T. C.

ORDU ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İKİ İZDÜŞÜMÜN KOMBİNASYONLARININ SIFIR VE SÜTUN UZAYLARI ÜZERİNE BAZI EŞİTLİKLER

ÖMER ONUR TURAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ORDU 2022

TEZ BİLDİRİMİ

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan ve kullanılan intihal tespit programının sonuçlarına göre; bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

Ömer Onur TURAN

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

İKİ İZDÜŞÜMÜN KOMBİNASYONLARININ SIFIR VE SÜTUN UZAYLARI ÜZERİNE BAZI EŞİTLİKLER

ÖMER ONUR TURAN

ORDU ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ, 94 SAYFA

TEZ DANIŞMANI: PROF. DR. SELAHATTİN MADEN

Bu tez çalışması beş bölüm halinde düzenlenmiştir. Birinci bölümde çalışmanın amacından bahsedilerek bir giriş verilmiştir. İkinci bölümde çalışmamızda gerekli olacak temel tanım ve teoremler ispatsız olarak ifade edilmiştir. Üçüncü bölümde izdüşüm matrisleri ele alınarak bu matrisler için çeşitli formüller elde edilmiştir. İki izdüşüm matrisinin kombinasyonlarının sıfır ve sütun uzaylarıyla ilgili bazı yeni eşitlikler ve eşitsizlikler verilmiş, P ve Q iki izdüşüm olmak üzere $P \pm Q$ nun tersinirliği için gerek ve yeter şartlar bu matrislerin çeşitli kombinasyonlarının sıfır ve sütun uzayları yardımıyla ifade edilmiştir. Daha sonra P ve Q gibi iki ortogonal izdüşümün komutatifliğini karakterize eden bazı yaklaşımlar incelenmiştir. Ayrıca bu kısımda Moore-Penrose inversler dikkate alınarak ortogonal izdüşüm matrisleriyle ilgili bazı rank eşitlikleri elde edilmiştir. Dördüncü bölümde sonuç ve öneriler verilmiş ve beşinci bölümde ise tezde yararlanılan kaynaklar listelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Matris, Kare Matris, Nonsingüler Matris, İzdüşüm Matrisi, Determinant, Bir Matrisin İnversi, Bir Matrisin Sıfır Uzayı, Bir Matrisin Sütun Uzayı, Rank, Moore-Penrose İnvers.

ABSTRACT

SOME EQUALITIES ON THE NULL AND COLUMN SPACES OF COMBINATIONS OF TWO PROJECTORS

ÖMER ONUR TURAN

ORDU UNIVERSITY INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

MATHEMATICS DEPARTMENT

MASTER THESIS, 94 PAGES

SUPERVISOR: PROF. DR. SELAHATTİN MADEN

This thesis consists of five chapters. In the first chapter, it is given an introduction and the aim of the thesis. In the second chapter, basic definitions and theorems in this thesis stated without proof. In the third chapter, projection matrices are considered and some formulae for these matrices ate obtained. It is given some new equalities and inequalities for the null and column spaces of combinations of two projectors and some new necessary and sufficient conditions for $P \pm Q$ to be invertible are given by the structure of null and column space of some combinations of P and Q. Then it is considered some approaches to characterize the commutativity of P and Q orthogonal projectors. Furthermore, by considering Moore-Penrose inverses, some rank equalities are obtained with concerning orthogonal projection matrices in this chapter. In the fourth chapter, it is given some results and propositions and references that used in this thesis are listed in fifth chapter.

Keywords: Matrix, Square Matrix, Nonsingular Matrix, Projection Matrix, Determinant, Inverse of a Matrix, Null Space of a Matrix, Ranj Space of a Matrix, Rank, Moore-Penrose Invers.

TEŞEKKÜR

Tez konusunun belirlenmesi ve çalışmalarım boyunca her zaman engin bilgi ve deneyimleriyle yolumu aydınlatan danışman hocam Sayın Prof. Dr. Selahattin MADEN’ e içten teşekkür eder, saygılarımı sunarım.

Hem bu zorlu ve uzun süreçte hem de hayatım boyunca yanımda olan ve ideallerimi gerçekleştirmemi sağlayan değerli aileme yürekten teşekkürü bir borç bilirim.

Ayrıca Lisansüstü eğitimim sırasında kendilerinden ders aldığım ve engin tecrübelerinden yararlandığım Ordu Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde görev yapmakta olan tüm değerli hocalarıma teşekkür ederim.

Son olarak göreve başladığım ilk andan itibaren her konuda yardımcı olan, destekterini esirgemeyen ve bir aile olduğumuzu her an hissetiren Ordu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde görev yapan/yapmakta olan tüm mesai arkadaşlarıma yürekten teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

TEZ BİLDİRİMİ.....I
ÖZET.....II
ABSTRACT.....III
TEŞEKKÜR.....IV
İÇİNDEKİLER.....V
SİMGELER ve KISALTMALAR LİSTESİ.....VI
1. GİRİŞ.....1
2. GENEL BİLGİLER.....3
2.1. Temel Kavramlar.....3
2.2. Genelleştirilmiş İnversler.....16
2.3 Moore–Penrose İnverslerin Varlığı.....24
3. İZDÜŞÜMLERİN SIFIR VE SÜTUN UZAYLARI İÇİN EŞİTLİKLER.....34
3.1 İzdüşümlerin Kombinasyonları İçin Sıfır ve Sütun Uzayları.....34
3.2 İki Eğik İzdüşümün Fonksiyonlarının Sıfır ve Sütun Uzayları.....57
3.3 Ortogonal İzdüşümlerin Komutatifliği İçin Alternatif Yaklaşım.....69
3.4 Ortogonal İzdüşümler İçin Çeşitli Rank Formülleri.....78
4. SONUÇ ve ÖNERİLER.....90
5. KAYNAKLAR.....91
ÖZGEÇMİŞ.....94

SİMGELER ve KISALTMALAR LİSTESİ

$\mathbb{N}$	:	Doğal sayılar kümesi sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	:	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{K}$	:	K cismi
$\mathbb{C}$	:	Kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{K}_{\boldsymbol{n}}^{\boldsymbol{m}}$	:	$\mathbb{K}$ cismi üzerinde tanımlı $m \times n$ tipindeki tüm matrislerin kümesi
$\mathbb{C}_{\boldsymbol{n}}^{\boldsymbol{m}}$ **veya** $\mathbb{C}^{\boldsymbol{mxn}}$	:	$\mathbb{C}$ üzerinde tanımlı $m \times n$ tipindeki tüm matrislerin kümesi
$\boldsymbol{I_n}$	:	$n \times n$ tipindeki birim matris
$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ **veya** $\boldsymbol{A}'$	:	A matrisinin transpozu
$\overline{\boldsymbol{A}}$	:	A matrisinin eşlenik matrisi (eş matrisi)
$\boldsymbol{A}^{*}$	:	A matrisinin eşlenik transpoz matrisi (Hermitian matrisi)
$\boldsymbol{A}^{\perp}$	:	A matrisinin komplementi (tamamlayıcısı)
$\lvert\boldsymbol{A}\rvert$	:	A matrisinin determinantı
$\mathbf{Ek}(\boldsymbol{A})$	:	A matrisinin ek matrisi
$\boldsymbol{A_{ij}}$	:	A matrisinin bir a_{ij} elemanının kofaktörü
$\boldsymbol{A^{-1}}$	:	A matrisinin inversi
$\mathbf{ind}(\boldsymbol{A})$	:	A matrisinin indeksi
$\mathbf{ker}(\boldsymbol{A})$	:	A matrisinin çekirdeği
$\boldsymbol{r}(\boldsymbol{A})$	:	A matrisinin rankı
$\boldsymbol{tr}(\boldsymbol{A})$ **veya** $\boldsymbol{iz}(\boldsymbol{A})$	:	A matrisinin izi
$\boldsymbol{\mathcal{N}}(\boldsymbol{A})$	:	A matrisinin null (sıfır) uzayı
$\boldsymbol{\Re}(\boldsymbol{A})$	:	A matrisinin ranj (sütun) uzayı
$\boldsymbol{A}^{-}$ **veya** $\boldsymbol{A}^{(\mathbf{1})}$	:	A matrisinin genelleştirilmiş inversi (iç inversi)
$\boldsymbol{A}^{(\mathbf{2})}$	:	A matrisinin dış inversi
$\boldsymbol{A}^{\#}$	:	A matrisinin grup inversi
$\boldsymbol{A_0}$ **veya** $\boldsymbol{A}^{(\mathbf{1,2})}$	:	A matrisinin yansımalı genelleştirilmiş inversi
$\boldsymbol{A}^{\dagger}$ **veya** $\boldsymbol{A}^{+}$	:	A matrisinin Moore–Penrose tipi genelleştirilmiş inversi
$\mathbf{k}$öş$(\boldsymbol{A})$	:	A matrisinin köşegen elemanları
$\bigoplus$	:	Direkt toplam

1. GİRİŞ

Bir singüler matrisin inversi kavramı ilk kez 1920 yılında Moore (1920, 1935) tarafından ortaya atılmıştır. Bu kavramın genel operatörlere genişletilmesi ise Tseng (1949a, 1949b, 1956) tarafından yapılmıştır. Ancak, daha sonra 1955 yılına kadar bu konuda herhangi bir sistematik çalışmaya rastlanamamaktadır. 1955 yılında, önceki çalışmalardan habersiz olarak, Penrose (1955, 1956) biraz farklı bir yoldan Moore tarafından verilen invers kavramını tekrar tanımlamıştır. Penrose ile aynı zamanlarda yaşayan bilim adamlarından birisi olan Rao (1955), bir singüler matrisin Pseudo İnversi olarak tanımladığı, en küçük kareler teorisinde singüler matrisli normal denklemlerin çözümünde ve tahmin edicilerin varyanslarının hesaplanmasında da kullanılan yeni bir invers kavramı ortaya atmıştır. Ancak Rao tarafından geliştirilen Pseudo invers, Moore ve Penrose tarafından ortaya konulan kısıtlamaların tümünü sağlamamaktadır. Bu nedenle bu invers, Moore–Penrose inversten oldukça farklıdır, fakat gözlem denklemlerinin rankları üzerinde herhangi bir kısıtlama konulmaması durumunda en küçük kareler yönteminin genel teorisinin ortaya konulmasında oldukça yararlıdır. Rao (1962), daha sonraki bir çalışmasında, lineer denklemlerle ilgili problemlerinin çözümünde yeterli olabilecek olan Moore ve Penrose' un vermiş olduğu tanımdan daha zayıf bir tanım ortaya koymuştur. Böyle bir invers, bir genelleştirilmiş invers (g–invers) olarak adlandırılmış ve bunun uygulamaları Rao (1961, 1965a, 1965b, 1966, 1967)' nun birçok çalışmasında yer almıştır.

Genelleştirilmiş inversler üzerinde 1955' li yıllardan itibaren çalışan başlıca bilim adamları arasında Greville (1959), Bjerhammer (1951a, 1951b, 1958), Ben-Israel ve Charnes (1963), Chipman (1964, 1968), Chipman ve Rao (1964), Scroggs ve Odell (1966) sayılabilir. Bose (1959), "Varyans Analizi" adlı ders notlarında g–inversi kullanmıştır. Bott ve Duffin (1953) bir kare matrisin kısıtlamalı inversini tanımlamıştır ki bu invers bilinen g–inversten biraz farklı olup bazı uygulamalarda kullanışlıdır. Chernoff (1953), singüler nonnegatif tanımlı bir matrisin g–inversini göz önüne almıştır ki bu invers, bir g–invers olmamasına rağmen bazı tahmin problemlerinin incelenmesinde oldukça yararlıdır. Rao (1962) tarafından verilen daha zayıf tanımı sağlayan g–invers tek olmamakla birlikte matris cebirinde ilginç bir çalışma olarak kabul edilmektedir. Bir çalışmasında Rao (1967), değişik amaçlarla kullanılmak üzere g–inverslerin bir sınıflandırmasını vermiştir. Bu çalışmalar daha sonra genelleştirilmiş inverslerin yeni bir sınıflandırmasını ortaya atan Mitra (1968a, 1968b), Mitra ve Bhimasankaram (1969, 1970) tarafından geliştirilmiştir. Genelleştirilmiş inverslerin diğer çeşitli uygulamaları ise Mitra ve Rao (1968a, 1968b, 1969) ve Rao (1968) tarafından yapılan bir dizi çalışmada ele alınmıştır.

Genelleştirilmiş inverslerin hesaplanmasındaki sistematik gelişmeler ve onların çeşitli uygulamaları Rao (1964) tarafından *Generalized Inverse of Matrices and Its Applications* adlı kitapta verilmiştir.

2. GENEL BİLGİLER

2.1. Temel Kavramlar

Tanım 2.1.1 $\mathbb{K}$ bir cisim olsun. $m, n \in \mathbb{N}$ ve $1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j\ \leq n$ olmak üzere bütün (i,j) sıralı ikililerinin kümesini $A = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ile gösterelim. Bu durunda

$$\text{f}: A \ \longrightarrow\ \mathbb{K} \text{ fonksiyonu}$$

$$(i,j) \longrightarrow \text{f}(i,j) = a_{ij}$$

olarak tanımlansın. Bu şekilde $a_{ij} \in \mathbb{K}$ olacak şekilde seçilen mn tane eleman tarafından oluşturulan

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

sayı tablosuna $\mathbb{K}$ cismi üzerinde tanımlı $m \times n$ tipinde bir matris denir. Buna göre

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

matrisi kısaca $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ olarak gösterilir. Her $(i,j),\ 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n$ ikilisine karşılık gelen a_{ij} elemanına ise A matrisinin (i,j)–yinci bileşeni denir.

Tanım 2.1.2 a. $m \times n$ tipinde olan ve bileşenleri bir $\mathbb{K}$ cismi üzerinden seçilen bütün $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ matrislerinin kümesi $\mathbb{K}_n^m$ veya $\mathbb{K}^{mxn}$ ile gösterilir.

b. $A = [a_{ij}]$ ve $B = [b_{ij}]$ $m \times n$ tipinde herhangi iki matris olmak üzere, eğer her (i,j) için $a_{ij} = b_{ij},\ 1 \leq i \leq m$ ve $1 \leq j \leq n$ ise, bu iki matris birbirine eşittir denir.

c. $A = [a_{ij}]$ $m \times n$ tipinde bir matris olmak üzere, eğer her bir a_{ij} elemanı sıfıra eşitse, bu takdirde A matrisine sıfır matris denir ve 0 ile gösterilir.

d. $A = [a_{ij}]$ ve $B = [b_{ij}]$ $m \times n$ tipinde iki matris olmak üzere, A ve B matrislerinin toplamı, (i,j)–yinci bileşeni $a_{ij} + b_{ij}$ olan bir matris olup,

$$+:\ \mathbb{K}_n^m \times \mathbb{K}_n^m \longrightarrow \mathbb{K}_n^m$$

$$(A,B) \longrightarrow A + B = [a_{ij}] + [b_{ij}]$$

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + +b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlanır.

e. $c \in \mathbb{K}$ bir skaler olmak üzere $cA \in \mathbb{K}_n^m$ matrisi (i, j)–yinci bileşeni ca_{ij} olan bir matristir. Yani,

$$.: \ \mathbb{K} \times \mathbb{K}_n^m \longrightarrow \mathbb{K}_n^m$$

$$(c, A) \longrightarrow cA = \begin{bmatrix} ca_{11} & ca_{12} & \cdots & ca_{1n} \\ ca_{21} & ca_{22} & \cdots & ca_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ca_{m1} & ca_{m2} & \cdots & ca_{mn} \end{bmatrix}$$

olur. O halde her $A \in \mathbb{K}_n^m$ matrisi için $0 \in \mathbb{K}$ olmak üzere, $0A = 0 \in \mathbb{K}_n^m$ matrisi, $m \times n$ tipinde sıfır matristir.

f. $A = [a_{ij}] \in \mathbb{K}_p^m$ ve $B = [b_{ij}] \in \mathbb{K}_n^p$ olmak üzere, A ve B matrislerinin çarpımı $C = [c_{ij}] \in \mathbb{K}_n^m$ şeklinde bir matristir ve

$$.: \ \mathbb{K}_p^m \times \mathbb{K}_n^p \longrightarrow \mathbb{K}_n^m$$

$$(A, B) \longrightarrow A.B = C$$

$$[a_{ij}].[b_{ij}] = [c_{ij}] = \left[\sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}\right], \ 1 \le i \le m, \ 1 \le j \le n$$

şeklindedir ve

$$A.B = \begin{bmatrix} (a_{11}b_{11} + \cdots + a_{1p}b_{p1}) & \cdots & (a_{11}b_{1n} + \cdots + a_{1p}b_{pn}) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ (a_{m1}b_{11} + \cdots + a_{mp}b_{p1}) & \cdots & (a_{m1}b_{1n} + \cdots + a_{mp}b_{pn}) \end{bmatrix}$$

olarak tanımlanır. O halde matris çarpımının tanımlı olabilmesi için birinci çarpanın sütun sayısı, ikinci çarpanın satır sayısına eşit olmalıdır. Herhangi A ve B matrislerinin çarpımı $A.B$ veya AB ile gösterilir (Hacısalihoğlu H.H., 1977).

Tanım 2.1.3 a. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, reel sayılar kümesi olarak alınırsa, $\mathbb{K}$ cismi üzerinde tanımlı $m \times n$ tipindeki A matrisine bir reel matris denir.

b. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, kompleks sayılar kümesi olarak alınırsa, $\mathbb{K}$ cismi üzerinde tanımlı $m \times n$ tipindeki bir A matrisine bir kompleks matris denir (Branson R., 1999).

Tanım 2.1.4 a. Bir $A = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ matrisinde eğer $m = n$ ise, bu takdirde A matrisine bir kare matris denir.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{2.3}$$

kare matrisinde $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ elemanlarına köşegen (esas köşegen) elemanları denir.

b. Bir $A = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ kare matrisinin $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ köşegen elemanları dışındaki tüm elemanları sıfır ise yani, $a_{ij} = 0 \ \ (i \neq j)$ ise bu takdirde A matrisine bir köşegen matris denir ve $A = \text{ Köş}\{a_{11}, a_{22}, \dots\ , a_{nn}\}$ ile gösterilir.

c. Bir köşegen matriste $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn} =$ k, k $\in \mathbb{K}$ ise bu matrise skaler matris denir.

d. Köşegen üzerindeki elemanları 1 ve köşegen dışındaki elemanları 0 olan $n \times n$ tipindeki bir skaler matrise $n -$yinci mertebeden bir birim matris denir ve

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

şeklinde gösterilir. Herhangi bir $A \in \mathbb{K}_n^m$ matrisi için, $I_m A = A I_n = A$ olur.

e. Bir $A = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ matrisinden aynı numaralı satırlar ve sütunlar kendi aralarında yer değiştirilerek elde edilen $A^T = \left[a_{ij}\right]_{n\times m}$ matrisine A matrisinin transpozu (transpoze matrisi) denir. Buna göre A ve B uygun mertebeden matrisler olmak üzere,

$$(A + B)^T = A^T + B^T \text{ ve } (AB)^T = B^T A^T$$

eşitlikleri sağlanır.

f. A bir reel kare matris olmak üzere $A^T = A$ ise, A matrisine simetrik matris denir.

g. A ve B kare matrisleri arasında $AB = BA$ bağıntısı varsa, bu matrislere değişmeli (komutatif) matrisler denir (Hacısalihoğlu H.H., 1977).

Tanım 2.1.5 a. $\{1,2, \dots n\}$ kümesinin kendisi üzerine bir birebir ve örten bağıntısı veya eş değer olarak 1,2, ... n sayılarının yeniden bir sıralanmasına $\{1,2, \dots n\}$ kümesinin bir σ permütasyonu denir. Böyle bir permütasyon,

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_n \end{pmatrix}$$

veya

$$\sigma = j_1, j_2, \dots, j_n, \qquad j_i = \sigma(i)$$

ile gösterilir. Bu permütasyonların tümünün kümesi S_n ile gösterilir. S_n de gelişigüzel bir σ permütasyonu, örneğin $\sigma = j_1, j_2, \dots, j_n$ düşünüldüğünde σ da çift veya tek sayıda permütasyonlar olmasına göre σ ya çift veya tek permütasyon denir. O halde bir σ nın işareti,

$$sgn\sigma = \begin{cases} 1, & \text{eğer } \sigma \text{ çift ise} \\ -1, & \text{eğer } \sigma \text{ tek ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır ve $sgn\sigma$ ile gösterilir.

b. $A = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ bir $\mathbb{K}$ cismi üzerinde tanımlı kare matris olsun.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

matrisinin her satırından ve her sütunundan yalnız ve yalnız bir eleman alınmak üzere n elemanın bir çarpımı düşünülsün. Böyle bir çarpım $a_{1j_1}, a_{2j_2}, \dots, a_{nj_n}$ şeklinde yazılır. Burada çarpanlar ardışık satırlardan gelir ve bu yüzden alt indisler $1, 2, \dots, n$ doğal sayı sırasındadır. Çarpanlar farklı sütunlardan geldiğinden, ikinci alt indislerin dizisi S_n de bir $\sigma = j_1, j_2, \dots, j_n$ permütasyonunu oluşturur. Tersine, S_n deki her permütasyon yukarıdaki şekilde bir çarpım tanımlar. Böylece A matrisi bir $n!$ çarpımını kapsar.

$A = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ kare matrisinin determinantı det(A) veya $|A|$ şeklinde gösterilir ve yukarıdaki her çarpanı $sgn\sigma$ ile çarpılan veya $n!$ tane çarpımların toplamıdır. Yani,

$$|A| = \sum_{\sigma}(sgn\sigma)a_{1j_1}, a_{2j_2}, \dots, a_{nj_n}$$

veya

$$|A| = \sum_{\sigma\in S_n}(sgn\sigma)a_{1\sigma(1)}, a_{2\sigma(2)}, \dots, a_{n\sigma(n)}$$

şeklinde n mertebedendir.

$A = [a_{ij}]_{n\times n}$ matrisinin determinantı aşağıdaki şekilde de tanımlanmaktadır.

c. 1×1tipinde bir A matrisinin determinantı kendisidir. $A = [a]$ ise, $\det(A) = |a| = a$ olur.

d. 2×2 tipinde bir A matrisinin determinantı aşağıdaki gibi tanımlıdır.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

olur.

$n > 2$ için bir kare matrisin determinantı, aşağıda gösterildiği gibi bir indirgeme işlemi ve minörleri ile işaretli minörleri kullanılan bir açılımla hesaplanır.

e. Bir $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ matrisinin bir a_{ij} elemanının $|M_{ij}|$ şeklinde tanımlanan minörü, A matrisinden i–yinci satırın ve j–yinci sütunun atılması ile oluşan $(n-1) \times (n-1)$ tipindeki kare matrisin determinantıdır.

f. Bir $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ matrisinin bir a_{ij} elemanının minörü $|M_{ij}|$ olsun. A matrisinin bir a_{ij} elemanının A_{ij} şeklinde gösterilen kofaktörü (işaretli minörü veya eş çarpanı), $A_{ij} = (-1)^{i+j}.|M_{ij}|$ şeklinde tanımlanır.

g. Bir $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ matrisinin determinantı herhangi bir satır (sütun) elemanlarının kendi kofaktörleriyle çarpılıp bu çarpanların toplanmasıyla bulunur. Yani herhangi i ve j $(i, j = 1,2,3, \dots, n)$ için,

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}.A_{ik} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik}|M_{ik}| \tag{2.4}$$

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}.A_{kj} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{kj}|M_{ik}| \tag{2.5}$$

şeklinde tanımlanır.

Her bir i için, (2.4) ile verilen toplama, A matrisinin determinantının i–yinci satır elemanlarına göre açılımı, her bir j için, (2.5) ile verilen toplama ise A matrisinin determinantının j–yinci sütun elemanlarına göre açılımı denir.

h. Bir $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ kare matrisi için $|A| = 0$ ise, A matrisine singüler (tekil) matris, $|A| \neq 0$ ise, bu takdirde A matrisine bir nonsingüler (tekil olmayan veya regüler) matris denir (Branson R., 1999).

Tanım 2.1.6 a. Bir $A = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ matrisinde bir a_{ij} elemanının kofaktörü A_{ij} olsun.

$$\text{Ek}(A) = \left[A_{ij}\right]^T = \left[A_{ji}\right]$$

şeklinde tanımlanan matrise A matrisinin ek matrisi denir. Buna göre,

$$Ek(A) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

olur.

b. Bir $A = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ matrisi için $A.B = B.A = I_n$ olacak şekilde bir $B = \left[b_{ij}\right]_{n\times n}$ matrisi varsa, B matrisine A matrisinin inversi denir ve $A^{-1} = B$ ile gösterilir (Hacısalihoğlu H.H., 1977).

Teorem 2.1.1 Bir $A = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ matrisi ile bu matrisin ek matrisinin çarpımı bir skaler matris olup,

$$A.\text{Ek}(A) = \text{Ek}(A).A = |A| \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = |A| I_n \tag{2.6}$$

ile verilir (Hacısalihoğlu H.H., 1977).

İspat: $A.\text{Ek}(A) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} |A| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |A| & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & |A| \end{bmatrix}$$

olur ki bu matris bir skaler matristir. Benzer şekilde,

$$\text{Ek}(A).A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} |A| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |A| & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & |A| \end{bmatrix}$$

olduğu görülür. Böylece,

$$A.\mathrm{Ek}(A) = \mathrm{Ek}(A).A = |A| \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = |A| I_n$$

eşitliği elde edilir.

Teorem 2.1.2 Bir $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ nonsingüler matrisinin inversi,

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}.\mathrm{Ek}(A) \tag{2.7}$$

dir (Hacısalihoğlu H.H., 1977).

İspat: (2.6) bağıntısından dolayı $A.\mathrm{Ek}(A) = |A|I$ olur. Bu ifadenin her iki yanı A^{-1} ile çarpıldığında,

$$(A^{-1}A).\mathrm{Ek}(A) = A^{-1}|A|I \;\Rightarrow\; \mathrm{Ek}(A) = |A|A^{-1}I \;\Rightarrow\; \mathrm{Ek}(A) = |A|A^{-1}$$

olur. Öte yandan A matrisi nonsingüler olduğundan $|A| \neq 0$ olup, $A^{-1} = \frac{1}{|A|}.\mathrm{Ek}(A)$ elde edilir.

Teorem 2.1.3 $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ nonsingüler bir matris, B ve C çarpıma uygun matrisler olmak üzere, eğer $AB = AC$ ise bu takdirde $B = C$ olur (Hacısalihoğlu H.H.. 1977).

İspat: $AB = AC$eşitliğinin her iki tarafı soldan A^{-1} ile çarpılmasıyla $A^{-1}AB = A^{-1}AC$ yani $B = C$ elde edilir.

Teorem 2.1.4 a. r $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ nonsingüler bir matris olsun. A^{-1} matrisi tektir.

b. A nonsingüler matris ise A^{-1} matrisi de nonsingüler olup $(A^{-1})^{-1} = A$ dır.

c. A ve B aynı mertebeden nonsingüler matrisler ise bu takdirde AB matrisi de nonsingüler olup $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ dir.

d. A nonsingüler bir matris ise A^T matrisi de nonsingüler olup $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ dir (Branson R., 1999).

İspat: **a.** B ve C matrislerinin A matrisinin herhangi iki inversi olduğu varsayılsın. O zaman $AB = BA = I$ ve $AC = CA = I$ olur. Buradan $C = CI = C(AB) = (CA)B = IB = B$ elde edilir.

b. $(A^{-1})^{-1}$ matrisi A^{-1} matrisinin inversidir. Aynı zamanda A matrisi de A^{-1} matrisinin inversidir. Nonsingüler bir matrisin inversinin tekliğinden bu inversler birbirine eşittir.

c. $(AB)^{-1}$ matrisi AB matrisinin inversidir. Ayrıca,

$$B^{-1}A^{-1}(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I$$

ve

$$(AB)B^{-1}A^{-1} = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$$

yazılabilir. Böylece $B^{-1}A^{-1}$ matrisi de AB matrisinin inversi olur. Nonsingüler bir matrisin inversinin tekliğinden bu inversler birbirine eşittir.

d. $(A^T)^{-1}$ matrisi A^T matrisinin inversidir. Ayrıca $I^T = I$ olduğundan $I = I^T = (AA^{-1})^T = (A^{-1})^T(A)^T$ olur. Bu durum, $(A^{-1})^T$ matrisinin A^T matrisinin bir inversi olduğunu gösterir. Nonsingüler bir matrisin inversinin tekliğinden $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ elde edilir.

Tanım 2.1.7 a. Bir $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ kare matrisi için eğer $A^2 = A$ ise, bu takdirde A matrisine bir idempotent matris denir.

b. $\mathbb{C}$ kompleks sayılar cismi üzerinde tanımlı bir A matrisinin elemanlarının yerlerine eşlenikleri yazılarak elde edilen matrise A matrisinin eşleniği (eş matrisi) denir ve $\overline{A}$ ile gösterilir.

c. $\mathbb{C}$ kompleks sayılar cismi üzerinde tanımlı bir A matrisi için $\left(\overline{A}\right)^T = A$ ise, A matrisine hermitian matris denir ve $A^* = \left(\overline{A}\right)^T$ ile gösterilir.

d. Bir A matrisi için $AA^* = A^*A$ ise A matrisine normal matris denir.

e. $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ nonsingüler bir matris olmak üzere, eğer $A^{-1} = A^*$ (veya $AA^* = A^*A = I$) ise A matrisine bir birimsel (uniter) matris denir.

f. $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ bir matris olmak üzere, eğer $A^{-1} = A^T$ ise A matrisine bir ortogonal matris denir.

g. $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ reel ve simetrik bir matris olmak üzere, sıfırdan farklı her $x \in \mathbb{R}_1^n$ vektörü için $x^T A x > 0$ $(x^T A x \geq 0)$ ise, A matrisine pozitif tanımlı (pozitif yarı tanımlı) matris denir.

h. A, $n \times n$ tipinde bir kare matris olsun. $(A - \lambda I)x = 0$ eşitliğini sağlayan λ skalerine A matrisinin bir özdeğeri, sıfır olmayan x vektörüne de, A matrisinin bir özvektörü denir (Hacısalihoğlu H.H., 1977).

Teorem 2.1.5 A ve B uygun matrisler olmak üzere,

a. $\left(\overline{A}\right)^T = \overline{(A^T)}$,

b. $(A^*)^* = A$,

c. $(A+B)^* = A^* + B^*$,

d. $(AB)^* = B^* A^*$,

eşitlikleri sağlanır (Branson R., 1999).

İspat: a. $A = [a_{ij}]$ $m \times n$ tipinde bir matris olsun. Bu takdirde $\overline{A} = [\overline{a_{ij}}]$ ve $\left(\overline{A}\right)^T = [\overline{a_{ji}}]$olur. Diğer taraftan $A^T = [a_{ji}]$ ve $\overline{(A^T)} = [\overline{a_{ji}}]$ olduğundan, $\overline{(A^T)} = \left(\overline{A}\right)^T$ olduğu görülür.

b. $A^* = \left(\overline{A}\right)^T$ olduğundan, $(A^*)^* = \left(\overline{\left(\overline{A}\right)^T}\right)^T = (A^T)^T = A$ elde edilir.

c. Hermitian matris tanımına göre,

$$(A+B)^* = \left(\overline{A+B}\right)^T = \left(\overline{A} + \overline{B}\right)^T = \left(\overline{A}\right)^T + \left(\overline{B}\right)^T = A^* + B^*$$

elde edilir.

d. Hermitian matris tanımına göre,

$$(AB)^* = \left(\overline{AB}\right)^T = \left(\overline{A}\,\overline{B}\right)^T = \left(\overline{B}\right)^T \left(\overline{A}\right)^T = B^* A^*$$

yazılabilir.

Teorem 2.1.6 Reel ve simetrik bir A matrisinin pozitif tanımlı (pozitif yarı tanımlı) olması için gerek ve yeter şart, tüm özdeğerlerinin (sıfırdan farklı özdeğerlerinin) pozitif olmasıdır (Hacısalihoğlu H.H., 1977).

İspat: A matrisi pozitif tanımlı olmak üzere, λ özdeğerine ve ilgili x özvektörüne sahip olsun. Bu takdirde bu x vektörü için $Ax = \lambda x$ ve $\langle Ax, x \rangle > 0$ bağıntıları vardır. O halde $0 < \langle Ax, x \rangle = \langle \lambda x, x \rangle = \lambda \langle x, x \rangle$ olur. x bir özvektör olduğundan, sıfırdan farklıdır ve dolayısıyla $\langle x, x \rangle$ pozitiftir. Bu durumda $\lambda > 0$ olmalıdır.

A matrisi pozitif yarı tanımlı olmak üzere, λ özdeğerine ve ilgili x özvektörüne sahip olsun. Bu takdirde bu x vektörü için $Ax = \lambda x$ ve $\langle Ax, x \rangle \geq 0$ bağıntıları vardır. O halde,

$$0 \leq \langle Ax, x \rangle = \langle \lambda x, x \rangle = \lambda \langle x, x \rangle$$

olur. x bir özvektör olduğundan, sıfırdan farklıdır ve dolayısıyla $\langle x, x \rangle$ pozitiftir. Bu durumda $\lambda \geq 0$ olmalıdır.

Tüm (sıfırdan farklı) özdeğerleri pozitif olması halinde A matrisinin pozitif tanımlı (pozitif yarı tanımlı) olacağı benzer şekilde gösterilebilir (Lanchester, P., 1969).

Tanım 2.1.8 a. $x_1, x_2, \dots x_n$ vektörler kümesi verilmiş olsun. $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$ eşitliği ancak $a_1, a_2, \dots, a_n$ skalerlerinin tümü birden sıfır olduğunda sağlanıyorsa bu durumda $x_1, x_2, \dots x_n$ vektörlerine lineer bağımsızdır denir. Aksi halde yani, $a_1, a_2, \dots, a_n$ skalerlerinden en az biri sıfırdan farklı olmak üzere $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$ eşitliği sağlanıyorsa bu durumda $x_1, x_2, \dots x_n$ vektörlerine lineer bağımlıdır denir.

b. A matrisi $m \times n$ tipinde herhangi bir matris olsun. A matrisinin sütun vektörlerini $A_{*1}, A_{*2}, \dots, A_{*n}$ ile, ve satır vektörlerini $A_{1*}, A_{2*}, \dots, A_{m*}$ ile gösterelim. A_{i*}, $i = 1, 2, \dots, m$ vektörleri arasından oluşturulan en büyük lineer bağımsız vektörler kümesinin eleman sayısına A matrisinin satır rankı, A_{*j} , $j = 1, 2, \dots, n$ vektörleri arasından oluşturulan en büyük lineer bağımsız vektörler kümesinin eleman sayısına ise A matrisinin sütun rankı denir (Hacısalihoğlu H.H., 1977).

Teorem 2.1.7 Bir matrisin herhangi iki satırının kendi aralarında yer değiştirmesi bu matrisin satır rankını değiştirmez (Branson R., 1999).

İspat: A matrisinin herhangi iki satırı yer değiştirdiğinde satır vektörlerinin kümesi değişmeyeceğinden, bu durum matrisin satırları arasındaki lineer bağımsızlığı değiştirmez. Yani satır rankını değiştirmez.

Teorem 2.1.8 Eğer $AX = 0$ ve $BX = 0$ denklemlerinin çözüm kümeleri aynı ise, bu takdirde A ve B, $n \times n$ matrislerin sütun rankları da aynıdır (Branson R., 1999).

İspat: $AX = 0$ sistemi,

$$x_1 A_1 + x_2 A_2 + \cdots + x_n A_n = 0 \tag{2.8}$$

olarak yazılabilir. Burada A_i, A matrisinin i-yinci sütunudur ve $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ olur. Benzer şekilde, $Bx = 0$ sistemi,

$$x_1 B_1 + x_2 B_2 + \cdots + x_n B_n = 0 \tag{2.9}$$

olarak yazılabilir.

A matrisinin sütun rankı a, B matrisinin sütun rankı b ile gösterilsin. A matrisinin sütun rankı, B matrisinin sütun rankından büyük kabul edilsin. Böylece $a > b$ olur. Bu durumda A matrisinin a tane lineer bağımsız sütunu olmalıdır. Genelliği bozmaksızın, bunların A matrisinin ilk a sütunu olduğu varsayılabilir. (Eğer değilse, A matrisinin sütunları bu şekilde yeniden düzenlenebilir. Bu durum ise Teorem 2.1.7' ye benzer şekilde A matrisinin sütun rankını değiştirmez.) Ancak $a > b$ kabul edildiğinden B matrisinin ilk a sütunu lineer bağımlı olacaktır. Böylece, hepsi birden sıfır olmayan öyle $d_1, d_2, \dots, d_n$ sayıları vardır ki,

$$d_1 B_1 + d_2 B_2 + \cdots + d_a B_a = 0$$

olur. Buradan,

$$d_1 B_1 + d_2 B_2 + \cdots + d_a B_a + 0 B_{a+1} + \cdots + 0 B_n = 0$$

ve (2.9) sisteminin çözümü olarak,

$$x_1 = d_1 \quad x_2 = d_2 \quad \dots \quad x_a = d_a \quad x_{a+1} = x_{a+2} = \cdots = x_n = 0$$

bulunur. Bu aynı değerler (2.8) sisteminin de çözümü olarak verildiğinden,

$$d_1 A_1 + d_2 A_2 + \cdots + d_a A_a = 0$$

olacaktır. Burada, belirtildiği gibi, $d_1, d_2, \dots, d_a$ sabitlerinin tümü birden sıfır değildir. Bu ise $A_1, A_2, \dots, A_a$ matrislerinin lineer bağımlı olduğunu gösterir ki, bu da bir çelişkidir.

A ve B matrislerinin rollerini değiştirerek yapılan benzer bir çalışma, B matrisinin sütun rankının da A matrisinin sütun rankından daha büyük olamayacağını gösterir. Böylece bu iki matrisin sütun rankları eşit olmalıdır.

Teorem 2.1.9 Elemanter satır işlemleri herhangi bir matrisin sütun rankını değiştirmez (Branson R., 1999).

İspat: A matrisine elementer satır işlemleri uygulanarak elde edilen matris B olsun. Bu durumda $Ax = 0$ ve $Bx = 0$ homojen denklem sistemlerinin çözüm kümeleri aynıdır. Teorem 2.8 yardımıyla A ve B matrislerinin sütun rankları aynıdır.

Teorem 2.1.10 Herhangi bir A matrisi için satır rankı sütun rankına eşittir (Branson R., 1999).

İspat: $m \times n$ tipindeki bir A matrisinin satır rankının r ve sütun rankının ise c olduğu kabul edilsin. $r = c$ olduğu gösterilecektir. A matrisinin satırları ilk r satırı lineer bağımsız ve kalan $m - r$ satırı ilk r satırın lineer birleşimi olacak şekilde yeniden düzenlenirse, Teorem 2.1.7 ve Teorem 2.1.8 yardımıyla bu işlemin A matrisinin satır ve sütun ranklarını değiştirmediği görülür. Öte yandan A matrisinin satırları sırasıyla $A_1, A_2, \dots, A_m$ ile gösterilsin ve C ve D matrisleri ise

$$C = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \cdots \\ A_r \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad D = \begin{bmatrix} A_{r+1} \\ A_{r+2} \\ \cdots \\ A_m \end{bmatrix}$$

olarak tanımlansın. Bu durumda A matrisi $\begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix}$ blok parçalanmış matrisidir. Ayrıca D matrisinin her bir satırı C matrisinin satırlarının bir lineer birleşimi olduğundan, öyle bir T matrisi vardır ki, $D = TC$ olur. Özel durumda eğer,

$$A_{r+1} = d_1 A_1 + d_2 A_2 + \cdots + d_r A_r$$

ise, o zaman $[d_1, d_2, \dots, d_r]$ vektörü T matrisinin ilk satırıdır. Buradan, herhangi bir n boyutlu x vektörü için,

$$Ax = \begin{bmatrix} Cx \\ Dx \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Cx \\ TCx \end{bmatrix}$$

yazılabilir. Bu durumda, ancak ve ancak $Cx = 0$ ise, $Ax = 0$ olur ve Teorem 2.1.8' den dolayı A ve B matrislerinin sütun rankı c dir. Ancak B matrisinin sütunları r boyutlu vektörlerdir. Böylece B matrisinin sütun rankı r den büyük olamaz. Yani,

$$c \leq r \tag{2.10}$$

olur.

Yukarıdaki durum A^T matrisi için tekrarlanırsa, A^T matrisinin sütun rankının A^T matrisinin satır rankından büyük olamayacağı görülür. Ancak, A^T matrisinin sütunları A matrisinin satırları olduğundan bu durum A matrisinin satır rankının A matrisinin sütun rankından büyük olamayacağı anlamına gelir. Yani,

$$r \leq c \tag{2.11}$$

olur. (2.10) ve (2.11) bağıntılarından $r = c$ olduğu görülür.

Tanım 2.1.9 Herhangi bir A matrisinin rankı, satır ve sütun rankı olarak tanımlanır ve rank(A) veya $r(A)$ şeklinde gösterilir (Branson R., 1999).

Teorem 2.1.11 A bir matris olmak üzere $r(A) = r(A^T)$ dir (Hacısalihoğlu H.H., 1977).

İspat: A matrisinin satırları A^T matrisinin sütunları ve A matrisinin sütunları A^T matrisinin satırları olduğundan, Teorem 2.1.10' dan istenilen sonuç elde edilir.

Tanım 2.1.10 $n \times n$ tipindeki bir A kare matrisi için, eğer $r(A) = n$ ise bu takdirde A matrisine nonsingüler (tekil olmayan) matris denir. Aksi durumda yani, $r(A) < n$ ise A matrisine singüler (tekil) matris denir (Hacısalihoğlu H.H., 1977).

Tanım 2.1.11 a. $A \in \mathbb{K}_n^m$, $m \times n$ tipinde bir matris olsun. $\mathcal{N}(A) = \{x: Ax = 0\}$ şeklinde tanımlanan kümeye A marisinin null (sıfır) uzayı denir.

b. $A \in \mathbb{K}_n^m$, $m \times n$ tipinde bir matris olsun. $\mathcal{R}(A) = \{y: Ax = y\}$ şeklinde tanımlanan kümeye A matrisinin ranj (sütun) uzayı denir (Hacısalihoğlu H.H., 1977).

Teorem 2.1.12 Eğer A matrisi $m \times n$ tipinde r ranklı bir matris ise, bu durumda aşağıdaki şartları sağlayan P ve Q nonsingüler matrisleri mevcuttur. I, $r \times r$ boyutlu birim matris olmak üzere,

a. $m = n = r \Rightarrow PAQ = I,$

b. $m = r < n \Rightarrow PAQ = [I\ ,0],$

c. $m > r,\ n > r \Rightarrow PAQ = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$ (2.12)

İspat: Bakınız Lancaster, P., (1969).

Teorem 2.1.13 Çarpmaya uygun A ve B matrislerinin çarpımının rankı Ave B matrislerinin ranklarını geçemez. Başka bir deyişle,

$$r(AB) \leq \min\{r(A),\ r(B)\} \tag{2.13}$$

dir (Lancaster, P., 1969).

İspat: AB matrisinin her bir sütunu A matrisinin sütunlarının bir lineer kombinasyonu olduğundan, AB matrisinin sütun uzayı A matrisinin sütun uzayının alt kümesi olur. Böylece $r(AB) \leq r(A)$ eşitsizliği bulunur. Benzer şekilde $r(AB) \leq r(B)$ eşitsizliği de sağlanır. Böylece $r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}$ elde edilir.

2.2. Genelleştirilmiş İnversler

Herhangi bir A matrisi bilinen anlamda bir inverse sahip olabilmesi için A matrisinin nonsingüler bir matris olması gerekir. Bu durumda A matrisi yardımıyla,

$$AX = B \tag{2.14}$$

lineer denklem sisteminin var olan tek çözümü $X = A^{-1}$B şeklindedir. Ayrıca, $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ şartını sağlayan ve A matrisinin inversi olarak adlandırılan A^{-1} matrisi vardır. Bununla birlikte A matrisinin kare matris olmadığı durumlarda ya da A matrisinin kare matris fakat singüler olduğu durumlarda bilinen anlamda inversi yoktur. Bu durumlarda A^{-1} matrisinin özelliklerini de içeren ve genelleştirilmiş invers (g–invers) matris adı verilen yeni bir kavram sayesinde (2.14) sisteminin bir çözümü olabilir.

Tanım 2.2.1 $\mathbb{C}_n^m$, kompleks sayılar cismi üzerinde tanımlı $m \times n$ tipindeki tüm matrislerin kümesini göstersin. Bir $A \in \mathbb{C}_n^m$ matrisi için aşağıdaki dört şartı (Moore–Penrose şartları) sağlayan bir G matrisine A matrisinin Moore–Penrose inversi denir ve A^+ veya $A^\dagger$ ile gösterilir.

(i) $AGA = A$,

(ii) $GAG = G$,

(iii) $(AG)^* = AG$,

(iv) $(GA)^* = GA$. (2.15)

Eğer G matrisi sadece (i) şartını sağlıyorsa, bu G matrisine, A matrisinin bir genelleştirilmiş inversi (iç inversi) denir ve A^- veya $A^{(1)}$ ile gösterilir. Sadece (ii) şartını sağlayan G matrisine, A matrisinin bir dış inversi denir ve $A^{(2)}$ ile gösterilir. Hem (i) hem de (ii) şartını sağlayan G matrisine ise, A matrisinin bir yansımalı genelleştirilmiş inversi denir ve $A^{(1,2)}$ veya A_0 ile gösterilir.

Tanım 2.2.2 Moore–Penrose şartlarından sadece (i) şartını sağlayan yani,

$$AGA = A \tag{2.16}$$

olacak şekildeki G matrisine, A matrisinin bir g–inversi (genelleştirilmiş inversi) denir.

Bir matrisin g–inversini bulmak için aşağıdaki algoritma kullanılabilir.

Algoritma 2.2.1 $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ matrisi r ranklı bir matris olsun.

1. Adım: A matrisinde, $r \times r$ tipinde nonsingüler herhangi bir B alt matrisi seçilir.

2. Adım: Seçilen B alt matrisinin inversi bulunup bu inversin transpozu alınır.

3. Adım: A matrisinde B alt matrisinin her bir elemanına karşılık gelen yere $(B^{-1})^T$ matrisinin elemanları yerleştirilir.

4. Adım: A matrisinin diğer tüm elemanlarının yerine sıfır yazılır.

5. Adım: Elde edilen matrisin transpozu alınır. Bu matrise G denirse, G matrisi A matrisinin bir g–inversidir.

Örnek 2.2.1 Algoritma 2.2.1 ü kullanarak 3×3 tipindeki

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 5 & 0 \\ 4 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

matrisinin bir g–inversini elde edelim. A matrisi rankı 2 olan singüler bir matristir.

1. Adım: A matrisinin 2×2 tipinde bir nonsingüler $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$ alt matrisi seçilsin.

2. Adım: $|B| = 10 - (-3) = 13 \neq 0$ olduğundan B^{-1} mevcut olup,

$$B^{-1} = \frac{1}{|B|}.\text{Ek}(B) = 1/13.\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/13 & -3/13 \\ 1/13 & 2/13 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Bu matrisin transpozu alınırsa,

$$(B^{-1})^T = \begin{bmatrix} 5/13 & 1/13 \\ -3/13 & 2/13 \end{bmatrix}$$

bulunur.

3. ve 4. Adımlar: Bulunan $(B^{-1})^T$ matrisi A matrisinde elemanları B alt matrisinin elemanlarının yerlerine karşılık gelecek şekilde yerleştirilir. Diğer tüm elemanları sıfır alınır. Böylece,

$$\begin{bmatrix} 5/13 & 1/13 & 0 \\ -3/13 & 2/13 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

matrisi elde edilir.

5. Adım: Bir önceki adımda bulunan matrisin transpozu alınarak,

$$G = \begin{bmatrix} 5/13 & -3/13 & 0 \\ 1/13 & 2/13 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

matrisi oluşturulur. Bu şekilde oluşturulan G matrisi A matrisinin bir g–inversidir. Gerçekten,

$$AG = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 5 & 0 \\ 4 & 6 & 2 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 5/13 & -3/13 & 0 \\ 1/13 & 2/13 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olup buradan

$$AGA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 5 & 0 \\ 4 & 6 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 5 & 0 \\ 4 & 6 & 2 \end{bmatrix} = A$$

olduğu görülür.

Şimdi de verilen A matrisinin başka bir B alt matrisini seçerek, bu yeni B alt matrisine Algoritma 2.2.1 uygulansın.

1. Adım: B matrisi $B = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$ şeklinde seçilsin.

2. Adım: $|B| = 10 - 0 = 10 \neq 0$ olduğundan,

$$B^{-1} = \frac{1}{|B|}.\text{Ek}(B) = 1/10.\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -6 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/5 & 0 \\ -3/5 & 1/2 \end{bmatrix}$$

bulunur. Böylece,

$$(B^{-1})^T = \begin{bmatrix} 1/5 & -3/5 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

elde edilir.

3. ve 4. Adımlar: Bu durumda,

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & -3/5 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

olur.

5. Adım: Bu şekilde bulunan matrisin transpozu alındığında,

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 \\ 0 & -3/5 & 1/2 \end{bmatrix}$$

matrisi elde edilir. Bulunan bu G matrisi A matrisinin bir g–inversi olur. Gerçekten,

$$AG = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 5 & 0 \\ 4 & 6 & 2 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 \\ 0 & -3/5 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ve

$$AGA = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 5 & 0 \\ 4 & 6 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 5 & 0 \\ 4 & 6 & 2 \end{bmatrix} = A$$

olduğu görülür.

Sonuç 2.2.1 Yukarıdaki iki seçim gösterir ki, bir matrisin g–inversi tek değildir. Başka bir deyişle bir matrisin tanımlı birden çok g–inversi bulunabilir.

Örnek 2.2.2 2×3 tipindeki $E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ dikdörtgen matrisi ele alınsın. E matrisinin rankının 2 olacağı açıktır. Eğer Algoritma 2.2.1 E matrisine uygulanırsa

1. Adım: Bu durumda M matrisi $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ olarak seçilebilir.

2. Adım: $|M| = -1 - 1 = -2 \neq 0$ olup,

$$M^{-1} = \frac{1}{|M|}.\text{Ek}(M) = \frac{-1}{2}.\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

ve dolayısıyla,

$$(M^{-1})^T = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

bulunur.

3. ve 4. Adımlar: Buradan $\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \end{bmatrix}$ bulunur.

5. Adım: Bu şekilde elde edilen,

$$G = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

matrisi E matrisinin bir g–inversi olduğu gösterilebilir. Gerçekten,

$$EG = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ve

$$EGE = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = E$$

olduğu görülür.

Örnek 2.2.3 5×2 tipindeki

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \\ -2 & 1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

dikdörtgen matrisi verilmiş olsun. Bu durumda E matrisinin rankının 2 olacağı açıktır. Algoritma 2.2.1 E matrisine uygulansın.

1. Adım: Bu durumda M matrisi, $M = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ olarak seçilebilir.

2. Adım: $|M| = -4 - 0 = -4 \neq 0$ olup,

$$M^{-1} = \frac{1}{|M|}.\text{Ek}(M) = -1/4\,.\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/4 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

ve dolayısıyla,

$$(M^{-1})^T = \begin{bmatrix} -1/2 & 0 \\ 1/4 & 1/2 \end{bmatrix}$$

bulunur.

3. ve 4. Adımlar: Buradan,

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -1/2 & 0 \\ -1/4 & 1/2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

bulunur.

5. Adım: Bu şekilde elde edilen $G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1/2 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$ matrisi, E matrisinin bir g–inversi olduğu gösterilebilir. Gerçekten,

$$EG = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \\ -2 & 1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1/2 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1/2 & 3/4 & 0 \\ 0 & 0 & -3/2 & 3/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 3/4 & 0 \end{bmatrix}$$

ve

$$EGE = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1/2 & 3/4 & 0 \\ 0 & 0 & -3/2 & 3/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 3/4 & 0 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \\ -2 & 1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \\ -2 & 1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = E$$

olduğu görülür.

Algoritma 2.2.1 rankı 1 olan matrislerin g–inversini bulmak için aşağıdaki şekilde uyarlanabilir.

Algoritma 2.2.2

1. Adım: A matrisinin sıfırdan farklı herhangi bir elemanı B olarak seçilir.

2. Adım: Seçilen bu elemanın inversi bulunur.

3. Adım: Bulunan bu invers A matrisinde karşılık gelen yere yazılır.

4. Adım: A matrisinin diğer tüm elemanlarının yerine sıfır yazılır.

Örnek 2.2.4 A matrisi, $A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ olarak alınsın. A matrisinin rankı 1 dir. Algoritma 2.2.2 A matrisine uygulansın.

1. Adım: $B = [3]$ alınsın.

2. Adım: $B^{-1} = [1/3]$ olur.

3. ve 4. Adımlar: Buradan $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{bmatrix}$ olacaktır.

5. Adım: Bu şekilde elde edilen $G = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1/3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ matrisi A matrisinin bir g–inversidir.

Gerçekten,

$$AG = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1/3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ve

$$AGA = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} = A$$

olur.

Örnek 2.2.5. 3×4 tipindeki $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{bmatrix}$ matrisi verilmiş olsun. Bu durumda A matrisinin rankı 1 olacaktır. Algoritma 2.2.2 A matrisine uygulansın.

1. Adım: $M = [8]$ seçilsin.

2. Adım: $M^{-1} = [1/8]$ olur.

3. ve 4. Adımlar: Buradan $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ elde edilir.

5. Adım: Bu şekilde elde edilen $G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/8 & 0 \end{bmatrix}$ matrisi L matrisinin bir g–inversidir. Gerçekten,

$$AG = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/8 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3/2 & 0 \end{bmatrix}$$

ve

$$AGA = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3/2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{bmatrix} = A$$

olur. A matrisi 3×4 tipinde olduğu için 3.4 = 12 tane g–inversi bulunabilir.

Sonuç 2.2.2 Genel olarak 1 ranklı ve $m \times n$ tipindeki matrislerin m.n tane g–inversi bulunabilir. Matrisin sıfırdan farklı herhangi bir elemanının inversini alıp, diğer tüm elemanlarını sıfır aldıktan sonra elde edilen matrisin transpozu alınarak g–inversi bulunur. Eğer A matrisi,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

şeklinde 1 ranklı bir matris ise, A matrisinin,

1–ncisi; $\begin{bmatrix} (a_{11})^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$

2–ncisi; $\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ (a_{12})^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$

$\cdots \; \cdots \; \cdots \; \cdots \; \cdots \; \cdots \; \cdots \; \cdots$

(m.n)–ncisi; $\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & (a_{mn})^{-1} \end{bmatrix}$

şeklinde m.n tane g–inversi bulunabilir.

2.3 Moore–Penrose İnverslerin Varlığı

A nonsingüler matrisinin inversi olan A^{-1} matrisinin Moore–Penrose şartlarını sağlayacağı açıktır. Yani $A^{-1} = A^{+}$ olur. Bununla birlikte, eğer A bir singüler matris veya kare olmayan bir matris ise, bu durumda Moore–Penrose şartlarını sağlayan bir A^{+} matrisinin mevcut olup-olmadığı ile ilgili bir soru akla gelebilir. Bu kısımda her A matrisi için bir A^{+} matrisinin var ve tek olduğu gösterilecektir. Ayrıca bu şekilde tanımlanan Moore–Penrose inversin birtakım özellikleri ifade ve ispat edilecektir.

Teorem 2.3.1 Eğer A matrisi $m \times n$ tipinde sıfır matris ise, A^{+} matrisi $n \times m$ tipinde sıfır matristir (Rao ve Ark., 1971).

İspat: Açık olarak $A^{+} = 0$ alındığında Moore–Penrose şartlarının sağlandığı görülür.

Teorem 2.3.2 Her A matrisi için Moore–Penrose şartlarını sağlayan bir A^{+} matrisi vardır (Rao ve Ark., 1971).

İspat: Eğer $A = 0$ ise, $A^{+} = 0$ olduğu açıktır. $A \neq 0$ olsun. Ayrıca A matrisinin r ranklı olduğu kabul edilsin. Bu durumda A matrisi,

$$A = BC \tag{2.17}$$

şeklinde parçalanabilir. Burada B matrisi $m \times r$ tipinde $r > 0$ ranklı ve C matrisi $r \times n$ tipinde $r > 0$ ranklı matrisler olup B^*B ve CC^* çarpımlarının her ikisi de nonsingülerdir. Bu durumda eğer A^{+} matrisi,

$$A^{+} = C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^* \tag{2.18}$$

olarak alınırsa, A^{+} matrisi Moore–Penrose şartlarını sağlar. Gerçekten,

(i) $$AA^{+}A = (BC)C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^*(BC)$$
$$= B(CC^*)(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}(B^*B)C = BC = A,$$

(ii) $$A^{+}AA^{+} = C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^*(BC)C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^*$$
$$= C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}(B^*B)(CC^*)(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^*$$
$$= C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^* = A^{+},$$

(iii) $$(AA^{+})^* = [(BC)C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^*]^* = B(B^*B)^{-1}(CC^*)^{-1}(CC^*)B^*$$
$$= B(B^*B)^{-1}B^* = B(CC^*)(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^*$$

$$= (BC)C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^* = AA^+,$$

(iv) $(A^+A)^* = [C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^*(BC)]^*$

$$= C^*(B^*B)(B^*B)^{-1}(CC^*)^{-1}C$$

$$= C^*(CC^*)^{-1}C$$

$$= C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}(B^*B)C$$

$$= C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^*(BC) = A^+A$$

olduğu görülür.

Teorem 2.3.3 Herhangi bir A matrisi için, Moore–Penrose şartlarını sağlayan bir tek A^+ matrisi vardır. Yani, her A matrisinin bir tek Moore–Penrose inversi vardır (Rao ve Ark., 1971).

İspat: A matrisinin Moore–Penrose şartlarını sağlayan herhangi iki Moore–Penrose inversi A_1^+ ve A_2^+ olsun. Bu durumda,

$$A_1^+ = A_1^+AA_1^+ = A_1^+(AA_1^+)^* = A_1^+(A_1^+)^*A^* = A_1^+(A_1^+)^*(AA_2^+A)^*$$

$$= A_1^+(A_1^+)^*A^*(A_2^+)^*A^* = A_1^+(AA_1^+)^*(AA_2^+)^* = A_1^+AA_1^+AA_2^+ = A_1^+AA_2^+$$

$$= A_1^+A(A_2^+AA_2^+) = (A_1^+A)^*(A_2^+A)^*A_2^+ = A^*(A_1^+)^*A^*(A_2^+)^*A_2^+$$

$$= (AA_1^+A)^*(A_2^+)^*A_2^+ = A^*(A_2^+)^*A_2^+ = (A_2^+A)^*A_2^+ = A_2^+AA_2^+ = A_2^+$$

olduğundan $A_1^+ = A_2^+$ olur. Yani, A^+ matrisi tektir.

Teorem 2.3.4 $m \times n$ tipindeki bir A matrisinin bir Moore–Penrose inversi varsa $n \times m$ tipindedir (Rao ve Ark., 1971).

İspat: AA^+ matrisinin simetrik ve dolayısıyla kare olması gerçeğinden ispat görülür.

Teorem 2.3.5 a. $m \times n$ tipindeki bir $A = [a_{ij}]$ matrisinin tüm elemanları 1 ise bu takdirde, $A^+ = \frac{1}{m.n}A^*$ dir.

b. a, $n \times 1$ tipinde ve $a \neq 0$ olan bir sütun vektörü ise, bu durumda a^+, $a^+ = (a^*a)^{-1}a^*$ şeklindedir.

c. a, $1 \times n$ tipinde ve $a \neq 0$ olan bir satır vektörü ise, bu durumda a^+, $a^+ = a^*(aa^*)^{-1}$ şeklindedir (Rao ve Ark., 1971).

İspat: a. İspat için teoremde verilen A^{+} matrisinin Moore–Penrose şartlarını sağladığını göstermek yeterlidir. Bu durumda,

(i) $AA^{+}A = A\left(\frac{1}{m.n}A^{*}\right)A = A\frac{1}{m.n}(A^{*}A) = A.\frac{1}{m.n}.m.n = A,$

(ii) $A^{+}AA^{+} = \left(\frac{1}{m.n}A^{*}\right)A\left(\frac{1}{m.n}A^{*}\right) = \frac{1}{m.n}(A^{*}A)\left(\frac{1}{m.n}A^{*}\right) = \frac{1}{m.n}.m.n.\left(\frac{1}{m.n}A^{*}\right)$

$= \left(\frac{1}{m.n}A^{*}\right) = A^{+},$

(iii) $(AA^{+})^{*} = \left(A\frac{1}{m.n}A^{*}\right)^{*} = A\frac{1}{m.n}A^{*} = AA^{+},$

(iv) $(A^{+}A)^{*} = \left(\frac{1}{m.n}A^{*}A\right)^{*} = \frac{1}{m.n}A^{*}A = A^{+}A$

olduğu görülür.

b. a^{+} matrisi Moore–Penrose şartlarını sağlar. Gerçekten,

(i) $aa^{+}a = a(a^{*}a)^{-1}a^{*}a = a(a^{*}a)^{-1}(a^{*}a) = a,$

(ii) $a^{+}aa^{+} = (a^{*}a)^{-1}a^{*}a(a^{*}a)^{-1}a^{*} = (a^{*}a)^{-1}(a^{*}a)(a^{*}a)^{-1}a^{*}$

$= (a^{*}a)^{-1}a^{*} = a^{+},$

(iii) $(aa^{+})^{*} = [a(a^{*}a)^{-1}a^{*}]^{*} = a(a^{*}a)^{-1}a^{*} = aa^{+},$

(iv) $(a^{+}a)^{*} = [(a^{*}a)^{-1}a^{*}a]^{*} = (a^{*}a)^{-1}a^{*}a = a^{+}a$

olduğu görülür.

c. a^{+} matrisi Moore–Penrose şartlarını sağlar. Gerçekten,

(i) $aa^{+}a = aa^{*}(aa^{*})^{-1}a = (aa^{*})(aa^{*})^{-1}a = a,$

(ii) $a^{+}aa^{+} = a^{*}(aa^{*})^{-1}aa^{*}(aa^{*})^{-1} = a^{*}(aa^{*})^{-1}(aa^{*})(aa^{*})^{-1}$

$= a^{*}(aa^{*})^{-1} = a^{+},$

(iii) $(aa^{+})^{*} = [aa^{*}(aa^{*})^{-1}]^{*} = aa^{*}(aa^{*})^{-1} = aa^{+},$

(iv) $(a^{+}a)^{*} = [a^{*}(aa^{*})^{-1}a]^{*} = a^{*}(aa^{*})^{-1}a = a^{+}a$

olduğu görülür.

Örnek 2.3.1 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ matrisi verilmiş olsun. Bu durumda $m = 2,\ n = 3$ ve $A^* = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ olarak alınırsa,

$$A^+ = \frac{1}{m.n} A^* = \frac{1}{2.3} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 \end{bmatrix}$$

matrisi Moore–Penrose şartlarını sağlar. Gerçekten,

(i) $$AA^+ = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$AA^+A = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = A,$$

(ii) $$A^+A = \begin{bmatrix} 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

$$A^+AA^+ = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 \end{bmatrix} = A^+,$$

(iii) $$(AA^+)^* = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} = AA^+,$$

(iv) $$(A^+A)^* = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix} = A^+A,$$

olduğu görülür.

Örnek 2.3.2 $a = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ olsun. Bu durumda,

$$a^+ = (a^*a)^{-1}a^* = \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right)^{-1} . \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= [5]^{-1} . \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= [1/5] . \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/5 & 2/5 \end{bmatrix}$$

matrisi Moore–Penrose şartlarını sağlar. Gerçekten,

(i) $aa^{+} = \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}.[1/5 \quad 2/5] = \begin{bmatrix}1/5 & 2/5\\2/5 & 4/5\end{bmatrix}$

$$aa^{+}a = \begin{bmatrix}1/5 & 2/5\\2/5 & 4/5\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} = a,$$

(ii) $a^{+}a = [1/5 \quad 2/5].\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} = [1]$

$$a^{+}aa^{+} = [1].[1/5 \quad 2/5] = [1/5 \quad 2/5] = a^{+},$$

(iii) $(aa^{+})^{*} = \begin{bmatrix}1/5 & 2/5\\2/5 & 4/5\end{bmatrix}^{*} = \begin{bmatrix}1/5 & 2/5\\2/5 & 4/5\end{bmatrix} = aa^{+},$

(iv) $(a^{+}a)^{*} = [1]^{*} = [1] = a^{+}a$

olduğu görülür.

Örnek 2.3.3 $\mathrm{a} = [1 \quad 2 \quad 1]$ alınırsa,

$$a^{+} = a^{*}(aa^{*})^{-1} = \begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}.\left([1 \quad 2 \quad 1].\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}\right)^{-1} = \begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}.[6]^{-1} = \begin{bmatrix}1/6\\1/3\\1/6\end{bmatrix}$$

matrisi Moore–Penrose şartlarını sağlar. Gerçekten,

(i) $aa^{+} = [1 \quad 2 \quad 1].\begin{bmatrix}1/6\\1/3\\1/6\end{bmatrix} = [1]$, $aa^{+}a = [1].[1 \quad 2 \quad 1] = [1 \quad 2 \quad 1] = a,$

(ii) $a^{+}a = \begin{bmatrix}1/6\\1/3\\1/6\end{bmatrix}.[1 \quad 2 \quad 1] = \begin{bmatrix}1/6 & 1/3 & 1/6\\1/3 & 2/3 & 1/3\\1/6 & 1/3 & 1/6\end{bmatrix}$

$$a^{+}aa^{+} = \begin{bmatrix}1/6 & 1/3 & 1/6\\1/3 & 2/3 & 1/3\\1/6 & 1/3 & 1/6\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}1/6\\1/3\\1/6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1/6\\1/3\\1/6\end{bmatrix} = a^{+},$$

(iii) $(aa^{+})^{*} = [1]^{*} = [1] = aa^{+},$

(iv) $(a^{+}a)^{*} = \begin{bmatrix}1/6 & 1/3 & 1/6\\1/3 & 2/3 & 1/3\\1/6 & 1/3 & 1/6\end{bmatrix}^{*} = \begin{bmatrix}1/6 & 1/3 & 1/6\\1/3 & 2/3 & 1/3\\1/6 & 1/3 & 1/6\end{bmatrix} = a^{+}a$

olduğu görülür.

Teorem 2.3.6 A herhangi bir matris olmak üzere,

$$(A^*)^+ = (A^+)^* \tag{2.19}$$

eşitliği geçerlidir (Rao ve Ark., 1971).

İspat: (2.17) bağıntısındaki gibi $A = BC$ olsun. $A^* = C^*B^*$ olduğundan,

$$A^+ = C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^*$$

alınırsa,

$$(A^+)^* = B(B^*B)^{-1}(CC^*)^{-1}C \tag{2.20}$$

olur ki, bu da A^* matrisinin Moore–Penrose inversidir. Gerçekten,

(i) $A^*(A^*)^+A^* = C^*B^*B(B^*B)^{-1}(CC^*)^{-1}CC^*B^* = C^*B^* = A^*$,

(ii) $(A^*)^+A^*(A^*)^+ = B(B^*B)^{-1}(CC^*)^{-1}CC^*B^*B(B^*B)^{-1}(CC^*)^{-1}C$

$= B(B^*B)^{-1}(CC^*)^{-1}C = (A^*)^+$,

(iii) $[A^*(A^*)^+]^* = [(C^*B^*)B(B^*B)^{-1}(CC^*)^{-1}C]^* = [C^*(CC^*)^{-1}C]^*$

$= C^*(CC^*)^{-1}C = C^*(B^*B)(B^*B)^{-1}(CC^*)^{-1}C = A^*(A^*)^+$,

(iv) $[(A^*)^+A^*]^* = [B(B^*B)^{-1}(CC^*)^{-1}C(C^*B^*)]^* = [B(B^*B)^{-1}B^*]^*$

$= B(B^*B)^{-1}B^* = B(B^*B)^{-1}(CC^*)^{-1}(CC^*)B^* = (A^*)^+A^*$

olur. Böylece,

$$(A^*)^+ = B(B^*B)^{-1}(CC^*)^{-1}C \tag{2.21}$$

elde edilir. (2.20) ve (2.21) bağıntılarından ve bir matrisin Moore–Penrose inversi varsa tek olacağından dolayı, $(A^*)^+ = (A^+)^*$ olduğu görülür.

Teorem 2.3.7 Bir matrisin Moore–Penrose inversinin Moore–Penrose inversi, matrisin kendisine eşittir. Yani, herhangi bir A için, $(A^+)^+ = A$ dır (Rao ve Ark., 1971).

İspat: Moore–Penrose invers tanımından,

(i) $A^+(A^+)^+A^+ = A^+AA^+ = A^+$,

(ii) $(A^+)^+A^+(A^+)^+ = AA^+A = A = (A^+)^+$,

(iii) $[A^+(A^+)^+]^* = [A^+A]^* = A^+A = A^+(A^+)^+$,

(iv) $[(A^+)^+A^+]^* = [AA^+]^* = AA^+ = (A^+)^+A^+$

olduğu görülür.

Teorem 2.3.8 Bir A matrisinin Moore–Penrose inversinin rankı kendi rankına eşittir. Yani,

$$r(A) = r(A^+) \tag{2.22}$$

dır (Rao ve Ark., 1971).

İspat: Teorem 2.1.13 $AA^+A = A$ Moore–Penrose şartına uygulandığında,

$$r(A) = r(AA^+A) \leq \min\{r(A),\ r(A^+)\} \leq r(A^+) \tag{2.23}$$

elde edilir. Benzer şekilde, Teorem 2.1.13 $A^+AA^+ = A^+$ Moore–Penrose şartına uygulanırsa,

$$r(A^+) = r(A^+AA^+) \leq \min\{r(A),\ r(A^+)\} \leq r(A) \tag{2.24}$$

elde edilir. (2.23) ve (2.24) bağıntılarından dolayı (2.22) bağıntısı sağlanır.

Sonuç 2.3.1 Eğer A matrisinin rankı r ise, bu takdirde $A^+, AA^+, A^+A, AA^+A, A^+AA^+$ matrislerinin her birinin rankı da r dir.

Teorem 2.3.9 A simetrik ve idempotent bir matris ise, $A^+ = A$ dir (Rao ve Ark., 1971).

İspat: Moore–Penrose invers tanımından,

(i) $AA^+A = AAA = A^2A = AA = A^2 = A,$

(ii) $A^+AA^+ = AAA = A^2A = AA = A^2 = A = A^+,$

(ii) $[AA^+]^* = [AA]^* = [A^2]^* = A^* = A = A^2 = AA = AA^+,$

(iv) $[A^+A]^* = [AA]^* = [A^2]^* = A^* = A = A^2 = AA = A^+A,$

olduğu görülür.

Teorem 2.3.10 $B = \text{Köş}\{\text{b}_{11}, \text{b}_{22}, \dots, \text{b}_{nn}\}$ ise, B matrisinin Moore–Penrose inversi B^+, i–yinci satırı ve i–yinci sütununda yer alan köşegen elemanı $\text{b}_{ii} \neq 0$ ise b_{ii}^{-1} ve $\text{b}_{ii} = 0$ ise “0” olan bir köşegen matristir (Rao ve Ark., 1971).

İspat: B^+ matrisinin Moore–Penrose şartlarını sağladığı açıkça görülür.

Örnek 2.3.4 $D=\begin{bmatrix}2&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&3\end{bmatrix}$ şeklinde verilen D matrisinin Moore–Penrose inversi,

$$D^+=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&\frac{1}{3}\end{bmatrix}$$

matrisidir. Gerçekten,

$$DD^+=\begin{bmatrix}2&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&\frac{1}{3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix},$$

$$DD^+D=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&3\end{bmatrix}=D$$

olduğu görülür.

Teorem 2.3.11 a. A, $m\times n$ tipinde tam satır ranklı bir matris ise, bu durumda $A^+=A^*(AA^*)^{-1}$ ve $AA^+=I_m$ olur.

b. $A, m\times n$ tipinde tam sütun ranklı bir matris ise, bu durumda $A^+=(A^*A)^{-1}A^*$ ve $A^+A=I_n$ olur (Rao ve Ark., 1971).

İspat: Bu durumda Teoremde verilen A^+ matrislerinin Moore–Penrose şartlarını sağladığını göstermek yeterlidir. Buna göre,

a. (i) $AA^+A=AA^*(AA^*)^{-1}A=(AA^*)(AA^*)^{-1}A=A,$

(ii) $A^+AA^+=A^*(AA^*)^{-1}AA^*(AA^*)^{-1}=A^*(AA^*)^{-1}(AA^*)(AA^*)^{-1}$

$=A^*(AA^*)^{-1}=A^+,$

(iii) $(AA^+)^*=(AA^*(AA^*)^{-1})^*=((AA^*)(AA^*)^{-1})^*=I^*=I$

$=(AA^*)(AA^*)^{-1}=AA^*(AA^*)^{-1}=AA^+,$

(iv) $(A^+A)^*=(A^*(AA^*)^{-1}A)^*=A^*(AA^*)^{-1}A=A^+A$

olduğu görülür.

b. (i) $AA^{+}A = A(A^{*}A)^{-1}A^{*}A = A(A^{*}A)^{-1}(A^{*}A) = A,$

(ii) $A^{+}AA^{+} = (A^{*}A)^{-1}A^{*}A(A^{*}A)^{-1}A^{*} = (A^{*}A)^{-1}(A^{*}A)(A^{*}A)^{-1}A^{*}$

$$= (A^{*}A)^{-1}A^{*} = A^{+},$$

(iii) $(AA^{+})^{*} = (A(A^{*}A)^{-1}A^{*})^{*} = A(A^{*}A)^{-1}A^{*} = AA^{+},$

(iv) $(A^{+}A)^{*} = ((A^{*}A)^{-1}A^{*}A)^{*} = ((A^{*}A)^{-1}(A^{*}A))^{*} = I^{*} = I$

$$= (A^{*}A)^{-1}(A^{*}A) = (A^{*}A)^{-1}A^{*}A = A^{+}A$$

olduğu görülür.

Örnek 2.3.5 2×3 tipindeki $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ matrisi göz önüne alınsın. Bu durumda $\operatorname{rank}(A) = 2$ olduğu açıktır. Yani, A tam satır ranklı bir matristir. O halde Teorem 2.3.11 a.' dan dolayı,

$$A^{+} = A^{*}(AA^{*})^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} . \left(\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \right)^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 9 & 7 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 9/5 & 7/5 \\ 7/5 & 6/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 16/5 & 13/5 \\ 32/5 & 26/5 \end{bmatrix}$$

olur.

Örnek 2.3.6 3×2 tipinde bir $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ matrisi verilmiş olsun. Bu durumda, $\operatorname{rank}(A) = 2$ olduğu açıktır. Yani, A matrisi tam sütun ranklı bir matristir. O halde,

$$A^{+} = (A^{*}A)^{-1}A^{*} = \left(\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} . \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}^{-1} . \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7/3 & 2 & 4/3 \\ 8/9 & 2/3 & 5/9 \end{bmatrix}$$

olduğu görülür.

Teorem 2.3.12 $B \neq 0$ ve $C \neq 0$ matrisleri sırasıyla $m \times r$ ve $r \times n$ tipinde r ranklı matrisler olsun. Bu durumda,

$$(BC)^{+} = C^{+}B^{+} \tag{2.25}$$

eşitliği gerçeklenir (Rao ve Ark., 1971).

İspat: Teorem 2.3.11'e göre $C^{+} = C^{*}(CC^{*})^{-1}$ ve $B^{+} = (B^{*}B)^{-1}B^{*}$ olur ve buradan,

$C^{+}B^{+} = C^{*}(CC^{*})^{-1}(B^{*}B)^{-1}B^{*}$ elde edilir. Bu değer zaten $(BC)^{+}$ matrisidir. O halde, $C^{+}B^{+} = (BC)^{+}$ olduğu görülür.

3. İZDÜŞÜMLERİN SIFIR VE SÜTUN UZAYLARI İÇİN EŞİTLİKLER

3.1 İzdüşümlerin Kombinasyonları İçin Sıfır ve Sütun Uzayları

$\mathbb{C}$ kompleks sayılar cismi üzerinde tanımlı mxn tipindeki tüm kompleks matrislerinin kümesini $\mathbb{C}^{mxn}$ ile ve $\mathbb{C}$ üzerindeki n boyutlu tüm sütun vektörlerinin kümesini $\mathbb{C}^{n}$ ile gösterelim. A^{*}, $r(A)$, $\mathfrak{R}(A)$ ve $N(A)$ sembolleri sırasıyla $A \in \mathbb{C}^{mxn}$ matrisinin eşlenik transpozunu, rankını, ranjını (sütun uzayını) ve çekirdeğini (sıfır uzayını) ve I_m ise mxm tipinde birim matrisi göstersin. $A \in \mathbb{C}^{mxn}$ matrisinin A^{+} ile gösterilen Moore-Penrose inversi aşağıdaki dört matris denklemini sağlayan ve tek türlü belirli olan $X \in C^{nxm}$ matrisi olarak tanımlanır:

$$(i)\ AXA = A, \quad (ii)\ XAX = X, \quad (iii)\ (AX)^{*} = AX, \quad (iv)\ (XA)^{*} = XA.$$

Öte yandan sadece (i) denkleminin sağlanması halinde X matrisine A matrisinin bir genelleştirilmiş inversi denir ve $X = A^{-}$ veya $X = A^{(1)}$ ile gösterilir. Herhangi bir A matrisinin tüm genelleştirilmiş inverslerinin kümesi $\{A^{-}\}$ ile gösterilir. $A \in C^{mxm}$ matrisi için A matrisinin $A^{\#}$ ile gösterilen grup inversi aşağıdaki üç matris denklemini sağlayan ve tek türlü olarak belirli olan X matrisi olarak tanımlanır:

$$(i)\ AXA = A, \quad (ii) = XAX = X, \quad (iii) = AX = XA.$$

Bu durumda A matrisinin grup tersinir olması için gerek ve yeter şart $r(A^{2}) = r(A)$ olmasıdır. Bir V kümesinin $\mathbb{C}^{n}$ nin bir alt uzayı olduğunu göstermek için $V \leq \mathbb{C}^{n}$ gösterimini ve V kümesinin $\mathbb{C}^{n}$ deki ortogonal bileşenin göstermek için $V^{\perp}$ gösterimini kullanalım. Eğer $V \leq \mathbb{C}^{n}, T \in \mathbb{C}^{nxn}$ ve $TV = \{T\alpha | \alpha \in V\}$ ise bu takdirde $TV \leq \mathbb{C}^{n}$ olacaktır. Eğer $T \in \mathbb{C}^{nxn}$ tersinir bir matris ise bu takdirde $TV \cong V$ yazılır ve TV ve V uzayları izomorftur denir. $dimV$ ile V uzayının boyutunu gösterelim. Bu durumda $A^{2} = A$ eşitliğini sağlayan bir $A \in \mathbb{C}^{nxn}$ matrisine bir izdüşüm, buna ilaveten $A^{*} = A$ eşitliği de sağlanıyorsa $A \in \mathbb{C}^{nxn}$ matrisine bir ortogonal izdüşüm denir. $\mathbb{C}^{nxn}$ de tanımlı tüm izdüşümlerin ve ortogonal izdüşümlerin kümesini sırasıyla $\mathbb{C}_{n}^{P}$ ve $\mathbb{C}_{n}^{OP}$ ile gösterirsek $\mathbb{C}_{n}^{OP} \subseteq \mathbb{C}_{n}^{P}$ olduğu kolayca görülebilir. Başka bir deyişle, A bir kompleks kare matris olmak üzere eğer $A^{2} = A = A^{*}$ ise A matrisine bir ortogonal izdüşüm adı verilir. Öte yandan eğer $\mathfrak{R}(X) = \mathfrak{R}(A)$ ve $X^{2} = X = X^{*}$ eşitlikleri sağlanıyorsa $X \in \mathbb{C}^{nxn}$ matrisine $A \in \mathbb{C}^{nxn}$ matrisinin $\mathfrak{R}(A)$ ranj uzayı üzerine bir ortogonal izdüşümü denir ve $X = P_{A}$ ile gösterilir. Moore-Penrose invers tanımından kolayca görülebilir ki AA^+ çarpımı $\mathfrak{R}(A)$ üzerine ortogonal izdüşümdür, yani, $P_A = AA^+$ dır. Bu durumda $P_A^\perp = I - AA^+$ matrisi P_A nin tamamlayıcı izdüşümü olarak adlandırılır.

Ortogonal izdüşümler, matris teorisi ve uygulamalarında sıkça kullanılan en basit matrislerden biridir. Her durumda, ortogonal izdüşümler ve bunların cebirsel özellikleri kendi içlerinde ilginçtir. Ortogonal izdüşümlerin lineer kombinasyonları ve ortogonal izdüşüm polinomları ile bunların cebirsel özellikleri literatürde yaygın olarak ele alınmıştır. Ortogonal izdüşümlerin incelenmesinde izdüşümlerin (eşzamanlı) ayrışımları ve bunlarla ilgili işlemler oldukça dikkate değerdir. İki veya daha fazla ortogonal izdüşüme ve bunlarla ilgili işlemlere ilişkin bir diğer basit yaklaşım matrislerin ranklarını kullanmaktır. Bir matrisin rankı, matrisin sütun (satır) uzayının boyutu olarak tanımlanır. Bu durumda $A = 0$ olması için gerek ve yeter şart $r(A) = 0$ olması olduğunu hatırlayalım. Ayrıca $A = B$ olması için gerek ve yeter şart $r(A - B) = 0$ olmasıdır. Dolayısıyla $A - B$ farkının rankı için bazı formüller türetilebilirse, bu formüller $A = B$ eşitliğini karakterize etmek için kullanılabilir. Matris rank metodu olarak bilinen bu metot çeşitli matris eşitlikleri oluşturmak ve bunların özelliklerini göstermek için kullanılabilir.

Elementer matris işlemleri altında bir matrisin rankının değişmediğini hatırlayalım. Dolayısıyla, matris rank eşitlikleri çeşitli blok matrisler ve elementer blok matris işlemleri (EBMO'lar) yardımıyla kurulabilir. Örneğin, elementer blok matris işlemleri yardımıyla

$$r\begin{bmatrix} I_n & A \\ B & I_m \end{bmatrix} = m + r(I_n - BA) = r(I_m - AB) + n \tag{3.1.1}$$

eşitliği kolayca gösterilebilir. Özel olarak, P ve Q aynı mertebeden idempotent matrisler ise bu takdirde

$$r\begin{bmatrix} -P & 0 & P \\ 0 & Q & Q \\ P & Q & 0 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} P \\ Q \end{bmatrix} + r[P, Q] = r(P) + r(Q) + r(P - Q) \tag{3.1.2}$$

$$r\begin{bmatrix} -PQ & 0 & PQ \\ 0 & QP & Qp \\ PQ & QP & 0 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} PQ \\ QP \end{bmatrix} + r[PQ, QP]$$

$$= r(PQ) + r(QP) + r(PQ - QP) \tag{3.1.3}$$

olacaktır. Bu rank formülleri, farklı matris ifadeleri arasındaki ilişkileri karakterize etmek için kullanılabilir. (3.1.1)-(3.1.3) de verilenlere benzer çok sayıda rank eşitliği çeşitli elementer yöntemlerle oluşturulabilir.

Bu kısımda, $P, Q \in \mathbb{C}_n^P$(veya $\mathbb{C}_n^{OP}$) olmak üzere $P \mp Q$, $(P-Q)^2$, $PQ \mp QP$, $Q - PQ$, $I - PQ$, $aP + bQ + cPQ$, $a, b, c \in \mathbb{C}$, $ab \neq 0$ formundaki matrislerin sıfır ve sütun uzaylarıyla ilgili bazı yeni ve ilginç eşitlikler verilecektir. Ayrıca $P \mp Q$ nin tersinirliği için bazı yeni karakterizasyonlar verilecek ve $PQ + QP$ ve $PQ - QP$ nin sıfır uzayları arasındaki içerme bağıntıları bazı ilginç rank eşitlikleri ve eşitsizlikleri elde edilecektir. Bu kısımdaki temel sonuçlarımızı vermeden önce bazı önemli lemmaları ifade edelim. Öncelikle iki idempotent matrisin rankına ilişkin aşağıdaki önemli sonuç verilebilir:

Lemma 3.1.1 $A, B \in \mathbb{C}^{mxm}$ iki idempotent matris olsun. Bu takdirde

$$r(A-B) = r\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} + r[A, B] - r(A) - r(B) \tag{3.1.4a}$$

$$r(A-B) = r(A-AB) + r(AB-B) \text{ (rank toplamsallık şartı)} \tag{3.1.4b}$$

$$r(A-B) = r(A-BA) + r(BA-B) \text{ (rank toplamsallık şartı)} \tag{3.1.4c}$$

$$r(A+B) + r(AB-BA) = r(A-B) + r(AB+BA) \tag{3.1.5a}$$

$$r(A+B) = r\begin{pmatrix} A & B \\ B & 0 \end{pmatrix} - r(B) = r\begin{pmatrix} B & A \\ A & 0 \end{pmatrix} - r(A) \tag{3.1.5b}$$

eşitlikleri sağlanır.

Bu lemmanın sonucu olarak bir $M \in \mathbb{C}^{mxn}$ matrisi verilsin. Bu takdirde $A \in \mathbb{C}^{mxm}$ ve $B \in \mathbb{C}^{nxn}$ herhangi iki idempotent matris olmak üzere,

$$r(AM-MB) = r\begin{bmatrix} AM \\ B \end{bmatrix} + r[MB, A] - r(A) - r(B), \tag{3.1.6}$$

$$r(AM-MB) = r(AM-AMB) + r(AMB-MB) \tag{3.1.7}$$

eşitliklerinin sağlandığı kolayca gösterilebilir. Ayrıca Lemma 3.1.1 P_A ve P_B ortogonal izdüşüm çiftine uygulanırsa aşağıdaki sonucu verir.

Sonuç 3.1.1 $A \in \mathbb{C}^{mxn}$ ve $B \in \mathbb{C}^{mxk}$ olsun. Bu takdirde

$$r(P_A - P_B) = 2r[P_A, P_B] - r(P_A) - r(P_A), \tag{3.1.8}$$

$$r(P_A - P_B) = r(P_B^{\perp} P_A) + r(P_A^{\perp} P_B), \tag{3.1.9}$$

$$r(I_m - P_A - P_B) = r(P_A^{\perp} P_B^{\perp}) + r(P_A P_B), \tag{3.1.10}$$

$$r(I_m - P_A - P_B) = m - r(P_A) - r(P_B) + 2r(P_A \; P_B) \tag{3.1.11}$$

eşitlikleri sağlanır. Bu nedenle,

$$P_A P_B = 0 \Leftrightarrow r(I_m - P_A - P_B) = m - r(P_A) - r(P_B);$$

$$P_A + P_B = I_m \Leftrightarrow P_A P_B = 0 \text{ ve } r(P_A) + r(P_B)$$

ifadeleri doğrudur.

Lemma 3.1.2 $A \in \mathbb{C}^{mxn}$ ve $B \in \mathbb{C}^{mxk}$ matrisleri verilmiş olsun. Bu takdirde,

$$\begin{aligned} r[A^*(I_m - P_B)(I_m - P_A)B] &= r[P_A(I_m - P_B)(I_m - P_A)B \\ &= r[A^*B - A^*BB^+(A^*)^+ A^*B] \\ &= r[(P_A P_B)^2 - P_A P_B] \\ &= r[P_A, P_B] + r(P_A P_B) - r(P_A) - r(P_B) \quad (3.1.12) \\ &= r[A, B] + r(A^*B) - r(A) - r(B) \quad (3.1.13) \end{aligned}$$

eşitlikleri sağlanır. Bunun sonucu olarak,

(a) $r[A, B] \geq r(A) + r(B) - r(A * B)$;

(b) Aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:

(i) $B^+(A^*)^+ \in \{(A^*B)^-\}$,

(ii) $(P_A P_B)^2 = P_A P_B$,

(iii) $r[A, B] = r(A) + r(B) - r(A^*B)$.

Lemma 3.1.3 $A \in \mathbb{C}^{mxn}$ ve $B \in \mathbb{C}^{mxk}$ matrisleri verilmiş olsun. Bu takdirde aşağıdaki rank eşitlikleri sağlanır:

$$\begin{aligned} r(P_A P_B - P_B P_A) &= 2r(P_A P_B - P_A P_B P_A) \\ &= 2r(P_A P_B - P_B P_A P_B) \\ &= 2r[P_A P_B - (P_A P_B)^2]. \end{aligned} \tag{3.1.14}$$

Buna göre $(P_A P_B)^2 = P_A P_B$ olması yani, $P_A P_B$ nin bir ortogonal izdüşüm olması için gerek ve yeter şart $P_A P_B = P_B P_A$ olmasıdır. Bu durumda

$$r(P_A P_B - P_B P_A) = 2r\left[P_{A,} P_B\right] + 2r(P_A P_B) - 2r(P_A) - 2r(P_B) \quad (3.1.15)$$

olduğu görülür. Böylece,

$$P_A P_B = P_B P_A \Leftrightarrow r[P_A, P_B] = r(P_A) + (P_B) - r(P_A P_B) \quad (3.1.16)$$

yazılabilir. Bunun sonucu olarak bir $A \in C^{mxm}$ için eğer (3.1.15) eşitliği $P_A P_{A^*} - P_{A^*} P_A$ ifadesine uygulanırsa,

$$r(\, P_A P_{A^*} - P_{A^*} P_A) = 2r[A, A^*] + 2r(A^2) - 4r(A) \quad (3.1.17)$$

eşitliğinin sağlandığı kolaylıkla gösterilebilir.

Önceden bilinen rank eşitlikleri, ortogonal izdüşümler için çeşitli eşitlikleri karakterize etmek için kullanılabilir. Özellikle iki ortogonal izdüşümün komutatifliğinin gösterilmesinde de kullanılabilir. Örneğin, (3.1.14), (3.1.16) ve (3.1.17) eşitliklerinden aşağıdaki ifadelerin eşdeğer olduğunu gösterilebilir:

(a) $P_A P_B = P_B P_A$ dir, yani $P_A P_B$ Hermityendir.

(b) $P_A P_B = P_A P_B P_A = P_B P_A P_B = (P_A P_B)^2$.

(c) $r[A, B] = r(A) + r(B) - r(A^* B)$.

Bu durumda eğer $r(A^2 - A) = r(A) + r(I_m - A) - m$ rank eşitliği $(P_A P_B)^2 - P_A P_B$ ve $(P_B P_A)^2 - P_B P_A$ ifadelerine uygulanırsa

$$r[(P_A P_B)^2 - P_A P_B] = r(I_m - P_A P_B) + r(P_A P_B) - m,$$

$$r[(P_B P_A)^2 - P_B P_A] = r(I_m - P_B P_A) + r(P_B P_A) - m$$

eşitliklerinin sağlandığı görülür. Bu durumda aşağıdaki sonucu verebiliriz.

Sonuç 3.1.2 $A \in \mathbb{C}^{mxn}$ ve $B \in \mathbb{C}^{mxk}$ matrisleri verilmiş olsun. Bu takdirde,

(a) $r(I_m - P_A P_B) = r(I_m - P_B P_A) = r[A, B] - r(A) - r(B) + m,$

yani, $dim\, \mathcal{N}(I_m - P_A P_B) = dim\, \mathcal{N}(I_m - P_B P_A) = dim\big(\Re(A) \cap \Re(B)\big);$

(b) $\mathcal{N}(I_m - P_A P_B) = \mathcal{N}(I_m - P_B P_A) = \Re(A) \cap \Re(B);$

(c) $I_m - P_A P_B$ nonsingüler $\Leftrightarrow$ $I_m - P_B P_A$ nonsingüler $\Leftrightarrow \Re(A) \cap \Re(B) = \{0\};$

(d) Hem $P_A\, P_B$ ve hem $P_B\, P_A$ çarpımı tamı tamına t tane $1'$e eşit özdeğere sahiptir, burada $t = \dim[\Re(A) \cap \Re(B)]$ dir.

Bu durumda aynı mertebeden iki idempotent P ve Q matris çifti için

$$r(aP + bQ) = r(P + Q) \tag{3.1.18}$$

rank eşitliğinin $a + b \neq 0$ olacak şekilde her sıfırdan farklı a ve b skalerleri için sağlandığı gösterilebilir. Bu eşitlik iki idempotent matrisin lineer kombinasyonlarını içeren çeşitli rank eşitliklerini belirlemede kullanılabilir. Örneğin, herhangi bir $a \neq 0, \pm 1$ skaleri için,

$$r\begin{bmatrix} P & aQ \\ aQ & P \end{bmatrix} = r(P + aQ) + r(P - aQ) = 2r(P + Q)$$

eşitliği geçerlidir. Aşağıda (3.1.36)' nın bir sonucu verilmiştir.

Sonuç 3.1.3 $A \in \mathbb{C}^{mxn}$ ve $B \in \mathbb{C}^{nxk}$ olmak üzere, $a + b \neq 0$ olacak şekilde her sıfırdan farklı a ve b skalerleri için,

$$\Re(aP_A + bP_B) = \Re(P_A + P_B) = \Re[P_A, P_B]$$

eşitliği doğrudur.

Lemma 3.1.4 $A \in \mathbb{C}^{mxn}$ ve $B \in \mathbb{C}^{nxk}$ matrisleri verilmiş olsun. Bu takdirde,

$$r[(A^+ AB\, B^+)^+ - A^+ AB\, B^+] = r[A^*, B] + r(AB) - r(A) - r(B) \tag{3.1.19}$$

$$r[(AB\, B^+)^+ - B\, B^+ A^+] = r[B, A^* AB] - r(B) \tag{3.1.20}$$

$$r[(A^+ AB\,)^+ - B^+ A^+ A] = r\begin{bmatrix} A \\ ABB^* \end{bmatrix} - r(A) \tag{3.1.21}$$

eşitlikleri gerçeklenir. Lemma 3.1.4 de A ve B matrislerinin yerlerine sırasıyla P_A ve P_B matrisleri alınarak aşağıdaki sonuç verilebilir:

Sonuç 3.1.4 $A \in \mathbb{C}^{mxn}$ ve $B \in \mathbb{C}^{nxk}$ matrisleri verilmiş olsun. Bu takdirde,

(a) $r[(P_A\, P_B)^+ - P_B P_A] = r[(P_A\, P_B)^2 - P_B P_A]$;

(b) $r[(P_A\, P_B)^+ - P_B P_A] = r[P_B, P_A\, P_B] - r(P_B) = r[P_A, P_B P_A] - r(P_A)$;

(c) $r[P_A, P_B P_A] = r[P_A, P_B\,] + r(P_A P_B) - r(P_B)$;

(d) Aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:

(i) $(P_A\, P_B)^+ = P_B\, P_A$, yani P_AP_B bir kısmi izometridir.

(ii) $\Re(P_AP_B) \subseteq \Re(P_B)$,

(iii) $\Re(P_BP_A) \subseteq \Re(P_A)$,

(iv) $r[P_A, P_B\,] = r(P_A) + r(P_B) - r(P_AP_B)$,

(v) $P_AP_B = P_BP_A$,

(vi) P_AP_B bir ortogonal izdüşümdür.

Öte yandan (3.1.14) eşitliği kullanılarak $P_AP_B - P_BP_A$ komütatörü için başka bir rank eşitliği aşağıdaki şekilde verilebilir:

Teorem 3.1.1 $A \in \mathbb{C}^{mxn}$ ve $B \in \mathbb{C}^{mxk}$ matrisleri verilmiş olsun. Bu takdirde,

$$r(P_AP_B - P_BP_A) = 2\mathrm{r}[P_BP_A, P_AP_B] - 2r(P_AP_B) \quad (3.1.22)$$

$$r[(P_AP_B)(P_AP_B)^+ - (P_AP_B)^+(P_AP_B)] = 2r[P_BP_A, P_AP_B] - 2r(P_AP_B) \quad (3.1.23)$$

rank eşitlikleri sağlanır. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir:

(a) $(P_AP_B) = (P_BP_A)$ dir, yani, P_BP_A Hermityendir.

(b) $\Re(P_AP_B) = \Re(P_BP_A)$ dir, yani P_BP_A bir EP dir.

(c) $(P_AP_B)(P_AP_B)^+ = (P_AP_B)^+(P_AP_B)$;

(d) $[(P_AP_B)^2]^+ = [(P_AP_B)^+]^2\, P_AP_B$;

(d) $(P_AP_B)^\# = (P_AP_B)^+$;

(f) $\mathcal{N}(P_AP_B) = \mathcal{N}(P_BP_A)$;

(g) $\mathbb{C}^m = \Re(P_AP_B) \oplus \mathcal{N}(P_BP_A)$.

İspat. Eğer P ve Q aynı mertebeden idempotent matrisler ise, bu takdirde,

$$r(PQ - QP) = r\begin{bmatrix} PQ \\ QP \end{bmatrix} + r[PQ, QP] - r(PQ) - r(QP) \quad (3.1.24)$$

eşitliği yazılabilir. Bu durumda $P_AP_B - P_BP_A$ ifadesine (3.1.24) eşitliği uygulanıp gerekli sadeleştirmeler yapılırsa (3.1.22) ifadesi elde edilir. (3.1.23) ise (3.1.4) den görülebilir. (3.1.22) ve (3.1.23) eşitliklerinin sağ tarafını sıfıra eşitlersek, hemen $(a) - (c)$ nin eşdeğerliğini elde ederiz. Öte yandan bir A matrisinin bir EP olması demek $\Re(A) = \Re(A^*)$ olması demek olacağından EP matrislerinin karakterizasyonu şu şekilde verilmiştir:

$$A \text{ matrisi EP dir} \Leftrightarrow AA^+ = A^+A \Leftrightarrow r(A^2) = r(A) \text{ ve } (A^2)^+ = (A^+)^2$$

$$\Leftrightarrow A^{\#} = A^+ \Leftrightarrow \mathcal{N}(A) = \mathcal{N}(A^*)$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{C}^m = \Re(A) \oplus \mathcal{N}(A)$$

dir. Bunların (c) durumuna uygulanması, $(c) - (g)$ nin eşdeğerliğini verir.

Herhangi iki $U, V \in C^{mxn}$matrisi için, $\Re(U) = \Re(V)$ ranj eşitliği $U = V$ matris eşitliğinden açıkça daha zayıftır. Bununla birlikte, Teorem 3.1.1 in (a) ve (b) şıkları bu iki eşitliğin $U = P_AP_B$ ve $V = P_BP_A$ için eşdeğer olduğunu gösterir. Bunun sunucu olarak aşağıdaki sonuç verilebilir:

Sonuç 3.1.5 $A \in \mathbb{C}^{mxn}$ ve $B \in \mathbb{C}^{mxk}$ matrisleri verilmiş olsun. Bu takdirde,

$$r[P_BP_A, P_AP_B] = r[P_A, P_B] = 2r(P_AP_B) - r(P_A) - r(P_B)$$

$$= r[(P_AP_B)^2 - P_AP_B] + r(P_AP_B)) \qquad (3.1.25)$$

rank eşitlikleri sağlanır.

İki $P_AP_B \pm P_BP_A$ matris ifadesi için aşağıdaki sonuç verilebilir.

Lemma 3.1.5 $A \in C^{mxn}$ ve $B \in C^{mxk}$ matrisleri verilmiş olsun. Bu takdirde,

(a) $P_AP_B - P_BP_A = (P_A - P_B)(P_A + P_B - I_m) = -(P_A + P_B - I_m)(P_A - P_B)$;

(b) $P_AP_B + P_BP_A = (P_A + P_B)(P_A + P_B - I_m) = (P_A + P_B - I_m)(P_A + P_B)$;

(c) $r(P_AP_B - P_BP_A) = r(P_A - P_B) + r(P_A + P_B - I_m) - m$;

(d) $r(P_AP_B + P_BP_A) = r(P_A + P_B) + r(P_A + P_B - I_m) - m$;

(e) $r(P_AP_B + P_BP_A) - r(P_AP_B - P_BP_A) = r(P_A + P_B) - r(P_A - P_B)$;

(f) $P_AP_B = P_BP_A$ matrisinin bir nonsingüler matris olması için gerek ve yeter şart hem $P_A \pm P_B$ ve hem de $P_A + P_B - I_m$ matrsinin nonsingüler olmasıdır.

(g) $P_AP_B = P_BP_A \Leftrightarrow r(P_A - P_B) + r(P_A + P_B - I_m) = m$

ifadeleri gerçeklenir.

Aşağıdaki teorem, Sonuç 3.1.5 ve Lemma 3.1.5(d)' den kolaylıkla türetilebilir.

Teorem 3.1.2 $A \in \mathbb{C}^{mxn}$ ve $B \in \mathbb{C}^{mxk}$ matrisleri verilmiş olsun. Bu takdirde,

$$r(P_A P_B + P_B P_A) = r[P_A P_B, P_B P_A] \tag{3.1.26}$$

dir.

Ayrıca P_A, P_B, $P_A{}^{\perp}$ ve $P_B{}^{\perp}$ için rank eşitlikleri ve onların sonuçları aşağıda verilmiştir.

Teorem 3.1.3 $A \in \mathbb{C}^{mxn}$ ve $B \in \mathbb{C}^{nxp}$ matrisleri verilmiş olsun. Bu takdirde,

$$r\left[P_B{}^{\perp}P_A, P_A{}^{\perp}P_B\right] = r\left(P_B{}^{\perp}P_A\right) + r\left(P_A{}^{\perp}P_B\right), \tag{3.1.27}$$

$$r\left[P_A P_B{}^{\perp}, P_B P_A{}^{\perp}\right] = r\left(P_A P_B{}^{\perp}\right) + r\left(P_B P_A{}^{\perp}\right), \tag{3.1.28}$$

$$r\left(P_B{}^{\perp}P_A \pm P_A{}^{\perp}P_B\right) = r\left(P_B{}^{\perp}P_A\right) + r\left(P_A{}^{\perp}P_B\right), \tag{3.1.29}$$

$$r\left(P_A P_B{}^{\perp} \pm P_B P_A{}^{\perp}\right) = r\left(P_A P_B{}^{\perp}\right) + r\left(P_B P_A{}^{\perp}\right), \tag{3.1.30}$$

rank eşitlikleri sağlanır.

İspat. $[P_B{}^{\perp}A, P_A{}^{\perp}B]$ matrisi

$$\begin{aligned}
[P_B{}^{\perp}A, P_A{}^{\perp}B] &= [A - BB^{+}A, B - AA^{+}B] \\
&= [A, B] - BB^{+}[A, 0] - AA^{+}[0, B] \\
&= [A, B] - [B, A]\begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix}^{+}\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.1.31}$$

olarak yazabilir. Bu durumda

$$r(D - CA^{+}B) = r\begin{bmatrix} A^{*}AA^{*} & A^{*}B \\ CA^{*} & D \end{bmatrix} - r(A),$$

rank eşitliği (3.1.31) ifadesine uygulanıp elemanter blok matris işlemleriyle gerekli sadeleştirmeler yapılırsa,

$$\begin{aligned}
r\left[P_B{}^{\perp}A, P_A{}^{\perp}B\right] &= r\begin{bmatrix} B^{*}B & 0 & B^{*}A & 0 \\ 0 & A^{*}A & 0 & A^{*}B \\ B & A & A & B \end{bmatrix} - r(A) - r(B) \\
&= r\begin{bmatrix} B^{*}B & 0 & B^{*}A & 0 \\ -A^{*}B & 0 & -A^{*}A & 0 \\ 0 & A & 0 & B \end{bmatrix} - r(A) - r(B)
\end{aligned}$$

$$= r\begin{bmatrix} B^*B & B^*A \\ A^*B & A^*A \end{bmatrix} + r[A,B] - r(A) - r(B)$$

$$= r\left(\begin{bmatrix} B^* \\ A^* \end{bmatrix}[B,A]\right) + r[A,B] - r(A) - r(B)$$

$$= 2r[A,B] - r(A) - r(B) - r(B)$$

$$= r\left(P_B{}^{\perp}A\right) + r\left(P_A{}^{\perp}B\right)$$

$$= r(P_B{}^{\perp}P_A) + r(P_A{}^{\perp}P_B)$$

olduğu görülür. (3.1.28) de benzer şekilde gösterilebilir. (3.1.29) ve (3.1.30) eşitlikleri ise (3.1.27) ve (3.1.28) eşitliklerinden türetilebilir.

Lemma 3.1.6 $A, B \in \mathbb{C}^{nxn}$ matrisleri verilmiş olsun. Bu durumda $T \in \mathbb{C}^{nxn}$ tersinir bir matris olmak üzere

(a) $\left(T\mathcal{N}(A)\right)^{\perp} = (T^*)^{-1}\Re(A^*)$, $\mathcal{N}(A)^{\perp} = \Re(A^*)$,

(b) $\Re(A^*) + \Re(B^*) = \mathbb{C}^n \Leftrightarrow \mathcal{N}(A) \cap \mathcal{N}(A) = \{0\}$,

(c) $\mathcal{N}(A) + \mathcal{N}(A) = \mathbb{C}^n \Leftrightarrow \Re(A^*) \cap \Re(B^*) = \{0\}$

ifadeleri geçerlidir.

İspat. (a): Bir $\beta \in \mathbb{C}^n$ için $(T^*)^{-1}A^*\beta \in (T^*)^{-1}\Re(A^*)$ ve bir $\alpha \in \mathcal{N}(A)$ için $T\alpha \in T\mathcal{N}(A)$ olsun. Buradan $((T^*)^{-1}A^*\beta)^*T\alpha = \beta^*A\alpha = 0$ olduğundan $(T^*)^{-1}\Re(A^*) \leq \left(T\mathcal{N}(A)\right)^{\perp}$ yazılabilir. Diğer taraftan $dim(T^*)^{-1}\Re(A^*) = dim\Re(A^*) = r(A^*) = r(A) = dim\left(T\mathcal{N}(A)\right)^{\perp}$ olduğunu belirtelim. Buradan $\left(T\mathcal{N}(A)\right)^{\perp} = (T^*)^{-1}\Re(A^*)$ olduğu görülür. İkinci eşitlik (a) daki birinci eşitlikte $T = I_n$ alınarak sağlanır.

(b) ve (c): Eğer M ve N $\mathbb{C}^n$ de iki altuzay ise bu takdirde $M^{\perp}$ kümesi M kümesinin ortogonal komplementi olmak üzere

$$(M \cap N)^{\perp} = M^{\perp} \cap N^{\perp}\,, \;\; (M + N)^{\perp} = M^{\perp} \cap N^{\perp} \qquad (3.1.32)$$

eşitliklerinden istenilen sonuçlar elde edilebilir.

Teorem 3.1.4 $P, Q \in \mathbb{C}_n^P$ iki izdüşüm matrisi olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler birbirine eşdeğerdir:

(i) $\mathbb{C}^n = \Re(\mathrm{P}) \oplus \Re(\mathrm{Q})$ ve $\mathbb{C}^n = \Re(P^*) \oplus \Re(Q^*)$,

(ii) $\mathbb{C}^n = \Re(\mathrm{P}) \oplus \Re(\mathrm{Q})$ ve $\mathbb{C}^n = \mathcal{N}(P) \oplus \mathcal{N}(Q)$,

(iii) $\Re(P) \cap \Re(Q) = \{0\}$ ve $\mathcal{N}(P) \cap \mathcal{N}(Q) = \{0\}$,

(iv) $P - Q$ matrisi nonsingülerdir,

(v) $I - PQ$ ve $P + Q - PQ$ matrisleri nonsingülerdir.

İspat. (i) ⇒ (ii): Lemma 3.1.6 dan kolaylıkla görülebilir.

(ii) ⇒ (iii): Direkt toplam tanımından kolaylıkla ispatlanabilir.

(iv) ⇒ (v): $(P - Q)x = 0$ olsun. Bu durumda $Px = Qx \in \Re(P) \cap \Re(Q) = \{0\}$ ve $x \in \mathcal{N}(P) \cap \mathcal{N}(Q) = \{0\}$ dir. Böylece $\mathcal{N}(P - Q) = \{0\}$ olup $P - Q$ nonsingülerdir.

(iv) ⇒ (v): $\mathcal{N}(I - PQ) = \{0\}$ olduğu gösterilebilir. $(I - PQ)x = 0$ olsun. Bu durumda $x = PQx = Px$ ve $(P - Q)^2\, x = (I - PQ)x = 0$ eşitlikleri yazılabilir. Öte yandan $(P - Q)^2$ matrisi nonsingüler oduğundan $x = 0$ olacaktır. Yani $I - PQ$ matrisi de nonsingülerdir. Buradan $(I - P) - (I - Q) = Q - P$ olup $I - (I - P)(I - Q) = P + Q - PQ$ matrisinin nonsingüler olduğu elde edilir.

(v) ⇒ (i): $P + Q - PQ$ matrisinin inversini W ile gösterelim. Bu durumda $W(P + Q - PQ\,) = I$ eşitliği yazılabilir. Buradan $I = WP + W(I - P)Q$ eşitliği ve dolayısıyla $\mathcal{N}(P) \cap \mathcal{N}(Q) = \{0\}$ eşitliği yazılabilir. Öte yandan eğer $(P + Q - PQ\,)W = I$ ise bu takdirde $I = P(I - Q)W + QW$ olacağı açıkça görülebilir. Bunun sonucu olarak $\mathbb{C}^n = \Re(\mathrm{P}) + \Re(\mathrm{Q})$ eşitliği yazılabilir. Benzer şekilde $I - PQ = (I - P) + (I - Q) - (I - P)(I - Q)$ matrisinin nonsingüler olması ise

$$\mathcal{N}(I - P) \cap \mathcal{N}(I - Q) = \Re(P) \cap \Re(Q) = \{0\}$$

ve

$$\mathbb{C}^n = \Re(I - P) \oplus \Re(I - Q) = \mathcal{N}(P) + \mathcal{N}(Q)$$

olduğunu gösterir. Böylece

$$\mathbb{C}^n = \Re(P) \oplus \Re(Q) = \mathcal{N}(P) \oplus \mathcal{N}(Q)$$

elde edilir.

Sonuç 3.1.6 $P, Q \in \mathbb{C}_n^P$ iki izdüşüm matris olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler birbirine denktirler:

(i) $\Re(\mathrm{P}) \oplus \Re(\mathrm{Q}) = \mathcal{N}(P) \oplus \mathcal{N}(Q) = \mathcal{N}(P) \oplus \Re(Q) = \Re(P) \oplus \mathcal{N}(Q) = \mathbb{C}^n$

(ii) $P - Q$ ve $I - P - Q$ matrisleri nonsingülerdir.

(iii) $PQ - QP$ matrisi nonsingülerdir.

İspat. (i) ve (ii) deki denkliklerin gösterilmesi için Teorem 3.1.4 ün önce P ve Q matrislerine ve daha sonra da $(I - P)$ ve Q matrislerine uygulanması yeterlidir. (ii) ve (iii) nin denkliği ise $PQ - QP = (I - P - Q)(P - Q)$ eşitliğini dikkate alarak kolaylıkla gösterilebilir.

Teorem 3.1.5 $P, Q \in \mathbb{C}_n^P$ izdüşümler olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:

(i) $P - Q$ nonsingülerdir.

(ii) $P + Q$ ve $I - PQ$ nonsingülerdir.

İspat. (i) ⇒ (ii): Eğer $(P + Q\,)x = 0$ ise bu takdirde $Px = -Qx \in \Re(P) \cap \Re(Q) = \{0\}$ ve $x \in \mathcal{N}(P) \cap \mathcal{N}(Q) = \{0\}$ eşitlikleri yazılabilir. Bu nedenle $\mathcal{N}(P + Q\,) = \{0\}$ olup $P + Q$ nonsingülerdir. $I - PQ$ nun nonsingülerliği benzer şekilde gösterilebilir.

(i)⇒ (ii): $(P - Q\,)x = 0$ olsun. Bu takdirde $Px = Qx = QPx = PQPx$ yazılabilir. Bu durumda

$$Px = (I - PQ)^{-1}(I - PQ)Px = (I - PQ)^{-1}(Px - PQx) = 0,$$

$$(I - P)x = (P + Q)^{-1}(P + Q)(I - P)x = (P + Q)^{-1}(Qx - QPx) = 0$$

ve $x = Px + (I - P)x = 0$ elde edilir. Buradan $\mathcal{N}(P - Q) = \{0\}$ olduğu görülür ve böylece ispat tamamlanmış olur.

$P, Q \in \mathbb{C}_n^P$ izdüşüm matrisleri $P - Q$ farkı nonsingüler olacak şekilde verilmiş olsun. Bu durumda $(P - Q)^{-1}$ ve $(P + Q)^{-1}$ matrisleriyle ilgili formüller elde etmek için

$$\mathbb{C}^n = \Re(P) \oplus \Re(\mathrm{Q}) = \mathcal{N}(P) \oplus \mathcal{N}(Q)$$

ile ilgili izdüşümler kullanılabilir. Bu amaçla öncelikle

$$F = P = (P - Q)^{-1}\,(I - Q), \qquad (3.1.33)$$

$$G = (P - Q)^{-1} P = (I - Q)(P - Q)^{-1}; \qquad (3.1.34)$$

matrislerini tanımlayalım. Bu durumda F ve G matrisleri de izdüşüm matrisi olacaktır. Örnek olarak $F^2 = F$ olduğu gösterilelim. Gerçekten

$$\begin{aligned} F^2 &= (P - Q)^{-1}(I - Q)P(P - Q)^{-1} \\ &= (P - Q)^{-1}(I - Q)P(P - Q)(P - Q)^{-1} \\ &= (P - Q)^{-1}(I - Q) = F \end{aligned}$$

elde edilir. Bunun sonucunda

$$\Re(P) = \Re(Q), \quad \mathcal{N}(F) = \mathcal{N}(Q)$$

$$\mathcal{N}(F) = \mathcal{N}(I - Q) = \Re(Q),$$

$$\Re(G) = \Re(I - Q) = \Re(Q),$$

eşitlikleri yazılabilir.

Teorem 3.1.6 $P, Q \in \mathbb{C}_n^P$ iki izdüşüm matrisi olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler sağlanır:

(i) $\mathcal{N}(P - Q) = \big(\Re(P) \cap \Re(Q)\big) \oplus \big(\mathcal{N}(P) \cap \mathcal{N}(Q)\big)$

(ii) $\Re(P - Q) = \big(\Re(P) + \Re(Q)\big) \cap \big(\mathcal{N}(P) + \mathcal{N}(Q)\big)$

İspat. (i) $\big(\Re(P) \cap \Re(Q)\big) + \big(\mathcal{N}(P) \cap \mathcal{N}(Q)\big) \leq \mathcal{N}(P - Q)$ ve $\big(\Re(P) \cap \Re(Q)\big) \cap \big(\mathcal{N}(P) \cap \mathcal{N}(Q)\big) = \{0\}$ olduğu açıktır. Herhangi bir $\alpha \in \mathcal{N}(P - Q)$ için $P\alpha = Q\alpha = PQ\alpha$ ve $\alpha = Q\alpha + (\alpha - Q\alpha) \in \big(\Re(P) \cap \Re(Q)\big) + \big(\mathcal{N}(P) \cap \mathcal{N}(Q)\big)$ olduğu görülebilir. Bu nedenle $\mathcal{N}(P - Q) = \big(\Re(P) \cap \Re(Q)\big) \oplus \big(\mathcal{N}(P) \cap \mathcal{N}(Q)\big)$ elde edilir.

(ii) $P^*, Q^* \in \mathbb{C}_n^P$ olduğunu belirtelim. Bu takdirde (i) ye

$$\mathcal{N}(P^* - Q^*) = \big(\Re(P^*) \cap \Re(Q^*)\big) \oplus \big(\mathcal{N}(P^*) \cap \mathcal{N}(Q^*)\big) \qquad (3.1.35)$$

yazılabilir. Buradan (3.1.35) in her iki tarafının ortogonal komplementini alıp Lemma 3.1.6 uygulanırsa istenilen sonuç elde edilmiş olur.

$P + Q$ ve $P - Q$ matrislerinin sıfır ve sütun uzayları $PQ + QP, PQ - QP$ ve $I - P - Q$ matrislerinin sıfır ve sütun uzaylarıyla yakından ilişkilidir. Bunu aşağıdaki teoremde verebiliriz.

Teorem 3.1.7 $P, Q \in \mathbb{C}_n^P$ iki izdüşüm matrisi olsun. Bu takdirde

(i) $\mathcal{N}(PQ - QP) = \mathcal{N}(P - Q) \oplus \mathcal{N}(I - P - Q)$,

(ii) $\mathcal{N}(PQ + QP) = \mathcal{N}(P + Q) \oplus \mathcal{N}(I - P - Q)$,

(iii) $\Re(PQ - QP) = \Re(P - Q) \cap \Re(I - P - Q)$,
ve $\Re(P - Q) + \Re(I - P - Q) = \mathbb{C}^n$,

(iv) $\Re(PQ + QP) = \Re(P + Q) \cap \Re(I - P - Q)$,
ve $\Re(P - Q) + \Re(I - P - Q) = \mathbb{C}^n$,

ifadeleri sağlanır.

İspat. (i): $(P - Q)(I - P - Q) = -(I - P - Q)(P - Q) = QP - PQ$ olduğundan $\mathcal{N}(P - Q) + \mathcal{N}(I - P - Q) \leq \mathcal{N}(PQ - QP)$ olacaktır. Öte yandan herhangi bir $\alpha \in \mathcal{N}(P - Q) \cap \mathcal{N}(I - P - Q)$ için $P\alpha = Q\alpha$, $\alpha = P\alpha + Q\alpha$ yazılabilir. Böylece $PQ\alpha = QP\alpha = 0 = P\alpha = Q\alpha$ olacaktır. Buradan $\alpha = 0$ olmalıdır. Bu nedenle $\mathcal{N}(P - Q) \oplus \mathcal{N}(I - P - Q) \leq \mathcal{N}(PQ - QP)$ olduğu görülür. Şimdi de $dim\, \mathcal{N}(P - Q) + \dim \mathcal{N}(I - P - Q) = dim\, \mathcal{N}(PQ - QP)$ eşitliğini sağlayalım. Bunun için $r(P - Q) + \mathrm{r}(I - P - Q) = r(PQ - QP) + n$ olduğunu göstermek yeterlidir. Öte yandan

$$r\begin{pmatrix} 0 & I_n - P - Q \\ P - Q & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{r}\begin{pmatrix} I_n - QP - PQ & I_n - P - Q \\ P - Q & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \mathrm{r}\begin{pmatrix} I_n - P - Q & I_n - P - Q \\ P - Q & 0 \end{pmatrix}$$
$$= r(P - Q) + \mathrm{r}(I - P - Q) \qquad (3.1.36)$$

ve

$$r\begin{pmatrix} I_n & I_n - P - Q \\ P - Q & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{r}\begin{pmatrix} I_n & I_n - P - Q \\ P - Q & QP - PQ \end{pmatrix}$$
$$= r(PQ - QP) + \mathrm{n} \qquad (3.1.37)$$

elde edilir. (3.136) ve (3.1.37) den $r(P - Q) + \mathrm{r}(I - P - Q) = r(PQ - QP) + n$ olduğu görülür. Sonuç olarak $\mathcal{N}(PQ - QP) = \mathcal{N}(P - Q) \oplus \mathcal{N}(I - P - Q)$ eşitliği sağlanır.

(ii): $(P + Q)(I - P - Q) = (I - P - Q)(P - Q) = -QP - PQ$ olduğundan $\mathcal{N}(P + Q) + \mathcal{N}(I - P - Q) \leq \mathcal{N}(PQ + QP)$ olacaktır. Öte yandan $\mathcal{N}(P + Q) \cap \mathcal{N}(I - P - Q) = \{0\}$ olduğu kolayca gösterilebilir. Bu nedenle

$\mathcal{N}(P+Q) \oplus \mathcal{N}(I-P-Q) \leq \mathcal{N}(PQ+QP)$ olduğu görülür. (i) nin ispatına benzer yöntem uygulanarak $r(P+Q) + \mathrm{r}(I-P-Q) = r(PQ+QP) + n$ olduğu da gösterilebilir. Sonuç olarak

$$\mathcal{N}(PQ+QP) = \mathcal{N}(P+Q) \oplus \mathcal{N}(I-P-Q)$$

eşitliği sağlanmış olur.

(iii) ve (iv): $P^*, Q^* \in \mathbb{C}_n^P$ olduğunu belirtelim. Bu takdirde (iii) ve (iv) ün ispatı Lemma 3.1.6 ya göre sırasıyla (i) ve (ii) deki sonuçlar kullanılarak gösterilebilir.

Sonuç 3.1.7 $P, Q \in \mathbb{C}_n^P$ izdüşümler olsun. Bu takdirde

(i) $P-Q$ tersinirdir $\Leftrightarrow \mathcal{N}(PQ-QP) = \mathcal{N}(I-P-Q)$ dir.

(ii) $P+Q$ tersinirdir $\Leftrightarrow \mathcal{N}(PQ+QP) = \mathcal{N}(I-P-Q)$ dir.

(iii) $I-P-Q$ tersinirdir $\Leftrightarrow \mathcal{N}(PQ+QP) = \mathcal{N}(I-P-Q)$

$\Leftrightarrow \mathcal{N}(PQ+QP) = \mathcal{N}(P+Q)$ dir.

Teorem 3.1.8 $P, Q \in \mathbb{C}_n^P$ iki izdüşüm matrisi olsun. Bu takdirde

(i) $\mathcal{N}((P-Q)^2) = \mathcal{N}(P+Q) + \mathcal{N}(I-PQ) + \mathcal{N}(I-QP)$

(ii) $\Re((P-Q)^2) = \Re(P+Q) \cap \Re(I-PQ) \cap \Re(I-QP)$

ifadeleri sağlanır.

İspat. (i) Herhangi bir $\alpha \in \mathcal{N}(P+Q)$ için $P\alpha = -Q\alpha$ yazılabilir. Böylece $(P-Q)^2\alpha = (P+Q-PQ-QP)\alpha = 0$ olacağından $\alpha \in \mathcal{N}((P-Q)^2)$ yazılabilir. Bu nedenle

$$\mathcal{N}(P+Q) \leq \mathcal{N}((P-Q)^2) \tag{3.1.38}$$

olduğu görülür. Herhangi bir $\alpha \in \mathcal{N}(I-PQ)$ için $\alpha = PQ\alpha = P\alpha$ yazılabilir. Bu takdirde $(P-Q)^2\alpha = (P+Q-PQ-QP)\alpha = 0$ olacağından $\alpha \in \mathcal{N}((P-Q)^2)$ yazılabilir. Bu nedenle

$$\mathcal{N}(I-PQ) \leq \mathcal{N}((P-Q)^2) \tag{3.1.39}$$

olduğu görülür. Benzer şekilde

$$\mathcal{N}(I-QP) \leq \mathcal{N}((P-Q)^2) \tag{3.1.40}$$

olduğu gösterilebilir. Bu takdirde (3.1.38)-(3.1.40) eşitsizliklerinden

$$\mathcal{N}(P+Q) + \mathcal{N}(I-PQ) + \mathcal{N}(I-QP) \leq \mathcal{N}((P-Q)^2) \tag{3.1.41}$$

elde edilir. Öte yandan herhangi bir $\alpha \in \mathcal{N}((P-Q)^2)$ için $(P+Q-PQ-QP)\alpha = 0$ olacaktır. Bu nedenle için $P\alpha = PQP\alpha,\ Q\alpha = QPQ\alpha,\ QP\alpha = (QP)^2\alpha$ ve

$PQ\alpha = (PQ)^2$ olacağından $(I - PQ)PQ\alpha = 0$ ve $(I - QP)QP\alpha = 0$ yazılabilir. Buradan da $PQ\alpha \in \mathcal{N}(I - PQ)$ ve $QP\alpha \in \mathcal{N}(I - QP)$ olacaktır. Üstelik

$$(P + Q)(2\alpha - PQ\alpha - QP\alpha) = 2P\alpha + 2Q\alpha - PQ\alpha - QPQ\alpha - PQP\alpha - QP\alpha$$
$$= P\alpha + Q\alpha - PQ\alpha - QP\alpha = (P - Q)^2\alpha = 0$$

eşitliği $2\alpha - PQ\alpha - QP\alpha \in \mathcal{N}(P + Q)$ olduğunu gösterir. Bu nedenle $\alpha = \frac{1}{2}(2\alpha - PQ\alpha - QP\alpha) + \frac{1}{2}PQ\alpha + \frac{1}{2}QP\alpha \in \mathcal{N}(P + Q) + \mathcal{N}(I - PQ) + \mathcal{N}(I - QP)$ eşitliğini (3.1.41) ile birlikte alırsak $\mathcal{N}((P - Q)^2) = \mathcal{N}(P + Q) + \mathcal{N}(I - PQ) + \mathcal{N}(I - QP)$ olduğu görülür.

(ii) $P^*, Q^* \in \mathbb{C}_n^P$ olduğunu belirtelim. Bu takdirde (i) ve in ispatı Lemma 3.1.6 ya göre (ii) deki sonuç kullanılarak gösterilebilir.

Sonuç 3.1.8 $P, Q \in \mathbb{C}_n^P$ izdüşümler olsun. Bu takdirde

$P - Q$ tersinirdir $\Leftrightarrow$ Hem $P + Q$ ve hem de $I - PQ$ tersinirdir,

$\Leftrightarrow$ Hem $P + Q$ ve hem de $I - QP$ tersinirdir.

dir.

Sonuç 3.1.8 e göre $dim\,\mathcal{N}(I - PQ) = dim\,\mathcal{N}(I - QP)$ olduğu söylenebilir. Bu nedenle $\mathcal{N}(I - PQ)$ ve $\mathcal{N}(I - QP)$ lineer uzay olarak izomorfturlar. Fakat bu iki uzayın aynı olması gerekmez. Bunu aşağıdaki örnekle açıklayalım.

Örnek 3.1.1 P ve Q izdüşümleri aşağıdaki şekilde seçilsin.

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olsun. Bu takdirde $P, Q \in \mathbb{C}_3^P$ olup

$$I - PQ = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ ve } I - QP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ve dolayısıyla $(I - PQ) \neq \mathcal{N}(I - QP)$ olduğu açıktır. Fakat eğer P ve Q ortogonal izdüşümler ise bu takdirde aşağıdaki sonuç verilebilir.

Teorem 3.1.9 $P, Q \in \mathbb{C}_n^{OP}$ iki ortogonal izdüşüm matrisi olsun. Bu takdirde

(i) $\mathcal{N}(I - PQ) = \mathcal{N}(I - QP)$;

(ii) $\mathcal{N}((P - Q)^2) = \mathcal{N}(P + Q) \oplus \mathcal{N}(I - PQ)$;

(iii) $\Re((P - Q)^2) = \Re(P + Q) \cap \Re(I - PQ)$

ifadeleri sağlanır.

İspat. (i): $P, Q \in \mathbb{C}_n^{OP}$ ortogonal izdüşüm matrisleri için

$$P = U\begin{bmatrix} I & 0 & & & & \\ 0 & 0 & & & & \\ & & I & & & \\ & & & I & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}U^*, \qquad Q = U\begin{bmatrix} C^2 & CS & & & & \\ CS & S^2 & & & & \\ & & I & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & I & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}U^*$$

olacak şekilde bir $U \in \mathbb{C}^n$ üniter matrisi mevcuttur, burada C, S matrisleri $C^2 + S^2 = 1$ olacak şekilde reel pozitif köşegen matrislerdir. Buradan basit hesaplamalarla

$$I - PQ = U\begin{bmatrix} I - C^2 & - & & & & \\ 0 & I & & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & I & & \\ & & & & I & \\ & & & & & I \end{bmatrix}U^*,$$

$$I - QP = U\begin{bmatrix} I - C^2 & 0 & & & & \\ -CS & I & & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & I & & \\ & & & & I & \\ & & & & & I \end{bmatrix}U^*$$

olduğu görülür. $|I - C^2| \neq 0$ olacağından $\mathcal{N}(I - PQ) = \mathcal{N}(I - QP)$ olacaktır.

(ii): (i) ve Teorem 3.1.8 den $\mathcal{N}((P - Q)^2) = \mathcal{N}(P + Q) + \mathcal{N}(I - PQ)$ yazılabilir. Ayrıca herhangi bir $\beta \in \mathcal{N}(P + Q) + \mathcal{N}(I - PQ)$ için $(P + Q)\beta = 0$ ve $\beta = PQ\beta = P\beta$ yani $2\beta = P(P + Q)\beta = 0$ yazılabilir. Dolayısıyla $\mathcal{N}(P + Q) \cap \mathcal{N}(I - PQ) = \{0\}$ elde edilir. Buradan da $\mathcal{N}((P - Q)^2) = \mathcal{N}(P + Q) \oplus \mathcal{N}(I - PQ)$ elde edilir.

(iii): $P, Q \in \mathbb{C}_n^{OP}$ olduğundan $P^* = P$ ve $Q^* = Q$ olacaktır. (ii) nin ispatı ve Lemma 3.1.6 ya göre (iii) deki sonuç gösterilebilir.

$Q - PQ$ nun sıfır uzayı ve sütun uzayı için aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.1.10 $P, Q \in \mathbb{C}_n^P$ iki izdüşüm matrisi olsun. Bu takdirde

(i) $\mathcal{N}(Q - PQ) = \mathcal{N}(Q) \oplus \big(\Re(P) \cap \Re(Q)\big)$

(ii) $\Re(Q - PQ) = \Re(Q) \cap \big(\mathcal{N}(P) + \mathcal{N}(Q)\big)$

ifadeleri sağlanır.

İspat. (i): $\mathcal{N}(Q) + \big(\Re(P) \cap \Re(Q)\big) \leq \mathcal{N}(Q - PQ)$ olduğu ve $(Q) + \big(\Re(P) \cap \Re(Q)\big)$ uzaylarının toplamının direkt toplam olduğu açıktır. Herhangi bir $\alpha \in \mathcal{N}(Q - PQ)$ için $Q\alpha = PQ\alpha$ yazılabilir. Böylece $\alpha = (\alpha - Q\alpha) + Q\alpha \in \mathcal{N}(Q) + \big(\Re(P) \cap \Re(Q)\big)$ olacağından $\mathcal{N}(Q - PQ) \leq \mathcal{N}(Q) + \big(\Re(P) \cap \Re(Q)\big)$ yazılabilir. Bu nedenle (i) ispatlanmış olur.

(ii) $P^*, Q^* \in \mathbb{C}_n^P$ olduğunu belirtelim. Bu takdirde (i) nin ispatı ve Lemma 3.1.6 ya göre istenilen sonuç gösterilebilir.

Benzer şekilde $I - PQ$ nun sıfır ve sütun uzayları lile ilgili olarak aşağıdaki sonuçlar verilebilir. Bunların ispatı Teorem 3.1.9 a benzer şekilde yapılabilir.

Teorem 3.1.11 $P, Q \in \mathbb{C}_n^P$ iki izdüşüm matrisi olsun. Bu takdirde

(i) $\mathcal{N}(I - PQ) = \Re(P) \cap \mathcal{N}(P - PQ)$

(ii) $\Re(I - PQ) = \mathcal{N}(P) + \Re(Q - PQ)$

ifadeleri sağlanır.

Teorem 3.1.12 $P, Q \in \mathbb{C}_n^P$ iki izdüşüm matrisi olsun. Bu takdirde

(i) $\mathcal{N}(P + Q - PQ) = \mathcal{N}(Q - PQ) \cap \mathcal{N}(P)$

(ii) $\Re(P + Q - PQ) = \Re(P - PQ) + \Re(Q)$

ifadeleri sağlanır.

İspat. (i): Herhangi bir $\alpha \in \mathcal{N}(Q - PQ)$ için $Q\alpha = PQ\alpha$ ve $P\alpha = 0$ eşitlikleri yazılabilir. Bu ise $\mathcal{N}(Q - PQ) \cap \mathcal{N}(P) \leq \mathcal{N}(P + Q - PQ)$ olması demektır. Öte taraftan herhangi bir $\alpha \in \mathcal{N}(P + Q - PQ)$ için $(P + Q - PQ)\alpha = 0$ olacağından $P\alpha = 0$ ve $(Q - PQ)\alpha = 0$ eşitliği elde edilir. Bu ise $\mathcal{N}(P + Q - PQ) \leq \mathcal{N}(Q - PQ) \cap \mathcal{N}(P)$ olması demektir. Böylece $\mathcal{N}(P + Q - PQ) = \mathcal{N}(Q - PQ) \cap \mathcal{N}(P)$ olup (i) ispatlanmış olur.

(ii) $P^*, Q^* \in \mathbb{C}_n^P$ olduğunu belirtelim. Bu takdirde (i) nin ispatı dikkate alınırsa $\mathcal{N}(P^* + Q^* - Q^* P^*) = \mathcal{N}(P^* - Q^* P^*) \cap \mathcal{N}(Q^*)$ yazılabilir. Eşitliğin her iki yanının ortogonal komplementi alınırsa $\Re(P+Q-PQ) = \Re(P-PQ) + \Re(Q)$ olduğu elde edilir ve böylece istenilen sonuç gösterilmiş olur.

Teorem 3.1.13 $P, Q \in \mathbb{C}_n^P$ iki izdüşüm matrisi, $a, b, c \in \mathbb{C}$ ve $ab \neq 0$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler doğrudur:

(i) Eğer $a+b=c$ ise $\mathcal{N}(aP+bQ-cPQ) = \mathcal{N}(P-Q)$

(ii) Eğer $a+b \neq c$ ise $\mathcal{N}(aP+bQ-cPQ) = T\mathcal{N}(P-Q) \cong \mathcal{N}(P+Q)$ dir, burada $T = I + \frac{a+c-b}{a+b-c}Q$ şeklindedir.

(iii) Eğer $a+b \neq c$ ise $\mathcal{N}(aP+bQ-cPQ) = \mathcal{N}(Q-PQ) \cap \mathcal{N}(P+\frac{b-c}{a}Q)$

(iv) Eğer $a+b=c$ ise $\Re(aP+bQ-cPQ) = \mathcal{R}(P-Q)$

(v) Eğer $a+b \neq c$ ise $\Re(aP+bQ-cPQ) = K\Re(P-Q) \cong \Re(P+Q)$ dir, burada $K = I + \frac{b+c-a}{a+b-c}P$ şeklindedir.

(vi) Eğer $a+b \neq c$ ise $\Re(aP+bQ-cPQ) = \Re(P-PQ) + \Re(Q+\frac{a-c}{b}P)$

İspat. (i): Eğer $a+b=c$ ise bu takdirde $\left(I-\frac{c}{a}P\right)(aP+bQ-cPQ) = b(Q-P)$ olacaktır. Buradan $\mathcal{N}(aP+bQ-cPQ) = \mathcal{N}(P-Q)$ olduğu görülür.

(ii): Eğer $a+b \neq c$ ise bu takdirde

$$\left(I+\frac{a+c-b}{a+b-c}P\right)(aP+bQ-cPQ)\left(I+\frac{a+c-b}{a+b-c}Q\right) = \frac{2ab}{a+b-c}(P+Q)$$

yazılabilir. Öte yandan $\frac{2ab}{a+b-c} \neq 0$ olup $I+\frac{a+c-b}{a+b-c}P$ ve $I+\frac{a+c-b}{a+b-c}Q$ matrislerinin her ikisi de tersinir olduğundan $\mathcal{N}(aP+bQ-cPQ) = T\mathcal{N}(P-Q) \cong \mathcal{N}(P+Q)$ olacaktır.

(iii): Eğer $a+b \neq c$ ise bu takdirde herhangi bir $\alpha \in \mathcal{N}(Q-PQ) \cap \mathcal{N}\left(P+\frac{b-c}{a}Q\right)$ için $(Q-PQ)\alpha = \left(P+\frac{b-c}{a}Q\right)\alpha = 0$ yazılabilir. Bu ise$PQ\alpha = Q\alpha$ ve $P\alpha = \frac{c-b}{a}Q\alpha$ olması demektir. Böylece $(aP+bQ-cPQ)\alpha = 0$ olacaktır. Bu nedenle $\mathcal{N}(Q-PQ) \cap \mathcal{N}(P+\frac{b-c}{a}Q) \leq \mathcal{N}(aP+bQ-cPQ)$ elde edilir. Ayrıca herhangi bir $\alpha \in \mathcal{N}(aP+bQ-cPQ)$ için $(aP+bQ-cPQ)\alpha = 0$ olacağından $P\alpha = \frac{c-b}{a}PQ\alpha$ ve$Q\alpha = PQ\alpha$ elde edilir ki bu da $\alpha \in \mathcal{N}(Q-PQ) \cap \mathcal{N}(P+\frac{b-c}{a}Q)$ olduğunu gösterir. Böylece $\mathcal{N}(aP+bQ-cPQ) \leq \mathcal{N}(Q-PQ) \cap \mathcal{N}(P+\frac{b-c}{a}Q)$

elde edilir. Sonuç olarak $\mathcal{N}(aP+bQ-cPQ)= \mathcal{N}(Q-PQ)\cap\mathcal{N}(P+\frac{b-c}{a}Q)$ bulunur.

(iv): (i) ve Lemma 3.1.6 uygulanarak istenilen sonuca ulaşılabilir.

(v): (3.1.35) eşitliğinden istenilen sonuca ulaşılabilir.

(vi): Eğer $a+b\neq c$ ise bu takdirde $\bar{a}+\bar{b}\neq\bar{c}$ (burada $\bar{a}$, a nın eşleniğidir) olacaktır. $P^*, Q^*\in\mathbb{C}_n^P$ olduğunu belirtelim. Bu takdirde (iii) nin ispatı dikkate alınırsa $\mathcal{N}\left(\bar{a}P^*+\bar{b}\,Q^*-\bar{c}\,Q^*\,P^*\right)=\mathcal{N}(\,P^*-\,Q^*\,P^*)\cap\mathcal{N}\left(\,Q^*+\frac{\bar{a}-\bar{c}}{\bar{b}}P^*\right)$ olduğu görülür. Eşitliğin her iki tarafının ortogonal komplementi alınıp Lemma 3.1.6 uygulanırsa $\Re(aP+bQ-cPQ)=\Re(P-PQ)+\Re(Q+\frac{a-c}{b}P)$ olduğu elde edilir ve böylece istenilen sonuç gösterilmiş olur.

Sonuç 3.1.9 $P,Q\in\mathbb{C}_n^P$ iki izdüşüm matrisi, $a,b,c\in\mathbb{C}$ ve $ab\neq 0$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler doğrudur:

(i) $r(aP+bQ-cPQ)=\begin{cases} r(P-Q), & \text{eğer } a+b=c \text{ ise} \\ r(P+Q), & \text{eğer } a+b+c \text{ ise}\end{cases}$

(ii) Eğer $a+b\neq c$ ise bu takdirde

$aP+bQ-cPQ$ tersinirdir $\Leftrightarrow \mathcal{N}(P-PQ)\cap\mathcal{N}\left(P+\frac{b-c}{a}Q\right)=\{0\}$ dir,

$\Leftrightarrow \Re(P-PQ)+\Re\left(Q+\frac{a-c}{b}P\right)=\mathbb{C}^n$ dir.

(iii) Eğer $a+b=c$ ise $aP+bQ-cPQ$ tersinirdir $\Leftrightarrow$ $P-Q$ tersinirdir.

Sonuç 3.1.10 $P,Q\in\mathbb{C}_n^P$ iki izdüşüm matrisi olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler doğrudur:

(i) $\mathcal{N}(P+Q)\cong\left(\mathcal{N}(Q)\oplus\left(\Re(P)\cap\Re(Q)\right)\right)\cap\mathcal{N}(P)$,

(ii) $P+Q$ tersinirdir $\Leftrightarrow$ $\left(\mathcal{N}(Q)\oplus\left(\Re(P)\cap\Re(Q)\right)\right)\cap\mathcal{N}(P)=\{0\}$.

İspat. (i): Eğer Teorem 3.1.13 (ii) de $a=b=c=1$ alınırsa bu takdirde $\mathcal{N}(P+Q)\cong\mathcal{N}(P+Q-PQ)$ olduğu görülür. Buradan Teorem 3.1.10 ve Teorem 3.1.12 ye göre $\mathcal{N}(P+Q-PQ)=\left(\mathcal{N}(Q)\oplus\left(\Re(P)\cap\Re(Q)\right)\right)\cap\mathcal{N}(P)$ olduğu kolayca görülür. Böylece $\mathcal{N}(P+Q-PQ)\cong\left(\mathcal{N}(Q)\oplus\left(\Re(P)\cap\Re(Q)\right)\right)\cap\mathcal{N}(P)$ elde edilir. Öte yandan (ii) şıkkının ispatı ise (i) den direkt olarak elde edilir.

Şimdi de $P, Q \in \mathbb{C}_n^P$ ve $P, Q \in \mathbb{C}_n^{OP}$ olması durumlarında $PQ + QP$ ve $PQ - QP$ nin sıfır uzayları ile ilgili içerme bağıntıları verelim. Bu durumda bu iki uzayın eşit olması için bazı gerek ve yeter şartlar verilecektir. Sonuç olarak $P + Q$ ve $P - Q$ nun tersinirliği için bir takım karakterizasyonlar verilecektir. $P - Q$ nun tersinirliğinin $P + Q$ nun tersinirliği için yeterli fakat gerekli olmadığını belirtelim. Yukarıdaki gözlemlerimiz bizi $\mathcal{N}(PQ + QP)$ ve $\mathcal{N}(PQ + QP)$ ile ilgili içerme ilişkilerinin bilinmesine götürecektir.

Örnek 3.1.2 P ve Q izdüşümleri aşağıdaki şekilde seçilsin.

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olsun. Bu takdirde $P, Q \in \mathbb{C}_3^P$ olup basit hesaplamalarla

$$PQ + QP = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad \text{ve} \qquad PQ - QP = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olduğu görülebilir. Bu durumda ve dolayısıyla $\mathcal{N}(PQ + QP) = \{(-2x, x, 0)' : x \in \mathbb{C}\}$ ve $\mathcal{N}(PQ - QP) = \{(0, x, y)' : x, y \in \mathbb{C}\}$ olduğu açıktır. Bu takdirde $\mathcal{N}(PQ + QP) \leq \mathcal{N}(PQ - QP)$ eşitsizliği sağlanmaz. Fakat aşağıdaki teorem verilebilir:

Not 3.1.1 $P, Q \in \mathbb{C}_n^P$ iki izdüşüm matrisi olsun. Bu takdirde

$$r(PQ + QP) \leq r(PQ - QP)$$

eşitsizliği daima gerçeklenir.

Teorem 3.1.14 $P, Q \in \mathbb{C}_n^P$ iki izdüşüm matrisi olsun. Bu takdirde

(i) $\mathcal{N}(PQ + QP) = \mathcal{N}(PQ - QP) \Leftrightarrow \Re(P) \cap \Re(Q) = \{0\}$

(ii) $\Re(PQ + QP) = \Re(PQ - QP) \Leftrightarrow \mathcal{N}(P) \cap \mathcal{N}(Q) = \mathbb{C}^n$

olacaktır.

İspat. (i): Eğer $\Re(P) \cap \Re(Q) = \{0\}$ ise bu takdirde herhangi bir $\mathcal{N}(PQ - QP)$ için $PQ\alpha = QP\alpha \in \Re(P) \cap \Re(Q) = \{0\}$ olacağından $PQ\alpha = QP\alpha = \alpha \in 0$ dır. Bu ise $(PQ + QP)\alpha = 0$ olduğunu gösterir. Dolayısıyla $\mathcal{N}(PQ - QP) \leq \mathcal{N}(PQ + QP)$ elde edilir. Benzer şekilde $\mathcal{N}(PQ + QP) \leq \mathcal{N}(PQ - QP)$ olduğu da gösterilebilir. Bu nedenle $\mathcal{N}(PQ + QP) = \mathcal{N}(PQ - QP)$ olacaktır. Tersine olarak eğer $\alpha \in \Re(P) \cap \Re(Q)$ ise bu takdirde $P\alpha = Q\alpha = \alpha$ olur ki bu da $(PQ - QP)\alpha = 0$ olduğunu gösterir.

Bu nedenle $(PQ+QP)\alpha=0 \Longrightarrow 2\alpha=0 \Longrightarrow \alpha=0$ olacaktır. Dolayısıyla $\Re(P)\cap \Re(Q)=\{0\}$ olduğu görülür.

(ii): Bunun için $P^*, Q^* \in \mathbb{C}_n^P$ olduğunu belirtelim. Bu durumda (ii) şıkkının ispatı (i) ve Lemma 3.1.6 dikkate alınarak kolayca yapılabilir.

Bu durumda $P-Q$ ifadesinin tersinirliğinin yeni bir karakterizasyonu $PQ+QP$ ve $PQ-QP$ nin sıfır uzaylarının özellikleri yardımıyla da verilebilir.

Sonuç 3.1.11 $P,Q \in \mathbb{C}_n^P$ iki izdüşüm matrisi olsun. Bu takdirde

$$P-Q \text{ tersinirdir } \Leftrightarrow \mathcal{N}(PQ+QP)=\mathcal{N}(PQ-QP)$$
$$\text{ve } \mathcal{N}(P-PQ)\cap\mathcal{N}(Q-QP)=\{0\}$$

olacaktır.

İspat. Eğer $P-Q$ tersinir ise bu takdirde Teorem 3.1.4. e göre $\Re(P)\cap\Re(Q)=\{0\}$ olacaktır. Bu durumda Teorem 3.1.14 den $\mathcal{N}(PQ+QP)=\mathcal{N}(PQ-QP)$ elde edilir. Öte yandan herhangi bir $\alpha \in \mathcal{N}(P-PQ)\cap\mathcal{N}(Q-QP)$ için $P\alpha=PQ\alpha$, $Q\alpha=QP\alpha$ olacağından $(P-Q)^2\alpha=0$ yani $\alpha=0$ olduğu görülür. Bu nedenle $\mathcal{N}(P-PQ)\cap\mathcal{N}(Q-QP)=\{0\}$ olacaktır. Tersine olarak $\mathcal{N}(PQ+QP)=\mathcal{N}(PQ-QP)$ olduğundan Teorem 3.1.14 e göre $\Re(P)\cap\Re(Q)=\{0\}$ olacaktır. $\mathcal{N}(P-PQ)\cap\mathcal{N}(Q-QP)=\{0\}$ olduğundan $\mathcal{N}(P)\cap\mathcal{N}(Q)=\{0\}$ olduğu görülür. Bu nedenle Teorem 3.1.4 e göre $P-Q$ tersinir olacaktır.

Teorem 3.1.15 $P,Q \in \mathbb{C}_n^P$ iki izdüşüm matrisi olsun. Eğer $P-Q$ tersinir bu takdirde $\mathcal{N}(PQ+QP)=\mathcal{N}(PQ-QP)$ eşitliği sağlanır.

İspat. Herhangi bir $\alpha \in \mathcal{N}(PQ-QP)$ için $PQ\alpha=QP\alpha$ olacağından $PQ\alpha=QP\alpha=PQP\alpha$ yazılabilir. Sonuç olarak $(I-PQ)(PQ+QP)\alpha=PQ\alpha+QP\alpha-PQPQ\alpha-PQP\alpha=PQ\alpha+QP\alpha-$ PQ$QP\alpha-PQP\alpha=0$ elde edilir. Öte yandan $I-PQ$ tersinir olduğundan $(PQ+QP)\alpha=0$ olacaktır. Bu nedenle $\mathcal{N}(PQ-QP)\leq\mathcal{N}(PQ+QP)$ elde edilir. Öte yandan herhangi bir $\alpha \in \mathcal{N}(PQ+QP)$ için $PQ\alpha=-QP\alpha=-PQP\alpha$ olacağından $(\mathrm{I}-PQ)(PQ-QP)\alpha=PQ\alpha-QP\alpha-PQPQ\alpha+PQP\alpha=PQ\alpha-QP\alpha+PQP\alpha+PQP\alpha=0$ yazılabilir. Öte yandan $I-PQ$ tersinir olduğundan $(PQ-QP)\alpha=0$ olacaktır. Bu durumda $\mathcal{N}(PQ+QP)\leq\mathcal{N}(PQ-QP)$ elde edilir. Sonuç olarak $\mathcal{N}(PQ-QP)=\mathcal{N}(PQ+QP)$ olduğu elde edilmiş olur.

Şimdi de $P, Q \in \mathbb{C}_n^P$ şartının yerine $P, Q \in \mathbb{C}_n^{OP}$ şartını koyarak $\mathcal{N}(PQ - QP)$ ve $\mathcal{N}(PQ + QP)$ nun ilişkisini ele alalım. Bu durumda aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 3.1.16 $P, Q \in \mathbb{C}_n^{OP}$ ortogonal izdüşüm matrisleri verilmiş olsun. Bu takdirde $\mathcal{N}(PQ + QP) \leq \mathcal{N}(PQ - QP)$ eşitsizliği sağlanır.

İspat. P ve Q nun Teorem 3.1.19 un ispatında verilen *CS*- ayrışımını göz önüne alalım. Bu takdirde direkt bir hesaplamayla

$$PQ + QP = U \begin{bmatrix} 2C^2 & CS & & & & \\ CS & 0 & & & & \\ & & 2I & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} U^*$$

ve

$$PQ - QP = U \begin{bmatrix} 0 & CS & & & & \\ -CS & S^2 & & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} U^*$$

olacaktır, burada $\begin{pmatrix} 2C^2 & CS \\ CS & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2px2p}, I \in \mathbb{C}^{txt}$ dir. Buradan $\begin{pmatrix} 2C^2 & CS \\ CS & 0 \end{pmatrix}$ ve $\begin{pmatrix} 0 & CS \\ -CS & S^2 \end{pmatrix}$ matrislerinin her ikisi de tersinir olacaktır. Dolayısıyla

$$\mathcal{N}(PQ + QP) = \left\{ U(0_{1x2p}, 0_{1xt}X)'U^* \middle| X \in \mathbb{C}^{1x(n-2p-t)} \right\}$$

ve

$$\mathcal{N}(PQ - QP) = \left\{ U(0_{1x2p}, Y_{1xt}X)'U^* \middle| X \in \mathbb{C}^{1x(n-2p-t)} \right\}$$

olup $\mathcal{N}(PQ + QP) \leq \mathcal{N}(PQ - QP)$ olduğu gösterilmiş olur.

Eğer $P, Q \in \mathbb{C}_n^{OP}$ ise $\mathcal{N}(PQ - QP) = \mathcal{N}(PQ + QP)$ eşitliği için bir gerek ve yeter şart aşağıdaki gibi verilebilir.

Teorem 3.1.17 $P, Q \in \mathbb{C}_n^{OP}$ ortogonal izdüşüm matrisleri verilmiş olsun. Bu takdirde $I - PQ$ nun tersinir olması için gerek ve yeter şart $\mathcal{N}(PQ + QP) = \mathcal{N}(PQ - QP)$ olmasıdır.

İspat. Gerekliliğin ispatı Teorem 3.1.15 den direkt olarak görülür. Öte yandan $\mathcal{N}(PQ+QP)=\mathcal{N}(PQ-QP)$ özdeşliği P ve Q nun Teorem 3.1.19 un ispatında verilen CS- ayrışımını göz önüne alınırsa

$$P=U\begin{bmatrix} I & 0 & & & \\ 0 & 0 & & & \\ & & I & & \\ & & & 0 & \\ & & & & 0 \end{bmatrix}U^*, Q=U\begin{bmatrix} C^2 & CS & & & \\ CS & S^2 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & I & \\ & & & & 0 \end{bmatrix}U^*$$

olup

$$I-PQ=U\begin{bmatrix} I-C^2 & -CS & & & \\ 0 & I & & & \\ & & I & & \\ & & & I & \\ & & & & I \end{bmatrix}U^*$$

matrisi tersinirdir ve böylece ispat tamamlanmış olur.

3.2 İki Eğik İzdüşümün Fonksiyonlarının Sıfır ve Sütun Uzayları

Bu kısımda eğik izdüşümler çiftinin değişik fonksiyonlarının sıfır ve sütun uzaylarının değişik yeni karakterizasyonları verilecektir. Beklenildiği gibi eğik izdüşümler için elde edilen sonuçların büyük bir kısmi ortogonal izdüşümler için de geçerlidir. Bununla ilgili olarak önce bazı hazırlayıcı sonuçlar verilecek ve daha sonra da iki eğik izdüşümün çarpımı, toplamı ve farklarını içeren fonksiyonlar için bir dizi sonuçlar türetilecektir.

Aşağıdaki iki lemma iki eğik izdüşüm tarafından belirlenen değişik altuzayların boyutlarıyla ilgili olacaktır.

Lemma 3.2.1 $P,Q\in\mathbb{C}_n^P$ izdüşümleri verilmiş olsun. Bu takdirde

(i) $dim\big(\Re(P)\cap\Re(Q)\big)=r-r(\bar{Q}P)$

(ii) $dim\big(\Re(P)\cap\mathcal{N}(Q)\big)=r-r(QP)$

(iii) $dim\big(\mathcal{N}(P)\cap\Re(Q)\big)=n-r-r(\bar{Q}\bar{P})$

(iv) $dim\big(\mathcal{N}(P)\cap\mathcal{N}(Q)\big)=n-r-r(Q\bar{P})$

eşitlikleri sağlanır, burada $\bar{Q}=I-Q$ dir.

İspat. Matrislerin çarpımın ranklarıyla ilgili bilinen ifadelerden

$$dim\big(\Re(P) \cap \Re(Q)\big) = r(P) - r(QP) \tag{3.2.1}$$

yazılabilir. Bu nedenle Lemmanın (ii) şıkkı elde edilir. Geri kalan karakterizasyonlar (3.2.1) den P ile $\bar{P}$ yi ve/veya Q ile $\bar{Q}$ yer değişimi yapılarak elde edilebilir.

Lemma 3.2.2 $P, Q \in \mathbb{C}_n^P$ izdüşümleri verilmiş olsun. Bu takdirde

(i) $dim\big(\Re(P) + \Re(Q)\big) = r + r(\bar{P}Q)$

(ii) $dim\big(\Re(P) + \mathcal{N}(Q)\big) = r + r(\bar{P}\bar{Q})$

(iii) $dim\big(\mathcal{N}(P) + \Re(Q)\big) = n - r + r(PQ)$

(iv) $dim\big(\mathcal{N}(P) + \mathcal{N}(Q)\big) = n - r + r(P\bar{Q})$

dir.

İspat. Bu durumda aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

$$\begin{aligned} dim\big(\Re(P) + \Re(Q)\big) &= n - dim\big(\Re(P) + \Re(Q)\big)^{\perp} \\ &= n - dim(\Re(P)^{\perp} + \Re(Q)^{\perp}) \\ &= n - dim\big(\mathcal{N}(P^*) + \mathcal{N}(Q^*)\big) \\ &= r + r(Q^*\bar{P}^*), \end{aligned}$$

burada son eşitlik Lemma 3.2.1(iv) den elde edilmiştir. Bu durumda $r(Q^*\bar{P}^*) = r(\bar{P}Q)$yazılabileceğinden Lemmanın (i) şıkkı elde edilir. Geri kalan durumlar yine (i) den P ile $\bar{P}$ yi ve/veya Q ile $\bar{Q}$ yer değişimi yapılarak elde edilebilir.

Burada Lemma 3.2.1 ve Lemma 3.2.2 deki özdeşliklerin karşılık gelen sütun uzayları arasındaki eşitliklere genelleştirilip genelleştirilemeyeceği sorusu akla gelebilir. Başka bir deyişle,

$$\Re(P) = \Re(P) \cap \Re(Q) \oplus \Re(\bar{Q}P), \tag{3.2.2}$$

$$\Re(P) + \Re(Q) = \Re(P) \oplus \Re(\bar{P}Q), \tag{3.2.3}$$

eşitliklerinin sağlandığı sorulabilir, bunlardan (3.2.2) eşitliği Lemma 3.2.1(i) ye ve (3.2.3) eşitliği ise Lemma 3.2.2(i) ye karşılı gelmektedir. Belirtelim ki $\Re(Q)$ ve $\Re(\bar{Q}P)$ uzayları ayrıktır ve dolaysıyla (3.2.2) deki $\oplus$ sembolün kullanımını sağlar. Benzer şekilde (3.2.3) deki $\oplus$ sembolün kullanımı ise $\Re(P) \cap \Re(\bar{P}Q) = \{0\}$ gerçeğini yansıtır. Şimdi

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ ve } P = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.2.4}$$

matrislerini göz önüne alalım. Bu durumda $\Re(P) \cap \Re(Q) = \{0\}$,

$$\Re(P) = span\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \text{ ve } \Re(\bar{Q}P) = span\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$$

olduğu kolayca görülebilir ki bu da (3.2.2) nin genel de saplanmadığını gösterir. Öte yandan

$$\Re(P) \oplus \Re(\bar{P}Q) \subseteq \Re(P) + \Re(\bar{P}Q) \tag{3.2.5}$$

içermesi gösterilirse (3.2.3) ispatlanmış olur. $\Re(P) \subseteq \Re(P) + \Re(\bar{P}Q)$ olduğundan (3.2.5) deki ilişkiyi türetmek için $\Re(\bar{P}Q) \subseteq \Re(P) + \Re(\bar{P}Q)$ olduğunu göstermek yeterlidir. Bu nedenle $y \in \Re(\bar{P}Q)$ olacak şekilde bir $y \in \mathbb{C}^{nx1}$ vektörü alalım. $\bar{P}Q = Q - PQ$ olduğundan $y = u + v$ olacak şekilde $u \in \Re(Q)$ ve $v \in \Re(P)$ mevcuttur. Böylece (3.2.5) içermesi sağlanır ki bu da (3.2.3) eşitliğinin de sağlandığını gösterir.

Şimdi aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 3.2.1 $P, Q \in \mathbb{C}_n^P$ izdüşümleri verilmiş olsun. Bu takdirde

$$\Re(PQ) = \Re(P) \cap \big(\mathcal{N}(P) + \Re(Q)\big) \text{ ve } \mathcal{N}(PQ) = \mathcal{N}(Q) \oplus \big(\mathcal{N}(P) \cap \Re(Q)\big)$$

eşitlikleri sağlanır.

İspat. Bu durumda $\mathcal{N}(Q) \oplus \big(\mathcal{N}(P) \cap \Re(Q)\big) \subseteq \mathcal{N}(PQ)$ olduğundan $\mathcal{N}(PQ)$ nın karakterizasyonu bu içerme bağıntısının her iki tarafındaki alt uzayların boyutlarının eşit olduğunun gösterilmesiyle kurulacaktır. Bunun için

$$\begin{aligned} dim\big[\mathcal{N}(Q) \oplus \big(\mathcal{N}(P) \cap \Re(Q)\big)\big] &= dim\mathcal{N}(Q) + dim\big(\mathcal{N}(P) \cap \Re(Q)\big) \\ &= n - r(Q) + dim\big(\mathcal{N}(P) \cap \Re(Q)\big) \end{aligned}$$

olduğunu belirtelim. Bu nedenle $r(Q) = r(PQ) + dim\big(\mathcal{N}(P) \cap \Re(Q)\big)$ olacağından

$dim\big[\mathcal{N}(Q) \oplus \big(\mathcal{N}(P) \cap \Re(Q)\big)\big] = n - r(PQ) = dim[\mathcal{N}(PQ)]$ olduğu görülür. Öte yandan $\Re(PQ)$ nun karakterizasyonu ise P yerine Q^* ve Q yerine P^* alınarak ve elde edilen eşitliğin her iki tarafının ortogonal komplementini alarak $\mathcal{N}(PQ)$ nun karakterizasyonundan elde edilebilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

$P, Q \in \mathbb{C}_n^P$ izdüşümleri $\mathcal{N}(P) \cap \mathcal{N}(Q) = \{0\}$ olacak şekilde verildiğinde PQ nun $\Re(P) + \Re(Q)$ üzerinde $\mathcal{N}(P) \oplus \mathcal{N}(Q)$ boyunca bir izdüşüm olabilmesi için gerek ve yeter şart $\Re(P) \oplus \big(\mathcal{N}(P) + \Re(Q)\big) = \mathbb{C}^{nx1}$ olduğunun belirtelim. Bu durumda Lemma 3.2.1(iii) e göre $dim\big[\Re(P) \oplus \big(\mathcal{N}(P) + \Re(Q)\big)\big] = n - r(\bar{Q}\bar{P})$ olduğu görülür. Bu nedenle

$$\bar{Q}\bar{P} = 0 \iff \Re(P) \oplus \big(\mathcal{N}(P) + \Re(Q)\big) = \mathbb{C}^{nx1}$$

olduğu elde edilir. Bu durumda aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 3.2.1 $P, Q \in \mathbb{C}_n^P$ izdüşümleri $\bar{Q}\bar{P} = 0$ olacak şekilde verilmiş olsun. Bu takdirde $PQ \in \mathbb{C}_n^P$ olup $\Re(PQ) = \Re(P) \cap \Re(Q)$ ve $\mathcal{N}(PQ) = \mathcal{N}(P) \oplus \mathcal{N}(Q)$ dir.

İspat. Direkt bir hesaplamayla $\bar{Q}\bar{P} = 0$ ifadesinin $QP = P + Q - I$ olarak yazılabileceği görülür. Böylece $PQPQ = P(P + Q - I)Q = PQ$ elde edilir. Bu ise $\bar{Q}\bar{P} = 0$ ise $PQ \in \mathbb{C}_n^P$ olduğunu gösterir. Bu durumda $\Re(PQ)$ ve $\mathcal{N}(PQ)$ nun karakterizasyonları $\bar{Q}\bar{P} = 0$ ise $\Re(\bar{P}) \subseteq \mathcal{N}(\bar{Q})$ veya başka bir deyişle $\mathcal{N}(P) \subseteq \Re(Q)$ içermesi sağlanacağından Teorem 3.2.1 den elde edilir.

Öte yandan $PQ = QP$ ise PQ ve QP çarpımlarının her ikisi de idempotent olacaktır. Aşağıdaki teorem P ve Q nun komutatifliğinin $\Re(PQ)$ ve $\Re(QP)$ ilişkinin ne olacağı sorusunun cevabını vermektedir. P ve Q ortogonal izdüşümler olduğunda $\Re(PQ) = \Re(QP)$ olması için gerek ve yeter şart $\mathcal{N}(PQ) = \mathcal{N}(QP)$ olmasıdır.

Teorem 3.2.2 $P, Q \in \mathbb{C}_n^P$ izdüşümleri verilmiş olsun. Bu takdirde

(i) $\Re(PQ) = \Re(QP) \Leftrightarrow PQP = QP$ ve $QPQ = PQ$ (3.2.6)

(ii) $\mathcal{N}(PQ) = \mathcal{N}(QP) \Leftrightarrow PQP = PQ$ ve $QPQ = QP$ (3.2.7)

dir.

İspat. Açıkça görülebilir ki $\Re(PQ) \subseteq \Re(QP)$ olması için gerek ve yeter şart $QPQ = PQ$ olmasıdır. Bu nedenle P ve Q nun yerleri değiştirilirse $\Re(QP) \subseteq \Re(PQ)$ olması için gerek ve yeter şart $PQP = QP$ olmasıdır. Bu ise teoremin (i) kısmının sağlandığını gösterir. $\mathcal{N}(PQ) \subseteq \mathcal{N}(QP)$ nun her iki tarafında ortogonal komplement alınırsa $\Re(P^*Q^*) \subseteq \Re(Q^*P^*)$ olduğu görülür. Bu ise $\mathcal{N}(PQ) \subseteq \mathcal{N}(QP)$ nun

$QPQ = QP$ ye denk olduğunu gösterir. Aynı şekilde P ve Q nun yerleri değiştirilirse bu takdirde $\mathcal{N}(QP) \subseteq \mathcal{N}(PQ)$ nun da $PQP = PQ$ ye denk olduğu görülür ve böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.2.2 den kolayca ifade edilebilir ki $\Re(PQ) = \Re(QP)$ ve $\mathcal{N}(PQ) = \mathcal{N}(QP)$ eşitliklerinin her biri $PQ \in \mathbb{C}_n^P$ ve $QP \in \mathbb{C}_n^P$ olduğunu gösterir. Ayrıca $\Re(PQ) = \Re(QP)$ ve $\mathcal{N}(PQ) = \mathcal{N}(QP)$ ile ilgili alternatif karakterizasyonlar da verilebilir. Teorem 3.2.2(i) den $\Re(PQ) = \Re(QP) \Leftrightarrow PQP = QP$ ve $r(PQ) = r(QP)$ olduğu da gösterilebilir. Bunun için $PQP = QP$ den $\Re(QP) = \Re(PQP) \subseteq \Re(PQ)$ olacağını ve bu içerme ilişkisini $r(PQ) = r(QP)$ eşitliğiyle birleştirerek $\Re(PQ) = \Re(QP)$ olduğunu gösterebiliriz. Öte yandan $\Re(PQ) = \Re(QP)$ ise $r(PQ) = r(QP)$ olacağı ise oldukça açıktır.

Teorem 3.2.3 $P, Q \in \mathbb{C}_n^P$ olsun. Bu takdirde $\Re(P) = \Re(PQ) \oplus \big(\Re(P) \cap \mathcal{N}(Q)\big)$ olması için gerek ve yeter şart $r(PQ) = r(QP)$ ve $\Re(PQ) \cap \mathcal{N}(Q) = \{0\}$ olmasıdır.

İspat. $\Re(PQ) \subseteq \Re(P)$ trivial içermesinden $\Re(PQ)$ ve $\Re(P) \cap \mathcal{N}(Q)$ uzaylarının ayrık olması için gerek ve yeter şart $\Re(PQ) \cap \mathcal{N}(Q) = \{0\}$ olması olduğu söylenebilir. Ayrıca $\Re(PQ)$ ve $\mathcal{N}(Q)$ ayrık olduğunda Lemma 3.2.1(ii) ye göre $\Re(PQ) \oplus \big(\Re(P) \cap \mathcal{N}(Q)\big) \subseteq \Re(P)$ içermesinin$\Re(PQ) \oplus \big(\Re(P) \cap \mathcal{N}(Q)\big) = \Re(P)$ olması için gerek ve yeter şartın $r(PQ) = r(QP)$ olduğunu sağladığı görülür.

Teorem 3.2.3 alternatif olarak $\mathcal{N}(P) = \mathcal{N}(PQ) \cap \big(\mathcal{N}(P) + \Re(Q)\big)$ olması için gerek ve yeter şart $r(PQ) = r(QP)$ ve $\mathcal{N}(PQ) + \Re(Q) = \mathbb{C}^n$ olmasıdır şeklinde de ifade ve ispat edilebilir. Şimdi aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 3.2.4 $P, Q \in \mathbb{C}_n^P$ ve $r(P) = r$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktir:

(i) $PQ \in \mathbb{C}_n^P$;

(ii) $\Re(PQ) \subseteq \mathcal{N}(P\bar{Q})$;

(iii) $\Re(PQ) \cap \Re(P\bar{Q}P) = \{0\}$;

(iv) $r(PQ) + r(P\bar{Q}P) = r$;

(v) $tr(PQ) = r(QP)$ ve $tr(PQ) + r(P\bar{Q}P) = r$.

İspat. (i)⟺(ii) durumu direkt olarak $PQPQ = PQ \Leftrightarrow P\bar{Q}PQ = 0 \Leftrightarrow \Re(PQ) \subseteq \mathcal{N}(P\bar{Q})$ denkliğinden görülebilir. Öte yandan (i) nin (iii) yi sağladığını göstermek için bir $y \in \mathbb{C}^{nx1}$ vektörünü $y \in \Re(PQ) \cap \Re(P\bar{Q}P)$ olacak şekilde alalım. Bu durumda

$PQ \in \mathbb{C}_n^P$ olduğundan $y = PQy$ yazılabilir. Diğer yandan $y \in \Re(P\bar{Q}P)$ olduğundan $y = P\bar{Q}Px = Px - PQPx$ olacak şekilde bir $x \in \mathbb{C}^{nx1}$ mevcuttur. Bu nedenle $y = PQy = PQPx - PQPQPx = PQPx - PQPx = 0$ olur ki bu da $\Re(PQ) \cap \Re(P\bar{Q}P) = \{0\}$ olması demektir. Tersine olarak herhangi bir $z \in \mathbb{C}^{nx1}$ için $PQz - PQPQz = P\bar{Q}PQz = PQ(I - PQ)z$ yazılabileceğinden $P\bar{Q}PQz \in \Re(P\bar{Q}P)$ ve $PQ(I - PQ)z \in \Re(PQ)$ olduğu açıktır. Öte yandan $\Re(PQ) \cap \Re(P\bar{Q}P) = \{0\}$ olduğundan $PQz - PQPQz = 0$ elde edilir ki bu da $PQ \in \mathbb{C}_n^P$ olması demektir. $\Re(PQ) + \Re(P\bar{Q}P) \subseteq \Re(PQ) + \Re(P\bar{Q}) = \Re(P)$ olduğu açıktır. Şimdi herhangi bir $y \in \mathbb{C}^{nx1}$ vektörünü $y \in \Re(P)$ olacak şekilde seçelim. Bu durumda $y = Py$ olup buradan da $P\bar{Q}y = P\bar{Q}Py$ olduğu görülür. Sonuç olarak $y = PQy + P\bar{Q}y = PQy + P\bar{Q}Py$ yazılabilir. Buradan da $\Re(P) = \Re(PQ) + \Re(P\bar{Q}) = \Re(PQ) + \Re(P\bar{Q}P)$ olduğu görülür. Bu nedenle (iii)$\Leftrightarrow$ (iv) elde edilir. Ayrıca $PQ \in \mathbb{C}_n^P$ olduğundan $tr(PQ) = r(QP)$ ve $tr(I - PQ) = r(I - PQ)$ elde edilir. Bu iki eşitlik birleştirilirse $r(I - PQ) = n - r(QP)$ olduğu görülür. Bu ise $(PQ)^2 = PQ$ olması için bir gerek ve yeter şarttır. Bunun sonucunda

$$PQ \in \mathbb{C}_n^P \Leftrightarrow tr(PQ) = r(QP) \text{ ve } tr(I - PQ) = r(I - PQ) \tag{3.2.8}$$

yazılabilir. Bu nedenle (iii) $\Leftrightarrow$ (v) olacağı $r(I - PQ) = n - r + r(P\bar{Q}P)$ eşitliğinin bir sonucu olarak elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.2.4 başka şartlarla da genişletilebilir. Örneğin $PQ \in \mathbb{C}_n^P$ olması için gerek ve yeter şart $\Re(Q) \subseteq \Re(P) \oplus [\mathcal{N}(P) \cap \Re(Q)] \oplus [\mathcal{N}(P) \cap \mathcal{N}(Q)]$ olmasıdır. Teorem 3.2.1 in ışığı altında bu içerme $\Re(Q) \subseteq \mathcal{N}(\bar{Q}\bar{P}) \oplus [\mathcal{N}(P) \cap \mathcal{N}(Q)]$ veya $\Re(Q) \subseteq \mathcal{N}(Q\bar{P}) \oplus [\mathcal{N}(P) \cap \Re(Q)]$ şeklinde yeniden yazılabilir. Öte yandan $P, Q \in \mathbb{C}_n^P$ olmak üzere eğer $PQ = QP$ ise bu takdirde PQ çarpımı $\Re(PQ) = \Re(P) \cap \Re(Q)$ üzerinde $\mathcal{N}(PQ) = \mathcal{N}(P) \oplus \Re(Q)$ boyunca eğik izdüşüm olacaktır. Bu sonuç $PQ = QP$ olması için gerek ve yeter şart PQ çarpımının $\Re(PQ) = \Re(P) \cap \Re(Q)$ üzerinde $\mathcal{N}(PQ) = \mathcal{N}(P) \oplus \Re(Q)$ boyunca bir eğik izdüşüm ve $r(PQ) = r(QP)$ olmasıdır şeklinde genişletilebilir.

Teorem 3.2.5 $P, Q \in \mathbb{C}_n^P$ ve $r(P) = r$ olsun. Bu takdirde

(i) $\Re(PQ) = \Re(P) \cap \Re(Q) \Leftrightarrow r(PQ) + r(\bar{Q}P) = r,$ (3.2.9)

(ii) $\mathcal{N}(PQ) = \mathcal{N}(P) + \mathcal{N}(Q) \Leftrightarrow r(PQ) + r(P\bar{Q}) = r,$ (3.2.10)

(iii) PQ çarpımı $\Re(P) \cap \Re(Q)$ üzerinde $\mathcal{N}(P) + \mathcal{N}(Q)$ boyunca eğik izdüşümdür$\Leftrightarrow$ $\Re(PQ) = \Re(P) \cap \Re(Q)$ ve $\mathcal{N}(PQ) = \mathcal{N}(P) + \mathcal{N}(Q)$ olmasıdır,

(iv) PQ çarpımı $\Re(P)$ üzerinde $\mathcal{N}(Q)$ boyunca eğik izdüşümdür$\Leftrightarrow$ $\Re(P) \subseteq \mathcal{N}(P\bar{Q})$ ve $\mathcal{N}(P) \cap \Re(Q) = \{0\}$ veya buna alternatif olarak $\Re(\bar{P}Q) \subseteq \mathcal{N}(Q)$ ve $\mathcal{N}(P) + \Re(Q) = \mathbb{C}^{nx1}$ olmasıdır.

İspat. $P, Q \in \mathbb{C}_n^P$ ise bu takdirde $\Re(P) \cap \Re(Q) \subseteq \Re(PQ)$ olduğu açıktır. Böylece Lemma 3.2.1(i) den $\Re(P) \cap \Re(Q) = \Re(PQ)$ olması için gerek ve yeter şart $r(PQ) + r(P\bar{Q}) = r$ olmasıdır ki bu teoremin (i) şıkkını doğrular. Benzer şekilde $\mathcal{N}(PQ) \subseteq \mathcal{N}(P) + \mathcal{N}(Q)$ olduğundan $\mathcal{N}(PQ) = \mathcal{N}(P) + \mathcal{N}(Q)$ olması için gerek ve yeter şart $n - r(PQ) = dim[\mathcal{N}(P) + \mathcal{N}(Q)]$ olmasıdır. Lemma 3.2.2(iv) bu şartın $r(PQ) + r(P\bar{Q}) = r$ ye denk olduğu yani (iii) nin sağlandığı görülür. (iii) nin gereklilik kısmı açıktır. Tersine olarak $\Re(PQ) = \Re(P) \cap \Re(Q)$ olması $\Re(PQ) \subseteq \Re(Q)$ olduğunu gösterir. Buran da $PQ \in \mathbb{C}_n^P$ elde edilir. Teorem 3.2.4 ün (i)$\Longrightarrow$(ii) durumundan PQ $\Re(P)$ üzerinde eğik izdüşüm olduğunda $\Re(P) = \Re(PQ) \subseteq \mathcal{N}(P\bar{Q})$ olacaktır. Öte yandan $\Re(P) \subseteq \mathcal{N}(P\bar{Q})$ olması ise $PQP = P$ olması demektir. Bu eşitlik $PQ \in \mathbb{C}_n^P$ ve $\Re(P) = \Re(PQ)$ olduğunu gösterir. $\mathcal{N}(PQ)$ nun Teorem 3.2.1 nun Teorem 3.2.1 deki belirlenişinden $\mathcal{N}(PQ) = \mathcal{N}(P)$ olması için gerek ve yeter şart $\mathcal{N}(P) \cap \Re(Q) = \{0\}$ olması olduğu görülür. Böylece (iv) ün birinci kısmı sağlanır. İkinci kısmi ise P ile Q^* ve Q ile P^* in yerleri değiştirilip sonuçta elde edilen alt uzay bağıntılarının ortogonal komplementi alınarak elde edilebilir.

Teorem 3.2.6 $P, Q \in \mathbb{C}_n^P$ izdüşümleri $PQ \in \mathbb{C}_n^P$ olacak şekilde verilmiş olsun. Bu takdirde aşağıdaki şartlar denktir:

(i) $\Re(PQ) = \mathcal{N}(P\bar{Q})$,

(ii) $\mathcal{N}(P\bar{Q}) \subseteq \Re(P)$,

(iii) $\mathcal{N}(P\bar{Q}) = \mathcal{N}(I - PQ)$,

(iv) $r(P\bar{Q}) = r(I - PQ)$,

Yukarıda belirtildiği gibi $\Re(PQ)$ ve $\mathcal{N}(PQ)$ için Teorem 3.2.1 de verilen karakterizasyonların ortogonal izdüşümler için de geçerli olduğu bilgisinin yanında acaba P ve Q nun diğer fonksiyonları için de benzer özelliğin geçerli olup olmayacağı sorusu akla gelebilir. Örneğin P ve Q eğik izdüşümleri için kurulan

(i) $\mathcal{N}(P-Q)=[\Re(P)\cap\Re(Q)]\oplus[\mathcal{N}(P)\cap\mathcal{N}(Q)]$ (3.2.11)

(ii) $\mathcal{N}(I-P-Q)=[\Re(P)\cap\mathcal{N}(Q)]\oplus[\mathcal{N}(P)\cap\Re(Q)]$ (3.2.12)

(iii) $\mathcal{N}(PQ-QP)=[\Re(P)\cap\Re(Q)]\oplus[\Re(P)\cap\mathcal{N}(Q)]$

$\oplus[\mathcal{N}(P)\cap\Re(Q)]\oplus[\mathcal{N}(P)\cap\Re(Q)]$ (3.2.13)

eşitliklerinde her bir tarafın ortogonal komplementleri alınarak

(iv) $\Re(P-Q)=[\Re(P)+\Re(Q)]\cap[\mathcal{N}(P)+\mathcal{N}(Q)]$ (3.2.14)

(v) $\Re(I-P-Q)=[\Re(P)+\mathcal{N}(Q)]\cap[\mathcal{N}(P)+\Re(Q)]$ (3.2.15)

(vi) $\Re(PQ-QP)=[\Re(P)+\Re(Q)]\cap[\Re(P)+\mathcal{N}(Q)]\cap[\mathcal{N}(P)+$

$\Re(Q)]\cap[\mathcal{N}(P)+\Re(Q)]$ (3.2.16)

eşitlikleri yazılabilir. Öte yandan P ve Q otrıogonal izdüşümleri yazılabilen

(vii) $\mathcal{N}(P+Q)=\mathcal{N}(P)\cap\Re(Q)$

(viii) $\Re(P+Q)=\Re(P)+\Re(Q)$

(ix) $\mathcal{N}(PQ+QP)=[\Re(P)\cap\mathcal{N}(Q)]\oplus[\mathcal{N}(P)\cap\Re(Q)]\oplus[\mathcal{N}(P)\cap\Re(Q)]$

(x) $\Re(PQ+QP)=[\Re(P)+\Re(Q)]\cap[\Re(P)+\mathcal{N}(Q)]\cap[\mathcal{N}(P)+\Re(Q)]$

(xi) $\mathcal{N}(I-PQ)=\Re(P)\cap\Re(Q)$

(xii) $\Re(I-P-Q)=\mathcal{N}(P)+\mathcal{N}(Q)$

eşitlikleri genelde P ve Q eğik izdüşümleri için de yazılabilir. Aşağıdaki teorem $P,Q\in\mathbb{C}_n^P$ olduğunda bunların gerçekleşmesi için gerek ve yeter şartlar vermektedir.

Teorem 3.2.7 $P,Q\in\mathbb{C}_n^P$ izdüşümleri verilmiş olsun. Bu takdirde

1. Aşağıdaki şartlar denktir:

(i) $\mathcal{N}(P+Q)=\mathcal{N}(P)\cap\mathcal{N}(Q)$

(ii) $\mathcal{N}(PQ+QP)=[\Re(P)\cap\mathcal{N}(Q)]\oplus[\mathcal{N}(P)\cap\Re(Q)]\oplus[\mathcal{N}(P)\cap\Re(Q)]$

(iii) $r(\bar{P}Q\bar{P})=r(Q\bar{P})$

(iv) $\mathcal{N}(\bar{P}Q\bar{P})=\mathcal{N}(Q\bar{P})$

(v) $\Re(P)\cap\Re(Q\bar{P})=\{0\}$

2. Aşağıdaki şartlar denktir:

(i) $\mathcal{N}(I-PQ)=\Re(P)\cap\Re(Q)$

(ii) $r(P\bar{Q}P)=r(\bar{Q}P)$

(iii) $\mathcal{N}(P\bar{Q}P)=\mathcal{N}(\bar{Q}P)$

(iv) $\mathcal{N}(P)\cap\mathcal{N}(\bar{Q}P)=\{0\}$

İspat. Önce teoremin birinci kısmımı ispatlayalım. $\mathcal{N}(P)\cap\mathcal{N}(Q) \subseteq \mathcal{N}(P+Q)$ olduğunu belirtelim. Bu nedenle Lemma 3.2.1(iv) e göre 1(i) deki eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter şart $r(P+Q) = r(Q\bar{P})$ olmasıdır. Bunun sonucunda (i)⟺(iii) kısmı $r(P+Q) = r + r(\bar{P}Q\bar{P})$ eşitliğinden görülebilir. Öte yandan (ii)⟺(iii) denkliğini göstermek için öncelikle $\Re(P)\cap\mathcal{N}(Q) \subseteq \mathcal{N}(PQ+QP)$, $\mathcal{N}(P)\cap\Re(Q) \subseteq \mathcal{N}(PQ+QP)$ ve $\mathcal{N}(P)\cap\mathcal{N}(Q) \subseteq \mathcal{N}(PQ+QP)$ içermelerinin gerçeklendiğini belirtelim. Bu takdirde $[\Re(P)\cap\mathcal{N}(Q)] \oplus [\mathcal{N}(P)\cap\Re(Q)] \oplus [\mathcal{N}(P)\cap\Re(Q)] \subseteq \mathcal{N}(PQ+QP)$ elde edilir. Ayrıca $dim[\mathcal{N}(PQ+QP)] = n - r(PQ+QP) = 2n - r(P+Q) - r(I-P-Q)$ olacağından $dim[\mathcal{N}(PQ+QP)] = 2n - r - r(\bar{P}Q\bar{P}) - r(QP) - r(\bar{Q}\bar{P})$ yazılabilir. Burada $r(I-P-Q) = r(QP) - r(\bar{Q}\bar{P})$ eşitliği ve $r(P+Q) = r + r(\bar{P}Q\bar{P})$ eşitliği dikkate alınmıştır. Öte yandan Lemma 3.2.1 e göre

$$dim\big[[\Re(P)\cap\mathcal{N}(Q)] \oplus [\mathcal{N}(P)\cap\Re(Q)] \oplus [\mathcal{N}(P)\cap\Re(Q)]\big]$$
$$= 2n - r - r(\bar{P}Q\bar{P}) - r(QP) - r(\bar{Q}\bar{P})$$

yazılabilir. Böylece (ii) ⟺ (iii) denkliğinin sağlandığı görülür. Bu durumda (iii) ⟺(iv) nin denkliğinin $\mathcal{N}(Q\bar{P}) \subseteq \mathcal{N}(\bar{P}Q\bar{P})$ içermesinden kolayca gösterilebileceğinden dolayı teoremin 1. Kısmının ispatı tamamlanmış olur.

Teoremin 2. Kısmını ispatlamak için vektörünü $y \in \Re(P)\cap\Re(Q)$ olacak şekilde herhangi bir $y \in \mathbb{C}^{nx1}$ vektörünü göz önüne alalım. Bu takdirde vektörünü $y = Py = Qy$ olup vektörünü $(I-PQ)y = 0$ yazılabilir. Bu ise $\Re(P)\cap\Re(Q) \subseteq \mathcal{N}(I-PQ)$ olması demektir. Öte yandan $dim\mathcal{N}(I-PQ) = r - r(P\bar{Q}P)$ eşitliği yazılabilir. Bu durumda (i)⟺(ii) denkliğinin Lemma 3.2.1(i) sağlandığı görülür. (ii)⟺(iii) denkliği $\mathcal{N}(\bar{Q}P) \subseteq \mathcal{N}(P\bar{Q}P)$ içermesinin direkt bir sonucu olacaktır. Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Teorem 3.2.8 $P, Q \in \mathbb{C}_n^P$ izdüşümleri verilmiş olsun. Bu takdirde

(i) $\mathcal{N}(P-Q) = \mathcal{N}(Q\bar{P})\cap\mathcal{N}(\bar{Q}P) = \mathcal{N}(P\bar{Q})\cap\mathcal{N}(\bar{P}Q)$ (3.2.17)

(ii) $\mathcal{N}(I-P-Q) = \mathcal{N}(PQ)\cap\mathcal{N}(\bar{P}\bar{Q}) = \mathcal{N}(QP)\cap\mathcal{N}(\bar{Q}\bar{P})$ (3.2.18)

(iii) $\mathcal{N}(PQ-QP) = \mathcal{N}(P-Q) \oplus \mathcal{N}(I-P-Q)$ (3.2.19)

İspat. Teoremi ispatlamak için vektörünü $y \in \mathcal{N}(P-Q)$ olacak şekilde herhangi bir $y \in \mathbb{C}^{nx1}$ vektörünü göz önüne alalım. Bu takdirde $Py = Qy$ olacağından $\bar{Q}Py = 0$ ve $\bar{Q}Py = 0$ yani $y \in \mathcal{N}(\bar{P}Q)$ ve $y \in \mathcal{N}(\bar{Q}P)$ elde edilir. Tersine olarak $y \in \mathbb{C}^{nx1}$

vektörünü $y \in \mathcal{N}(Q\bar{P}) \cap \mathcal{N}(\bar{Q}P)$ olacak şekilde seçelim. Bu takdirde $Py = QPy$ ve $Qy = QPy$ olacağından $Py = Qy$ elde edilir ki bu da $y \in \mathcal{N}(P - Q)$ olduğunu gösterir. (i) nin geri kalan kısmının ispatı P ve Q nun yerlerinin değiştirilmesiyle gösterilebilir. (ii) deki özdeşlik (i) den P ve $\bar{P}$ nin yer değiştirmesinin bir sonucudur. (iii) deki eşitlik ise (i) ve (ii) durumlarının birleştirilmesiyle gösterilebilir. Alternatif olarak Teorem 3.2.8 aşağıdaki üç eşitliğin de sağlandığını gösterir.

(i) $\mathfrak{R}(P - Q) = \mathfrak{R}(Q\bar{P}) \oplus \mathfrak{R}(\bar{Q}P) = \mathfrak{R}(P\bar{Q}) \oplus \mathfrak{R}(\bar{P}Q)$ (3.2.20)

(ii) $\mathfrak{R}(I - P - Q) = \mathfrak{R}(QP) \oplus \mathfrak{R}(\bar{Q}\bar{P}) = \mathfrak{R}(PQ) \oplus \mathfrak{R}(\bar{P}\bar{Q})$ (3.2.21)

(iii) $\mathfrak{R}(PQ - QP) = \mathfrak{R}(P - Q) \cap \mathfrak{R}(I - P - Q)$ (3.2.22)

Öte yandan P ve Q matrisleri $PQ = QP$ veya buna denk olarak $\bar{P}\bar{Q} = \bar{Q}\bar{P}$ olacak şekilde seçilirse $\mathfrak{R}(QP) = \mathfrak{R}(P) \cap \mathfrak{R}(Q)$ ve $\mathfrak{R}(\bar{P}\bar{Q}) = \mathcal{N}(P) \cap \mathcal{N}(Q)$ eşitlikleri sağlanır. Bu durumda $\mathfrak{R}(I - P - Q) = \mathcal{N}(P - Q)$ eşitliği yazılabilir. Dolayısıyla P ve Q matrisleri komutatif olduğunda $P - Q$ nun tersinir olması için gerek ve yeter şart $I = P + Q$ olmasıdır. Buradan da genel durumda $P - Q$ ve $I - P - Q$ nun nonsingüler olması için gerek ve yeter şart $\mathfrak{R}(PQ - QP) = \mathfrak{R}(P - Q) \cap \mathfrak{R}(I - P - Q)$ eşitliğine ilaveten

$$\mathfrak{R}(PQ - QP) = \mathfrak{R}(P - Q) \Leftrightarrow r(I - P - Q) = n$$

$$\mathfrak{R}(PQ - QP) = \mathfrak{R}(I - P - Q) \Leftrightarrow r(P - Q) = n$$

durumlarının sağlanmasıdır. Buradan da

$$r(P - Q) = r(Q\bar{P}) + r(\bar{Q}P) = r(P\bar{Q}) + r(\bar{P}Q) \qquad (3.2.23)$$

eşitliği yazılabilir. Böylece (3.2.20) ifadesi (3.2.23) ifadesinin rank yerine ranj alınmasının bir genellemesidir. Daha önce de ifade edildiği gibi böyle bir genelleme her zaman mümkün değildir.

Teorem 3.2.9 $P, Q \in \mathbb{C}_n^P$ izdüşümleri verilmiş olsun. Bu takdirde

(i) $\mathfrak{R}(P + Q) = \mathfrak{R}(P) + \mathfrak{R}(Q)$

(ii) $\mathfrak{R}(P) \oplus \mathfrak{R}(\bar{P}Q\bar{P}) = \mathfrak{R}(P) + \mathfrak{R}(Q)$

eşitlikleri sağlanır.

İspat. Önce $\mathfrak{R}(P) \oplus \mathfrak{R}(\bar{P}Q\bar{P}) \subseteq \mathfrak{R}(P) + \mathfrak{R}(Q)$ içermesinin daima sağlandığını belirtelim ve ispatının (3.2.5) in ispatına benzer olduğunu ifade edelim. Böylece

Lemma 3.2.2(i) ye göre (ii) nin sağlanması için gerek ve yeter şart $r(\bar{P}Q\bar{P}) = r(\bar{P}Q)$ olmasıdır. Bu şart ise (i) de verilen eşitliğin sağlandığını gösterir.

Teorem 3.2.9(i) deki eşitlik $\mathcal{N}(P+Q) = \mathcal{N}(P) \cap \mathcal{N}(Q)$ eşitliğinden Teorem 3.2.7(i) de P yerine P^* ve Q yerine Q^* alınıp elde edilecek ifadenin her iki yanının ortogonal komplementini almak suretiyle elde edilir. Teorem 3.2.9 un bir diğer özelliği $\mathfrak{R}(P+Q) = \mathfrak{R}(P) + \mathfrak{R}(Q)$ eşitliğinin P ve Q ortogonal izdüşümler olduğunda daima sağlanması ancak P ve Q eğik izdüşümler olduğunda ise sağlanmasının gerekmediği gerçeğidir. Bu özellikle ilgili bir diğer şart $\mathfrak{R}(P) \oplus \mathfrak{R}(Q\bar{P}) = \mathfrak{R}(P) + \mathfrak{R}(Q)$ olmasıdır ki bu da yine ortogonal izdüşümler için gerçeklenir.

Teorem 3.2.10 $P, Q \in \mathbb{C}_n^P$ izdüşümleri verilmiş olsun. Bu takdirde

(i) $\mathfrak{R}(P) + \mathfrak{R}(Q\bar{P}) = \mathfrak{R}(P) + \mathfrak{R}(Q) \Leftrightarrow r(\bar{P}Q\bar{P}) = r(\bar{P}Q)$

(ii) $\mathfrak{R}(P) \cap \mathcal{N}(P\bar{Q}) = \mathfrak{R}(P) \cap \mathfrak{R}(Q) \Leftrightarrow r(P\bar{Q}P) = r(\bar{Q}P)$

dir.

İspat. Açıkça görülebilir ki (i) deki denklik

$$\mathcal{N}(P) + \mathcal{N}(\bar{P}Q) = \mathcal{N}(P) + \mathcal{N}(Q) \Leftrightarrow r(\bar{P}Q\bar{P}) = r(\bar{P}Q) \qquad (3.2.24)$$

şeklinde de yazılabilir. Ayrıca $\mathcal{N}(P) \cap \mathcal{N}(Q) \subseteq \mathcal{N}(P) \cap \mathcal{N}(\bar{P}Q)$ olduğundan bu içermenin her iki tarafındaki alt uzayların boyutlarının karşılaştırılması gerekir. Bu durumda $dim[\mathcal{N}(P) \cap \mathcal{N}(\bar{P}Q)] = n - r - r(\bar{P}Q\bar{P})$ olacağından Lemma 3.2.1(iv) den (3.2.24) denkliğinin sağlandığı görülür. Teoremin (ii) kısmı P yerine P^* ve Q yerine Q^* alınıp sonuçta elde edilen eşitliğin her iki yanının ortogonal komplementinin alınmasıyla elde edilebilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.2.10 daki iki denkliğin alternatifi olarak

(i) $\mathfrak{R}(P) + \mathfrak{R}(Q\bar{P}) = \mathfrak{R}(P) + \mathfrak{R}(Q) \Leftrightarrow \mathfrak{R}(\bar{P}Q\bar{P}) = \mathfrak{R}(\bar{P}Q)$

(ii) $\mathfrak{R}(P) \cap \mathcal{N}(P\bar{Q}) = \mathfrak{R}(P) \cap \mathfrak{R}(Q) \Leftrightarrow \mathcal{N}(P\bar{Q}P) = \mathcal{N}(\bar{Q}P)$

yazılabilir. Bu durumda Teorem 3.2.10(i) nin içeriğinde P ve Q ortogonal izdüşümler olduğunda $r(\bar{P}Q\bar{P}) = r(\bar{P}Q)$ olacaktır. Bu nedenledir ki $\mathfrak{R}(P) + \mathfrak{R}(Q\bar{P}) = \mathfrak{R}(P) + \mathfrak{R}(Q) = \mathfrak{R}(P+Q)$ gerekliliği sağlanır. Ayrıca P ve Q eğik izdüşümler olduğunda olmak üzere eğer $P + Q \in \mathbb{C}_n^P$ veya $P - Q \in \mathbb{C}_n^P$ ise bu durumda $\mathfrak{R}(P) + \mathfrak{R}(Q\bar{P}) = \mathfrak{R}(P) + \mathfrak{R}(Q)$ eşitliği daima sağlanır. Bu gerçekler $P + Q \in \mathbb{C}_n^P$ olması için gerek ve yeter şart olan $PQ = QP = 0$ olduğunda $r(\bar{P}Q\bar{P}) = r(Q) = r(\bar{P}Q)$ iken $P - Q \in \mathbb{C}_n^P$ olması için gerek ve yeter şart olan $PQ = QP = Q$ olduğunda ise $r(\bar{P}Q\bar{P}) = 0 = r(\bar{P}Q)$ olmasını gerektirir.

Benzer tartışmalar Teorem 3.2.10(ii) nin içeriğinde de verilebilir. Öncelikle P ve Q ortogonal izdüşümler olduğunda $r(P\bar{Q}P) = r(\bar{Q}P)$ olacağını belirtelim. Bu durumda $\mathfrak{R}(P) \cap \mathcal{N}(P\bar{Q}) = \mathfrak{R}(P) \cap \mathfrak{R}(Q)$ gerekliliği sağlanır. Diğer taraftan $QP = 0$ olması $r(P\bar{Q}P) = r(\bar{Q}P)$ olduğunu ve $PQ = QP = Q$ olması ise $r(P\bar{Q}P) = r(P - Q) = r(\bar{Q}P)$ olduğunu gerektirdiğinden Teorem 3.2.10 (ii) deki alt uzay eşitliği $P, Q \in \mathbb{C}_n^P$ in yanında $P + Q \in \mathbb{C}_n^P$ veya $P - Q \in \mathbb{C}_n^P$ olması durumunda gerçeklenir. Bu eşitlikle ilgili bir diğer yorum teorem 3.2.6 nın ispatında da belirtildiği gibi $PQ \in \mathbb{C}_n^P$ olmak üzere $\mathfrak{R}(PQ) = \mathfrak{R}(P) \cap \mathcal{N}(P\bar{Q})$ olmasıdır. Bu durumda $P, Q \in \mathbb{C}_n^{OP}$ olduğunda $P + Q \in \mathbb{C}_n^P$ olması için gerek ve yeter şart $\mathfrak{R}(P) \subseteq \mathfrak{R}(\bar{P}Q)$ olması ve $P - Q \in \mathbb{C}_n^P$ olması için gerek ve yeter şart $\mathfrak{R}(Q) \subseteq \mathfrak{R}(PQ)$ olmasıdır. Bu sonuçları $P, Q \in \mathbb{C}_n^P$ olduğunda genelleştirebiliriz. Bu duruma karşılık gelen karakterizasyon aşağıdaki teoremin bir sonucu olarak verilebilir.

Teorem 3.2.11 $P, Q \in \mathbb{C}_n^P$ izdüşümleri verilmiş olsun. Bu takdirde

(i) $PQ = 0 \Leftrightarrow \mathfrak{R}(Q) \subseteq \mathfrak{R}(\bar{P}Q)$

(ii) $PQ = Q \Leftrightarrow \mathfrak{R}(Q) \subseteq \mathfrak{R}(PQ)$

dir.

İspat. $PQ = 0$ ise $\bar{P}Q = 0$ olacağından teoremin (i) kısmının gerekliliği sağlanır. Tersini göstermek için $\mathfrak{R}(Q) \subseteq \mathfrak{R}(\bar{P}Q) \Leftrightarrow Q = \bar{P}QY$ olacak şekilde bir $Y \in \mathbb{C}^{nxn}$ matrisi vardır. Bu nedenle $PQ = P\bar{P}QY$ yazılabilir ki bu da (i) nin ispatını tamamlar. Teoremin (ii) kısmı de P ile $\bar{P}$ nin yerleri değiştirilerek elde edilir.

Teorem 3.2.11(i) deki $\mathfrak{R}(Q) \subseteq \mathfrak{R}(\bar{P}Q)$ ifadesi denk olarak $\mathcal{N}(P\bar{Q}) \subseteq \mathcal{N}(P)$ şeklinde ifade edilebilir. Bu durumda $P + Q \in \mathbb{C}_n^P \Leftrightarrow PQ = 0 = QP$ ve $P - Q \in \mathbb{C}_n^P \Leftrightarrow PQ = Q = QP$ denkliklerini hatırlarsak Teorem 3.2.11 den aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.2.2 $P, Q \in \mathbb{C}_n^P$ izdüşümleri verilmiş olsun. Bu takdirde

(i) $P + Q \in \mathbb{C}_n^P \Leftrightarrow \mathfrak{R}(Q) \subseteq \mathfrak{R}(\bar{P}Q)$ ve $\mathcal{N}(Q\bar{P}) \subseteq \mathcal{N}(Q)$

(ii) $P - Q \in \mathbb{C}_n^P \Leftrightarrow \Re(Q) \subseteq \Re(PQ)$ ve $\mathcal{N}(QP) \subseteq \mathcal{N}(Q)$

dir.

Teorem 3.2.12 $P, Q \in \mathbb{C}_n^P$ izdüşümleri verilmiş olsun. Bu takdirde $\Re(P) \subseteq \Re(Q)$ olması için gerek ve yeter şart $\Re(Q) = \Re(P) \oplus \Re(\bar{P}Q)$ olmasıdır.

İspat. İspat $\Re(P) + \Re(Q) = \Re(P) \oplus \Re(\bar{P}Q)$ eşitliğinden kolayca görülebilir.

Teorem 3.2.12 den kolayca gösterilebilir ki $\mathcal{N}(P) \subseteq \Re(Q)$ olması için gerek ve yeter şart $\Re(Q) = \mathcal{N}(P) \oplus \Re(PQ)$ olmasıdır.

Teorem 3.2.13 $P, Q \in \mathbb{C}_n^P$ izdüşümleri verilmiş olsun ve $r(P) = r$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktir:

(i) $r(PQ)r + r(Q) - n,$

(ii) $\mathcal{N}(P) \subseteq \Re(Q),$

(iii) $P + Q - PQ = I,$

(iv) $\Re(QP) + \mathcal{N}(P) = \Re(Q).$

İspat. (i)⟺(ii) nin denkliği ve (i)⟺(iii) nin denkliği daha önceki kısımda gösterilmişti. (ii) nin (iv) yi sağladığını göstermek için $\mathcal{N}(P) \subseteq \Re(Q)$ ise $\bar{P} = Q\bar{P}$ olduğunu göz önüne alalım. Bu takdirde $\Re(QP) + \mathcal{N}(P) = \Re(QP) + \Re(Q\bar{P})$ elde edilir. Bu ise $\Re(Q)$ ye eşittir. Tersinin doğrulu ise açıktır.

3.3 Ortogonal İzdüşümlerin Komutatifliği İçin Alternatif Yaklaşım

Bu kısımda $P \in \mathbb{C}_n^{OP}$ yani P bir ortogonal izdüşüm (başka bir deyişle $P^2 = P = P^*$) matrisi ele alınarak bu tip matrislerin komutatifliği ile ilgili bir alternatif yaklaşım ele alınacaktır. Şüphesiz $P \in \mathbb{R}_n^{OP}$ olması durumunda $P^2 = P = P'$ olacaktır, burada P' matrisi P nin transpozudur. Bu durumda $F \in \mathbb{C}^{nxn}$ kare matrisi r ranklı bir matris ise bu takdirde $U \in \mathbb{C}^{nxn}$ üniter matris, $KK^* + LL^* = I_r$ olacak şekilde matrisler, $\Sigma = kö\c{s}(\sigma_1 I_{r_1}, \dots, \sigma_t I_{r_t})$ ise $F \in \mathbb{C}^{nxn}$ nin singüler değerlerinin köşegen matrisi, $\sigma_1 > \sigma_2 > \dots > \sigma_t > 0, r_1 + r_2 + \dots + r_t = r = r(F)$ olmak üzere F nin

$$F = U \begin{pmatrix} \Sigma K & \Sigma L \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^* \tag{3.3.1}$$

gösterimini kullanarak ve her $P \in \mathbb{C}_n^{OP}$ ortogonal izdüşümünün FF^+ ifade edilebildiği gerçeğinden hareketle P matrisinin $r = r(P)$ olmak üzere

$$P = U\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}U^* \tag{3.3.2}$$

şeklinde yazılabileceğini belirtelim. Q matrisi başka bir ortogonal izdüşüm olsun. Bu durumda (3.3.2) dikkate alınarak $A \in \mathbb{C}^{rxr}$ ve $D \in \mathbb{C}^{(n-r)(n-r)}$ olmak üzere

$$Q = U\begin{pmatrix} A & \mathrm{B} \\ B^* & D \end{pmatrix}U^* \tag{3.3.3}$$

yazılabileceğini söyleyebiliriz. Aşağıdaki Lemmalar ileri kısımlarda kullanılacaktır. Bunlardan ilki (3.3.3) de verilen Q matrisindeki A, B ve D alt matrisleri arasındaki ilişkilerle ilgilidir.

Lemma 3.3.1 $Q \in \mathbb{C}_n^{OP}$ ortogonal izdüşümü (3.3.3) deki gibi verilmiş olsun. Bu durumda aşağıdaki durumlar geçerlidir:

(i) $A = A^2 + BB^*$

(ii) $B = AB + BD$

(iii) $D = D^2 + B^*B$

(iv) $\mathfrak{R}(B) \subseteq \mathfrak{R}(A)$

(v) $\mathfrak{R}(B) \subseteq \mathfrak{R}(\bar{A})$

(vi) $\mathfrak{R}(B^*) \subseteq \mathfrak{R}(D)$

(vii) $\mathfrak{R}(B^*) \subseteq \mathfrak{R}(\overline{D})$

(viii) $r(Q) = r(A) - r(B) + r(D)$

İspat. (i)-(iii) şartları Q matrisinin idempotentliğinin açık sonuçlarıdır. (iv) içermesi (i) den $A = A^*$ eşitliği dikkate alınarak

$$\mathfrak{R}(A) = \mathfrak{R}(AA^* + BB^*) = \mathfrak{R}(AA^*) + \mathfrak{R}(BB^*) = \mathfrak{R}(A) + \mathfrak{R}(B)$$

eşitliğinden görülebilir. Burada ikinci eşitlik AA^* ve BB^* ın her ikisinin de nonnegatif tanımlı olması gerçeğine dayanır. Geri kalan üç şart da benzer şekilde gösterilebilir. (viii) ün ispatını verelim. Bu durumda Q matrisinin (3.3.3) formu dikkate alınırsa

$$r(Q) = r(A) + r(D - B^*A^+B) \tag{3.3.4}$$

elde edilir. Bu nedenle

$$r(Q) = r(A) + n - r - r(\overline{D}) \tag{3.3.5}$$

olacaktır. Ayrıca $r(D^2 - D) = r(D) + r(\overline{D}) = n + r$ olacağından (iii) den $r(\overline{D}) = n - r + r(B) - r(D)$ yazılabilir. Bu eşitlik (3.3.5) de yerine yazılırsa (viii) şartı elde edilir.

Lemma 3.3.2 $P, Q \in \mathbb{C}_n^{OP}$ ortogonal izdüşümleri sırasıyla (3.3.2) ve (3.3.3) deki gibi verilmiş olsun. Bu durumda

(i) $PQ = QP$ olması için gerek ve yeter şart $B = 0$ olmasıdır.

(ii) $PQ = Q$ olması için gerek ve yeter şart $D = 0$ olmasıdır.

İspat. (i) deki denklik direkt olarak görülmektedir. (ii) yi göstermek için $D = 0$ ise $B = 0$ olacağından Lemma 3.3.1(iii) yi kullanmak yeterlidir.

Aşağıda F ve G uygun matrisler olmak üzere

$$r(F^*G) = r(P_F P_G) \tag{3.3.6}$$

$$\Re(FG) = \Re(FP_G) \tag{3.3.7}$$

gerçekleri dikkate alınacaktır.

Lemma 3.3.3 $P, Q \in \mathbb{C}_n^{OP}$ ortogonal izdüşümleri verilmiş olsun. Bu durumda

(i) $P + \overline{P}(\overline{P}Q)^+$, $\Re(P) + \Re(Q)$ üzerine ortogonal izdüşümdür.

(ii) $P - P(P\overline{Q})^+$, $\Re(P) \cap \Re(Q)$ üzerine ortogonal izdüşümdür.

Lemma 3.3.3 kullanılarak belirli alt uzayların toplam ve kesişimleri üzerine ortogonal izdüşümlerle ilgili aşağıdaki gösterimler verilebilir.

Lemma 3.3.4 $P, Q \in \mathbb{C}_n^{OP}$ ortogonal izdüşümleri sırasıyla (3.3.2) ve (3.3.3) deki gibi verilmiş olsun. Bu durumda

(i) $P_{\Re(P)+\Re(Q)} = U \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & P_D \end{pmatrix} U^*, dim[\Re(P) + \Re(Q)] = r + r(D),$

(ii) $P_{\Re(P)+\mathcal{N}(Q)} = U \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & P_{\overline{D}} \end{pmatrix} U^*, dim[\Re(P) + \mathcal{N}(Q)] = n + r(B) - r(D),$

(iii) $P_{\mathcal{N}(P)+\Re(Q)} = U \begin{pmatrix} P_A & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix} U^*, dim[\mathcal{N}(P) + \Re(Q)] = n - r + r(A),$

(iv) $P_{\mathcal{N}(P)+\mathcal{N}(Q)} = U \begin{pmatrix} P_{\overline{A}} & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix} U^*, dim[\mathcal{N}(P) + \mathcal{N}(Q)] = n - r(A) + r(B).$

Lemma 3.3.5 $P, Q \in \mathbb{C}_n^{OP}$ ortogonal izdüşümleri sırasıyla (3.3.2) ve (3.3.3) deki gibi verilmiş olsun. Bu durumda

(i) $P_{\Re(P)\cap\Re(Q)} = U\begin{pmatrix} Q_{\bar{A}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}U^*, dim[\Re(P)\cap\Re(Q)] = r(A) - r(B),$

(ii) $P_{\Re(P)\cap\mathcal{N}(Q)} = U\begin{pmatrix} Q_A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}U^*, dim[\Re(P)\cap\mathcal{N}(Q)] = r - r(A),$

(iii) $P_{\mathcal{N}(P)\cap\Re(Q)} = U\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Q_{\bar{D}} \end{pmatrix}U^*, dim[\mathcal{N}(P)\cap\Re(Q)] = r(D) - r(B),$

(iv) $P_{\mathcal{N}(P)\cap\mathcal{N}(Q)} = U\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Q_D \end{pmatrix}U^*, dim[\mathcal{N}(P)\cap\mathcal{N}(Q)] = n - r - r(D).$

Lemma 3.3.6 $P, Q \in \mathbb{C}_n^{OP}$ ortogonal izdüşümleri sırasıyla (3.3.2) ve (3.3.3) deki gibi verilmiş olsun. Bu durumda

(i) $r(PQ) = r(QP) = r(A),$

(ii) $r(I - PQ) = n - r(A) + r(B),$

(iii) $r(P\bar{Q}) = r - r(A) + r(B),$

(iv) $r(P + Q) = r + r(D),$

(v) $r(P - Q) = r - r(A) + r(B) + r(D),$

(vi) $r(PQ + QP) = r(A) + r(B).$

Teorem 3.3.1 $P, Q \in \mathbb{C}_n^{OP}$ ortogonal izdüşümleri verilmiş olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler gerçeklenir:

(i) $PQ = QP,$

(ii) $PQ = (PQ)^2,$

(iii) $QPQ = QPQPQ,$

(iv) $Q\bar{P}Q = Q\bar{P}Q\bar{P}Q,$

(v) $\bar{Q}PQ = 0,$

(vi) $PQ = P_{\Re(P)\cap\Re(Q)},$

(vii) $PQ = PP_{\Re(P)\cap\Re(Q)}Q,$

(viii) $P\bar{Q}$ matrisi $\Re(P)\cap[\mathcal{N}(P) + \mathcal{N}(Q)]$ üzerine ortogonal izdüşümdür,

(ix) $P\bar{Q}$ matrisi $\Re(P)\cap\mathcal{N}(Q)$ üzerine ortogonal izdüşümdür,

(x) $P\bar{Q}$ matrisi $[\Re(P) + \Re(Q)]\cap\mathcal{N}(Q)$ üzerine ortogonal izdüşümdür,

(xi) $P + Q - PQ$ matrisi $\Re(P) + \mathcal{N}(Q)$ üzerine ortogonal izdüşümdür,

(xii) $\Re\left(Q_{\Re(P)\cap\Re(Q)}P\right)$ ve $\Re\left(Q_{\Re(P)\cap\Re(Q)}Q\right)$ ortogonaldirler,

(xiii) $\Re(P)\cap[\mathcal{N}(P) + \mathcal{N}(Q)]$ ve $\Re(Q)\cap[\mathcal{N}(P) + \mathcal{N}(Q)]$ ortogonaldirler,

(xiv) $\Re(P)\cap[\mathcal{N}(P) + \mathcal{N}(Q)]$ ve $\Re(Q)$ ortogonaldirler,

(xv) $\Re(PQ) \subseteq \Re(Q),$

(xvi) $\Re(PQ) \subseteq \Re(P) \cap \Re(Q)$,

(xvii) $\Re(PQ) = \Re(P) \cap \Re(Q)$,

(xviii) $\Re(\bar{Q}P) = \Re(P) \cap [\mathcal{N}(P) + \mathcal{N}(Q)]$,

(xix) $\Re(\bar{Q}P) = \Re(P) \cap \mathcal{N}(Q)$,

(xx) $[\Re(P) + \Re(Q)] \cap \mathcal{N}(Q) = \Re(P) \cap [\mathcal{N}(P) + \mathcal{N}(Q)]$,

(xxi) $[\Re(P) + \Re(Q)] \cap \mathcal{N}(Q) = \Re(P) \cap \mathcal{N}(Q)$,

(xxii) $\Re(P) = [\Re(P) \cap \Re(Q)] \oplus [\Re(P) + \Re(Q)] \cap \mathcal{N}(Q)$,

(xxiii) $\Re(P) = [\Re(P) \cap \Re(Q)] \oplus \Re(\bar{Q}P)$,

(xxiv) $\Re(P) + \Re(Q) = \Re(Q) \oplus [\Re(P) \cap \Re(Q)]$,

(xxv) $r(PQ) = dim[\Re(P) \cap \Re(Q)]$,

(xxvi) $dim\big[\Re(P) \cap [\mathcal{N}(P) + \mathcal{N}(Q)]\big] = r(P) - r(PQ)$,

(xxvii) $dim\big[[\Re(P) + \Re(Q)] \cap \mathcal{N}(Q)\big] = r(P) - r(PQ)$,

(xxviii) $r(\bar{Q}P) = r(P) - r(PQ)$,

(xxix) $r(P + Q) = r(P) + r(Q) - r(PQ)$,

(xxx) $dim[\Re(P) \cap \mathcal{N}(Q)] = r(\bar{Q}P)$,

(xxxi) $dim[\Re(P) \cap \mathcal{N}(Q)] = r(P + Q) - r(Q)$,

(xxxii) $dim[\Re(P) \cap \mathcal{N}(Q)] = r(P) - dim[\Re(P) \cap \Re(Q)]$,

(xxxiii) $dim[\Re(P) \cap \mathcal{N}(Q)] = dim\big[\Re(P) \cap [\mathcal{N}(P) + \mathcal{N}(Q)]\big]$.

İspat. Lemma 3.3.2(i) ye göre (i) nin sağlanması için gerek ve yeter şart $B = 0$ olmasıdır. Aşağıda teoremde listelenen diğer otuz iki şartın her birinin $B = 0$ a denk olduğunu gösterelim. Öncelikle $PQ = (PQ)^2$ şartının $A = A^2$ ve $B = AB$ şeklinde ifade edilebileceğini ve bunun da Lemma 3.3.31(i) ye göre $BB^* = 0$ yani $B = 0$ a denk olduğunu görürüz. Şimdi de (iii) şartının $A^2 = A^3$, $AB = A^2B$ ve $B^*B = B^*AB$ ye denk olduğunu belirtelim. A hermityen olduğundan $A^2 = A^3$ ise $A = A^2$ ve Lemma 3.3.1(i) ye göre $B = 0$ elde edilir. Bunun tersi ise aşikardır. Buna karşılık olarak (iv) ve (i) in denkliği (iii) de P ile $\bar{P}$ nin yer değiştirmesiyle elde edilebilir. Bu nedenle (iv) ifadesi $Q\bar{P} = \bar{P}Q$ yani $PQ = QP$ ye denk olacaktır. (v) in ispatı da Lemma 3.3.1(i) nin kullanılmasıyla direkt olarak görülebilir. Öte yandan $P_{\Re(P) \cap \Re(Q)}$ için Lemma 3.5.(i) de verilen formülü kullanarak $PQ = P_{\Re(P) \cap \Re(Q)}$ olması için gerek ve yeter şart $B = 0$ ve $Q_{\bar{A}} = A$ olmasıdır ki bu şartlardan sonuncusu $P_{\bar{A}} = \bar{A}$ olması anlamına gelir. Bununla beraber Lemma 3.3.1(i) ye göre bu iki şartın korunması $\bar{A}$ nin idempotentliğini sağlar ve $\bar{A}$ hermityen olduğundan $\bar{A} = \bar{A}^{+}$ olur ki bu da $B = 0$ ise $Q_{\bar{A}} = A$ olduğu anlamına gelir. (vii) nin ispatı için

$$PP_{\Re(P)\cap\Re(Q)}Q = P_{\Re(P)\cap\Re(Q)}Q = U\begin{pmatrix} Q_{\bar{A}}A & Q_{\bar{A}}B \\ 0 & 0 \end{pmatrix}U^{*}$$

olduğunu belirtelim. Böylece (vii) şartı $Q_{\bar{A}}A = A$ ve $Q_{\bar{A}}B = B$ şeklinde ifade edilebilir. Bu şartlardan ilki $Q_{\bar{A}}(I - \bar{A}) = I - \bar{A}$ olarak yazılabilir ve bu nedenle $P_{\bar{A}} = \bar{A}$ elde edilir. $\bar{A}$ hermityen olduğundan denkliğin devamı $P_{\bar{A}} = \bar{A} \Leftrightarrow \bar{A} = \bar{A}^2 \Leftrightarrow A = A^2 \Leftrightarrow B = 0$ olması demektir. Ayrıca eğer Lemma 3.3.3(ii) $P_{\Re(P)}$ ve $P_{\mathcal{N}(P)+\mathcal{N}(Q)}$ matrislerine uygulanırsa bu durumda

$$P_{\Re(P)\cap[\mathcal{N}(P)+\mathcal{N}(Q)]} = U\begin{pmatrix} P_{\bar{A}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}U^{*} \tag{3.3.8}$$

elde edilir. Öte yandan

$$P\bar{Q} = U\begin{pmatrix} \bar{A} & -B \\ 0 & 0 \end{pmatrix}U^{*} \tag{3.3.9}$$

olduğundan Lemma 3.3.1(i) ye göre (viii) şartının $B = 0$ şartına denk olacağı görülür. (ix) şartının (i) şartına denkliği de benzer şekilde gösterilebilir. Bunun için Lemma 3.3.5(ii) şıkkında $P_{\Re(P)\cap\mathcal{N}(Q)}$ için verilen formülü kullanmak yeterlidir. Bu durumda $P_{\mathcal{N}(Q)} = \bar{Q}$ olduğundan Lemma 3.3.1(vi) ya göre

$$P_{[\Re(P)+\Re(Q)]\cap\mathcal{N}(Q)} = U\begin{pmatrix} \bar{A} & -B \\ -B^{*} & P_D - D \end{pmatrix}U^{*} \tag{3.3.10}$$

elde edilir. Buradan (x) un sağlanması için gerek ve yeter şartın $B = 0$ ve $P_D = D$ olması olduğu görülür. Bununla beraber Lemma 3.3.1(iii) ye göre bu eşitliklerden birincisi D nin olması demektir. Oysa D matrisi hermityen olduğundan $B = 0$ ise $P_D = D$ olacaktır. Bu durumla birlikte teoremin ispatının geleceğinde (3.3.2), (3.3.3) ve Lemma 3.3.4 (i) şıkkı dikkate alınarak

$$P + Q - PQ = P_{[\Re(P)+\Re(Q)]} \Leftrightarrow U\begin{pmatrix} I & 0 \\ B^{*} & D \end{pmatrix}U^{*} = U\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & P_D \end{pmatrix}U^{*}$$

elde edilir. Buradan (xi) $\Leftrightarrow$((i) denkliğinin sağlanması için gerek ve yeter şart $B = 0$ ve $P_D = D$ olmasıdır ki bu da $B = 0$ olması demektir. Bu durumda (3.3.2), (3.3.3) ve Lemma 3.3.5(i) şıkkından

$$Q_{\Re(P)\cap\Re(Q)}P = U\begin{pmatrix} P_{\bar{A}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}U^{*} \text{ ve } Q_{\Re(P)\cap\Re(Q)}Q = U\begin{pmatrix} P_{\bar{A}}A & P_{\bar{A}}B \\ 0 & 0 \end{pmatrix}U^{*}$$

eşitlikleri yazılabilir. Bu nedenle bu matrislerin sütun uzaylarının ortogonal olması için gerek ve yeter şart $P_{\bar{A}}A = 0$ ve $P_{\bar{A}}B = 0$ olmasıdır. Bu şartlardan ilki $P_{\bar{A}} = \bar{A}$ olarak da yazılabilir. Ayrıca Lemma 3.3.1(v) şıkkına göre ikincisi ise $B = 0$ olması demektir. Böylece iddia sağlanmış olur. Lemma 3.3.1 (v) dikkate alınarak Lemma 3.3.3 (ii) $P_{\Re(Q)}$ ve $P_{\mathcal{N}(P)+\mathcal{N}(Q)}$ matrislerine uygulanırsa

$$P_{\Re(P)\cap[\mathcal{N}(P)+\mathcal{N}(Q)]} = U\begin{pmatrix} P_{\bar{A}} - \bar{A} & B \\ B^* & D \end{pmatrix}U^* \tag{3.3.11}$$

elde edilir. Buradan kolayca görülebilir ki Lemma 3.3.1(v) e göre (3.3.8) ve (3.3.11) in sıfıra eşit olması için gerek ve yeter şart $B = 0$ olmasıdır. Benzer şekilde (3.3.8) ve Q nun ortogonal olması için gerek ve yeter şart (i) nin sağlanmasıdır. Öte yandan (xv) şartı $QPQ = PQ$ olarak ifade edilebilir. Bunun sağlanması için gerek ve yeter şart P ve Q nun komutatif olmasıdır. Sonuç olarak (xvi) şartı $P_{\Re(P)\cap\Re(Q)}PQ = PQ$ olarak da yazılabilir. Böylece (xvi) şartının sağlanması için gerek ve yeter şart $Q_{\bar{A}}A = A$ ve $Q_{\bar{A}}B = B$ olmasıdır. Bunun sunucu olarak (xvi) ve (i) şartlarının denkliği elde edilmiş olur. Bu durumda Lemma 3.3.1(i) ve (iv) şıkları kullanılarak direkt bir hesaplamayla PQ çarpımının Moore-Penrose invesinin

$$(PQ)^+ = U\begin{pmatrix} P_A & 0 \\ B^*A^+ & 0 \end{pmatrix}U^* \tag{3.3.12}$$

olduğu görülebilir. Bu nedenle

$$P_{\Re(PQ)} = U\begin{pmatrix} P_A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}U^* \tag{3.3.13}$$

elde edilir. Bu izdüşüm $P_{\Re(P)\cap\Re(Q)}$ ile karşılaştırılırsa (xvii) şartının sağlanması için gerek ve yeter şart $P_A = Q_{\bar{A}}$ veya buna denk olarak $\Re(A) = \mathcal{N}(\bar{A})$ olacağı görülür. Bu şart ise $A = A^2$ ye yani $B = 0$ şartına denk olacaktır. (xiii) ve (xix) şartları $\Re(\bar{Q}P)$ sütun uzayında içerilir. Dolayısıyla $\bar{Q}P = U\begin{pmatrix} \bar{A} & 0 \\ -B^* & 0 \end{pmatrix}U^*$ olduğundan Lemma 3.3.1 (i) ve (v) ifadeleri kullanılarak direkt bir hesaplamayla

$$(\bar{Q}P)^+ = U\begin{pmatrix} P_{\bar{A}} & -\bar{A}^+B \\ -B^* & 0 \end{pmatrix}U^*$$

olacağından

$$P_{\Re(\bar{Q}P)} = U\begin{pmatrix} \bar{A} & -B \\ -B^* & B^*\bar{A}^+B \end{pmatrix}U^* \tag{3.3.14}$$

elde edilir. Buradan (3.3.14) eşitliğindeki izdüşüm $P_{\mathfrak{R}(P)\cap[\mathcal{N}(P)+\,\mathcal{N}(Q)]}$ ve $P_{\mathfrak{R}(P)\cap\mathcal{N}(Q)}$ izdüşümleriyle karşılaştırılarak istenilen sonuç elde edilir. Öte yandan

$$P_{[\mathfrak{R}(P)\cap\mathfrak{R}(Q)]\oplus[\mathfrak{R}(P)+\mathfrak{R}(Q)]\cap\mathcal{N}(Q)} = U\begin{pmatrix} Q_{\bar{A}}+\bar{A} & -B \\ -B^* & P_D - D \end{pmatrix}U^*, \tag{3.3.15}$$

$$P_{[\mathfrak{R}(P)\cap\mathfrak{R}(Q)]\oplus\mathfrak{R}(\bar{Q}P)} = U\begin{pmatrix} Q_{\bar{A}}+\bar{A} & -B \\ -B^* & B^*\bar{A}^+B \end{pmatrix}U^* \tag{3.3.16}$$

olduğu Lemma 3.3.3(i), Lemma 3.3.1(v) ve yukarıdaki eşitliklerden gösterilebilir. Böylece (xxii) ⟺ (i) ve (xxiii) ⟺ (i) durumlarının denklikleri $P_{\mathfrak{R}(P)} = P$ olmak üzere (3.3.15) ve (3.3.16) eşitliklerinin karşılaştırılmasıyla kolayca gösterilebilir. Ayrıca $\mathfrak{R}(Q) \oplus [\mathfrak{R}(P)\cap\mathcal{N}(Q)]$ sütun uzayının içerildiği şartın gösterilmesi için Lemma 3.3.1(iv) şıkkına göre $P_{\mathfrak{R}(Q)\oplus[\mathfrak{R}(P)\cap\mathcal{N}(Q)]} = U\begin{pmatrix} Q_A + A & B \\ B^* & D \end{pmatrix}U^*$ yazılabileceğini belirtmiş olalım. Bu nedenle bu izdüşüm $P_{\mathfrak{R}(P)+\mathfrak{R}(Q)}$ ile karşılaştırılırsa Lemma 3.3.4(i) ye göre (xxiv) in sağlanması için gerek ve yeter şart $B = 0$ olacaktır. Öte yandan (xxv) in ispatı ise Lemma 3.3.5(i) nin son kısmı ile Lemma 3.3.6(i) nin karşılaştırılmasıyla kolayca görülebilir. Ayrıca (xxvi)-(xxxiii) şartlarının her birinin (i) ile denkliği ise Lemma 3.3.1(viii), Lemma 3.3.5(i) ve (ii), Lemma 3.3.6(i),(iii),(iv) ve yukarıdaki eşitliklerde $r(P) = r$ gerçeği dikkate alınmak suretiyle gösterilebilir. Bunun sonucu olarak teoremin ispat tamamlanmış olur.

Ortogonal izdüşüm çiftlerinin komutatifliği hakkında daha pek çok karakterizaszyon verilebilir. Aşağıdaki iki teoremde rank ve sütun uzayları cinsinden $P, Q \in \mathbb{C}_n^{OP}$ ortogonal izdüşümleri için $PQ = QP$ olnası ile ilgili bazı denk şartlar verilmiştir.

Teorem 3.3.2 $P, Q \in \mathbb{C}_n^{OP}$ ortogonal izdüşümleri verilmiş olsun. Bu takdirde aşağıdaki şartlar birbirine denktir:

(i) $PQ = QP$,

(ii) $r(I - PQ) + r(PQ) = n$,

(iii) $r(P\bar{Q}) = r(P) - r(PQ)$,

(iv) $r(P - Q) = r(P + Q) - r(PQ)$,

(v) $r(PQ + QP) = r(PQ)$.

İspat. Teoremin ispatı Lemma 3.3.6 dan kolayca görülebilir.

Teorem 3.3.3 $P, Q \in \mathbb{C}_n^{OP}$ ortogonal izdüşümleri verilmiş olsun. Bu takdirde aşağıdaki şartlar birbirine denktir:

(i) $PQ = QP$,

(ii) $\Re(PQ) \cap \Re(P - Q) = \{0\}$,

(iii) $\Re(PQ) \subseteq \Re(QP)$,

(iv) $\mathcal{N}(PQ) \subseteq \mathcal{N}(QP)$,

(v) $[\Re(P) + \mathcal{N}(Q)] \cap \Re(Q) = \Re(P) \cap [\mathcal{N}(P) + \Re(Q)]$,

(vi) $\Re(P\bar{Q})$ ve $\Re(Q\bar{P})$ uzayları ortogonaldir.

İspat. Teoremin ispatı için (i)-(vi) şartlarının her birinin $B = 0$ a denk olduğunu göstermek yeterlidir. Öncelikle Lemma 3.3.1 in (i), (v), (vi) şıkları kullanılarak ve yukarıda verilen $P_D = B^*\bar{A}^+B + D$ eşitliği dikkate alınırsa

$$P - Q = U\begin{pmatrix} \bar{A} & -B \\ -B^* & -D \end{pmatrix}U^*$$

matrisinin Moore-Penrose invesinin

$$(P - Q)^+ = U\begin{pmatrix} P_{\bar{A}} & -\bar{A}^+B \\ -B^*\bar{A}^+ & -P_D \end{pmatrix}U^*$$

formunda olacağı kolayca görülebilir. Bu nedenle

$$P_{\Re(P-Q)} = U\begin{pmatrix} P_{\bar{A}} & 0 \\ 0 & P_D \end{pmatrix}U^* \qquad (3.317)$$

olacaktır. Bu durumda Lemma 3.3.3(ii) ifadesi bu eşitliğe uygulanarak gerekli düzenlemeler yapıldıktan sonra

$$P_{\Re(PQ)\cap\Re(P-Q)} = U\begin{pmatrix} P_B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}U^*$$

eşitliği yazılabilir. Böylece (i) ve (ii) şıklarının denkliği gösterilmiş olur. Bundan sonraki iki şartın ispatı ise (iii) şartının $QP(QP)^+PQ = PQ$ eşitliğine denk iken (iv) şartının $QP(PQ)^+PQ = QP$ eşitliğine denk olduğu gerçeğine dayanmaktadır. Bu nedenle söz konusu iddialar Lemma 3.3.1(i) ve (iv) şıkları dikkate alarak (3.3.1), (3.3.3) ve (3.3.17) eşitliklerinden direkt olarak gösterilebilir. Öte yandan Lemma 3.3.4 (ii) ve (iii) şıkları ve Lemma 3.3.3(ii) şıkkı dikkate alınırsa

$$P_{[\Re(P)+\mathcal{N}(Q)]\cap\Re(Q)} = U\begin{pmatrix} A & B \\ -B^* & -P_{\bar{D}} - \bar{D} \end{pmatrix}U^*$$

ve

$$P_{\Re(P)\cap[\mathcal{N}(P)+\Re(Q)]} = U\begin{pmatrix} P_A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}U^*$$

eşitlikleri yazılabilir. Bu ise (v) ⟺ (i) olduğunu gösterir. Ayrıca (vi) ⟺ (i) denkliği direkt hesaplamalarla gösterilebilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

$P, Q \in \mathbb{C}_n^{OP}$ ortogonal izdüşümlerinin komutatifliği ilgili birçok gerek ve yeter şart özdeğerler yardımıyla da verilebilir. Örneğin PQ çarpımının bütün özdeğerlerinin $[0,1]$ aralığında kaldığı bilinmektedir. Bununla beraber $P, Q \in \mathbb{C}_n^{OP}$ ortogonal izdüşümlerinin komutatif olması için gerek ve yeter şart PQ çarpımının hiçbir özdeğerinin $(0,1)$ aralığına düşmemesidir.

3.4 Ortogonal İzdüşümler İçin Çeşitli Rank Formülleri

Bu kısımda, ortogonal izdüşümlerden oluşan matris ifadeleri bazı yeni rank eşitlikleri verilecektir. Bir $A \in \mathbb{C}^{mxm}$ matrisi hem idempotent hem de hermityen ise, yani $A^2 = A = A^*$ ise bu durumda A matrisine bir ortogonal izdüşüm matrisi denildiğini hatırlatalım. Tanımından kolayca görülebilir ki AA^+ çarpımı $\Re(A)$ üzerine ortogonal izdüşüm olup $\Re(A) = \Re(AA^+)$ eşitliği sağlanır ve $P = AA^+$ ile gösterilir. Bu durumda $\bar{P} = I_m - AA^+$ matrisi $\mathcal{N}(P) = \mathcal{N}(A^*)$ üzerine ortogonal izdüşüm olup P matrisnin tamamlayıcı izdüşümü olarak adlandırılır. Bu durumda $\mathbb{C}^n = \Re(A)\oplus^{\perp}\mathcal{N}(A^*)$ dir, burada $\oplus^{\perp}$ sembolü direkt toplamdaki iki alt uzayın ortogonal olduğunu ifade etmektedir. Aynı sayıda satıra sahip F ve G matrisleri ve bunlarla ilgili $P = FF^+$ ve $Q = GG^+$ ortogonal izdüşümleriyle ilgili daha önceki kısımlarda verilenlere ilaveten bazı rank formülleri literatürde mevcuttur. $(F{:}\,G)$ sütun parçalı matris olmak üzere

$$r(F^*G) = r(F) + r(G) - r(F{:}\,G) + r(F^*\bar{Q}\bar{P}G)$$

veya

$$r(F{:}\,G) = r(F) + r(\bar{P}G) = r(G) + r(\bar{Q}F)$$

dir. Şimdi ileride kullanacağımız bazı yararlı hazırlayıcı sonuçları ifade edebiliriz. $P, Q \in \mathbb{C}_n^{OP}$ ortogonal izdüşümü için $r(P) = r$ olsun. Bu durumda daha önce ifade edildiği gibi

$$P = U\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}U^*$$

olacak şeklide bir $U \in \mathbb{C}^{nxn}$ üniter matrisinin varlığını belirtelim. Q matrisi aynı mertebeden başka bir ortogonal izdüşüm olsun. Bu durumda yukarıdaki eşitlik dikkate alınarak $A \in \mathbb{C}^{rxr}$ ve $D \in \mathbb{C}^{(n-r)(n-r)}$ hermityen olmak üzere

$$Q = U\begin{pmatrix} A & \mathrm{B} \\ B^* & D \end{pmatrix}U^* \tag{*}$$

yazılabileceğini söyleyebiliriz. Bu gösterimin iki özel versiyonu $r = 0$ olması ki bu durumda A ve B yok olur ve $r = n$ olması ki bu durumda D ve B yok olur. Aşağıdaki Lemmalar ileri kısımlarda kullanılacaktır. İspatlarını burada vermeyeceğiz, ancak kaynaklarımızda ispatlar mevcuttur.

Lemma 3.4.1$Q \in \mathbb{C}_n^{OP}$ ortogonal izdüşümü (*) daki gibi parçalanmış olsun. Bu takdirde aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

(i) $A = A^2 + BB^*,$ veya buna denk olarak $A\bar{A} = BB^*,$

(ii) $B = AB + BD$, veya buna denk olarak $B^* = B^*A + DB^*,$

(iii) $D = D^2 + B^*B,$ veya buna denk olarak $D\overline{D} = B^*B.$

Lemma 3.4.2$Q \in \mathbb{C}_n^{OP}$ ortogonal izdüşümü (*) daki gibi parçalanmış olsun. Bu takdirde aşağıdaki özellikler sağlanır.

(i) $\Re(B) \subseteq \Re(A),$ (ii) $\Re(B) \subseteq \Re(\bar{A}),$ (iii) $\Re(B^*) \subseteq \Re(D),$

(iv) $\Re(B^*) \subseteq \Re(\overline{D}),$ (v) $\Re(B^*) \subseteq \Re(\overline{D}),$ (vi) $A^+B = B\overline{D}^+.$

Lemma 3.4.3$Q \in \mathbb{C}_n^{OP}$ ortogonal izdüşümü (*) daki gibi parçalanmış olsun. Bu takdirde aşağıdaki eşitlikler sağlanır: $\tilde{P}_A = I - P_A$

(i) $A - BD^+B^* = \tilde{P}_{\bar{A}},$ (ii) $\bar{A} + BD^+B^* = P_{\bar{A}},$ (iii) $D - B^*A^+B = \tilde{P}_{\overline{D}},$

(iv) $\overline{D} + B^*A^+B = P_{\overline{D}},$ (v) $D + B^*\bar{A}^+B = P_D,$ (vi) $\overline{D} - B^*\bar{A}^+B = \tilde{P}_D,$

(vi) $A + B\overline{D}^+B^* = P_A,$ (viii) $\bar{A} - B\overline{D}^+B^* = \tilde{P}_A.$

Lemma 3.4.4$Q \in \mathbb{C}_n^{OP}$ ortogonal izdüşümü (*) daki gibi parçalanmış olsun. Bu takdirde aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

(i) $r(\bar{A}) = r - r(A) + r(B),$

(ii) $r(\overline{D}) = n - r + r(B) - r(D).$

Lemma 3.4.5 $P, Q \in \mathbb{C}_n^{OP}$ ortogonal izdüşümler ve Q da (*) daki gibi parçalanmış olsun. Bu takdirde aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

(i) $r(Q) = r(A) - r(B) + r(D)$, (ii) $r(PQ) = r(A)$, (iii) $r(P\bar{Q}) = r(\bar{A})$,

(iv) $r(I - PQ) = n - r(A) + r(B)$, (v) $r(\bar{P}\bar{Q}) = r(\bar{D})$, (vi) $r(\bar{P}Q) = r(D)$,

(vii) $r(I - PQ) = n - r(A) + r(B)$, (viii) $r(P + Q) = r + r(D)$,

(ix) $r(P - Q) = r(\bar{A}) + r(D)$, (x) $r(PQ + QP) = r(A) + r(B)$,

(xi) $r(PQ - QP) = 2r(B)$, (xii) $r(P + Q - PQ) = r + r(D)$,

(xiii) $r(I - P - Q) = r(A) + r(\bar{D})$.

Lemma 3.4.6 $P, Q \in \mathbb{C}_n^{OP}$ olsun. Bu takdirde aşağıdakiler sağlanır:

(i) $P + \bar{P}(\bar{P}Q)^{+}$ matrisi $\Re(P) + \Re(Q)$ üzerinde ortogonal izdüşümdür.

(ii) $P + P(P\bar{Q})^{+}$ matrisi $\Re(P) \cap \Re(Q)$ üzerinde ortogonal izdüşümdür.

Lemma 3.4.7 $P, Q \in \mathbb{C}_n^{OP}$ ortogonal izdüşümler ve Q da (*) daki gibi parçalanmış olsun. Bu takdirde aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

(i) $P_{\Re(P)+\Re(Q)} = U\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & P_D \end{pmatrix}U^*$, $dim[\Re(P) + \Re(Q)] = r + r(D)$,

(ii) $P_{\Re(P)+\mathcal{N}(Q)} = U\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & P_{\bar{D}} \end{pmatrix}U^*$, $dim[\Re(P) + \mathcal{N}(Q)] = r + r(B) - r(D)$,

(iii) $P_{\mathcal{N}(P)+\Re(Q)} = U\begin{pmatrix} P_A & 0 \\ 0 & I_{\mathrm{n-r}} \end{pmatrix}U^*$, $dim[\mathcal{N}(P) + \Re(Q)] = n - r + r(A)$,

(iv) $P_{\mathcal{N}(P)+\mathcal{N}(Q)} = U\begin{pmatrix} P_{\bar{A}} & 0 \\ 0 & I_{\mathrm{n-r}} \end{pmatrix}U^*$, $dim[\mathcal{N}(P) + \mathcal{N}(Q)] = n - r(A) + r(B)$.

Lemma 3.4.8 $P, Q \in \mathbb{C}_n^{OP}$ ortogonal izdüşümler ve Q da (*) daki gibi parçalanmış olsun. Bu takdirde aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

(i) $P_{\Re(P)\cap\Re(Q)} = U\begin{pmatrix} \tilde{P}_{\bar{A}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}U^*$, $dim[\Re(P)\cap\Re(Q)] = r(A) - r(B)$,

(ii) $P_{\Re(P)\cap\mathcal{N}(Q)} = U\begin{pmatrix} \tilde{P}_A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}U^*$, $dim[\Re(P)\cap\mathcal{N}(Q)] = r - r(A)$,

(iii) $P_{\mathcal{N}(P)\cap\Re(Q)} = U\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tilde{P}_{\bar{D}} \end{pmatrix}U^*$, $dim[\mathcal{N}(P)\cap\Re(Q)] = r(D) - r(B)$,

(iv) $P_{\mathcal{N}(P)\cap\mathcal{N}(Q)} = U\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tilde{P}_{\mathrm{D}} \end{pmatrix}U^*$, $dim[\mathcal{N}(P)\cap\mathcal{N}(Q)] = n - r - r(D)$.

Lemma 3.4.9 $P, Q \in \mathbb{C}_n^{OP}$ ortogonal izdüşümler ve Q da (*) daki gibi parçalanmış olsun. Bu takdirde aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

(i) $P_{\Re(PQ)} = U\begin{pmatrix} P_A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^*,$ (ii) $P_{\Re(QP)} = U\begin{pmatrix} A & \mathrm{B} \\ B^* & P_{\bar{D}} - \bar{D} \end{pmatrix} U^*,$

(iii) $P_{\Re(\bar{P}\bar{Q})} = U\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & P_{\bar{D}} \end{pmatrix} U^*,$ (iv) $P_{\Re(I-P-Q)} = U\begin{pmatrix} P_A & 0 \\ 0 & P_{\bar{D}} \end{pmatrix} U^*,$

(v) $P_{\Re(P)\cap[\mathcal{N}(P)+\Re(Q)]} = U\begin{pmatrix} P_A & 0 \\ 0 & \tilde{P}_{\bar{D}} \end{pmatrix} U^*,$ (vi) $P_{\Re(P+Q)} = U\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & P_D \end{pmatrix} U^*,$

(vii) $P_{\Re(Q)\oplus^{\perp}[\Re(P)\cap\mathcal{N}(Q)]} = U\begin{pmatrix} A + \tilde{P}_A & \mathrm{B} \\ B^* & D \end{pmatrix} U^*,$

(viii) $P_{\Re(p+Q-PQ)} = U\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & P_D \end{pmatrix} U^*,$

(ix) $P_{[\Re(P)\cap\mathcal{N}(Q)]\oplus^{\perp}[\mathcal{N}(P)\cap\Re(Q)]} = U\begin{pmatrix} \tilde{P}_{\mathrm{A}} & 0 \\ 0 & \tilde{P}_{\mathrm{D}} \end{pmatrix},$

(x) $P_{[\Re(P)+\mathcal{N}(Q)]\cap[\mathcal{N}(P)+\Re(Q)]\cap[\mathcal{N}(P)+\mathcal{N}(Q)]} = U\begin{pmatrix} P_{\mathrm{B}} & 0 \\ 0 & \tilde{P}_{\mathrm{D}} \end{pmatrix} U^*.$

Lemma 3.4.10 $P, Q \in \mathbb{C}_n^{OP}$ ortogonal izdüşümler ve Q da (*) daki gibi parçalanmış olsun. Bu takdirde aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

(i) $\Re(P)\cap\Re(Q) = \{0\} \Leftrightarrow r(A) = r(B),$

(ii) $\Re(P) + \Re(Q) = \mathbb{C}^{nx1} \Leftrightarrow r(D) = n - r,$

(iii) $\Re(P) \perp \Re(Q) \Leftrightarrow r(A) = 0,$

(iv) $\Re(P) \oplus \Re(Q) = \mathbb{C}^{nx1} \Leftrightarrow r(A) = r(B),\ r(D) = n - r,$

(v) $\Re(P) \oplus^{\perp} \Re(Q) = \mathbb{C}^{nx1} \Leftrightarrow r(A) = 0,\ r(D) = n - r.$

$P, Q \in \mathbb{C}_n^{OP}$ ortogonal izdüşümleri için $PQ = 0 \Leftrightarrow P + Q \in \mathbb{C}_n^{OP}$ olduğu bilinmektedir. Temel teoremlerimizi vermeden önce Schur komplementi üzerinde rank toplamsallığı özelliğini de verelim. $L \in \mathbb{C}^{nxn}$ matrisi $M \in \mathbb{C}^{rxr}$, $S \in \mathbb{C}^{(n-r)x(n-r)}$, $\Re(N) \subseteq \Re(M)$ ve $\Re(R^*) \subseteq \Re(M^*)$ olmak üzere $L = \begin{pmatrix} M & \mathrm{N} \\ R & S \end{pmatrix}$ şeklinde yazılsın. Bu durumda $r(L) = r(M) + r(RM^+N)$ eşitliği sağlanır. Aşağıdaki teorem iki matrisin çarpımının rankı ile ilgili önemli bir gösterim verir.

Teorem 3.4.1 $F \in \mathbb{C}^{nxm}$ ve $F \in \mathbb{C}^{nxl}$matrisleri verilsin ve $P = P_F$ ve $P = P_G$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki rank eşitliği sağlanır:

$$r(F^*G) = r(F^*Q) = r(PG) = r(PQ) \tag{3.4.1}$$

İspat. Rank ve Moore-Penrose invesin özellikleri dikkate alınırsa

$$r(F^*G) = r(F^*GG^+G) \leq r(F^*Q) \leq r(F^*G) = r(G^*F)$$

$$= r(G^*FF^+F) \leq r(G^*P) = r(PG) \leq r(G^*F) = r(F^*G)$$

elde edilir ki bu (3.4.1) deki ilk iki eşitliğin sağlandığını gösterir. Ayrıca

$$r(F^*G) = r((FF^+F)^*GG^+G) = r(F^*FF^+GG^+G) \leq r(PQ)$$

$$= r((FF^+)^*GG^+) \leq r(F^*G)$$

elde edilir ki bu ise (3.4.1) deki üçüncü eşitliğin de sağlandığını gösterir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

(3.4.1) de kolayca görülebilir ki $r(F^*F) = r(F^*) = r(F)$ elde edilir ki bu matris rankının en iyi bilinen özelliklerinden biridir. Öte yandan iki matrisin çarpımının rankı için bilinen formüllerden kolayca gösterilebilir ki

$$r(F^*G) = r(G) - dim[\mathcal{N}(F^*) \cap \Re(G)] \tag{3.4.2}$$

eşitliği sağlanır.

Teorem 3.4.2 $F \in \mathbb{C}^{nxm}$ ve $F \in \mathbb{C}^{nxl}$matrisleri verilsin. Bu takdirde aşağıdaki rank eşitliği sağlanır:

$$r(F^*G) = r(F) + r(G) - dim\big[\Re(G) \oplus^{\perp} [\Re(F) \cap \mathcal{N}(G^*)]\big] \tag{3.4.3}$$

İspat. $P = P_F$ ve $Q = P_G$ alınırsa (3.4.3) eşitliği

$$r(PQ) = r(P) + r(Q) - dim\big[\Re(Q) \oplus^{\perp} [\Re(P) \cap \mathcal{N}(Q)]\big] \tag{3.4.4}$$

olarak yazılabilir. Bu durumda

$$dim\big[\Re(Q) \oplus^{\perp} [\Re(P) \cap \mathcal{N}(Q)]\big] = r(D) + r\big(A + \tilde{P}_A - BD^+B^*\big)$$

$$= r(D) + r\big(\tilde{P}_A + \tilde{P}_{\bar{A}}\big) \tag{3.4.5}$$

yazılabilir, burada $\tilde{P}_A = I - P_A$ dir. Öte yandan $(BB^*)^+ = A^+\bar{A}^+$ olduğundan $BB^+ = BB^*(BB^*)^+ = A\bar{A}A^+\bar{A}^+$ olduğu görülür. Sonuç olarak $\bar{A}$ ve A^+ nın komutatifliği $P_B = \bar{P}_A P_A$ olacağını gösterir. Ayrıca $\Re(P_A + \bar{P}_A - P_A\bar{P}_A) = \Re(P_A) + \Re(\bar{P}_A)$ yazılabilir. Böylece bu eşitlik $\Re(P_A) = \Re(A)$, $\Re(\bar{P}_A) = \Re(\bar{A})$ ve $\Re(A) + \Re(\bar{A}) = \mathbb{C}^{rx1}$ ile birleştirilirse $P_A + \bar{P}_A - P_A\bar{P}_A = I$ veya buna denk olarak

$$P_A + \bar{P}_A = I + P_B \tag{3.4.6}$$

olduğu görülür. Bu nedenle (3.4.5) den

$$dim\big[\Re(Q)\oplus^{\perp}[\Re(P)\cap\mathcal{N}(Q)]\big] = r - r(B) + r(D) \quad (3.4.7)$$

elde edilir. Bunun sonucu olarak (3.4.4.) ün gerçekten sağlandığı gösterilmiş olur. Bu da teoremin ispatını tamamlar.

Öte yandan (3.4.3) eşitliğinden kolayca gösterilebilir ki

$$r(F) + r(G) \leq n + r(F^*G) \quad (3.4.8)$$

dir. Bu eşitsizliğe Sylvester eşitsizliği adı verilir. Bu durumda kolayca sağlanabilir ki $r(F) + r(G) - r(F^*G) = n$ eşitliğinin sağlanması aşağıdaki ifadelerin her birine denktir:

(i) $\Re(G)\oplus^{\perp}[\Re(F)\cap\mathcal{N}(G^*)] = \mathbb{C}^{nx1}$,

(ii) $\mathcal{N}(F^*) \subseteq \Re(G)$,

(iii) $\bar{P}\bar{Q} = 0$,

(iv) $PQ = P + Q - I$,

burada, $P = P_F$ ve $Q = P_G$ dir. Öte yandan eğer F ve G matrisleri $F^*G = 0$ olacak şekilde verilirse bu takdirde $r(F) + r(G) = n$ olması için gerek ve yeter şart $\mathcal{N}(F^*) = \Re(G)$ olmasıdır. Ayrıca $r(F) + r(G) = r(F^*G)$ olması için gerek ve yeter şart $F = 0$ ve $G = 0$ olmasıdır. Öte yandan $P, Q \in \mathbb{C}_n^{OP}$ matrisleri için

$$r(PQ) = dim[\Re(P)\cap\Re(Q)] \Leftrightarrow PQ = QP$$

olduğu bilinmektedir. Aşağıdaki teorem bu sonucun bir genelleştirmesidir.

Teorem 3.4.3 $F \in \mathbb{C}^{nxm}$ ve $F \in \mathbb{C}^{nxl}$matrisleri verilsin. $P = P_F$ ve $Q = P_G$ olmak üzere aşağıdaki eşitlik sağlanır:

$$r(F^*G) = \frac{1}{2}r(PQ - QP) + dim[\Re(P)\cap\Re(Q)].$$

İspat. (3.4.1) eşitliğinden

$$r(F^*G) = r(A) \quad (3.4.9)$$

yazılabilir. Böylece daha önce verilen Lemmalar dikkate alınarak iddianın doğruluğu gösterilebilir. Bu durumda $r(F^*G) = dim[\Re(P)\cap\Re(Q)]$ olması için gerek ve yeter şart $PQ = QP$ olmasıdır. Dolayısıyla buradan $\frac{1}{2}r(PQ - QP) = r(B)$ olduğu görülür. Buda gösterir ki $r(PQ - QP)$ nin bir tam sayı olması gerekmez. Bu durum $PQ - QP$ nin bir çarpık hermityen matris olmasından kaynaklanmaktadır. Örneğin

$$r(B) = r(P\bar{Q}\bar{P}Q) = r(P_{\Re(\bar{Q}P)}P_{\Re(\bar{P}Q)})$$

eşitliği sağlanır. Ayrıca $r(B)$, $\bar{P}Q$ matrisinin $(0,1)$ ağalığına düşen özdeğerlerinin sayısına eşittir.

Teorem 3.4.4 $P, Q \in \mathbb{C}_n^{OP}$ ortogonal izdüşümleri verilmiş olsun. Bu takdirde aşağıdaki şartlar birbirine denktir:

(i) $PQ = QP$,

(ii) $Q = P_{\Re(PQ)} + P_{\mathcal{N}(P)\cap\Re(Q)}$,

(iii) $P_{\Re(PQ)} = P_{\Re(P)\cap\Re(Q)}$.

Bu teoremin bazı çok önemli sonuçları vardır. Öncelikle $P_{\Re(PQ)} + P_{\mathcal{N}(P)\cap\Re(Q)} = P_{\Re(P)\oplus^{\perp}[\mathcal{N}(P)\cap\Re(Q)]}$ eşitliği yazılabilir. Ayrıca

$$Q = P_{\Re(PQ)} + P_{\mathcal{N}(P)\cap\Re(Q)} \tag{3.4.10}$$

eşitliği daima doğrudur. Bu eşitlikte her iki taraftan iz alınırsa ve bir izdüşümün veya ortogonal izdüşümün izinin rankına eşit olacağı gerçeği göz önünde tutulursa $r(PQ) = r(Q) - dim\,[\mathcal{N}(P)\cap\Re(Q)]$ elde edilir ki bu da (3.4.2) nin bir alternatif gösterimidir. Ayrıca $P_{\Re(PQ)} + P_{\Re(\bar{P}\bar{Q})} = P_{\Re(I-P-Q)}$ eşitli de yazılabilir.

Teorem 3.4.5 $F \in \mathbb{C}^{nxm}$ ve $G \in \mathbb{C}^{nxl}$matrisleri verilsin. $P = P_F$ ve $Q = P_G$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

(i) $r(F^*G) = r(I - P - Q) - r(\bar{P}\bar{Q})$, (3.4.11)

(ii) $r(F^*G) = r(PQ + QP) - \frac{1}{2}r(PQ - QP)$, (3.4.12)

(iii) $r(F^*G) = n - r(P\bar{Q}) - r(\bar{P}Q) - r(\bar{P}\bar{Q}) + r(PQ - QP)$, (3.4.13)

(iv) $r(F^*G) = r(F) + r(G) + r(\bar{P}\bar{Q}) - n$. (3.4.14)

İspat. (3.4.11)-(3.4.14) ün ispatları (3.4.9) eşitliği ve daha önce verilen Lemmalardan kolaylıkla elde edilir.

Teorem 3.4.5 bazı yorumları içermektedir. (3.4.11) den $F^*G = 0 \Leftrightarrow \Re(G) \subseteq \mathcal{N}(F^*)$ ve $\bar{P}Q = 0 \Leftrightarrow \mathcal{N}(F^*) \subseteq \Re(G)$ yazılabileceğinden $P + Q = I \Leftrightarrow \mathcal{N}(F^*) = \Re(G)$ elde edilir. Diğer bir gözlemimiz (3.4.14) eşitliğinin (3.4.8) de verilen Sylvester eşitsizliğini sağlamasıdır. Ayrıca kolayca gösterilebilir ki (3.4.12) deki aşağıdaki sonuçta listelenen bağıntıları sağlamaktadır.

Sonuç 3.4.1 $F \in \mathbb{C}^{nxm}$ ve $G \in \mathbb{C}^{nxl}$matrisleri verilsin. $P = P_F$ ve $Q = P_G$ olsun. Bu takdirde

$$\frac{1}{2}r(PQ - QP) \leq r(F^*G) \leq r(PQ + QP) \qquad (3.4.15)$$

eşitsizliği sağlanır. Ayrıca $r(PQ - QP) = 2r(F^*G)$ olması için gerek ve yeter şart $\Re(F) \cap \Re(G) = \{0\}$ olmasıdır ve $r(F^*G) = r(PQ + QP)$ olması için gerek ve yeter şart $PQ = QP$ olmasıdır. Böylece (3.4.15) de eşitlik durumunun sağlanması için gerek ve yeter şart $F^*G = 0$ yani $r(F^*G) = 0$ olmasıdır.

Teorem 3.4.6 $F \in \mathbb{C}^{nxm}$ ve $G \in \mathbb{C}^{nxl}$matrisleri verilsin. $P = P_F$ ve $Q = P_G$ olsun. Bu takdirde $F^*G = 0$ olması için gere ve yeter şart $P + Q \leq {}_L I$ olmasıdır, burada $K, L \in \mathbb{C}^{nxn}$ matrisleri için $K \leq {}_L L{:}\Leftrightarrow L - K = MM^*$ olacak şekilde bir $M \in \mathbb{C}^{nxn}$ matrisi mevcuttur.

İspat. Bu durumda $P + Q \leq {}_L I$ şartı $I - P - Q = \bar{Q} - P = LL^*,\ L \in \mathbb{C}^{nxn}$, olmasına denktir. Öte yandan $PQ = 0$ olması $\bar{Q} - P = (\bar{Q} - P)(\bar{Q} - P)^*$ olmasına denk olduğundan gereklilik saplanır. Yeterliliği göstermek için P ve LL^* matrisleri nonnegatif definit olmasından $\Re(P + LL^*) = \Re(P) + \Re(L)$ ve dolayısıyla $\Re(P) \subseteq \Re(P + LL^*) = \Re(\bar{Q})$ olduğu görülür. Sonuçta $\bar{Q}P = 0$ ve dolayısıyla $QP = 0$ elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar.

Aşağıdaki teorem F^*G çarpımının rankı için iki ilave sonuç içermektedir. Bunlardan birincisi (3.4.1) eşitliğinin bir uyarlanmış versiyonu olarak düşünülebilir.

Teorem 3.4.7 $F \in \mathbb{C}^{nxm}$ ve $G \in \mathbb{C}^{nxl}$matrisleri verilsin. $P = P_F$ ve $Q = P_G$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

(i) $$r(F^*G) = r(F) + r(G) - r(F{:}G) + \frac{1}{2}r(PQ - QP), \qquad (3.4.16)$$

(ii) $$r(F^*G) = n - r(I - PQ) + \frac{1}{2}r(PQ - QP). \qquad (3.4.17)$$

İspat. Bu durumda

$$\Re(F{:}G) = \Re[(F{:}G)(F{:}G)^*] = \Re(FF^* + GG^*) = \Re(FF^*) + \Re(GG^*)$$

$$= \Re(F) + \Re(G) = \Re(P) + \Re(Q) = \Re(P + Q)$$

yazılabileceğini belirtelim. Burada iki nonnegatif definit matrisin ranj uzayının toplamsal olduğu gerçeği kullanılmıştır. Bu nedenle

$$r(F{:}\,G) = r + r(D) \tag{3.4.18}$$

yazılabilir. Sonuç olarak daha önce verilen rank eşitlikleri dikkate alınarak (3.4.9) dan (3.4.16) ve (3.4.17) nin sağlandığı görülür. Bu da ispatı tamamlar.

(3.4.17) den elde edilen bir diğer özellik $PQ = QP$ olması için gerek ve yeter şart $r(F^*G) = n - r(I - PQ)$ olmasıdır. Diğer yandan $r(F^*G) = r(F)$ ifadesi $\Re(F^*G) = \Re(F^*)$ ifadesine denk olacaktır. Bu bağlamda,

$$\Re(F) \subseteq \Re(G) \Longrightarrow \Re(F^*G) \subseteq \Re(F^*) \tag{3.4.19}$$

yazılabilir. Bunun sonucu olarak $P = P_F$ ve $Q = P_G$ olmak üzere

$$\Re(F) \subseteq \Re(G) \Leftrightarrow \Re(P) \subseteq \Re(Q) \Leftrightarrow QP = P$$

olduğu görülür. Bu yaklaşıma göre $A = I \Leftrightarrow QP = P$ elde edilir ve buradan da $r(F^*G) = r(F)$ ye denk olan $r(A) = r$ den $A = I$ olmasının daha güçlü bir ifade olduğunu gösterir.

Teorem 3.4.8 $F \in \mathbb{C}^{nxm}$ ve $G \in \mathbb{C}^{nxl}$matrisleri verilsin. $P = P_F$ ve $Q = P_G$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

(i) $r(F^*G) = r(F)$,

(ii) $\Re(F) \cap \mathcal{N}(G^*) = \{0\}$,

(iii) $\Re(F) \subseteq \mathcal{N}(F^*) + \Re(G)$,

(iv) $P = P_{\Re(PQ)}$,

(v) $P = P_{\Re(P) \cap [\mathcal{N}(P) + \Re(Q)]}$.

İspat. $\Re(F) \cap \mathcal{N}(G^*) = \{0\}$ olması için gerek ve yeter şart $r(A) = r$ olduğu dikkate alınırsa (i) ve (ii) nin denk olduğu görülür. Öte yandan (i) ile (iii); (i) ile (iv); ve (i) ile (v) ifadelerinin denk olduğu $P = U\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}U^*$ matrisini sırasıyla Teorem 3.3.3 ün ispatında geçen

$$P_{[\mathcal{N}(P) + \Re(Q)]} = U\begin{pmatrix} P_A & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}U^*,$$

$$P_{\Re(PQ)} = U\begin{pmatrix} P_A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}U^*$$

ve

$$P_{\Re(P)\cap[\mathcal{N}(P)+\Re(Q)]} = U\begin{pmatrix} P_A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}U^*$$

izdüşümlerle karşılaştırarak kolayca görülebilir.

Teorem 3.4.8 (ii) ve (iii) şıklarında verilen şartlar sırasıyla $\mathcal{N}(F^*) + \Re(G) = \mathbb{C}^{nx1}$ ve $\Re(F)\cap\mathcal{N}(G^*) \subseteq \mathcal{N}(F^*)$ olarak da ifade edilebilir. Teorem 3.4.8 in sonucu olarak $r(F^*G) = r(G)$ ye denk şartlar da listelenebilir. Bu eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter şart aşağıdaki bağıntıların gerçekleşmesidir:

(i) $\Re(F^*)\cap\mathcal{N}(G) = \{0\}$,

(ii) $\mathcal{N}(F^*) \subseteq \Re(F) + \mathcal{N}(G^*)$,

(iii) $\bar{P} = P_{\Re(\bar{P}\bar{Q})}$,

(iv) $\bar{P} = P_{\mathcal{N}(P)\cap[\Re(P)+\mathcal{N}(Q)]}$.

Şimdi $(F{:}\,G)$ parçalı matrisinin rankını göz önüne alalım. $F \in \mathbb{C}^{nxm}$ ve $F \in \mathbb{C}^{nxl}$ matrisleri verilsin. Bu takdirde

$$r(F{:}\,G) = r(F) + r(G) - dim[\Re(F)\cap\Re(G)]$$

olduğunu belirtelim. $(F{:}\,G)$ parçalı matrisinin rankı ile ilgili aşağıdaki iki teorem verilebilir.

Teorem 3.4.9 $F \in \mathbb{C}^{nxm}$ ve $G \in \mathbb{C}^{nxl}$matrisleri verilsin. $P = P_F$ ve $Q = P_G$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

(i) $r(F{:}\,G) = r(P - Q) + dim[\Re(F)\cap\Re(G)]$ (3.4.20)

(ii) $r(F{:}\,G) = r(PQ + QP) + dim\big[[\mathcal{N}(F^*)\cap\Re(G)]\oplus^{\perp}[\Re(F)\cap\mathcal{N}(G^*)]\big]$ (3.4.21)

(iii) $r(F{:}\,G) = r(P + Q - PQ)$ (3.4.22)

İspat. Bunun ispatı için $dim\big[[\Re(F)\cap\mathcal{N}(G^*)]\oplus^{\perp}[\mathcal{N}(F^*)\cap\Re(G)]\big]n - r(A) - r(\bar{D})$ olduğu dikkate alınırsa (3.4.20)-(3.4.22) durumlarının sağlandığı (3.4.18) den kolayca gösterilebilir.

Teorem 3.4.10 $F \in \mathbb{C}^{nxm}$ ve $G \in \mathbb{C}^{nxl}$matrisleri verilsin. $P = P_F$ ve $Q = P_G$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki durumlar sağlanır:

(i) $r(F{:}\,G) = n + r(PQ - QP)$ (3.4.23)

$-dim\big[[\Re(F) + \mathcal{N}(G^*)]\cap[\mathcal{N}(F^*) + \Re(G)]\cap[\mathcal{N}(F^*) + \mathcal{N}(G^*)]\big]$

(ii) $r(F{:}\,G) = n - r(\bar{P}\bar{Q}) + \frac{1}{2}r(PQ - QP)$ (3.4.24)

(iii) $r(F:G) \geq r(F) + \frac{1}{2} r(PQ - QP)$ (3.4.25)

İspat. Daha önce verilen Lemmalardan

$$dim\big[[\Re(P) + \mathcal{N}(Q)] \cap [\mathcal{N}(P) + \Re(GQ)] \cap [\mathcal{N}(P) + \mathcal{N}(Q)]\big]$$

$$= n - r + 2r(B) - r(D)$$

olduğu gösterilebilir. Bu nedenledir ki (3.4.23) - (3.4.25) ifadeleri (3.4.18) den kolayca gösterilebilir. Diğer taraftan (3.4.23) ve (3.4.25) ifadelerinden $r(F:G) = n - dim\big[[\Re(F) + \mathcal{N}(G^*)] \cap [\mathcal{N}(F^*) + \Re(G)] \cap [\mathcal{N}(F^*) + \mathcal{N}(G^*)]\big]$ ve $r(F:G) = n - r(\bar{P}\bar{Q})$ eşitliklerinin her biri F ve G nun komutatifliğine denktir. Ayrıca (3.4.25) eşitsizliği $r(F:G)$ için bir alt sınır vermektedir. (3.4.25) deki eşitsizliğin eşitliğe dönüşmesi için gerek ve yeter şart $r(B) = r(D)$ olmasıdır ki bu $\mathcal{N}(F^*) \cap \Re(G) = \{0\}$ olarak da ifade edilebilir. Öte yandan bir diğer gözlem $r(F:G) = \frac{1}{2} r(PQ - QP)$ olması için gerek ve yeter şart $F = 0 = G$ olmasıdır. $r(F^*G) = r(F)$ olması için gerek ve yeter şartların verildiği Teorem 3.4.8 dekine benzer şekilde $r(F:G) = r(F)$ için de sorulabilir. $P - Q \in \mathbb{C}_n^{OP} \Leftrightarrow PQ = Q$ denkliğinden $P = P_F$ ve $Q = P_G$ olmak üzere

$$r(F:G) = r(F) \Leftrightarrow \Re(G) \subseteq \Re(F) \Leftrightarrow P - Q \in \mathbb{C}_n^{OP}$$

olacağı görülür. Yukarıda verilenlerin ışığı altında $(F:G)$ ve F^*G ranklarının hangi şartlarda birbirine eşit olduğunun bilinmesi de oldukça ilginç bir sorudur. Bunun cevabı aşağıdaki teoremde verilebilir.

Teorem 3.4.11 $F \in \mathbb{C}^{nxm}$ ve $G \in \mathbb{C}^{nxl}$ matrisleri verilsin. Bu takdirde $r(F^*G) = r(F:G)$ olması için gerek ve yeter şart $\Re(G) = \Re(F)$ olmasıdır.

İspat. Öncelikle belirtelim ki $r(F^*G) = r(F:G)$ eşitliği $r(A) = r + r(D)$ eşitliğine denktir. Öte yandan $r(A) \leq r$ olduğundan $r(A) = r,\ r(D) = 0$ elde edilir. Buradaki son şart $B = 0$ olduğunu gösterir ki bu da $A \in \mathbb{C}_r^{OP}$ olması anlamına gelir. Sadece nonsigüler izdüşümlerin birim matris olabileceği dikkate alınırsa $r(F^*G) = r(F:G)$ olması için gerek ve yeter şart $A = I,\ D = 0$ olmasıdır. Öte yandan $\Re(G) = \Re(F) \Leftrightarrow P = Q \Leftrightarrow PQA = I,\ D = 0$ denklikleri direkt olarak görülmektedir. Bu da teoremin ispatını tamamlar.

Teorem 3.4.11 in önemli bir sonucu olarak kolayca gösterilebilir ki $F \in \mathbb{C}^{nxm}$ ve $G \in \mathbb{C}^{nxl}$ matrisleri için $P = P_F$ ve $Q = P_G$ olmak üzere

$$r(P-Q)=2r(F:G)-r(F)-r(G), \tag{3.4.26}$$

$$r(I-P-Q)=n+2r(F^*G)-r(F)-r(G), \tag{3.4.27}$$

$$r(PQ-QP)=r(P-Q)+2r(F^*G)-r(F)-r(G), \tag{3.4.28}$$

eşitlikleri yazılabilir.

4. SONUÇ ve ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında birinci bölümde öncelikle Matris Cebirinin tarihsel gelişimi ve kullanım alanından kısaca bahsedilmiştir. İkinci bölüm Matris ve Matris Uzayları ile ilgili bir takım temel kavramlardan oluşmakta olup bu bölümdeki teoremler genellikle ispatsız olarak verilmiştir. Üçüncü bölümde ortogonal izdüşüm matrisleri ele alınarak bu matrisler için çeşitli rank formülleri elde edilmiştir. İki ortogonal izdüşüm matrisinin toplam ve farkı için bazı rank formülleri verilmiş ortogonal izdüşüm matrisleriyle ilgili çeşitli rank eşitlikleri elde edilmiştir. Ayrıca ortogonal izdüşüm matrislerinin çarpımları ve farklarının Moore-Penrose inversleri ele alınmıştır.

Yapılan çalışmalara benzer olarak üç veya daha fazla ortogonal izdüşüm matrisinin lineer kombinasyonları ile ilgili ortogonal izdüşüm olup olmama durumları ve bu tip kombinasyonlar için rank eşitlikleri elde edilerek bunların özellikle ekonometri, istatistik ve mühendislik alanlarına uygulanabilirliği araştırılabilir. Çalışmada Moore-Penrose inversler için elde edilen bulguların ağırlıklı Moore-Penrose inversler ve Grup inversler için uygulanabilirliği araştırılabilir.

5. KAYNAKLAR

Baksalary, J. K. & Baksalary, O. M. (2004). Nonsingularity of linear combinations of idempotent matrices. *Linear Algebra and its* Applications, 388, 25-29.

Baksalary, J. K., Baksalary, O. M. & Szule, T. (2002). A property of orthogonal projectors. *Linear Algebra and its Applications,* 354, 35-39.

Baksalary, O. M. & Trenkler, G. (2008). An alternative approach to characterize the commutativity of orthogonal projectors. *Discussionels Matematicae Probability and Statistics*, 28, 113-137.

Baksalary, O. M. & Trenkler, G. (2009). On column and null spaces of functions of a pair of oblique projectors. *Linear and Multilinear Algebra*, 61(8), 1116-1129.

Baksalary, O. M. & Trenkler, G. (2011). Rank formulae from the perpective of orthogonal projectors. *Linear and Multilinear Algebra*, 59(6), 607-625.

Baksalary, O. M. & Trenkler, G. (2009). Column space equalites for orthogonal projectors. *Applied Mathematics and Computation*, 212(2), 519-529.

Baksalary, O. M., Bernstein, D. S. & Trenkler, G. (2010). On the equality between rank and trace of an idempotent matrix. *Applied Mathematics and Computation*, 217(8), 4076-4080.

Ben-Israel, A. & Charnes, A. (1963). Contributions to the theory of generalized inverses. *SIAM J. Applied Mathematics*,11(3), 667-699.

Benitez J. & Rakocevic, V. (2008). Applicatios of CS decomposition in linear combination of two orthogonal projectors. *Applied Mathematics and Computation*, 203, 761-769.

Benitez J. & Thome N. (2005). Characterizations and linear combinations of *k*-generalized projectors. *Linear Algebra and its Applications*, 410, 150-159.

Benitez J. & Thome N. (2006). *k*-group periodic matrices. *SIAM J. Matrix Analysis and Applications*, 28(1), 9-25.

Bernstein D.S. (2009). Matrix Mathematics, Second Edition. Princeton University Press, Princeton, USA, 1139.

Branson, R. (1989). Matris İşlemleri, Schaum Serisi (Editor: H. Hilmi Hacısalihoğlu). Nobel Yayın Dağıtım, Ankara, 212.

Buckholtz, D. (1997). Inverting the difference of hilbert space projections. *The American Mahtematical Monthly*, 104(1), 60-61.

Cheng S. & Tian Y. (2003). Moore-Penrose inverses of products and differences of orthogonal projectors. *Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged)*, 69(3), 533-542.

Galperin A. M. & Waksman Z. (1980). On pseudoinverses of operator products. *Linear Algebra and its Applications*, 33, 123-131.

Greville T.N.E. (1974). Solutions of the matrix equation $XAX = X$, and relations between oblique and orthogonal projectors. *SIAM J. Applied Mathematics*, 26(4), 828-832.

Groß J. (1999). On the product of orthogonal projectors. *Linear Algebra and its Applications*, 289(1), 141-150.

Groß, J. & Trenkler, G. (2000). Nonsingularity of the difference of two oblique projectors. *SIAM J. Matrix Analysis and Applications*, 21(2), 390-395.

Groß, J. & Trenkler, G. (1998). On the product of oblique projectors. *Linear Multilinear Algebra*, 44(3), 247-259.

Hacısalihoğlu H.H. (1977). Lineer Cebir. Matbaa Teknisyenleri Koll. Şti., İstanbul, 716.

Izumino S. (1982). The product of operators with closed range and an extension of the reverse order law. *Tohoku Mathematical Journal*, 34(1), 43-52.

Koliha, J. J. & Rakocevic, V. (2002). Invertibility of the sum of idempotents. *Linear and Multilinear Algebra*, 50(4), 285-292.

Koliha, J. J. & Rakocevic, V. (2003). Invertibility of the difference of idempotents. *Linear and Multilinear Algebra,* 51(1), 97-110.

Koliha, J. J., Rakocevic, V. & Straskraba, I. (2004). The difference and sum of projectors. *Linear Algebra and its Applications*, 388(1), 279-288.

Lancaster, P. (1969). Theory of matrices. Academic Press Inc, New York, USA, 570.

Laurie, C., Mathes, B. & Radjavi, H. (1994). Sums of idempotents. *Linear Algebra and its Applications*, 208–209, 175-197.

Marsaglia, G. & Styan, G. P. H. (1974). Equalities and inequalities for ranks of matrices. *Linear and Multilinear Algebra*, 2, 269-292.

Penrose, R. (1955). A generalized inverse for matrices. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 51(3), 406-413.

Penrose, R. (1956). On best approximate solutions of linear matrix equations. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 52(1), 17-19.

Rao, R. C. (1965). Linear Statistical Inference and its Applications. A Wiley-Interscience Publication, New York, USA, 625.

Rao R. C. & Yanai H. (1979). General definition and decomposition of projector and some applications to statistical problems. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 3(1), 1-17.

Rehder, W. (1980). On the commutativity of two projections. *Elemente der Mathematik*, 35, 120-122.

Spitkovsky, I. (1994). Once more on algebras generated by two projections. *Linear Algebra and its Applications*, 208–209, 377-395.

Spitkovsky, I. (2006). On polynomials in two projections. *Electronic Journal of Linear Algebra*, 15, 154-158.

Tian, Y. (2004). Rank equalities for block matrices and their Moore-Penrose inverses. *Houston Journal of Mathematics*, 30(2), 483-510.

Tian, Y. (2004). Using rank formulas to characterize equalities for Moore-Penrose inverses of matrix products. *Applied Mathematics and Computation*, 147(2), 581-600.

Tian, Y. (2010). Equalities for orthogonal projectors and their operations. *Central European Journal of Mathematics*, 8(5), 855-870.

Trenkler, G. (2005). A range equality for idempotent Hermitian matrices. *IMAGE- The Bulletin of the International Linear Algebra Society*, 35, 43.

Xie. T., Zhu, X. & Zuo K. (2016). The null and column spaces of combinations of two projectors. *Journal of Mathematical Research with Applications*, 36(4), 407-422.

Zuo, K. (2010). Nonsingularity of the difference and sum of two idempotent matrices. *Linear Algebra and its Applications*, 433(2), 476-482.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler	
Adı Soyadı	Ömer Onur TURAN
Doğum Yeri	
Doğum Tarihi	
Uyruğu	☒ T.C. ☐ Diğer:
Telefon	
E-Posta Adresi	

Eğitim Bilgileri	
Lisans	
Üniversite	Anadolu Üniversitesi
Fakülte	Fen Fakültesi
Bölümü	Matematik
Mezuniyet Tarihi	16.09.2005
Yüksek Lisans	
Üniversite	Ordu Üniversitesi
Enstitü Adı	Fen Bilimleri Enstitüsü
Anabilim Dalı	Matematik Anabilim Dalı
Mezuniyet Tarihi	29.08.2022