f\left(a + b - \frac{x_1 + y_1}{2}\right) \leq f(a) + f(b) - \frac{f(x_1) + f(y_1)}{2} \tag{2.2.5}$$

eşitsizliği yazılır.

$x, y \in [a, b]$ ve $t \in [0, 1]$ için (2.2.5)'de $x_1 = tx + (1-t)y$ ve $y_1 = (1-t)x + ty$ olarak değişken değiştirmesi yapılırsa

$$f\left(a + b - \frac{x+y}{2}\right) \leq f(a) + f(b) - \frac{f\big(tx + (1-t)y\big) + f\big((1-t)x + ty\big)}{2} \tag{2.2.6}$$

olur. (2.2.6)'nın her iki tarafını $t^{\alpha-1}$ ile çarpar $[0,1]$ aralığında t değişkenine göre integrali alınırsa

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{\alpha} f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right) \\
\leq\ & \frac{1}{\alpha}\big[f(a)+f(b)\big]-\frac{1}{2}\int_0^1 t^{\alpha-1}\left[f\big(tx+(1-t)y\big)+f\big((1-t)x+ty\big)\right]dt \\
=\ & \frac{1}{\alpha}\big[f(a)+f(b)\big]-\frac{1}{2(y-x)^{\alpha}}\left[\int_x^y (y-u)^{\alpha-1}f(u)du+\int_x^y (u-x)^{\alpha-1}f(u)du\right] \\
=\ & \frac{1}{\alpha}\big[f(a)+f(b)\big]-\frac{\Gamma(\alpha)}{2(y-x)^{\alpha}}\left[J_{x^+}^{\alpha}f(y)+J_{y^-}^{\alpha}f(x)\right]
\end{aligned}
$$

bulunur. Böylece

$$
f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right) \leq f(a)+f(b)-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(y-x)^{\alpha}}\left[J_{x^+}^{\alpha}f(y)+J_{y^-}^{\alpha}f(x)\right] \tag{2.2.7}
$$

ifadesi elde edilir. Böylece (2.2.3)'ün ilk eşitsizliği ispatlanır. (2.2.3)'ün ikinci eşitsizliğinin ispatı için ilk olarak f bir konveks fonksiyon ise $t\in[0,1]$ için

$$
\begin{aligned}
f\left(\frac{x+y}{2}\right) &= f\left(\frac{tx+(1-t)y+(1-t)x+ty}{2}\right) \\
&\leq \frac{f\big(tx+(1-t)y\big)+f\big((1-t)x+ty\big)}{2}
\end{aligned} \tag{2.2.8}
$$

yazılır. (2.2.8)'in her iki tarafını $t^{\alpha-1}$ ile çarpar $[0,1]$ aralığında t değişkenine göre integrali alınırsa

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\alpha} f\left(\frac{x+y}{2}\right) &\leq \frac{1}{2}\int_0^1 t^{\alpha-1}\left[f\big(tx+(1-t)y\big)+f\big((1-t)x+ty\big)\right]dt \\
&= \frac{\Gamma(\alpha)}{2(y-x)^{\alpha}}\left[J_{x^+}^{\alpha}f(y)+J_{y^-}^{\alpha}f(x)\right]
\end{aligned}
$$

olur. Böylece

$$
-f\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq -\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(y-x)^{\alpha}}\left[J_{x^+}^{\alpha}f(y)+J_{y^-}^{\alpha}f(x)\right] \tag{2.2.9}
$$

elde edilir. (2.2.9)'un her iki tarafına $f(a)+f(b)$ eklenirse (2.2.3)'ün ikinci eşitsizliği ispatlanır. Şimdi (2.2.4)'ü ispatlayalım. f'in konveksliğinden her $x_1, y_1 \in [a,b]$ için

$$
\begin{aligned}
f\left(a+b-\frac{x_1+y_1}{2}\right) &= f\left(\frac{a+b-x_1+a+b-y_1}{2}\right) \\
&\leq \frac{1}{2}\left[f(a+b-x_1)+f(a+b-y_1)\right]
\end{aligned} \tag{2.2.10}
$$

yazılır. (2.2.10)'da her $x, y \in [a,b]$ ve $t \in [0,1]$ için $a+b-x_1 = t(a+b-x)+(1-t)(a+b-y)$ ve $a+b-y_1 = (1-t)(a+b-x)+t(a+b-y)$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$\begin{aligned} & f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right) \qquad (2.2.11) \\ \leq\ & \frac{1}{2}\left[f\big(t(a+b-x)+(1-t)(a+b-y)\big)+f\big((1-t)(a+b-x)+t(a+b-y)\big)\right] \end{aligned}$$

bulunur. (2.2.11)'in her iki tarafını $t^{\alpha-1}$ ile çarpar $[0,1]$ aralığında t değişkenine göre integrali alınırsa

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha}f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right) &\leq \frac{1}{2}\left[\int_0^1 t^{\alpha-1}f\big(t(a+b-x)+(1-t)(a+b-y)\big)dt\right. \\ &\quad \left.+\int_0^1 t^{\alpha-1}f\big((1-t)(a+b-x)+t(a+b-y)\big)dt\right] \\ &= \frac{1}{2(y-x)^{\alpha}}\left[\int_{a+b-y}^{a+b-x}\big(u-(a+b-y)\big)^{\alpha-1}f(u)du\right. \\ &\quad \left.+\int_{a+b-y}^{a+b-x}\big((a+b-x)-u\big)^{\alpha-1}f(u)du\right] \\ &= \frac{\Gamma(\alpha)}{2(y-x)^{\alpha}}\left[J^{\alpha}_{(a+b-y)^+}f(a+b-x)+J^{\alpha}_{(a+b-x)^-}f(a+b-y)\right] \end{aligned}$$

olur ve buradan

$$f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(y-x)^{\alpha}}\left[J^{\alpha}_{(a+b-y)^+}f(a+b-x)+J^{\alpha}_{(a+b-x)^-}f(a+b-y)\right]$$

elde edilir. Böylece (2.2.4)'ün birinci eşitsizliğinin ispatı tamamlanır. Diğer taraftan ikinci eşitsizliğin ispatı için f'in konveksliği kullanılarak $t \in [0,1]$ için

$$f\big(t(a+b-x)+(1-t)(a+b-y)\big) \leq tf(a+b-x)+(1-t)f(a+b-y)$$

$$f\big((1-t)(a+b-x)+t(a+b-y)\big) \leq (1-t)f(a+b-x)+tf(a+b-y)$$

yazılır. Bu eşitsizlikler taraf tarafa toplanır ve Jensen-Mercer eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} & f\big(t(a+b-x)+(1-t)(a+b-y)\big)+f\big((1-t)(a+b-x)+t(a+b-y)\big) \\ \leq\ & f(a+b-x)+f(a+b-y) \\ \leq\ & 2\big[f(a)+f(b)\big]-\big[f(x)+f(y)\big] \qquad (2.2.12) \end{aligned}$$

elde edilir. (2.2.12)'nin her iki tarafını $t^{\alpha-1}$ ile çarpar $[0,1]$ aralığında t değişkenine göre integrali alınırsa (2.2.4)'deki ikinci ve üçüncü eşitsizlikler elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 2.2.1 Teorem 2.2.1'in şartları altında $\alpha = 1$ olsun. Bu durumda her $x, y \in [a, b]$ için Kian ve Moslehian tarafından [36]'da Teorem 2.1'de ispatlanan

$$\begin{aligned} f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right) &\leq f(a)+f(b)-\int_0^1 f\big(tx+(1-t)y\big)dt \\ &= f(a)+f(b)-f\left(\frac{x+y}{2}\right) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right) &\leq \frac{1}{y-x}\int_x^y f(a+b-t)dt \\ &\leq f(a)+f(b)-\frac{f(x)+f(y)}{2} \end{aligned} \tag{2.2.13}$$

eşitsizlikleri elde edilir [50].

Teorem 2.2.2 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, konveks bir fonksiyon olsun. Bu durumda her $x, y \in [a, b]$ ve $\alpha > 0$ için

$$\begin{aligned} f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right) &\leq \frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(y-x)^\alpha}\left[J^\alpha_{(a+b-\frac{x+y}{2})^+}f(a+b-x)+J^\alpha_{(a+b-\frac{x+y}{2})^-}f(a+b-y)\right] \\ &\leq f(a)+f(b)-\frac{f(x)+f(y)}{2} \end{aligned} \tag{2.2.14}$$

eşitsizliği geçerlidir [50].

İspat. İlk olarak (2.2.14)'ün ilk eşitsizliğini ispatlayalım. $x, y \in [a, b]$ ve $t \in [0, 1]$ için (2.2.10)'da x_1 ve y_1 yerine, $x_1 = \frac{t}{2}x + \frac{2-t}{2}y$ ve $y_1 = \frac{2-t}{2}x + \frac{t}{2}y$ olarak alınırsa

$$\begin{aligned} &2f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right) \\ &\leq \left[f\left(a+b-\left(\frac{t}{2}x+\frac{2-t}{2}\right)y\right)+f\left(a+b-\left(\frac{2-t}{2}\right)x+\frac{t}{2}y\right)\right] \end{aligned} \tag{2.2.15}$$

yazılır. Bu durumda (2.2.15)'in her iki tarafını $t^{\alpha-1}$ ile çarpar $[0, 1]$ aralığında t değişkenine göre integrali alınırsa

$$\begin{aligned} \frac{2}{\alpha}f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right) &\leq \int_0^1 t^{\alpha-1}f\left(a+b-\left(\frac{t}{2}x+\frac{2-t}{2}y\right)\right)dt \\ &\quad+\int_0^1 t^{\alpha-1}f\left(a+b-\left(\frac{2-t}{2}x+\frac{t}{2}y\right)\right)dt \\ &= \frac{2^\alpha}{(y-x)^\alpha}\left[\int_{a+b-y}^{a+b-\frac{x+y}{2}}\big(u-(a+b-y)\big)^{\alpha-1}f(u)du\right. \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\int_{a+b-\frac{x+y}{2}}^{a+b-x}\left((a+b-x)-u\right)^{\alpha-1}f(u)du\Bigg] \\
=\ & \frac{2^{\alpha}\Gamma(\alpha)}{(y-x)^{\alpha}}\left[J^{\alpha}_{(a+b-\frac{x+y}{2})^-}f(a+b-y)+J^{\alpha}_{(a+b-\frac{x+y}{2})^+}f(a+b-x)\right]
\end{aligned}
$$

bulunur. Buradan

$$
\begin{aligned}
&f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right) \\
\leq\ & \frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(y-x)^{\alpha}}\left[J^{\alpha}_{(a+b-\frac{x+y}{2})^-}f(a+b-y)+J^{\alpha}_{(a+b-\frac{x+y}{2})^+}f(a+b-x)\right]
\end{aligned}
$$

ifadesi elde edilir. Böylece (2.2.14)'ün ilk eşitsizliği ispatlanır. (2.2.14)'ün ikinci eşitsizliğini ispatlamak için Jensen-Mercer eşitsizliği kullanılarak

$$
f\left(a+b-\left(\frac{t}{2}x+\frac{2-t}{2}y\right)\right)\leq f(a)+f(b)-\left[\frac{t}{2}f(x)+\frac{2-t}{2}f(y)\right]
$$

$$
f\left(a+b-\left(\frac{2-t}{2}x+\frac{t}{2}y\right)\right)\leq f(a)+f(b)-\left[\frac{2-t}{2}f(x)+\frac{t}{2}f(y)\right]
$$

yazılır. Bu eşitsizlikler taraf tarafa toplanırsa

$$
\begin{aligned}
&f\left(a+b-\left(\frac{t}{2}x+\frac{2-t}{2}y\right)\right)+f\left(a+b-\left(\frac{2-t}{2}x+\frac{t}{2}y\right)\right) \\
\leq\ & 2\left[f(a)+f(b)\right]-\frac{f(x)+f(y)}{2} \qquad (2.2.16)
\end{aligned}
$$

bulunur. Daha sonra bu eşitsizliğinin her iki tarafını $t^{\alpha-1}$ ile çarpar $[0,1]$ aralığında t değişkenine göre integrali alınırsa ispat tamamlanır.

Sonuç 2.2.2 Teorem 2.2.2'de $\alpha=1$ olarak alınırsa (2.2.14), (2.2.13)'e indirgenir [50].

Lemma 2.2.1 $a<b$ olmak üzere $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, (a,b) aralığında diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Eğer $f'\in L[a,b]$ ise her $x,y\in[a,b]$, $x<y$, $\alpha>0$ ve $t\in[0,1]$ olmak üzere kesirli integraller için

$$
\begin{aligned}
&\frac{f(a+b-x)+f(a+b-y)}{2}-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(y-x)^{\alpha}} \\
&\times\left[J^{\alpha}_{(a+b-y)^+}(a+b-x)+J^{\alpha}_{(a+b-x)^-}f(a+b-y)\right] \\
=\ & \frac{y-x}{2}\int_0^1\left(t^{\alpha}-(1-t)^{\alpha}\right)f'(a+b-(tx+(1-t)y))dt \qquad (2.2.17)
\end{aligned}
$$

eşitliği geçerlidir [50].

Sonuç 2.2.1 Lemma 2.2.1'de $\alpha = 1$ olarak alınırsa

$$\begin{aligned} & \frac{f(a+b-x)+f(a+b-y)}{2} - \frac{1}{y-x}\int_{a+b-y}^{a+b-x} f(u)du \\ = & \frac{y-x}{2}\int_0^1 (2t-1)f'\big(a+b-(tx+(1-t)y)\big)dt \end{aligned} \tag{2.2.18}$$

eşitliği elde edilir [50].

Sonuç 2.2.3 Sonuç 2.2.1'de $x = a$ ve $y = b$ olarak alınırsa (2.2.18), Dragomir ve Agarval tarafından [22]'de ispatlanan

$$\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du = \frac{b-a}{2}\int_{0)}^1 (2t-1)f'\big((1-t)a+tb\big)dt$$

eşitliğine indirgenir [50].

Lemma 2.2.2 $a < b$ olmak üzere $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, (a,b) aralığında diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. $f' \in L[a,b]$ ise her $x, y \in [a,b]$, $x < y$ ve $\alpha > 0$ ve $t \in [0,1]$ olmak üzere kesirli integraller için

$$\begin{aligned} & \frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(y-x)^\alpha}\left[J^\alpha_{(a+b-\frac{x+y}{2})^+} f(a+b-x) + J^\alpha_{(a+b-\frac{x+y}{2})^-} f(a+b-y)\right] \\ & -f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right) \\ = & \frac{y-x}{4}\int_0^1 t^\alpha \left[f'\left(a+b-\left(\frac{2-t}{2}x+\frac{t}{2}y\right)\right)\right. \\ & \left.-f'\left(a+b-\left(\frac{t}{2}x+\frac{2-t}{2}y\right)\right)\right] dt \end{aligned} \tag{2.2.19}$$

eşitliği geçerlidir [50].

Sonuç 2.2.4 Lemma 2.2.2'de $x = a$ ve $y = b$ olarak alınırsa Lemma 2.2.2, Sarıkaya ve Yıldırım tarafından [63]'de ispatlanan Lemma 3'e indirgenir [50].

Teorem 2.2.3 $a < b$ olmak üzere $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, (a,b) aralığında diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. $|f'|$, $[a,b]$ aralığında konveks ise her $x, y \in [a,b]$ ve $\alpha > 0$ için

$$\begin{aligned} & \left|\frac{f(a+b-x)+f(a+b-y)}{2} - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(y-x)^\alpha}\right. \\ & \left.\times\left[J^\alpha_{(a+b-y)^+} f(a+b-x) + J^\alpha_{(a+b-x)^-} f(a+b-y)\right]\right| \\ \leq & \frac{y-x}{\alpha+1}\left(1-\frac{1}{2^\alpha}\right)\left[|f'(a)|+|f'(b)|-\frac{|f'(x)|+|f'(y)|}{2}\right] \end{aligned} \tag{2.2.20}$$

eşitsizliği geçerlidir [50].

Sonuç 2.2.5 Teorem 2.2.3'de $x = a$ ve $y = b$ olarak alınırsa Teorem 2.2.3, Sarıkaya ve arkadaşları tarafından [62]'de ispatlanan Teorem 3'e indirgenir [50].

Sonuç 2.2.6 Teorem 2.2.3'de $\alpha = 1$, $x = a$ ve $y = b$ olarak alınırsa Teorem 2.2.3, [22]'de Teorem 2.2'ye indirgenir [50].

Teorem 2.2.4 $a < b$ olmak üzere $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, (a, b) aralığında diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. $|f'|$, $[a, b]$ aralığında konveks ise her $x, y \in [a, b]$ ve $\alpha > 0$ olmak üzere kesirli integraller için

$$\begin{aligned} &\left| \frac{2^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)}{(y-x)^\alpha} \left[J^\alpha_{(a+b-\frac{x+y}{2})+} f(a+b-x) + J^\alpha_{(a+b-\frac{x+y}{2})-} f(a+b-y) \right] \right. \\ &\left. -f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right) \right| \\ \leq\ & \frac{y-x}{2(\alpha+1)} \left[|f'(a)| + |f'(b)| - \frac{|f'(x)| + |f'(y)|}{2} \right] \end{aligned} \tag{2.2.21}$$

eşitsizliği geçerlidir [50].

Sonuç 2.2.2 Teorem 2.2.4'de $\alpha = 1$ olarak alınırsa

$$\begin{aligned} &\left| \frac{1}{y-x} \int_{a+b-y}^{a+b-x} f(u)du - f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right) \right| \\ \leq\ & \frac{y-x}{4} \left[|f'(a)| + |f'(b)| - \frac{|f'(x)| + |f'(y)|}{2} \right] \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir [50].

Teorem 2.2.5 $a < b$ olmak üzere $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, (a, b) aralığında diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. $q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere $|f'|^q$, $[a, b]$ aralığında konveks ise her $x, y \in [a, b]$ ve $\alpha > 0$ için

$$\begin{aligned} &\left| \frac{2^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)}{(y-x)^\alpha} \left[J^\alpha_{(a+b-\frac{x+y}{2})+} f(a+b-x) + J^\alpha_{(a+b-\frac{x+y}{2})-} f(a+b-y) \right] \right. \\ &\left. -f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right) \right| \\ \leq\ & \frac{y-x}{4(\alpha p+1)^{\frac{1}{p}}} \left[\left(|f'(a)|^q + |f'(b)|^q - \frac{3|f'(x)|^q + |f'(y)|^q}{4} \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\ &\left. + \left(|f'(a)|^q + |f'(b)|^q - \frac{|f'(x)|^q + 3|f'(y)|^q}{4} \right)^{\frac{1}{q}} \right] \end{aligned} \tag{2.2.22}$$

eşitsizliği geçerlidir [50].

Sonuç 2.2.7 Teorem 2.2.5'de $x = a$ ve $y = b$ olarak alınırsa Teorem 2.2.5, Sarıkaya ve Yıldırım tarafından [63]'de ispatlanan Teorem 6'ya indirgenir [50].

Sonuç 2.2.3 Teorem 2.2.5'de $\alpha = 1$ olarak alınırsa

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{y-x}\int_{a+b-y}^{a+b-x} f(u)du - f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right)\right| \\
\leq\ & \frac{y-x}{4(p+1)^{\frac{1}{p}}}\left[\left(|f'(a)|^q + |f'(b)|^q - \frac{3|f'(x)|^q + |f'(y)|^q}{4}\right)^{\frac{1}{q}}\right. \\
&\left. + \left(|f'(a)|^q + |f'(b)|^q - \frac{|f'(x)|^q + 3|f'(y)|^q}{4}\right)^{\frac{1}{q}}\right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir [50].

Öğülmüş ve Sarıkaya tarafından Riemann-Liouville kesirli integralleri için elde edilen bu sonuçların k-Riemann-Liouville kesirli integral operatörleri için genelleştirmesi [8]'de Ali ve Arkadaşları tarafından verilmiştir.

Thabet Abdeljawad ve arkadaşları, 2020 yılında Riemann-Liouville kesirli integraller yardımıyla aşağıdaki sonuçları elde etmişlerdir.

Teorem 2.2.6 $x, y \in [a, b]$ olmak üzere $f : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konveks bir fonksiyon olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
& f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right) \\
\leq\ & \frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(y-x)^{\alpha}}\left[J^{\alpha}_{(a+b-y)^+} f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right) + J^{\alpha}_{(a+b-x)^-} f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right)\right] \\
\leq\ & f(a) + f(b) - \frac{f(x)+f(y)}{2} \qquad (2.2.23)
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir [3].

Sonuç 2.2.8 Teorem 2.2.6'da $\alpha = 1$, $x = a$ ve $y = b$ olarak alınırsa (2.2.23), (2.1.4) eşitsizliğine indirgenir [3].

Lemma 2.2.3 $f : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, (a, b) aralığında diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. $a \leq b$ ve $x, y \in [a, b]$ olmak üzere $f' \in L[a, b]$ ise

$$\frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(y-x)^{\alpha}}\left[J^{\alpha}_{(a+b-y)^+} f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right) + J^{\alpha}_{(a+b-x)^-} f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right)\right]$$

$$-f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right)$$
$$= \frac{y-x}{4}\int_0^1 t^{\alpha}\left[f'\left(a+b-\left(\frac{1-t}{2}x+\frac{1+t}{2}y\right)\right)\right.$$
$$\left.-f'\left(a+b-\left(\frac{1+t}{2}x+\frac{1-t}{2}y\right)\right)\right]dt \tag{2.2.24}$$

eşitliği geçerlidir [3].

Teorem 2.2.7 $f:[a,b]\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, (a,b) aralığında diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. $a\leq b$ ve $x,y\in[a,b]$ olmak üzere $|f'|$, $[a,b]$ aralığında konveks ise

$$\left|\frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(y-x)^{\alpha}}\left[J^{\alpha}_{(a+b-y)^+}f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right)+J^{\alpha}_{(a+b-x)^-}f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right)\right]\right.$$
$$\left.-f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right)\right|$$
$$\leq \frac{y-x}{2(1+\alpha)}\left[|f'(a)|+|f'(b)|-\frac{|f'(x)|+|f'(y)|}{2}\right] \tag{2.2.25}$$

eşitsizliği geçerlidir [3].

Teorem 2.2.8 $f:[a,b]\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu (a,b) aralığında diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. $a\leq b$ ve $x,y\in[a,b]$ olmak üzere $q>1$ ve $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ için $|f'|^q$, $[a,b]$ aralığında konveks bir fonksiyon ise

$$\left|\frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(y-x)^{\alpha}}\left[J^{\alpha}_{(a+b-y)^+}f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right)+J^{\alpha}_{(a+b-x)^-}f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right)\right]\right.$$
$$\left.-f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right)\right|$$
$$\leq \frac{y-x}{4\sqrt[p]{\alpha p+1}}\left[\left(|f'(a)|^q+|f'(b)|^q-\left(\frac{3|f'(y)|^q+|f'(x)|^q}{4}\right)\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$
$$\left.+\left(|f'(a)|^q+|f'(b)|^q-\left(\frac{|f'(y)|^q+3|f'(x)|^q}{4}\right)\right)^{\frac{1}{q}}\right] \tag{2.2.26}$$

eşitsizliği geçerlidir [3].

Teorem 2.2.9 $f:[a,b]\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu (a,b) aralığında diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. $a\leq b$ ve $x,y\in[a,b]$ olmak üzere $q\geq1$ için $|f'|^q$, $[a,b]$ aralığında konveks bir fonksiyon ise

$$\left|\frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(y-x)^{\alpha}}\left[J^{\alpha}_{(a+b-y)^+}f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right)+J^{\alpha}_{(a+b-x)^-}f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right)\right]\right.$$
$$\left.-f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right)\right|$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \frac{y-x}{4(\alpha+1)}\left[\left(|f'(a)|^q+|f'(b)|^q-\left(\frac{(2\alpha+3)|f'(y)|^q+|f'(x)|^q}{2(\alpha+2)}\right)\right)^{\frac{1}{q}}\right.\\
&\quad\left.+\left(|f'(a)|^q+|f'(b)|^q-\left(\frac{|f'(y)|^q+(2\alpha+3)|f'(x)|^q}{2(\alpha+2)}\right)\right)^{\frac{1}{q}}\right] \qquad (2.2.27)
\end{aligned}
$$

eşitsizliği geçerlidir [3].

Qiong Kang ve arkadaşları, 2020 yılında Riemann-Liouville kesirli integralller yardımıyla aşağıdaki sonuçları elde etmişlerdir.

Teorem 2.2.10 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, konveks bir fonksiyon olsun. Bu durumda her $x,y\in[a,b]$ ve $\alpha>0$ olmak üzere

$$
\begin{aligned}
&f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right)\\
\leq\;& \frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(y-x)^\alpha}\left\{J^\alpha_{(a+b-x)^-}f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right)+J^\alpha_{(a+b-y)^+}f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right)\right\}\\
\leq\;& f(a)+f(b)-\frac{f(x)+f(y)}{2} \qquad (2.2.28)
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right) &\leq \left[f(a)+f(b)\right]-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(y-x)^\alpha}\left\{J^\alpha_{x^+}f\left(\frac{x+y}{2}\right)+J^\alpha_{y^-}f\left(\frac{x+y}{2}\right)\right\}\\
&\leq \left[f(a)+f(b)\right]-f\left(\frac{x+y}{2}\right) \qquad (2.2.29)
\end{aligned}
$$

eşitsizlikleri geçerlidir [30].

Sonuç 2.2.9 Teorem 2.2.10'un şartları altında $\alpha=1$ olarak alınırsa (2.2.28), (2.1.5) eşitsizliğine indirgenir [30].

Bu bölüm boyunca aşağıdaki varsayıma ihtiyaç olacaktır.
$A_1: x,y\in[a,b],\alpha>0,t\in[0,1]$ ve $\Gamma(\cdot)$ bir gama fonksiyonudur.

Lemma 2.2.4 $a<b$ olmak üzere A_1'deki şartlar ile birlikte $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, (a,b) aralığında diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda $f'\in L[a,b]$ ise

$$
\begin{aligned}
&\frac{f(a+b-x)+f(a+b-y)}{2}-\frac{2^\alpha\Gamma(\alpha+1)}{2(y-x)^\alpha}\left\{J^\alpha_{(a+b-y)^+}f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right)\right.\\
&\left.+J^\alpha_{(a+b-x)^-}f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right)\right\}
\end{aligned}
$$

$$= \frac{y-x}{4}\int_0^1 t^\alpha \Big\{ f'\Big(a+b-\Big(\frac{1+t}{2}x+\frac{1-t}{2}y\Big)\Big)$$
$$-f'\Big(a+b-\Big(\frac{1-t}{2}x+\frac{1+t}{2}y\Big)\Big)\Big\}dt \tag{2.2.30}$$

eşitliği geçerlidir [30].

Sonuç 2.2.4 Lemma 2.2.4'de $\alpha = 1$ için

$$\frac{f(a+b-x)+f(a+b-y)}{2} - \frac{1}{y-x}\int_{a+b-y}^{a+b-x} f(u)du$$
$$= \frac{y-x}{4}\int_0^1 t\Big\{ f'\Big(a+b-\Big(\frac{1+t}{2}x+\frac{1-t}{2}y\Big)\Big)$$
$$-f'\Big(a+b-\Big(\frac{1-t}{2}x+\frac{1+t}{2}y\Big)\Big)\Big\}dt \tag{2.2.31}$$

eşitliği elde edilir [30].

Sonuç 2.2.10 Lemma 2.2.4'de $\alpha = 1$, $x = a$ ve $y = b$ olarak alınırsa [9]'da Lemma 2.1'de ifade edilen

$$\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(u)du$$
$$= \frac{b-a}{4}\int_0^1 t\left\{ f'\Big(\frac{1-t}{2}a+\frac{1+t}{2}b\Big) - f'\Big(\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}b\Big)\right\}dt \tag{2.2.32}$$

eşitliği elde edilir [30].

Teorem 2.2.11 $0 \le a < b$ olmak üzere A_1'deki şartlar ile birlikte $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, (a,b) aralığında diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $f \in L[a,b]$ olsun. f', $[a,b]$ aralığında diferansiyellenebilir bir fonksiyon ise Riemann-Liouville kesirli integralleri için

$$\Bigg|\frac{f(a+b-x)+f(a+b-y)}{2} - \frac{2^\alpha\Gamma(\alpha+1)}{2(y-x)^\alpha}$$
$$\times\left\{ J^\alpha_{(a+b-y)^+} f\Big(a+b-\frac{x+y}{2}\Big) + J^\alpha_{(a+b-x)^-} f\Big(a+b-\frac{x+y}{2}\Big)\right\}\Bigg|$$
$$\le \frac{(y-x)^2}{4(\alpha+2)}\sup_{\xi\in[a,b]}|f''(\xi)| \tag{2.2.33}$$

eşitsizliği geçerlidir [30].

Teorem 2.2.12 $a < b$ olmak üzere A_1'deki şartlar ile birlikte $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, (a,b) aralığında diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $f \in L[a,b]$ olsun. $|f'|$, $[a,b]$ aralığında konveks bir fonksiyon ise Riemann- Liouville kesirli integralleri için

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{f(a+b-x)+f(a+b-y)}{2}-\frac{2^{\alpha}\Gamma(\alpha+1)}{2(y-x)^{\alpha}}\right. \\
&\left.\times\left\{J^{\alpha}_{(a+b-y)^{+}}f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right)+J^{\alpha}_{(a+b-x)^{-}}f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right)\right\}\right| \\
\leq\ &\frac{(y-x)}{2(\alpha+1)}\left\{|f'(a)|+|f'(b)|-\frac{|f'(x)|+|f'(y)|}{2}\right\} \qquad (2.2.34)
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir [30].

Sonuç 2.2.5 Teorem 2.2.12'de $\alpha = 1$ için

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{f(a+b-x)+f(a+b-y)}{2}-\frac{1}{y-x}\int_{a+b-y}^{a+b-x}f(u)du\right| \\
\leq\ &\frac{y-x}{4}\left\{|f'(a)|+|f'(b)|-\frac{|f'(x)|+|f'(y)|}{2}\right\} \qquad (2.2.35)
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir [30].

Sonuç 2.2.11 Teorem 2.2.12'de $\alpha = 1$, $x = a$ ve $y = b$ olarak alınırsa [22]'de Teorem 2.2'de ifade edilen

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_{a}^{b}f(u)du\right|\leq\frac{b-a}{4}\left\{\frac{|f'(a)|+|f'(b)|}{2}\right\} \qquad (2.2.36)$$

eşitsizliği elde edilir [30].

Lemma 2.2.5 $a < b$ olmak üzere A_1'deki şartlar ile birlikte $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, (a, b) aralığında diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda $f'' \in L[a, b]$ ise

$$\begin{aligned}
&\frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(y-x)^{\alpha}}\left\{J^{\alpha}_{(a+b-\frac{x+y}{2})^{+}}f(a+b-x)+J^{\alpha}_{(a+b-\frac{x+y}{2})^{-}}f(a+b-y)\right\} \\
&-f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right) \\
=\ &\frac{(y-x)^{2}}{8(\alpha+1)}\left\{\int_{0}^{1}(1-t)^{\alpha+1}f''\left(a+b-\left(\frac{1+t}{2}x+\frac{1-t}{2}y\right)\right)dt\right. \\
&\left.+\int_{0}^{1}(1-t)^{\alpha+1}f''\left(a+b-\left(\frac{1-t}{2}x+\frac{1+t}{2}y\right)\right)dt\right\} \qquad (2.2.37)
\end{aligned}$$

eşitliği geçerlidir [30].

Sonuç 2.2.12 Lemma 2.2.5'de $x = a$ ve $y = b$ olarak alınırsa [48]'de Lemma 1 elde edilir [30].

Sonuç 2.2.13 Lemma 2.2.5'de $\alpha = 1$, $x = a$ ve $y = b$ olarak alınırsa [48]'de ispatlanan Lemma 2'ye indirgenir [30].

Teorem 2.2.13 $a < b$ olmak üzere A_1'deki şartlar ile birlikte $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, (a, b) aralığında diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $f \in L[a, b]$ olsun. $|f''|$, $[a, b]$ aralığında konveks bir fonksiyon ise Riemann- Liouville kesirli integralleri için

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(y-x)^\alpha} \left\{ J^\alpha_{(a+b-\frac{x+y}{2})^+} f(a+b-x) + J^\alpha_{(a+b-\frac{x+y}{2})^-} f(a+b-y) \right\} \right. \\
&\left. -f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right) \right| \\
\leq\ & \frac{(y-x)^2}{4(\alpha+1)(\alpha+2)} \left\{ |f''(a)| + |f''(b)| - \frac{|f''(x)| + |f''(y)|}{2} \right\} \qquad (2.2.38)
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir [30].

Sonuç 2.2.14 Teorem 2.2.13'de $x = a$ ve $y = b$ olarak alınırsa [48]'de Teorem 5'de ispatlanan

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^\alpha} \left[J^\alpha_{(\frac{a+b}{2})^+} f(b) + J^\alpha_{(\frac{a+b}{2})^-} f(a) \right] - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| \\
\leq\ & \frac{(b-a)^2}{8(\alpha+1)(\alpha+2)} \left\{ |f''(a)| + |f''(b)| \right\} \qquad (2.2.39)
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir [30].

Teorem 2.2.14 A_1'deki şartlar ile birlikte $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, I üzerinde üç kez diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. $|f''| \in L[a, b]$ olmak üzere $q > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ için $|f''|^q$, konveks fonksiyon ise

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(y-x)^\alpha} \left\{ J^\alpha_{(a+b-\frac{x+y}{2})^+} f(a+b-x) + J^\alpha_{(a+b-\frac{x+y}{2})^-} f(a+b-y) \right\} \right. \\
&\left. -f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right) \right| \\
\leq\ & \frac{(y-x)^2}{8(\alpha+1)} \left(\frac{1}{p(\alpha+1)+1} \right)^{\frac{1}{p}} \left\{ \left[|f''(a)|^q + |f''(b)|^q - \left(\frac{3}{4}|f''(x)|^q + \frac{1}{2}|f''(y)|^q \right) \right]^{\frac{1}{q}} \right. \\
&\left. + \left[|f''(a)|^q + |f''(b)|^q - \left(\frac{3}{4}|f''(y)|^q + \frac{1}{2}|f''(x)|^q \right) \right]^{\frac{1}{q}} \right\} \qquad (2.2.40)
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir [30].

Lemma 2.2.6 $a < b$ olmak üzere A_1'deki şartlar ile birlikte $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

(a,b) aralığında diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. $|f'''| \in L[a,b]$ ise

$$\begin{aligned}
& \frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(y-x)^{\alpha}}\left\{J^{\alpha}_{(a+b-\frac{x+y}{2})^{+}}f(a+b-x)+J^{\alpha}_{(a+b-\frac{x+y}{2})^{-}}f(a+b-y)\right\} \\
& -\frac{(y-x)^3}{4(\alpha+1)(\alpha+2)}f''\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right)-f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right) \\
= \; & \frac{(y-x)^3}{16(\alpha+1)(\alpha+2)}\left\{\int_0^1 (1-t)^{\alpha+2}f'''\left(a+b-\left(\frac{1+t}{2}x+\frac{1-t}{2}y\right)\right)dt\right. \\
& \left.-\int_0^1 (1-t)^{\alpha+2}f'''\left(a+b-\left(\frac{1-t}{2}x+\frac{1+t}{2}y\right)\right)dt\right\} \qquad (2.2.41)
\end{aligned}$$

eşitliği geçerlidir [30].

Sonuç 2.2.15 Lemma 2.2.6'da $x=a$ ve $y=b$ olarak alınırsa [49]'da ispatlanan Lemma 1'e indirgenir [30].

Sonuç 2.2.16 Lemma 2.2.6'da $\alpha=1$, $x=a$ ve $y=b$ olarak alınırsa [70]'de ispatlanan Lemma 2.1'e indirgenir [30].

Teorem 2.2.15 $a<b$ olmak üzere A_1'deki şartlar ile birlikte $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, (a,b) aralığında diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $f\in L[a,b]$ olsun. $|f'''|$, $[a,b]$ aralığında konveks bir fonksiyon ise Riemann- Liouville kesirli integraller için

$$\begin{aligned}
& \left|\frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(y-x)^{\alpha}}\left[J^{\alpha}_{(a+b-\frac{x+y}{2})^{+}}f(a+b-x)+J^{\alpha}_{(a+b-\frac{x+y}{2})^{-}}f(a+b-y)\right]\right. \\
& \left.-\frac{(y-x)^3}{4(\alpha+1)(\alpha+2)}f''\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right)-f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right)\right| \\
\leq \; & \frac{(y-x)^3}{8(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)}\left\{|f'''(a)|+|f'''(b)|-\left(\frac{|f'''(x)|+|f'''(y)|}{2}\right)\right\} (2.2.42)
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir [30].

Sonuç 2.2.17 Teorem 2.2.15'de $x=a$ ve $y=b$ olarak alınırsa [49]'da ispatlanan Teorem 4 elde edilir [30].

Teorem 2.2.16 A_1'deki şartlar ile birlikte $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, I üzerinde üç kez diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. $|f'''|\in L[a,b]$ olmak üzere $q>1$ ve $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ için $|f'''|^q$, konveks bir fonksiyon ise

$$\begin{aligned}
& \left|\frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(y-x)^{\alpha}}\left\{J^{\alpha}_{(a+b-\frac{x+y}{2})^{+}}f(a+b-x)+J^{\alpha}_{(a+b-\frac{x+y}{2})^{-}}f(a+b-y)\right\}\right. \\
& \left.-\frac{(y-x)^3}{4(\alpha+1)(\alpha+2)}f'''\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right)-f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right)\right|
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\leq\ & \frac{(y-x)^3}{16(\alpha+1)(\alpha+2)}\left(\frac{1}{p(\alpha+2)+1}\right)^{\frac{1}{p}}\Bigg\{\Bigg(|f'''(a)|^q+|f'''(b)|^q \\
& -\left(\frac{3}{4}|f'''(x)|^q+\frac{1}{2}|f'''(y)|^q\right)\Bigg)^{\frac{1}{q}}+\Bigg(|f'''(a)|^q+|f'''(b)|^q \\
& -\left(\frac{3}{4}|f'''(y)|^q+\frac{1}{2}|f'''(x)|^q\right)\Bigg)^{\frac{1}{q}}\Bigg\} \qquad (2.2.43)
\end{aligned}
$$

eşitsizliği geçerlidir [30].

2.2.2 Yeni Uyumlu Kesirli İntegraller İçin Hermite-Hadamard-Mercer Tipli Eşitsizlikler

Bu bölümde, konveks fonksiyonlar için yeni uyumlu kesirli integral operatörleri içeren Hermite-Hadamard-Mercer tipli eşitsizlikler verilecektir.

Tanım 2.2.2 (Yeni Uyumlu Kesirli İntegral Operatörü) f, $[a,b]$ sonlu aralığı üzerinde bir fonksiyon olmak üzere $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$ ve $Re(\alpha),Re(\beta)>0$ olsun. Sol ve sağ taraflı yeni uyumlu kesirli integralleri sırasıyla,

$$
{}^{\beta}_{a}\mathfrak{J}^{\alpha}f(x)=\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_a^x\left(\frac{(x-a)^\alpha-(t-a)^\alpha}{\alpha}\right)^{\beta-1}\frac{f(t)}{(t-a)^{1-\alpha}}dt \qquad (2.2.44)
$$

ve

$$
{}^{\beta}\mathfrak{J}^{\alpha}_{b}f(x)=\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_x^b\left(\frac{(b-x)^\alpha-(b-t)^\alpha}{\alpha}\right)^{\beta-1}\frac{f(t)}{(b-t)^{1-\alpha}}dt \qquad (2.2.45)
$$

şeklinde tanımlanır [29].

Sonuç 2.2.18 i) $a=0$ ve $\alpha=1$ olarak alınırsa (2.2.44)'deki yeni uyumlu kesirli integral operatörü, (2.2.1)'de ifade edilen Riemann-Liouville kesirli integral operatörüne indirgenir.

ii) $a=0$ ve $\alpha\to 0$ olarak alınırsa (2.2.44)'deki kesirli integral [37]'de tanımlanan Hadamard kesirli integraline indirgenir. Ayrıca, $a=0$ olarak alınırsa yeni uyumlu kesirli integral operatörü Katugampola kesirli integral operatörüne indirgenir.

iii) (2.2.45) için de benzer bağlantılar kurulabilir. (2.2.45)'da tanımlanan operatörde $b=0$ ve $\alpha=1$ olarak alınırsa, (2.2.2)'de ifade edilen Riemann-Liouville integral operatörüne indirgenir. Aynı zamanda (2.2.45)'de $b=0$ ve $\alpha\to 0$ alınırsa [37]'deki Hadamard kesirli integraliyle çakışmaktadır.

Saad Ihsan Butt ve arkadaşları, 2020 yılında yeni uyumlu kesirli integral operatörleri yardımıyla aşağıdaki sonuçları elde etmişlerdir.

Teorem 2.2.17 $f : [a,b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, konveks bir fonksiyon olsun. Bu durumda her $x, y \in [a,b]$ ve $\alpha, \beta > 0$ olmak üzere kesirli integraller için

$$\begin{aligned} f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right) &\leq \frac{2^{\alpha\beta-1}\alpha^{\beta}\Gamma(\beta+1)}{(y-x)^{\alpha\beta}} \\ &\quad \times\left\{{}^{\beta}_{(a+b-\frac{x+y}{2})}\mathfrak{I}^{\alpha} f(a+b-x) + {}^{\beta}\mathfrak{I}^{\alpha}_{(a+b-\frac{x+y}{2})} f(a+b-y)\right\} \\ &\leq f(a)+f(b)-\left(\frac{f(x)+f(y)}{2}\right) \end{aligned} \tag{2.2.46}$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $\Gamma(\cdot)$ gama fonksiyonudur [14].

Sonuç 2.2.19 i) Teorem 2.2.17'de $x = a$ ve $y = b$ olarak alınırsa [26]'da Teorem 2.1 elde edilir.

ii) Teorem 2.2.17'de $\alpha = 1$, $x = a$ ve $y = b$ olarak alınırsa [62]'de Teorem 2 elde edilir. [14]

Teorem 2.2.18 $f : [a,b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, konveks bir fonksiyon olsun. Bu durumda her $x, y \in [a,b]$ ve $\alpha, \beta > 0$ olmak üzere kesirli integraller için

$$\begin{aligned} f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right) &\leq f(a)+f(b)-\frac{\alpha^{\beta}\Gamma(\beta+1)}{2(y-x)^{\alpha\beta}}\left\{{}^{\beta}\mathfrak{I}^{\alpha}_{x^+} f(y) + {}^{\beta}\mathfrak{I}^{\alpha}_{y^-} f(x)\right\} \\ &\leq f(a)+f(b)-f\left(\frac{x+y}{2}\right) \end{aligned} \tag{2.2.47}$$

ve

$$\begin{aligned} f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right) &\leq \frac{\alpha^{\beta}\Gamma(\beta+1)}{2(y-x)^{\alpha\beta}}\left\{{}^{\beta}\mathfrak{I}^{\alpha}_{(a+b-x)^+} f(a+b-y) + {}^{\beta}\mathfrak{I}^{\alpha}_{(a+b-y)^-} f(a+b-x)\right\} \\ &\leq \frac{f(a+b-x)+f(a+b-y)}{2} \\ &\leq f(a)+f(b)-\frac{f(x)+f(y)}{2} \end{aligned} \tag{2.2.48}$$

eşitsizlikleri geçerlidir. Burada $\Gamma(\cdot)$ gama fonksiyonudur [14].

Sonuç 2.2.20 Teorem 2.2.18'in şartları altında $\alpha = \beta = 1$ olarak alınırsa [36]'da Teorem 2.1'de ispatlanan

$$f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right) \leq f(a)+f(b)-\int_0^1 f(tx+(1-t)y)dt$$

$$\leq \quad f(a)+f(b)-f\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

ve

$$\begin{aligned} f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right) &\leq \frac{1}{y-x}\int_x^y f(a+b-t)dt \\ &\leq f(a)+f(b)-\frac{f(x)+f(y)}{2} \end{aligned}$$

eşitsizlikleri elde edilir [14].

Lemma 2.2.7 $a<b$ olmak üzere $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, (a,b) aralığında diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. $f'\in L[a,b]$ ise her $x,y\in[a,b]$ ve $\alpha,\beta>0$ olmak üzere kesirli integraller için

$$\begin{aligned} &\frac{2^{\alpha\beta-1}\Gamma(\beta+1)}{(y-x)^{\alpha\beta}}\left\{{}^{\beta}_{(a+b-\frac{x+y}{2})^+}\mathfrak{J}^{\alpha}f(a+b-x)+{}^{\beta}_{(a+b-\frac{x+y}{2})^-}\mathfrak{J}^{\alpha}f(a+b-y)\right\} \\ &-f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right) \\ =\ &\frac{(y-x)\alpha^{\beta}}{4}\int_0^1\left(\frac{1-(1-t)^{\alpha}}{\alpha}\right)^{\beta} \\ &\times\left\{f'\left(a+b-\left(\frac{2-t}{2}x+\frac{t}{2}y\right)\right)-f'\left(a+b-\left(\frac{t}{2}x+\frac{2-t}{2}y\right)\right)\right\}dt \quad (2.2.49) \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Burada $\Gamma(\cdot)$ gama fonksiyonudur [14].

Sonuç 2.2.21

i) Lemma 2.2.7'de $x=a$ ve $y=b$ olarak alınırsa [26]'da Lemma 3.1 elde edilir.

ii) Lemma 2.2.7'de $\alpha=1$, $x=a$ ve $y=b$ olarak alınırsa [63]'de Lemma 1.1 elde edilir [14].

Lemma 2.2.8 $a<b$ olmak üzere $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, (a,b) aralığında diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. $f'\in L[a,b]$ ise her $x,y\in[a,b]$ ve $\alpha,\beta>0$ olmak üzere kesirli integraller için

$$\begin{aligned} &\frac{f(a+b-x)+f(a+b-y)}{2}-\frac{\alpha^{\beta}\Gamma(\beta+1)}{2(y-x)^{\alpha\beta}} \\ &\times\left\{{}^{\beta}_{(a+b-y)^+}\mathfrak{J}^{\alpha}f(a+b-x)+{}^{\beta}_{(a+b-x)^-}\mathfrak{J}^{\alpha}f(a+b-y)\right\} \\ =\ &\frac{(y-x)\alpha^{\beta}}{2}\int_0^1\left[\left(\frac{1-(1-t)^{\alpha}}{\alpha}\right)^{\beta}-\left(\frac{1-t^{\alpha}}{\alpha}\right)^{\beta}\right]f'\big(a+b-(tx+(1-t)y)\big)dt \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Burada $\Gamma(\cdot)$ gama fonksiyonudur [14].

Sonuç 2.2.6 Lemma 2.2.8'de $\alpha = \beta = 1$ olarak alınırsa

$$\begin{aligned} & \frac{f(a+b-x)+f(a+b-y)}{2} - \frac{1}{y-x}\int_{a+b-y}^{a+b-x} f(t)dt \\ = & \frac{y-x}{2}\int_0^1 (2t-1)f'\big(a+b-(tx+(1-t)y)\big)dt \end{aligned} \tag{2.2.50}$$

eşitliği elde edilir [14].

Sonuç 2.2.22 Sonuç 2.2.6'da $x = a$ ve $y = b$ olarak alınırsa (2.2.50), [22]'de Lemma 2.1'de ispatlanan

$$\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt = \frac{b-a}{2}\int_0^1 (2t-1)f'\big((1-t)a+tb\big)dt$$

eşitliğine indirgenir [14].

Teorem 2.2.19 $a < b$ ve $f' \in L[a,b]$ olmak üzere $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, (a,b) aralığında diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. $|f'|$, $[a,b]$ aralığında konveks bir fonksiyon ise her $x, y \in [a,b]$, $\alpha, \beta > 0$ ve $t \in [0,1]$ olmak üzere kesirli integraller için

$$\begin{aligned} & \Bigg| \frac{2^{\alpha\beta-1}\alpha^{\beta}\Gamma(\beta+1)}{(y-x)^{\alpha\beta}} \left\{ {}^{\beta}_{(a+b-\frac{x+y}{2})^+}\mathfrak{J}^{\alpha} f(a+b-x) + {}^{\beta}_{(a+b-\frac{x+y}{2})^-}\mathfrak{J}^{\alpha} f(a+b-y) \right\} \\ & -f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right) \Bigg| \\ \leq \;& \frac{y-x}{4}\alpha^{\beta}\Bigg[(|f'(a)|+|f'(b)|)\left(\frac{1}{\alpha^{\beta+1}}B\left(\beta+1,\frac{1}{\alpha}\right)\right) \\ & -\left\{ |f'(x)|\left(\frac{1}{2\alpha^{\beta+1}}\left(B\left(\beta+1,\frac{2}{\alpha}\right)+B\left(\beta+1,\frac{1}{\alpha}\right)\right)\right)\right\} \\ & -\left\{ |f'(y)|\left(\frac{1}{2\alpha^{\beta+1}}\left(B\left(\beta+1,\frac{2}{\alpha}\right)+B\left(\beta+1,\frac{1}{\alpha}\right)\right)\right)\right\} \\ & +(|f'(a)|+|f'(b)|)\left(\frac{1}{\alpha^{\beta+1}}B\left(\beta+1,\frac{1}{\alpha}\right)\right) \\ & -\left\{ |f'(x)|\left(\frac{1}{2\alpha^{\beta+1}}\left(B\left(\beta+1,\frac{1}{\alpha}\right)-B\left(\beta+1,\frac{2}{\alpha}\right)\right)\right)\right\} \\ & -\left\{ |f'(y)|\left(\frac{1}{2\alpha^{\beta+1}}\left(B\left(\beta+1,\frac{2}{\alpha}\right)+B\left(\beta+1,\frac{1}{\alpha}\right)\right)\right)\right\}\Bigg] \end{aligned} \tag{2.2.51}$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $\Gamma(\cdot)$ ve $B(\cdot,\cdot)$ sırasıyla beta fonksiyonu ve gama fonksiyonudur [14].

Sonuç 2.2.23 i) Teorem 2.2.19'da $x = a$ ve $y = b$ olarak alınırsa [26]'da Teorem 3.1 elde edilir.

ii) Teorem 2.2.19'da $\alpha = 1$, $x = a$ ve $y = b$ olarak alınırsa [63]'de Teorem 5'de $q = 1$ özel durumu ile aynı sonucu verir [14].

Teorem 2.2.20 $a < b$ olmak üzere $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, (a,b) aralığında diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $f' \in L[a,b]$ olsun. $q \geq 1$ için $|f'|^q$, $[a,b]$ aralığında konveks bir fonksiyon ise her $x, y \in [a,b]$, $\alpha, \beta > 0$ ve $t \in [0,1]$ olmak üzere kesirli integraller için

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{2^{\alpha\beta-1}\alpha^{\beta}\Gamma(\beta+1)}{(y-x)^{\alpha\beta}} \left\{ {}^{\beta}\mathfrak{J}^{\alpha}_{(a+b-\frac{x+y}{2})+} f(a+b-x) + {}^{\beta}\mathfrak{J}^{\alpha}_{(a+b-\frac{x+y}{2})-} f(a+b-y) \right\} \right. \\
&\left. -f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right) \right| \\
\leq\ & \frac{y-x}{4}\alpha^{\beta}\left(\frac{1}{\alpha^{\beta+1}}B\left(\beta+1,\frac{1}{\alpha}\right)\right)^{1-\frac{1}{q}} \\
&\left\{ (|f'(a)|^q + |f'(b)|^q)\left(\left(\frac{1}{\alpha^{\beta+1}}B\left(\beta+1,\frac{1}{\alpha}\right)\right)\right) \right. \\
&-\left\{ |f'(x)|^q \left(\frac{1}{2\alpha^{\beta+1}}\left(B\left(\beta+1,\frac{1}{\alpha}\right) - B\left(\beta+1,\frac{2}{\alpha}\right)\right)\right) \right. \\
&\left. +|f'(y)|^q \left(\frac{1}{2\alpha^{\beta+1}}\left(B\left(\beta+1,\frac{2}{\alpha}\right) + B\left(\beta+1,\frac{1}{\alpha}\right)\right)\right) \right\} \\
&+ (|f'(a)|^q + |f'(b)|^q)\left(\left(\frac{1}{\alpha^{\beta+1}}B\left(\beta+1,\frac{1}{\alpha}\right)\right)\right) \\
&-\left\{ |f'(x)|^q \left(\frac{1}{2\alpha^{\beta+1}}\left(B\left(\beta+1,\frac{2}{\alpha}\right) - B\left(\beta+1,\frac{1}{\alpha}\right)\right)\right) \right. \\
&\left. \left. +|f'(y)|^q \left(\frac{1}{2\alpha^{\beta+1}}\left(B\left(\beta+1,\frac{1}{\alpha}\right) + B\left(\beta+1,\frac{2}{\alpha}\right)\right)\right) \right\} \right\}^{\frac{1}{q}} \qquad (2.2.52)
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $\Gamma(\cdot)$ ve $B(\cdot,\cdot)$ sırasıyla beta fonksiyonu ve gama fonksiyonudur [14].

Sonuç 2.2.24 i) Teorem 2.2.20'de $x = a$ ve $y = b$ olarak alınırsa [26]'da Teorem 3.2 elde edilir.

ii) Teorem 2.2.20'de $\alpha = 1$, $x = a$ ve $y = b$ olarak alınırsa [63]'de Teorem 5'e indirgenir [14].

Teorem 2.2.21 $a < b$ olmak üzere $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, (a,b) aralığında diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $f' \in L[a,b]$ olsun. $q > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ için $|f'|^q$, $[a,b]$ aralığında konveks bir fonksiyon ise her $x, y \in [a,b]$, $\alpha, \beta > 0$, $t \in [0,1]$ ve $q > 0$ olmak üzere kesirli integraller için

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{2^{\alpha\beta-1}\alpha^{\beta}\Gamma(\beta+1)}{(y-x)^{\alpha\beta}}\left\{{}^{\beta}_{(a+b-\frac{x+y}{2})^+}\mathfrak{J}^{\alpha} f(a+b-x) + {}^{\beta}_{(a+b-\frac{x+y}{2})^-}\mathfrak{J}^{\alpha} f(a+b-y)\right\}\right. \\
&\left. -f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right)\right| \\
\leq\ & \frac{y-x}{4}\alpha^{\beta}\left(\frac{1}{\alpha^{\beta+1}}B\left(\beta p+1,\frac{1}{\alpha}\right)\right)^{\frac{1}{p}}\left\{\left(|f'(a)|^q+|f'(b)|^q-\left(\frac{3|f'(x)|^q+|f'(y)|^q}{4}\right)\right)^{\frac{1}{q}}\right. \\
&\left. +\left(|f'(a)|^q+|f'(b)|^q-\left(\frac{|f'(x)|^q+3|f'(y)|^q}{4}\right)\right)^{\frac{1}{q}}\right\} \qquad (2.2.53)
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $\Gamma(\cdot)$ ve $B(\cdot,\cdot)$ sırasıyla beta fonksiyonu ve gama fonksiyonudur [14].

Sonuç 2.2.7 Teorem 2.2.21'de $\alpha = 1$ olarak alınırsa

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{y-x}\int_{a+b-y}^{a+b-x} f(t)dt - f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right)\right| \\
\leq\ & \frac{1}{2^{\frac{1}{p}}}\left\{\left(|f'(a)|^q+|f'(b)|^q-\left(\frac{3|f'(x)|^q+|f'(y)|^q}{4}\right)\right)^{\frac{1}{q}}\right. \\
&\left. +\left(|f'(a)|^q+|f'(b)|^q-\left(\frac{|f'(x)|^q+3|f'(y)|^q}{4}\right)\right)^{\frac{1}{q}}\right\}
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir [14].

Teorem 2.2.22 $a < b$ olmak üzere $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, (a,b) aralığında diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $f' \in L[a,b]$ olsun. $q > 1$ ve $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$ için $|f'|^q$, $[a,b]$ aralığında konveks bir fonksiyon ise her $x, y \in [a,b]$, $\alpha, \beta > 0$ ve $t \in [0,1]$ olmak üzere kesirli integraller için

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{2^{\alpha\beta-1}\alpha^{\beta}\Gamma(\beta+1)}{(y-x)^{\alpha\beta}}\left\{{}^{\beta}_{(a+b-\frac{x+y}{2})^+}\mathfrak{J}^{\alpha} f(a+b-x) + {}^{\beta}\mathfrak{J}^{\alpha}_{(a+b-\frac{x+y}{2})^-} f(a+b-y)\right\}\right. \\
&\left. -f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right)\right| \\
\leq\ & \frac{y-x}{4}\alpha^{\beta}\left\{(|f'(a)|^q+|f'(b)|^q)\left(\frac{B(\beta+1,\frac{1}{\alpha})}{\alpha^{\beta+1}}\right)\right. \\
&-\left(\left(\frac{B(\beta+1,\frac{2}{\alpha})+B(\beta+1,\frac{1}{\alpha})}{2\alpha^{\beta+1}}\right)|f'(x)|^q\right. \\
&\left.+\left(\frac{B(\beta+1,\frac{1}{\alpha})-B(\beta+1,\frac{2}{\alpha})}{2\alpha^{\beta+1}}\right)|f'(y)|^q\right)^{\frac{1}{q}} + (|f'(a)|^q+|f'(b)|^q)\left(\frac{B(\beta+1,\frac{1}{\alpha})}{\alpha^{\beta+1}}\right) \\
&-\left(\left(\frac{B(\beta+1,\frac{1}{\alpha})-B(\beta+1,\frac{2}{\alpha})}{2\alpha^{\beta+1}}\right)|f'(x)|^q\right. \\
&\left.\left.+\left(\frac{B(\beta+1,\frac{2}{\alpha})+B(\beta+1,\frac{1}{\alpha})}{2\alpha^{\beta+1}}\right)|f'(y)|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right\}
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $\Gamma(\cdot)$ ve $B(\cdot,\cdot)$ sırasıyla beta fonksiyonu ve gama fonksiyonudur [14].

Teorem 2.2.23 $a<b$ olmak üzere $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, (a,b) aralığında diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $f'\in L[a,b]$ olsun. $|f'|$, $[a,b]$ aralığında konveks bir fonksiyon ise her $x,y\in[a,b]$, $\alpha,\beta>0$ ve $t\in[0,1]$ olmak üzere kesirli integraller için

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{f(a+b-x)+f(a+b-y)}{2}-\frac{\alpha^{\beta}\Gamma(\beta+1)}{2(y-x)^{\alpha\beta}}\right.\\
&\left.\times\left\{{}^{\beta}_{(a+b-y)^{+}}\mathfrak{J}^{\alpha}f(a+b-x)+{}^{\beta}\mathfrak{J}^{\alpha}_{(a+b-x)^{-}}f(a+b-y)\right\}\right|\\
\leq\ & \frac{(y-x)\alpha^{\beta}}{2}\left[\left\{\left(|f'(a)|^{q}+|f'(b)|^{q}\right)\frac{B(\frac{1}{\alpha},\beta+1)}{\alpha^{\beta+1}}\right.\right.\\
&-\frac{|f'(x)|}{\alpha^{\beta+1}}\left\{B_{\frac{1}{2^{\alpha}}}\left(\frac{1}{\alpha},\beta+1\right)+B\left(\frac{2}{\alpha},\beta+1\right)-B\left(\frac{1}{\alpha},\beta+1\right)\right\}\\
&\left.-\frac{|f'(y)|}{\alpha^{\beta+1}}\left\{B_{\frac{1}{2^{\alpha}}}\left(\frac{1}{\alpha},\beta+1\right)-B\left(\frac{2}{\alpha},\beta+1\right)\right\}\right\}\\
&+\left\{\left(|f'(a)|^{q}+|f'(b)|^{q}\right)\frac{B(\frac{1}{\alpha},\beta+1)}{\alpha^{\beta+1}}\right.\\
&-\frac{|f'(x)|}{\alpha^{\beta+1}}\left\{B_{\frac{1}{2^{\alpha}}}\left(\frac{1}{\alpha},\beta+1\right)-\left(\frac{2}{\alpha},\beta+1\right)\right\}\\
&\left.\left.-\frac{|f'(y)|}{\alpha^{\beta+1}}\left\{B_{\frac{1}{2^{\alpha}}}\left(\frac{1}{\alpha},\beta+1\right)+B\left(\frac{2}{\alpha},\beta+1\right)-B\left(\frac{1}{\alpha},\beta+1\right)\right\}\right\}\right]
\end{aligned}\tag{2.2.54}$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $\Gamma(\cdot)$, $B(\cdot,\cdot)$ bir beta fonksiyonu ve gama fonksiyonudur [14].

Teorem 2.2.24 $a<b$ olmak üzere $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, (a,b) aralığında diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $f'\in L[a,b]$ olsun. $q>1$ ve $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ için $|f'|^{q}$, $[a,b]$ aralığında konveks bir fonksiyon ise her $x,y\in[a,b]$, $\alpha,\beta>0$ ve $t\in[0,1]$ olmak üzere kesirli integraller için

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{2^{\alpha\beta-1}\alpha^{\beta}\Gamma(\beta+1)}{(y-x)^{\alpha\beta}}\left\{{}^{\beta}_{(a+b-\frac{x+y}{2})^{+}}\mathfrak{J}^{\alpha}f(a+b-x)+{}^{\beta}\mathfrak{J}^{\alpha}_{(a+b-\frac{x+y}{2})^{-}}f(a+b-y)\right\}\right.\\
&\left.-f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right)\right|\\
\leq\ & \frac{(y-x)\alpha^{\beta}}{2}\left[\left\{\left(\frac{B(\frac{2}{\alpha},\beta p+1)}{\alpha^{\beta+1}}\right)^{\frac{1}{p}}\right.\right.\\
&\times\left(\frac{|f'(a)|^{q}+|f'(b)|^{q}}{2}-\left(\frac{5}{12}|f'(x)|^{q}+\frac{1}{12}|f'(y)|^{q}\right)\right)^{\frac{1}{q}}\\
&+\left(\frac{B(\frac{1}{\alpha},\beta p+1)-B(\frac{2}{\alpha},\beta p+1)}{\alpha^{\beta p+1}}\right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\times\left(\frac{|f'(a)|^q+|f'(b)|^q}{2}-\left(\frac{1}{3}|f'(x)|^q+\frac{1}{6}|f'(y)|^q\right)\right)^{\frac{1}{q}}\Bigg\}\\
&+\Bigg\{\left(\frac{B(\frac{2}{\alpha},\beta p+1)}{\alpha^{\beta p+1}}\right)^{\frac{1}{p}}\times\left(\frac{|f'(a)|^q+|f'(b)|^q}{2}-\left(\frac{1}{12}|f'(x)|^q+\frac{5}{12}|f'(y)|^q\right)\right)^{\frac{1}{q}}\\
&+\left(\frac{B(\frac{1}{\alpha},\beta p+1)-B(\frac{2}{\alpha},\beta p+1)}{\alpha^{\beta p+1}}\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\times\left(\frac{|f'(a)|^q+|f'(b)|^q}{2}-\left(\frac{1}{6}|f'(x)|^q+\frac{1}{3}|f'(y)|^q\right)\right)^{\frac{1}{q}}\Bigg\}\Bigg] \qquad (2.2.55)
\end{aligned}
$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $\Gamma(\cdot)$ ve $B(\cdot,\cdot)$ sırasıyla beta fonksiyonu ve gama fonksiyonudur [14].

Teorem 2.2.25 $a<b$ olmak üzere $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, (a,b) aralığında diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $f'\in L[a,b]$ olsun. $q\geq 1$ için $|f'|^q$, $[a,b]$ aralığında konveks bir fonksiyon ise her $x,y\in[a,b]$, $\alpha,\beta>0$ ve $t\in[0,1]$ olmak üzere kesirli integraller için

$$
\begin{aligned}
&\Bigg|\frac{2^{\alpha\beta-1}\alpha^{\beta}\Gamma(\beta+1)}{(y-x)^{\alpha\beta}}\left\{{}^{\beta}_{(a+b-\frac{x+y}{2})}\mathfrak{J}^{\alpha}f(a+b-x)+{}^{\beta}\mathfrak{J}^{\alpha}_{(a+b-\frac{x+y}{2})}f(a+b-y)\right\}\\
&-f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right)\Bigg|\\
\leq\;&\frac{(y-x)\alpha^{\beta}}{4}\Bigg[\Bigg\{\left(\frac{B(\frac{2}{\alpha},\beta+1)}{\alpha^{\beta+1}}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left((|f'(a)|^q+|f'(b)|^q)\left(\frac{B(\frac{2}{\alpha},\beta+1)}{\alpha^{\beta+1}}\right)\right.\\
&-\left(\frac{1}{2\alpha^{\beta+1}}|f'(x)|^q\left(B\left(\frac{2}{\alpha},\beta+1\right)+B\left(\frac{3}{\alpha},\beta+1\right)\right)\right.\\
&\left.\left.+\frac{1}{2\alpha^{\beta+1}}|f'(y)|^q\left(B\left(\frac{2}{\alpha},\beta+1\right)-B\left(\frac{3}{\alpha},\beta+1\right)\right)\right)\right)^{\frac{1}{q}}\\
&+\left(\frac{B(\frac{1}{\alpha},\beta+1)-B(\frac{2}{\alpha},\beta+1)}{\alpha^{\beta+1}}\right)^{1-\frac{1}{q}}\\
&\times\left((|f'(a)|^q+|f'(b)|^q)\left(\frac{B(\frac{1}{\alpha},\beta+1)-B(\frac{2}{\alpha},\beta+1)}{\alpha^{\beta+1}}\right)\right)\\
&-\left(\frac{1}{2\alpha^{\beta+1}}|f'(x)|^q\left(B\left(\frac{1}{\alpha},\beta+1\right)-B\left(\frac{3}{\alpha},\beta+1\right)\right)\right)\\
&+\left(\frac{1}{2\alpha^{\beta+1}}|f'(y)|^q\left(B\left(\frac{1}{\alpha},\beta+1\right)-2B\left(\frac{2}{\alpha},\beta+1\right)\;+B\left(\frac{3}{\alpha},\beta+1\right)\right)\right)^{\frac{1}{q}}\Bigg\}\\
&+\Bigg\{\left(\frac{B(\frac{2}{\alpha},\beta+1)}{\alpha^{\beta+1}}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left((|f'(a)|^q+|f'(b)|^q)\right)\left(\frac{B(\frac{2}{\alpha},\beta p+1)}{\alpha^{\beta+1}}\right)\\
&-\left(\frac{1}{2\alpha^{\beta+1}}|f'(x)|^q\left(B\left(\frac{2}{\alpha},\beta+1\right)-B\left(\frac{3}{\alpha},\beta+1\right)\right)\right)\\
&+\left(\frac{1}{2\alpha^{\beta+1}}|f'(y)|^q\left(B\left(\frac{2}{\alpha},\beta+1\right)+B\left(\frac{3}{\alpha},\beta+1\right)\right)\right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\left(\frac{B(\frac{1}{\alpha},\beta+1)-B(\frac{2}{\alpha},\beta+1)}{\alpha^{\beta+1}}\right)^{1-\frac{1}{q}}\\
&\times\left((|f'(a)|^q+|f'(b)|^q)\left(\frac{B(\frac{1}{\alpha},\beta+1)-B(\frac{2}{\alpha},\beta+1)}{\alpha^{\beta+1}}\right)\right)\\
&-\left(\frac{1}{2\alpha^{\beta+1}}|f'(x)|^q\left(B\left(\frac{1}{\alpha},\beta+1\right)-2B\left(\frac{2}{\alpha},\beta+1\right)+B\left(\frac{3}{\alpha},\beta+1\right)\right)\right.\\
&\left.+\left(\frac{1}{2\alpha^{\beta+1}}|f'(y)|^q\left(B\left(\frac{1}{\alpha},\beta+1\right)-B\left(\frac{3}{\alpha},\beta+1\right)\right)\right)\right)^{\frac{1}{q}}\Bigg\}\Bigg] \qquad (2.2.56)
\end{aligned}
$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $\Gamma(\cdot)$ ve $B(\cdot,\cdot)$ sırasıyla beta fonksiyonu ve gama fonksiyonudur [14].

2.2.3 Ψ-Riemann-Liouville k-Kesirli İntegraller İçin Hermite-Hadamard-Mercer Tipli Eşitsizlikler

Bu bölümde, konveks fonksiyonlar için Ψ-Riemann-Liouville k-kesirli integral operatörleri içeren Hermite-Hadamard-Mercer tipli eşitsizlikler verilecektir.

Tanım 2.2.3 Diaz ve Pariguan, klasik gama ve beta fonksiyonları ve Pochhammer sembolünün genelleştirmesi olan Γ_k ile gösterilen k-gama fonksiyonunu,

$$\Gamma_k(\alpha)=\lim_{k\to+\infty}\frac{n!k^n(nk)^{\frac{x}{k}-1}}{(x)_{n,k}},\qquad k>0$$

şeklinde tanımlamıştır [21].

$\Gamma_k(y+k)=y\Gamma_k(y)$, $\Gamma(y)=\lim_{k\to1}\Gamma_k(y)$ ve $\Gamma_k(y)=k^{\frac{y}{k}-1}\Gamma(\frac{y}{k})$'dir.

Tanım 2.2.4 (Ψ-Riemann-Liouville k-Kesirli İntegral Operatörü) $\alpha,k>0$ olmak üzere $(a,b)(-\infty\le a<b\le+\infty$ reel eksen üzerinde sonlu bir aralık olsun. Ayrıca Ψ, $(a,b]$ aralığında artan ve pozitif monoton bir fonksiyon ve (a,b) aralığında Ψ' sürekli türevine sahip olsun. $[a,b]$ aralığında f fonksiyonunun Ψ fonksiyonuna bağlı sol ve sağ taraflı Ψ-Riemann-Liouville k-kesirli integralleri,

$$\left({}_kI_{a^+}^{\alpha;\Psi}\right)f(x)=\frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^x\Psi'(t)(\Psi(x)-\Psi(t))^{\frac{\alpha}{k}-1}f(t)dt\qquad a<x \qquad (2.2.57)$$

ve

$$\left({}_kI_{b^-}^{\alpha;\Psi}\right)f(x)=\frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_x^b\Psi'(t)(\Psi(t)-\Psi(x))^{\frac{\alpha}{k}-1}f(t)dt\qquad x<b \qquad (2.2.58)$$

şeklinde tanımlanır [39].

Saad Ihsan Butt ve arkadaşları, 2020 yılında Ψ-Riemann-Liouville k-kesirli integralleri yardımıyla aşağıdaki sonuçları elde etmişlerdir.

Bu bölüm boyunca aşağıdaki varsayıma ihtiyaç olacaktır.
A_1: $0 \leq a < b$ olmak üzere $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, pozitif bir fonksiyon ve $f \in L[a,b]$ olsun. Ayrıca $\alpha, k > 0$ olmak üzere f, $[a,b]$ aralığında konveks bir fonksiyon, $\Psi(\cdot)$ ise $(a,b]$ aralığında artan ve pozitif bir monoton fonksiyon ve (a,b) aralığında Ψ' sürekli türevine sahip olsun.

Teorem 2.2.26 A_1'deki şartlar altında her $x, y \in [a,b]$ ve $\Gamma_k(\cdot)$ olmak üzere kesirli integraller için

$$\begin{aligned} f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right) &\leq f(a)+f(b)-\frac{\Gamma_k(\alpha+k)}{2(y-x)^{\frac{\alpha}{k}}}\Big\{\left({}_kI^{\alpha;\Psi}_{\Psi^{-1}(x)^+}\right)(f\circ\Psi)\left(\Psi^{-1}(y)\right) \\ &\quad +\left({}_kI^{\alpha;\Psi}_{\Psi^{-1}(y)^-}\right)(f\circ\Psi)\left(\Psi^{-1}(x)\right)\Big\} \\ &\leq f(a)+f(b)-f\Big(\frac{x+y}{2}\Big) \end{aligned} \tag{2.2.59}$$

ve

$$\begin{aligned} f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right) &\leq \frac{\Gamma_k(\alpha+k)}{2(y-x)^{\frac{\alpha}{k}}}\Big[\left({}_kI^{\alpha;\Psi}_{\Psi^{-1}(a+b-x)^+}\right)(f\circ\Psi)\left(\Psi^{-1}(a+b-y)\right) \\ &\quad +\left({}_kI^{\alpha;\Psi}_{\Psi^{-1}(a+b-y)^-}\right)(f\circ\Psi)\left(\Psi^{-1}(a+b-x)\right)\Big] \\ &\leq \frac{f(a+b-x)+f(a+b-y)}{2} \\ &\leq f(a)+f(b)-f\Big(\frac{x+y}{2}\Big) \end{aligned} \tag{2.2.60}$$

eşitsizlikleri geçerlidir [15].

Sonuç 2.2.8 Teorem 2.2.26'nın şartları altında $\Psi(\gamma) = \gamma$ olarak alınırsa

$$\begin{aligned} f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right) &\leq f(a)+f(b)-\frac{\Gamma_k(\alpha+k)}{2(y-x)^{\frac{\alpha}{k}}}\Big\{{}_kJ^{\alpha}_{(y)^-}f(x)+{}_kJ^{\alpha}_{(x)^+}f(y)\Big\} \\ &\leq f(a)+f(b)-f\Big(\frac{x+y}{2}\Big) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right) &\leq \frac{\Gamma_k(\alpha+k)}{2(y-x)^{\frac{\alpha}{k}}}\Big[\left({}_kJ^{\alpha}_{(a+b-x)^+}\right)f(a+b-y) \\ &\quad +\left({}_kJ^{\alpha}_{(a+b-y)^-}\right)f(a+b-x)\Big] \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \frac{f(a+b-x)+f(a+b-y)}{2} \\
&\leq f(a)+f(b)-f\Big(\frac{x+y}{2}\Big)
\end{aligned}
$$

eşitsizlikleri elde edilir [15].

Teorem 2.2.27 A_1'deki şartlar altında her $x, y \in [a, b]$ olmak üzere kesirli integraller için

$$
\begin{aligned}
f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right) &\leq \frac{2^{\frac{\alpha}{k}-1}\Gamma_k(\alpha+k)}{(y-x)^{\frac{\alpha}{k}}}\Bigg[\Big({}_kI^{\alpha;\Psi}_{\Psi^{-1}(a+b-\frac{x+y}{2})^+}\Big)\big(f\circ\Psi\big)\big(\Psi^{-1}(a+b-x)\big) \\
&\quad +\Big({}_kI^{\alpha;\Psi}_{\Psi^{-1}(a+b-\frac{x+y}{2})^-}\Big)\big(f\circ\Psi\big)\big(\Psi^{-1}(a+b-y)\big)\Bigg] \\
&\leq f(a)+f(b)-\frac{f(x)+f(y)}{2} \qquad (2.2.61)
\end{aligned}
$$

eşitsizliği geçerlidir [15].

Sonuç 2.2.9 Teorem 2.2.27'de $\Psi(\gamma)=\gamma$ olarak alınırsa

$$
\begin{aligned}
f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right) &\leq \frac{2^{\frac{\alpha}{k}-1}\Gamma_k(\alpha+k)}{(y-x)^{\frac{\alpha}{k}}} \\
&\quad \times\Big\{{}_kJ^{\alpha}_{(a+b-\frac{x+y}{2})^-}f(a+b-y)+{}_kJ^{\alpha}_{(a+b-\frac{x+y}{2})^+}f(a+b-x)\Big\} \\
&\leq f(a)+f(b)-\left(\frac{f(x)+f(y)}{2}\right)
\end{aligned}
$$

eşitsizliği elde edilir [15].

Teorem 2.2.28 A_1'deki şartlar altında her $x, y \in [a, b]$ olmak üzere kesirli integraller için

$$
\begin{aligned}
f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right) &\leq \frac{2^{\frac{\alpha}{k}-1}\Gamma_k(\alpha+k)}{(y-x)^{\frac{\alpha}{k}}}\Bigg[\Big({}_kI^{\alpha;\Psi}_{\Psi^{-1}(a+b-y)^+}\Big)\big(f\circ\Psi\big)\left(\Psi^{-1}\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right)\right) \\
&\quad +\Big({}_kI^{\alpha;\Psi}_{\Psi^{-1}(a+b-x)^-}\Big)\big(f\circ\Psi\big)\left(\Psi^{-1}\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right)\right)\Bigg] \\
&\leq f(a)+f(b)-\left(\frac{f(x)+f(y)}{2}\right) \qquad (2.2.62)
\end{aligned}
$$

eşitsizliği geçerlidir [15].

Sonuç 2.2.10 Teorem 2.2.28'de $\Psi(\gamma)=\gamma$ olarak alınırsa

$$
\begin{aligned}
f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right) &\leq \frac{2^{\frac{\alpha}{k}-1}\Gamma_k(\alpha+k)}{(y-x)^{\frac{\alpha}{k}}}\Big\{{}_kJ^{\alpha}_{(a+b-x)^-}f\Big(a+b-\frac{x+y}{2}\Big) \\
&\quad +{}_kJ^{\alpha}_{(a+b-y)^+}f\Big(a+b-\frac{x+y}{2}\Big)\Big\} \\
&\leq f(a)+f(b)-\left(\frac{f(x)+f(y)}{2}\right)
\end{aligned}
$$

eşitsizliği elde edilir [15].

Lemma 2.2.9 $0 \leq a < b$ olmak üzere $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, pozitif bir fonksiyon ve $f \in L[a,b]$ olsun. Ayrıca $\alpha, k > 0$ olmak üzere f, $[a,b]$ aralığında konveks bir fonksiyon, $\Psi(\gamma)$, $(a,b]$ aralığında artan ve pozitif monoton bir fonksiyon ve (a,b) aralığında Ψ' sürekli türevine sahip olsun. Bu durumda her $x, y \in [a,b]$ için

$$\begin{aligned}
&\frac{f(a+b-x)+f(a+b-y)}{2} - \frac{\Gamma_k(\alpha+k)}{2(y-x)^{\frac{\alpha}{k}}}\Bigg[\left({}_kI^{\alpha;\Psi}_{\Psi^{-1}(a+b-y)^+}\right)(f\circ\Psi)\big(\Psi^{-1}(a+b-x)\big) \\
&+\left({}_kI^{\alpha;\Psi}_{\Psi^{-1}(a+b-x)^+}\right)(f\circ\Psi)\big(\Psi^{-1}(a+b-y)\big)\Bigg] \\
= \; &\frac{1}{2(y-x)^{\frac{\alpha}{k}}}\int_{\Psi^{-1}(a+b-y)}^{\Psi^{-1}(a+b-x)}\big((\Psi(\gamma)-(a+b-y))^{\frac{\alpha}{k}} \\
&-((a+b-x)-\Psi(\gamma))^{\frac{\alpha}{k}}\big)(f'\circ\Psi)(\gamma)\Psi'(\gamma)d\gamma \qquad (2.2.63)
\end{aligned}$$

eşitliği geçerlidir [15].

Sonuç 2.2.11 Lemma 2.2.9'da $\Psi(\gamma) = \gamma$ olarak alınırsa

$$\begin{aligned}
&\frac{f(a+b-x)+f(a+b-y)}{2} - \frac{\Gamma_k(\alpha+k)}{2(y-x)^{\frac{\alpha}{k}}} \\
&\times\left[{}_kJ^{\alpha}_{(a+b-y)^+}f(a+b-x) + {}_kJ^{\alpha}_{(a+b-x)^-}f(a+b-y)\right] \\
= \; &\frac{1}{2(y-x)^{\frac{\alpha}{k}}}\int_{(a+b-y)}^{(a+b-x)}\left[(\gamma-(a+b-y))^{\frac{\alpha}{k}} - ((a+b-x)-\gamma)^{\frac{\alpha}{k}}\right]f'(\gamma)d\gamma
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir [15].

Teorem 2.2.29 A_1'deki şartlar sağlanmış olsun. $|f'|$, $[a,b]$ aralığında konveks bir fonksiyon ise her $x, y \in [a,b]$ için

$$\begin{aligned}
&\Bigg|\frac{f(a+b-x)+f(a+b-y)}{2} - \frac{\Gamma_k(\alpha+k)}{2(y-x)^{\frac{\alpha}{k}}} \\
&\times\left[\left({}_kI^{\alpha;\Psi}_{\Psi^{-1}(a+b-y)^+}\right)f(a+b-x) + \left({}_kI^{\alpha;\Psi}_{\Psi^{-1}(a+b-x)^-}\right)f(a+b-y)\right]\Bigg| \\
\leq \; &\left(\frac{y-x}{\frac{\alpha}{k}+1}\right)\left(1-\frac{1}{2^{\frac{\alpha}{k}}}\right)\left\{|f'(a)|+|f'(b)| - \frac{|f'(x)|+|f'(y)|}{2}\right\} \qquad (2.2.64)
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir [15].

Sonuç 2.2.12 Teorem 2.2.29'da $\Psi(\gamma) = \gamma$ olarak alınırsa

$$\Bigg|\frac{f(a+b-x)+f(a+b-y)}{2} - \frac{\Gamma_k(\alpha+k)}{2(y-x)^{\frac{\alpha}{k}}}\Bigg[\left({}_kJ^{\alpha}_{(a+b-y)^+}\right)f(a+b-x)$$

$$
\begin{aligned}
&+\left({}_kJ^{\alpha}_{(a+b-x)^-}\right)f(a+b-y)\Big]\Big| \\
\leq\ & \left(\frac{y-x}{\frac{\alpha}{k}+1}\right)\left(1-\frac{1}{2^{\frac{\alpha}{k}}}\right)\left\{|f'(a)|+|f'(b)|-\frac{|f'(x)|+|f'(y)|}{2}\right\}
\end{aligned}
$$

eşitsizliği elde edilir [15].

Lemma 2.2.10 $0 \leq a < b$ olmak üzere $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, pozitif bir fonksiyon ve $f \in L[a,b]$ olsun. Ayrıca $\alpha, k > 0$ olmak üzere f, $[a,b]$ aralığında konveks bir fonksiyon, $\Psi(\gamma)$, $(a,b]$ aralığında artan ve pozitif bir monoton fonksiyon ve (a,b) aralığında Ψ' sürekli türeve sahip olsun. Bu durumda

$$
\begin{aligned}
&\frac{f(a+b-x)+f(a+b-y)}{2}-\frac{2^{\frac{\alpha}{k}-1}\Gamma_k(\alpha+k)}{(y-x)^{\frac{\alpha}{k}}} \\
&\times\left[\left({}_kI^{\alpha;\Psi}_{\Psi^{-1}(a+b-y)^+}\right)\left((f\circ\Psi)\left(\Psi^{-1}\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right)\right)\right)\right. \\
&\left.+\left({}_kI^{\alpha;\Psi}_{\Psi^{-1}(a+b-x)^-}\right)\left((f\circ\Psi)\left(\Psi^{-1}\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right)\right)\right)\right] \\
=\ & \frac{(y-x)}{4}\left[\int_0^1 t^{\frac{\alpha}{k}}f'\left(a+b-\left(\frac{1+t}{2}x+\frac{1-t}{2}y\right)\right)dt\right. \\
&\left.-\int_0^1 t^{\frac{\alpha}{k}}f'\left(a+b-\left(\frac{1-t}{2}x+\frac{1+t}{2}y\right)\right)dt\right] \qquad (2.2.65)
\end{aligned}
$$

eşitliği geçerlidir [15].

Sonuç 2.2.13 Lemma 2.2.10'da $\Psi(\gamma) = \gamma$ olarak alınırsa

$$
\begin{aligned}
&\frac{f(a+b-x)+f(a+b-y)}{2}-\frac{2^{\frac{\alpha}{k}-1}\Gamma_k(\alpha+k)}{(y-x)^{\frac{\alpha}{k}}} \\
&\times\left\{\left({}_kJ^{\alpha}_{(a+b-y)^+}\right)f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right)+\left({}_kJ^{\alpha}_{(a+b-x)^-}\right)f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right)\right\} \\
=\ & \frac{(y-x)}{4}\int_0^1 t^{\frac{\alpha}{k}}\left[f'\left(a+b-\left(\frac{1+t}{2}x+\frac{1-t}{2}y\right)\right)dt\right. \\
&\left.-f'\left(a+b-\left(\frac{1-t}{2}x+\frac{1+t}{2}y\right)\right)\right]dt
\end{aligned}
$$

eşitliği elde edilir [15].

Teorem 2.2.30 A_1'deki şartlar sağlanmış olsun. f', diferansiyellenebilir ve $|f''|$, $[a,b]$ aralığında sınırlı bir fonksiyon ise her $x, y \in [a,b]$ için

$$
\left|\frac{f(a+b-x)+f(a+b-y)}{2}-\frac{2^{\frac{\alpha}{k}-1}\Gamma_k(\alpha+k)}{(y-x)^{\frac{\alpha}{k}}}\right.
$$

$$
\begin{aligned}
&\times\Bigg[\Big({}_kI^{\alpha;\Psi}_{\Psi^{-1}(a+b-y)^+}\Big)\left((f\circ\Psi)\left(\Psi^{-1}\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right)\right)\right)\\
&+\Big({}_kI^{\alpha;\Psi}_{\Psi^{-1}(a+b-y)^-}\Big)\Big((f\circ\Psi)\left((f\circ\Psi)\left(\Psi^{-1}\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right)\right)\right)\Bigg]\Bigg|\\
\le\ &\frac{(y-x)^2}{4(\frac{\alpha}{k}+2)}\sup_{\xi\in[a,b]}|f''(\xi)| \qquad (2.2.66)
\end{aligned}
$$

eşitsizliği geçerlidir [15].

Sonuç 2.2.14 Teorem 2.2.30'da $\Psi(\gamma)=\gamma$ olarak alınırsa

$$
\begin{aligned}
&\Bigg|\frac{f(a+b-x)+f(a+b-y)}{2}-\frac{2^{\frac{\alpha}{k}-1}\Gamma_k(\alpha+k)}{(y-x)^{\frac{\alpha}{k}}}\\
&\times\Big\{\Big({}_kJ^{\alpha}_{(a+b-y)^+}\Big)f\Big(a+b-\frac{x+y}{2}\Big)+\Big({}_kJ^{\alpha}_{(a+b-x)^-}\Big)f\Big(a+b-\frac{x+y}{2}\Big)\Big\}\Bigg|\\
\le\ &\frac{(y-x)^2}{4(\frac{\alpha}{k}+2)}\sup|f''(\xi)| \qquad (2.2.67)
\end{aligned}
$$

eşitsizliği elde edilir [15].

Teorem 2.2.31 A_1'deki şartlar sağlanmış olsun. Ayrıca $|f'|$, $[a,b]$ aralığında konveks bir fonksiyon ise bu durumda her $x,y\in[a,b]$ için

$$
\begin{aligned}
&\Bigg|\frac{f(a+b-x)+f(a+b-y)}{2}-\frac{2^{\frac{\alpha}{k}-1}\Gamma_k(\alpha+k)}{(y-x)^{\frac{\alpha}{k}}}\\
&\times\Big[\Big({}_kI^{\alpha;\Psi}_{\Psi^{-1}(a+b-y)^+}\Big)f\Big(a+b-\frac{x+y}{2}\Big)+\Big({}_kI^{\alpha;\Psi}_{\Psi^{-1}(a+b-x)^-}\Big)f\Big(a+b-\frac{x+y}{2}\Big)\Big]\Bigg|\\
\le\ &\frac{y-x}{2(\frac{\alpha}{k}+1)}\Big\{|f'(a)|+|f'(b)|-\frac{|f'(x)|+|f'(y)|}{2}\Big\} \qquad (2.2.68)
\end{aligned}
$$

eşitsizliği geçerlidir [15].

Sonuç 2.2.15 Teorem 2.2.31'de $\Psi(\gamma)=\gamma$ olarak alınırsa

$$
\begin{aligned}
&\Bigg|\frac{f(a+b-x)+f(a+b-y)}{2}-\frac{2^{\frac{\alpha}{k}-1}\Gamma_k(\alpha+k)}{(y-x)^{\frac{\alpha}{k}}}\\
&\times\Big\{\Big({}_kJ^{\alpha}_{(a+b-y)^+}\Big)f\Big(a+b-\frac{x+y}{2}\Big)+\Big({}_kJ^{\alpha}_{(a+b-x)^-}\Big)f\Big(a+b-\frac{x+y}{2}\Big)\Big\}\Bigg|\\
\le\ &\frac{y-x}{2(\frac{\alpha}{k}+1)}\Big\{|f'(a)|+|f'(b)|-\frac{|f'(x)|+|f'(y)|}{2}\Big\}
\end{aligned}
$$

eşitsizliği elde edilir [15].

Lemma 2.2.11 $0\le a<b$ olmak üzere $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, pozitif bir fonksiyon ve $f\in L[a,b]$ olsun. Ayrıca $\alpha,k>0$ olmak üzere f, $[a,b]$ aralığında konveks bir fonksiyon, $\Psi(t)$, $(a,b]$

aralığında artan ve pozitif bir monoton fonksiyon ve (a,b) aralığında Ψ' sürekli bir türeve sahip olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
&f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right)-\frac{2^{\frac{\alpha}{k}-1}\Gamma_k(\alpha+k)}{(y-x)^{\frac{\alpha}{k}}}\bigg[\left({}_kI^{\alpha;\Psi}_{\Psi^{-1}(a+b-\frac{x+y}{2})^+}\right)(f\circ\Psi)\big(\Psi^{-1}(a+b-x)\big)\\
&+\left({}_kI^{\alpha;\Psi}_{\Psi^{-1}(a+b-\frac{x+y}{2})^-}\right)(f\circ\Psi)\big(\Psi^{-1}(a+b-y)\big)\bigg]\\
=\ &\frac{(y-x)}{4}\bigg[\int_0^1 t^{\frac{\alpha}{k}}f'\left(a+b-\left(\frac{t}{2}x+\frac{2-t}{2}y\right)\right)dt\\
&-\int_0^1 t^{\frac{\alpha}{k}}f'\left(a+b-\left(\frac{2-t}{2}x+\frac{t}{2}y\right)\right)dt\bigg] \qquad (2.2.69)
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir [15].

Sonuç 2.2.16 Lemma 2.2.11'de $\Psi(\gamma)=\gamma$ olarak alınırsa

$$\begin{aligned}
&f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right)-\frac{2^{\frac{\alpha}{k}-1}\Gamma_k(\alpha+k)}{(y-x)^{\frac{\alpha}{k}}}\\
&\times\left[\left({}_kJ^{\alpha}_{(a+b-\frac{x+y}{2})^+}\right)f(a+b-x)+\left({}_kJ^{\alpha}_{(a+b-\frac{x+y}{2})^-}\right)f(a+b-y)\right]\\
=\ &\frac{(y-x)}{4}\bigg[\int_0^1 t^{\frac{\alpha}{k}}f'\left(a+b-\left(\frac{t}{2}x+\frac{2-t}{2}y\right)\right)dt\\
&-\int_0^1 t^{\frac{\alpha}{k}}f'\left(a+b-\left(\frac{2-t}{2}x+\frac{t}{2}y\right)\right)dt\bigg]
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir [15].

Teorem 2.2.32 A_1'deki şartlar sağlanmış olsun. Bu durumda $|f'|$, $[a,b]$ aralığında konveks bir fonksiyon ise her $x,y\in[a,b]$ için

$$\begin{aligned}
&\bigg|f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right)-\frac{2^{\frac{\alpha}{k}-1}\Gamma_k(\alpha+k)}{(y-x)^{\frac{\alpha}{k}}}\\
&\times\left[\left({}_kI^{\alpha;\Psi}_{\Psi^{-1}(a+b-\frac{x+y}{2})^+}\right)f(a+b-x)+\left({}_kI^{\alpha;\Psi}_{\Psi^{-1}(a+b-\frac{x+y}{2})^-}\right)f(a+b-y)\right]\bigg|\\
\leq\ &\frac{y-x}{2\left(\frac{\alpha}{k}+1\right)}\left\{|f'(a)|+|f'(b)|-\frac{|f'(x)|+|f'(y)|}{2}\right\} \qquad (2.2.70)
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir [15].

Sonuç 2.2.17 Teorem 2.2.32'de $\Psi(\gamma)=\gamma$ olarak alınırsa

$$\bigg|f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right)-\frac{2^{\frac{\alpha}{k}-1}\Gamma_k(\alpha+k)}{(y-x)^{\frac{\alpha}{k}}}$$

$$\times\left[\left({}_kJ^{\alpha}_{(a+b-\frac{x+y}{2})^+}\right)f(a+b-x)+\left({}_kJ^{\alpha}_{(a+b-\frac{x+y}{2})^-}\right)f(a+b-y)\right]\Bigg|$$
$$\leq \frac{(y-x)}{2\left(\frac{\alpha}{k}+1\right)}\left\{|f'(a)|+|f'(b)|-\frac{|f'(x)|+|f'(y)|}{2}\right\}$$

eşitsizliği elde edilir [15].

Teorem 2.2.33 A_1'deki şartlar sağlanmış olsun. Ayrıca $q>1$ ve $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ için $|f'|^q$, konveks bir fonksiyon ise her $x,y\in[a,b]$ için

$$\Bigg|f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right)-\frac{2^{\frac{\alpha}{k}-1}\Gamma_k(\alpha+k)}{(y-x)^{\frac{\alpha}{k}}}$$
$$\times\left[\left({}_kI^{\alpha;\Psi}_{\Psi^{-1}(a+b-\frac{x+y}{2})^+}\right)f(a+b-x)+\left({}_kI^{\alpha;\Psi}_{\Psi^{-1}(a+b-\frac{x+y}{2})^-}\right)f(a+b-y)\right]\Bigg|$$
$$\leq \frac{(y-x)}{4}\left(\frac{k}{p\alpha+k}\right)^{\frac{1}{p}}\left[\left(|f'(a)|^q+|f'(b)|^q-\left(\frac{1}{4}|f'(x)|^q+\frac{3}{4}|f'(y)|^q\right)\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$
$$\left.+\left(|f'(a)|^q+|f'(b)|^q-\left(\frac{3}{4}|f'(x)|^q+\frac{1}{4}|f'(y)|^q\right)\right)^{\frac{1}{q}}\right] \tag{2.2.71}$$

eşitsizliği geçerlidir [15].

Sonuç 2.2.18 Teorem 2.2.33'de $\Psi(\gamma)=\gamma$ olarak alınırsa

$$\Bigg|f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right)-\frac{2^{\frac{\alpha}{k}-1}\Gamma_k(\alpha+k)}{(y-x)^{\frac{\alpha}{k}}}$$
$$\times\left[\left({}_kJ^{\alpha}_{(a+b-\frac{x+y}{2})^+}\right)f(a+b-x)+\left({}_kJ^{\alpha}_{(a+b-\frac{x+y}{2})^-}\right)f(a+b-y)\right]\Bigg|$$
$$\leq \frac{(y-x)}{4}\left(\frac{k}{p\alpha+k}\right)^{\frac{1}{p}}\left[\left(|f'(a)|^q+|f'(b)|^q-\left(\frac{1}{4}|f'(x)|^q+\frac{3}{4}|f'(y)|^q\right)\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$
$$\left.+\left(|f'(a)|^q+|f'(b)|^q-\left(\frac{3}{4}|f'(y)|^q+\frac{1}{4}|f'(x)|^q\right)\right)^{\frac{1}{q}}\right]$$

eşitsizliği elde edilir [15].

Teorem 2.2.34 A_1'deki şartlar sağlanmış olsun. Ayrıca $q\geq 1$ için $|f'|^q$, $[a,b]$ aralığında konveks bir fonksiyon ise her $x,y\in[a,b]$ için

$$\Bigg|f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right)-\frac{2^{\frac{\alpha}{k}-1}\Gamma_k(\alpha+k)}{(y-x)^{\frac{\alpha}{k}}}$$
$$\times\left[\left({}_kI^{\alpha;\Psi}_{\Psi^{-1}(a+b-\frac{x+y}{2})^+}\right)\Big((f\circ\Psi)\Big(\Psi^{-1}(a+b-x)\Big)\Big)\right.$$
$$\left.+\left({}_kI^{\alpha;\Psi}_{\Psi^{-1}(a+b-\frac{x+y}{2})^-}\right)\Big((f\circ\Psi)\Big(\Psi^{-1}(a+b-y)\Big)\Big)\right]\Bigg|$$

$$
\begin{aligned}
\leq\ & \frac{(y-x)}{4}\Bigg[\Bigg\{\left(\frac{1}{\left(\frac{\alpha}{k}+1\right)\left(\frac{\alpha}{k}+2\right)}\right)^{1-\frac{1}{q}}\Bigg(\frac{|f'(a)|^q+|f'(b)|^q}{\left(\frac{\alpha}{k}+1\right)\left(\frac{\alpha}{k}+2\right)} \\
& -\left(\frac{|f'(x)|^q}{2\left(\frac{\alpha}{k}+2\right)\left(\frac{\alpha}{k}+3\right)}+\frac{\left(\frac{\alpha}{k}+5\right)|f'(y)|^q}{2\left(\frac{\alpha}{k}+1\right)\left(\frac{\alpha}{k}+2\right)\left(\frac{\alpha}{k}+3\right)}\right)\Bigg)^{\frac{1}{q}} \\
& +\left(\frac{1}{\left(\frac{\alpha}{k}+2\right)}\right)^{1-\frac{1}{q}}\Bigg(\frac{|f'(a)|^q+|f'(b)|^q}{\left(\frac{\alpha}{k}+2\right)} \\
& -\left(\frac{|f'(x)|^q}{2\left(\frac{\alpha}{k}+3\right)}+\frac{|f'(y)|^q}{2\left(\frac{\alpha}{k}+2\right)\left(\frac{\alpha}{k}++3\right)}\right)\Bigg)^{\frac{1}{q}}\Bigg\} \\
& +\Bigg\{\left(\frac{1}{\left(\frac{\alpha}{k}+1\right)\left(\frac{\alpha}{k}+2\right)}\right)^{1-\frac{1}{q}}\Bigg(\frac{|f'(a)|^q+|f'(b)|^q}{\left(\frac{\alpha}{k}+1\right)\left(\frac{\alpha}{k}+2\right)} \\
& -\left(\frac{\left(\frac{\alpha}{k}+5\right)|f'(x)|^q}{2\left(\frac{\alpha}{k}+1\right)\left(\frac{\alpha}{k}+2\right)\left(\frac{\alpha}{k}+3\right)}+\frac{|f'(y)|^q}{2\left(\frac{\alpha}{k}+2\right)\left(\frac{\alpha}{k}+3\right)}\right)\Bigg)^{\frac{1}{q}} \\
& +\left(\frac{1}{\left(\frac{\alpha}{k}+2\right)}\right)^{1-\frac{1}{q}}\Bigg(\frac{|f'(a)|^q+|f'(b)|^q}{\left(\frac{\alpha}{k}+2\right)} \\
& -\left(\frac{\left(\frac{\alpha}{k}+4\right)|f'(x)|^q}{2\left(\frac{\alpha}{k}+2\right)\left(\frac{\alpha}{k}+3\right)}+\frac{|f'(y)|^q}{2\left(\frac{\alpha}{k}+3\right)}\right)\Bigg)^{\frac{1}{q}}\Bigg\} \qquad (2.2.72)
\end{aligned}
$$

eşitsizliği geçerlidir [15].

Sonuç 2.2.19 Teorem 2.2.34'de $\Psi(\gamma)=\gamma$ olarak alınırsa

$$
\begin{aligned}
& \Bigg|f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right)-\frac{2^{\frac{\alpha}{k}-1}\Gamma_k(\alpha+k)}{(y-x)^{\frac{\alpha}{k}}} \\
& \times\left[\left({}_kJ^{\alpha}_{\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right)^+}\right)f(a+b-x)+\left({}_kJ^{\alpha}_{\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right)^-}\right)f(a+b-y)\right]\Bigg| \\
\leq\ & \frac{(y-x)}{4}\Bigg[\Bigg\{\left(\frac{1}{\left(\frac{\alpha}{k}+1\right)\left(\frac{\alpha}{k}+2\right)}\right)^{1-\frac{1}{q}}\Bigg(\frac{|f'(a)|^q+|f'(b)|^q}{\left(\frac{\alpha}{k}+1\right)\left(\frac{\alpha}{k}+2\right)} \\
& -\left(\frac{|f'(x)|^q}{2\left(\frac{\alpha}{k}+2\right)\left(\frac{\alpha}{k}+3\right)}+\frac{\left(\frac{\alpha}{k}+5\right)|f'(y)|^q}{2\left(\frac{\alpha}{k}+1\right)\left(\frac{\alpha}{k}+2\right)\left(\frac{\alpha}{k}+3\right)}\right)\Bigg)^{\frac{1}{q}} \\
& +\left(\frac{1}{\left(\frac{\alpha}{k}+2\right)}\right)^{1-\frac{1}{q}}\Bigg(\frac{|f'(a)|^q+|f'(b)|^q}{\left(\frac{\alpha}{k}+2\right)} \\
& -\left(\frac{|f'(x)|^q}{2\left(\frac{\alpha}{k}+3\right)}+\frac{|f'(y)|^q}{2\left(\frac{\alpha}{k}+2\right)\left(\frac{\alpha}{k}++3\right)}\right)\Bigg)^{\frac{1}{q}}\Bigg\} \\
& +\Bigg\{\left(\frac{1}{\left(\frac{\alpha}{k}+1\right)\left(\frac{\alpha}{k}+2\right)}\right)^{1-\frac{1}{q}}\Bigg(\frac{|f'(a)|^q+|f'(b)|^q}{\left(\frac{\alpha}{k}+1\right)\left(\frac{\alpha}{k}+2\right)} \\
& -\left(\frac{\left(\frac{\alpha}{k}+5\right)|f'(x)|^q}{2\left(\frac{\alpha}{k}+1\right)\left(\frac{\alpha}{k}+2\right)\left(\frac{\alpha}{k}+3\right)}+\frac{|f'(y)|^q}{2\left(\frac{\alpha}{k}+2\right)\left(\frac{\alpha}{k}+3\right)}\right)\Bigg)^{\frac{1}{q}} \\
& +\left(\frac{1}{\left(\frac{\alpha}{k}+2\right)}\right)^{1-\frac{1}{q}}\Bigg(\frac{|f'(a)|^q+|f'(b)|^q}{\left(\frac{\alpha}{k}+2\right)}
\end{aligned}
$$

$$-\left(\frac{\left(\frac{\alpha}{k}+4\right)|f'(x)|^q}{2\left(\frac{\alpha}{k}+2\right)\left(\frac{\alpha}{k}+3\right)}+\frac{|f'(y)|^q}{2\left(\frac{\alpha}{k}+3\right)}\right)\Bigg)^{\frac{1}{q}}\Bigg\}$$

eşitsizliği elde edilir [15].

Teorem 2.2.35 A_1'deki şartlar sağlanmış olsun. Ayrıca $q>1$ ve $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ için $|f'|^q$, $[a,b]$ aralığında konveks bir fonksiyon ise her $x,y\in[a,b]$ için

$$\begin{aligned}
&\Bigg|f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right)-\frac{2^{\frac{\alpha}{k}-1}\Gamma_k(\alpha+k)}{(y-x)^{\frac{\alpha}{k}}}\\
&\times\Bigg[\left({}_kI^{\alpha;\Psi}_{\Psi^{-1}(a+b-\frac{x+y}{2})^+}\right)\Big((f\circ\Psi)\Big(\Psi^{-1}(a+b-x)\Big)\Big)\\
&+\left({}_kI^{\alpha;\Psi}_{\Psi^{-1}(a+b-\frac{x+y}{2})^-}\right)\Big((f\circ\Psi)\Big(\Psi^{-1}(a+b-y)\Big)\Big)\Bigg]\Bigg|\\
\leq\;&\frac{(y-x)}{4}\Bigg[\Bigg\{\left(\frac{1}{\left(\frac{\alpha p}{k}+1\right)\left(\frac{\alpha p}{k}+2\right)}\right)^{\frac{1}{p}}\Bigg(\frac{1}{2}\left(|f'(a)|^q+|f'(b)|^q\right)\\
&-\left(\frac{1}{12}|f'(x)|^q+\frac{5}{12}|f'(y)|^q\right)\Bigg)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{1}{\left(\frac{\alpha p}{k}+2\right)}\right)^{\frac{1}{p}}\Bigg(\frac{1}{2}\left(|f'(a)|^q+|f'(b)|^q\right)\\
&-\left(\frac{1}{6}|f'(x)|^q+\frac{1}{3}|f'(y)|^q\right)\Bigg)^{\frac{1}{q}}\Bigg\}+\Bigg\{\left(\frac{1}{\left(\frac{\alpha p}{k}+1\right)\left(\frac{\alpha p}{k}+2\right)}\right)^{\frac{1}{p}}\Bigg(\frac{1}{2}\Big(|f'(a)|^q\\
&+|f'(b)|^q\Big)-\left(\frac{5}{12}|f'(x)|^q+\frac{1}{12}|f'(y)|^q\right)\Bigg)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{1}{\left(\frac{\alpha p}{k}+2\right)}\right)^{\frac{1}{p}}\Bigg(\frac{1}{2}\Big(|f'(a)|^q\\
&+|f'(b)|^q\Big)-\left(\frac{1}{3}|f'(x)|^q+\frac{1}{6}|f'(y)|^q\right)\Bigg)^{\frac{1}{q}}\Bigg\}\Bigg] \qquad (2.2.73)
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir [15].

Sonuç 2.2.20 Teorem 2.2.35'de $\Psi(\gamma)=\gamma$ olarak alınırsa

$$\begin{aligned}
&\Bigg|f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right)-\frac{2^{\frac{\alpha}{k}-1}\Gamma_k(\alpha+k)}{(y-x)^{\frac{\alpha}{k}}}\\
&\times\Bigg[\left({}_kJ^{\alpha}_{(a+b-\frac{x+y}{2})^+}\right)f(a+b-x)+\left({}_kJ^{\alpha}_{(a+b-\frac{x+y}{2})^-}\right)f(a+b-y)\Bigg]\Bigg|\\
\leq\;&\frac{(y-x)}{4}\Bigg[\Bigg\{\left(\frac{1}{\left(\frac{\alpha p}{k}+1\right)\left(\frac{\alpha p}{k}+2\right)}\right)^{\frac{1}{p}}\Bigg(\frac{1}{2}\left(|f'(a)|^q+|f'(b)|^q\right)\\
&-\left(\frac{1}{12}|f'(x)|^q+\frac{5}{12}|f'(y)|^q\right)\Bigg)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{1}{\left(\frac{\alpha p}{k}+2\right)}\right)^{\frac{1}{p}}\Bigg(\frac{1}{2}\left(|f'(a)|^q+|f'(b)|^q\right)\\
&-\left(\frac{1}{6}|f'(x)|^q+\frac{1}{3}|f'(y)|^q\right)\Bigg)^{\frac{1}{q}}\Bigg\}+\Bigg\{\left(\frac{1}{\left(\frac{\alpha p}{k}+1\right)\left(\frac{\alpha p}{k}+2\right)}\right)^{\frac{1}{p}}\Bigg(\frac{1}{2}\Big(|f'(a)|^q\\
&+|f'(b)|^q\Big)-\left(\frac{5}{12}|f'(x)|^q+\frac{1}{12}|f'(y)|^q\right)\Bigg)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{1}{\left(\frac{\alpha p}{k}+2\right)}\right)^{\frac{1}{p}}\Bigg(\frac{1}{2}\Big(|f'(a)|^q
\end{aligned}$$

$$+|f'(b)|^q) - \left(\frac{1}{3}|f'(x)|^q + \frac{1}{6}|f'(y)|^q\right)\Bigg)^{\frac{1}{q}}\Bigg\}\Bigg]$$

eşitsizliği elde edilir [15].

2.2.4 Caputo k-Kesirli Türevler İçin Hermite-Hadamard-Mercer Tipli Eşitsizlikler

Bu bölümde, konveks fonksiyonlar için Caputo k-kesirli türev operatörleri içeren Hermite-Hadamard-Mercer tipli eşitsizlikler verilecektir.

Tanım 2.2.5 (Caputo k-Kesirli Türev Operatörü) $f \in C^n[a,b]$ fonksiyonu olsun. $\alpha > 0$, $k \geq 1$, $\alpha \notin \{1,2,3,\ldots,n\}$ ve $n = [|\alpha|] + 1$ olmak üzere α. mertebeden sol ve sağ taraflı Caputo k-kesirli türevleri sırasıyla,

$$\left({}^cD_{a^+}^{\alpha,k}\right)f(x) = \frac{1}{k\Gamma_k(n-\frac{\alpha}{k})}\int_a^x \frac{f^{(n)}(t)}{(x-t)^{\frac{\alpha}{k}-n+1}}dt, \quad x > a \tag{2.2.74}$$

ve

$$\left({}^cD_{b^-}^{\alpha,k}\right)f(y) = \frac{(-1)^n}{k\Gamma_k(n-\frac{\alpha}{k})}\int_y^b \frac{f^{(n)}(t)}{(t-y)^{\frac{\alpha}{k}-n+1}}dt, \quad y < b \tag{2.2.75}$$

şeklinde tanımlanır [23]. $k = 1$ için, Caputo k-kesirli türevleri, Caputo kesirli türevlerin tanımını verir.

Shupeng Zhao ve arkadaşları, 2020 yılında Caputo k-kesirli türev operatörleri yardımıyla aşağıdaki sonuçları elde etmişlerdir.

Bu bölüm boyunca aşağıdaki varsayım kullanılacaktır.
A_1: Her $x, y \in [a,b]$, $\alpha > 0$, $k \geq 1$ ve $\Gamma_k(\cdot)$ k-gama fonksiyonu olsun.

Teorem 2.2.36 $0 \leq a < b$ olmak üzere $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $[a,b]$ üzerinde pozitif tanımlı bir fonksiyon ve $f \in C^n[a,b]$ olsun. A_1'deki şartlar ile birlikte $f^{(n)}$, $[a,b]$ aralığında konveks bir fonksiyon ise Caputo k-kesirli türevler için

$$\begin{aligned} f^{(n)}\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right) &\leq f^{(n)}(a) + f^{(n)}(b) - \frac{\Gamma_k(n-\frac{\alpha}{k}+k)}{2(y-x)^{n-\frac{\alpha}{k}}} \\ &\quad \times \left\{\left({}^cD_{x^-}^{\alpha,k}f\right)(y) + (-1)^n\left({}^cD_{y^-}^{\alpha,k}f\right)(x)\right\} \\ &\leq f^{(n)}(a) + f^{(n)}(b) - f^{(n)}\left(\frac{x+y}{2}\right) \end{aligned} \tag{2.2.76}$$

eşitsizliği geçerlidir [72].

Sonuç 2.2.25 Teorem 2.2.36'da $k = 1$ olarak alınırsa [71]'de Teorem 2'ye indirgenir [72].

Teorem 2.2.37 $0 \leq a < b$ olmak üzere $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, pozitif tanımlı bir fonksiyon ve $f \in C^n[a,b]$ olsun. A_1'deki şartlar ile birlikte $f^{(n)}$, $[a,b]$ aralığında konveks bir fonksiyon ise Caputo k-kesirli türevler için

$$\begin{aligned} f^{(n)}\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right) &\leq \frac{2^{n-\frac{\alpha}{k}-1}\Gamma_k(n-\frac{\alpha}{k}+k)}{(y-x)^{n-\frac{\alpha}{k}}}\Big\{\Big({}^cD^{\alpha,k}_{(a+b-\frac{x+y}{2})^+}f\Big)(a+b-x) \\ &\quad +(-1)^n\Big({}^cD^{\alpha,k}_{(a+b-\frac{x+y}{2})^-}f\Big)(a+b-y)\Big\} \\ &\leq f^{(n)}(a)+f^{(n)}(b)-\left(\frac{f^{(n)}(x)+f^{(n)}(y)}{2}\right) \end{aligned} \tag{2.2.77}$$

eşitsizliği geçerlidir [72].

Sonuç 2.2.26 Teorem 2.2.37'de $k = 1$ olarak alınırsa [71]'de Teorem 3'e indirgenir [72].

Lemma 2.2.12 $0 \leq a < b$ olmak üzere $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $[a,b]$ aralığında diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $f \in C^{n+1}[a,b]$ olsun. A_1'deki şartlar sağlanmak üzere Caputo k-kesirli türevler için

$$\begin{aligned} &\frac{f^{(n)}(a+b-x)+f^{(n)}(a+b-y)}{2}-\frac{\Gamma_k(n-\frac{\alpha}{k}+k)}{2(y-x)^{n-\frac{\alpha}{k}}} \\ &\times\Big\{\Big({}^cD^{\alpha,k}_{(a+b-y)^+}f\Big)(a+b-x)+(-1)^n\Big({}^cD^{\alpha,k}_{(a+b-x)^-}f\Big)(a+b-y)\Big\} \\ \leq\ &\frac{y-x}{2}\int_0^1\Big(t^{n-\frac{\alpha}{k}}-(1-t)^{n-\frac{\alpha}{k}}\Big)f^{(n+1)}\Big(a+b-(tx+(1-t)y)\Big)dt \end{aligned} \tag{2.2.78}$$

eşitsizliği geçerlidir [72].

Sonuç 2.2.27 Lemma 2.2.12'de $k = 1$ olarak alınırsa [71]'de Lemma 1'e indirgenir [72].

Sonuç 2.2.28 Lemma 2.2.12'de $x = a$ ve $y = b$ olarak alınırsa [47]'de Remark 2.5'e indirgenir [72].

Lemma 2.2.13 $0 \leq a < b$ olmak üzere $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $[a,b]$ aralığında diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $f \in C^{n+1}[a,b]$ olsun. A_1'deki şartlar sağlanmak üzere Caputo k-kesirli türevler için

$$\begin{aligned} &f^{(n)}\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right)-\frac{2^{n-\frac{\alpha}{k}+k}\Gamma_k(n-\frac{\alpha}{k}+k)}{(y-x)^{n-\frac{\alpha}{k}}} \\ &\times\left\{\Big({}^cD^{\alpha,k}_{(a+b-\frac{x+y}{2})^+}f\Big)(a+b-x)+(-1)^n\Big({}^cD^{\alpha,k}_{(a+b-\frac{x+y}{2})^-}f\Big)(a+b-y)\right\} \\ =\ &\frac{y-x}{4}\left[\int_0^1 t^{n-\frac{\alpha}{k}}f^{(n+1)}\left(a+b-\left(\frac{t}{2}x+\frac{2-t}{2}y\right)\right)dt\right. \end{aligned}$$

$$-\int_0^1 t^{n-\frac{\alpha}{k}} f^{(n+1)}\left(a+b-\left(\frac{2-t}{2}x+\frac{t}{2}y\right)\right)dt\Bigg] \tag{2.2.79}$$

eşitliği elde edilir [72].

Sonuç 2.2.29 Lemma 2.2.13'de $k=1$ olarak alınırsa [71]'de Lemma 2'ye indirgenir [72].

Sonuç 2.2.30 Lemma 2.2.13'de $x=a$ ve $y=b$ olarak alınırsa [24]'de Lemma 2'ye indirgenir [72].

Teorem 2.2.38 $0 \leq a < b$ olmak üzere $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $[a,b]$ aralığında diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $f \in C^{n+1}[a,b]$ olsun. A_1'deki şartlar sağlanmak üzere Caputo k-kesirli türevler için

$$\begin{aligned}
&\Bigg|\frac{f^{(n)}(a+b-x)+f^{(n)}(a+b-y)}{2}-\frac{\Gamma_k(n-\frac{\alpha}{k}+k)}{2(y-x)^{n-\frac{\alpha}{k}}} \\
&\times\left\{\left({}^{c}D^{\alpha,k}_{(a+b-y)^+}f\right)(a+b-x)+(-1)^n\left({}^{c}D^{\alpha,k}_{(a+b-x)^-}f\right)(a+b-y)\right\}\Bigg| \\
\leq\ &\frac{(y-x)}{n-\frac{\alpha}{k}+1}\left(1-\frac{1}{2^{n-\frac{\alpha}{k}}}\right)\Bigg\{|f^{(n+1)}(a)|+|f^{(n+1)}(b)| \\
&-\left(\frac{|f^{(n+1)}(x)|+|f^{(n+1)}(y)|}{2}\right)\Bigg\}
\end{aligned} \tag{2.2.80}$$

eşitsizliği geçerlidir [72].

Sonuç 2.2.31 Teorem 2.2.38'de $k=1$ olarak alınırsa [71]'de Teorem 4'e indirgenir [72].

Sonuç 2.2.32 Teorem 2.2.38'de $x=a$ ve $y=b$ olarak alınırsa [47]'de Sonuç 2.7'ye indirgenir [72].

Teorem 2.2.39 $0 \leq a < b$ olmak üzere $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, (a,b) aralığında diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $f\in C^{n+1}[a,b]$ olsun. A_1'deki şartlar ile birlikte $|f^{n+1}|$, $[a,b]$ aralığında konveks bir fonksiyon ise Caputo k-kesirli türevler için

$$\begin{aligned}
&\Bigg|f^{(n)}\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right)-\frac{2^{n-\frac{\alpha}{k}-1}\Gamma(n-\frac{\alpha}{k}+k)}{(y-x)^{n-\frac{\alpha}{k}}} \\
&\times\left\{\left({}^{c}D^{\alpha,k}_{(a+b-\frac{x+y}{2})^+}f\right)(a+b-x)+(-1)^n\left({}^{c}D^{\alpha,k}_{(a+b-\frac{x+y}{2})^-}f\right)(a+b-y)\right\}\Bigg| \\
\leq\ &\frac{(y-x)}{2(n-\frac{\alpha}{k}+1)}\left\{|f^{(n+1)}(a)|+|f^{(n+1)}(b)|-\left(\frac{|f^{(n+1)}(x)|+|f^{(n+1)}(y)|}{2}\right)\right\}
\end{aligned} \tag{2.2.81}$$

eşitsizliği geçerlidir [72].

Sonuç 2.2.33 Teorem 2.2.39'da $k=1$ olarak alınırsa [71]'de Teorem 5'e indirgenir [72].

Teorem 2.2.40 $0 \leq a < b$ olmak üzere $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, (a,b) aralığında diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $f \in C^{n+1}[a,b]$ olsun. A_1'deki şartlar ile birlikte $q > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ için $|f^{n+1}|^q$, $[a,b]$ aralığında konveks bir fonksiyon ise Caputo k-kesirli türevler için

$$\begin{aligned}
&\Bigg| f^{(n)}\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right) - \frac{2^{n-\frac{\alpha}{k}-1}\Gamma_k(n-\frac{\alpha}{k}+k)}{(y-x)^{n-\frac{\alpha}{k}}} \\
&\times \left\{ \left({}^{c}D^{\alpha,k}_{(a+b-\frac{x+y}{2})^+} f\right)(a+b-x) + (-1)^n \left({}^{c}D^{\alpha,k}_{(a+b-\frac{x+y}{2})^-} f\right)(a+b-y) \right\} \Bigg| \\
\leq\ & \frac{y-x}{4}\left(\frac{1}{np-\frac{\alpha}{k}p+1}\right)^{\frac{1}{p}} \Bigg[\Big(|f^{(n+1)}(a)|^q + |f^{(n+1)}(b)|^q \\
&- \left(\frac{|f^{(n+1)}(x)|^q + 3|f^{(n+1)}(y)|^q}{4}\right)\Big)^{\frac{1}{q}} + \Big(|f^{(n+1)}(a)|^q + |f^{(n+1)}(b)|^q \\
&- \left(\frac{3|f^{(n+1)}(x)|^q + |f^{(n+1)}(y)|^q}{4}\right)\Big)^{\frac{1}{q}} \Bigg] \qquad (2.2.82)
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir [72].

Sonuç 2.2.34 Teorem 2.2.40'da $k = 1$ olarak alınırsa [71]'de Teorem 6'ya indirgenir [72].

Teorem 2.2.41 $0 \leq a < b$ olmak üzere $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, (a,b) aralığında diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $f \in C^{n+1}[a,b]$ olsun. A_1'deki şartlar ile birlikte $q > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere $|f^{n+1}|^q$, $[a,b]$ aralığında konveks bir fonksiyon ise Caputo k-kesirli türevler için

$$\begin{aligned}
&\Bigg| f^{(n)}\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right) - \frac{2^{n-\frac{\alpha}{k}-1}\Gamma_k(n-\frac{\alpha}{k}+k)}{(y-x)^{n-\frac{\alpha}{k}}} \\
&\times \left\{ \left({}^{c}D^{\alpha,k}_{(a+b-\frac{x+y}{2})^+} f\right)(a+b-x) + (-1)^n \left({}^{c}D^{\alpha}_{(a+b-\frac{x+y}{2})^-} f\right)(a+b-y) \right\} \Bigg| \\
\leq\ & \frac{y-x}{4}\Bigg[\Bigg\{ \left(\frac{1}{((n-\frac{\alpha}{k})p+1)((n-\frac{\alpha}{k})p+2)}\right)^{\frac{1}{p}} \Bigg(\frac{1}{2}|f^{(n+1)}(a)|^q \\
&+ |f^{(n+1)}(b)|^q - \left(\frac{1}{12}|f^{(n+1)}(x)|^q + \frac{5}{12}|f^{(n+1)}(y)|^q\right)\Bigg)^{\frac{1}{q}} \\
&+ \left(\frac{1}{((n-\frac{\alpha}{k})p+2)}\right)^{\frac{1}{p}} \Bigg(\frac{1}{2}(|f^{(n+1)}(a)|^q + |f^{(n+1)}(b)|^q) \\
&- \left(\frac{1}{6}|f^{(n+1)}(x)|^q + \frac{1}{3}|f^{(n+1)}(y)|^q\right)\Bigg)^{\frac{1}{q}} \Bigg\} + \Bigg\{ \left(\frac{1}{((n-\frac{\alpha}{k})p+1)((n-\frac{\alpha}{k})p+2)}\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\times \left(\frac{1}{2}(|f^{(n+1)}(a)|^q + |f^{(n+1)}(b)|^q) - \left(\frac{5}{12}|f^{(n+1)}(x)|^q + \frac{1}{12}|f^{(n+1)}(y)|^q\right)\right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

$$+\left(\frac{1}{((n-\frac{\alpha}{k})p+2)}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{2}(|f^{(n+1)}(a)|^q++|f^{(n+1)}(b)|^q)\right.$$
$$\left.\left.\left.-\left(\frac{1}{3}|f^{(n+1)}(x)|^q+\frac{1}{6}|f^{(n+1)}(y)|^q\right)\right)^{\frac{1}{q}}\right\}\right] \tag{2.2.83}$$

eşitsizliği geçerlidir [72].

Sonuç 2.2.35 Teorem 2.2.41'de $k=1$ olarak alınırsa [71]'de Teorem 7'ye indirgenir [72].

Teorem 2.2.42 $a<b$ olmak üzere $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, (a,b) aralığında diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $f\in C^{n+1}[a,b]$ olsun. A_1'deki şartlar ile birlikte $q\geq 1$ olmak üzere $|f^{n+1}|^q$, $[a,b]$ aralığında konveks bir fonksiyon ise Caputo k-kesirli türevler için

$$\Bigg|f^{(n)}\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right)-\frac{2^{n-\frac{\alpha}{k}-1}\Gamma_k(n-\frac{\alpha}{k}+k)}{(y-x)^{n-\frac{\alpha}{k}}}$$
$$\times\left\{\left({}^cD^{\alpha,k}_{(a+b-\frac{x+y}{2})^+}f\right)(a+b-x)+(-1)^n\left({}^cD^{\alpha,k}_{(a+b-\frac{x+y}{2})^-}f\right)(a+b-y)\right\}\Bigg|$$
$$\leq \frac{y-x}{4}\left\{\left\{\left(\frac{1}{(n-\frac{\alpha}{k}+1)(n-\frac{\alpha}{k}+2)}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\frac{|f^{n+1}(a)|^q+|f^{n+1}(b)|^q}{(n-\frac{\alpha}{k}+1)(n-\frac{\alpha}{k}+2)}\right.\right.\right.$$
$$\left.-\left(\frac{|f^{(n+1)}(x)|^q}{2(n-\frac{\alpha}{k}+2)(n-\frac{\alpha}{k}+3)}+\frac{(n-\frac{\alpha}{k}+5)|f^{(n+1)}(y)|^q}{2(n-\frac{\alpha}{k}+1)(n-\frac{\alpha}{k}+2)(n-\frac{\alpha}{k}+3)}\right)\right)^{\frac{1}{q}}$$
$$+\left(\frac{1}{(n-\frac{\alpha}{k}+2)}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\frac{|f^{(n+1)}(a)|^q+|f^{(n+1)}(b)|^q}{(n-\frac{\alpha}{k}+2)}\right.$$
$$\left.\left.-\left(\frac{|f^{(n+1)}(x)|^q}{2(n-\frac{\alpha}{k}+3)}+\frac{|f^{(n+1)}(y)|^q}{2(n-\frac{\alpha}{k}+2)(n-\frac{\alpha}{k}+3)}\right)\right)^{\frac{1}{q}}\right\}$$
$$+\left\{\left(\frac{1}{(n-\frac{\alpha}{k}+1)(n-\frac{\alpha}{k}+2)}\right)^{1-\frac{1}{q}}\right.$$
$$\times\left(\frac{|f^{(n+1)}(a)|^q+|f^{(n+1)}(b)|^q}{(n-\frac{\alpha}{k}+1)(n-\frac{\alpha}{k}+2)}-\left(\frac{(n-\frac{\alpha}{k}+5)|f^{n+1}(x)|^q}{2(n-\frac{\alpha}{k}+1)(n-\frac{\alpha}{k}+2)(n-\frac{\alpha}{k}+3)}\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{|f^{(n+1)}(y)|^q}{2(n-\frac{\alpha}{k}+2)(n-\frac{\alpha}{k}+3)}\right)\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{1}{(n-\frac{\alpha}{k}+2)}\right)^{1-\frac{1}{q}}$$
$$\times\left(\frac{|f^{(n+1)}(a)|^q+|f^{(n+1)}(b)|^q}{(n-\frac{\alpha}{k}+2)}\right.$$
$$\left.\left.\left.-\left(\frac{(n-\frac{\alpha}{k}+4)|f^{(n+1)}(x)|^q}{2(n-\frac{\alpha}{k}+2)(n-\frac{\alpha}{k}+3)}+\frac{|f^{(n+1)}(y)|^q}{2(n-\frac{\alpha}{k}+3)}\right)\right)^{\frac{1}{q}}\right\}\right\} \tag{2.2.84}$$

eşitsizliği geçerlidir [72].

Sonuç 2.2.36 Teorem 2.2.42'de $k=1$ olarak alınırsa [71]'de Teorem 8'e indirgenir [72].

2.2.5 Hadamard Kesirli İntegralleri ve Katugampola Kesirli İntegralleri İçin Hermite-Hadamard-Mercer Tipli Eşitsizlikler

Tanım 2.2.6 (Hadamard Kesirli İntegral Operatörü) (a,b) $(0 \leq a < b \leq \infty)$ aralığı $\mathbb{R}^+$ yarı ekseninde sınırlı veya sınırsız bir aralık olsun. $\alpha \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$ ve $f \in L[a,b]$ olmak üzere α. mertebeden sol ve sağ taraflı Hadamard kesirli integralleri sırasıyla,

$$H_{a^+}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \left(\ln \frac{x}{t}\right)^{\alpha-1} \frac{f(t)}{t} dt, \qquad x > a$$

ve

$$H_{b^-}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b \left(\ln \frac{t}{x}\right)^{\alpha-1} \frac{f(t)}{t} dt, \qquad x < b$$

şeklinde tanımlanır [58].

Tanım 2.2.7 (Katugampola Kesirli İntegral Operatörü) $[a,b] \subset \mathbb{R}$ sınırlı bir aralık, $a < x < b$ ve $\rho > 0$ olmak üzere $f \in X_c^p(a,b)$ olsun. $\alpha > 0$ olmak üzere α. mertebeden sol ve sağ Katugampola kesirli integralleri sırasıyla,

$$\left({}^{\rho}\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha}\right) f(x) = \frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x^{\rho} - t^{\rho})^{\alpha-1} f(t) t^{\rho-1} dt, \qquad x > a$$

ve

$$\left({}^{\rho}\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha}\right) f(x) = \frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (t^{\rho} - x^{\rho})^{\alpha-1} f(t) t^{\rho-1} dt, \qquad x > a$$

şeklinde tanımlanır [32].

Teorem 2.2.43 $\alpha > 0$ ve $\rho > 0$ olmak üzere $x > a$ için

i) $\lim\limits_{\rho \to 1} {}^{\rho}\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha} f(x) = J_{a^+}^{\alpha} f(x)$,

ii) $\lim\limits_{\rho \to 0^+} {}^{\rho}\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha} f(x) = H_{a^+}^{\alpha} f(x)$

ifadeleri geçerlidir. Benzer olarak sağ Katugampola integralleri içinde sonuçlar elde edilir [32].

Hong-Hu Chu ve arkadaşları, 2020 yılında Hadamard kesirli integralleri ve Katugampola kesirli integralleri yardımıyla aşağıdaki sonuçları elde etmişlerdir.

Teorem 2.2.44 $a < b$ olmak üzere $\alpha, \rho > 0$ ve $a, b \in [0, \infty]$ olsun. $f : [a^{\rho}, b^{\rho}] \to (0, \infty)$ pozitif bir konveks fonksiyon olmak üzere $f \in X_c^p(a^{\rho}, b^{\rho})$ olsun. Bu durumda her $x, y \in$

$[a,b]$ için

$$
\begin{aligned}
f\left(a^\rho+b^\rho-\frac{x^\rho+y^\rho}{2}\right) &\leq f(a^\rho)+f(b^\rho)-\frac{\rho\Gamma(\alpha+1)}{2(y^\rho-x^\rho)}\left[{}^\rho\mathcal{I}^\alpha_{x^+}f(y^\rho)+{}^\rho\mathcal{I}^\alpha_{y^-}f(x^\rho)\right] \\
&\leq f(a^\rho)+f(b^\rho)-f\left(\frac{x^\rho+y^\rho}{2}\right) \qquad (2.2.85)
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
f\left(a^\rho+b^\rho-\frac{x^\rho+y^\rho}{2}\right) &\leq \frac{\rho\Gamma(\alpha+1)}{2(y^\rho-x^\rho)^\alpha}\Big[{}^\rho\mathcal{I}^\alpha_{(a^\rho+b^\rho-y^\rho)^+}f(a^\rho+b^\rho-x^\rho) \\
&\quad +{}^\rho\mathcal{I}^\alpha_{(a^\rho+b^\rho-x^\rho)^-}f(a^\rho+b^\rho-y^\rho)\Big] \\
&\leq \frac{f(a^\rho+b^\rho-x^\rho)+f(a^\rho+b^\rho-y^\rho)}{2} \\
&\leq f(a^\rho)+f(b^\rho)-\frac{f(a^\rho)+f(b^\rho)}{2} \qquad (2.2.86)
\end{aligned}
$$

eşitsizlikleri geçerlidir [20].

Sonuç 2.2.37 Teorem 2.2.44'de,

i) $\rho\to 1$ olarak alınırsa (2.2.85) ve (2.2.86), [50]'de Teorem 2'deki sonuçlara indirgenir.

ii) $\alpha=1$, $\rho\to 1$ olarak alınırsa (2.2.85) ve (2.2.86), [36]'da Teorem 2.1 elde edilir.

iii) $\alpha=1$, $x=a$, $y=b$ ve $\rho\to 1$ olarak alınırsa [62]'de Teorem 2 elde edilir [20].

Lemma 2.2.14 $a<b$ olmak üzere $\alpha,\rho>0$ ve $a,b\in[0,\infty]$ olsun. $f:[a^\rho,b^\rho]\to\mathbb{R}$, (a^ρ,b^ρ) aralığında diferansiyellenebilir bir fonksiyon ise her $x,y\in[a,b]$ için

$$
\begin{aligned}
&\frac{f(a^\rho+b^\rho-x^\rho)+f(a^\rho+b^\rho-y^\rho)}{2}-\frac{\rho\Gamma(\alpha+1)}{2(y^\rho-x^\rho)} \\
&\times\left[{}^\rho\mathcal{I}^\alpha_{(a^\rho+b^\rho-y^\rho)^+}(a^\rho+b^\rho-x^\rho)+{}^\rho\mathcal{I}^\alpha_{(a^\rho+b^\rho-x^\rho)^-}f(a^\rho+b^\rho-y^\rho)\right] \\
=\;&\frac{\rho(y^\rho-x^\rho)}{2}\int_0^1\Big[(t^\rho)^\alpha-(1-t^\rho)^\alpha\Big]t^{\rho-1}f'\big(a^\rho+b^\rho-(t^\rho x^\rho+(1-t^\rho)y^\rho)\big)dt
\end{aligned}
$$

eşitsizliği geçerlidir [20].

Sonuç 2.2.38 Lemma 2.2.14'de,

i) $\rho\to 1$ olarak alınırsa [62]'de Lemma 1 elde edilir.

ii) $\rho=\alpha=1$ olarak alınırsa [50]'de Sonuç 1 elde edilir.

iii) $\rho=\alpha=1$, $x=a$ ve $y=b$ olarak alınırsa Lemma 2.2.14, [22]'deki sonuca indirgenir [20].

Bu bölümde aşağıdaki ifade kullanılacaktır.

$$\begin{aligned}\left|\Omega_h(\alpha,\rho,a,b)\right| &= \frac{f(a^\rho+b^\rho-x^\rho)+f(a^\rho+b^\rho-y^\rho)}{2}-\frac{\rho\Gamma(\alpha+1)}{2(y^\rho-x^\rho)}\\ &\quad\times\left[{}^\rho\mathcal{I}^\alpha_{(a^\rho+b^\rho-y^\rho)^+}(a^\rho+b^\rho-x^\rho)+{}^\rho\mathcal{I}^\alpha_{(a^\rho+b^\rho-x^\rho)^-}f(a^\rho+b^\rho-y^\rho)\right]\end{aligned}$$

Teorem 2.2.45 $a<b$ olmak üzere $\alpha,\rho>0$ ve $a,b\in[0,\infty]$ olsun. $f:[a^\rho,b^\rho]\to\mathbb{R}$, (a^ρ,b^ρ) aralığında diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $f'\in L[a^\rho,b^\rho]$ olsun. Bu durumda her $x,y\in[a,b]$ için $|f'|$, $[a^\rho,b^\rho]$ aralığında konveks ise

$$\begin{aligned}\left|\Omega_h(\alpha,\rho,a,b)\right| &\le \frac{(a^\rho-b^\rho)}{(\alpha+1)}\left[1-\left(1-\frac{1}{2^\rho}\right)^{\alpha+1}-\frac{1}{2^{\rho(\alpha+1)}}\right]\\ &\quad\times\left[|f'(a^\rho)|+|f'(b^\rho)|-\frac{|f'(c^\rho)|+|f'(y^\rho)|}{2}\right]\end{aligned}\tag{2.2.87}$$

eşitsizliği geçerlidir [20].

Sonuç 2.2.39 $\rho\to1$ olarak alınırsa Teorem 2.2.45, [50]'de Teorem 4'e indirgenir [20].

Teorem 2.2.46 $a<b$ olmak üzere $\alpha,\rho>0$, $n\in\mathbb{N}$ ve $a,b\in[0,\infty]$ olsun. Ayrıca $f:[a^\rho,b^\rho]\to\mathbb{R}$ pozitif bir fonksiyon ve $f\in X^p_c(a,b)$ olsun. Bu durumda her $x,y\in[a,b]$ için f, $[a^\rho,b^\rho]$ aralığında konveks ise

$$\begin{aligned}&f\left(a^\rho+b^\rho-\frac{x^\rho+y^\rho}{n}\right)\\ \le\ &\frac{n^{\alpha-1}\rho\Gamma(\alpha+1)}{(y^\rho-x^\rho)^\alpha}\Big[{}^\rho\mathcal{I}^\alpha_{\left((n-1)a^\rho+b^\rho-\frac{(n-1)x^\rho+(n-1)y^\rho}{n}\right)^-}f\big((n-1)a^\rho+b^\rho-y^\rho\big)\\ &+{}^\rho\mathcal{I}^\alpha_{\left(a^\rho+(n-1)b^\rho-\frac{(n-1)x^\rho+y^\rho}{n}\right)^+}f\big(a^\rho+(n-1)b^\rho-x^\rho\big)\Big]\\ \le\ &\frac{\big[f(a^\rho)+f(b^\rho)\big]+[f((n-1)a^\rho)+f((n-1)b^\rho)]-f(x^\rho)-f(y^\rho)}{n}\end{aligned}\tag{2.2.88}$$

eşitsizliği geçerlidir [20].

Sonuç 2.2.21 $a<b$ olmak üzere $\alpha,\rho>0$ ve $a,b\in[0,\infty]$ olsun. Ayrıca $f:[a^\rho,b^\rho]\to\mathbb{R}$ pozitif bir fonksiyon ve $f\in X^p_c(a,b)$ olsun. Bu durumda her $x,y\in[a,b]$ için f, $[a^\rho,b^\rho]$ aralığında konveks bir fonksiyon ise

$$f\left(a^\rho+b^\rho-\frac{x^\rho+y^\rho}{2}\right)\ \le\ \frac{2^{\alpha-1}\rho\Gamma(\alpha+1)}{(y^\rho-x^\rho)^\alpha}\Big[{}^\rho\mathcal{I}^\alpha_{\left(a^\rho+b^\rho-\frac{x^\rho+y^\rho}{2}\right)^-}f(a^\rho+b^\rho-y^\rho)$$

$$
\begin{aligned}
& +{}^{\rho}\mathcal{I}^{\alpha}_{(a^\rho+b^\rho-\frac{x^\rho+y^\rho}{2})+} f(a^\rho+b^\rho-x^\rho)\Big] \\
\leq \;& f(a^\rho)+f(b^\rho)-\frac{f(x^\rho)+f(y^\rho)}{2} \qquad (2.2.89)
\end{aligned}
$$

eşitsizliği geçerlidir [20].

Sonuç 2.2.40 Teorem 2.2.46'da,

i) $n=2$ ve $\rho \to 1$ olarak alınırsa [50]'de Teorem 3 elde edilir.

ii) $\alpha=1$, $n=2$ ve $\rho \to 1$ olarak alınırsa (2.2.89), [36]'da Teorem 2.1 elde edilir [20].

Lemma 2.2.15 $a<b$ ve $f:[a^\rho,b^\rho]\to\mathbb{R}$, $[a^\rho,b^\rho]$ aralığında diferansiyellenebilir bir fonksiyon olmak üzere $\alpha,\rho>0$, $n\in\mathbb{N}$ ve $a,b\in[0,\infty]$ olsun. Bu durumda her $x,y\in[a,b]$ için

$$
\begin{aligned}
& \frac{n^\alpha\Gamma(\alpha-1)}{\rho(y^\rho-x^\rho)^\alpha}\Big[{}^{\rho}\mathcal{I}^{\alpha}_{((n-1)a^\rho+b^\rho-\frac{(n-1)x^\rho+(n-1)y^\rho}{n})-} f((n-1)a^\rho+b^\rho-y^\rho) \\
& +{}^{\rho}\mathcal{I}^{\alpha}_{(a^\rho+(n-1)b^\rho-\frac{(n-1)x^\rho+y^\rho}{n})+} f(a^\rho+(n-1)b^\rho-x^\rho)\Big] \\
& -\left[f\left((n-1)a^\rho+b^\rho-\frac{(n-1)x^\rho+y^\rho}{n}\right)+f\left(a^\rho+(n-1b^\rho-\frac{x^\rho+(n-1)y^\rho}{n}\right)\right] \\
= \;& \frac{\rho(y^\rho-x^\rho)}{n}\int_0^1 t^{\rho(\alpha-1)-1}\left[f'\left((n-1)a^\rho+b^\rho-\left(\frac{n-t^\rho}{n}x^\rho+\frac{t^\rho}{n}y^\rho\right)\right)\right. \\
& \left.-f'\left(a^\rho+(n-1)b^\rho-\left(\frac{t^\rho}{n}x^\rho+\frac{n-t^\rho}{n}y^\rho\right)\right)\right]dt \qquad (2.2.90)
\end{aligned}
$$

eşitsizliği geçerlidir [20].

Teorem 2.2.47 $a<b$ ve $f:[a^\rho,b^\rho]\to\mathbb{R}$, $[a^\rho,b^\rho]$ aralığında diferansiyellenebilir bir fonksiyon olmak üzere $\alpha,\rho>0$, $n\in\mathbb{N}$ ve $a,b\in[0,\infty]$ olsun. Ayrıca $f'\in L[a^\rho,b^\rho]$ olmak üzere $|f'|$, $[a^\rho,b^\rho]$ aralığında konveks bir fonksiyon olsun. Bu durumda her $x,y\in[a,b]$ için

$$
\begin{aligned}
\left|\Omega_h(\alpha,\rho,a,b)\right| \leq \;& \frac{y^\rho-x^\rho}{n(\alpha+1)}\Big(|f'((n-1)a^\rho)|+|f'((n-1)b^\rho)| \\
& +|f'(a^\rho)|+|f'(b^\rho)|-[|f'(x^\rho)|+|f'(y^\rho)|]\Big) \qquad (2.2.91)
\end{aligned}
$$

eşitsizliği geçerlidir [20].

Sonuç 2.2.41 Teorem 2.2.47'de,

i) $n=2$ ve $\rho \to 1$ olarak alınırsa [50]'de Teorem 5 elde edilir.

ii) $\alpha = 1$, $n = 2$ ve $\rho \to 1$ olarak alınırsa [50]'de Sonuç 2 elde edilir [20].

Teorem 2.2.48 $q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $\alpha, \rho > 0$ ve $a < b$ olmak üzere $n \in \mathbb{N}$, $a, b \in [0, \infty]$ olsun. $f : [a^\rho, b^\rho] \to \mathbb{R}$, $[a^\rho, b^\rho]$ aralığında diferansiyellenebilir bir fonksiyon olmak üzere $f' \in L[a^\rho, b^\rho]$ ve $|f'|^q$, $[a^\rho, b^\rho]$ aralığında konveks bir fonksiyon olsun. Bu durumda her $x, y \in [a, b]$ için

$$\begin{aligned} \left|\Omega_h(\alpha, \rho, a, b)\right| \leq\ & \frac{\rho(y^\rho - x^\rho)}{n}\left(\frac{1}{\rho[\rho(\alpha+1)-1]+1}\right)^{\frac{1}{p}}\Bigg\{\Bigg(|f'((n-1)a^\rho)|^q + |f'(b^\rho)|^q \\ & -\left[\left(1-\frac{1}{n(\rho+1)}\right)|f'(x^\rho)|^q + \frac{1}{n(\rho+1)}|f'(y^\rho)|^q\right]\Bigg)^{\frac{1}{q}} \\ & +\Bigg(|f'(a^\rho)|^q + |f'((n-1)b^\rho)|^q \\ & -\left[\frac{1}{n(\rho+1)}|f'(x^\rho)|^q + \left(1-\frac{1}{n(\rho+1)}\right)|f'(y^\rho)|^q\right]\Bigg)^{\frac{1}{q}}\Bigg\} \qquad (2.2.92) \end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir [20].

Sonuç 2.2.42 Teorem 2.2.48'de,

i) $n = 2$ ve $\rho \to 1$ olarak alınırsa [50]'de Teorem 6'ya indirgenir.

ii) $\alpha = 1$, $n = 2$ ve $\rho \to 1$ olarak alınırsa [50]'de Sonuç 3'e indirgenir.

iii) $n = 2$, $x = a$, $y = b$ ve $\rho \to 1$ olarak alınırsa [62]'de Teorem 6'ya indirgenir [20].

2.2.6 Riemann-Liouville k-Kesirli İntegraller İçin Hermite-Hadamard-Mercer Tipli Eşitsizlikler

Bu bölümde, konveks fonksiyonlar için Riemann-Liouville k-kesirli integral operatörleri içeren Hermite-Hadamard-Mercer tipli eşitsizlikler verilecektir.

Tanım 2.2.8 (Riemann-Liouville k-Kesirli İntegral Operatörü) $f \in L[a, b]$ olsun. $\frac{\alpha}{k} > 0$ ve $\alpha \geq 0$ olmak üzere α. mertebeden sol ve sağ taraflı k-Riemann Liouville integralleri ${}_kJ^\alpha_{a^+}f$ ve ${}_kJ^\alpha_{b^-}f$ sırasıyla,

$$\left({}_kJ^\alpha_{a^+}\right)f(x) = \frac{1}{\Gamma_k(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\frac{\alpha}{k}-1}f(t)dt, \qquad x > a$$

ve

$$\left({}_kJ^\alpha_{b^-}\right)f(x) = \frac{1}{\Gamma_k(\alpha)}\int_x^b (t-x)^{\frac{\alpha}{k}-1}f(t)dt, \qquad x < b$$

şeklinde tanımlanır [46]. Burada $\Gamma_k(\alpha)$ ile gösterilen k-gama fonksiyonu,

$$\Gamma_k(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{\frac{-t^k}{k}} dt$$

şeklinde tanımlanır ve

$$\Gamma_k(\alpha + k) = \alpha \Gamma_k(\alpha)$$

olur. Ayrıca $\alpha = 0$ için ${}_1J^0_{a+}f(x) = {}_1J^0_{b-}f(x) = f(x)$ olur. $k = 1$ için Riemann-Liouville kesirli integralleri elde edilir.

Tanım 2.2.9 $x_i \in [a, b]$ olmak üzere $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ konveks bir fonksiyon olsun. Bu durumda $\theta, \beta, \lambda_i \in [0, 1]$, $\gamma \in [-1, 1]$ ve $\theta + \beta + \gamma = \sum_{i=1}^n \lambda_i$ ise

$$f\left(\theta a + \beta b - \gamma \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \theta f(a) + \beta f(b) - \gamma \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i) \tag{2.2.93}$$

şeklinde tanımlanır [52].

Sonuç 2.2.43 i) (2.2.93)'de $\theta = \beta = 1$ ve $\gamma = -1$ olarak alınırsa Jensen-Mercer eşitsizliği elde edilir.

ii) (2.2.93)'de $\theta = \beta = 0$ ve $\gamma = 1$ olarak alınırsa Jensen eşitsizliği elde edilir [69].

Miguel Vivas-Cortez ve arkadaşları, 2021 yılında k-kesirli integral operatörleri yardımıyla aşağıdaki sonuçları elde etmişlerdir.

Teorem 2.2.49 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, konveks bir fonksiyon olmak üzere $\theta, \beta \in [0, 1]$, $\gamma \in (0, 1]$, $\theta + \beta + \gamma = 1$ ve $\alpha, k > 0$ olsun. Bu durumda $x < y$ olmak üzere her $x, y \in [a, b]$ için

$$\begin{aligned} & f\left(\theta a + \beta b + \gamma \frac{x+y}{2}\right) \\ \leq\; & \frac{\Gamma_k(\alpha + k)}{2\gamma^{\frac{\alpha}{k}}(y - x)^{\frac{\alpha}{k}}} \left[J^{\alpha,k}_{(\theta a + \beta b - \gamma y)^+} f(\theta a + \beta b - +\gamma x) + J^{\alpha,k}_{(\theta a + \beta b + \gamma x)^-} f(\theta a + \beta b + \gamma y)\right] \\ \leq\; & \theta f(a) + \beta f(b) + \gamma \frac{f(x) + f(y)}{2} \end{aligned} \tag{2.2.94}$$

eşitsizliği geçerlidir [69].

Sonuç 2.2.22 Teorem 2.2.49'da $\theta = 0 = \beta$ ve $\gamma = 1$ olarak alınırsa $x < y$ olmak üzere her $x, y \in [a, b]$ için

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{\Gamma_k(\alpha + k)}{2(y - x)^{\frac{\alpha}{k}}} \left[J^{\alpha,k}_{y^-} f(x) + J^{\alpha,k}_{x^+} f(y)\right] \leq \frac{f(x) + f(y)}{2}$$

eşitsizliği elde edilir [69].

Teorem 2.2.50 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, konveks bir fonksiyon olmak üzere $\theta,\beta\in[0,1]$, $\gamma\in(0,1]$, $\theta+\beta+\gamma=1$ ve $\alpha,k>0$ olsun. Bu durumda $x<y$ ve $\omega\in\mathbb{N}$ olmak üzere her $x,y\in[a,b]$ için

$$\begin{aligned} & f\left(\theta a+\beta b+\gamma\frac{x+y}{2}\right)\leq\frac{\Gamma_k(\alpha+k)(\omega+1)^{\frac{\alpha}{k}}}{2\gamma^{\frac{\alpha}{k}}(y-x)^{\frac{\alpha}{k}}} \\ & \times\left[J^{\alpha,k}_{(\theta a+\beta b+\gamma\frac{x+\omega y}{\omega+1})^+}f(\theta a+\beta b+\gamma y)+J^{\alpha,k}_{(\theta a+\beta b+\gamma\frac{\omega x+y}{\omega+1})^-}f(\theta a+\beta b+\gamma x)\right] \\ \leq\ & \theta f(a)+\beta f(b)+\gamma\frac{f(x)+f(y)}{2} \end{aligned} \tag{2.2.95}$$

eşitsizliği geçerlidir [69].

Sonuç 2.2.23 Teorem 2.2.50'de $\theta=0=\beta$ ve $\gamma=1$ olarak alınırsa $x<y$ ve $\omega\in\mathbb{N}$ olmak üzere her $x,y\in[a,b]$ için

$$\begin{aligned} f\left(\frac{x+y}{2}\right) &\leq \frac{\Gamma_k(\alpha+k)(\omega+1)^{\frac{\alpha}{k}}}{2(y-x)^{\frac{\alpha}{k}}}\left[J^{\alpha,k}_{(\frac{x+\omega y}{\omega+1})^+}f(y)+J^{\alpha,k}_{(\frac{\omega x+y}{\omega+1})^-}f(x)\right] \\ &\leq \frac{f(x)+f(y)}{2} \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir [69].

Lemma 2.2.16 $a<b$ olmak üzere $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, (a,b) aralığında diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. $f'\in L[a,b]$ ise $\theta,\beta\in[0,1]$, $\gamma\in(0,1]$, $\theta+\beta+\gamma=1$ ve $\alpha,k>0$ olsun. Bu durumda $x<y$ olmak üzere her $x,y\in[a,b]$ için

$$\begin{aligned} & \frac{f(\theta a+\beta b-+\gamma x)+f(\theta a+\beta b+\gamma y)}{2}-\frac{\Gamma_k(\alpha+k)}{2\gamma^{\frac{\alpha}{k}}(y-x)^{\frac{\alpha}{k}}} \\ & \times\left[J^{\alpha,k}_{(\theta a+\beta b+\gamma y)^-}f(\theta a+\beta b+\gamma x)+J^{\alpha,k}_{(\theta a+\beta b+\gamma x)^+}f(\theta a+\beta b+\gamma y)\right] \\ = & \frac{\gamma(y-x)}{2}\left[\int_0^1\big(1-t\big)^{\frac{\alpha}{k}}f'(\theta a+\beta b+\gamma(tx+(1-t)y)\big)dt\right. \\ & \left.-\int_0^1 t^{\frac{\alpha}{k}}f'\big(\theta a+\beta b+\gamma(tx+(1-t)y)\big)dt\right] \end{aligned}$$

eşitliği geçerlidir [69].

Sonuç 2.2.24 Lemma 2.2.16'da $\theta=0=\beta$ ve $\gamma=1$ olarak alınırsa

$$\begin{aligned} & \frac{f(x)+f(y)}{2}-\frac{\Gamma_k(\alpha+k)}{2(y-x)^{\frac{\alpha}{k}}}\left[J^{\alpha,k}_{y^-}f(x)+J^{\alpha,k}_{x^+}f(y)\right] \\ = & \frac{y-x}{2}\left[\int_0^1(1-t)^{\frac{\alpha}{k}}f'(tx+(1-t)y)dt-\int_0^1 t^{\frac{\alpha}{k}}f'(tx+(1-t)y)dt\right] \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir [69].

Lemma 2.2.17 $a < b$ olmak üzere $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, (a,b) aralığında diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. $f' \in L[a,b]$ ise $\theta, \beta \in [0,1]$, $\gamma \in (0,1]$, $\theta+\beta+\gamma = 1$ ve $\alpha, k > 0$ olsun. Bu durumda $x < y$ ve $\omega \in \mathbb{N}$ olmak üzere her $x, y \in [a,b]$ için

$$\begin{aligned}
&\frac{f(\theta a+\beta b+\gamma\frac{\omega x+y}{\omega+1})+f(\theta a+\beta b+\gamma\frac{x+\omega y}{\omega+1})}{\omega+1}-\frac{\Gamma_k(\alpha+k)(\omega+1)^{\frac{\alpha}{k}-1}}{\gamma^{\frac{\alpha}{k}}(y-x)^{\frac{\alpha}{k}}}\\
&\times\left[J^{\alpha,k}_{(\theta a+\beta b+\gamma\frac{x+\omega y}{\omega+1})^-}f(\theta a+\beta b+\gamma x)+J^{\alpha,k}_{(\theta a+\beta b+\gamma\frac{x+\omega y}{\omega+1})^+}f(\theta a+\beta b+\gamma y)\right]\\
=\;&\frac{\gamma(y-x)}{(\omega+1)^2}\left[\int_0^1 t^{\frac{\alpha}{k}}f'\left(\theta a+\beta b+\gamma\left(\frac{\omega+1-t}{\omega+1}x+\frac{t}{\omega+1}y\right)\right)dt\right.\\
&\left.-\int_0^1 t^{\frac{\alpha}{k}}f'\left(\theta a+\beta b+\gamma\left(\frac{t}{\omega+1}x+\frac{\omega+1-t}{\omega+1}y\right)\right)dt\right]
\end{aligned}$$

eşitliği geçerlidir [69].

Teorem 2.2.51 Lemma 2.2.16'nın şartları altında $|f'|$, konveks bir fonksiyon ise

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{f(\theta a+\beta b+\gamma x)+f(\theta a+\beta b+\gamma y)}{2}-\frac{\Gamma_k(\alpha+k)}{2\gamma^{\frac{\alpha}{k}}(y-x)^{\frac{\alpha}{k}}}\right.\\
&\left.\times\left[J^{\alpha,k}_{(\theta a+\beta b+\gamma y}f(\theta a+\beta b+\gamma x)+J^{\alpha,k}_{(\theta a+\beta b+\gamma x}f(\theta a+\beta b+\gamma y)\right]\right|\\
\leq\;&\frac{\gamma(y-x)}{2}\left[\left(\frac{2k-k(\frac{1}{2})^{\frac{\alpha}{k}-1}}{\alpha+k}\right)(\theta|f'(a)|+\beta|f'(b)|\right.\\
&\left.+\frac{k\gamma}{\alpha+k}\left(k-\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{\alpha}{k}}\right)(|f'(x)|+|f'(y)|)\right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir [69].

Sonuç 2.2.25 Teorem 2.2.51'de $\theta = 0 = \beta$ ve $\gamma = 1$ olarak alınırsa

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{f(x)+f(y)}{2}-\frac{\Gamma_k(\alpha+k)}{2(y-x)^{\frac{\alpha}{k}}}\left[J^{\alpha,k}_{y^-}f(x)+J^{\alpha,k}_{x^+}f(y)\right]\right|\\
\leq\;&\frac{y-x}{2}\left[\frac{k}{\alpha+k}\left(k-\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{\alpha}{k}}\right)(|f'(x)|+|f'(y)|)\right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir [69].

Sonuç 2.2.26 Teorem 2.2.51'de $\alpha = 1 = k$ olarak alınırsa

$$\left|\frac{f(\theta a+\beta b+\gamma x)+f(\theta a+\beta b+\gamma y)}{2}-\frac{1}{2\gamma(y-x)}\int_{\theta a+\beta b+\gamma x}^{\theta a+\beta b+\gamma y}f(u)du\right|$$

$$\leq \frac{\gamma(y-x)}{2}\left[\frac{\theta|f'(a)|+\beta|f'(b)|}{2}+\frac{\gamma(|f'(x)|+|f'(y)|)}{4}\right]$$

eşitsizliği elde edilir [69].

Teorem 2.2.52 Lemma 2.2.17'nin şartları altında $|f'|$, konveks bir fonksiyon ise

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{f(\theta a+\beta b+\gamma\frac{\omega x+y}{\omega+1})+f(\theta a+\beta b+\gamma\frac{x+\omega y}{\omega+1})}{\omega+1}-\frac{\Gamma_k(\alpha+k)(\omega+1)^{\frac{\alpha}{k}-1}}{\gamma^{\frac{\alpha}{k}}(y-x)^{\frac{\alpha}{k}}}\right.\\
&\left.\times\left[J^{\alpha,k}_{(\theta a+\beta b+\gamma\frac{\omega x+y}{\omega+1})-}f(\theta a+\beta b+\gamma x)+J^{\alpha,k}_{(\theta a+\beta b+\gamma\frac{x+\omega y}{\omega+1})+}f(\theta a+\beta b+\gamma y)\right]\right|\\
\leq\ &\frac{2\gamma(y-x)}{(\omega+1)^2}\left(\frac{k}{\alpha+k}\right)\left[\theta|f'(a)|+\beta|f'(b)|+\gamma\frac{|f'(x)|+|f'(y)|}{2}\right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir [69].

Sonuç 2.2.27 Teorem 2.2.52'de $\alpha=\omega=k=1$ olarak alınırsa

$$\begin{aligned}
&\left|f\left(\theta a+\beta b+\gamma\frac{x+y}{2}\right)-\frac{1}{\gamma(y-x)}\int_{\theta a+\beta b+\gamma x}^{\theta a+\beta b+\gamma y}f(u)du\right|\\
\leq\ &\frac{\gamma(y-x)}{4}\left[\theta|f'(a)|+\beta|f'(b)|+\gamma\frac{|f'(x)|+|f'(y)|}{2}\right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir [69].

Sonuç 2.2.28 Teorem 2.2.52'de $\theta=0=\beta$ ve $\gamma=1$ olarak alınırsa

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{f\left(\frac{\omega x+y}{\omega+1}\right)+f\left(\frac{x+\omega y}{\omega+1}\right)}{\omega+1}-\frac{\Gamma_k(\alpha+k)(\omega+1)^{\frac{\alpha}{k}-1}}{(y-x)^{\frac{\alpha}{k}}}\left[J^{\alpha,k}_{(\frac{x+\omega y}{\omega+1})+}f(x)+J^{\alpha,k}_{(\frac{\omega x+y}{\omega+1})-}f(y)\right]\right|\\
\leq\ &\frac{(y-x)}{(\omega+1)^2}\left(\frac{k}{\alpha+k}\right)\left[|f'(x)|+|f'(y)|\right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir [69].

Teorem 2.2.53 Lemma 2.2.17'nin şartları altında $q>1$ ve $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ için $|f'|^q$, konveks bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{f(\theta a+\beta b+\gamma\frac{\omega x+y}{\omega+1})+f(\theta a+\beta b+\gamma\frac{x+\omega y}{\omega+1})}{\omega+1}-\frac{\Gamma_k(\alpha+k)(\omega+1)^{\frac{\alpha}{k}-1}}{\gamma^{\frac{\alpha}{k}}(y-x)^{\frac{\alpha}{k}}}\right.\\
&\left.\times\left[J^{\alpha,k}_{(\theta a+\beta b+\gamma\frac{\omega x+y}{\omega+1})-}f(\theta a+\beta b+\gamma x)+J^{\alpha,k}_{(\theta a+\beta b+\gamma\frac{x+\omega y}{\omega+1})+}f(\theta a+\beta b+\gamma y)\right]\right|\\
\leq\ &\frac{\gamma(y-x)}{(\omega+1)^2}\left(\frac{k}{\alpha p+k}\right)
\end{aligned}$$

$$\times\Bigg[\Bigg(\theta|f'(a)|^q+\beta|f'(b)|^q+\gamma\Big(\frac{1}{2(w+1)}|f'(x)|^q+\frac{2(\omega+1)-1}{2(\omega+1)}|f'(y)|^q\Big)\Bigg)^{\frac{1}{q}}$$
$$+\Bigg(\theta|f'(a)|^q+\beta|f'(b)|^q+\gamma\Big(\frac{1}{2(w+1)}|f'(y)|^q+\frac{2(\omega+1)-1}{2(\omega+1)}|f'(x)|^q\Big)\Bigg)^{\frac{1}{q}}\Bigg]$$

eşitsizliği geçerlidir [69].

Sonuç 2.2.29 Teorem 2.2.53'de $\alpha=\omega=k=1$ olarak alınırsa

$$\left|f\Big(\theta a+\beta b+\gamma\frac{x+y}{2}\Big)-\frac{1}{\gamma(y-x)}\int_{\theta a+\beta b+\gamma x}^{\theta a+\beta b+\gamma y}f(u)du\right|$$
$$\leq \frac{\gamma(y-x)}{4}\Big(\frac{1}{p+1}\Big)^{\frac{1}{p}}\Bigg[\Bigg(\theta|f'(a)|^q+\beta|f'(b)|^q+\gamma\Big(\frac{1}{4}|f'(x)|^q+\frac{3}{4}|f'(y)|^q\Big)\Bigg)^{\frac{1}{q}}$$
$$+\Bigg(\theta|f'(a)|^q+\beta|f'(b)|^q+\gamma\Big(\frac{1}{4}|f'(y)|^q+\frac{3}{4}|f'(x)|^q\Big)\Bigg)^{\frac{1}{q}}\Bigg]$$

eşitsizliği elde edilir [69].

Sonuç 2.2.30 Teorem 2.2.53'de $\theta=0=\beta$ ve $\gamma=1$ olarak alınırsa

$$\left|\frac{f\Big(\frac{\omega x+y}{\omega+1}\Big)+f\Big(\frac{x+\omega y}{\omega+1}\Big)}{\omega+1}-\frac{\Gamma_k(\alpha+k)(\omega+1)^{\frac{\alpha}{k}-1}}{(y-x)^{\frac{\alpha}{k}}}\Big[J^{\alpha,k}_{(\frac{\omega x+y}{\omega+1})^-}f(x)+J^{\alpha,k}_{(\frac{x+\omega y}{\omega+1})^+}f(y)\Big]\right|$$
$$\leq \frac{(y-x)}{(\omega+1)^2}\Big(\frac{k}{\alpha p+k}\Big)\Bigg[\Big(\frac{1}{2(w+1)}|f'(x)|^q+\frac{2(\omega+1)-1}{2(\omega+1)}|f'(y)|^q\Big)^{\frac{1}{q}}$$
$$+\Big(\frac{1}{2(w+1)}|f'(y)|^q+\frac{2(\omega+1)-1}{2(\omega+1)}|f'(x)|^q\Big)^{\frac{1}{q}}\Bigg]$$

eşitsizliği elde edilir [69].

Teorem 2.2.54 Lemma 2.2.17'nin şartları altında $|f'|^q$, konveks bir fonksiyon ise $q\geq 1$ için

$$\Bigg|\frac{f(\theta a+\beta b+\gamma\frac{\omega x+y}{\omega+1})+f(\theta a+\beta b+\gamma\frac{x+\omega y}{\omega+1})}{\omega+1}-\frac{\Gamma_k(\alpha+k)(\omega+1)^{\frac{\alpha}{k}-1}}{\gamma^{\frac{\alpha}{k}}(y-x)^{\frac{\alpha}{k}}}$$
$$\times\Big[J^{\alpha,k}_{(\theta a+\beta b+\gamma\frac{\omega x+y}{\omega+1})^-}f(\theta a+\beta b+\gamma x)+J^{\alpha,k}_{(\theta a+\beta b+\gamma\frac{x+\omega y}{\omega+1})^+}f(\theta a+\beta b+\gamma y)\Big]\Bigg|$$
$$\leq \frac{\gamma(y-x)}{(\omega+1)^2}\Big(\frac{k}{\alpha+k}\Big)^{1-\frac{1}{q}}\Bigg[\Bigg(\frac{k\theta}{\alpha+k}|f'(a)|^q+\frac{k\beta}{\alpha+k}|f'(b)|^q$$
$$+\gamma\Big(\frac{k\omega(\omega+2k)+k^2}{(\omega+1)(\alpha+k)(\alpha+2k)}|f'(x)|^q+\frac{k}{(\omega+1)(\alpha+2k)}|f'(y)|^q\Big)\Bigg)^{\frac{1}{q}}$$
$$+\Bigg(\frac{k\theta}{\alpha+k}|f'(a)|^q+\frac{k\beta}{\alpha+k}|f'(b)|^q+\gamma\Big(\frac{k}{(\omega+1)(\alpha+2k)}|f'(x)|^q$$
$$+\frac{k\omega(\alpha+2k)+k^2}{(\omega+1)(\alpha+k)(\alpha+2k)}|f'(y)|^q\Big)\Bigg)^{\frac{1}{q}}\Bigg]$$

eşitsizliği geçerlidir [69].

Sonuç 2.2.31 Teorem 2.2.54'de $\alpha = \omega = k = 1$ olarak alınırsa

$$\begin{aligned}
&\left| f\left(\theta a + \beta b + \gamma \frac{x+y}{2}\right) - \frac{1}{\gamma(y-x)} \int_{\theta a+\beta b+\gamma x}^{\theta a+\beta b+\gamma y} f(u)du \right| \\
\leq\ & \frac{\gamma(y-x)}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{1-\frac{1}{q}} \left[\left(\frac{\theta}{2}|f'(a)|^q + \frac{\beta}{2}|f'(b)|^q + \gamma\left(\frac{1}{3}|f'(x)|^q + \frac{1}{6}|f'(y)|^q\right)\right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
&\left. + \left(\frac{\theta}{2}|f'(a)|^q + \frac{\beta}{2}|f'(b)|^q + \gamma\left(\frac{1}{6}|f'(x)|^q + \frac{1}{3}|f'(y)|^q\right)\right)^{\frac{1}{q}} \right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir [69].

Sonuç 2.2.32 Teorem 2.2.54'de $\theta = 0 = \beta$ ve $\gamma = 1$ olarak alınırsa

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{f\left(\frac{\omega x+y}{\omega+1}\right) + f\left(\frac{x+\omega y}{\omega+1}\right)}{\omega+1} - \frac{\Gamma_k(\alpha+k)(\omega+1)^{\frac{\alpha}{k}-1}}{(y-x)^{\frac{\alpha}{k}}} \left[J^{\alpha,k}_{\left(\frac{\omega x+y}{\omega+1}\right)^-} f(x) + J^{\alpha,k}_{\left(\frac{x+\omega y}{\omega+1}\right)^+} f(y) \right] \right| \\
\leq\ & \frac{(y-x)}{(\omega+1)^2}\left(\frac{k}{\alpha+k}\right)^{1-\frac{1}{q}} \\
&\times \left[\left(\frac{k\omega(\omega+2k)+k^2}{(\omega+1)(\alpha+k)(\alpha+2k)}|f'(x)|^q + \frac{k}{(\omega+1)(\alpha+2k)}|f'(y)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
&\left. + \left(\frac{k}{(\omega+1)(\alpha+2k)}|f'(x)|^q + \frac{k\omega(\alpha+2k)+k^2}{(\omega+1)(\alpha+k)(\alpha+2k)}|f'(y)|^q) \right)^{\frac{1}{q}} \right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir [69].

2.2.7 Uyumlu Kesirli İntegraller İçin Hermite-Hadamard-Mercer Tipli Eşitsizlikler

Bu bölümde, konveks fonksiyonlar için uyumlu kesirli integral operatörleri içeren Hermite-Hadamard-Mercer tipli eşitsizlikler verilecektir.

Tanım 2.2.10 (Uyumlu Kesirli İntegral Operatörü) $n = 0, 1, 2, \ldots$ olmak üzere $\alpha \in (n, n+1]$, $\beta = \alpha - n$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ ve $f \in L[a, b]$ olsun. Bu durumda $f : [a, +\infty] \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun α. mertebeden sol ve sağ taraflı uyumlu kesirli integralleri sırasıyla,

$$\left(I^a_\alpha f\right)(t) = J^{n+1}_{a^+}\left[(t-a)^{\beta-1} f(t)\right] = \frac{1}{n!}\int_a^t (t-x)^n (x-a)^{\beta-1} f(x)dx, \qquad t > a \quad (2.2.96)$$

ve

$$\left({}^{b}I_{\alpha}f\right)(t) = J_{b^-}^{n+1}\left[(b-t)^{\beta-1}f(t)\right] = \frac{1}{n!}\int_t^b (x-t)^n(b-x)^{\beta-1}f(x)dx, \qquad t<b \quad (2.2.97)$$

seklinde tanımlanır [1]. Eğer $\alpha = n+1$ olarak alınırsa $\beta = \alpha - n = n+1-n = 1$ bulunur. Böylece $\left(I_{\alpha}^{a}f\right)(t) = J_{a^+}^{\alpha}f(t)$ ve $\left({}^{b}I_{\alpha}f\right)(t) = J_{b^-}^{\alpha}f(t)$ olur.

Saad Ihsan Butt ve arkadaşları, 2020 yılında uyumlu kesirli integral operatörleri yardımıyla aşağıdaki sonuçları elde etmişlerdir.

Teorem 2.2.55 f, konveks bir fonksiyon olsun. Bu durumda her $x, y \in [a,b]$ ve $\alpha > 0$ olmak üzere uyumlu kesirli integraller için

$$\begin{aligned} f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right) &\leq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(y-x)^{\alpha}\Gamma(\alpha-n)} \\ &\quad \times \left\{ I_{\alpha}^{(a+b-y)}f(a+b-x) + {}^{(a+b-x)}I_{\alpha}f(a+b-y) \right\} \\ &\leq f(a)+f(b) - \left(\frac{f(x)+f(y)}{2}\right) \end{aligned} \quad (2.2.98)$$

ve

$$\begin{aligned} f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right) &\leq f(a)+f(b) - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(y-x)^{\alpha}\Gamma(\alpha-n)}\left\{ I_{\alpha}^{x}f(y) + {}^{y}I_{\alpha}f(x) \right\} \\ &\leq f(a)+f(b) - f\left(\frac{x+y}{2}\right) \end{aligned} \quad (2.2.99)$$

eşitsizlikleri geçerlidir. Burada $\Gamma(\cdot)$ gama fonksiyonudur [16].

Sonuç 2.2.44 Teorem 2.2.55'de $\alpha = n+1$ için tamsayı sırasına göre [50]'de ispatlanan Teorem 3 elde edilir [16].

Teorem 2.2.56 $0 \leq a < b$ olmak üzere $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $[a,b]$ aralığında pozitif tanımlı bir fonksiyon ve $f \in L[a,b]$ olsun. Ayrıca f, $[a,b]$ aralığında konveks bir fonksiyon ve f', (a,b) aralığında tanımlı olsun. Bu durumda her $x, y \in [a,b]$ ve $\alpha > 0$ olmak üzere uyumlu kesirli integraller için

$$\begin{aligned} f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right) &\leq \frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(y-x)^{\alpha}\Gamma(\alpha-n)} \\ &\quad \times \left\{ I_{\alpha}^{\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right)}f(a+b-x) + {}^{\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right)}I_{\alpha}f(a+b-y) \right\} \\ &\leq f(a)+f(b) - \left(\frac{f(x)+f(y)}{2}\right) \end{aligned} \quad (2.2.100)$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $\Gamma(\cdot)$ gama fonksiyonudur [16].

Lemma 2.2.18 $a < b$ olmak üzere $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $[a,b]$ aralığında diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. $f' \in L[a,b]$ ise her $x, y \in [a,b]$, $\alpha > 0$ ve $t \in [0,1]$ için

$$\begin{aligned} & B(n+1, \alpha - n)\frac{f(a+b-x) + f(a+b-y)}{2} - \frac{n!}{2(y-x)^{\alpha}} \\ & \times \left\{ I_{\alpha}^{(a+b-y)} f(a+b-x) + {}^{(a+b-x)}I_{\alpha} f(a+b-y) \right\} \\ = \; & \frac{y-x}{2} \int_0^1 \left[B_k(n+1, \alpha - n) - B_{1-k}(n+1, \alpha - n) \right] \\ & \times f'\left(a+b-(tx+(1-t)y)\right) dt \end{aligned} \tag{2.2.101}$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $B(\cdot,\cdot)$ beta fonksiyonu ve $B_k(\cdot,\cdot)$ tamamlanmamış beta fonksiyonudur [16].

Sonuç 2.2.45 Lemma 2.2.18'de $x = a$ ve $y = b$ olarak alınırsa [50]'de Lemma 3.1 elde edilir [16].

Teorem 2.2.57 $a < b$ olmak üzere $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $[a,b]$ aralığında pozitif tanımlı diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $f \in L[a,b]$ olsun. $|f'|$, $[a,b]$ aralığında konveks bir fonksiyon ise bu durumda her $x, y \in [a,b]$, $\alpha > 0$ ve $t \in [0,1]$ olmak üzere uyumlu kesirli integraller için

$$\begin{aligned} & \left| B(n+1, \alpha - n)\frac{f(a+b-x) + f(a+b-y)}{2} - \frac{n!}{2(y-x)^{\alpha}} \right. \\ & \left. \times \left\{ I_{\alpha}^{(a+b-y)} f(a+b-x) + {}^{(a+b-x)}I_{\alpha} f(a+b-y) \right\} \right| \\ \leq \; & \frac{(y-x)}{2} B(n+1, \alpha - n) \left\{ \left|f'(a)\right| + \left|f'(b)\right| - \left(\frac{|f'(a)| + |f'(b)|}{2} \right) \right\} \end{aligned} \tag{2.2.102}$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $B(\cdot,\cdot)$ beta fonksiyonudur [16].

Sonuç 2.2.46 Teorem 2.2.57'de $x = a$ ve $y = b$ olarak alınırsa [64]'de $s = 1$ özel durumu için Teorem 3.1 elde edilir [16].

Teorem 2.2.58 $a < b$ olmak üzere $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, (a,b) aralığında diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $f \in L[a,b]$ olsun. $|f'|^q$, $[a,b]$ aralığında konveks bir fonksiyon ise her $x, y \in [a,b]$, $\alpha > 0$ ve $t \in [0,1]$ olmak üzere uyumlu kesirli integraller için

$$\begin{aligned} & \left| B(n+1, \alpha - n)\frac{f(a+b-x) + f(a+b-y)}{2} - \frac{n!}{2(y-x)^{\alpha}} \right. \\ & \left. \times \left\{ I_{\alpha}^{(a+b-y)} f(a+b-x) + {}^{(a+b-x)}I_{\alpha} f(a+b-y) \right\} \right| \\ \leq \; & \frac{(y-x)}{2} \Psi^{\frac{1}{p}} + \left\{ |f'(a)|^q + |f'(b)|^q - \left(\frac{|f'(x)|^q + |f'(y)|^q}{2} \right) \right\} \end{aligned} \tag{2.2.103}$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $B(\cdot,\cdot)$ beta fonksiyonu olup

$$\Psi = 2\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^{1-t} x^n (1-x)^{\alpha-n-1} \right)^p$$

şeklindedir [16].

Sonuç 2.2.47 Teorem 2.2.58'de $x = a$ ve $y = b$ olarak alınırsa [64]'de $s = 1$ özel durumu için Teorem 3.2 elde edilir [16].

Lemma 2.2.19 $a < b$ olmak üzere $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, (a,b) aralığında diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. $f' \in L[a,b]$ ise uyumlu kesirli integraller için

$$\begin{aligned}
&\frac{2^{\alpha-1}n!}{(y-x)^{\alpha}} \left[I^{\alpha}_{(a+b-\frac{x+y}{2})+} f(a+b-x) + I^{\alpha}_{(a+b-\frac{x+y}{2})-} f(a+b-y) \right] \\
&\quad -B(n+1,\alpha-n) f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right) \\
= \; & \frac{y-x}{4} \left[\int_0^1 B_t(n+1,\alpha-n) f'\left(a+b-\left(\frac{t}{2}x+\frac{2-t}{2}y\right)\right) dt \right. \\
&\left. - \int_0^1 B_t(n+1,\alpha-n) f'\left(a+b-\left(\frac{t}{2}y+\frac{2-t}{2}y\right)\right) dt \right] \qquad (2.2.104)
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir. $n = 0,1,2,3,\cdots$ için $\alpha \in (n, n+1]$ olmak üzere burada $B_t(a,b)$ tamamlanmamış beta fonksiyonudur [16].

Sonuç 2.2.48 Lemma 2.2.19'da $x = a$ ve $y = b$ olarak alınırsa [65]'de Lemma 2.1 elde edilir [16].

Teorem 2.2.59 $a < b$ olmak üzere $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, (a,b) aralığında diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. $q \geq 1$ için $|f'|^q$, $[a,b]$ aralığında konveks bir fonksiyon ise uyumlu kesirli integraller için

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{2^{\alpha-1}n!}{(y-x)^{\alpha}} \left[I^{\alpha}_{(a+b-\frac{x+y}{2})+} f(a+b-x) + I^{\alpha}_{(a+b-\frac{x+y}{2})-} f(a+b-y) \right] \right. \\
&\quad \left. -B(n+1,\alpha-n) f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right) \right| \\
\leq \; & \frac{y-x}{4} \Pi^{1-\frac{1}{q}} \left\{ \left(\Pi \left| f'(a) \right|^q + \Pi \left| f'(b) \right|^q - \Pi_1 \left| f'(x) \right|^q - \Pi_2 \left| f'(y) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
&\left. + \left(\Pi \left| f'(a) \right|^q + \Pi \left| f'(b) \right|^q - \Pi_1 \left| f'(y) \right|^q - \Pi_2 \left| f'(x) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\} \qquad (2.2.105)
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir [16]. Burada,

$$\Pi \;=\; \left[B(n+1,\alpha-n) - B(n+2,\alpha-n) \right],$$

$$
\begin{aligned}
\Pi_1 &= \frac{1}{4}\big[B(n+1,\alpha-n)-B(n+3,\alpha-n)\big],\\
\Pi_2 &= \frac{1}{4}\big[3B(n+1,\alpha-n)-4B(n+2,\alpha-n)+B(n+3,\alpha-n)\big]
\end{aligned}
$$

şeklindedir.

Sonuç 2.2.49 Teorem 2.2.59'da $x=a$ ve $y=b$ olarak alınırsa [65]'de Teorem 2.1 elde edilir [16].

Teorem 2.2.60 $a<b$ olmak üzere $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, (a,b) aralığında diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. $q>1$ ve $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ için $|f'|^q$, (a,b) aralığında konveks fonksiyon ise uyumlu kesirli integraller için

$$
\begin{aligned}
&\Bigg|\frac{2^{\alpha-1}n!}{(y-x)^{\alpha}}\left[I^{\alpha}_{(a+b-\frac{x+y}{2})+}\big(f(a+b-x)\big)+I^{\alpha}_{(a+b-\frac{x+y}{2})-}\big(f(a+b-y)\big)\right]\\
&\qquad -B(n+1,\alpha-n)f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right)\Bigg|\\
\leq\ & \frac{y-x}{4}\Omega^{1-\frac{1}{q}}\Bigg\{\left(\big|f'(a)\big|^q+\big|f'(b)\big|^q-\frac{1}{4}\big|f'(x)\big|^q-\frac{3}{4}\big|f'(y)\big|^q\right)^{\frac{1}{q}}\\
&\qquad +\left(\big|f'(a)\big|^q+\big|f'(b)\big|^q-\frac{1}{4}\big|f'(y)\big|^q-\frac{3}{4}\big|f'(x)\big|^q\right)^{\frac{1}{q}}\Bigg\} \qquad (2.2.106)
\end{aligned}
$$

eşitsizliği geçerlidir [16]. Burada $\Omega=\int_0^1\big(B_t(n+1,\alpha-n)\big)^p\,dt$ şeklindedir.

Sonuç 2.2.50 Teorem 2.2.60'da $x=a$ ve $y=b$ olarak alınırsa [65]'de Teorem 2.2 elde edilir [16].

Lemma 2.2.20 $a<b$ olmak üzere $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, (a,b) aralığında iki kez diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. $f'\in L[a,b]$ ise uyumlu kesirli integraller için

$$
\begin{aligned}
&\frac{2^{\alpha-1}n!}{(y-x)^{\alpha}}\left[I^{\alpha}_{(a+b-\frac{x+y}{2})+}f(a+b-x)+I^{\alpha}_{(a+b-\frac{x+y}{2})-}f(a+b-y)\right]\\
&-B(n+1,\alpha-n)f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right)\\
=\ & \frac{(y-x)^2}{8}\int_0^1\left[tB_t(n+1,\alpha-n)-B_t(n+2,\alpha-n)\right]\\
&\times\left[f''\left(a+b-\left(\frac{t}{2}x+\frac{2-t}{2}y\right)\right)+f''\left(a+b-\left(\frac{t}{2}y+\frac{2-t}{2}x\right)\right)\right]dt \qquad (2.2.107)
\end{aligned}
$$

eşitsizliği geçerlidir. $\alpha\in(n,n+1]$, $n=0,1,2,3,\cdots$ ile birlikte burada $B_t(a,b)$ tamamlanmamış beta fonksiyonudur [16].

Sonuç 2.2.51 Lemma 2.2.20'de $x=a$ ve $y=b$ olarak alınırsa [66]'da Lemma 2.1 elde edilir [16].

Teorem 2.2.61 $a < b$ olmak üzere $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, (a,b) aralığında iki kez diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. $|f''|^q$, $[a,b]$ aralığında konveks bir fonksiyon ise uyumlu kesirli integraller için

$$\begin{aligned}
&\Bigg| \frac{2^{\alpha-1} n!}{(y-x)^\alpha} \left[I^\alpha_{(a+b-\frac{x+y}{2})^+} \big(f(a+b-x)\big) + I^\alpha_{(a+b-\frac{x+y}{2})^-} \big(f(a+b-y)\big) \right] \\
&\qquad -B(n+1,\alpha-n) f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right) \Bigg| \\
\leq\ & \frac{(y-x)^2}{8} \Lambda^{1-\frac{1}{q}} \Big\{ \big(\Lambda \left|f''(a)\right|^q + \Lambda \left|f''(b)\right|^q - \Lambda_1 \left|f''(x)\right|^q - \Lambda_2 \left|f''(y)\right|^q\big)^{\frac{1}{q}} \\
&\qquad + \big(\Lambda \left|f''(a)\right|^q + \Lambda \left|f''(b)\right|^q - \Lambda_1 \left|f''(y)\right|^q - \Lambda_2 \left|f''(x)\right|^q\big)^{\frac{1}{q}} \Big\} \qquad (2.2.108)
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir [16]. Burada,

$$\begin{aligned}
\Lambda &= \frac{1}{2}\big[B(n+1,\alpha-n) - 2B(n+2,\alpha-n) + B(n+3,\alpha-n)\big], \\
\Lambda_1 &= \frac{1}{12}\big[2B(n+1,\alpha-n) - 3B(n+2,\alpha-n) + B(n+4,\alpha-n)\big], \\
\Lambda_2 &= \frac{1}{12}\big[4B(n+1,\alpha-n) - 9B(n+2,\alpha-n) + 6B(n+3,\alpha-n) - B(n+4,\alpha-n)\big]
\end{aligned}$$

şeklindedir.

Sonuç 2.2.52 Teorem 2.2.61'de $x = a$ ve $y = b$ olarak alınırsa [66]'da $m = 1$ özel durumu için Teorem 2.1 elde edilir [16].

Teorem 2.2.62 $a < b$ olmak üzere $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, (a,b) aralığında iki kez diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. $q > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ için $|f''|^q$, $[a,b]$ aralığında konveks bir fonksiyon ise uyumlu kesirli integraller için

$$\begin{aligned}
&\Bigg| \frac{2^{\alpha-1} n!}{(y-x)^\alpha} \left[I^\alpha_{(a+b-\frac{x+y}{2})^+} \big(f(a+b-x)\big) + I^\alpha_{(a+b-\frac{x+y}{2})^-} \big(f(a+b-y)\big) \right] \\
&\qquad -B(n+1,\alpha-n) f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right) \Bigg| \\
\leq\ & \frac{(y-x)^2}{8} \Psi^{1-\frac{1}{q}} \left\{ \left(\left|f''(a)\right|^q + \left|f''(b)\right|^q - \frac{1}{4}\left|f''(x)\right|^q - \frac{3}{4}\left|f''(y)\right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
&\qquad \left. + \left(\left|f''(a)\right|^q + \left|f''(b)\right|^q - \frac{1}{4}\left|f''(y)\right|^q - \frac{3}{4}\left|f''(x)\right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\}, \qquad (2.2.109)
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir [16]. Burada,

$$\Psi = \int_0^1 \big[t B_t(n+1,\alpha-n) - B_t(n+2,\alpha-n)\big]^p \, dt$$

şeklindedir.

Sonuç 2.2.53 Teorem 2.2.62'de $x = a$ ve $y = b$ olarak alınırsa [66]'da $m = 1$ özel durumu için Teorem 2.2 elde edilir [16].

Teorem 2.2.63 $a < b$ olmak üzere $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, (a, b) aralığında iki kez diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $f \in L[a, b]$ olsun. $q > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ için $|f'|^q$, $[a, b]$ aralığında konveks bir fonksiyon ise her $x, y \in [a, b]$, $\alpha > 0$ ve $t \in [0, 1]$ olmak üzere uyumlu kesirli integraller için

$$\begin{aligned}
&\Bigg| B(n+1, \alpha - n) \frac{f(a+b-x) + f(a+b-y)}{2} - \frac{n!}{2(y-x)^\alpha} \\
&\qquad \times \left\{ \left(I_\alpha^{a+b-y}\right)\left(f(a+b-x)\right) + \left({}^{a+b-x}I_\alpha\right)\left(f(a+b-y)\right) \right\} \Bigg| \\
\leq\ & \frac{y-x}{2} \Bigg\{ \left(\int_0^1 (1-t)\left(B_t(n+1, \alpha-n) - B_{1-t}(n+1, \alpha-n)\right)^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\qquad \times \left(\frac{|f'(a)|^q + |f'(b)|^q}{2} - \left(\frac{1}{6}\left|f'(x)\right|^q + \frac{1}{3}\left|f'(y)\right|^q \right) \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\qquad + \left(\int_0^1 t\left(B_t(n+1, \alpha-n) - B_{1-t}(n+1, \alpha-n)\right)^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\qquad \times \left(\frac{|f'(a)|^q + |f'(b)|^q}{2} - \left(\frac{1}{3}\left|f'(x)\right|^q + \frac{1}{6}\left|f'(y)\right|^q \right) \right)^{\frac{1}{q}} \Bigg\}
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir [16]. Burada $B(\cdot, \cdot)$ beta fonksiyonu ve $B_t(\cdot, \cdot)$ ise tamamlanmamış beta fonksiyonudur.

Teorem 2.2.64 $a < b$ olmak üzere $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, (a, b) aralığında diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. $q > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ için $|f'|^q$, $[a, b]$ aralığında konveks bir fonksiyon ise uyumlu kesirli integraller için

$$\begin{aligned}
&\Bigg| \frac{2^{\alpha-1} n!}{(y-x)^\alpha} \left[I^\alpha_{(a+b-\frac{x+y}{2})+}\left(f(a+b-x)\right) + I^\alpha_{(a+b-\frac{x+y}{2})-}\left(f(a+b-y)\right) \right] \\
&-B(n+1, \alpha-n) f\left(a+b-\frac{x+y}{2} \right) \Bigg| \\
\leq\ & \frac{y-x}{4} \Bigg[\Bigg\{ \left(\int_0^1 \left(\frac{2-t}{2} \right) \left(B_t(n+1, \alpha-n)\right)^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\times \left(\frac{3|f'(a)|^q + 3|f'(b)|^q}{4} - \left(\frac{1}{6}\left|f'(x)\right|^q + \frac{7}{12}\left|f'(y)\right|^q \right) \right)^{\frac{1}{q}} \\
&+ \left(\int_0^1 \frac{t}{2} \left(B_t(n+1, \alpha-n)\right)^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\times \left(\frac{|f'(a)|^q + |f'(b)|^q}{4} - \left(\frac{1}{12}\left|f'(x)\right|^q + \frac{1}{6}\left|f'(y)\right|^q \right) \right)^{\frac{1}{q}} \Bigg\}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\left\{\left(\int_0^1\left(\frac{2-t}{2}\right)\left(B_t(n+1,\alpha-n)\right)^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\right.\\
&\times\left(\frac{3|f'(a)|^q+3|f'(b)|^q}{4}-\left(\frac{1}{6}\left|f'(y)\right|^q+\frac{7}{12}\left|f'(x)\right|^q\right)\right)^{\frac{1}{q}}\\
&+\left(\int_0^1\frac{t}{2}\left(B_t(n+1,\alpha-n)\right)^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\left.\left.\times\left(\frac{|f'(a)|^q+|f'(b)|^q}{4}-\left(\frac{1}{12}\left|f'(y)\right|^q+\frac{1}{6}\left|\phi'(x)\right|^q\right)\right)^{\frac{1}{q}}\right\}\right]
\end{aligned}
$$

eşitsizliği geçerlidir [16]. Burada $B(\cdot,\cdot)$ beta fonksiyonu ve $B_t(\cdot,\cdot)$ ise tamamlanmamış beta fonksiyonudur.

Teorem 2.2.65 $a<b$ olmak üzere $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, (a,b) aralığında diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. $q>1$ ve $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ için $|f''|^q$, $[a,b]$ aralığında konveks bir fonksiyon ise uyumlu kesirli integraller için

$$
\begin{aligned}
&\left|\frac{2^{\alpha-1}n!}{(y-x)^\alpha}\left[I^\alpha_{\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right)^+}\left(f(a+b-x)\right)+I^\alpha_{\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right)^-}\left(f(a+b-y)\right)\right]\right.\\
&\left.-B(n+1,\alpha-n)f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right)\right|\\
\leq\ &\frac{y-x}{4}\left[\left\{\left(\int_0^1\left(\frac{2-t}{2}\right)\left(tB_t(n+1,\alpha-n)-B_t(n+2,\alpha-n)\right)^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\right.\right.\\
&\times\left(\frac{3|f'(a)|^q+3|f''(b)|^q}{4}-\left(\frac{1}{6}\left|f''(x)\right|^q+\frac{7}{12}\left|f''(y)\right|^q\right)\right)^{\frac{1}{q}}\\
&+\left(\int_0^1\frac{t}{2}\left(tB_t(n+1,\alpha-n)-B_t(n+2,\alpha-n)\right)^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\left.\times\left(\frac{|f''(a)|^q+|f''(b)|^q}{4}-\left(\frac{1}{12}\left|f''(x)\right|^q+\frac{1}{6}\left|f''(y)\right|^q\right)\right)^{\frac{1}{q}}\right\}\\
&+\left\{\left(\int_0^1\left(\frac{2-t}{2}\right)\left(tB_t(n+1,\alpha-n)-B_t(n+2,\alpha-n)\right)^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\right.\\
&\times\left(\frac{3|f''(a)|^q+3|f''(b)|^q}{4}-\left(\frac{1}{6}\left|f''(y)\right|^q+\frac{7}{12}\left|f''(x)\right|^q\right)\right)^{\frac{1}{q}}\\
&+\left(\int_0^1\frac{t}{2}\left(tB_t(n+1,\alpha-n)-B_t(n+2,\alpha-n)\right)^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\left.\left.\times\left(\frac{|f''(a)|^q+|f''(b)|^q}{4}-\left(\frac{1}{12}\left|f''(y)\right|^q+\frac{1}{6}\left|f''(x)\right|^q\right)\right)^{\frac{1}{q}}\right\}\right]
\end{aligned}
$$

eşitsizliği geçerlidir [16]. Burada $B(\cdot,\cdot)$ beta fonksiyonu ve $B_t(\cdot,\cdot)$ ise tamamlanmamış beta fonksiyonudur.

2.2.8 Yeni Uyumlu k-Kesirli İntegral Operatörü İçin Hermite-Hadamard-Mercer Tipli Eşitsizlikler

Bu bölümde, konveks fonksiyonlar için yeni uyumlu k-kesirli integral operatörleri içeren Hermite-Hadamard-Mercer tipli eşitsizlikler verilecektir.

Tanım 2.2.11 (Yeni Uyumlu k-Kesirli İntegral Operatörü) f, sonlu bir $[a,b]$ aralığında sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda $\beta>0$, $\mathrm{Re}(\beta)>0$, $k>0$ ve $\alpha\in\mathbb{R}/\{0\}$ olmak üzere genelleştirilmiş sol ve sağ taraflı k-kesirli uyumlu integralleri sırasıyla,

$$ {}_k^{\beta}\mathfrak{J}_{a^+}^{\alpha} f(x)=\frac{1}{k\Gamma_k(\beta)}\int_a^x\left(\frac{(x-a)^{\alpha}-(t-a)^{\alpha}}{\alpha}\right)^{\frac{\beta}{k}-1}\frac{f(t)}{(t-a)^{1-\alpha}}\,dt \tag{2.2.110}$$

ve

$$ {}_k^{\beta}\mathfrak{J}_{b^-}^{\alpha} f(x)=\frac{1}{k\Gamma_k(\beta)}\int_x^b\left(\frac{(b-x)^{\alpha}-(b-t)^{\alpha}}{\alpha}\right)^{\frac{\beta}{k}-1}\frac{f(t)}{(b-t)^{1-\alpha}}\,dt \tag{2.2.111}$$

şeklinde tanımlanır [56]. Burada Γ_k, k-gama fonksiyonudur.
$k>0$ ise Γ_k gösterimi olan k-gama fonksiyonu,

$$\Gamma_k(\alpha)=\lim_{m\to\infty}\frac{m!k^m(mk)^{\frac{\alpha}{k}-1}}{(\alpha)_{m,k}} \tag{2.2.112}$$

şeklinde tanımlanır.
$\mathrm{Re}(\alpha)>0$ ise integral formdaki k-gama fonksiyonu,

$$\Gamma_k(\alpha)=\int_0^{\infty}e^{-\frac{t^k}{k}}t^{\alpha-1}\,dt \tag{2.2.113}$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca $\alpha\Gamma_k(\alpha)=\Gamma_k(\alpha+k)$ olur.

Saad Ihsan Butt ve arkadaşları, 2020 yılında yeni uyumlu k-kesirli integral operatörleri yardımıyla aşağıdaki sonuçları elde etmişlerdir.

Teorem 2.2.66 $\alpha,\beta>0$ ve $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ konveks bir fonksiyon olsun. Bu durumda her $x,y\in[a,b]$ için

$$\begin{aligned} f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right) &\le \frac{2^{\alpha\frac{\beta}{k}-1}\alpha^{\frac{\beta}{k}}\Gamma_k(\beta+k)}{(y-x)^{\alpha\frac{\beta}{k}}} \\ &\quad\times\left\{{}_k^{\beta}\mathfrak{J}^{\alpha}_{(a+b-\frac{x+y}{2})^+}f(a+b-x)+{}_k^{\beta}\mathfrak{J}^{\alpha}_{(a+b-\frac{x+y}{2})^-}f(a+b-y)\right\} \\ &\le f(a)+f(b)-\left(\frac{f(x)+f(y)}{2}\right) \end{aligned} \tag{2.2.114}$$

eşitsizliği geçerlidir [18].

Sonuç 2.2.54 i) Teorem 2.2.66'da $k = 1$, $x = a$ ve $y = b$ olarak alınırsa [26]'da Teorem 2.1 elde edilir.

ii) Teorem 2.2.66'da $\alpha = k = 1$, $x = a$ ve $y = b$ olarak alınırsa [62]'de Teorem 2 elde edilir [18].

Teorem 2.2.67 $\alpha, \beta > 0$ olmak üzere $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ konveks bir fonksiyon olsun. Bu durumda her $x, y \in [a, b]$ için

$$\begin{aligned} f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right) &\leq f(a)+f(b)-\frac{\alpha^{\frac{\beta}{k}}\Gamma_k(\beta+k)}{2(y-x)^{\alpha\frac{\beta}{k}}}\left\{{}_k^\beta\mathfrak{J}_{x^+}^\alpha f(y)+{}_k^\beta\mathfrak{J}_{y^-}^\alpha f(x)\right\} \\ &\leq f(a)+f(b)-f\left(\frac{x+y}{2}\right) \end{aligned} \tag{2.2.115}$$

ve

$$\begin{aligned} f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right) &\leq \frac{\alpha^{\frac{\beta}{k}}\Gamma_k(\beta+k)}{2(y-x)^{\alpha\frac{\beta}{k}}} \\ &\quad \times\left\{{}_k^\beta\mathfrak{J}_{(a+b-x)^+}^\alpha f(a+b-y)+{}_k^\beta\mathfrak{J}_{(a+b-y)^-}^\alpha f(a+b-x)\right\} \\ &\leq \frac{f(a+b-x)+f(a+b-y)}{2} \\ &\leq f(a)+f(b)-\frac{f(x)+f(y)}{2} \end{aligned} \tag{2.2.116}$$

eşitsizlikleri geçerlidir [18].

Sonuç 2.2.55 Teorem 2.2.67'de $\alpha = \beta = k = 1$ olarak alınırsa [36]'da Teorem 2.1'de ispatlanan

$$\begin{aligned} f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right) &\leq f(a)+f(b)-\int_0^1 f\big(tx+(1-t)y\big)\,dt \\ &\leq f(a)+f(b)-f\left(\frac{x+y}{2}\right) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right) &\leq \frac{1}{y-x}\int_x^y f(a+b-t)\,dt \\ &\leq f(a)+f(b)-\frac{f(x)+f(y)}{2} \end{aligned}$$

eşitsizlikleri elde edilir [18].

Lemma 2.2.21 $a < b$ ve $\alpha, \beta > 0$ olmak üzere $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $f' \in L[a,b]$ olsun. Bu durumda her $x,y \in [a,b]$ için

$$\begin{aligned}
&\frac{2^{\alpha\frac{\beta}{k}-1}\alpha^{\frac{\beta}{k}}\Gamma_k(\beta+k)}{(y-x)^{\alpha\frac{\beta}{k}}}\left\{{}_k^{\beta}\mathfrak{J}^{\alpha}_{(a+b-\frac{x+y}{2})^+}f(a+b-x)+{}_k^{\beta}\mathfrak{J}^{\alpha}_{(a+b-\frac{x+y}{2})^-}f(a+b-y)\right\}\\
&-f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right)\\
=\;&\frac{(y-x)\alpha^{\frac{\beta}{k}}}{4}\int_0^1\left(\frac{1-(1-t)^{\alpha}}{\alpha}\right)^{\frac{\beta}{k}}\\
&\times\left\{f'\left(a+b-\left(\frac{2-t}{2}x+\frac{t}{2}y\right)\right)-f'\left(a+b-\left(\frac{t}{2}x+\frac{2-t}{2}y\right)\right)\right\}dt \quad (2.2.117)
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir [18].

Sonuç 2.2.56 i) Lemma 2.2.21'de, $k=1$, $x=a$ ve $y=b$ olarak alınırsa [26]'da Lemma 3.1 elde edilir.

ii) Lemma 2.2.21'de, $\alpha=k=1$, $x=a$ ve $y=b$ olarak alınırsa [63]'de Lemma 1.1'e indirgenir [18].

Lemma 2.2.22 $a<b$ ve $\alpha,\beta>0$ olmak üzere $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $f' \in L[a,b]$ olsun. Bu durumda her $x,y \in [a,b]$ için

$$\begin{aligned}
&\frac{f(a+b-x)+f(a+b-y)}{2}-\frac{\alpha^{\frac{\beta}{k}}\Gamma_k(\beta+k)}{2(y-x)^{\alpha\frac{\beta}{k}}}\\
&\times\left\{{}_k^{\beta}\mathfrak{J}^{\alpha}_{(a+b-y)^+}f(a+b-x)+{}_k^{\beta}\mathfrak{J}^{\alpha}_{(a+b-x)^-}f(a+b-y)\right\}\\
=\;&\frac{(y-x)\alpha^{\frac{\beta}{k}}}{2}\int_0^1\left[\left(\frac{1-(1-t)^{\alpha}}{\alpha}\right)^{\frac{\beta}{k}}-\left(\frac{1-t^{\alpha}}{\alpha}\right)^{\frac{\beta}{k}}\right]\\
&\times f'\big(a+b-(tx+(1-t)y)\big)\,dt \quad (2.2.118)
\end{aligned}$$

eşitliği geçerlidir [18].

Sonuç 2.2.33 Lemma 2.2.22'de $\alpha=\beta=k=1$ olarak alınırsa,

$$\begin{aligned}
&\frac{f(a+b-x)+f(a+b-y)}{2}-\frac{1}{y-x}\int_{a+b-y}^{a+b-x}f(t)\,dt\\
=\;&\frac{y-x}{2}\int_0^1(2t-1)f'\big(a+b-(tx+(1-t)y)\big)\,dt \quad (2.2.119)
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir [18].

Sonuç 2.2.57 Sonuç 2.2.33'de $x=a$ ve $y=b$ olarak alınırsa (2.2.119), [22]'de Lemma

2.1'de ispatlanan

$$\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt=\frac{b-a}{2}\int_0^1 (2t-1)f'\big((1-t)a+tb\big)\,dt$$

eşitliğine indirgenir [18].

Teorem 2.2.68 $a<b$ ve $\alpha,\beta>0$ olmak üzere $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $f'\in L[a,b]$ olsun. $|f'|$, $[a,b]$ aralığında konveks bir fonksiyon ise her $x,y\in[a,b]$ için

$$\begin{aligned}
&\Bigg|\frac{2^{\alpha\frac{\beta}{k}-1}\alpha^{\frac{\beta}{k}}\Gamma_k(\beta+k)}{(y-x)^{\alpha\frac{\beta}{k}}}\Big\{{}_k^{\beta}\mathfrak{J}^{\alpha}_{(a+b-\frac{x+y}{2})^+}f(a+b-x)+{}_k^{\beta}\mathfrak{J}^{\alpha}_{(a+b-\frac{x+y}{2})^-}f(a+b-y)\Big\}\\
&-f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right)\Bigg|\\
\le\ &\frac{y-x}{4}\alpha^{\frac{\beta}{k}}\Bigg[\big(|f'(a)|+|f'(b)|\big)\left(\frac{1}{\alpha^{\frac{\beta}{k}+1}}B\left(\frac{\beta}{k}+1,\frac{1}{\alpha}\right)\right)\\
&-\left\{|f'(x)|\left(\frac{1}{2\alpha^{\frac{\beta}{k}+1}}\left(B\left(\frac{\beta}{k}+1,\frac{2}{\alpha}\right)+B\left(\frac{\beta}{k}+1,\frac{1}{\alpha}\right)\right)\right)\right\}\\
&+\left\{|f'(y)|\left(\frac{1}{2\alpha^{\frac{\beta}{k}+1}}\left(B\left(\frac{\beta}{k}+1,\frac{2}{\alpha}\right)-B\left(\frac{\beta}{k}+1,\frac{1}{\alpha}\right)\right)\right)\right\}\\
&+\big(|f'(a)|+|f'(b)|\big)\left(\frac{1}{\alpha^{\frac{\beta}{k}+1}}B\left(\frac{\beta}{k}+1,\frac{1}{\alpha}\right)\right)\\
&-\left\{|f'(x)|\left(\frac{1}{2\alpha^{\frac{\beta}{k}+1}}\left(B\left(\frac{\beta}{k}+1,\frac{1}{\alpha}\right)-B\left(\frac{\beta}{k}+1,\frac{2}{\alpha}\right)\right)\right)\right\}\\
&+\left\{|f'(y)|\left(\frac{1}{2\alpha^{\frac{\beta}{k}+1}}\left(B\left(\frac{\beta}{k}+1,\frac{2}{\alpha}\right)+B\left(\frac{\beta}{k}+1,\frac{1}{\alpha}\right)\right)\right)\right\}\Bigg]
\end{aligned}\tag{2.2.120}$$

eşitsizliği geçerlidir [18].

Sonuç 2.2.58 i) Teorem 2.2.68'de $k=1$, $x=a$ ve $y=b$ olarak alınırsa [26]'da Teorem 3.1 elde edilir.

ii) Teorem 2.2.68'de $\alpha=k=1$, $x=a$ ve $y=b$ olarak alınırsa [63]'de $q=1$ özel durumu için Teorem 5 elde edilir [18].

Teorem 2.2.69 $a<b$, $\alpha,\beta>0$ olmak üzere $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $f'\in L[a,b]$ olsun. $q\ge 1$ için $|f'|^q$, $[a,b]$ aralığında konveks bir fonksiyon ise bu durumda her $x,y\in[a,b]$ için

$$\Bigg|\frac{2^{\alpha\frac{\beta}{k}-1}\alpha^{\frac{\beta}{k}}\Gamma_k(\beta+k)}{(y-x)^{\alpha\frac{\beta}{k}}}\Big\{{}_k^{\beta}\mathfrak{J}^{\alpha}_{(a+b-\frac{x+y}{2})^+}f(a+b-x)+{}_k^{\beta}\mathfrak{J}^{\alpha}_{(a+b-\frac{x+y}{2})^-}f(a+b-y)\Big\}$$

$$
\begin{aligned}
&-f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right)\Bigg| \\
\leq\ & \frac{y-x}{4}\alpha^{\frac{\beta}{k}}\left(\frac{1}{\alpha^{\frac{\beta}{k}+1}}B\left(\frac{\beta}{k}+1,\frac{1}{\alpha}\right)\right)^{1-\frac{1}{q}} \\
&\times\Bigg\{\left(\left|f'(a)\right|^q+\left|f'(b)\right|^q\right)\left(\left(\frac{1}{\alpha^{\frac{\beta}{k}+1}}B\left(\frac{\beta}{k}+1,\frac{1}{\alpha}\right)\right)\right) \\
&-\Bigg\{\left|f'(x)\right|^q\left(\frac{1}{2\alpha^{\frac{\beta}{k}+1}}\left(B\left(\frac{\beta}{k}+1,\frac{1}{\alpha}\right)-B\left(\frac{\beta}{k}+1,\frac{2}{\alpha}\right)\right)\right) \\
&+\left|f'(y)\right|^q\left(\frac{1}{2\alpha^{\frac{\beta}{k}+1}}\left(B\left(\frac{\beta}{k}+1,\frac{2}{\alpha}\right)+B\left(\frac{\beta}{k}+1,\frac{1}{\alpha}\right)\right)\right)\Bigg\} \\
&+\left(\left|f'(a)\right|^q+\left|f'(b)\right|^q\right)\left(\left(\frac{1}{\alpha^{\frac{\beta}{k}+1}}B\left(\frac{\beta}{k}+1,\frac{1}{\alpha}\right)\right)\right) \\
&-\Bigg\{\left|f'(x)\right|^q\left(\frac{1}{2\alpha^{\frac{\beta}{k}+1}}\left(B\left(\frac{\beta}{k}+1,\frac{2}{\alpha}\right)-B\left(\frac{\beta}{k}+1,\frac{1}{\alpha}\right)\right)\right) \\
&+\left|f'(y)\right|^q\left(\frac{1}{2\alpha^{\frac{\beta}{k}+1}}\left(B\left(\frac{\beta}{k}+1,\frac{1}{\alpha}\right)+B\left(\frac{\beta}{k}+1,\frac{2}{\alpha}\right)\right)\right)\Bigg\}\Bigg\}^{\frac{1}{q}} \qquad (2.2.121)
\end{aligned}
$$

eşitsizliği geçerlidir [18].

Sonuç 2.2.59 i) Teorem 2.2.69'da $k=1$, $x=a$ ve $y=b$ olarak alınırsa [26]'da Teorem 3.2 elde edilir.

ii) Teorem 2.2.69'da $\alpha=k=1$, $x=a$ ve $y=b$ olarak alınırsa [63]'de Teorem 5'e indirgenir [18].

Teorem 2.2.70 $a<b$, $\alpha,\beta>0$, $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $f'\in L[a,b]$ olsun. $q>1$ ve $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ için $|f'|^q$, $[a,b]$ aralığında konveks bir fonksiyon ise bu durumda her $x,y\in[a,b]$ için

$$
\begin{aligned}
&\Bigg|\frac{2^{\alpha\frac{\beta}{k}-1}\alpha^{\frac{\beta}{k}}\Gamma_k(\beta+k)}{(y-x)^{\alpha\frac{\beta}{k}}}\left\{{}^{\beta}_{k}\mathfrak{J}^{\alpha}_{(a+b-\frac{x+y}{2})^+}f(a+b-x)+{}^{\beta}_{k}\mathfrak{J}^{\alpha}_{(a+b-\frac{x+y}{2})^-}f(a+b-y)\right\} \\
&-f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right)\Bigg| \\
\leq\ & \frac{y-x}{4}\alpha^{\frac{\beta}{k}}\left(\frac{1}{\alpha^{\frac{\beta}{k}p+1}}B\left(\frac{\beta}{k}p+1,\frac{1}{\alpha}\right)\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\times\Bigg\{\left(\left|f'(a)\right|^q+\left|f'(b)\right|^q-\left(\frac{3|f'(x)|^q+|f'(y)|^q}{4}\right)\right)^{\frac{1}{q}} \\
&+\left(\left|f'(a)\right|^q+\left|f'(b)\right|^q-\left(\frac{|f'(x)|^q+3|f'(y)|^q}{4}\right)\right)^{\frac{1}{q}}\Bigg\} \qquad (2.2.122)
\end{aligned}
$$

eşitsizliği geçerlidir [18].

Sonuç 2.2.34 Teorem 2.2.70'de $\alpha = k = 1$ olarak alınırsa

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{y-x}\int_{a+b-y}^{a+b-x} f(t)\,dt - f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right)\right| \\
\leq\ & \frac{1}{2^{\frac{1}{p}}}\Bigg\{\left(\left|f'(a)\right|^q + \left|f'(b)\right|^q - \left(\frac{3|f'(x)|^q + |\tau'(y)|^q}{4}\right)\right)^{\frac{1}{q}} \\
&+\left(\left|f'(a)\right|^q + \left|f'(b)\right|^q - \left(\frac{|f'(x)|^q + 3|f'(y)|^q}{4}\right)\right)^{\frac{1}{q}}\Bigg\}
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir [18].

Teorem 2.2.71 $a < b$ ve $\alpha, \beta > 0$ olmak üzere $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $f' \in L[a,b]$ olsun. $q > 1$ ve $1/p + 1/q = 1$ için $|f'|^q$, $[a,b]$ aralığında konveks bir fonksiyon ise her $x, y \in [a,b]$ için

$$\begin{aligned}
&\Bigg|\frac{2^{\alpha\frac{\beta}{k}-1}\alpha^{\frac{\beta}{k}}\Gamma_k(\beta+k)}{(y-x)^{\alpha\frac{\beta}{k}}}\left\{{}^{\beta}_{k}\mathfrak{J}^{\alpha}_{(a+b-\frac{x+y}{2})^+} f(a+b-x) + {}^{\beta}_{k}\mathfrak{J}^{\alpha}_{(a+b-\frac{x+y}{2})^-} f(a+b-y)\right\} \\
&-f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right)\Bigg| \\
\leq\ & \frac{(y-x)\alpha^{\frac{\beta}{k}}}{4}\Bigg\{\left(\left|f'(a)\right|^q + \left|f'(b)\right|^q\right)\left(\frac{B(\frac{\beta}{k}+1,\frac{1}{\alpha})}{\alpha^{\frac{\beta}{k}+1}}\right) \\
&-\Bigg(\left(\frac{B(\frac{\beta}{k}+1,\frac{2}{\alpha}) + B(\frac{\beta}{k}+1,\frac{1}{\alpha})}{2\alpha^{\frac{\beta}{k}+1}}\right)\left|f'(x)\right|^q \\
&+\left(\frac{B(\frac{\beta}{k}+1,\frac{1}{\alpha}) - B(\frac{\beta}{k}+1,\frac{2}{\alpha})}{2\alpha^{\frac{\beta}{k}+1}}\right)\left|f'(y)\right|^q\Bigg)^{\frac{1}{q}} \\
&+\left(\left|f'(a)\right|^q + \left|f'(b)\right|^q\right)\left(\frac{B(\frac{\beta}{k}+1,\frac{1}{\alpha})}{\alpha^{\frac{\beta}{k}+1}}\right) - \Bigg(\left(\frac{B(\frac{\beta}{k}+1,\frac{1}{\alpha}) - B(\frac{\beta}{k}+1,\frac{2}{\alpha})}{2\alpha^{\frac{\beta}{k}+1}}\right)\left|f'(x)\right|^q \\
&+\left(\frac{B(\frac{\beta}{k}+1,\frac{2}{\alpha}) + B(\frac{\beta}{k}+1,\frac{1}{\alpha})}{2\alpha^{\frac{\beta}{k}+1}}\right)\left|f'(y)\right|^q\Bigg)^{\frac{1}{q}}\Bigg\} \qquad (2.2.123)
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir [18].

Teorem 2.2.72 $a < b$ olmak üzere $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $f' \in L[a,b]$ olsun. $|f'|$, $[a,b]$ aralığında konveks bir fonksiyon ise her $x, y \in [a,b]$ için

$$\begin{aligned}
&\Bigg|\frac{f(a+b-x) + f(a+b-y)}{2} - \frac{\alpha^{\frac{\beta}{k}}\Gamma_k(\beta+k)}{2(y-x)^{\alpha\frac{\beta}{k}}} \\
&\times\left\{{}^{\beta}_{k}\mathfrak{J}^{\alpha}_{(a+b-y)^+} f(a+b-x) + {}^{\beta}_{k}\mathfrak{J}^{\alpha}_{(a+b-x)^-} f(a+b-y)\right\}\Bigg| \\
\leq\ & \frac{(y-x)\alpha^{\frac{\beta}{k}}}{2}\Bigg[\Bigg\{\left(\left|f'(a)\right| + \left|f'(b)\right|\right)\frac{B(\frac{1}{\alpha},\frac{\beta}{k}+1)}{\alpha^{\frac{\beta}{k}+1}}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{|f'(x)|}{\alpha^{\frac{\beta}{k}+1}}\left\{B_{\frac{1}{2^\alpha}}\left(\frac{1}{\alpha},\frac{\beta}{k}+1\right)+B\left(\frac{2}{\alpha},\frac{\beta}{k}+1\right)-B\left(\frac{1}{\alpha},\frac{\beta}{k}+1\right)\right\}\\
&-\frac{|f'(y)|}{\alpha^{\frac{\beta}{k}+1}}\left\{B_{\frac{1}{2^\alpha}}\left(\frac{1}{\alpha},\frac{\beta}{k}+1\right)-B\left(\frac{2}{\alpha},\frac{\beta}{k}+1\right)\right\}\Bigg\}\\
&+\Bigg\{\left(\left|f'(a)\right|+\left|f'(b)\right|\right)\frac{B(\frac{1}{\alpha},\frac{\beta}{k}+1)}{\alpha^{\frac{\beta}{k}+1}}\\
&-\frac{|f'(x)|}{\alpha^{\frac{\beta}{k}+1}}\left\{B_{\frac{1}{2^\alpha}}\left(\frac{1}{\alpha},\frac{\beta}{k}+1\right)-B\left(\frac{2}{\alpha},\frac{\beta}{k}+1\right)\right\}\\
&-\frac{|f'(y)|}{\alpha^{\frac{\beta}{k}+1}}\left\{B_{\frac{1}{2^\alpha}}\left(\frac{1}{\alpha},\frac{\beta}{k}+1\right)+B\left(\frac{2}{\alpha},\frac{\beta}{k}+1\right)-B\left(\frac{1}{\alpha},\frac{\beta}{k}+1\right)\right\}\Bigg\}\Bigg] \qquad (2.2.124)
\end{aligned}
$$

eşitsizliği geçerlidir [18].

Teorem 2.2.73 $a<b$ ve $\alpha,\beta>0$ olmak üzere $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $f'\in L[a,b]$ olsun. $q>1$ ve $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ için $|f'|^q$, $[a,b]$ aralığında konveks bir fonksiyon ise her $x,y\in[a,b]$ için

$$
\begin{aligned}
&\Bigg|\frac{2^{\alpha\frac{\beta}{k}-1}\alpha^{\frac{\beta}{k}}\Gamma_k(\beta+k)}{(y-x)^{\alpha\frac{\beta}{k}}}\left\{{}_k^\beta\mathfrak{J}^\alpha_{(a+b-\frac{x+y}{2})^+}f(a+b-x)+{}_k^\beta\mathfrak{J}^\alpha_{(a+b-\frac{x+y}{2})^-}f(a+b-y)\right\}\\
&-f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right)\Bigg|\\
\leq\ &\frac{(y-x)\alpha^{\frac{\beta}{k}}}{2}\Bigg[\Bigg\{\left(\frac{B(\frac{2}{\alpha},\frac{\beta}{k}p+1)}{\alpha^{\frac{\beta}{k}p+1}}\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\times\left(\frac{|f'(a)|^q+|f'(b)|^q}{2}-\left(\frac{5}{12}\left|f'(x)\right|^q+\frac{1}{12}\left|f'(y)\right|^q\right)\right)^{\frac{1}{q}}\\
&+\left(\frac{B(\frac{1}{\alpha},\frac{\beta}{k}p+1)-B(\frac{2}{\alpha},\frac{\beta}{k}p+1)}{\alpha^{\frac{\beta}{k}p+1}}\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\times\left(\frac{|f'(a)|^q+|f'(b)|^q}{2}-\left(\frac{1}{3}\left|f'(x)\right|^q+\frac{1}{6}\left|f'(y)\right|^q\right)\right)^{\frac{1}{q}}\Bigg\}\\
&+\Bigg\{\left(\frac{B(\frac{2}{\alpha},\frac{\beta}{k}p+1)}{\alpha^{\frac{\beta}{k}p+1}}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{|f'(a)|^q+|f'(b)|^q}{2}-\left(\frac{1}{12}\left|b'(x)\right|^q+\frac{5}{12}\left|\tau'(y)\right|^q\right)\right)^{\frac{1}{q}}\\
&+\left(\frac{B(\frac{1}{\alpha},\frac{\beta}{k}p+1)-B(\frac{2}{\alpha},\frac{\beta}{k}p+1)}{\alpha^{\frac{\beta}{k}p+1}}\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\times\left(\frac{|b'(a)|^q+|f'(b)|^q}{2}-\left(\frac{1}{6}\left|f'(x)\right|^q+\frac{1}{3}\left|f'(y)\right|^q\right)\right)^{\frac{1}{q}}\Bigg\}\Bigg] \qquad (2.2.125)
\end{aligned}
$$

eşitsizliği geçerlidir [18].

Teorem 2.2.74 $a<b$ ve $\alpha,\beta>0$ olmak üzere $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $f'\in L[a,b]$ olsun. $q\geq 1$ olmak üzere $|f'|^q$, $[a,b]$ aralığında konveks bir fonksiyon ise her $x, y \in [a,b]$ için

$$\begin{aligned}
&\Bigg|\frac{2^{\alpha\frac{\beta}{k}-1}\alpha^{\frac{\beta}{k}}\Gamma_k(\beta+k)}{(y-x)^{\alpha\frac{\beta}{k}}}\Big\{{}^{\beta}_{k}\mathfrak{J}^{\alpha}_{(a+b-\frac{x+y}{2})^+}f(a+b-x)+{}^{\beta}_{k}\mathfrak{J}^{\alpha}_{(a+b-\frac{x+y}{2})^-}f(a+b-y)\Big\}\\
&-f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right)\Bigg|\\
\leq\;& \frac{(y-x)\alpha^{\frac{\beta}{k}}}{4}\Bigg[\Bigg\{\left(\frac{B(\frac{2}{\alpha},\frac{\beta}{k}+1)}{\alpha^{\frac{\beta}{k}+1}}\right)^{1-\frac{1}{q}}\Bigg(\left(\left|f'(a)\right|^q+\left|f'(b)\right|^q\right)\left(\frac{B(\frac{2}{\alpha},\frac{\beta}{k}+1)}{\alpha^{\frac{\beta}{k}+1}}\right)\\
&-\left(\frac{1}{2\alpha^{\frac{\beta}{k}+1}}\left|f'(x)\right|^q\left(B\left(\frac{2}{\alpha},\frac{\beta}{k}+1\right)+B\left(\frac{3}{\alpha},\frac{\beta}{k}+1\right)\right)\right.\\
&\left.+\frac{1}{2\alpha^{\frac{\beta}{k}+1}}\left|f'(y)\right|^q\left(B\left(\frac{2}{\alpha},\frac{\beta}{k}+1\right)-B\left(\frac{3}{\alpha},\frac{\beta}{k}+1\right)\right)\right)\Bigg)^{\frac{1}{q}}\\
&+\left(\frac{B(\frac{1}{\alpha},\frac{\beta}{k}+1)-B(\frac{2}{\alpha},\frac{\beta}{k}+1)}{\alpha^{\frac{\beta}{k}+1}}\right)^{1-\frac{1}{q}}\\
&\times\Bigg(\left(\left|f'(a)\right|^q+\left|f'(b)\right|^q\right)\left(\frac{B(\frac{1}{\alpha},\frac{\beta}{k}+1)-B(\frac{2}{\alpha},\frac{\beta}{k}+1)}{\alpha^{\frac{\beta}{k}+1}}\right)\\
&-\left(\frac{1}{2\alpha^{\frac{\beta}{k}+1}}\left|f'(x)\right|^q\left(B\left(\frac{1}{\alpha},\frac{\beta}{k}+1\right)-B\left(\frac{3}{\alpha},\frac{\beta}{k}+1\right)\right)\right.\\
&\left.+\frac{1}{2\alpha^{\frac{\beta}{k}+1}}\left|f'(y)\right|^q\left(B\left(\frac{1}{\alpha},\frac{\beta}{k}+1\right)-2B\left(\frac{2}{\alpha},\frac{\beta}{k}+1\right)+B\left(\frac{3}{\alpha},\frac{\beta}{k}+1\right)\right)\right)\Bigg)^{\frac{1}{q}}\Bigg\}\\
&+\Bigg\{\left(\frac{B(\frac{2}{\alpha},\frac{\beta}{k}+1)}{\alpha^{\frac{\beta}{k}+1}}\right)^{1-\frac{1}{q}}\Bigg(\left(\left|f'(a)\right|^q+\left|f'(b)\right|^q\right)\left(\frac{B(\frac{2}{\alpha},\frac{\beta}{k}+1)}{\alpha^{\frac{\beta}{k}+1}}\right)\\
&-\left(\frac{1}{2\alpha^{\frac{\beta}{k}+1}}\left|f'(x)\right|^q\left(B\left(\frac{2}{\alpha},\frac{\beta}{k}+1\right)-B\left(\frac{3}{\alpha},\frac{\beta}{k}+1\right)\right)\right.\\
&\left.+\frac{1}{2\alpha^{\frac{\beta}{k}+1}}\left|f'(y)\right|^q\left(B\left(\frac{2}{\alpha},\frac{\beta}{k}+1\right)+B\left(\frac{3}{\alpha},\frac{\beta}{k}+1\right)\right)\right)\Bigg)^{\frac{1}{q}}\\
&+\left(\frac{B(\frac{1}{\alpha},\frac{\beta}{k}+1)-B(\frac{2}{\alpha},\frac{\beta}{k}+1)}{\alpha^{\frac{\beta}{k}+1}}\right)^{1-\frac{1}{q}}\\
&\times\Bigg(\left(\left|f'(a)\right|^q+\left|f'(b)\right|^q\right)\left(\frac{B(\frac{1}{\alpha},\frac{\beta}{k}+1)-B(\frac{2}{\alpha},\frac{\beta}{k}+1)}{\alpha^{\frac{\beta}{k}+1}}\right)\\
&-\left(\frac{1}{2\alpha^{\frac{\beta}{k}+1}}\left|f'(x)\right|^q\left(B\left(\frac{1}{\alpha},\frac{\beta}{k}+1\right)-2B\left(\frac{2}{\alpha},\frac{\beta}{k}+1\right)+B\left(\frac{3}{\alpha},\frac{\beta}{k}+1\right)\right)\right.\\
&\left.+\frac{1}{2\alpha^{\frac{\beta}{k}+1}}\left|f'(y)\right|^q\left(B\left(\frac{1}{\alpha},\frac{\beta}{k}+1\right)-B\left(\frac{3}{\alpha},\frac{\beta}{k}+1\right)\right)\right)\Bigg)^{\frac{1}{q}}\Bigg\}\Bigg]
\end{aligned}\tag{2.2.126}$$

eşitsizliği geçerlidir [18].

2.2.9 Genelleştirilmiş Orantılı Kesirli İntegraller İçin Hermite-Hadamard-Mercer Tipli Eşitsizlikler

Bu bölümde, konveks fonksiyonlar için genelleştirilmiş orantılı kesirli integral operatörleri içeren Hermite-Hadamard-Mercer tipli eşitsizlikler verilecektir.

Tanım 2.2.12 $f \in L[a,b]$ olsun. $k \in (0,1]$, $\beta \in \mathbb{C}$ ve $\Re(\beta) > 0$ olmak üzere genelleştirilmiş orantılı kesirli integral operatörleri olan $\mathcal{J}_{a^+}^{\beta,k} f$ ve $\mathcal{J}_{b^-}^{\beta,k} f$ sırasıyla,

$$\left(\mathcal{J}_{a^+}^{\beta,k} f\right)(x) = \frac{1}{k^\beta \Gamma(\beta)} \int_a^x \exp\left[\frac{k-1}{k}(x-t)\right](x-t)^{\beta-1} f(t)dt, \qquad x > a \tag{2.2.127}$$

ve

$$\left(\mathcal{J}_{b^-}^{\beta,k} f\right)(x) = \frac{1}{k^\beta \Gamma(\beta)} \int_x^b \exp\left[\frac{k-1}{k}(t-x)\right](t-x)^{\beta-1} f(t)dt, \qquad x > b \tag{2.2.128}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\Gamma(\cdot)$ gama fonksiyonudur [28].

(2.2.127) ve (2.2.128)'da $k = 1$ olarak alınırsa klasik Riemann-Liouville kesirli integrallerine indirgenir.

Seda Kılınç Yıldırım ve Hüseyin Yıldırım, 2020 yılında genelleştirilmiş orantılı kesirli integral operatörleri yardımıyla aşağıdaki sonuçları elde etmişlerdir.

Teorem 2.2.75 f, pozitif sürekli, azalan ve $[a,b]$ aralığında konveks bir fonksiyon olsun. Her $x, y \in [a,b]$, $k \in (0,1]$, $\alpha > 0$ olmak üzere genelleştirilmiş orantılı kesirli integraller için

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{k^\alpha}\left[\frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{k-1}{k}\right)^n \frac{1}{\alpha+n}\right] f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right) \\
\leq\; & \frac{1}{k^\alpha}\left[\frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{k-1}{k}\right)^n \frac{1}{\alpha+n}\right]\left[f(a)+f(b)\right] \\
& - \frac{\Gamma(\alpha)}{2(y-x)^\alpha}\left[\mathcal{J}_{x^+}^{\alpha,k} f(y) + \mathcal{J}_{y^+}^{\alpha,k} f(x)\right] \\
\leq\; & \frac{1}{k^\alpha}\left[\frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{k-1}{k}\right)^n \frac{1}{\alpha+n}\right]\left[f(a)+f(b)-f\Big(\frac{x+y}{2}\Big)\right]
\end{aligned} \tag{2.2.129}$$

ve

$$\frac{1}{k^\alpha}\left[\frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{k-1}{k}\right)^n \frac{1}{\alpha+n}\right] f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \frac{\Gamma(\alpha)}{2(y-x)^{\alpha}}\left[\mathcal{J}^{\alpha,k}_{(a+b-y)^+}f(a+b-x)+\mathcal{J}^{\alpha,k}_{(a+b-x)^-}f(a+b-y)\right] \\
&\leq \frac{1}{k^{\alpha}}\left[\frac{1}{\alpha}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{k-1}{k}\right)^{n}\frac{1}{\alpha+n}\right]\left[\frac{f(a+b-x)+f(a+b-y)}{2}\right] \\
&\leq \frac{1}{k^{\alpha}}\left[\frac{1}{\alpha}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{k-1}{k}\right)^{n}\frac{1}{\alpha+n}\right]\left[f(a)+f(b)-f\Big(\frac{x+y}{2}\Big)\right] \qquad (2.2.130)
\end{aligned}
$$

eşitsizlikleri geçerlidir [34].

Sonuç 2.2.60 Teorem 2.2.75'de $k=1$ ve $\alpha=1$ olarak alınırsa Kian ve Moslehian tarafından [36]'da ispatlanan

$$
\begin{aligned}
f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right) &\leq f(a)+f(b)-\int_0^1 f\big(tx+(1-t)y\big)dt \\
&\leq f(a)+f(b)-f\left(\frac{x+y}{2}\right)
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right) &\leq \frac{1}{y-x}\int_x^y f(a+b-t)dt \\
&\leq f(a)+f(b)-\frac{f(x)+f(y)}{2}
\end{aligned}
$$

eşitsizlikleri elde edilir [34].

Teorem 2.2.76 f, pozitif sürekli, azalan ve $[a,b]$ aralığında konveks bir fonksiyon olsun. Her $x,y\in[a,b]$, $k\in(0,1]$ ve $\alpha>0$ olmak üzere genelleştirilmiş orantılı kesirli integraller için

$$
\begin{aligned}
&\frac{2}{k^{\alpha}}\left[\frac{1}{\alpha}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{k-1}{k}\right)^{n}\frac{1}{\alpha+n}\right]f\Big(a+b-\frac{x+y}{2}\Big) \\
&\leq \frac{2^{\alpha}\Gamma(\alpha)}{(y-x)^{\alpha}}\left[\mathcal{J}^{\alpha,k}_{(a+b-\frac{x+y}{2})^-}f(a+b-y)+\mathcal{J}^{\alpha,k}_{(a+b-\frac{x+y}{2})^+}f(a+b-x)\right] \\
&\leq \frac{2}{k^{\alpha}}\left[\frac{1}{\alpha}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{k-1}{k}\right)^{n}\frac{1}{\alpha+n}\right]\left[f(a)+f(b)-\frac{f(x)+f(y)}{2}\right] \qquad (2.2.131)
\end{aligned}
$$

eşitsizliği geçerlidir [34].

Lemma 2.2.23 $a<b$ olmak üzere f, pozitif sürekli, azalan ve (a,b) aralığında konveks bir fonksiyon ve $f'\in L[a,b]$ olsun. Her $x,y\in[a,b]$, $k\in(0,1]$ ve $\alpha>0$ olmak üzere genelleştirilmiş orantılı kesirli integraller için

$$
\begin{aligned}
& \frac{e^{\frac{k-1}{k}}}{2}\big[f(a+b-x)+f(a+b-y)\big] \\
& -\frac{k^{\alpha-1}(k-1)\Gamma(\alpha)}{2(y-x)^{\alpha+1}}\Big[\mathcal{J}^{\alpha-1,k}_{(a+b-x)^-}f(a+b-y)+\mathcal{J}^{\alpha-1,k}_{(a+b-y)^+}f(a+b-x)\Big] \\
& -\frac{k^{\alpha}\alpha\Gamma(\alpha)}{2(y-x)^{\alpha}}\Big[\mathcal{J}^{\alpha,k}_{(a+b-x)^-}f(a+b-y)+\mathcal{J}^{\alpha,k}_{(a+b-y)^+}f(a+b-x)\Big] \\
= & \frac{y-x}{2}\int_0^1 e^{\frac{k-1}{k}t}t^{\alpha}f'\big(a+b-(tx+(1-t)y)\big)dt \\
& -\frac{y-x}{2}\int_0^1 e^{\frac{k-1}{k}t}(1-t)^{\alpha}f'\big(a+b-(tx+(1-t)y)\big)dt
\end{aligned} \tag{2.2.132}
$$

eşitliği geçerlidir [34].

Sonuç 2.2.35 Lemma 2.2.23'de $k=1$ ve $\alpha=1$ olarak alınırsa Sarıkaya ve Öğülmüş tarafından [50]'de ispatlanan

$$
\begin{aligned}
& \frac{\big[f(a+b-x)+f(a+b-y)\big]}{2}-\frac{1}{y-x}\left[\int_{a+b-y}^{a+b-x}f(u)du\right] \\
= & \frac{y-x}{2}\int_0^1(2t-1)f'\big(a+b-(tx+(1-t)y)\big)dt
\end{aligned} \tag{2.2.133}
$$

eşitliği elde edilir [34].

Sonuç 2.2.61 Lemma 2.2.23'de $k=1$, $\alpha=1$, $x=a$ ve $y=b$ olarak alınırsa Dragomir ve Agarwal tarafından [9]'da ispatlanan

$$
\begin{aligned}
& \frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du \\
= & \frac{b-a}{2}\int_0^1(2t-1)f'\big(a+b-(ta+(1-t)b)\big)dt
\end{aligned} \tag{2.2.134}
$$

eşitliği elde edilir [34].

Sonuç 2.2.62 Lemma 2.2.23'de $k=1$ olarak alınırsa Sarıkaya ve Öğülmüş tarafından [50]'de ispatlanan

$$
\begin{aligned}
& f(a+b-x)+f(a+b-y)-\frac{\alpha\Gamma(\alpha)}{2(y-x)^{\alpha}} \\
& \times\Big[\mathcal{J}^{\alpha}_{(a+b-x)^-}f(a+b-y)+\mathcal{J}^{\alpha}_{(a+b-y)^+}f(a+b-x)\Big] \\
= & \frac{y-x}{2}\int_0^1 t^{\alpha}f'\big(a+b-(tx+(1-t)y)\big)dt \\
& -\frac{y-x}{2}\int_0^1(1-t)^{\alpha}f'\big(a+b-(tx+(1-t)y)\big)dt
\end{aligned}
$$

eşitliği elde edilir [34].

Lemma 2.2.24 $a < b$ olmak üzere f, pozitif sürekli, azalan ve (a, b) aralığında konveks bir fonksiyon ve $f' \in L[a, b]$ olsun. Her $x, y \in [a, b]$, $k \in (0, 1]$ ve $\alpha > 0$ olmak üzere genelleştirilmiş orantılı kesirli integraller için

$$\begin{aligned} & \frac{k^{\alpha-1}2^{\alpha}(k-1)}{(y-x)^{\alpha}}\left[\mathcal{J}^{\alpha-1,k}_{(a+b-\frac{x+y}{2})^+}f(a+b-x)+\mathcal{J}^{\alpha-1,k}_{(a+b-\frac{x+y}{2})^-}f(a+b-y)\right] \\ & +\frac{k^{\alpha}2^{\alpha-1}}{(y-x)^{\alpha}}\left[\mathcal{J}^{\alpha,k}_{(a+b-\frac{x+y}{2})^+}f(a+b-x)+\mathcal{J}^{\alpha,k}_{(a+b-\frac{x+y}{2})^-}f(a+b-y)\right] \\ & -e^{\frac{k-1}{k}}f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right) \\ = \; & \frac{y-x}{4}\int_0^1 e^{\frac{k-1}{k}t}t^{\alpha}\left[f'\left(a+b-\left(\frac{2-t}{2}x+\frac{t}{2}y\right)\right)\right. \\ & \left.-f'\left(a+b-\left(\frac{t}{2}x+\frac{2-t}{2}y\right)\right)\right]dt \end{aligned}$$

eşitliği geçerlidir [34].

Sonuç 2.2.63 Teorem 2.2.75'de $x = a$, $y = b$ ve $k = 1$ olarak alınırsa Sarıkaya tarafından [62]'de ispatlanan Teorem 3 elde edilir [34].

Sonuç 2.2.64 Teorem 2.2.75'de $x = a$, $\alpha = 1$, $y = b$ ve $k = 1$ olarak alınırsa [22]'de Teorem 2.2 elde edilir [34].

Sonuç 2.2.65 Lemma 2.2.24'de $k = 1$ olarak alınırsa Sarıkaya ve Öğülmüş tarafından [50]'de ispatlanan

$$\begin{aligned} & \frac{2^{\alpha-1}}{(y-x)^{\alpha}}\left[\mathcal{J}^{\alpha}_{(a+b-\frac{x+y}{2})^+}f(a+b-x)+\mathcal{J}^{\alpha}_{(a+b-\frac{x+y}{2})^-}f(a+b-y)\right] \\ & -f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right) \\ = \; & \frac{y-x}{4}\int_0^1 t^{\alpha}\left[f'\left(a+b-\left(\frac{2-t}{2}x+\frac{t}{2}y\right)\right)-f'\left(a+b-\left(\frac{t}{2}x+\frac{2-t}{2}y\right)\right)\right]dt \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir [34].

Teorem 2.2.77 $a < b$ olmak üzere f, pozitif sürekli, azalan ve (a, b) aralığında konveks bir fonksiyon olsun. $|f'|$, $[a, b]$ aralığında konveks bir fonksiyon ise her $x, y \in [a, b]$, $k \in (0, 1]$ ve $\alpha > 0$ olmak üzere genelleştirilmiş orantılı kesirli integraller için

$$\left|\frac{e^{\frac{k-1}{k}}}{2}\left[f(a+b-x)+f(a+b-y)\right]\right.$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{k^{\alpha-1}(k-1)\Gamma(\alpha)}{2(y-x)^{\alpha+1}}\Big[\mathcal{J}^{\alpha-1,k}_{(a+b-x)^-}f(a+b-y)+\mathcal{J}^{\alpha-1,k}_{(a+by)^+}f(a+b-x)\Big]\\
&-\frac{k^{\alpha}\alpha\Gamma(\alpha)}{2(y-x)^{\alpha}}\Big[\mathcal{J}^{\alpha,k}_{(a+b-x)^-}f(a+b-y)+\mathcal{J}^{\alpha,k}_{(a+b-y)^+}f(a+b-x)\Big]\Bigg|\\
\leq\ &\left(|f'(a)|+|f'(b)|-\frac{|f'(x)|+|f'(y)|}{2}\right)\\
&\times\left(\frac{1}{\alpha+1}-\frac{\frac{1}{2^{\alpha}}}{\alpha+1}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{k-1}{k}\right)^{n}\frac{1}{n!}\left(\frac{1}{\alpha+n+1}-\frac{\frac{1}{2^{\alpha+n}}}{\alpha+n+1}\right)\right)
\end{aligned}
\tag{2.2.135}
$$

eşitsizliği geçerlidir [34].

Sonuç 2.2.66 Teorem 2.2.75'de $x=a$, $y=b$ ve $k=1$ olarak alınırsa Sarıkaya tarafından [62]'de ispatlanan Teorem 3 elde edilir [34].

Sonuç 2.2.67 Teorem 2.2.75'de $x=a$, $\alpha=1$, $y=b$ ve $k=1$ olarak alınırsa Teorem 2.2.75, [22]'de Teorem 2.2'ye indirgenir [34].

Sonuç 2.2.68 Teorem 2.2.77'de $k=1$ olarak alınırsa Sarıkaya ve Öğülmüş tarafından [50]'de ispatlanan

$$
\begin{aligned}
&\Bigg|f(a+b-x)+f(a+b-y)-\frac{\alpha\Gamma(\alpha)}{2(y-x)^{\alpha}}\\
&\times\Big[\mathcal{J}^{\alpha}_{(a+b-x)^-}f(a+b-y)+\mathcal{J}^{\alpha}_{(a+b-y)^+}f(a+b-x)\Big]\Bigg|\\
\leq\ &\left(|f'(a)|+|f'(b)|-\frac{|f'(x)|+|f'(y)|}{2}\right)
\end{aligned}
$$

eşitsizliği elde edilir [34].

Teorem 2.2.78 $a<b$ olmak üzere f, pozitif sürekli, azalan ve (a,b) aralığında konveks bir fonksiyon olsun. $|f'|$, $[a,b]$ aralığında konveks bir fonksiyon ise her $x,y\in[a,b]$, $k\in(0,1]$ ve $\alpha>0$ olmak üzere genelleştirilmiş orantılı kesirli integraller için

$$
\begin{aligned}
&\Bigg|\frac{k^{\alpha-1}2^{\alpha}(k-1)}{(y-x)^{\alpha}}\Big[\mathcal{J}^{\alpha-1,k}_{(a+b-\frac{x+y}{2})^+}f(a+b-x)+\mathcal{J}^{\alpha-1,k}_{(a+b-\frac{x+y}{2})^-}f(a+b-y)\Big]\\
&+\frac{k^{\alpha}2^{\alpha-1}}{(y-x)^{\alpha}}\Big[\mathcal{J}^{\alpha,k}_{(a+b-\frac{x+y}{2})^+}f(a+b-x)+\mathcal{J}^{\alpha,k}_{(a+b-\frac{x+y}{2})^-}f(a+b-y)\Big]\\
&-e^{\frac{k-1}{k}}f\Big(a+b-\frac{x+y}{2}\Big)\Bigg|\\
\leq\ &\frac{y-x}{2}\left[\frac{1}{\alpha+1}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{k-1}{k}\right)^{n}\frac{1}{\alpha+n+1}\right]\left(|f'(a)|+|f'(b)|-\frac{|f'(x)|+|f'(y)|}{2}\right)
\end{aligned}
$$

eşitsizliği geçerlidir [34].

Sonuç 2.2.69 Teorem 2.2.78'de $k = 1$ olarak alınırsa Sarıkaya ve Öğülmüş tarafından [50]'de ispatlanan

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{2^{\alpha-1}}{(y-x)^{\alpha}}\left[\mathcal{J}^{\alpha}_{\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right)^{+}}f(a+b-x)+\mathcal{J}^{\alpha}_{\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right)^{-}}f(a+b-y)\right]\right. \\
&\left.-f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right)\right| \\
\leq\ &\frac{y-x}{2}\left(|f'(a)|+|f'(b)|-\frac{|f'(x)|+|f'(y)|}{2}\right)
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir [34].

Sonuç 2.2.36 Teorem 2.2.78'de $k = 1$ ve $\alpha = 1$ olarak alınırsa Sarıkaya ve Öğülmüş tarafından [50]'de ispatlanan

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{y-x}\int_{a+b-y}^{a+b-x} f(u)du - f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right)\right| \\
\leq\ &\frac{y-x}{4}\left[|f'(a)|+|f'(b)|-\frac{|f'(x)|+|f'(y)|}{2}\right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir [34].

2.2.10 Atangana-Baleanu Kesirli İntegraller İçin Hermite-Hadamard-Mercer Tipli Eşitsizlikler

Bu bölümde, konveks fonksiyonlar için Atangana-Baleanu kesirli operatörleri içeren Hermite-Hadamard-Mercer tipli eşitsizlikler verilecektir.

Tanım 2.2.13 $b > a$ ve $\alpha \in [0, 1)$ olmak üzere $f \in H^1(0, b)$ olsun. Bu durumda yeni Caputo Fabrizio türevi,

$$^{CF}D^{\alpha}_{s}f(t) = \frac{M(\alpha)}{1-\alpha}\int_a^t f'(s)\exp\left[-\frac{\alpha}{1-\alpha}(t-s)\right]ds \tag{2.2.136}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $M(\alpha)$, normalizasyon fonksiyonudur. Bu durumda, $M(0) = M(1) = 1$ dir [19].

Tanım 2.2.14 (Caputo-Fabrizio Kesirli İntegral Operatörü) $b > a$ ve $\alpha \in [0, 1)$ olmak üzere $f \in H^1(a, b)$ olsun. Bu durumda sol ve sağ taraflı Caputo-Fabrizio kesirli integralleri sırasıyla,

$$\left({}^{CF}_{a}I^{\alpha}\right) f(t) = \frac{1-\alpha}{B(\alpha)}f(t) + \frac{\alpha}{B(\alpha)}\int_a^t f(y)dy$$

ve

$$\left({}^{CF}I_b^{\alpha}\right)f(t)=\frac{1-\alpha}{B(\alpha)}f(t)+\frac{\alpha}{B(\alpha)}\int_t^b f(y)dy$$

şeklinde tanımlanır. Burada $B(\alpha)$ normalizasyon fonksiyonudur [5].

Tanım 2.2.15 (Atangana-Baleanu Kesirli Türevi) $b>a$ ve $\alpha\in[0,1)$ olmak üzere $f\in H^1(a,b)$ olsun. Bu durumda,

$$ {}_a^{ABC}D_t^{\alpha}[f(t)]=\frac{B(\alpha)}{1-\alpha}\int_a^t f'(x)E_{\alpha}\left[-\alpha\frac{(t-x)^{\alpha}}{1-\alpha}\right]dx \tag{2.2.137}$$

şeklinde tanımlanır [10].

Tanım 2.2.16 $b>a$ ve $\alpha\in[0,1)$ olmak üzere $f\in H^1(a,b)$ olsun. Bu durumda Atangana-Baleanu kesirli türev tanımı

$$ {}_a^{ABR}D_t^{\alpha}[f(t)]=\frac{B(\alpha)}{1-\alpha}\frac{d}{dt}\int_a^t f(x)E_{\alpha}\left[-\alpha\frac{(t-x)^{\alpha}}{1-\alpha}\right]dx \tag{2.2.138}$$

şeklindedir [10].

Tanım 2.2.17 (Atangana-Baleanu Kesirli İntegralleri) $f\in H^1(a,b)$ olsun. $a<b$ ve $\alpha\in(0,1]$, $B(0)=1=B(1)$ olmak üzere $B(\alpha)$ normalizasyon fonksiyonu ve $\Gamma(\alpha)$ gama fonksiyonu ise

$$ {}_a^{AB}I_t^{\alpha}\{f(t)\}=\frac{1-\alpha}{B(\alpha)}f(t)+\frac{\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\int_a^t f(y)(t-y)^{\alpha-1}dy$$

şeklinde tanımlanır [10].

Abdeljawad ve Baleanu, integral operatörünün sağ tarafını [4]'de aşağıdaki gibi ifade etmiştir.

Teorem 2.2.79 $f\in H^1(a,b)$ olsun. $a<b$ ve $\alpha\in(0,1]$, $B(0)=1=B(1)$ olmak üzere $B(\alpha)$ normalizasyon fonksiyonu ve $\Gamma(\alpha)$ gama fonksiyonu ise

$$ {}_b^{AB}I_t^{\alpha}\{f(t)\}=\frac{1-\alpha}{B(\alpha)}f(t)+\frac{\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\int_t^b f(y)(y-t)^{\alpha-1}dy$$

olur.

Liu ve arkadaşları, 2020 yılında Atangana-Baleanu kesirli integral operatörleri yardımıyla aşağıdaki sonuçları elde etmişlerdir.

Teorem 2.2.80 $0 \leq a < b$ olmak üzere $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, pozitif konveks bir fonksiyon olsun. Bu durumda her $x, y \in [a,b]$ ve $\alpha \in (0,1]$ için

$$\begin{aligned}
&\frac{2}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right) \\
\leq\ & \frac{1}{(y-x)^{\alpha}} \Big[\Big\{ {}^{AB}_{(a+b-y)}I^{\alpha}_{(a+b-x)} f(a+b-x) + {}^{AB}_{(a+b-x)}I^{\alpha}_{(a+b-y)} f(a+b-y) \Big\} \\
& -\frac{1-\alpha}{B(\alpha)} \big\{ f(a+b-x) + f(a+b-y) \big\} \Big] \\
\leq\ & \frac{1}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} \big(2[f(a)+f(b)] - [f(x)+f(y)]\big) \qquad (2.2.139)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} f\Big(a+b-\frac{x+y}{2}\Big) \\
\leq\ & \frac{1}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} (f(a)+f(b)) - \frac{1}{2(y-x)^{\alpha}} \Big[\Big\{ {}^{AB}_{x}I^{\alpha}_{y} f(y) + {}^{AB}_{y}I^{\alpha}_{x} f(x) \Big\} \\
& -\frac{1-\alpha}{B(\alpha)} \Big\{ f(x) + f(y) \Big\}\Big] \\
\leq\ & \frac{1}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} \Big[f(a) + f(b) - f\Big(\frac{x+y}{2}\Big)\Big] \qquad (2.2.140)
\end{aligned}$$

eşitsizlikleri geçerlidir [41].

Sonuç 2.2.70 Teorem 2.2.80'de $\alpha = 1$ olarak alınırsa Kian ve Moslehian tarafından [36]'da ispatlanan Teorem 2.1 elde edilir [41].

Lemma 2.2.25 $0 \leq a < b$ olmak üzere $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda her $x, y \in [a,b]$ ve $\alpha \in (0,1]$ olmak üzere Atangana-Baleanu kesirli integrali için

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{(y-x)^{\alpha}}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} + \frac{1-\alpha}{B(\alpha)}\right) [f(a+b-x) + f(a+b-y)] \\
&-\Big[{}^{AB}_{(a+b-y)}I^{\alpha}_{(a+b-x)} f(a+b-x) + {}^{AB}_{(a+b-x)}I^{\alpha}_{(a+b-y)} f(a+b-y) \Big] \\
=\ & \frac{(y-x)^{\alpha+1}}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \big(t^{\alpha} - (1-t)^{\alpha}\big) f'\big(a+b-(tx+(1-t)y)\big) dt \qquad (2.2.141)
\end{aligned}$$

eşitliği geçerlidir [41].

Sonuç 2.2.71 Lemma 2.2.25'de $\alpha = 1$, $x = a$ ve $y = b$ olarak alınırsa [22]'de Lemma 2.1 elde edilir [41].

Teorem 2.2.81 $0 \leq a < b$ olmak üzere $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $f' \in L[a,b]$ olsun. $|f'|$, $[a,b]$ aralığında konveks bir fonksiyon ise Atangana-Baleanu kesirli integralleri için

$$
\begin{aligned}
&\Bigg|\left(\frac{(y-x)^{\alpha}}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}+\frac{1-\alpha}{B(\alpha)}\right)[f(a+b-x)+f(a+b-y)] \\
&-\left[{}^{AB}_{(a+b-y)}I^{\alpha}_{(a+b-x)}f(a+b-x)+{}^{AB}_{(a+b-x)}I^{\alpha}_{(a+b-y)}f(a+b-y)\right]\Bigg| \\
\leq\ & \frac{2(y-x)^{\alpha+1}}{(\alpha+1)B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\left(1-\frac{1}{2^{\alpha}}\right)\left\{|f'(a)|+|f'(b)|-\frac{|f'(x)|+|f'(y)|}{2}\right\}
\end{aligned}
$$

eşitsizliği geçerlidir [41].

Teorem 2.2.82 $0 \leq a < b$ olmak üzere $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $f' \in L[a,b]$ olsun. $q > 1$ ve $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ için $|f'|^q$, $[a,b]$ aralığında konveks bir fonksiyon ise bu durumda $x, y \in [a,b]$ olmak üzere Atangana-Baleanu kesirli integralleri için

$$
\begin{aligned}
&\Bigg|\left(\frac{(y-x)^{\alpha}}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}+\frac{1-\alpha}{B(\alpha)}\right)[f(a+b-x)+f(a+b-y)] \\
&-\left[{}^{AB}_{(a+b-y)}I^{\alpha}_{(a+b-x)}f(a+b-x)+{}^{AB}_{(a+b-x)}I^{\alpha}_{(a+b-y)}f(a+b-y)\right]\Bigg| \\
\leq\ & \frac{(y-x)^{\alpha+1}}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\left(\frac{2-2^{1-\alpha}}{\alpha p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left\{|f'(a)|^q+|f'(b)|^q-\frac{|f'(x)|^q+|f'(y)|^q}{2}\right\}^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}
\tag{2.2.142}
$$

eşitsizliği geçerlidir [41].

Lemma 2.2.26 $0 \leq a < b$ olmak üzere $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, (a,b) aralığında diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. $f'' \in L[a,b]$ ise her $x, y \in [a,b]$, $\alpha \in (0,1]$ ve $t \in [0,1]$ için

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{(y-x)^{\alpha}}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}+\frac{1-\alpha}{B(\alpha)}\right)[f(a+b-x)+f(a+b-y)] \\
&-\left[{}^{AB}_{(a+b-y)}I^{\alpha}_{(a+b-x)}f(a+b-x)+{}^{AB}_{(a+b-x)}I^{\alpha}_{(a+b-y)}f(a+b-y)\right] \\
=\ & \frac{\alpha(y-x)^{\alpha+2}}{B(\alpha)\Gamma(\alpha+2)}\Bigg[\int_0^1[1-t^{\alpha+1}]f''\Big(a+b-(tx+(1-t)y)\Big)dt \\
&-\int_0^1 t^{\alpha+1}f''\Big(a+b-\big((1-t)x+ty\big)\Big)dt\Bigg]
\end{aligned}
\tag{2.2.143}
$$

eşitliği geçerlidir [41].

Teorem 2.2.83 $0 \leq a < b$ olmak üzere f, $[a,b]$ aralığında iki kez diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. $f'' \in L[a,b]$ olmak üzere $|f''|$ konveks ise bu durumda her $x, y \in [a,b]$,

$\alpha \in (0,1]$ ve $t \in [0,1]$ için

$$\begin{aligned} &\Bigg|\left(\frac{(y-x)^{\alpha}}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}+\frac{1-\alpha}{B(\alpha)}\right)[f(a+b-x)+f(a+b-y)] \qquad (2.2.144)\\ &-\Big[{}^{AB}_{(a+b-y)}I^{\alpha}_{(a+b-x)}f(a+b-x)+{}^{AB}_{(a+b-x)}I^{\alpha}_{(a+b-y)}f(a+b-y)\Big]\Bigg| \\ \leq\ & \frac{\alpha(y-x)^{\alpha+2}}{B(\alpha)\Gamma(\alpha+2)}\Bigg[\left\{\left(|f''(a)|+|f''(b)|\right)\frac{1}{(\alpha+2)}-\left(\frac{|f''(x)|}{(\alpha+2)(\alpha+3)}+\frac{|f''(y)|}{(\alpha+3)}\right)\right\} \\ &+\left\{\left(|f''(a)|+|f''(b)|\right)\frac{\alpha+1}{\alpha+2}-\left(\frac{\alpha+1}{2(\alpha+3)}|f''(x)|+\frac{(\alpha+1)(\alpha+4)}{2(\alpha+2)(\alpha+3)}|f''(y)|\right)\right\}\Bigg] \end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $\Gamma(\cdot)$ gama fonksiyonudur [41].

Sonuç 2.2.37 Teorem 2.2.83'de $\alpha = 1$ olarak alınırsa

$$\begin{aligned} &\left|\frac{f(a+b-x)+f(a+b-y)}{2}-\frac{1}{y-x}\int_{a+b-y}^{a+b-x}f(u)du\right| \\ \leq\ & \frac{(y-x)^2}{4}\left[\left(|f''(a)|+|f''(b)|\right)-\left(\frac{1}{3}|f''(x)|+\frac{2}{3}|f''(y)|\right)\right] \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir [41].

Teorem 2.2.84 $0 \leq a < b$ olmak üzere f, $[a,b]$ aralığında iki kez diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. $f'' \in L[a,b]$ olmak üzere $q > 1$ ve $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$ için $|f''|^q$, konveks ise her $x, y \in [a,b]$, $t \in [0,1]$ ve $\alpha \in (0,1]$ için

$$\begin{aligned} &\Bigg|\left(\frac{(y-x)^{\alpha}}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}+\frac{1-\alpha}{B(\alpha)}\right)[f(a+b-x)+f(a+b-y)] \\ &-\Big[{}^{AB}_{(a+b-y)}I^{\alpha}_{(a+b-x)}f(a+b-x)+{}^{AB}_{(a+b-x)}I^{\alpha}_{(a+b-y)}f(a+b-y)\Big]\Bigg| \\ \leq\ & \frac{\alpha(y-x)^{\alpha+2}}{B(\alpha)\Gamma(\alpha+2)}\Bigg[\left(\frac{1}{(\alpha+1)p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(|f''(a)|^q+|f''(b)|^q-\left(\frac{|f''(x)|^q+|f''(y)|^q}{2}\right)\right)^{\frac{1}{q}} \\ &+\left(\frac{(\alpha+1)p}{(\alpha+1)p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(|f''(a)|^q+|f''(b)|^q-\left(\frac{|f''(x)|^q+|f''(y)|^q}{2}\right)\right)^{\frac{1}{q}}\Bigg] \qquad (2.2.145) \end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $\Gamma(\cdot)$ gama fonksiyonudur [41].

Sonuç 2.2.38 Teorem 2.2.84'de $\alpha = 1$ olarak alınırsa

$$\begin{aligned} &\left|\frac{f(a+b-x)+f(a+b-y)}{2}-\frac{1}{y-x}\int_{a+b-y}^{a+b-x}f(u)du\right| \\ \leq\ & \frac{(y-x)^2}{4}\Bigg[\left(\frac{1}{2p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(|f''(a)|^q+|f''(b)|^q-\left(\frac{|f''(x)|^q+|f''(y)|^q}{2}\right)\right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

$$+\left(\frac{2p}{2p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(|f''(a)|^q+|f''(b)|^q-\left(\frac{|f''(x)|^q+|f''(y)|^q}{2}\right)\right)^{\frac{1}{q}}\Bigg]$$

eşitsizliği elde edilir [41].

2.2.11 Genelleştirilmiş Kesirli İntegraller İçin Hermite-Hadamard-Mercer Tipli Eşitsizlikler

Bu bölümde, konveks fonksiyonlar için genelleştirilmiş kesirli integral operatörleri içeren Hermite-Hadamard-Mercer tipli eşitsizlikler verilecektir.

Tanım 2.2.18 $f \in L[a,b]$ olsun. Ayrıca $h : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ ve

$$\int_0^1 \frac{h(t)}{t}dt < +\infty$$

şartını sağlayan bir fonksiyon olsun. Bu durumda $\alpha \geq 0$ ile tanımlanan sol ve sağ taraflı genelleştirilmiş kesirli integralleri ${}_h^{GRL}I_{a^+}$ ve ${}_h^{GRL}I_{b^-}$ sırasıyla,

$${}_h^{GRL}I_{a^+}f(x) = \int_a^x \frac{h(x-t)}{x-t}f(t)dt, \qquad a < x \tag{2.2.146}$$

$${}_h^{GRL}I_{b^-}f(x) = \int_x^b \frac{h(t-x)}{t-x}f(t)dt, \qquad x < b \tag{2.2.147}$$

şeklinde tanımlanır [60].

Sonuç 2.2.72 Tanım 2.2.1'den kesirli hesabın bilinen bazı tanımları özel durumlar olarak elde edilebilir [60]. Yani,

i) $h(t) = \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha)}$ ise Tanım 2.2.18, Tanım 2.2.1'de ifade edilen Riemann-Liouville kesirli integraline indirgenir.

ii) $h(t) = \frac{t^{\frac{\alpha}{k}}}{k\Gamma_k}(\alpha)$ ise genelleştirilmiş kesirli integraller, k-Riemann-Liouville kesirli integrallerine indirgenir [61].

iii) $h(t) = \frac{t}{\alpha}\exp\left(-\frac{1-\alpha}{\alpha}t\right)$ ise genelleştirilmiş kesirli integraller, üstel çekirdekli kesirli integrallere indirgenir [2].

iv) $h(t) = t(y-t)^{\alpha-1}$ ise genelleştirilmiş kesirli integraller, uyumlu kesirli integrallere indirgenir [1].

Miguel Vivas-Cortez ve arkadaşları, 2021 yılında genelleştirilmiş kesirli integral operatörleri yardımıyla aşağıdaki sonuçları elde etmişlerdir.

Bu bölüm boyunca, aşağıdaki gösterim dikkate alınacaktır.
$\Lambda(t) := \int_0^t \frac{h((y-x)-u)}{u}du$ ve $\Lambda(t) := \int_0^t \frac{h((\frac{y-x}{2})-u)}{u}du < +\infty$

Teorem 2.2.85 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ konveks bir fonksiyon olmak üzere genelleştirilmiş Riemann Liouville kesirli integralleri için

$$\begin{aligned} f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right) &\leq f(a)+f(b)-\frac{1}{2\Lambda(1)}\left[{}_{h}^{GRL}I_{x^+}f(y)+{}_{h}^{GRL}I_{y^-}f(x)\right] \\ &\leq f(a)+f(b)-f\left(\frac{x+y}{2}\right) \end{aligned} \tag{2.2.148}$$

ve

$$\begin{aligned} f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right) &\leq \frac{1}{2\Lambda(1)}\left[{}_{h}^{GRL}I_{(a+b-y)^+}f(a+b-x)+{}_{h}^{GRL}I_{(a+b-x)^-}f(a+b-y)\right] \\ &\leq \frac{f(a+b-x)+f(a+b-y)}{2} \\ &\leq f(a)+f(b)-\frac{f(x)+f(y)}{2} \end{aligned} \tag{2.2.149}$$

eşitsizlikleri geçerlidir [68].

Sonuç 2.2.73 Teorem 2.2.85'in şartları sağlanmış olsun . Bu durumda

i) $h(t)=t$ ise Teorem 2.2.85, [36]'da Teorem 2.1'e indirgenir.

ii) $h(t)=\frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha)}$ ise Teorem 2.2.85, [50]'de Teorem 2.1'e indirgenir.

iii) (2.2.149)'de $h(t)=t$, $x=a$ ve $y=b$ olarak alınırsa (2.2.149), Hermite-Hadamard eşitsizliğine indirgenir.

iv) $h(t)=\frac{t^{\frac{\alpha}{k}}}{k\Gamma_k(\alpha)}$ ise

$$\begin{aligned} & f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right) \\ \leq\ & \frac{\Gamma_k(\alpha+k)}{2(y-x)^{\frac{\alpha}{k}}}\left[{}_{h}^{RL}I_{(a+b-y)^+,k}f(a+b-x)+{}_{h}^{RL}I_{(a+b-x)^-,k}f(a+b-y)\right] \\ \leq\ & \frac{f(a+b-x)+f(a+b-y)}{2} \\ \leq\ & f(a)+f(b)-\frac{f(x)+f(y)}{2} \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

v) (2.2.149)'de $h(t) = \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha)}$, $x = a$ ve $y = b$ olarak alınırsa [62]'de üretilen

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(y-x)^\alpha}\left[{}_{h}^{RL}I_{a^+}f(b) + {}_{h}^{RL}I_{b^-}^{\alpha}f(a)\right] \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

eşitsizliği elde edilir.

vi) (2.2.149)'de $h(t) = \frac{t^{\frac{\alpha}{k}}}{k\Gamma_k(\alpha)}$, $x = a$ ve $y = b$ olarak alınırsa [25]'de üretilen

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{\Gamma_k(\alpha+k)}{2(b-a)^{\frac{\alpha}{k}}}\left[{}_{h}^{RL}I_{a^+,k}f(b) + {}^{RL}I_{b^-,k}^{\alpha}f(a)\right] \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

eşitsizliği elde edilir.

vii) $x = a$ ve $y = b$ olarak alınırsa (2.2.148),

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a+b}{2}\right) &\leq f(a)+f(b) - \frac{1}{2\Lambda(1)}\left[{}_{h}^{GRL}I_{a+}f(y) + {}_{h}^{GRL}I_{b-}f(x)\right] \\ &\leq f(a)+f(b) - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \end{aligned}$$

eşitsizliğine indirgenir.

viii) $x = a$ ve $y = b$ olarak alınırsa (2.2.149), [60]'da Teorem 5'e indirgenir [68].

Sonuç 2.2.39 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ konveks bir fonksiyon olmak üzere uyumlu kesirli integraller için

$$\begin{aligned} f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right) &\leq f(a)+f(b) - \frac{\alpha}{2(y^\alpha - x^\alpha)}\int_x^y f(t)d_\alpha t \\ &\leq f(a)+f(b) - f\left(\frac{x+y}{2}\right) \end{aligned} \tag{2.2.150}$$

ve

$$\begin{aligned} f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right) &\leq \frac{\alpha}{(y^\alpha - x^\alpha)}\int_{a+b-y}^{a+b-x} f(t)d_\alpha t \\ &\leq \frac{f(a+b-x)+f(a+b-y)}{2} \\ &\leq f(a)+f(b) - \frac{f(x)+f(y)}{2} \end{aligned} \tag{2.2.151}$$

eşitsizlikleri elde edilir [68].

Sonuç 2.2.74 (2.2.151)'de $x = a$ ve $y = b$ olarak alınırsa Adil Khan ve arkadaşları tarafından [33]'de ispatlanan

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{\alpha}{(b^\alpha - a^\alpha)} \int_a^b f(t) d_\alpha t \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

eşitsizliği elde edilir [68].

Sonuç 2.2.40 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ konveks bir fonksiyon olmak üzere üstel çekirdeğe sahip kesirli integraller için

$$\begin{aligned} f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right) &\leq f(a)+f(b) - \frac{\alpha-1}{2\left[\exp\left(-\frac{1-\alpha}{\alpha}(y-x)\right)-1\right]} \\ &\quad \times \left[{}^{\exp}I^\alpha_{x^+} f(y) + {}^{\exp}I^\alpha_{y^-} f(x)\right] \\ &\leq f(a)+f(b) - f\left(\frac{x+y}{2}\right) \end{aligned} \tag{2.2.152}$$

ve

$$\begin{aligned} f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right) &\leq \frac{\alpha-1}{2\left[\exp\left(-\frac{1-\alpha}{\alpha}(y-x)\right)-1\right]} \\ &\quad \times \left[{}^{\exp}I^\alpha_{(a+b-y)^+} f(a+b-x) + {}^{\exp}I^\alpha_{(a+b-x)^-} f(a+b-y)\right] \\ &\leq \frac{f(a+b-x)+f(a+b-y)}{2} \\ &\leq f(a)+f(b) - \frac{f(x)+f(y)}{2} \end{aligned} \tag{2.2.153}$$

eşitsizlikleri elde edilir [68].

Sonuç 2.2.75 (2.2.153)'de $x = a$ ve $y = b$ olarak alınırsa üstel çekirdeğe sahip kesirli integraller için Ahmad ve arkadaşları tarafından [7]'de türetilen

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{\alpha-1}{2\left[\exp\left(-\frac{1-\alpha}{\alpha}(b-a)\right)-1\right]} \left[{}^{\exp}I^\alpha_{a^+} f(b) + {}^{\exp}I^\alpha_{b^-} f(a)\right] \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

eşitsizliği elde edilir [68].

Teorem 2.2.86 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ konveks bir fonksiyon olmak üzere genelleştirilmiş Riemann-Liouville kesirli integralleri için

$$\begin{aligned} f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right) &\leq \frac{1}{2\Lambda(1)} \left[{}^{GRL}_{h}I_{(a+b-\frac{x+y}{2})^-} f(a+b-y) + {}^{GRL}_{h}I_{(a+b-\frac{x+y}{2})^+} f(a+b-x)\right] \\ &\leq f(a)+f(b) - \frac{f(x)+f(y)}{2} \end{aligned} \tag{2.2.154}$$

eşitsizliği geçerlidir [68].

Sonuç 2.2.76 Teorem 2.2.86'nın şartları sağlanmış olsun . Bu durumda

i) $h(t) = t$ ise (2.2.154), [36]'da Teorem 2.1 elde edilir.

ii) $h(t) = t$, $x = a$ ve $y = b$ olarak alınırsa (2.2.154), Hermite-Hadamard eşitsizliğine indirgenir.

iii) $h(t) = \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha)}$ ise Teorem 2.2.86, [50]'de Teorem 3'e indirgenir.

iv) $h(t) = \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha)}$, $x = a$ ve $y = b$ olarak alınırsa Teorem 2.2.86, [63]'de Teorem 4'e indirgenir.

v) $h(t) = \frac{t^{\frac{\alpha}{k}}}{k\Gamma_k(\alpha)}$ ise

$$\begin{aligned} f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right) &\leq \frac{2^{\frac{\alpha}{k}-1}\Gamma_k(\alpha+k)}{(y-x)^{\frac{\alpha}{k}}} \\ &\quad \times \left[{}^{RL}_{h}I_{(a+b-\frac{x+y}{2})^-,k} f(a+b-y) + {}^{RL}_{h}I_{(a+b-\frac{x+y}{2})^+,k} f(a+b-x)\right] \\ &\leq f(a)+f(b)-\frac{f(x)+f(y)}{2} \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

vi) $h(t) = \frac{t^{\frac{\alpha}{k}}}{k\Gamma_k(\alpha)}$, $x = a$ ve $y = b$ olarak alınırsa Teorem 2.2.86, [25]'de Teorem 1.1'e indirgenir.

vii) $x = a$ ve $y = b$ olarak alınırsa Teorem 2.2.86'dan

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a+b}{2}\right) &\leq \frac{1}{2\Lambda(1)}\left[{}^{GRL}_{h}I_{(\frac{a+b}{2})^-} f(a) + {}^{GRL}_{h}I_{(\frac{a+b}{2})^+} f(b)\right] \\ &\leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir [68].

Sonuç 2.2.41 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ konveks bir fonksiyon olmak üzere uyumlu kesirli integraller için

$$f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{\alpha}{\left[y^\alpha - \left(\frac{x+y}{2}\right)^\alpha\right]} \int_{a+b-y}^{a+b-x} f(t)d_\alpha t \leq f(a)+f(b)-\frac{f(x)+f(y)}{2} \quad (2.2.155)$$

eşitsizliği elde edilir [68].

Sonuç 2.2.77 (2.2.155)'da $x = a$ ve $y = b$ olarak alınırsa

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{\alpha}{\left[b^{\alpha} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^{\alpha}\right]} \int_a^b f(t) d_{\alpha} t \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

eşitsizliği elde edilir [68].

Sonuç 2.2.42 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ konveks bir fonksiyon olmak üzere üstel çekirdeğe sahip kesirli integraller için

$$\begin{aligned} f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right) &\leq \frac{\alpha - 1}{2\left[\exp\left(-\frac{1-\alpha}{\alpha}\frac{(y-x)}{2}\right) - 1\right]} \\ &\quad \times \left[{}^{\exp}I^{\alpha}_{(a+b-\frac{x+y}{2})^-} f(a+b-y) + {}^{\exp}I^{\alpha}_{(a+b-\frac{x+y}{2})^+} f(a+b-x)\right] \\ &\leq f(a) + f(b) - \frac{f(x)+f(y)}{2} \end{aligned} \tag{2.2.156}$$

eşitsizliği elde edilir [68].

Sonuç 2.2.78 (2.2.156)'da $x = a$ ve $y = b$ olarak alınırsa

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a+b}{2}\right) &\leq \frac{\alpha - 1}{2\left[\exp\left(-\frac{1-\alpha}{\alpha}\frac{(b-a)}{2}\right) - 1\right]} \left[{}^{\exp}I^{\alpha}_{(\frac{a+b}{2})^-} f(a) + {}^{\exp}I^{\alpha}_{(\frac{a+b}{2})^+} f(b)\right] \\ &\leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \end{aligned} \tag{2.2.157}$$

eşitsizliği elde edilir [68].

Lemma 2.2.27 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, (a, b) aralığında diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $f' \in L[a, b]$ olsun. Bu durumda genelleştirilmiş Riemann-Liouville kesirli integralleri için

$$\begin{aligned} & \frac{f(a+b-y) + f(a+b-x)}{2} - \frac{1}{2\Lambda(1)} \\ & \times \left[{}^{GRL}_{h}I_{(a+b-y)^+} f(a+b-x) + {}^{GRL}_{h}I_{(a+b-x)^-} f(a+b-y)\right] \qquad (2.2.158) \\ = & \frac{y-x}{2\Lambda(1)} \int_0^1 [\Lambda(t) - \Lambda(1-t)] f'(a+b-(tx+(1-t)y)) dt \\ = & \frac{y-x}{2\Lambda(1)} \int_0^1 \Lambda(t) \left[f'(a+b-(tx+(1-t)y)) - f'(a+b-(ty+(1-t)x))\right] dt \end{aligned}$$

eşitliği geçerlidir [68].

Sonuç 2.2.79 Lemma 2.2.27'nin şartları sağlanmış olsun. Bu durumda,

i) $h(t) = t$ ise Lemma 2.2.27, [50]'de Sonuç 1'e indirgenir.

ii) $h(t) = \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha)}$ ise Lemma 2.2.27, [50]'de Lemma 1'e indirgenir.

iii) $h(t) = \frac{t^{\frac{\alpha}{k}}}{k\Gamma_k(\alpha)}$ ise

$$\begin{aligned}
& \frac{f(a+b-x)+f(a+b-y)}{2} - \frac{\Gamma_k(\alpha+k)}{2(y-x)^{\frac{\alpha}{k}}} \\
& \times \left[{}_h^{RL}I_{(a+b-y)^+,k} f(a+b-x) + {}_h^{RL}I_{(a+b-x)^-,k} f(a+b-y)\right] \\
= & \frac{y-x}{2}\int_0^1 \left[t^{\frac{\alpha}{k}} - (1-t)^{\frac{\alpha}{k}}\right] f'\big(a+b-(tx+(1-t)y)\big)dt \qquad (2.2.159)
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

iv) $x = a$ ve $y = b$ olarak alınırsa Lemma 2.2.27, [22]'de Lemma 2.1'e indirgenir [68].

Sonuç 2.2.43 Lemma 2.2.27'nin şartları sağlanmış olsun, bu durumda uyumlu kesirli integraller için

$$\begin{aligned}
& \frac{f(a+b-y)+f(a+b-x)}{2} - \frac{\alpha}{y^\alpha - x^\alpha}\int_{a+b-y}^{a+b-x} f(t)d_v t \qquad (2.2.160) \\
= & \frac{y-x}{2\Lambda_1(1)}\int_0^1 [\Lambda_1(t) - \Lambda_1(1-t)] f'(a+b-(tx+(1-t)y))dt \\
= & \frac{y-x}{2\Lambda_1(1)}\int_0^1 \Lambda_1(t)[f'(a+b-(tx+(1-t)y)) - f'(a+b-(ty+(1-t)x))]dt
\end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Burada,

$$\Lambda_1(t) = \frac{y^\alpha - (tx+(1-t)y)^\alpha}{\alpha}$$

şeklindedir [68].

Sonuç 2.2.80 (2.2.160)'da $x = a$ ve $y = b$ olarak alınırsa

$$\begin{aligned}
& \frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{\alpha}{(b^\alpha - a^\alpha)}\int_a^b f(t)d_\alpha t \\
= & \frac{b-a}{2\Lambda_2(1)}\int_0^1 [\Lambda_2(t) - \Lambda_2(1-t)] f'(tb+(1-t)a)dt \\
= & \frac{b-a}{2\Lambda_2(1)}\int_0^1 \Lambda_2(t)[f'(tb+(1-t)a) - f'(ta+(1-t)b)]dt
\end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Burada,

$$\Lambda_2(t) = \frac{y^\alpha - (ta+(1-t)b)^\alpha}{\alpha}$$

şeklindedir [68].

Sonuç 2.2.44 Lemma 2.2.27'nin şartları sağlanmış olsun. Bu durumda üstel çekirdeğe sahip kesirli integraller için

$$\begin{aligned}
&\frac{f(a+b-y)+f(a+b-x)}{2}-\frac{\alpha-1}{2\left[\exp\left(-\frac{1-\alpha}{\alpha}(y-x)\right)-1\right]} \\
&\times\left[{}^{\exp}I^{\alpha}_{(a+b-y)^+}f(a+b-x)+{}^{\exp}I^{\alpha}_{(a+b-x)^-}f(a+b-y)\right] \\
=\;&\frac{y-x}{2\Lambda_3(1)}\int_0^1[\Lambda_3(t)-\Lambda_3(1-t)]f'(a+b-(tx+(1-t)y))dt \\
=\;&\frac{y-x}{2\Lambda_3(1)}\int_0^1\Lambda_3(t)[f'(a+b-(tx+(1-t)y))-f'(a+b-(ty+(1-t)x))]dt
\end{aligned}\tag{2.2.161}$$

eşitliği elde edilir. Burada,

$$\Lambda_3(t)=\frac{\exp\left(-\frac{1-\alpha}{\alpha}(y-x)t\right)-1}{\alpha-1}$$

şeklindedir [68].

Sonuç 2.2.81 (2.2.161)'de $x=a$ ve $y=b$ olarak alınırsa

$$\begin{aligned}
&\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{\alpha-1}{2\left[\exp\left(-\frac{1-\alpha}{\alpha}(b-a)\right)-1\right]}\left[{}^{\exp}I^{\alpha}_{a^+}f(b)+{}^{\exp}I^{\alpha}_{b^-}f(a)\right] \\
=\;&\frac{b-a}{2\Lambda_4(1)}\int_0^1[\Lambda_4(t)-\Lambda_4(1-t)]f'(ta+(1-t)b)dt \\
=\;&\frac{b-a}{2\Lambda_4(1)}\int_0^1\Lambda_4(t)[f'(tb+(1-t)a)-f'(ta+(1-t)b)]dt
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada,

$$\Lambda_4(t)=\frac{\exp\left(-\frac{1-\alpha}{\alpha}(b-a)t\right)-1}{\alpha-1}$$

şeklindedir [68].

Lemma 2.2.28 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, (a,b) aralığında diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $f'\in L[a,b]$ olsun. Bu durumda genelleştirilmiş Riemann-Liouville kesirli integralleri için

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\Lambda(1)}\left[{}^{GRL}_{h}I_{(a+b-\frac{x+y}{2})^+}f(a+b-x)+{}^{GRL}_{h}I_{(a+b-\frac{x+y}{2})^-}f(a+b-y)\right] \\
&-f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right) \\
=\;&\frac{y-x}{4\Lambda(1)}\int_0^1\Lambda(t)\left[f'\left(a+b-\left(\frac{2-t}{2}x+\frac{t}{2}y\right)\right)\right. \\
&\left.-f'\left(a+b-\left(\frac{t}{2}x+\frac{2-t}{2}y\right)\right)\right]dt
\end{aligned}\tag{2.2.162}$$

eşitliği elde edilir [68].

Sonuç 2.2.82 Lemma 2.2.28'in şartları sağlanmış olsun. Bu durumda

i) $h(t) = \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha)}$ ise Lemma 2.2.28, [50]'de Lemma 2'ye indirgenir.

ii) $h(t) = \frac{t^{\frac{\alpha}{k}}}{k\Gamma_k(\alpha)}$ ise

$$\begin{aligned}
&\frac{2^{\frac{\alpha}{k}-1}\Gamma_k(\alpha+k)}{(y-x)^{\frac{\alpha}{k}}}\left[{}_{h}^{RL}I_{(a+b-\frac{x+y}{2})-,k}f(a+b-y) + {}_{h}^{RL}I_{(a+b-\frac{x+y}{2})+,k}f(a+b-x)\right] \\
&-f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right) \\
= \;& \frac{y-x}{4}\int_0^1 t^{\frac{\alpha}{k}}\left[f'\left(a+b-\left(\frac{2-t}{2}x+\frac{t}{2}y\right)\right)\right. \\
&\left.-f'\left(a+b-\left(\frac{t}{2}x+\frac{2-t}{2}y\right)\right)\right]dt
\end{aligned} \tag{2.2.163}$$

eşitliği elde edilir.

iii) $x = a$ ve $y = b$ olarak alınırsa,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\Lambda(1)}\left[{}_{h}^{GRL}I_{(\frac{a+b}{2})-}f(a) + {}_{h}^{GRL}I_{(\frac{a+b}{2})+}f(b)\right] - f\Big(\frac{a+b}{2}\Big) \\
= \;& \frac{b-a}{4\Lambda(1)}\int_0^1 \Lambda(t)\left[f'\left(\frac{t}{2}a+\frac{2-t}{2}b\right) - f'\left(\frac{2-t}{2}a+\frac{t}{2}b\right)\right]dt
\end{aligned} \tag{2.2.164}$$

eşitliği elde edilir. [68]

Sonuç 2.2.45 Lemma 2.2.28'in şartları sağlanmış olsun. Bu durumda uyumlu kesirli integraller için

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha}{\left[y^\alpha - (\frac{x+y}{2})^\alpha\right]}\int_{a+b-y}^{a+b-x} f(t)d_\alpha t \;=\; & \frac{y-x}{4\Lambda_1(1)}\int_0^1 \Lambda_1(t)\Big[f'\Big(a+b-\Big(\frac{2-t}{2}x+\frac{t}{2}y\Big)\Big) \\
&-f'\Big(a+b-\Big(\frac{t}{2}x+\frac{2-t}{2}y\Big)\Big)\Big]dt
\end{aligned} \tag{2.2.165}$$

eşitliği elde edilir. Burada,

$$\Lambda_1(t) = \frac{y^\alpha - \big(y - (\frac{y-x}{2})t\big)^\alpha}{\alpha}$$

şeklindedir [68].

Sonuç 2.2.83 (2.2.165)'de $x = a$ ve $y = b$ olarak alınırsa

$$\begin{aligned}
&\frac{\alpha}{\left[b^{\alpha} - (\frac{b+a}{2})^{\alpha}\right]} \int_a^b f(t) d_{\alpha} t \\
= \;& \frac{b-a}{4\Lambda_2(1)} \int_0^1 \Lambda_2(t) \left[f'\left(\frac{2-t}{2} b + \frac{t}{2} a\right) - f'\left(\frac{t}{2} b + \frac{2-t}{2} a\right)\right] dt
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada,

$$\Lambda_2(t) = \frac{b^{\alpha} - \left(b - \left(\frac{b-a}{2}\right) t\right)^{\alpha}}{\alpha}$$

şeklindedir [68].

Sonuç 2.2.46 Lemma 2.2.28'in şartları sağlanmış olsun. Bu durumda üstel çekirdeğe sahip kesirli integraller için

$$\begin{aligned}
&\frac{\alpha - 1}{2\left[\exp\left(-\frac{1-\alpha}{\alpha} \frac{(y-x)}{2}\right) - 1\right]} \left[{}^{\exp}I^{\alpha}_{(a+b-\frac{x+y}{2})^+} f(a+b-x) + {}^{\exp}I_{(a+b-\frac{x+y}{2})^-} f(a+b-y)\right] \\
&- f\left(a + b - \frac{x+y}{2}\right) \\
= \;& \frac{y-x}{4\Lambda_3(1)} \int_0^1 \Lambda_3(t) \\
&\times \left[f'\left(a + b - \left(\frac{2-t}{2} x + \frac{t}{2} y\right)\right) - f'\left(a + b - \left(\frac{t}{2} x + \frac{2-t}{2} y\right)\right)\right] dt \qquad (2.2.166)
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada,

$$\Lambda_3(t) = \frac{\exp\left(-\frac{1-\alpha}{\alpha} \frac{(y-x)t}{2}\right) - 1}{\alpha - 1}$$

şeklindedir [68].

Sonuç 2.2.84 (2.2.166)'da $x = a$ ve $y = b$ olarak alınırsa

$$\begin{aligned}
&\frac{\alpha - 1}{2\left[\exp\left(-\frac{1-\alpha}{\alpha} \frac{(b-a)}{2}\right) - 1\right]} \left[{}^{\exp}I^{\alpha}_{(\frac{a+b}{2})^+} f(b) + {}^{\exp}I^{\alpha}_{(\frac{a+b}{2})^-} f(a)\right] - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \\
= \;& \frac{b-a}{4\Lambda_4(1)} \int_0^1 \Lambda_4(t) \left[f'\left(\frac{2-t}{2} b + \frac{t}{2} a\right) - f'\left(\frac{t}{2} b + \frac{2-t}{2} a\right)\right] dt
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada,

$$\Lambda_4(t) = \frac{\exp\left(-\frac{1-\alpha}{\alpha} \frac{(b-a)t}{2}\right) - 1}{\alpha - 1}$$

şeklindedir [68].

Teorem 2.2.87 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, (a, b) aralığında diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $|f'|$, $[a, b]$ aralığında konveks bir fonksiyon olsun. Bu durumda genelleştirilmiş Riemann-

Liouville kesirli integralleri için

$$\begin{aligned}\left|{}_{h}^{GRL}\mathcal{F}(a,b;x,y)\right| &\leq \frac{y-x}{2\Lambda(1)}\left[[|f'(a)|+|f'(b)|]\int_0^1 |\Lambda(t)-\Lambda(1-t)|dt\right.\\ &\left.-[|f'(x)|+|f'(y)|]\int_0^1 t|\Lambda(t)-\Lambda(1-t)|dt\right] \qquad (2.2.167)\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada,

$$\begin{aligned}\left|{}_{h}^{GRL}\mathcal{F}(a,b;x,y)\right| &= \left|\frac{f(a+b-y)+f(a+b-x)}{2}-\frac{1}{2\Lambda(1)}\right.\\ &\left.\times\left[{}_{h}^{GRL}I_{(a+b-y)^+}f(a+b-x)+{}_{h}^{GRL}I_{(a+b-x)^-}f(a+b-y)\right]\right|\end{aligned}$$

dir [68].

Sonuç 2.2.85 Teorem 2.2.87'nin şartları sağlanmış olsun. Bu durumda

i) $h(t)=\frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha)}$ ise Teorem 2.2.87, [50]'de Teorem 4'e indirgenir.

ii) $h(t)=\frac{t^{\frac{\alpha}{k}}}{k\Gamma_k(\alpha)}$ ise

$$\begin{aligned}&\left|\frac{f(a+b-x)+f(a+b-y)}{2}-\frac{\Gamma_k(\alpha+k)}{2(y-x)^{\frac{\alpha}{k}}}\right.\\ &\left.\times\left[{}_{h}^{RL}I_{(a+b-y)^+,k}f(a+b-x)+{}_{h}^{RL}I_{(a+b-x)^-,k}f(a+b-y)\right]\right|\\ \leq\ &\frac{y-x}{\alpha+k}\left(k-\frac{k}{2^{\frac{\alpha}{k}}}\right)\left[|f'(a)|+|f'(b)|-\frac{|f'(x)|+|f'(y)|}{2}\right] \qquad (2.2.168)\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir.

iii) $x=a$ ve $y=b$ olarak alınırsa Teorem 2.2.87, [60]'da Teorem 6'ya indirgenir [68].

Sonuç 2.2.47 Teorem 2.2.87'nin şartları sağlanmış olsun. Bu durumda Teorem 2.2.87'de $h(t)=t$ olarak alınırsa

$$\begin{aligned}&\left|\frac{f(a+b-y)+f(a+b-x)}{2}-\frac{1}{y-x}\int_{a+b-y}^{a+b-x}f(x)dx\right|\\ \leq\ &\frac{1}{4}\left[|f'(a)|+|f'(b)|-\frac{|f'(x)|+|f'(y)|}{2}\right] \qquad (2.2.169)\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir [68].

Sonuç 2.2.86 Sonuç 2.2.47'de $x=a$ ve $y=b$ olarak alınırsa Sonuç 2.2.47, [22]'de Teorem 2.2'ye indirgenir [68].

Sonuç 2.2.48 Teorem 2.2.87'nin şartları sağlanmış olsun. Bu durumda uyumlu kesirli integraller için

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{f(a+b-y)+f(a+b-x)}{2}-\frac{\alpha}{y^\alpha-x^\alpha}\int_{a+b-y}^{a+b-x}f(t)d_\alpha t\right| \\
\leq\ & \frac{\alpha(y-x)}{2(y^\alpha-x^\alpha)}\left[[|f'(a)|+|f'(b)|]\int_0^1|\Lambda_1(t)-\Lambda_1(1-t)|dt\right. \\
&\left.-[|f'(x)|+|f'(y)|]\int_0^1 t|\Lambda_1(t)-\Lambda_1(1-t)|dt\right] \qquad (2.2.170)
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir [68].

Sonuç 2.2.87 $x=a$ ve $y=b$ olarak alınırsa,

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{\alpha}{b^\alpha-a^\alpha}\int_a^b f(t)d_\alpha t\right| \\
\leq\ & \frac{\alpha(b-a)}{2(b^\alpha-a^\alpha)}\left[[|f'(a)|+|f'(b)|]\int_0^1 t|\Lambda_2(t)-\Lambda_2(1-t)|dt\right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir [68].

Sonuç 2.2.49 Teorem 2.2.87'nin şartları sağlanmış olsun. Bu durumda üstel çekirdeğe sahip kesirli integraller için

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{f(a+b-y)+f(a+b-x)}{2}-\frac{\alpha-1}{2\left[\exp\left(-\frac{1-\alpha}{\alpha}(y-x)\right)-1\right]}\right. \\
&\left.\times\left[{}^{\exp}I_{(a+b-y)^+}f(a+b-x)+{}^{\exp}I^\alpha_{(a+b-x)^-}f(a+b-y)\right]\right| \\
\leq\ & \frac{(\alpha-1)(y-x)}{2\left[\exp\left(-\frac{1-\alpha}{\alpha}(y-x)\right)-1\right]}\left[[|f'(a)|+|f'(b)|]\int_0^1|\Lambda_3(t)-\Lambda_3(1-t)|dt\right. \\
&\left.-[|f'(x)|+|f'(y)|]\int_0^1 t|\Lambda_3(t)-\Lambda_3(1-t)|dt\right] \qquad (2.2.171)
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir [68].

Sonuç 2.2.88 (2.2.171)'de $x=a$ ve $y=b$ olarak alınırsa

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{\alpha-1}{2\left[\exp\left(-\frac{1-\alpha}{\alpha}(b-a)\right)-1\right]}\left[{}^{\exp}I^\alpha_{a^+}f(b)+{}^{\exp}I^\alpha_{b^-}f(a)\right]\right| \\
\leq\ & \frac{(\alpha-1)(b-a)}{2\left[\exp\left(-\frac{1-\alpha}{\alpha}(b-a)\right)-1\right]}\left[[|f'(a)|+|f'(b)|]\int_0^1 t|\Lambda_4(t)-\Lambda_4(1-t)|dt\right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir [68].

Teorem 2.2.88 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, (a,b) aralığında diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $q > 1$ ve $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ için $|f'|^q$, $[a,b]$ aralığında konveks bir fonksiyon olsun. Bu durumda genelleştirilmiş Riemann-Liouville kesirli integralleri için

$$\begin{aligned}\left|{}_{h}^{GRL}\mathcal{F}(a,b;x,y)\right| &\leq \frac{y-x}{2\Lambda(1)}\left(\int_0^1 |\Lambda(t)-\Lambda(1-t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\quad \times\left(|f'(a)|^q+|f'(b)|^q-\frac{|f'(x)|^q+|f'(y)|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}} \qquad (2.2.172)\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir [68].

Sonuç 2.2.50 Teorem 2.2.88'in şartları sağlanmış olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned}&\left|\frac{f(a+b-y)+f(a+b-x)}{2}-\frac{1}{y-x}\int_{a+b-y}^{a+b-x} f(x)dx\right| \\ \leq\ & \frac{y-x}{2(1+p)^{\frac{1}{p}}}\left(|f'(a)|^q+|f'(b)|^q-\frac{|f'(x)|^q+|f'(y)|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}} \qquad (2.2.173)\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir [68].

Sonuç 2.2.89 Sonuç 2.2.50'de $x=a$ ve $y=b$ olarak alınırsa Sonuç 2.2.50, [22]'de Teorem 2.3'e indirgenir [68].

Sonuç 2.2.51 Teorem 2.2.88'in şartları sağlanmış olsun. Bu durumda, Riemann-Liouville kesirli integralleri için

$$\begin{aligned}&\left|\frac{f(a+b-y)+f(a+b-x)}{2}-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(y-x)^{\frac{\alpha}{k}}}\left[{}^{RL}I^{\alpha}_{(a+b-y)^+}f(a+b-x)\right.\right. \\ &\left.\left.+{}^{RL}I^{\alpha}_{(a+b-x)^-}f(a+b-y)\right]\right| \\ \leq\ & \frac{y-x}{2(1+\alpha p)^{\frac{1}{p}}}\left(|f'(a)|^q+|f'(b)|^q-\frac{|f'(x)|^q+|f'(y)|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}} \qquad (2.2.174)\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir [68].

Sonuç 2.2.90 Sonuç 2.2.51'de $x=a$ ve $y=b$ olarak alınırsa

$$\begin{aligned}&\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}}\left[{}^{RL}I^{\alpha}_{a^+}f(b)+{}^{RL}I^{\alpha}_{b^-}f(a)\right]\right| \\ \leq\ & \frac{b-a}{2(1+\alpha p)^{\frac{1}{p}}}\left(\frac{|f'(a)|^q+|f'(b)|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir [68].

Sonuç 2.2.52 Teorem 2.2.88'in şartları sağlanmış olsun. Bu durumda, k-Riemann-Liouville kesirli integralleri için

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{f(a+b-y)+f(a+b-x)}{2} - \frac{\Gamma_k(\alpha+k)}{2(y-x)^{\frac{\alpha}{k}}} \left[{}^{RL}I^{\alpha}_{(a+b-y)^+,k} f(a+b-x) \right.\right. \\
&\left.\left. + {}^{RL}I^{\alpha}_{(a+b-x)^-,k} f(a+b-y) \right] \right| \\
\leq\ & \frac{y-x}{2\left(1+\frac{\alpha}{k}p\right)^{\frac{1}{p}}} \left(|f'(a)|^q + |f'(b)|^q - \frac{|f'(x)|^q + |f'(y)|^q}{2} \right)^{\frac{1}{q}} \qquad (2.2.175)
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir [68].

Sonuç 2.2.91 Sonuç 2.2.52'de $x = a$ ve $y = b$ olarak alınırsa

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{\Gamma_k(\alpha+k)}{2(b-a)^{\frac{\alpha}{k}}} \left[{}^{RL}I^{\alpha}_{a^+,k} f(b) + {}^{RL}I^{\alpha}_{b^-,k} f(a) \right] \right| \\
\leq\ & \frac{b-a}{2\left(1+\frac{\alpha}{k}p\right)^{\frac{1}{p}}} \left(\frac{|f'(a)|^q + |f'(b)|^q}{2} \right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir [68].

Sonuç 2.2.53 Teorem 2.2.88'in şartları sağlanmış olsun. Bu durumda, uyumlu kesirli integraller için

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{f(a+b-y)+f(a+b-x)}{2} - \frac{\alpha}{y^\alpha - x^\alpha} \int_{a+b-y}^{a+b-x} f(t) d_\alpha t \right| \\
\leq\ & \frac{\alpha(y-x)}{2(y^\alpha - x^\alpha)} \left(\int_0^1 |\Lambda_1(t) - \Lambda_1(1-t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(|f'(a)|^q + |f'(b)|^q \right. \\
&\left. - \frac{|f'(x)|^q + |f'(y)|^q}{2} \right)^{\frac{1}{q}} \qquad (2.2.176)
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir [68].

Sonuç 2.2.92 (2.2.176)'da $x = a$ ve $y = b$ olarak alınırsa

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{\alpha}{b^\alpha - a^\alpha} \int_a^b f(t) d_\alpha t \right| \\
\leq\ & \frac{\alpha(b-a)}{2(b^\alpha - a^\alpha)} \left(\int_0^1 |\Lambda_2(t) - \Lambda_2(1-t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{|f'(a)|^q + |f'(b)|^q}{2} \right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir [68].

Sonuç 2.2.54 Teorem 2.2.88'in şartları sağlanmış olsun. Bu durumda, üstel çekirdeğe sahip kesirli integraller için

$$\begin{aligned}
&\Bigg|\frac{f(a+b-y)+f(a+b-x)}{2}-\frac{\alpha-1}{2\Big[\exp\big(-\frac{1-\alpha}{\alpha}(y-x)\big)-1\Big]} \\
&\times\Big[{}^{\exp}I^{\alpha}_{(a+b-y)^+}f(a+b-x)+{}^{\exp}I^{\alpha}_{(a+b-x)^-}f(a+b-y)\Big]\Bigg| \\
\le\ & \frac{(\alpha-1)(y-x)}{2\Big[\exp\big(-\frac{1-\alpha}{\alpha}(y-x)\big)-1\Big]}\left(\int_0^1|\Lambda_3(t)-\Lambda_3(1-t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\times\left(|f'(a)|^q+|f'(b)|^q-\frac{|f'(x)|^q+|f'(y)|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}} \qquad (2.2.177)
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir [68].

Sonuç 2.2.93 (2.2.177)'de $x=a$ ve $y=b$ olarak alınırsa

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{\alpha-1}{2\Big[\exp\big(-\frac{1-\alpha}{\alpha}(b-a)\big)-1\Big]}\Big[{}^{\exp}I^{\alpha}_{a^+}f(b)+{}^{\exp}I^{\alpha}_{b^-}f(a)\Big]\right| \\
\le\ & \frac{(\alpha-1)(b-a)}{2\Big[\exp\big(-\frac{1-\alpha}{\alpha}(b-a)\big)-1\Big]}\left(\int_0^1|\Lambda_4(t)-\Lambda_4(1-t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{|f'(x)|^q+|f'(y)|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir [68].

Teorem 2.2.89 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, (a,b) aralığında diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $|f|$, $[a,b]$ aralığında konveks bir fonksiyon olsun. Bu durumda genelleştirilmiş Riemann-Liouville kesirli integralleri için

$$\left|{}^{GRL}_{h}\mathcal{G}(a,b;x,y)\right|\le\frac{y-x}{2\Lambda(1)}\left(|f'(a)|^q+|f'(b)|^q-\frac{|f'(x)|^q+|f'(y)|^q}{2}\right)\int_0^1|\Lambda(t)|dt \qquad (2.2.178)$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada,

$$\begin{aligned}
\left|{}^{GRL}_{h}\mathcal{G}(a,b;x,y)\right| \ :=\ & \Bigg|\frac{1}{2\Lambda(1)}\Big[{}^{GRL}_{h}I^{\alpha}_{(a+b-\frac{x+y}{2})^+}f(a+b-x)+{}^{GRL}_{h}I_{(a+b-\frac{x+y}{2})^-}f(a+b-y)\Big] \\
&-f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right)\Bigg|
\end{aligned}$$

dir [68].

Sonuç 2.2.94 Teorem 2.2.89'un şartları sağlanmış olsun. Bu durumda

i) $h(t)=t$ ise Teorem 2.2.89, [50]'de Sonuç 2'ye indirgenir.

ii) $h(t)=t$, $x=a$ ve $y=b$ olarak alınırsa Teorem 2.2.89, [35]'de Teorem 2.2'ye indirgenir.

iii) $h(t)=\frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha)}$ ise Teorem 2.2.89, [50]'de Teorem 5'e indirgenir.

iv) $h(t)=\frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha)}$, $x=a$ ve $y=b$ olarak alınırsa Teorem 2.2.89, [63]'de Teorem 5'e indirgenir.

v) $h(t)=\frac{t^{\frac{\alpha}{k}}}{k\Gamma_k(\alpha)}$ ise

$$\begin{aligned}&\left|\frac{2^{\frac{\alpha}{k}-1}\Gamma_k(\alpha+k)}{(y-x)^{\frac{\alpha}{k}}}\left[{}_h^{RL}I_{(a+b-\frac{x+y}{2})-,k}f(a+b-y)+{}_h^{RL}I_{(a+b-\frac{x+y}{2})+,k}f(a+b-x)\right]\right.\\&\left.-f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right)\right|\\ \leq\ &\frac{k(y-x)}{2(k+\alpha)}\left[|f'(a)|+|f'(b)|-\frac{|f'(x)|+|f'(y)|}{2}\right]\end{aligned}\tag{2.2.179}$$

eşitsizliği elde edilir.

vi) $h(t)=\frac{t^{\frac{\alpha}{k}}}{k\Gamma_k(\alpha)}$, $x=a$ ve $y=b$ olarak alınırsa,

$$\begin{aligned}&\left|\frac{2^{\frac{\alpha}{k}-1}\Gamma_k(\alpha+k)}{(b-a)^{\frac{\alpha}{k}}}\left[{}^{RL}I^{\alpha}_{(\frac{a+b}{2})+,k}f(b)+{}^{RL}I^{\alpha}_{(\frac{a+b}{2})-,k}f(a)\right]-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|\\ \leq\ &\frac{k(b-a)}{2(k+\alpha)}\left[\frac{|f'(a)|+|f'(b)|}{2}\right]\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir [68].

Sonuç 2.2.55 Teorem 2.2.89'un şartları sağlanmış olsun. Bu durumda uyumlu kesirli integraller için

$$\begin{aligned}\left|\frac{\alpha}{\left[y^\alpha-\left(\frac{x+y}{2}\right)^\alpha\right]}\int_{a+b-y}^{a+b-x}f(t)d_\alpha t\right|\ \leq\ &\frac{\alpha(y-x)}{2\left[y^\alpha-\left(\frac{x+y}{2}\right)^\alpha\right]}\left[|f'(a)|+|f'(b)|\right.\\&\left.-\frac{|f'(x)|+|f'(y)|}{2}\right]\int_0^1|\Lambda(t)|dt\end{aligned}\tag{2.2.180}$$

eşitsizliği elde edilir [68].

Sonuç 2.2.95 (2.2.180)'de $x=a$ ve $y=b$ olarak alınırsa

$$\left|\frac{\alpha}{\left[b^\alpha-\left(\frac{a+b}{2}\right)^\alpha\right]}\int_a^b f(t)d_\alpha t\right|\ \leq\ \frac{\alpha(b-a)}{2\left[b^\alpha-\left(\frac{a+b}{2}\right)^\alpha\right]}\left[\frac{|f'(x)|+|f'(y)|}{2}\right]\int_0^1|\Lambda_2(t)|dt$$

eşitsizliği elde edilir [68].

Sonuç 2.2.56 Teorem 2.2.89'un şartları sağlanmış olsun. Bu durumda, üstel çekirdeğe sahip kesirli integraller için

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{\alpha-1}{2\left[\exp\left(-\frac{1-\alpha}{\alpha}\frac{(b-a)}{2}\right)-1\right]}\left[{}^{\exp}I^{\alpha}_{(a+b-\frac{x+y}{2})^+}f(a+b-x)+{}^{\exp}I^{\alpha}_{(a+b-\frac{x+y}{2})^-}f(a+b-y)\right]\right. \\
&\left.-f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right)\right| \\
\leq\ &\frac{(\alpha-1)(y-x)}{2\left[\exp\left(-\frac{1-\alpha}{\alpha}\frac{(y-x)}{2}\right)-1\right]}\left[|f'(a)|+|f'(b)|-\frac{|f'(x)|+|f'(y)|}{2}\right]\int_0^1|\Lambda_3(t)|dt \quad (2.2.181)
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir [68].

Sonuç 2.2.96 (2.2.181)'de $x=a$ ve $y=b$ olarak alınırsa

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{\alpha-1}{2\left[\exp\left(-\frac{1-\alpha}{\alpha}\frac{(b-a)}{2}\right)-1\right]}\left[{}^{\exp}I^{\alpha}_{(\frac{a+b}{2})^+}f(b)+{}^{\exp}I^{\alpha}_{(\frac{a+b}{2})^-}f(a)\right]-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| \\
\leq\ &\frac{(\alpha-1)(b-a)}{2\left[\exp\left(-\frac{1-\alpha}{\alpha}\frac{(b-a)}{2}\right)-1\right]}\left[\frac{|f'(a)|+|f'(b)|}{2}\right]\int_0^1|\Lambda_4(t)|dt
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir [68].

Teorem 2.2.90 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, (a,b) aralığında diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $q>1$ ve $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}$ için $|f'|^q$, $[a,b]$ aralığında konveks bir fonksiyon olsun. Bu durumda genelleştirilmiş Riemann-Liouville kesirli integralleri için

$$\begin{aligned}
\left|{}^{GRL}_{h}\mathcal{G}(a,b;x,y)\right| \leq\ &\frac{y-x}{4\Lambda(1)}\left(\int_0^1|\Lambda(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left[\left(|f'(a)|^q+|f'(b)|^q-\frac{3|f'(x)|^q+|f'(y)|^q}{4}\right)^{\frac{1}{q}}\right. \\
&\left.+\left(|f'(a)|^q+|f'(b)|^q-\frac{|f'(x)|^q+3|f'(y)|^q}{4}\right)^{\frac{1}{q}}\right] \quad (2.2.182)
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir [68].

Sonuç 2.2.97 Teorem 2.2.90'ın şartları sağlanmış olsun. Bu durumda

i) $h(t)=t$ ise Teorem 2.2.90, [50]'de Sonuç 3'e indirgenir.

ii) $h(t)=t$, $x=a$ ve $y=b$ olarak alınırsa Teorem 2.2.90, [35]'de Teorem 2.3'e indirgenir.

iii) $h(t)=\frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}$ ise Teorem 2.2.90, [50]'de Teorem 6'ya indirgenir.

iv) $h(t)=\frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}$, $x=a$ ve $y=b$ olarak alınırsa Teorem 2.2.90, [63]'de Teorem 6'ya indirgenir.

v) $h(t)=\frac{t^{\frac{\alpha}{k}}}{k\Gamma_k(\alpha)}$ ise

$$\begin{aligned} &\left|\frac{2^{\frac{\alpha}{k}-1}\Gamma_k(\alpha+k)}{(y-x)^{\frac{\alpha}{k}}}\left[{}_{h}^{RL}I_{\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right)^-,k}f(a+b-y)+{}_{h}^{RL}I_{\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right)^+,k}f(a+b-x)\right]\right.\\ &\left.-f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right)\right|\\ \leq\ &\frac{y-x}{4}\left(\frac{k}{\alpha p+k}\right)^{\frac{1}{p}}\left[\left(|f'(a)|^q+|f'(b)|^q-\frac{3|f'(x)|^q+|f'(y)|^q}{4}\right)^{\frac{1}{q}}\right.\\ &\left.+\left(|f'(a)|^q+|f'(b)|^q-\frac{|f'(x)|^q+3|f'(y)|^q}{4}\right)^{\frac{1}{q}}\right] \end{aligned} \tag{2.2.183}$$

eşitsizliği elde edilir.

vi) $h(t)=\frac{t^{\frac{\alpha}{k}}}{k\Gamma_k(\alpha)}$, $x=a$ ve $y=b$ olarak alınırsa

$$\begin{aligned} &\left|\frac{2^{\frac{\alpha}{k}-1}\Gamma_k(\alpha+k)}{(b-a)^{\frac{\alpha}{k}}}\left[{}^{RL}I^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^+,k}f(b)+{}^{RL}I^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^-,k}f(a)\right]-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|\\ \leq\ &\frac{b-a}{4}\left(\frac{k}{\alpha p+k}\right)^{\frac{1}{p}}\left[\left(\frac{|f'(a)|^q+3|f'(b)|^q}{4}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{3|f'(a)|^q+|f'(b)|^q}{4}\right)^{\frac{1}{q}}\right] \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir [68].

Sonuç 2.2.57 Teorem 2.2.90'ın şartları sağlanmış olsun. Bu durumda uyumlu kesirli integraller için

$$\begin{aligned} &\left|\frac{\alpha}{\left[y^\alpha-\left(\frac{x+y}{2}\right)^\alpha\right]}\int_{a+b-y}^{a+b-x}f(t)d_\alpha t\right|\\ \leq\ &\frac{\alpha(y-x)}{4\left[y^\alpha-\left(\frac{x+y}{2}\right)^\alpha\right]}\left(\int_0^1|\Lambda_1(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left[\left(|f'(a)|^q+|f'(b)|^q-\frac{3|f'(x)|^q+|f'(y)|^q}{4}\right)^{\frac{1}{q}}\right.\\ &\left.+\left(|f'(a)|^q+|f'(b)|^q-\frac{|f'(x)|^q+3|f'(y)|^q}{4}\right)^{\frac{1}{q}}\right] \end{aligned} \tag{2.2.184}$$

eşitsizliği elde edilir [68].

Sonuç 2.2.98 (2.2.184)'de $x=a$ ve $y=b$ olarak alınırsa

$$\begin{aligned} &\left|\frac{\alpha}{\left[b^\alpha-\left(\frac{a+b}{2}\right)^\alpha\right]}\int_a^b f(t)d_\alpha t\right|\\ \leq\ &\frac{\alpha(b-a)}{4\left[b^\alpha-\left(\frac{a+b}{2}\right)^\alpha\right]}\left(\int_0^1|\Lambda_2(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left[\left(\frac{|f'(a)|^q+3|f'(b)|^q}{4}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{3|f'(a)|^q+|f'(b)|^q}{4}\right)^{\frac{1}{q}}\right] \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir [68].

Sonuç 2.2.58 Teorem 2.2.90'ın şartları sağlanmış olsun. Bu durumda, üstel çekirdeğe sahip kesirli integraller için

$$
\begin{aligned}
&\frac{\alpha-1}{2\left[\exp\left(-\frac{1-\alpha}{\alpha}\frac{(b-a)}{2}\right)-1\right]}\left[{}^{\exp}I^{\alpha}_{(a+b-\frac{x+y}{2})^+}f(a+b-x)+{}^{\exp}I^{\alpha}_{(a+b-\frac{x+y}{2})^-}f(a+b-y)\right] \\
&-f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right)\Bigg| \\
\leq\ &\frac{(\alpha-1)(y-x)}{4\left[\exp\left(-\frac{1-\alpha}{\alpha}\frac{(y-x)}{2}\right)-1\right]}\int_0^1|\Lambda_3(t)|^p dt\Bigg)^{\frac{1}{p}}\left[\left(|f'(a)|^q+|f'(b)|^q-\frac{3|f'(x)|^q+|f'(y)|^q}{4}\right)^{\frac{1}{q}}\right. \\
&\left.+\left(|f'(a)|^q+|f'(b)|^q-\frac{|f'(x)|^q+3|f'(y)|^q}{4}\right)^{\frac{1}{q}}\right] \qquad (2.2.185)
\end{aligned}
$$

eşitsizliği elde edilir [68].

Sonuç 2.2.99 (2.2.185)'de $x=a$ ve $y=b$ olarak alınırsa

$$
\begin{aligned}
&\left|\frac{\alpha-1}{2\left[\exp\left(-\frac{1-\alpha}{\alpha}\frac{(b-a)}{2}\right)-1\right]}\left[{}^{\exp}I^{\alpha}_{(\frac{a+b}{2})^+}f(b)+{}^{\exp}I^{\alpha}_{(\frac{a+b}{2})^-}f(a)\right]-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| \\
\leq\ &\frac{(\alpha-1)(b-a)}{4\left[\exp\left(-\frac{1-\alpha}{\alpha}\frac{(b-a)}{2}\right)-1\right]}\left(\int_0^1|\Lambda_4(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\times\left[\left(\frac{|f'(a)|^q+3|f'(b)|^q}{4}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{3|f'(a)|^q+|f'(b)|^q}{4}\right)^{\frac{1}{q}}\right]
\end{aligned}
$$

eşitsizliği elde edilir [68].

2.2.12 Ψ-Riemann-Liouville Kesirli İntegraller İçin Hermite-Hadamard-Mercer Tipli Eşitsizlikler

Bu bölümde, konveks fonksiyonlar için Ψ-Riemann-Liouville kesirli integralleri kullanılarak Hermite-Hadamard-Mercer tipli eşitsizlikler verilecektir.

Tanım 2.2.19 (Ψ-Riemann-Liouville Kesirli İntegral Operatörü) $\alpha>0$ olmak üzere $(a,b)(-\infty\leq a<b\leq+\infty)$ olsun. Ayrıca Ψ, $(a,b]$ aralığında artan ve pozitif monoton bir fonksiyon ve Ψ', (a,b) aralığında sürekli olsun. Bu durumda bir f fonksiyonunun sol ve sağ taraflı Ψ-Riemann-Liouville kesirli integralleri sırasıyla,

$$
\left(I^{\alpha;\Psi}_{a^+}\right)f(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x\Psi'(t)(\Psi(x)-\Psi(t))^{\alpha-1}f(t)dt, \qquad a<x \qquad (2.2.186)
$$

ve

$$\left(I_{b^-}^{\alpha;\Psi}\right)f(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^b \Psi'(t)(\Psi(t)-\Psi(x))^{\alpha-1}f(t)dt, \qquad x<b \tag{2.2.187}$$

şeklinde tanımlanır [38].

Saad Ihsan Butt ve arkadaşları, 2021 yılında Ψ-Riemann-Liouville kesirli integral operatörleri içeren aşağıdaki sonuçları elde etmişlerdir.

Bu bölüm boyunca aşağıdaki varsayıma ihtiyaç olacaktır.

A_1: $0\leq a<b$ olmak üzere $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, pozitif bir fonksiyon ve $f\in L[a,b]$ olsun. Ayrıca $\alpha>0$ olmak üzere $\psi(\cdot)$, $(a,b]$ aralığında artan ve pozitif monoton bir fonksiyon ve ψ', (a,b) aralığında sürekli türeve sahip olsun.

Teorem 2.2.91 A_1'deki şartlar sağlanmak üzere f, $[a,b]$ aralığında konveks bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right) &\leq f(a)+f(b)-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(y-x)^\alpha} \\ &\times\left\{\left(I_{\psi^{-1}(x)^+}^{\alpha;\psi}\right)(f\circ\psi)\left(\psi^{-1}(y)\right)+\left(I_{\psi^{-1}(y)^-}^{\alpha;\psi}\right)(f\circ\psi)\left(\psi^{-1}(x)\right)\right\} \\ &\leq f(a)+f(b)-f\left(\frac{x+y}{2}\right) \end{aligned} \tag{2.2.188}$$

ve

$$\begin{aligned} f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right) &\leq \frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(y-x)^\alpha}\left\{\left(I_{\psi^{-1}(a+b-y)^+}^{\alpha;\psi}\right)(f\circ\psi)\left(\psi^{-1}(a+b-x)\right)\right. \\ &\left.+\left(I_{\psi^{-1}(a+b-x)^-}^{\alpha;\psi}\right)(f\circ\psi)\left(\psi^{-1}(a+b-y)\right)\right\} \\ &\leq f(a)+f(b)-\left(\frac{f(x)+f(y)}{2}\right) \end{aligned} \tag{2.2.189}$$

eşitsizlikleri geçerlidir [17].

Sonuç 2.2.100 Teorem 2.2.91'de $\psi(\gamma)=\gamma$ olarak alınırsa [50]'de ispatlanan Teorem 2.1 elde edilir [17].

Sonuç 2.2.101 Teorem 2.2.91'de $\psi(\gamma)=\gamma$ ve $\alpha=1$ olarak alınırsa Kian ve Moslehian tarafından [36]'da ispatlanan Teorem 2.1 elde edilir [17].

Teorem 2.2.92 A_1'deki şartlar sağlanmak üzere f, $[a,b]$ aralığında konveks bir fonksiyon ise

$$f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(y-x)^{\alpha}}\Big\{\Big(I^{\alpha;\psi}_{\psi^{-1}(a+b-\frac{x+y}{2})^{+}}\Big)\big(f\circ\psi\big)\big(\psi^{-1}(a+b-x)\big)$$
$$+\Big(I^{\alpha;\psi}_{\psi^{-1}(a+b-\frac{x+y}{2})^{-}}\Big)\big(f\circ\psi\big)\big(\psi^{-1}(a+b-y)\big)\Big\}$$
$$\leq f(a)+f(b)-\left(\frac{f(x)+f(y)}{2}\right) \tag{2.2.190}$$

eşitsizliği geçerlidir [17].

Sonuç 2.2.102 Teorem 2.2.92'de $\psi(\gamma)=\gamma$ olarak alınırsa [50]'de ispatlanan Teorem 2.3 elde edilir [17].

Sonuç 2.2.103 Teorem 2.2.92'de $\psi(\gamma)=\gamma$ ve $\alpha=1$ olarak alınırsa Kian ve Moslehian tarafından [36]'da ispatlanan Teorem 2.1 elde edilir [17].

Teorem 2.2.93 A_1'deki şartlar sağlanmak üzere f, $[a,b]$ aralığında konveks bir fonksiyon ise

$$f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(y-x)^{\alpha}}\Big\{\Big(I^{\alpha;\psi}_{\psi^{-1}(a+b-y)^{+}}\Big)(f\circ\psi)\Big(\psi^{-1}\Big(a+b-\frac{x+y}{2}\Big)\Big)$$
$$+\Big(I^{\alpha;\psi}_{\psi^{-1}(a+b-x)^{-}}\Big)(f\circ\psi)\Big(\psi^{-1}\Big(a+b-\frac{x+y}{2}\Big)\Big)\Big\}$$
$$\leq f(a)+f(b)-\left(\frac{f(x)+f(y)}{2}\right) \tag{2.2.191}$$

eşitsizliği geçerlidir [17].

Sonuç 2.2.104 Teorem 2.2.93'de $\psi(\gamma)=\gamma$ olarak alınırsa [30]'da ispatlanan Teorem 2 elde edilir [17].

Sonuç 2.2.105 Teorem 2.2.93'de $\psi(\gamma)=\gamma$ ve $\alpha=1$ olarak alınırsa Kian ve Moslehian tarafından [36]'da ispatlanan Teorem 2.1 elde edilir [17].

Lemma 2.2.29 A_1'deki şartlar sağlanmak üzere $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, (a,b) aralığında diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda her $x,y\in[a,b]$ için

$$\frac{f(a+b-x)+f(a+b-y)}{2}-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(y-x)^{\alpha}}\Big\{\Big(I^{\alpha;\psi}_{\Psi^{-1}(a+b-y)^{+}}\Big)(f\circ\psi)\big(\Psi^{-1}(a+b-x)\big)$$
$$+\Big(I^{\alpha;\psi}_{\psi^{-1}(a+b-x)^{-}}\Big)(f\circ\psi)\big(\psi^{-1}(a+b-y)\big)\Big\}$$
$$=\frac{1}{2(y-x)^{\alpha}}\int_{\psi^{-1}(a+b-y)}^{\psi^{-1}(a+b-x)}\big((\psi(\gamma)-(a+b-y)\big)^{\alpha}$$
$$-\big((a+b-x)-\psi(\gamma)\big)^{\alpha})(f'\circ\psi)(\gamma)\psi'(\gamma)d\gamma \tag{2.2.192}$$

eşitliği geçerlidir [17].

Sonuç 2.2.106 Lemma 2.2.29'da $x = a$ ve $y = b$ olarak alınırsa [40]'da ispatlanan Lemma 3.1 elde edilir [17].

Teorem 2.2.94 A_1'deki şartlar sağlanmak üzere $|f'|$, $[a, b]$ aralığında konveks bir fonksiyon ise her $x, y \in [a, b]$ için

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{f(a+b-x)+f(a+b-y)}{2} - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(y-x)^{\alpha}}\left\{\left(I^{\alpha;\psi}_{\psi^{-1}(a+b-y)^{+}}\right)f(a+b-x)\right.\right.\\
&\left.\left.+\left(I^{\alpha;\psi}_{\psi^{-1}(a+b-x)^{-}}\right)f(a+b-y)\right\}\right|\\
\leq\ & \frac{(y-x)}{\alpha+1}\left(1-\frac{1}{2^{\alpha}}\right)\left\{|f'(a)|+|f'(b)|-\left(\frac{|f'(x)|+|f'(y)|}{2}\right)\right\} \qquad (2.2.193)
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir [17].

Sonuç 2.2.107 Teorem 2.2.94'de $x = a$ ve $y = b$ olarak alınırsa [40]'da ispatlanan Teorem 3.4 elde edilir [17].

Sonuç 2.2.108 Teorem 2.2.94'de $\psi(\gamma) = \gamma$ olarak alınırsa [50]'de ispatlanan Teorem 3.6 elde edilir [17].

Lemma 2.2.30 A_1'deki şartlar sağlanmak üzere $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $L[a, b]$ üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
&\frac{f(a+b-x)+f(a+b-y)}{2} - \frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(y-x)^{\alpha}}\\
&\times\left\{\left(I^{\alpha;\psi}_{\psi^{-1}(a+b-y)^{+}}\right)\left[f\circ\psi\left(\psi^{-1}\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right)\right)\right]\right.\\
&\left.+\left(I^{\alpha;\psi}_{\psi^{-1}(a+b-x)^{-}}\right)\left[f\circ\psi\left(\psi^{-1}\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right)\right)\right]\right\}\\
=\ & \frac{(y-x)}{4}\left[\int_0^1 t^{\alpha}f'\left(a+b-\left(\frac{1+t}{2}x+\frac{1-t}{2}y\right)\right)dt\right.\\
&\left.-\int_0^1 (t)^{\alpha}f'\left(a+b-\left(\frac{1-t}{2}x+\frac{1+t}{2}y\right)\right)dt\right] \qquad (2.2.194)
\end{aligned}$$

eşitliği geçerlidir [17].

Sonuç 2.2.109 Lemma 2.2.30'da $\psi(\gamma) = \gamma$ olarak alınırsa [30]'da ispatlanan Lemma 1 elde edilir [17].

Teorem 2.2.95 A_1'deki şartlar sağlanmak üzere f', $[a,b]$ aralığında konveks bir fonksiyon ise bu durumda her $x, y \in [a,b]$ için

$$\begin{aligned} &\Bigg| \frac{f(a+b-x)+f(a+b-y)}{2} - \frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(y-x)^{\alpha}} \\ &\times \Bigg\{ \Big(I^{\alpha;\psi}_{\psi^{-1}(a+b-y)^{+}} \Big) \Big[f\circ\psi \Big(\psi^{-1} \Big(a+b-\frac{x+y}{2} \Big) \Big) \Big] \\ &+ \Big(I^{\alpha;\psi}_{\psi^{-1}(a+b-x)^{-}} \Big) \Big[f\circ\psi \Big(\psi^{-1} \Big(a+b-\frac{x+y}{2} \Big) \Big) \Big] \Bigg\} \Bigg| \\ \leq\ & \frac{(y-x)}{4(\alpha+2)} \sup_{\xi\in[a,b]} |f''(\xi)| \end{aligned} \tag{2.2.195}$$

eşitsizliği geçerlidir [17].

Sonuç 2.2.110 Teorem 2.2.95'de $\psi(\gamma) = \gamma$ olarak alınırsa [30]'da ispatlanan Teorem 3 elde edilir [17].

Teorem 2.2.96 A_1'deki şartlar sağlanmak üzere $|f'|$, $[a,b]$ aralığında konveks bir fonksiyon ise her $x, y \in [a,b]$ için

$$\begin{aligned} &\Bigg| \frac{f(a+b-x)+f(a+b-y)}{2} - \frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(y-x)^{\alpha}} \\ &\times \Bigg\{ \Big(I^{\alpha;\psi}_{\psi^{-1}(a+b-y)^{+}} \Big) \Big[f\circ\psi \Big(\psi^{-1} \Big(a+b-\frac{x+y}{2} \Big) \Big) \Big] \\ &+ \Big(I^{\alpha;\psi}_{\psi^{-1}(a+b-x)^{-}} \Big) \Big[f\circ\psi \Big(\psi^{-1} \Big(a+b-\frac{x+y}{2} \Big) \Big) \Big] \Bigg\} \Bigg| \\ \leq\ & \frac{(y-x)}{2(\alpha+1)} \Bigg\{ |f'(a)| + |f'(b)| - \Bigg(\frac{|f'(x)|+|f'(y)|}{2} \Bigg) \Bigg\} \end{aligned} \tag{2.2.196}$$

eşitsizliği geçerlidir [17].

Sonuç 2.2.111 Teorem 2.2.96'da $\psi(\gamma) = \gamma$ olarak alınırsa [30]'da ispatlanan Teorem 4 elde edilir [17].

Lemma 2.2.31 A_1'deki şartlar sağlanmak üzere $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, (a,b) aralığında diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} &f\Big(a+b-\frac{x+y}{2} \Big) - \frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(y-x)^{\alpha}} \\ &\times \Bigg\{ \Big(I^{\alpha;\psi}_{\Psi^{-1}(a+b-\frac{x+y}{2})^{+}} \Big) (f\circ\psi)\big(\psi^{-1}(a+b-x)\big) \\ &+ \Big(I^{\alpha;\psi}_{\psi^{-1}(a+b-\frac{x+y}{2})^{-}} \Big) (f\circ\psi)\big(\psi^{-1}(a+b-y)\big) \Bigg\} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{(y-x)}{4}\Bigg[\int_0^1 t^\alpha f'\bigg(a+b-\Big(\frac{t}{2}x+\frac{2-t}{2}y\Big)\bigg)dt \\
&\quad -\int_0^1 t^\alpha f'\bigg(a+b-\Big(\frac{2-t}{2}x+\frac{t}{2}y\Big)\bigg)dt\Bigg] \qquad (2.2.197)
\end{aligned}
$$

eşitliği elde edilir [17].

Sonuç 2.2.112 Lemma 2.2.31'de $\psi(\gamma) = \gamma$, $x = a$ ve $y = b$ olarak alınırsa [63]'de ispatlanan Lemma 3 elde edilir [17].

Sonuç 2.2.113 Lemma 2.2.31'de $\psi(\gamma) = \gamma$ olarak alınırsa [50]'de ispatlanan Lemma 3.4 elde edilir [17].

Teorem 2.2.97 *A_1'deki şartlar sağlanmak üzere $|f'|$, $[a,b]$ aralığında konveks bir fonksiyon olsun. Bu durumda her $x, y \in [a,b]$ için*

$$
\begin{aligned}
&\Bigg|f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right)-\frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(y-x)^\alpha}\Bigg\{\Big(I^{\alpha;\psi}_{\psi^{-1}(a+b-\frac{x+y}{2})^+}\Big)(f\circ\psi)\big(\psi^{-1}(a+b-x)\big) \\
&+\Big(I^{\alpha;\psi}_{\psi^{-1}(a+b-\frac{x+y}{2})^-}\Big)(f\circ\psi)\big(\psi^{-1}(a+b-y)\big)\Bigg\}\Bigg| \\
\leq\ & \frac{(y-x)}{2(\alpha+1)}\left\{|f'(a)|+|f'(b)|-\left(\frac{|f'(x)|+|f'(y)|}{2}\right)\right\} \qquad (2.2.198)
\end{aligned}
$$

eşitsizliği geçerlidir [17].

Sonuç 2.2.114 Teorem 2.2.97'de $\psi(\gamma) = \gamma$ olarak alınırsa [50]'de ispatlanan Teorem 3.9 elde edilir [17].

Teorem 2.2.98 *A_1'deki şartlar sağlanmak üzere $q > 1$ ve $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ için $|f'|^q$, konveks bir fonksiyon olsun. Bu durumda her $x, y \in [a,b]$ için*

$$
\begin{aligned}
&\Bigg|f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right)-\frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(y-x)^\alpha}\Bigg\{\Big(I^{\alpha;\psi}_{\psi^{-1}(a+b-\frac{x+y}{2})^+}\Big)(f\circ\psi)\big(\psi^{-1}(a+b-x)\big) \\
&+\Big(I^{\alpha;\psi}_{\psi^{-1}(a+b-\frac{x+y}{2})^-}\Big)(f\circ\psi)\big(\psi^{-1}(a+b-y)\big)\Bigg\}\Bigg| \\
\leq\ & \frac{(y-x)}{4}\left(\frac{1}{p\alpha+1}\right)^{\frac{1}{p}}\Bigg[\left(|f'(a)|^q+|f'(b)|^q-\left(\frac{1}{4}|f'(x)|^q+\frac{3}{4}|f'(y)|^q\right)\right)^{\frac{1}{q}} \\
&+\left(|f'(a)|^q+|f'(b)|^q-\left(\frac{3}{4}|f'(x)|^q+\frac{1}{4}|f'(y)|^q\right)\right)^{\frac{1}{q}}\Bigg] \qquad (2.2.199)
\end{aligned}
$$

eşitsizliği geçerlidir [17].

Sonuç 2.2.115 Teorem 2.2.98'de $\psi(\gamma) = \gamma$ olarak alınırsa [50]'de ispatlanan Teorem 3.11 elde edilir [17].

Lemma 2.2.32 A_1'deki şartlar sağlanmak üzere $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, (a,b) aralığında iki kez diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
&\frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(y-x)^{\alpha}}\left\{\left(I^{\alpha;\psi}_{\psi^{-1}(a+b-\frac{x+y}{2})+}\right)(f\circ\psi)\big(\psi^{-1}(a+b-x)\big)\right.\\
&\left.+\left(I^{\alpha;\psi}_{\psi^{-1}(a+b-\frac{x+y}{2})-}\right)(f\circ\psi)\big(\psi^{-1}(a+b-y)\big)\right\}-f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right)\\
=\;&\frac{(y-x)^2}{8(\alpha+1}\left[\int_0^1(1-t)^{\alpha+1}f''\left(a+b-\left(\frac{1+t}{2}x+\frac{1-t}{2}y\right)\right)dt\right.\\
&\left.+\int_0^1(1-t)^{\alpha+1}f''\left(a+b-\left(\frac{1-t}{2}x+\frac{1+t}{2}y\right)\right)dt\right] \qquad (2.2.200)
\end{aligned}$$

eşitliği geçerlidir [17].

Sonuç 2.2.59 $x=a$ ve $y=b$ olarak alınırsa

$$\begin{aligned}
&\frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(y-x)^{\alpha}}\left\{\left(I^{\alpha;\psi}_{\psi^{-1}(\frac{a+b}{2})+}\right)(f\circ\psi)\big(\psi^{-1}(b)\big)+\left(I^{\alpha;\psi}_{\psi^{-1}(\frac{a+b}{2})-}\right)(f\circ\psi)\big(\psi^{-1}(a)\big)\right\}\\
&-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\\
=\;&\frac{(b-a)^2}{8(\alpha+1}\left[\int_0^1(1-t)^{\alpha+1}f''\left(\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}b\right)dt\right.\\
&\left.+\int_0^1(1-t)^{\alpha+1}f''\left(\frac{1-t}{2}a+\frac{1+t}{2}b\right)dt\right] \qquad (2.2.201)
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir [17].

Sonuç 2.2.116 Lemma 2.2.32'de $\psi(\gamma)=\gamma$ olarak alınırsa [30]'da ispatlanan Lemma 2 elde edilir. Ayrıca $x=a$ ve $y=b$ olarak alınırsa [48]'de ispatlanan Lemma 1 elde edilir [17].

Sonuç 2.2.117 Lemma 2.2.32'de $\psi(\gamma)=\gamma$, $\alpha=1$, $x=a$ ve $y=b$ olarak alınırsa [48]'de ispatlanan Lemma 2'ye indirgenir [17].

Teorem 2.2.99 A_1'deki şartlar sağlanmak üzere $|f''|$, $[a,b]$ aralığında konveks bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(y-x)^{\alpha}}\left\{\left(I^{\alpha;\psi}_{\psi^{-1}(a+b-\frac{x+y}{2})+}\right)(f\circ\psi)\big(\psi^{-1}(a+b-x)\big)\right.\right.\\
&\left.\left.+\left(I^{\alpha;\psi}_{\psi^{-1}(a+b-\frac{x+y}{2})-}\right)(f\circ\psi)\big(\psi^{-1}(a+b-y)\big)\right\}-f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right)\right|\\
\leq\;&\frac{(y-x)^2}{4(\alpha+1)(\alpha+2)}\left\{|f''(a)|+|f''(b)|-\left(\frac{|f''(x)|+|f''(y)|}{2}\right)\right\} \qquad (2.2.202)
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir [17].

Sonuç 2.2.60 Teorem 2.2.99'da $x = a$ ve $y = b$ olarak alınırsa

$$\begin{aligned} &\left| \frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha}} \left\{ \left(I^{\alpha;\psi}_{\psi^{-1}\left(\frac{a+b}{2}\right)+} \right)(f \circ \psi)\big(\psi^{-1}(b)\big) + \left(I^{\alpha;\psi}_{\psi^{-1}\left(\frac{a+b}{2}\right)-} \right)(f \circ \psi)\big(\psi^{-1}(a)\big) \right\} \right. \\ &\left. -f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| \\ \leq\ & \frac{(b-a)^2}{4(\alpha+1)(\alpha+2)} \left\{ \left(\frac{|f''(a)| + |f''(b)|}{2} \right) \right\} \end{aligned} \tag{2.2.203}$$

eşitsizliği elde edilir [17].

Sonuç 2.2.118 Teorem 2.2.99'da $\psi(\gamma) = \gamma$ olarak alınırsa [30]'da Teorem 5 elde edilir. Ayrıca $x = a$ ve $y = b$ olarak alınırsa [48]'de ispatlanan Teorem 5 elde edilir [17].

Sonuç 2.2.61 Teorem 2.2.99'da $\psi(\gamma) = \gamma$, $x = a$, $y = b$ ve $\alpha = 1$ olarak alınırsa [59]'da Önerme 1 elde edilir [17].

Teorem 2.2.100 A_1'deki şartlar sağlanmak üzere $q > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ için $|f''|^q$ konveks bir fonksiyon olsun. Bu durumda her $x, y \in [a, b]$ için

$$\begin{aligned} &\left| \frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(y-x)^{\alpha}} \left\{ \left(I^{\alpha;\psi}_{\psi^{-1}\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right)+} \right)(f \circ \psi)\big(\psi^{-1}(a+b-x)\big) \right. \right. \\ &\left. \left. + \left(I^{\alpha;\psi}_{\psi^{-1}\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right)-} \right)(f \circ \psi)\big(\psi^{-1}(a+b-y)\big) \right\} - f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right) \right| \\ \leq\ & \frac{(y-x)^2}{8(\alpha+1)} \left(\frac{1}{p(\alpha+1)+1} \right)^{\frac{1}{p}} \left[\left(|f''(a)|^q + |f''(b)|^q - \frac{|3f''(x)|^q + |f''(y)|^q}{4} \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\ &\left. \left(|f''(a)|^q + |f''(b)|^q - \frac{|f''(x)|^q + |3f''(y)|^q}{4} \right)^{\frac{1}{q}} \right] \end{aligned} \tag{2.2.204}$$

eşitsizliği geçerlidir [17].

Sonuç 2.2.119 Teorem 2.2.100'de $\psi(\gamma) = \gamma$ olarak alınırsa [30]'da Teorem 6 elde edilir [17].

Lemma 2.2.33 A_1'deki şartlar sağlanmak üzere $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, (a, b) aralığında iki kez diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} &\frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(y-x)^{\alpha}} \left\{ \left(I^{\alpha;\psi}_{\psi^{-1}\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right)+} \right)(f \circ \psi)\big(\psi^{-1}(a+b-x)\big) \right. \\ &\left. + \left(I^{\alpha;\psi}_{\psi^{-1}\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right)-} \right)(f \circ \psi)\big(\psi^{-1}(a+b-y)\big) \right\} - f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right) \\ =\ & \frac{(y-x)^2}{8(\alpha+1} \left[\int_0^1 t^{\alpha+1} f''\left(a+b-\left(\frac{2-t}{2}x+\frac{t}{2}y\right)\right)dt \right. \end{aligned}$$

$$+\int_0^1 t^{\alpha+1} f''\left(a+b-\left(\frac{t}{2}x+\frac{2-t}{2}y\right)\right)dt\Bigg] \tag{2.2.205}$$

eşitliği geçerlidir [17].

Sonuç 2.2.62 Lemma 2.2.33'de $x=a$ ve $y=b$ olarak alınırsa

$$\begin{aligned}
&\frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha}}\left\{\left(I^{\alpha;\psi}_{\psi^{-1}(\frac{a+b}{2})+}\right)(f\circ\psi)\left(\psi^{-1}(b)\right)+\left(I^{\alpha;\psi}_{\psi^{-1}(\frac{a+b}{2})-}\right)(f\circ\psi)\left(\psi^{-1}(a)\right)\right\}\\
&-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\\
\leq\ &\frac{(b-a)^2}{8(\alpha+1)}\left[\int_0^1 t^{\alpha+1} f''\left(\frac{2-t}{2}x+\frac{t}{2}y\right)dt+\int_0^1 t^{\alpha+1} f''\left(\frac{t}{2}x+\frac{2-t}{2}y\right)dt\right]
\end{aligned} \tag{2.2.206}$$

eşitsizliği elde edilir [17].

Sonuç 2.2.63 Lemma 2.2.33'de $\Psi(\gamma)=\gamma$ olarak alınırsa

$$\begin{aligned}
&\frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(y-x)^{\alpha}}\left\{\left(I^{\alpha;\psi}_{\psi^{-1}(a+b-\frac{x+y}{2})+}\right)(f\circ\psi)\left(\psi^{-1}(a+b-x)\right)\right.\\
&\left.+\left(I^{\alpha;\psi}_{\psi^{-1}(a+b-\frac{x+y}{2})-}\right)(f\circ\psi)\left(\psi^{-1}(a+b-y)\right)\right\}-f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right)\\
\leq\ &\frac{(y-x)^2}{8(\alpha+1)}\left[\int_0^1 t^{\alpha+1} f''\left(a+b-\left(\frac{2-t}{2}x+\frac{t}{2}y\right)\right)dt\right.\\
&\left.+\int_0^1 t^{\alpha+1} f''\left(a+b-\left(\frac{t}{2}x+\frac{2-t}{2}y\right)\right)dt\right]
\end{aligned} \tag{2.2.207}$$

eşitsizliği elde edilir. Ayrıca $x=a$ ve $y=b$ olarak alınırsa

$$\begin{aligned}
&\frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha}}\left\{\left(I^{\alpha}_{(\frac{a+b}{2})+}\right)f(b)+I^{\alpha}_{(\frac{a+b}{2})-}f(a)\right\}-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\\
=\ &\frac{(b-a)^2}{8(\alpha+1)}\left[\int_0^1 t^{\alpha+1} f''\left(\frac{2-t}{2}x+\frac{t}{2}y\right)dt\right.\\
&\left.+\int_0^1 t^{\alpha+1} f''\left(\frac{t}{2}x+\frac{2-t}{2}y\right)dt\right]
\end{aligned} \tag{2.2.208}$$

eşitsizliği elde edilir [17].

Lemma 2.2.34 A_1'deki şartlar sağlanmak üzere $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, (a,b) aralığında iki kez diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
&\frac{2^{\alpha-2}\Gamma(\alpha+1)}{(y-x)^{\alpha-1}}\left\{\left(I^{\alpha-1;\psi}_{\psi^{-1}(a+b-\frac{x+y}{2})+}\right)(f\circ\Psi)\left(\psi^{-1}(a+b-x)\right)\right.\\
&\left.+\left(I^{\alpha-1;\psi}_{\psi^{-1}(a+b-\frac{x+y}{2})-}\right)(f\circ\psi)\left(\psi^{-1}(a+b-y)\right)\right\}-f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right)
\end{aligned}$$

$$= \frac{(y-x)^2}{\alpha.2^{2-\alpha}}\left[\int_0^{\frac{1}{2}} t^\alpha f''\left(a+b-(ty+(1-t)x)\right)dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)^\alpha f''\left(a+b-(ty+(1-t)x)\right)dt\right] \tag{2.2.209}$$

eşitliği geçerlidir [17].

Sonuç 2.2.64 Lemma 2.2.34'de $x=a$ ve $y=b$ olarak alınırsa

$$\frac{2^{\alpha-2}\Gamma(\alpha)}{(b-a)^{\alpha-1}}\left\{\left(I^{\alpha;\psi}_{\psi^{-1}(\frac{a+b}{2})+}\right)(f\circ\psi)\big(\psi^{-1}(b)\big)+\left(I^{\alpha;\psi}_{\psi^{-1}(\frac{a+b}{2})-}\right)(f\circ\psi)\big(\psi^{-1}(a)\big)\right\} - f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$
$$= \frac{(b-a)^2}{\alpha.2^{2-\alpha}}\left[\int_0^{\frac{1}{2}} t^\alpha f''\big(ta+(1-t)b\big)dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)^\alpha f''\big(ta+(1-t)b\big)dt\right] \tag{2.2.210}$$

eşitliği elde edilir [17].

Sonuç 2.2.65 Lemma 2.2.34'de $\Psi(\gamma)=\gamma$ olarak alınırsa

$$\frac{2^{\alpha-2}\Gamma(\alpha)}{(y-x)^{\alpha-1}}\left\{\left(I^{\alpha}_{(a+b-\frac{x+y}{2})+}\right)f(a+b-x)+\left(I^{\alpha}_{(a+b-\frac{x+y}{2})-}\right)f(a+b-y)\right. - f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right)$$
$$= \frac{(y-x)^2}{\alpha.2^{2-\alpha}}\left[\int_0^{\frac{1}{2}} t^\alpha f''\big(a+b-(ty+(1-t)x\big)dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)^\alpha f''\big(a+b-(ty+(1-t)x)\big)dt\right] \tag{2.2.211}$$

eşitliği elde edilir [17].

Teorem 2.2.101 A_1'deki şartlar sağlanmak üzere $|f''|$, $[a,b]$ aralığında konveks bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$\left|\frac{2^{\alpha-2}\Gamma(\alpha)}{(y-x)^{\alpha-1}}\left\{\left(I^{\alpha-1;\psi}_{\psi^{-1}(a+b-\frac{x+y}{2})+}\right)(f\circ\psi)\big(\psi^{-1}(a+b-x)\big) + \left(I^{\alpha-1;\psi}_{\psi^{-1}(a+b-\frac{x+y}{2})-}\right)(f\circ\psi)\big(\psi^{-1}(a+b-y)\big)\right\} - f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right)\right|$$
$$\leq \frac{(y-x)^2}{4\alpha(\alpha+1)}\left\{|f''(a)|+|f''(b)|-\frac{|f''(x)|+|f''(y)|}{2}\right\} \tag{2.2.212}$$

eşitsizliği geçerlidir [17].

Sonuç 2.2.66 Teorem 2.2.101'de $x = a$ ve $y = b$ olarak alınırsa

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{2^{\alpha-2}\Gamma(\alpha)}{(b-a)^{\alpha-1}}\left\{\left(I^{\alpha-1;\psi}_{\psi^{-1}(\frac{a+b}{2})+}\right)(f\circ\psi)\big(\psi^{-1}(b)\big)+\left(I^{\alpha-1;\psi}_{\psi^{-1}(\frac{a+b}{2})-}\right)(f\circ\psi)\big(\psi^{-1}(a)\big)\right\}\right.\\
&\left.-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|\\
=\;&\frac{(b-a)^2}{8\alpha(\alpha+1)}\left(|f''(a)|+|f''(b)|\right) \qquad (2.2.213)
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir [17].

Sonuç 2.2.67 Teorem 2.2.101'de $\Psi(\gamma) = \gamma$ olarak alınırsa

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{2^{\alpha-2}\Gamma(\alpha)}{(y-x)^{\alpha-1}}\left\{\left(J^{\alpha-1}_{(a+b-\frac{x+y}{2})+}\right)f(a+b-x)+\left(J^{\alpha-1}_{(a+b-\frac{x+y}{2})-}\right)f(a+b-y)\right.\right.\\
&\left.-f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right)\right|\\
\leq\;&\frac{(y-x)^2}{4\alpha(\alpha+1)}\left\{|f''(a)|+|f''(b)|-\frac{|f''(x)|+|f''(y)|}{2}\right\} \qquad (2.2.214)
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir [17].

Sonuç 2.2.120 Teorem 2.2.101'de $\psi(\gamma) = \gamma$, $x = a$ ve $y = b$ olarak alınırsa [12]'deki $m = s = 1$ özel durumu için Teorem 2.1 elde edilir. Ayrıca $\alpha = 2$ için [59]'da Önerme 1 elde edilir [17].

Teorem 2.2.102 A_1'deki şartlar sağlanmak üzere $q > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ için $|f''|^q$ konveks bir fonksiyon olsun. Bu durumda her $x, y \in [a, b]$ için

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{2^{\alpha-2}\Gamma(\alpha)}{(y-x)^{\alpha-1}}\left\{\left(I^{\alpha-1;\psi}_{\psi^{-1}(a+b-\frac{x+y}{2})+}\right)(f\circ\psi)\big(\psi^{-1}(a+b-x)\big)\right.\right.\\
&\left.\left.+\left(I^{\alpha-1;\psi}_{\psi^{-1}(a+b-\frac{x+y}{2})-}\right)(f\circ\psi)\big(\psi^{-1}(a+b-y)\big)\right\}-f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right)\right|\\
\leq\;&\frac{(y-x)^2}{\alpha.2^{2-\alpha}}\left(\frac{1}{2^{p\alpha+1}(p\alpha+1)}\right)^{\frac{1}{p}}\left[\left(\frac{|f''(a)|^q+|f''(b)|^q}{2}-\frac{|3f''(x)|^q+|f''(y)|^q}{8}\right)^{\frac{1}{q}}\right.\\
&\left.+\left(\frac{|f''(a)|^q+|f''(b)|^q}{2}-\frac{|f''(x)|^q+|3f''(y)|^q}{8}\right)^{\frac{1}{q}}\right] \qquad (2.2.215)
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir [17].

Sonuç 2.2.68 Teorem 2.2.102'de $x = a$ ve $y = b$ olarak alınırsa

$$\left|\frac{2^{\alpha-2}\Gamma(\alpha)}{(b-a)^{\alpha-1}}\left\{\left(I^{\alpha-1;\psi}_{\psi^{-1}(\frac{a+b}{2})+}\right)(f\circ\psi)\big(\psi^{-1}(b)\big)+\left(I^{\alpha-1;\psi}_{\psi^{-1}(\frac{a+b}{2})-}\right)(f\circ\psi)\big(\psi^{-1}(a)\big)\right\}\right.$$

$$-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\Bigg|$$

$$\leq \frac{(y-x)^2}{\alpha.2^{2-\alpha}}\left(\frac{1}{2^{p\alpha+1}(p\alpha+1)}\right)^{\frac{1}{p}}\left[\left(\frac{|f''(a)|^q+3|f''(b)|^q}{8}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{3|f''(a)|^q+|f''(b)|^q}{8}\right)^{\frac{1}{q}}\right] \quad (2.2.216)$$

eşitsizliği elde edilir [17].

Sonuç 2.2.69 Teorem 2.2.102'de $\Psi(\gamma)=\gamma$ olarak alınırsa

$$\left|\frac{2^{\alpha-2}\Gamma(\alpha)}{(y-x)^{\alpha-1}}\left\{\left(J^{\alpha-1}_{(a+b-\frac{x+y}{2})^+}\right)f(a+b-x)+\left(J^{\alpha-1}_{(a+b-\frac{x+y}{2})^-}\right)f(a+b-y)\right.\right.$$
$$\left.-f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right)\right|$$
$$\leq \frac{(y-x)^2}{\alpha.2^{2-\alpha}}\left(\frac{1}{2^{p\alpha+1}(p\alpha+1)}\right)^{\frac{1}{p}}\left[\left(\frac{|f''(a)|^q+|f''(b)|^q}{2}-\frac{3|f''(x)|^q+|f''(y)|^q}{8}\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$
$$\left.+\left(\frac{|f''(a)|^q+|f''(b)|^q}{2}-\frac{|f''(x)|^q+3|f''(y)|^q}{8}\right)^{\frac{1}{q}}\right] \quad (2.2.217)$$

eşitsizliği elde edilir [17].

Teorem 2.2.103 A_1'deki şartlar sağlanmak üzere $q\geq 1$ için $|f''|^q$ konveks bir fonksiyon olsun. Bu durumda her $x,y\in[a,b]$ için

$$\left|\frac{2^{\alpha-2}\Gamma(\alpha)}{(y-x)^{\alpha-1}}\left\{\left(I^{\alpha-1;\psi}_{\psi^{-1}(a+b-\frac{x+y}{2})^+}\right)(f\circ\psi)\left(\psi^{-1}(a+b-x)\right)\right.\right.$$
$$\left.\left.+\left(I^{\alpha-1;\psi}_{\psi^{-1}(a+b-\frac{x+y}{2})^-}\right)(f\circ\psi)\left(\psi^{-1}(a+b-y)\right)\right\}-f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right)\right|$$
$$\leq \frac{(y-x)^2}{\alpha.2^{2-\alpha}}\left(\frac{1}{2^{\alpha+1}(\alpha+1)}\right)^{1-\frac{1}{q}}$$
$$\times\left[\left(\frac{|f''(a)|^q+|f''(b)|^q}{2^{\alpha+1}(\alpha+1)}-\frac{(\alpha+3)|f''(x)|^q}{2^{\alpha+2}(\alpha+1)(\alpha+2)}-\frac{|f''(y)|^q}{2^{\alpha+2}(\alpha+2)}\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$
$$\left.\left(\frac{|f''(a)|^q+|f''(b)|^q}{2^{\alpha+1}(\alpha+1)}-\frac{|f''(x)|^q}{2^{\alpha+2}(\alpha+2)}-\frac{(\alpha+3)|f''(y)|^q}{2^{\alpha+2}(\alpha+1)(\alpha+2)}\right)^{\frac{1}{q}}\right] \quad (2.2.218)$$

eşitsizliği geçerlidir [17].

Sonuç 2.2.121 Teorem 2.2.103'de $\Psi(\gamma)=\gamma$, $x=a$ ve $y=b$ olarak alınırsa [12]'de $m=s=1$ özel durumu için Teorem 2.2 elde edilir. Ayrıca $\alpha=2$ için [59]'deki Önerme 5 elde edilir [17].

3. ARAŞTIRMA BULGULARI

3.1 Raina'nın Genelleştirilmiş Kesirli İntegral Operatörü İçin Hermite-Hadamard-Mercer Tipli Eşitsizlikler

Bu bölümde, ilk olarak Riemann-Liouville kesirli integralin bir genelleştirmesi olan ve Raina tarafından tanımlanan genelleştirilmiş kesirli integaral operatörü kullanılarak Hermite-Hadamard-Mercer tipli eşitsizlikler verilecektir.

Tanım 3.1.1 (Genelleştirilmiş Kesirli İntegral Operatörü) $\sigma(k)\,(k \in \mathbb{N} = \mathbb{N} \cup \{0\})$ pozitif reel sayıların sınırlı bir pozitif gerçek sayılar dizisi olmak üzere,

$$\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}(x) = \mathcal{F}^{\sigma(0),\sigma(1),\ldots}_{\rho,\lambda}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sigma(k)}{\Gamma(\rho k + \lambda)} x^k, \quad (\rho, \lambda > 0; |x| < \mathbb{R}) \tag{3.1.1}$$

şeklinde verilen fonksiyonların yeni bir sınıfı Raina tarafından tanımlanmıştır [57].

(3.1.1) yardımıyla, Raina [57] ve Agarval ve arkadaşları [6] $\lambda, \rho > 0$, $\omega \in \mathbb{R}$ ve $f(t)$ integrallenebilir bir fonksiyon olmak üzere sol ve sağ taraflı kesirli integral operatörlerini sırasıyla,

$$\left(\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,a^+;\omega} f\right)(x) = \int_a^x (x-t)^{\lambda-1} \mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}[\omega(x-t)^{\rho}] f(t)dt, \qquad (x > a > 0) \tag{3.1.2}$$

$$\left(\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,b^-;\omega} f\right)(x) = \int_x^b (t-x)^{\lambda-1} \mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}[\omega(t-x)^{\rho}] f(t)dt, \qquad (0 < x < b) \tag{3.1.3}$$

şeklinde tanımlamışlardır. Buradan yola çıkarak

$$\mathfrak{M} := \mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}[\omega(b-a)^{\rho}] < \infty$$

ise $\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,a+;\omega} f(x)$ ve $\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,b-;\omega} f(x)$, $L[a,b]$ aralığında sınırlı integral operatörleridir. Aslında $f \in L(a,b)$ için

$$||\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,a+;w} f(x)||_1 \leq \mathfrak{M}(b-a)^{\lambda} ||f||_1$$

ve

$$||\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,b-;w} f(x)||_1 \leq \mathfrak{M}(b-a)^{\lambda} ||f||_1$$

olur. Burada

$$||f||_p := \left(\int_a^b |f(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

şeklindedir. Ayrıca yukarıda ifade edilen genelleştirilmiş kesirli integral operatörü için $\sigma(k)$ katsayısının özelleştirilmesiyle birçok kesirli integral operatörü elde edilir. Örneğin (3.1.2) ve (3.1.3)'de $\lambda = \alpha$, $\sigma(0) = 1$ ve $\omega = 0$ olarak alınırsa (2.2.1) ve (2.2.2)'de ifade edilen klasik sol ve sağ taraflı Riemann-Liouville kesirli integrali elde edilir.

Teorem 3.1.1 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, konveks bir fonksiyon olsun. Bu durumda her $x, y \in [a,b]$, $x < y$ ve $\lambda, \rho, \omega > 0$ için

$$\begin{aligned} & f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right) \\ \leq\ & f(a)+f(b)-\frac{1}{2(y-x)^{\lambda}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}[\omega(y-x)^{\rho}]}\left[(\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,x^{+};\omega}f)(y)+(\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,y^{-};\omega}f)(x)\right] \\ \leq\ & f(a)+f(b)-f\left(\frac{x+y}{2}\right) \end{aligned} \tag{3.1.4}$$

ve

$$\begin{aligned} f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right) &\leq \frac{1}{2(y-x)^{\lambda}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}[\omega(y-x)^{\rho}]} \\ &\quad \times\left[(\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,(a+b-y)^{+};\omega}f)(a+b-x)+(\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,(a+b-x)^{-};\omega}f)(a+b-y)\right] \\ &\leq \frac{f(a+b-x)+f(a+b-y)}{2} \\ &\leq f(a)+f(b)-\frac{f(x)+f(y)}{2} \end{aligned} \tag{3.1.5}$$

eşitsizlikleri geçerlidir.

İspat. Jensen eşitsizliği kullanılarak her $x_1, y_1 \in [a,b]$ için

$$f\left(a+b-\frac{x_1+y_1}{2}\right) \leq f(a)+f(b)-\frac{f(x_1)+f(y_1)}{2} \tag{3.1.6}$$

yazılır. $x, y \in [a,b]$ ve $t \in [0,1]$ için (3.1.6)'da $x_1 = tx+(1-t)y$ ve $y_1 = (1-t)x+ty$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right) \leq f(a)+f(b)-\frac{f\left(tx+(1-t)y\right)+f\left((1-t)x+ty\right)}{2} \tag{3.1.7}$$

elde edilir. (3.1.7)'nin her iki tarafını $t^{\lambda-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}\left[\omega(y-x)^{\rho}t^{\rho}\right]$ ile çarpar $[0,1]$ aralığında t değişkenine göre integrali alınırsa

$$\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}[\omega(y-x)^{\rho}]f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&\leq [f(a)+f(b)]\int_0^1 t^{\lambda-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}[\omega(y-x)^{\rho}t^{\rho}]dt \\
&\quad -\frac{1}{2}\left[\int_0^1 t^{\lambda-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}[\omega(y-x)^{\rho}t^{\rho}]f(tx+(1-t)y)dt\right. \\
&\quad \left.+\int_0^1 t^{\lambda-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}[\omega(y-x)^{\rho}t^{\rho}]f((1-t)x+ty)dt\right] \\
&= [f(a)+f(b)]\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}[\omega(y-x)^{\rho}] \\
&\quad -\frac{1}{2}\left[\int_x^y \left(\frac{y-u}{y-x}\right)^{\lambda-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}\left[\omega(y-x)^{\rho}\left(\frac{y-u}{y-x}\right)^{\rho}\right]f(u)\frac{du}{y-x}\right. \\
&\quad \left.+\int_x^y \left(\frac{u-x}{y-x}\right)^{\lambda-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}\left[\omega(y-x)^{\rho}\left(\frac{u-x}{y-x}\right)^{\rho}\right]f(u)\frac{du}{y-x}\right] \\
&= [f(a)+f(b)]\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}[\omega(y-x)^{\rho}] \\
&\quad -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(y-x)^{\lambda}}\int_x^y (y-u)^{\lambda-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}[\omega(y-u)^{\rho}]f(u)du\right. \\
&\quad \left.+\frac{1}{(y-x)^{\lambda}}\int_x^y (u-x)^{\lambda-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}[\omega(u-x)^{\rho}]f(u)du\right]
\end{aligned}
$$

olur yani

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}[\omega(y-x)^{\rho}]f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right) &\leq [f(a)+f(b)]\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}[\omega(y-x)^{\rho}] \\
&\quad -\frac{1}{2(y-x)^{\lambda}}\left[(\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,x^+;\omega}f)(y)+(\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,y^-;\omega}f)(x)\right]
\end{aligned} \tag{3.1.8}
$$

elde edilir. Böylece (3.1.4)'ün ilk eşitsizliği ispatlanmış olur. (3.1.4)'ün ikinci eşitsizliğinin ispatı için ilk olarak f bir konveks fonksiyon olsun. Bu durumda $t\in[0,1]$ için

$$
\begin{aligned}
f\left(\frac{x+y}{2}\right) &= f\left(\frac{tx+(1-t)y+(1-t)x+ty}{2}\right) \\
&\leq \frac{f(tx+(1-t)y)+f((1-t)x+ty)}{2}
\end{aligned} \tag{3.1.9}
$$

yazılır. (3.1.9)'un her iki tarafını $t^{\lambda-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}\left[\omega(y-x)^{\rho}t^{\rho}\right]$ ile çarpar $[0,1]$ aralığında t değişkenine göre integrali alınırsa

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}[\omega(y-x)^{\rho}]f\left(\frac{x+y}{2}\right) \\
&\leq \frac{1}{2}\left[\int_0^1 t^{\lambda-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}[\omega(y-x)^{\rho}t^{\rho}]f(tx+(1-t)y)d\xi\right. \\
&\quad \left.+\int_0^1 t^{\lambda-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}[\omega(y-x)^{\rho}t^{\rho}]f((1-t)x+ty)dt\right] \\
&= \frac{1}{2(y-x)^{\lambda}}\left[(\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,x^+;\omega}f)(y)+(\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,y^-;\omega}f)(x)\right]
\end{aligned}
$$

yazılır böylece

$$-f\left(\frac{x+y}{2}\right)\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}[\omega(y-x)^{\rho}] \geq \frac{1}{2(y-x)^{\lambda}}\left[(\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,x^+;\omega}f)(y)+(\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,y^-;\omega}f)(x)\right] \quad (3.1.10)$$

eşitsizliği elde edilir. (3.1.10)'un her iki tarafına $f(a)+f(b)$ eklenirse (3.1.4) eşitsizliği ispatlanmış olur. Şimdi (3.1.5) ispatlanacaktır. f'in konveksliğinden her $x_1, y_1 \in [a,b]$ için

$$\begin{aligned} f\left(a+b-\frac{x_1+y_1}{2}\right) &= f\left(\frac{a+b-x_1+a+b-y_1}{2}\right) \\ &\leq \frac{1}{2}\left[f(a+b-x_1)+f(a+b-y_1)\right] \qquad (3.1.11) \end{aligned}$$

yazılır. (3.1.11)'de her $x, y \in [a,b]$ ve $t \in [0,1]$ için $a+b-x_1 = t(a+b-x)+(1-t)(a+b-y)$ ve $a+b-y_1 = (1-t)(a+b-x)+t(a+b-y)$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$\begin{aligned} & f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right) \qquad (3.1.12) \\ \leq\ & \frac{1}{2}\left[f(t(a+b-x)+(1-t)(a+b-y))+f((1-t)(a+b-x)+t(a+b-y))\right] \end{aligned}$$

yazılır. (3.1.12)'nin her iki tarafını $t^{\lambda-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}\left[\omega(y-x)^{\rho}t^{\rho}\right]$ ile çarpar $[0,1]$ aralığında t değişkenine göre integrali alınırsa

$$\begin{aligned} & \mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}\left[\omega(y-x)^{\rho}\right] f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right) \\ \leq\ & \frac{1}{2}\left[\int_0^1 t^{\lambda-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}[\omega(y-x)^{\rho}t^{\rho}]f(t(a+b-x)+(1-t)(a+b-y))dt\right. \\ & \left.+\int_0^1 t^{\lambda-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}[\omega(y-x)^{\rho}t^{\rho}]f((1-t)(a+b-x)+t(a+b-y))dt\right] \\ =\ & \frac{1}{2(y-x)^{\lambda}}\left[\int_{a+b-y}^{a+b-x}(u-(a+b-y))^{\lambda-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}[\omega(u-(a+b-y))^{\rho}]f(u)du\right. \\ & \left.+\int_{a+b-y}^{a+b-x}((a+b-x)-u)^{\lambda-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}[\omega((a+b-x)-u)^{\rho}]f(u)du\right] \\ =\ & \frac{1}{2(y-x)^{\lambda}}\left[\left(\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,(a+b-y)^+;\omega}f\right)(a+b-x)+\left(\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,(a+b-x)^-;\omega}f\right)(a+b-y)\right] \end{aligned}$$

ve bu durumda

$$\begin{aligned} & \mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}\left[\omega(y-x)^{\rho}\right] f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right) \\ \leq\ & \frac{1}{2(y-x)^{\lambda}}\left[\left(\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,(a+b-y)^+;\omega}f\right)(a+b-x)+\left(\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,(a+b-x)^-;\omega}f\right)(a+b-y)\right] \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece (3.1.5)'in ilk tarafı ispatlanır. İkinci tarafın ispatı için f'in konveksliği kullanılarak $t \in [0,1]$ için

$$f(t(a+b-x)+(1-t)(a+b-y)) \leq tf(a+b-x)+(1-t)f(a+b-y)$$

ve

$$f((1-t)(a+b-x)+t(a+b-y)) \leq (1-t)f(a+b-x)+tf(a+b-y)$$

yazılır. Bu eşitsizlikler taraf tarafa toplanır ve Jensen-Mercer eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} & f(t(a+b-x)+(1-t)(a+b-y))+f((1-t)(a+b-x)+t(a+b-y)) \\ \leq\ & f(a+b-x)+f(a+b-y) \\ \leq\ & 2[f(a)+f(b)]-[f(x)+f(y)]. \end{aligned} \tag{3.1.13}$$

elde edilir. (3.1.13)'ün her iki tarafını $t^{\lambda-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}\left[\omega(y-x)^{\rho}t^{\rho}\right]$ ile çarpar $[0,1]$ aralığında t değişkenine göre integrali alınırsa (3.1.5)'in ikinci ve üçüncü eşitsizlikleri elde edilir.

Teorem 3.1.2 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, konveks bir fonksiyon olsun. Bu durumda her $x,y\in[a,b]$, $x<y$ ve $\lambda,\rho,\omega>0$ için

$$\begin{aligned} f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right) &\leq \frac{2^{\lambda-1}}{(y-x)^{\lambda}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}\left[\omega(y-x)^{\rho}\frac{1}{2^{\rho}}\right]}\left[\left(\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,(a+b-\frac{x+y}{2})^{-};\omega}f\right)(a+b-y)\right. \\ &\quad \left.+\left(\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,(a+b-\frac{x+y}{2})^{+};\omega}f\right)(a+b-x)\right] \\ &\leq f(a)+f(b)]-\frac{f(x)+f(y)}{2} \end{aligned} \tag{3.1.14}$$

eşitsizlikleri geçerlidir.

İspat. (3.1.4)'ün ilk eşitsizliğini ispatlayalım. (3.1.11)'de $x,y\in[a,b]$ ve $t\in[0,1]$ için $x_1=\frac{t}{2}x+\frac{2-t}{2}y$ ve $y_1=\frac{2-t}{2}x+\frac{t}{2}y$ olarak alınırsa

$$\begin{aligned} & 2f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right) \\ \leq\ & \left[f\left(a+b-\left(\frac{t}{2}x+\frac{2-t}{2}\right)y\right)+f\left(a+b-\left(\frac{2-t}{2}\right)x+\frac{t}{2}y\right)\right] \end{aligned} \tag{3.1.15}$$

yazılır. Bu durumda (3.1.15)'in her iki tarafını $t^{\lambda-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}\left[\omega(y-x)^{\rho}\left(\frac{t}{2}\right)^{\rho}\right]$ ile çarpar $[0,1]$ aralığında t değişkenine göre integrali alınırsa

$$2\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}\left[\omega(y-x)^{\rho}\frac{1}{2^{\rho}}\right]f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \int_0^1 t^{\lambda-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}\left[\omega(y-x)^{\rho}\left(\frac{t}{2}\right)^{\rho}\right] f\left(a+b-\left(\frac{t}{2}x+\frac{2-t}{2}y\right)\right)dt \\
&\quad+\int_0^1 t^{\lambda-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}\left[\omega(y-x)^{\rho}\left(\frac{t}{2}\right)^{\rho}\right] f\left(a+b-\left(\frac{2-t}{2}x+\frac{t}{2}y\right)\right)dt \\
&= \frac{2^{\lambda}}{(y-x)^{\lambda}}\left[\int_{a+b-y}^{a+b-\frac{x+y}{2}}(u-(a+b-y))^{\lambda-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}[\omega(u-(a+b-y))^{\rho}]f(u)du\right. \\
&\quad\left.+\int_{a+b-\frac{x+y}{2}}^{a+b-x}((a+b-x)-u)^{\lambda-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}[\omega((a+b-x)-u)^{\rho}]f(u)du\right] \\
&= \frac{2^{\lambda}}{(y-x)^{\lambda}}\left[\left(\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,(a+b-\frac{x+y}{2})^-;\omega}f\right)(a+b-y)+\left(\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,(a+b-\frac{x+y}{2})^+;\omega}f\right)(a+b-x)\right]
\end{aligned}
$$

olur böylece

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}\left[\omega(y-x)^{\rho}\frac{1}{2^{\rho}}\right] f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right) \\
&\leq \frac{2^{\lambda-1}}{(y-x)^{\lambda}}\left[\left(\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,(a+b-\frac{x+y}{2})^-;\omega}f\right)(a+b-y)+\left(\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,(a+b-\frac{x+y}{2})^+;\omega}f\right)(a+b-x)\right]
\end{aligned}
$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece birinci eşitsizlik ispatlanmış olur. (3.1.14)'ün ikinci eşitsizliği için Jensen-Mercer eşitsizliği kullanılarak

$$
f\left(a+b-\left(\frac{t}{2}x+\frac{2-t}{2}y\right)\right)\leq f(a)+f(b)-\left[\frac{t}{2}f(x)+\frac{2-t}{2}f(y)\right]
$$

ve

$$
f\left(a+b-\left(\frac{2-t}{2}x+\frac{t}{2}y\right)\right)\leq f(a)+f(b)-\left[\frac{2-t}{2}f(x)+\frac{t}{2}f(y)\right]
$$

yazılır. Bu eşitsizlikler taraf tarafa toplanırsa

$$
\begin{aligned}
&f\left(a+b-\left(\frac{t}{2}x+\frac{2-t}{2}y\right)\right)+f\left(a+b-\left(\frac{2-t}{2}x+\frac{t}{2}y\right)\right) \\
&\leq 2[f(a)+f(b)]-(f(x)+f(y))
\end{aligned}
\tag{3.1.16}
$$

eşitsizliği elde edilir. (3.1.16)'nın her iki tarafını $t^{\lambda-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}\left[\omega(y-x)^{\rho}\left(\frac{t}{2}\right)^{\rho}\right]$ ile çarpar $[0,1]$ aralığında t değişkenine göre integrali alınırsa (3.1.14)'ün ikinci eşitsizliği elde edilir.

Lemma 3.1.1 $a<b$ olmak üzere $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ (a,b) aralığında diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. $f'\in L[a,b]$ ise her $x,y\in[a,b]$, $x<y$ ve $\lambda,\rho,\omega>0$ ve $t\in[a,b]$ olmak üzere kesirli integraller için

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}\left[\omega(y-x)^{\rho}\right]\frac{f(a+b-x)+f(a+b-y)}{2}-\frac{1}{2(y-x)^{\lambda}} \\
&\times\left[\left(\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,(a+b-x)^-;\omega}f\right)(a+b-y)+\left(\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,(a+b-y)^+;\omega}f\right)(a+b-x)\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{y-x}{2}\left[\int_0^1 t^{\lambda}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}\left[\omega(y-x)^{\rho}t^{\rho}\right] f'(a+b-(tx+(1-t)y))dt\right. \\
&\quad \left. -\int_0^1 (1-t)^{\lambda}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}\left[\omega(y-x)^{\rho}(1-t)^{\rho}\right] f'(a+b-(tx+(1-t)y))dt\right] \quad (3.1.17)
\end{aligned}
$$

eşitliği geçerlidir.

İspat. Eşitliğin sağ tarafını

$$
I = \frac{y-x}{2}(I_1 - I_2), \tag{3.1.18}
$$

olarak ele alalım. Burada I_1 ve I_2 ayrı ayrı hesaplanırsa

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^1 t^{\lambda}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}\left[\omega(y-x)^{\rho}t^{\rho}\right] f'(a+b-(tx+(1-t)y))dt \\
&= t^{\lambda}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}\left[\omega(y-x)^{\rho}t^{\rho}\right] \frac{f(a+b-(tx+(1-t)y))}{y-x}\Bigg|_0^1 \quad (3.1.19) \\
&\quad -\frac{1}{y-x}\int_0^1 t^{\lambda-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}\left[\omega(y-x)^{\rho}t^{\rho}\right] f(a+b-(tx+(1-t)y))dt \\
&= \frac{\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}\left[\omega(y-x)^{\rho}\right] f(a+b-x)}{y-x} - \frac{1}{(y-x)^{\lambda+1}}\left(\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,(a+b-x)^{-};\omega}f\right)(a+b-y)
\end{aligned}
$$

yazılır ve benzer şekilde

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \int_0^1 (1-t)^{\lambda}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}\left[\omega(y-x)^{\rho}(1-t)^{\rho}\right] f'(a+b-(tx+(1-t)y))dt \\
&= (1-t)^{\lambda}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}\left[\omega(y-x)^{\rho}(1-t)^{\rho}\right] \frac{f(a+b-(tx+(1-t)y))}{y-x}\Bigg|_0^1 \quad (3.1.20) \\
&\quad +\frac{1}{y-x}\int_0^1 (1-t)^{\lambda-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}\left[\omega(y-x)^{\rho}(1-t)^{\rho}\right] f(a+b-(tx+(1-t)y))dt \\
&= -\frac{\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}\left[\omega(y-x)^{\rho}\right] f(a+b-y)}{y-x} + \frac{1}{(y-x)^{\lambda+1}}\left(\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,(a+b-y)^{+};\omega}f\right)(a+b-x)
\end{aligned}
$$

olur. (3.1.19) ve (3.1.20) ile (3.1.18) eşitsizlikleri kullanılarak (3.1.17) eşitsizliği elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Lemma 3.1.2 $a<b$ olmak üzere $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, (a,b) aralığında diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. $f'\in L[a,b]$ ise her $x,y\in[a,b]$, $x<y$ $\lambda,\rho,\omega>0$ ve $t\in[0,1]$ için

$$
\begin{aligned}
&\frac{2^{\lambda-1}}{(y-x)^{\lambda}}\left[\left(\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,(a+b-\frac{x+y}{2})^{+};\omega}f\right)(a+b-x) + \left(\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,(a+b-\frac{x+y}{2})^{-};\omega}f\right)(a+b-y)\right] \\
&-\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}\left[\omega(y-x)^{\rho}\frac{1}{2^{\rho}}\right] f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right) \\
&= \frac{y-x}{4}\left[\int_0^1 t^{\lambda}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}\left[\omega(y-x)^{\rho}t^{\rho}\right] f'\left(a+b-\left(\frac{2-t}{2}x+\frac{t}{2}y\right)\right)dt\right.
\end{aligned}
$$

$$-\int_0^1 t^{\lambda}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}\left[\omega(y-x)^{\rho}t^{\rho}\right]f'\left(a+b-\left(\frac{t}{2}x+\frac{2-t}{2}y\right)\right)dt\Bigg] \tag{3.1.21}$$

eşitliği geçerlidir.

İspat. Eşitliğin sağ tarafını

$$\begin{aligned} I &= \left[\int_0^1 t^{\lambda}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}\left[\omega(y-x)^{\rho}\left(\frac{t}{2}\right)^{\rho}\right]f'\left(a+b-\left(\frac{2-t}{2}x+\frac{t}{2}y\right)\right)dt\right. \\ &\quad \left.-\int_0^1 t^{\lambda}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}\left[\omega(y-x)^{\rho}\left(\frac{t}{2}\right)^{\rho}\right]f'\left(a+b-\left(\frac{t}{2}x+\frac{2-t}{2}y\right)\right)dt\right] \\ &= I_2-I_1 \end{aligned}$$

olarak ele alalım. Burada I_1 hesaplanırsa

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 t^{\lambda}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}\left[\omega(y-x)^{\rho}\left(\frac{t}{2}\right)^{\rho}\right]f'\left(a+b-\left(\frac{t}{2}x+\frac{2-t}{2}y\right)\right)dt \\ &= t^{\lambda}\frac{2\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}\left[\omega(y-x)^{\rho}\left(\frac{t}{2}\right)^{\rho}\right]}{y-x}f\left(a+b-\left(\frac{t}{2}x+\frac{2-t}{2}y\right)\right)\Bigg|_0^1 \\ &\quad -\frac{2}{y-x}\int_0^1 t^{\lambda-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}\left[\omega(y-x)^{\rho}\left(\frac{t}{2}\right)^{\rho}\right]f'\left(a+b-\left(\frac{t}{2}x+\frac{2-t}{2}y\right)\right)dt \\ &= \frac{2\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}\left[\omega(y-x)^{\rho}\frac{1}{2^{\rho}}\right]}{y-x}f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right) \\ &\quad -\frac{2}{y-x}\int_0^1 t^{\lambda-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}\left[\omega(y-x)^{\rho}\left(\frac{t}{2}\right)^{\rho}\right]f\left(a+b-\left(\frac{t}{2}x+\frac{2-t}{2}y\right)\right)dt \end{aligned}$$

yazılır. Burada $u=a+b-\left(\frac{t}{2}x+\frac{2-t}{2}y\right)$ dönüşümü uygulanırsa

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{2\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}\left[\omega(y-x)^{\rho}\frac{1}{2^{\rho}}\right]}{y-x}f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right) \\ &\quad -\frac{2^{\lambda+1}}{(y-x)^{\lambda+1}}\left(\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,(a+b-\frac{x+y}{2})^-;\omega}f\right)(a+b-y) \end{aligned} \tag{3.1.22}$$

elde edilir.

Benzer işlemler I_2 için yapılırsa

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^1 t^{\lambda}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}\left[\omega(y-x)^{\rho}\left(\frac{t}{2}\right)^{\rho}\right]f'\left(a+b-\left(\frac{2-t}{2}x+\frac{t}{2}y\right)\right)dt \\ &= -\frac{2\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}\left[\omega(y-x)^{\rho}\frac{1}{2^{\rho}}\right]}{y-x}f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right) \\ &\quad +\frac{2^{\lambda+1}}{(y-x)^{\lambda+1}}\left(\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,(a+b-\frac{x+y}{2})^+;\omega}f\right)(a+b-x) \end{aligned} \tag{3.1.23}$$

yazılır. Böylece (3.1.22) ve (3.1.23) eşitsizlikleri kullanılarak

$$\begin{aligned} I_2 - I_1 &= \frac{2^{\lambda+1}}{(y-x)^{\lambda}+1} \\ &\times \left[\left(\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,(a+b-\frac{x+y}{2})^{+};\omega} f \right)(a+b-x) + \left(\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,(a+b-\frac{x+y}{2})^{-};\omega} f \right)(a+b-y) \right] \\ &- f\left(a+b-\frac{x+y}{2} \right) \left(\frac{4\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}\left[\omega(y-x)^{\rho}\frac{1}{2^{\rho}} \right]}{y-x} \right) \end{aligned}$$

olur. Böylece yukarıdaki eşitliğin her iki tarafı $\frac{y-x}{4}$ ile çarpılırsa (3.1.21) eşitsizliği elde edilir. Bu durumda ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.1.3 $a < b$ olmak üzere $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, (a,b) aralığında diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. $|f'|$, $[a,b]$ aralığında konveks ise her $x, y \in [a,b]$, $x < y$ ve $\lambda, \rho, \omega > 0$ olmak üzere kesirli integraller için

$$\begin{aligned} &\left| \mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}\left[\omega(y-x)^{\rho}\right] \frac{f(a+b-x)+f(a+b-y)}{2} - \frac{1}{2(y-x)^{\lambda}} \right. \\ &\left. \times \left[\left(\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,(a+b-x)^{-};\omega} f \right)(a+b-y) + \left(\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,(a+b-y)^{+};\omega} f \right)(a+b-x) \right] \right| \\ \leq\ & (y-x)\mathcal{F}^{\sigma_0}_{\rho,\lambda+2}\left[\omega(y-x)^{\rho}\right] \left[|f'(a)| + |f'(b)| - \frac{|f'(x)|+|f'(y)|}{2} \right] \end{aligned} \tag{3.1.24}$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada,

$$\sigma_0(k) = \sigma(k)\left(1 - \frac{1}{2^{\lambda+\rho+k}} \right)$$

şeklindedir.

İspat. Lemma 3.1.1 ve Jensen-Mercer eşitsizliği aracılığıyla

$$\begin{aligned} &\left| \mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}\left[\omega(y-x)^{\rho}\right] \frac{f(a+b-x)+f(a+b-y)}{2} - \frac{1}{2(y-x)^{\lambda}} \right. \\ &\left. \times \left[\left(\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,(a+b-x)^{-};\omega} f \right)(a+b-y) + \left(\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,(a+b-y)^{+};\omega} f \right)(a+b-x) \right] \right| \\ \leq\ & \frac{y-x}{2} \int_0^1 \left| t^{\lambda}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}\left[\omega(y-x)^{\rho}t^{\rho}\right] - (1-t)^{\lambda}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}\left[\omega(y-x)^{\rho}(1-t)^{\rho}\right] \right| \\ &\times |f'(a+b-(tx+(1-t)y))| dt \\ \leq\ & \frac{y-x}{2} \int_0^1 \left| t^{\lambda}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}\left[\omega(y-x)^{\rho}\xi^{\rho}\right] - (1-t)^{\lambda}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}\left[\omega(y-x)^{\rho}(1-t)^{\rho}\right] \right| \\ &\times \left[|f'(a)| + |f'(b)| - (t|f'(x)| + (1-t)|f'(y)|) \right] dt \\ =\ & \frac{y-x}{2} \left\{ \int_0^{\frac{1}{2}} \left[(1-t)^{\lambda}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}\left[\omega(y-x)^{\rho}(1-t)^{\rho}\right] - t^{\lambda}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}\left[\omega(y-x)^{\rho}t^{\rho}\right] \right] \right. \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& \times\left[|f'(a)|+|f'(b)|-(t|f'(x)|+(1-t)|f'(y)|)\right] dt \\
& +\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left[t^{\lambda}\mathcal{F}_{\rho,\lambda+1}^{\sigma}\left[\omega(y-x)^{\rho}t^{\rho}\right]-(1-t)^{\lambda}\mathcal{F}_{\rho,\lambda+1}^{\sigma}\left[\omega(y-x)^{\rho}(1-t)^{\rho}\right]\right] \\
& \left.\times\left[|f'(a)|+|f'(b)|-(t|f'(x)|+(1-t)|f'(y)|)\right] dt\right\} \\
= \; & \frac{y-x}{2}(L_1+L_2)
\end{aligned}
$$

yazılır. Buradan L_1 ve L_2 ayrı ayrı hesaplanırsa

$$
\begin{aligned}
L_1 = \; & \left(|f'(a)|+|f'(b)|\right) \\
& \times\left(\int_0^{\frac{1}{2}}\left[(1-t)^{\lambda}\mathcal{F}_{\rho,\lambda+1}^{\sigma}[\omega(y-x)^{\rho}(1-t)^{\rho}]-t^{\lambda}\mathcal{F}_{\rho,\lambda+1}^{\sigma}[\omega(y-x)^{\rho}t^{\rho}]\right] dt\right) \\
& -|f'(x)| \\
& \times\left(\int_0^{\frac{1}{2}} t(1-t)^{\lambda}\mathcal{F}_{\rho,\lambda+1}^{\sigma}\left[\omega(y-x)^{\rho}(1-t)^{\rho}\right] dt-\int_0^{\frac{1}{2}} t^{\lambda+1}\mathcal{F}_{\rho,\lambda+1}^{\sigma}\left[\omega(y-x)^{\rho}t^{\rho}\right] dt\right) \\
& +|f'(y)| \\
& \times\left(\int_0^{\frac{1}{2}}(1-t)^{\lambda+1}\mathcal{F}_{\rho,\lambda+1}^{\sigma}\left[\omega(y-x)^{\rho}(1-t)^{\rho}\right] dt-\int_0^{\frac{1}{2}}(1-t)t^{\lambda}\mathcal{F}_{\rho,\lambda+1}^{\sigma}\left[\omega(y-x)^{\rho}t^{\rho}\right] dt\right) \\
= \; & \left(|f'(a)|+|f'(b)|\right)\left(\mathcal{F}_{\rho,\lambda+1}^{\sigma_1}\left[\omega(y-x)^{\rho}\right]-\mathcal{F}_{\rho,\lambda+1}^{\sigma_2}\left[\omega(y-x)^{\rho}\right]\right) \\
& -|f'(x)|\left(\mathcal{F}_{\rho,\lambda+1}^{\sigma_3}\left[\omega(y-x)^{\rho}\right]-\mathcal{F}_{\rho,\lambda+1}^{\sigma_4}\left[\omega(y-x)^{\rho}\right]\right) \\
& +|f'(y)|\left(\mathcal{F}_{\rho,\lambda+1}^{\sigma_5}\left[\omega(y-x)^{\rho}\right]-\mathcal{F}_{\rho,\lambda+1}^{\sigma_6}\left[\omega(y-x)^{\rho}\right]\right) \\
= \; & \left(|f'(a)|+|f'(b)|\right)\left(\frac{1}{\lambda+\rho k+1}-\frac{1}{2^{\lambda+\rho k+1}(\lambda+\rho k+1)}\right) \\
& -\left\{|f'(x)|\left(\frac{1}{(\lambda+\rho k+1)(\lambda+\rho k+2)}-\frac{1}{2^{\lambda+\rho k+1}(\lambda+\rho k+1)}\right)\right. \\
& \left.+|f'(y)|\left(\frac{1}{\lambda+\rho k+2}-\frac{1}{2^{\lambda+\rho k+1}(\lambda+\rho k+1)}\right)\right\}
\end{aligned}
$$

ve benzer şekilde

$$
\begin{aligned}
L_2 = \; & \left(|f'(a)|+|f'(b)|\right) \\
& \times\left(\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left[t^{\lambda}\mathcal{F}_{\rho,\lambda+1}^{\sigma}\left[\omega(y-x)^{\rho}t^{\rho}\right]-(1-t)^{\lambda}\mathcal{F}_{\rho,\lambda+1}^{\sigma}\left[\omega(y-x)^{\rho}(1-t)^{\rho}\right]\right] dt\right) \\
& -|f'(x)| \\
& \times\left(\int_{\frac{1}{2}}^{1} t^{\lambda+1}\mathcal{F}_{\rho,\lambda+1}^{\sigma}\left[\omega(y-x)^{\rho}t^{\rho}\right] dt-\int_{\frac{1}{2}}^{1} t(1-t)^{\lambda}\mathcal{F}_{\rho,\lambda+1}^{\sigma}\left[\omega(y-x)^{\rho}(1-t)^{\rho}\right] dt\right) \\
& +|f'(y)| \\
& \left(\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-t)t^{\lambda}\mathcal{F}_{\rho,\lambda+1}^{\sigma}\left[\omega(y-x)^{\rho}t^{\rho}\right] dt-\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-t)^{\lambda+1}\mathcal{F}_{\rho,\lambda+1}^{\sigma}\left[\omega(y-x)^{\rho}(1-t)^{\rho}\right] dt\right) \\
= \; & \left(|f'(a)|+|f'(b)|\right)\left(\mathcal{F}_{\rho,\lambda+1}^{\sigma_1}\left[\omega(y-x)^{\rho}\right]-\mathcal{F}_{\rho,\lambda+1}^{\sigma_2}\left[\omega(y-x)^{\rho}\right]\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&-|f'(x)|\left(\mathcal{F}^{\sigma_5}_{\rho,\lambda+1}\left[\omega(y-x)^{\rho}\right]-\mathcal{F}^{\sigma_6}_{\rho,\lambda+1}\left[\omega(y-x)^{\rho}\right]\right)\\
&+|f'(y)|\left(\mathcal{F}^{\sigma_3}_{\rho,\lambda+1}\left[\omega(y-x)^{\rho}\right]-\mathcal{F}^{\sigma_4}_{\rho,\lambda+1}\left[\omega(y-x)^{\rho}\right]\right)\\
= \;&\left(|f'(a)|+|f'(b)|\right)\left(\frac{1}{\lambda+\rho k+1}-\frac{1}{2^{\lambda+\rho k+1}(\lambda+\rho k+1)}\right)\\
&-\left\{|f'(x)|\left(\frac{1}{\lambda+\rho k+2}-\frac{1}{2^{\lambda+\rho k+1}(\lambda+\rho k+1)}\right)\right.\\
&\left.+|f'(y)|\left(\frac{1}{(\lambda+\rho k+1)(\lambda+\rho k+2)}-\frac{1}{2^{\lambda+\rho k+1}(\lambda+\rho k+1)}\right)\right\}
\end{aligned}
$$

olur. Burada

$$
\begin{aligned}
\sigma_1(k) &= \sigma(k)\left(\frac{1}{\lambda+\rho k+1}-\frac{1}{2^{\lambda+\rho k+1}(\lambda+\rho k+1)}\right),\\
\sigma_2(k) &= \sigma(k)\left(\frac{1}{2^{\lambda+\rho k+1}(\lambda+\rho k+1)}\right),\\
\sigma_3(k) &= \sigma(k)\left(\frac{1}{\lambda+\rho k+1}+\frac{1}{2^{\lambda+\rho k+1}(\lambda+\rho k+1)}+\frac{1}{\lambda+\rho k+1}-\frac{1}{2^{\lambda+\rho k+1}(\lambda+\rho k+1)}\right),\\
\sigma_4(k) &= \sigma(k)\left(-\frac{1}{2^{\lambda+\rho k+2}(\lambda+\rho k+2)}\right),\\
\sigma_5(k) &= \sigma(k)\left(\frac{1}{\lambda+\rho k+2}-\frac{1}{2^{\lambda+\rho k+2}(\lambda+\rho k+2)}\right),\\
\sigma_6(k) &= \sigma(k)\left(\frac{1}{2^{\lambda+\rho k+1}(\lambda+\rho k+1)}-\frac{1}{2^{\lambda+\rho k+2}(\lambda+\rho k+2)}\right)
\end{aligned}
$$

şeklindedir. L_1 ve L_2 taraf tarafa toplanırsa (3.1.24) eşitsizliği elde edilir. Bu durumda ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.1.4 $a < b$ olmak üzere $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, (a,b) aralığında diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. $|f'|$, $[a,b]$ aralığında konveks ise her $x, y \in [a,b]$, $x < y$ ve $\lambda, \rho, \omega > 0$ olmak üzere kesirli integraller için

$$
\begin{aligned}
&\left|\frac{2^{\lambda-1}}{(y-x)^{\lambda}}\left[\left(\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,(a+b-\frac{x+y}{2})^{+};\omega}f\right)(a+b-x)+\left(\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,(a+b-\frac{x+y}{2})^{-};\omega}f\right)(a+b-y)\right]\right.\\
&\left.-f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right)\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}\left[\omega(y-x)^{\rho}\frac{1}{2^{\rho}}\right]\right|\\
\leq\;&\frac{(y-x)\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+2}\left[\omega(y-x)^{\rho}\frac{1}{2^{\rho}}\right]}{2(\lambda+\rho k+1)}\left[|f'(a)|+|f'(b)|-\frac{|f'(x)|+|f'(y)|}{2}\right] \qquad (3.1.25)
\end{aligned}
$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. Lemma 3.1.2 ve Jensen-Mercer eşitsizliği kullanılarak

$$
\begin{aligned}
&\left|\frac{2^{\lambda-1}}{(y-x)^{\lambda}}\left[\left(\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,(a+b-\frac{x+y}{2})^{+};\omega}f\right)(a+b-x)+\left(\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,(a+b-\frac{x+y}{2})^{-};\omega}f\right)(a+b-y)\right]\right.\\
&\left.-f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right)\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}\left[\omega(y-x)^{\rho}\frac{1}{2^{\rho}}\right]\right|
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \frac{y-x}{4}\left\{\int_0^1 t^{\lambda}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}\left[\omega(y-x)^{\rho}\left(\frac{t}{2}\right)^{\rho}\right]\left|f'\left(a+b-\left(\frac{2-t}{2}x+\frac{t}{2}y\right)\right)\right|dt\right.\\
&\quad\left.+\int_0^1 t^{\lambda}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}\left[\omega(y-x)^{\rho}\left(\frac{t}{2}\right)^{\rho}\right]\left|f'\left(a+b-\left(\frac{t}{2}x+\frac{2-t}{2}y\right)\right)\right|dt\right\}\\
&\leq \frac{y-x}{4}\left\{\int_0^1 t^{\lambda}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}\left[\omega(y-x)^{\rho}\left(\frac{t}{2}\right)^{\rho}\right]\left[|f'(a)|+|f'(b)|-\left(\frac{2-t}{2}|f'(x)|+\frac{t}{2}|f'(y)|\right)\right]dt\right.\\
&\quad\left.+\int_0^1 t^{\lambda}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}\left[\omega(y-x)^{\rho}\left(\frac{t}{2}\right)^{\rho}\right]\left[|f'(a)|+|f'(b)|-\left(\frac{t}{2}|f'(x)|+\frac{2-t}{2}|f'(y)|\right)\right]\right\}\\
&= \frac{(y-x)\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+2}\left[\omega(y-x)^{\rho}\frac{1}{2^{\rho}}\right]}{2(\lambda+\rho k+1)}\left[|f'(a)|+|f'(b)|-\frac{|f'(x)|+|f'(y)|}{2}\right]
\end{aligned}
$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.1.5 $a<b$ olmak üzere $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, (a,b) aralığında diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. $q>1$ ve $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ için $|f'|^q$, $[a,b]$ aralığında konveks ise her $x,y\in[a,b]$, $x<y$ ve $\lambda,\rho,\omega>0$ olmak üzere kesirli integraller için

$$
\begin{aligned}
&\left|\frac{2^{\lambda-1}}{(y-x)^{\lambda}}\left[\left(\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,(a+b-\frac{x+y}{2})^-;\omega}f\right)(a+b-y)+\left(\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,(a+b-\frac{x+y}{2})^+;\omega}f\right)(a+b-x)\right]\right.\\
&\left.-f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right)\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}\left[\omega(y-x)^{\rho}\frac{1}{2^{\rho}}\right]\right|\\
&\leq \frac{y-x}{4}\mathcal{F}^{\sigma_7}_{\rho,\lambda+1}\left[\omega(y-x)^{\rho}\right]\left[\left(|f'(a)|^q+|f'(b)|^q-\frac{3|f'(x)|^q+|f'(y)|^q}{4}\right)^{\frac{1}{q}}\right.\\
&\left.+\left(|f'(a)|^q+|f'(b)|^q-\frac{|f'(x)|^q+3|f'(y)|^q}{4}\right)^{\frac{1}{q}}\right] \qquad (3.1.26)
\end{aligned}
$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada

$$
\sigma_7=\sigma(k)\left(\frac{1}{\lambda p+\rho kp+1}\right)^{\frac{1}{p}}
$$

şeklindedir.

İspat. Lemma 3.1.2'de Hölder eşitsizliği kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
&\left|\frac{2^{\lambda-1}}{(y-x)^{\lambda}}\left[\left(\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,(a+b-\frac{x+y}{2})^-;\omega}f\right)(a+b-y)+\left(\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,(a+b-\frac{x+y}{2})^+;\omega}f\right)(a+b-x)\right]\right.\\
&\left.-f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right)\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}\left[\omega(y-x)^{\rho}\frac{1}{2^{\rho}}\right]\right|\\
&\leq \frac{y-x}{4}\left(\int_0^1 (t^{\lambda}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}\left[\omega(y-x)^{\rho}\left(\frac{t}{2}\right)^{\rho}\right])^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\times\left\{\left(\int_0^1\left|f'\left(a+b-\left(\frac{2-t}{2}x+\frac{t}{2}y\right)\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right.\\
&\left.+\left(\int_0^1\left|f'\left(a+b-\left(\frac{t}{2}x+\frac{2-t}{2}y\right)\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right\}
\end{aligned}
$$

$$= \frac{y-x}{4}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sigma(k)\left[|\omega|^k(y-x)^{\rho k}\frac{1}{2^{\rho k}}\right]}{\Gamma(\lambda+\rho k+1)}\left(\int_0^1 t^{(\lambda+\rho k)p}\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$\times\left\{\left(\int_0^1\left|f'\left(a+b-\left(\frac{2-t}{2}x+\frac{t}{2}y\right)\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$
$$\left.+\left(\int_0^1\left|f'\left(a+b-\left(\frac{t}{2}x+\frac{2-t}{2}y\right)\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right\}$$

yazılır. $|f'|^q$'nun konveksliğinden Jensen-Mercer eşitsizliği kullanılırsa

$$\left|\frac{2^{\lambda-1}}{(y-x)^{\lambda}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}[\omega(y-x)^{\rho}]}\left[\left(\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,(a+b-\frac{x+y}{2})^-;\omega}f\right)(a+b-y)\right.\right.$$
$$\left.\left.+\left(\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,(a+b-\frac{x+y}{2})^+;\omega}f\right)(a+b-x)\right]-f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right)\right|$$
$$\leq \frac{y-x}{4}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sigma(k)[|\omega|^k(y-x)^{\rho k}]}{\Gamma(\lambda p+\rho kp+1)}\left(\frac{1}{\lambda+\rho k+1}\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$\times\left\{\left(\int_0^1|f'(a)|^q+|f'(b)|^q-\left(\frac{2-t}{2}|f'(x)|^q+\frac{t}{2}|f'(y)|^q\right)dt\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$
$$\left.+\left(\int_0^1|f'(a)|^q+|f'(b)|^q-\left(\frac{t}{2}|f'(x)|^q+\frac{2-t}{2}|f'(y)|^q\right)dt\right)^{\frac{1}{q}}\right\}$$
$$= \frac{(y-x)}{4}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sigma(k)[|\omega|^k(y-x)^{\rho k}]}{\Gamma(\lambda p+\rho kp+1)}\left(\frac{1}{\lambda+\rho k+1}\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$\times\left[\left(|f'(a)|^q+|f'(b)|^q-\frac{3|f'(x)|^q+|f'(y)|^q}{4}\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$
$$\left.+\left(|f'(a)|^q+|f'(b)|^q-\frac{|f'(x)|^q+3|f'(y)|^q}{4}\right)^{\frac{1}{q}}\right]$$
$$= \frac{(y-x)}{4}\mathcal{F}^{\sigma_7}_{\rho,\lambda+1}[\omega(y-x)^{\rho}]$$
$$\times\left[\left(|f'(a)|^q+|f'(b)|^q-\frac{3|f'(x)|^q+|f'(y)|^q}{4}\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$
$$\left.+\left(|f'(a)|^q+|f'(b)|^q-\frac{|f'(x)|^q+3|f'(y)|^q}{4}\right)^{\frac{1}{q}}\right]$$

elde edilir ve böylece ispat tamamlanmış olur.

Bu bölümde elde edilen teoremlerin ispatlarındakilere benzer argümanlar kullanılarak Prabhakar kesirli integral operatörleri için de yeni tahminler elde edilebilir. Prabhakar kesirli integral operatörü aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır.

Tanım 3.1.2 $0\leq a<t<b\leq\infty$ olmak üzere $f\in L[a,b]$ ve $\rho,\lambda,\gamma,\omega\in\mathbb{C}$, $Re(\rho),Re(\lambda)>0$ olsun. Bu durumda sol ve sağ taraflı Prabhakar kesirli integral operatörü

$$\left(\varepsilon^{\gamma}_{\rho,\lambda,a^+;\omega}f\right)(x)=\int_a^x(x-t)^{\lambda-1}E^{\gamma}_{\rho,\lambda}[\omega(x-t)^{\rho}f(t)dt$$

ve

$$\left(\varepsilon^{\gamma}_{\rho,\lambda,b^-;\omega}f\right)(x)=\int_x^b (t-x)^{\lambda-1}E^{\gamma}_{\rho,\lambda}[\omega(t-x)^{\rho}f(t)dt$$

şeklinde tanımlanır [55]. Burada $(\gamma)_k$ Pochhammer sembolü olmak üzere

$$E^{\gamma}_{\rho,\lambda}(x)=\sum_{k}^{\infty}\frac{(\gamma)_k}{\Gamma(\rho k+\lambda)}\frac{x^k}{k!}$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 3.1.6 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, konveks bir fonksiyon olsun. Bu durumda her $x,y\in[a,b]$, $x<y$ ve $\lambda,\rho,\omega>0$ için

$$\begin{aligned}
& f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right)\\
\leq\ & f(a)+f(b)-\frac{1}{2(y-x)^{\lambda}E^{\gamma}_{\rho,\lambda+1}\left[\omega(y-x)^{\rho}\right]}\left[\left(\varepsilon^{\gamma}_{\rho,\lambda,x^+;\omega}f\right)(y)+\left(\varepsilon^{\gamma}_{\rho,\lambda,y^-;\omega}f\right)(x)\right]\\
\leq\ & f(a)+f(b)-f\left(\frac{x+y}{2}\right)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right) &\leq \frac{1}{2(y-x)^{\lambda}E^{\gamma}_{\rho,\lambda+1}\left[\omega(y-x)^{\rho}\right]}\\
&\quad\times\left[\left(\varepsilon^{\gamma}_{\rho,\lambda,(a+b-y)^+;\omega}f\right)(a+b-x)+\left(\varepsilon^{\gamma}_{\rho,\lambda,(a+b-x)^-;\omega}f\right)(a+b-y)\right]\\
&\leq \frac{f(a+b-x)+f(a+b-y)}{2}\\
&\leq f(a)+f(b)-f\left(\frac{x+y}{2}\right)
\end{aligned}$$

eşitsizlikleri geçerlidir.

İspat. Teorem 3.1.1'in ispatında Prabhakar kesirli integral operatörünün tanımı kullanılarak istenen sonuçlar elde edilir.

Bu bölümdeki diğer sonuçların yeni versiyonları Prabhakar kesirli integral operatörü kullanılarak elde edilebilir. Ayrıca bu bölümde elde edilen sonuçlar [50]'de Riemann-Liouville kesirli integralleri yardımı ile elde edilen Hermite-Hadamard-Mercer tipli eşitsizliklerin genelleştirmesidir.

4. TARTIŞMA ve SONUÇ

Bu yüksek lisans tezinin temelini oluşturan üçüncü bölümde, Raina'nın genelleştirilmiş kesirli integral operatörü içeren yeni Hermite-Hadamard-Mercer tipli eşitsizlikler ve genelleştirmeler elde edilmiştir. Elde edilen sonuçların bazı özel halleri literatürde mevcut önceki çalışmaları kapsamaktadır. Elde edilen bu yeni sonuçlar makale formatına getirilerek "Some New Results on Hermite-Hadamard-Mercer Type Inequalities Using a General Family of Fractional Integral Operators" başlıklı çalışma altında "Fractal and Fractional" isimli dergide yayımlanmıştır. Konuyla ilgili araştırmacılar bu tezde verilen yöntemlerden ve sonuçlardan faydalanarak bu tezde kullanılmayan kesirli integral operatörler için yeni Hermite-Hadamard-Mercer tipli integral eşitsizlikleri elde edebilirler.

KAYNAKLAR

[1] Abdeljawad, T. (2015). On conformable fractional calculus. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 279, 57-66.

[2] Abdeljawad, T. (2017). Fractional operators with exponential kernels and a Lyapunov type inequality. *Advances in Difference Equations*, 2017(1), 1-11.

[3] Abdeljawad, T., Ali, MA., Mohammed, PO. & Kashuri, A. (2020). On inequalities of Hermite-Hadamard-Mercer type involving Riemann-Liouville fractional integrals. *AIMS Mathematics*, 6(1), 712-725.

[4] Abdeljawad, T., & Baleanu, D. (2017). Integration by parts and its applications of a new nonlocal fractional derivative with Mittag-Leffler nonsingular kernel. *arXiv preprint arXiv:1607.00262*.

[5] Abdeljawad, T., & Baleanu, D. (2017). On fractional derivatives with exponential kernel and their discrete versions. *Reports on Mathematical Physics*, 80(1), 11-27.

[6] Agarwal, RP., Luo, MJ. & Raina, RK. (2016). On Ostrowski type inequalities. *Fasciculi Mathematici*, 204, 5-27.

[7] Ahmad, B., Alsaedi, A., Kirane, M. & Torebek, BT. (2019). Hermite-Hadamard, Hermite-Hadamard-Fejér, Dragomir-Agarwal and Pachpatte type inequalities for convex functions via new fractional integrals. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 353, 120-129.

[8] Ali, MA., Hussain, T., Iqbal, MZ. & Ejaz, F. (2020). Inequalities of Hermite-Hadamard-Mercer type for convex functions via k-fractional integrals. *International Journal of Mathematical Modelling and Computations*, 10(3), 227-238.

[9] Alomari, M., Darus, M. & Kırmacı, US. (2010). Refinements of Hadamard-type inequalities for quasi-convex functions with applications to trapezoidal formula and to special means. *Computers Mathematics with Applications*, 59(1), 225-232.

[10] Atangana, A. & Baleanu, D. (2016). New fractional derivatices with non-local and non-singular kernel: theory and application to heat transfer model. *Thermal Science*, 20(2), 763-769.

[11] Awan, KM. (2016). On the Stefensen's generalization of the Chebyshev functional with applications. Ph. D Thesis, University of Sargodha, Pakistan.

[12] Bayraktar, B. (2020). Some integral inequalities of Hermite-Hadamard type for differentiable (s, m)-convex functions via fractional integrals. *TWMS Journal Of Applied and Engineering Mathematics*, 10(3), 625-637.

[13] Beckenbach, EF. & Bellman, R. (1961). Inequalities. Springer-Verlag, Berlin, 198 pp.

[14] Butt, SI., Akdemir, AO., Nasir, J. & Jarad, F. (2020). Some Hermite-Jensen-Mercer like inequalities for convex functions through a certain generalized fractional integrals and related results. *Miskolc Mathematical Notes*, 21(2), 689-715.

[15] Butt, SI., Kashuri, A., Umar, M., Aslam, A. & Gao, W. (2020). Hermite-Jensen-Mercer type inequalities via ψ-Riemann-Liouville k-fractional integrals. *AIMS Mathematics*, 5(5), 5193-5220.

[16] Butt, SI., Nadeem, M., Qaisar, S., Akdemir, AO. & Abdeljawad, T. (2020). Hermite-Jensen-Mercer type inequalities for conformable integrals and related results. *Advances in Diffrence Equations*, (1), 1-24.

[17] Butt, SI., Umar, M., Khan, KA., Kashuri, A. & Emadifar, H. (2021). Fractional Hermite-Jensen-Mercer integral inequalities with respect to another function and application. *Compelexity*, 2021, 9260828.

[18] Butt, SI., Umar, M., Rashid, S., Akdemir, AO. & Chu, Y. (2020). New Hermite-Jensen-Mercer-type inequalities via k-fractional integrals. *Advances in Difference Equations*, 2020(1), 1-24.

[19] Caputo, M., & Fabrizio, M. (2015). A new definition of fractional derivative without singular kernel. *Progress in Fractional Differentiation and Applications*, 1(2), 73-85.

[20] Chu, H., Rashid, S., Hammouch, Z. & Chu, Y. (2020). New fractional estimates for Hermite-Hadamard-Mercer's type inequalities. *Alexandria Engineering Journal*, 59(5), 3079-3089.

[21] Diaz, R., Pariguan, E. (2007). On hypergeometric functions and Pochhammer k-symbol. *arXiv preprint math/0405596.*

[22] Dragomir, SS., Agarwal, R. P. (1998). Two inequalities for differentiable mappings and applications to special means of real numbers and to trapezoidal formula. *Applied Mathematics Letters*, 11(5) 91-95.

[23] Farid, G., Javed, A. & Rehman, A. (2014). On Hadamard inequalities for n-times differentiable functions which are relative convex via Caputo k-fractional derivatives. *Nonlinear Analysis Forum*, 22(2), 17-28.

[24] Farid, G., Naqvi, S., & Rehman, AU. (2017). A version of the Hadamard inequality for Caputo fractional derivatives and related results. *RGMIA Research Report Collection*, 20(59).

[25] Farid, G., Rehman, AU. & Zahra, M. (2016). On Hadamard inequalities for k-fractional integrals. *Nonlinear Functional Analysis and Applications*, 21, 463-478.

[26] Gözpınar, A. (2018). Some Hermite-Hadamard type inequalities for convex functions via new fractional conformable integrals and related inequalities. *AIP Conference Proceedings*, 1991(1), 020006. AIP Publishing LLC.

[27] Hardy, GH., Littlewood, JE. & Polya, G. (1952). Inequalities. 2nd Ed., Cambridge University Press.

[28] Jarad, F., Abdeljawad, T. & Alzabut, J. (2017). Generalized fractional derivatives generated by a class of local proportional derivatives. *The European Physical Journal Special Topics*, 226, 3457-3471.

[29] Jarad, F., Ugurlu, E., Abdeljawad, T. & Baleanu, D. (2017). On a new class of fractional operators. *Advances in Difference Equations*, 2017(1), 1-16.

[30] Kang, Q., Butt, SI., Nazeer, W., Nadeem, M., Nasir J. & Yang H. (2020). New variant of Hermite-Jensen-Mercer inequalities via Riemann-Liouville fractional integral operators. *Journal of Mathematics*, 2020(4), 1-14.

[31] Kannapan, P. (2009). Functional equations and inequalities with Applications. Springer, New York, 803.

[32] Katugampola, UN. (2014). A new approach to generalized fractional derivatives. *Bulletin of Mathematical Analysis and Applications*, 6(4), 1-15.

[33] Khan, MA., Ali, T., Dragomir, SS. & Sarıkaya, MZ. (2018). Hermite-Hadamard type inequalities for conformable fractional integrals. *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Serie A. Matemáticas*, 112(4), 1033-1048.

[34] Kılınç Yıldırım, S., & Yıldırım, H. (2020). On the Hermite-Hadamard-Mercer type inequalities for generalized proportional fractional integrals. *Preprints*, p. 2020120687, (doi: 10.20944/preprints202012.0687.v1).

[35] Kırmacı, US. (2004). Inequalities for differentiable mappings and applications to special means of real numbers and to midpoint formula. *Applied Mathematics and Computation*, 147(1), 137-146.

[36] Kian, M. & Moslehian, MS. (2013). Refinements of the operator Jensen-Mercer inequality. *The Electronic Journal of Linear Algebra*, 26(1), 742-753.

[37] Kilbas, AA. (2001). Hadamard-type fractional calculus. *Journal of the Korean Mathematical Society*, 38(6), 1191-1204.

[38] Kilbas, AA., Srivastava, HM., & Trujillo, JJ. (2006). Theory and applications of fractional differential equations. Elsevier, Amsterdam, Netherlands.

[39] Kwun, YC., Farid, G., Nazeer, W., Ullah, S. & Kang, SM. (2018). Generalized Riemann-Liouville k-fractional integrals associated with Ostrowski type inequalities and error bounds of Hadamard inequalities. *IEEE Access*, 6, 64946-64953.

[40] Liu, K., Wang, JR. & O'Regan, D. (2019). On the Hermite-Hadamard type inequality for ψ-Riemann-Liouville fractional integrals via convex functions. *Journal of Inequalities and Applications*, 2019(1), 1-10.

[41] Liu, JB., Butt, SI., Nasir, J., Aslam, A., Fahad, A. & Soontharanon, J. (2022). Jensen-Mercer variant of Hermite-Hadamard type inequalities via Atangana-Baleanu fractional operator. *AIMS Mathematics*, 7(2), 2123-2141.

[42] Mercer, AM. (2003). A variant of Jensen's inequality. *Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics*, 73, 4(4).

[43] Mercer, AM. (2002). A monotonicity property of power means. *Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics*, 40, 3(3).

[44] Mitrinović, DS. (1970). Analytic inequalities. Springer-Verlag, Berlin.

[45] Mitrinović, DS., Pečarić, JE. & Fink, AM. (1993). Classical and new inequalities in analysis. Kluwer Academic Publishers, Dordrecth, The Netherlands.

[46] Mubeen, S. & Habibullah, G. (2012). k-fractional integrals and application. *International Journal of Contemporary Mathematical Sciences*, 7(2), 89-94.

[47] Naqvi, S., Farid, G., & Tariq, B. (2014). Caputo fractional integral inequalities via m convex function. *RGMIA Research Report Collection*, 20.

[48] Noor, MA. & Awan, MU. (2013). Some integral inequalities for two kinds of convexities via fractional integrals. *Transylvanian Journals of Mathematics and Machanics*, 5(2), 129-136.

[49] Noor, MA., Noor, KI. & Awan, MU. (2015). Fractional Hermite-Hadmard inequalities for convex functions and applications. *Tbilisi Mathematical Journal*, 8(2), 103-113.

[50] Öğülmüş, H. & Sarıkaya, MZ. (2021). Hermite-Hadamard-Mercer type inequalities for fractional integrals. *Filomat*, 35(7), 2425-2436.

[51] Pachpatte, BG. (2005). Mathematical inequalities. Elsevier, Amsterdam, The Netherlands, 591 pp.

[52] Pavić, Z. (2019). The Jensen-Mercer inequality with infinite convex combinations. *Mathematical Sciences and Applications E-Notes*, 7, 19-27.

[53] Pearce, CM., Pečarić, JE., & Šimić, V. (1998). Stolarsky means and Hadamard's inequality. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 220(1), 99-109.

[54] Pečarić, JE., Proschan, F. & Tong, YL. (1992). Convex functions, partial orderings and statistical applications. Academic Press Inc.

[55] Prabhakar, TR. (1971). A singular integral equation with a generalized Mittag Leffler function in the kernel. *Yokohama Mathematical Journal*, 19, 7-15.

[56] Qi, F., Habib, S., Mubeen, S. & Naeem, MN. (2019). Generalized k-fractional conformable integrals and related inequalities. *AIMS Mathematics*, 4(3), 343-368.

[57] Raina, RK. (2005). On generalized Wright's hypergeometric functions and fractional calculus operators. *East Asian Mathematical Journal*, 21(2) 191-203.

[58] Samko, SG., Kilbas, AA. & Marichev, OI. (1993). Fractional integrals and derivaties: Theory and Applications. Gordon and Breach Science Publishers, USA, 976 pp.

[59] Sarıkaya, MZ. & Aktan, N. (2011). On the generalization of some integral inequalities and their applications. *Mathematical and Computer Modelling*, 54(9-10), 2175-2182.

[60] Sarıkaya, MZ. & Ertugral, F. (2020). On the generalized Hermite-Hadamard inequalities. *Annals of the University of Craiova-Mathematics and Computer Science Series*, 47, 193-213.

[61] Sarıkaya, MZ. & Karaca, A. (2014). On the k-Riemann-Liouville fractional integral and applications. *International Journal of Statistics and Mathematics*, 1, 33-43.

[62] Sarıkaya, MZ., Set, E., Yaldız, H. & Basak, N. (2013). Hermite-Hadamard's inequalities for fractional integrals and related fractional inequalities. *Mathematical and Computer Modelling*, 57, 2403-2407.

[63] Sarıkaya, MZ. & Yıldırım, H. (2016). On Hermite-Hadamard type inequalities for Riemann-Liouville fractional integrals. *Miskolc Mathematical Notes*, 17(2), 1049-1059.

[64] Set, E. & Gözpınar, A. (2016). A study on Hermite Hadamard type inequality for s-convex function via conformable integrals. *Studia Universitatis Babeş-Bolyai Mathematica*, 62(3), 309-323.

[65] Set, E., Sarıkaya, MZ. & Gözpınar, A. (2017). Some Hermite-Hadamard type inequalities for convex functions via conformable fractional integrals and related inequalities. *Creative Mathematics and Informatics*, 26(2), 221-229.

[66] Set, E., Gözpınar, A. & Choi, J. (2017). Hermite-Hadamard type inequalities for twice differentiable m-convex functions via conformable fractional integrals. *Far East Journal of Mathematical Sciences*, 101(4), 873-891.

[67] Srivastava, HM. & Choi, J. (2012). Zeta and q-Zeta functions and associated series and integrals. Elsevier Science Publishers, Amsterdam, London and New York.

[68] Vivas-Cortez, M., Ali, MA., Kashuri, A. & Budak, H. (2021). Generalizations of fractional Hermite-Hadamard-Mercer like inequalities for convex functions. *AIMS Mathematics*, 6(9), 9397-9421.

[69] Vivas-Cortez, M., Awan, MU., Javed, MZ., Kashuri, A., Noor, MA. & Noor, KI. (2022). Some new generalized k-fractional Hermite-Hadamard-Mercer type integral inequalities and their applications. *AIMS Mathematics*, 7(2), 3203-3220.

[70] Xi, B., Wang, S. & Qi, F. (2012). Some inequalities of Hermite-Hadamard type for functions whose 3rd derivatives are p-convex. *Applied Mathematics*, 3(12), 1898-1902.

[71] Zhao, J., Butt, SI., Nasir, J., Wang, Z. & Tlili, I. (2020). Hermite-Jensen-Mercer type inequalities for Caputo fractional derivatives. *Journal of Function Spaces*, 3, 1-11.

[72] Zhao, S., Butt, SI., Nazeer, W., Nasir, J., Umar, M. & Liu, Y. (2020). Some Hermite-Jensen-Mercer type inequalities for k-Caputo-fractional derivatives and related results. *Advances in Difference Equations*, 2020(1) 1-17.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler	
Adı Soyadı	Mücahit ASLAN
Doğum Yeri	
Doğum Tarihi	
Uyruğu	☒ T.C. ❐ Diğer:
Telefon	
E-Posta Adresi	

Eğitim Bilgileri	
Lisans	
Üniversite	Manisa Celal Bayar Üniversitesi
Fakülte	Fen-Edebiyat Fakültesi
Bölümü	Matematik
Mezuniyet Tarihi	27.07.2012

Yayınlar

Set, E., Çelik, B., Özdemir, M. E. & Aslan, M., (2021). Some New Results on Hermite–Hadamard–Mercer-Type Inequalities Using a General Family of Fractional Integral Operators, *Fractal and Fractional*, 5(3), 68.