T. C.

ORDU ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TAHMİNİ ÖĞRENME YOL HARİTALARINA DAYALI ÖĞRETİM DENEYİ İLE 7. SINIF ÖĞRENCİLERİNİN CEBİR ÖĞRENME SÜREÇLERİNİN İNCELENMESİ

ÖZGÜR ULAŞ DEMİR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK VE FEN BİLİMLERİ EĞİTİMİ ANABİLİM DALI

MATEMATİK EĞİTİMİ BİLİM DALI

ORDU 2022

TEZ BİLDİRİMİ

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan ve kullanılan intihal tespit programının sonuçlarına göre; bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

ÖZGÜR ULAŞ DEMİR

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

TAHMİNİ ÖĞRENME YOL HARİTALARINA DAYALI ÖĞRETİM DENEYİ İLE 7.SINIF ÖĞRENCİLERİNİN CEBİR ÖĞRENME SÜREÇLERİNİN İNCELENMESİ

ÖZGÜR ULAŞ DEMİR

ORDU ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK VE FEN BİLİMLERİ EĞİTİMİ ANABİLİM DALI

MATEMATİK EĞİTİMİ BİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ, 271 SAYFA

(TEZ DANIŞMANI: Doç. Dr. Meral CANSIZ AKTAŞ)

Bu araştırmanın amacı 7. Sınıf öğrencilerinin tahmini öğrenme yol haritalarına dayalı olarak yürütülen bir öğretim sürecinde cebir öğrenme alanındaki cebirsel ifadeler ile eşitlik ve denklem konularında öğrencilerin matematiksel olarak nasıl düşündüklerini ortaya koymak ve cebir öğretimini kolaylaştıracak araçları belirlemektir. Nitel araştırma türlerinden öğretim deneyi deseni ile tasarlanan araştırmada ortaokul 7.sınıf düzeyinde öğrenim gören 24 kişilik bir öğrenci grubu ile 6 hafta süresince iki aşamada gerçekleşen ve sınıf tartışmaları şeklinde ilerleyen öğretim uygulamaları düzenlenmiştir. Ayrıca katılımcılar arasından başarı düzeyleri düşük, orta ve yüksek seviyede olan üç odak öğrenci belirlenmiş ve bilişsel gelişimleri gözlemlenerek ortaya konulması amaçlanmıştır. Bu amaç doğrultusunda odak öğrencilerden derinlemesine bilgi toplanması için klinik görüşmeler düzenlenmiştir. Araştırmada gerçekleştirilen öğretim uygulamaları ve klinik görüşmeler esnasında alınan video kayıtları, öğretim etkinliklerde kullanılan çalışma kâğıtları, öğrenci notları ve araştırmacı günlükleri veri kaynağı olarak kullanılmıştır. Toplanan veriler sürekli ve geriye dönük analizler yardımıyla analiz edilmiştir. Araştırmanın bulgularında, tahmini öğrenme yol haritalarına dayalı yürütülen öğretim deneyi süreci sonunda üç odak öğrencinin de cebirsel ifadelerle toplama çıkarma ve çarpma işlemlerinde, örüntü genellemelerinde, eşitliğin korunumunda, denklem kurma ve çözme konularında verilen görevleri yerine getirebildikleri ortaya konulmuştur. Bununla birlikte öğretim esnasında uygulanan etkinlikler odak öğrencilerin örüntüleri genellerken fonksiyonel ve eşitliğin korunumunda ilişkisel düşünmelerinin gelişiminde olumlu rol oynadığı tespit edilmiştir. Ayrıca öğretim deneyi sonucunda süreç içerisinde odak öğrencilerde tespit edilen kavram yanılgılarının ve eksik öğrenmelerin giderildiği, öğrencilerin cebirsel düşünmelerinin olumlu yönde gelişim gösterdiği belirlenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Tahmini Öğrenme Yol Haritaları, Öğretim Deneyi, Cebirsel İfadeler, Eşitlik ve Denklem

ABSTRACT

INVESTIGATION OF THE ALGEBRA LEARNING PROCESS OF 7TH GRADE STUDENTS THROUGH TEACHING EXPERIMENT BASED ON HYPOTHETICAL LEARNING TRAJECTORIES

ÖZGÜR ULAŞ DEMİR

ORDU UNIVERSITY INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

MATHEMATICS AND SCIENCE EDUCATION

MATHEMATICS TEACHER EDUCATION

MASTER THESIS, 271 PAGES

(SUPERVISOR: MERAL CANSIZ AKTAŞ)

The aim of this study is to reveal how 7th grade students think mathematically in a teaching process based on hypothetical learning trajectories in the subjects of equality and equations with algebraic expressions in the field of algebra learning and to determine the tools that will facilitate theaching algebra. In the study, designed with one of the qualitative research types, the teaching experiment design, teaching practices took place in two stages for six weeks and progressed in the form of class discussions with a group of 24 students studying at the 7th grade of secondary school. Additionally, three focus students with low, medium and high success levels were determined among the participants and it was aimed to reveal their cognitive developments by observing. For this purpose, clinical interviews were held to collect in-depth information from the focus students. Teaching practices carried out in the research, video recordings taken during the clinical interviews, the worksheets used in the teaching activities, student notes and researcher diaries were used as data sources. The collected data were analyzed with the help of prospective and retrospective analyses. In the findings of the research, it was revealed that at the end of the teaching experiment process based on hypothetical learning trajectories, all three focus students were able to perform the tasks given in addition, subtraction and multiplication with algebraic expressions, pattern generalization, preservation of equality, setting up and solving equations. In addition, it was determined that the activities applied during the teaching have a positive role in the focus students' development of functional thinking while generalizing the patterns, and relational thinking while the preservation of equality. Furthermore, as a result of the teaching experiment, it was determined that the misconceptions and deficient learning detected in the focus students during the process were eliminated, and the students showed a positive development in terms of algebraic thinking.

Keywords: Hypothetical Learning Trajectories, Teaching Experiment, Equality and Equation, Algebraic Expressions.

TEŞEKKÜR

Tez konumun belirlenmesi, araştırmanın yürütülmesi ve yazımı esnasında başta danışman hocam Sayın Meral CANSIZ AKTAŞ'a ve yüksek lisans eğitimim süresince katkılarını esirgemeyen değerli hocalarıma teşekkür ederim.

Aynı zamanda, manevi desteklerini her an üzerimde hissettiğim babam Reşat DEMİR'e, annem Gülçin DEMİR'e, kızım İrem DEMİR'e, oğlum Kerem DEMİR'e, sevgili öğrencilerime, değerli öğretmen arkadaşlarıma ve canım eşim Aynur DEMİR'e teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

ÇİZELGE LİSTESİ

<u>Sayfa</u>

SİMGELER ve KISALTMALAR LİSTESİ

cm	:	Santimetre
cm^2	:	Santimetrekare
dm	:	Desimetre
dm^2	:	Desimetrekare
m	:	Metre
MÖD	:	Matematik Öğretim Döngüsü
m^2	:	Metrekare
MEB	:	Milli Eğitim Bakanlığı
NCTM	:	National Council of Teachers of Mathematics
TÖYH	:	Tahmini Öğrenme Yol Haritası
TDK	:	Türk Dil Kurumu

EKLER LİSTESİ

1. GİRİŞ

1.1 Problem Durumu

Günümüzde bilgili, yaratıcı düşünen, karşılaştığı problemlerde zihinsel olarak analiz ve sentez yapabilen, yaşadığı çağın gereksinimlerine ayak uydurabilen bireylere ihtiyaç duyulmaktadır. Dolayısıyla akıl yürütme, eleştirel düşünme ve problem çözme günümüz insanın ihtiyaçlarından biridir. Matematik bu ihtiyaçların gelişiminde çok önemli bir rol üstlenir (Hiçcan, 2008). Bu sebeple matematik sadece sayılarla ilgilenen veya soyut işlemleri yapmamıza yarayan bir ders değil bir düşünce sistemi olarak da ifade edilebilir. Bu düşünce sistemi günlük hayatta karşılaştığımız problemlere çözümler üretme, genelleme yapma, soyutlama, ilişkiler kurma ve akıl yürütme gibi ihtiyaçlarımızın gelişiminde bize yardımcı olmaktadır. Amerika'da Matematik Öğretmenleri Ulusal Konseyi'nin (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000) okul matematiği için belirlediği ilke ve standartlara (Principles and Standarts for School Mathematics) göre matematik; sayı ve işlemler, geometri ve ölçme, veri işleme, olasılık ve cebir olmak üzere beş alt öğrenme alanı içermektedir (Van De Walle, Karp ve Bay-Williams, 2014).

Matematiğin önemli dallarından birisi olarak karşımıza çıkan cebir, insan hayatında birçok alanda kullanılmakta ve farklı şekillerde tanımlanmaktadır. "Cebir nedir?" sorusuna cevap arayan birçok çalışma yapılmış ve farklı tanımlar yapıldığı gözlenmiştir. Kieran (1992) cebiri, genel sayısal ilişkileri ve matematiksel yapılar üzerindeki işlemleri sembolleştiren bir bilim dalı olarak tanımlamıştır. Lew (2004) cebirin denklem çözmeye, fonksiyonel ilişkilerin farkına varmaya, ilişkiler ve işlemlerle oluşan ifadelerin yapılarını anlamaya yarayan ve tüm sayıların ötesinde genelleştirilmiş sayıları içeren bir konu olduğundan bahsetmiştir. Usiskin (1997) cebiri bilinmeyenler, formüller, örüntüler, yer tutucular ve ilişkilerden oluşan matematiğin dili olarak tanımlamıştır. MacGregor ve Stacey (1999) cebirin sayılar arasındaki genel ilişkileri açıklamak için hazırlanmış matematiksel dilin bir parçası olduğunu belirtmiştir. Bahsedilen bu tanımlar göz önüne alındığında cebir, sayı ve sembolleri kullanarak bunlar arasındaki ilişkilerin denklemlere ve matematiksel genellemelere dönüştürüldüğü matematiğin bir dalı olarak da tanımlanabilir. Tanımlardan da anlaşılacağı gibi cebir matematiğin başlıca konularından biri olmakla birlikte günlük hayatımızda da önemli bir role sahiptir. Çünkü cebir dünyamızdaki örüntüleri temsil etmede ve aritmetiği genellemede önemli bir araç olarak görülmektedir (Van De Walle ve ark., 2014). Ayrıca cebir, öğrencilerin matematiksel durumları genellemesine, modellemesine ve analiz etmesine olanak tanır (NCTM, 2000).

Ülkemizde yürürlükte olan matematik dersi öğretim programının (Milli Eğitim Bakanlığı [MEB], 2018) 1-4. sınıflar için hazırlanan kısmı "Sayılar ve İşlemler, Geometri, Ölçme ve Veri İşleme" olmak üzere dört öğrenme alanından oluşmaktadır. Matematik dersi öğretim programında 1-4. sınıflar için cebir öğrenme alanı özel bir başlık altında bulunmasa da informal yöntemlerle eşitlik ve örüntü kavramlarının öğretimine yer verildiği görülmüştür. Matematik dersi öğretim programının 5-8. sınıflar için hazırlanan kısmında ise cebir ile ilgili kazanımlara ilk kez 6. sınıfta karşılaşılmaktadır. Bu sınıf seviyesinde öğrencilerden örüntülerin istenen adımlarını bulmaları ve cebirsel ifadeleri anlamlandırmaları istenmektedir. 7. sınıf düzeyinde ise öğrencilerin cebirsel ifadelerle toplama, çıkarma ve çarpma işlemlerini yapmaları, örüntüleri tanımaları, eşitlik kavramını anlamaları ve birinci dereceden bir bilinmeyenli denklemleri çözmeleri beklenmektedir. Fakat matematik dersi öğretim programında öğrencileri cebire hazırlayacak kazanımlara ve açıklamalara yeterince vurgu yapılmadığı görülmektedir. Bu bakımdan cebir öğretiminde öğretmenlerin kilit rolde olduğu düşünülmektedir. Cebir konularının öğretmenler tarafından ne şekilde işlendiği öğrencilerde oluşacak zihinsel şemaları doğrudan etkilemektedir. Kavramsal öğretim gerçekleşirse öğrencilerin sembolleri açıklamada ve ifadeleri sembolleştirmede zorluk yaşamayacağı düşünülmektedir (Yeşildere, 2007). Aksi takdirde cebir, öğrencilerin öğrenim hayatı boyunca endişe ve korku uyandıran, anlaşılması zor olan bir öğrenme alanı olacaktır (Dede ve Argün, 2003). Yapılan birçok araştırmada, bunu destekler nitelikte, cebirin öğrenciler tarafından zor anlaşılan bir matematik konusu olduğu belirtilmiştir (Çelik ve Işık, 2020; Ersoy ve Erbaş, 2005; Hersovics ve Linchevski, 1994; Stacey ve MacGregor, 1997). Bu durum öğrencilerin cebir alanındaki başarılarını düşürmektedir (Dede ve Argün, 2003).

Cebir konularının öğretimi sürecinde 7. sınıf öğrencilerinin cebirsel ifadeler ile eşitlik ve denklem alt öğrenme alanlarında yaşayabilecekleri kavram yanılgıları, hatalar, ön bilgi eksiklikleri göz önüne alınarak hazırlanacak ders tasarımları ile bu eksikliklerin giderilebileceği öngörülmektedir. Yapılan araştırmanın bu bağlamda literatüre katkı sağlayacağı düşünülmektedir.

Bu araştırmada cebirsel ifadedeler ile eşitlik ve denklemler konularında öğrencilerin kavramsal öğrenmelerini sağlamak amaçlanmıştır. Bunun için öğrencilerin konuları zihinlerinde nasıl yapılandırdıkları, hangi kavram yanılgılarına sahip oldukları ve hangi hata türlerine düştükleri ve bunları ortadan kaldırmak için nelerin yapılması gerektiği dikkate alınarak kavramsal öğretimi sağlayabilecek dersler tasarlanmıştır. Cebir konularını öğrenirken matematiksel bilginin öğrencilerin zihinlerinde nasıl oluştuğu ve süreç içerisinde nasıl geliştiği ile ilgili ayrıntılar tahmini öğrenme yol haritaları vasıtasıyla ele alınmıştır. Tahmini öğrenme yol haritaları ile öğrencilerin öğrenmelerini destekleyecek etkinlikler ve görevlerin sırası hakkında varsayımlar oluşturulmuştur. Bununla birlikte öğrencilerin zihinsel gelişim düzeyleri takip edilerek bu süreçte tespit edilen aksaklıkların giderilmesi için öğretim sürecinde uygulanan etkinlikler revize edilerek kavramsal öğretim gerçekleştirilmeye çalışılmıştır.

1.2 Araştırmanın Amacı

Bu araştırmanın amacı, tahmini yol haritalarına dayalı yürütülen bir öğretim sürecinde 7. sınıf öğrencilerinin cebirsel ifadeler ile eşitlik ve denklem konularını öğrenirken matematiksel olarak nasıl düşündüklerini ortaya koymak ve bu konuların öğretimini kolaylaştıracak araçları belirlemektir. Ayrıca öğrencilerin cebir konularındaki informal düşüncelerinin daha karmaşık kavramlara taşınması amaçlanarak, tahmin edilebilen ve deneysel olarak geliştirilebilen bir yol ortaya koymak hedeflenmiştir.

1.3 Araştırmanın Gerekçesi ve Önemi

Hızla ilerleyen ve gelişen dünyamızda matematik, bilim ve teknoloji alanlarında kullanılan etkili bir araç olarak karşımıza çıkmaktadır. Dolayısıyla matematiği anlayan, matematiği yapabilen ve günlük hayatında kullanabilen bireylerin yetişmesi için okullarda verilen matematik öğretiminin önemi giderek artmaktadır. Baki (2018) matematik eğitimde yapılan araştırmaların kuramsal çerçeve oluşturularak matematiğin nasıl öğrenildiğini ortaya koymaya çalışmış ve öğrencinin bilişsel süreçlerini tanıma açısından farklı bakış açıları sunabileceğini ifade etmiştir. Ayrıca Van De Walle ve ark. (2014) matematik öğretiminde öğrencilere sunulan deneyimlerin öğrenciler için en mükemmel seviyede öğrenme imkânı sunacak şekilde tasarlanması gerektiğini savunmuştur.

Cebir dünyamızdaki örüntüleri temsil etmede ve aritmetiği genellemede kullandığımız en önemli araçtır (Van De Walle ve ark. 2014). Cebir, öğrencilerin matematiksel durumları genellemesine, modellemesine ve analiz etmesine imkân sağlar. Bunun yanında öğrencilerin matematiksel ilişkileri incelemeleri için sistematik bir yol sağlayarak dünyayı tanımalarına, organize etmelerine ve anlamalarına yardımcı olur (NCTM, 2000). Bu sebeple NCTM her öğrencinin öğretim hayatının bütün kademelerinde kendi seviyelerine uygun olarak cebir öğrenmesi gerektiğini savunmuştur (NCTM, 2000). Buna rağmen her sınıf düzeyinde öğrencilerin cebirde zorluk yaşadığı aşikârdır (Baki, 2018; Dede ve Argün, 2003; Erdem ve Sarpkaya Aktaş, 2018; Ersoy ve Erbaş, 2005; Kieran, 1992; Stacey ve MacGregor, 1997). Oysaki hedeflenen öğrenmenin gerçekleşmesi için öğrencilerin cebir konularında kullandıkları kavram ve sembollerin anlamlarını iyi kavramaları gerekmektedir. Bu bakımdan öğrencilerin cebirsel kavramları ve sembolleri öğrenirken matematiksel olarak nasıl düşündüklerinin bilinmesi kavramsal öğrenmenin gerçekleşmesinde katkı sağlayacaktır.

Bu araştırmada cebirsel ifadeler ile eşitlik ve denklem alt öğrenme alanlarında öğrencilerin öğrenme süreçleri incelenmiştir. Bu süreçte öğrencilerin düşünceleri ile matematiksel içerik arasında ilişki kurarken takip ettikleri yollar ortaya konularak tahmini öğrenme yol haritaları oluşturulmuştur. Tahmini öğrenme yol haritalarıyla bir ders tasarımı oluşturularak hedeflenen öğrenme için neler yapılabileceği üzerine çalışılmıştır. Oluşturulan ders tasarımında öğrenmeyi destekleyecek etkinlikler hazırlanmış ve bu etkinliklerin öğrencilerin düşünce ve kavrayışlarını nasıl etkileyeceğine dair hipotezler kurulup test edilmiştir. Süreç içerisinde sürekli olarak analizlerden faydalanılarak etkinliklerin işleyen ve işlemeyen kısımlarının tespiti yapılmıştır. Gereken durumlarda revizeler yapılarak öğrencilerin öğrenmeleri desteklenmeye çalışılmıştır. Literatür incelendiğinde ulusal düzeyde tahmini öğrenme yol haritaları kapsamında yürütülen araştırmaların az sayıda olduğu görülmektedir (Aktaş, 2020; Camci, 2018; Güven Akdeniz, 2018; Özden, 2019). Yapılan öğretim deneyi sonucunda hedeflenen öğretim doğrultusunda hazırlanan tahmini öğrenme yol haritalarının matematik dersi öğretim programına ve matematik ders kitaplarına entegresinin sağlanması hedeflenmektedir. Ayrıca tasarlanan modelin öğretmenlere, program tasarlayıcılarına ve yapılacak diğer çalışmalara örnek olması da hedeflenmektedir. Bu doğrultuda araştırmanın alana katkı sağladığı ve yol gösterici olduğu düşünülmektedir.

1.4 Araştırmanın Problemi

Araştırmanın problem cümlesi; "7. sınıf öğrencilerinin tahmini öğrenme yol haritalarına dayalı bir öğretim deneyi sürecinde cebirsel ifadeler ile eşitlik ve denklem konularını öğrenme süreçleri nasıl bir gelişim göstermiştir?" şeklinde belirlenmiştir.

1.5 Sınırlılıklar

1. Araştırma 2020-2021 eğitim–öğretim yılında Ordu ilinde bir devlet ortaokulunda 7. sınıfta öğrenim gören 24 öğrenci ile sınırlıdır.

2. Araştırma 7. sınıf matematik dersinin 3. ünitesindeki cebir konuları ile sınırlıdır.

3. Araştırmanın uygulama süresi 6 hafta (30 ders saati) ile sınırlıdır.

1.6 Tanımlar

Cebir: Cebir sözcüğü Mohammed al-Khowarizma tarafından yazılan Al-jabr wa‟l Muabalah adlı kitabın adından gelmektedir. Cebir, temeli değişken kavramına dayanan matematiğin önemli alanlarından biridir (Altun, 2010).

Cebirsel Düşünme: Cebirsel düşünme, nicel durumlara göre değişken kullanımı ve değişkenler arasındaki bağlantının netleştirilebilmesidir (Driscoll, 1999).

Tahmini Öğrenme Yol Haritası: Öğrencilerin informal düşüncelerden zamanla daha karmaşık kavramlara doğru ilerlemesini amaçlayan, literatür sentezi sonucunda araştırmacılar tarafından tahmin edilen ve deneysel olarak desteklenen gelişimsel bir yoldur (Confrey, Maloney, Nguyen, Mojica, ve Myers,2009).

Öğretim Deneyi: Öğretim deneyi, öğrencinin matematiksel bilgiyi nasıl oluşturduğunu ve süreç içinde nasıl gelişim gösterdiğini derinlemesine inceleyen araştırma desenidir (Steffe ve Thompson, 2000).

2. GENEL BİLGİLER

Bu bölümde araştırmanın kuramsal çerçevesine, araştırmada kullanılan tahmini öğrenme yol haritaları ile ilgili bilgilere ve literatürde yapılan ilgili çalışmalara yer verilmiştir.

2.1 Kuramsal Çerçeve

Araştırmanın kuramsal çerçevesini oluşturan bu bölümde; cebir ve cebir öğretimi, cebirsel düşünme ve cebirsel düşünme biçimleri hakkında bilgilere yer verilmektedir.

2.1.1 Cebir ve Cebir Öğretimi

Matematiğin önemli dallarından biri olarak karşımıza çıkan cebir, günlük hayatta birçok alanda kullanılmaktadır. Cebir, "Artı ve eksi gerçek sayılarla, bunların yerini tutan harfler yardımıyla nicelikler arasında genel bağlantılar kuran matematik kolu" şeklinde tanımlanmaktadır (Türk Dil Kurumu [TDK], 2021). Dolayısıyla sayma, karşılaştırma ve sayılarla işlem yapma eylemlerini içeren aritmetiğin soyutlanmasıyla cebir doğmuştur. Harezmî'nin yaptığı çalışmalar cebirin tarihsel gelişimi açısından mihenk taşı konumundadır. Cebir ismi ilk kez Harezmî'nin 830'lu yıllarda yazdığı, "El Kitab'ül–Muhtasar fi Hısab'il Cebir ve'l mukabele" (Cebir ve denklem hesabı üzerine özet kitap) adlı kitapta geçmektedir. Denklemler üzerine Harezmî'den önce kitaplar yazılmıştır fakat cebir ismi ilk onun kitabında yer almıştır.

Cebirin matematik öğretimindeki rolü çok önemlidir. Çünkü cebir soyutlama yapmayı gerektirmektedir. Bu bakımdan matematiğin soyutlama yapma bilimi oluşu cebirde tam anlamını bulmaktadır (Altun, 2005). Bunun yanında cebir günümüzde birçok görevi üstlenmektedir. Cebir bir dildir, cebir bir problem çözme aracıdır, cebir bir düşünme aracıdır ve cebir bir okul dersidir (Dede ve Argün, 2003). Bu bakımdan cebir hayatın her anında kendini hissettirmekte ve cebirin bireyler tarafından öğrenilmesi bir ihtiyaç olarak karşımıza çıkmaktadır (Williams, 1997). Cebir öğrencilerin matematiksel durumları genellemesine, modellemesine, analiz etmesine imkân sağlamakta, dünyayı tanımalarına ve organize etmelerine yardımcı olmaktadır (NCTM, 2000).

Cebir çok kapsamlı ve derinlemesine incelenen matematik konularından biridir. Bu bakımdan literatür taramasında cebir öğretimi hakkında farklı yaklaşımlara rastlanmaktadır. Usiskin (1988) cebiri; genelleştirilmiş aritmetik olarak cebir, problem çözme yöntemlerinin bir parçası olarak cebir, nicelikler arasındaki ilişkileri gösteren çalışmaların bir parçası olarak cebir ve yapısal çalışmalar olarak cebir olmak üzere dört kategoride incelemiştir. Usiskin bu kategorilerin her birinde harf sembollerinin farklı rollerini benimsemiştir. NCTM (1997) cebiri örüntüleri, ilişkileri ve işlevleri anlamlandırma olarak cebir, cebirsel sembolleri kullanma, temsil etme ve çözümleme olarak cebir, modelleri kullanarak ilişkileri temsil edebilme olarak cebir ve çeşitli bağlamlarda meydana gelen değişiklikleri analiz edebilme olarak cebir olmak üzere dört başlıkta ele almıştır. Kaput (1998) ise cebiri aritmetik ve örüntülerden genelleme, sembollerin anlamlı kullanılması, sayı sistemlerindeki yapıların çalışılması, işlevsel olarak cebir ve matematiksel modelleme dili olarak cebir olmak üzere beş kategori altında incelemiştir. Cebiri kategorilerine ayırırken Usiskin (1988) ilköğretim seviyesinde cebiri, Kaput (1998) ise ileri matematik seviyesinde cebiri incelemiştir.

Thorpe (1999) cebir öğretiminin genel amaçlarından bazılarını şu şekilde sıralamıştır: Cebir öğretimi öğrencilerin gerçek yaşam durumlarına ait problemlerin çözümünde yardımcı olması açısından sembollerin kullanımını sağlamalı, öğrencileri fizik ve mühendislik alanlarında yaşanan gelişmeleri takip edebilecek şekilde yetiştirmeli, cebirsel ilişkilerin kullanımı konusunda yeterli seviyeye ulaştırmalıdır. Ayrıca Thorpe (1999) matematik öğretiminin, özelde ise cebir öğretiminin, kavramların anlaşılırlığını arttıracak ve öğrencileri düşünmeye cesaretlendirecek şekilde tasarlanması gerektiğinden bahsetmiştir. Bununla birlikte NCTM (2000) cebir müfredatında her seviyede öğrencilerin cebirsel düşünmelerinin geliştirilmesi gerektiğini önemle vurgulamaktadır. Ülkemizde de yürürlükte olan matematik dersi öğretim programında problem çözmenin, kavramsal öğrenmenin ve matematiksel düşünmenin, özelde ise cebirsel düşünmenin önemi giderek artmaktadır (MEB, 2018).

2.1.2 Cebirsel Düşünme

Cebirsel düşünmenin ne olduğunun anlaşılması cebir konularının öğrenimi açısından önem teşkil etmektedir. Cebirsel düşünme kavramı, cebirle alakalı olsa da cebir teriminin sahip olduğundan daha geniş bir anlama sahiptir (Çelik, 2007). Bunun yanında Vance'a (1998) göre cebirsel düşünme, matematiksel düşüme yöntemlerinden biridir. Bu söylenenlerden de anlaşılacağı üzere cebiri de içine alan ancak daha geniş anlamlar içeren cebirsel düşünme kavramı karşımıza çıkmaktadır. Cebirsel düşünme ile ilgili tanım yapmak zor olsa da literatürde bu kavramı farklı bakış açıları ile ele alan birçok çalışmaya rastlanmaktadır. Driscoll (1999), cebirsel düşünmeyi nicel durumlara göre değişken kullanımı ve bu değişkenler arasındaki bağlantının netleştirilebilmesi olarak tanımlamıştır. Helbert ve Brown'a (1997) göre cebirsel düşünme, verilen durumlara ait bilgileri farklı temsillerle gösterme, bilinmeyeni bulma, tahminde bulunma, bu tahminleri test etme, fonksiyonel ilişkileri tanımlama gibi matematiksel bilgileri yorumlama ve farklı durumlarda kullanmak için sembollerin veya matematiksel araçların kullanılmasıdır. Kieran ve Chalouh'a (1993) göre cebirsel düşünme, cebirsel işlem ve sembolleri aritmetiksel açıdan anlamlı hale getirilerek zihnin cebirsel çerçevesinde matematiksel akıl yürütmeyi içerir. Kaf'a (2007) göre cebirsel düşünme, içerisinde matematiksel akıl yürütme, matematiksel model kullanma, matematiksel gösterimleri kullanma ve bu gösterimler arasındaki dönüşümü yapabilmeyi içeren bir düşünme biçimidir. Swafford ve Langrall (2000) ise cebirsel düşünmenin bilinmeyenler hakkında düşünebilme yetisi olduğundan bahsetmiştir. Van De Walle ve ark.'na (2014) göre cebirsel düşünme, sayı ve hesaplamalara dair tecrübelerden genellemeler yapmayı, bu genellemeleri anlamlı semboller sistemi kullanarak ifade etmeyi, örüntü ve fonksiyon kavramlarını keşfetmeyi içerir. NCTM'ye (2000) göre ise cebirsel düşünme, fonksiyonları anlamayı, matematiksel yapı ve durumları farklı temsillerle göstermeyi ve analiz etmeyi, niceliksel ilişkileri göstermek için matematiksel modelleri kullanmayı, günlük olaylarda karşılaşılan değişimleri analiz etmeyi gerektirir.

İngiltere'de 13-15 yaş arasındaki öğrencilerin cebirsel ilişkileri anlama düzeylerini belirlemek maksadıyla Concepts of Secondary Mathematics and Science (CSMS) tarafından hazırlanan çalışmanın bulgularında cebirsel düşünme dört düzeyde incelenmiştir (Hart, Brown, Kuchermann, Kerslach, Ruddock ve Mccartney, 1998'den akt., Altun 2005, s. 161).

Düzey 1: Bu düzey, tamamen aritmetik işlemler kullanılarak harflerin değerini bulma, harfleri bir nesne adı olarak kullanarak bir problemin sonucunu bulma ya da içerisinde harf bulundurmasına rağmen bu harflere değer vermeden bir işlemi sonuçlandırma şeklindeki soruların çözüldüğü safhadır.

Düzey 2: Bu düzey, birinci düzeyle soyutluk açısından aynı olmasına rağmen sorular daha karmaşık yapıdadır. İkinci düzeye çıkan öğrenciler cebirsel ifadelere alışık olmalarından dolayı daha karmaşık soruları çözebilirler.

Düzey 3: Bu düzeydeki öğrenciler harfleri bilinmeyen olarak algılamakta ve işlemlerde bilinmeyenleri kullanabilmektedirler. Bilinmeyenleri nesne adı olarak kullanan öğrencilerin bu düzeydeki sorularda çözüme ulaşması imkânsızdır.

Düzey 4: Bu düzeydeki öğrenciler, üçüncü düzeydeki öğrencilere benzer fakat daha karmaşık ifadelere anlam yükleyebilir ve sonuçlandırabilirler.

Bu araştırmanın ortaya koyduğu basamaklar dizini dikkate alınarak öğretimde acele edilmemelidir. Aksi takdirde öğrencilerde ezber yapma eğilimleri gözlenebilir ve öğrencinin ileriki öğrenim hayatında olumsuz sonuçlar doğurabilir (Altun, 2005).

2.1.3 Cebirsel Düşünme Biçimleri

Cebirsel düşünme okul öncesinden başlayan ve öğrencilerin öğretim hayatı boyunca devam eden bir süreçtir (NCTM, 2006). Sınıf seviyelerine uygun öğretim programlarını şekillendiren öncü isimlerden biri olan Kaput (1999) cebir hakkında şunları söylemiştir: "Cebir; genellemeleri ve bu genellemelerin formal bir dille ifadesini içerir; aritmetikte, modellemede, geometride ve neredeyse ortaokulda yer alan ve alabilecek tüm matematikte genelleme bu formal dille başlar" (Kaput, 1999'dan akt., Van De Walle ve ark., 2014, s.255). Kaput (1999) cebirsel düşünme biçimlerinden beş farklı şekilde bahsetmektedir:

1. Aritmetik ve örüntülerden genelleme
2. Sembollerin anlamlı kullanımı
3. Sayı sistemlerindeki yapıyı görünür kılmak
4. Örüntüler ve fonksiyonları çalışmak
5. İlk dört maddeyi içerecek şekilde matematiksel modelleme süreci

Görüldüğü gibi cebirsel düşünme tekil bir düşünme biçimi olmayıp birçok farklı düşünme biçimi ve sembollerin kavranmasından oluşmuştur.

2.1.3.1 Aritmetik ve Örüntülerden Genelleme

Aritmetiğin temelinde sayı düşüncesi, cebirin temelinde ise aritmetik yer almaktadır (Van Amerom, 2003). Bu nedenle aritmetikte var olan kavramlar ve yapılar anlaşılmadan cebirsel yapıların anlaşılması pek mümkün değildir (Cooper, Boulton-Lewis, Athew, Wilssi ve Mutch, 1997). Matematiksel kavramlar bir zincirin halkaları gibi birbirine bağlı oldukları için bu zincirin halkaları arasındaki kopmalar ileride öğrenme zorluklarına neden olabilmektedir (Swadener ve Soedjadi, 1988). Matematiksel kavramların özellikle ilköğretim çağındaki öğrencilere olabildiğince somutlaştırılmış biçimde verilmesi ileri seviyelerde karşılaşan kavramların öğretiminde kolaylık sağlayacaktır. Bu bakımdan farklı doğalara sahip olmalarına rağmen aritmetik ve cebir arasında güçlü bir bağ olduğu birçok araştırmacı tarafından bahsedilmektedir (Akkan, Öztürk, Akkan ve Küçük Demir, 2019; Kieran, 1992; Sfard, 1995; Van Amerom, 2002). Matematik öğretimine öncelikle temeli sayı olan aritmetik ile başlanmakta, değişken kavramı vasıtasıyla cebir öğretimi ile devam edilmektedir (Dede, Yalın ve Argün, 2002).

Bu sebeple aritmetiksel bilgiler önemlidir, zira aritmetikteki fikirler genelleştirilerek cebirsel fikirler ortaya çıkmaktadır (Tall, 1992). Armstong'a (1995) göre örüntüleri tanıma ve genelleme yapma, cebire girişin temelini oluşturmaktadır. Akkan'a (2009) göre aritmetikteki problemlerin çözümleri, verilen durumlara ait sayısal çözümleri keşfetmeye odaklanırken; cebirdeki problemlerin çözümü genelde yöntemi belirlemeye ve keşfetmeye yani yöntemin arkasına bakmaya odaklanmaktadır. Genelleme sürecinde öğrenen hem ortak faktörlerin hem de karşılaşılan durum için ayırt edici olan faktörlerin farkına varmaktadır. Denklem çözmenin gücü onun genele uygulanabilir olmasından gelmektedir. Öğrencilerin aritmetik sorularında genelleme yapmaları onların sayılarla ilgili somut düşüncelerinin gelişmesini desteklemektedir. Burada genelleştirilen ilişkiler sayılar değil, nesnelerdir. Genelleştirilen ilişkiler önce yeni karşılaşılan durumlarla ilgili tahminlerin yapılmasına, sonra gelecekte yapılacaklar için ufkun genişlemesine yardımcı olmaktadır (Van Amerom, 2002).

2.1.3.2 Sembollerin Anlamlı Kullanımı

Sembol bir simge yoluyla bir kavramın uzlaşımsal olarak betimlenmesidir. Gerçek dünyada somut olarak var olmayan şeylerin yerine sembollerin kullanılması, onlar üzerinde çalışma fırsatı vermektedir (Akkan ve Baki, 2016). Matematikte, "a, b, x, t, …" gibi harfli semboller ve "+, =, <, …" gibi işlemleri belirten semboller kullanılmaktadır. Bu semboller ve işaretler kullanılarak cebirin kendine has standartlaştırılmış dili oluşmuştur. Başka bir deyişle cebir, cebirsel fikirleri anlatabilmek ve formüle edebilmek için kendi dilbilgisine ve söz dizimine sahiptir (Drijvers, Goddijn ve Kindt, 2011).

Van De Walle ve ark.'nın (2014) bahsettiği gibi öğrencilerin kullandıkları sembollere dair kavramsal öğrenmelerin olmaması, onların cebirde başarısız olmalarının muhtemel sebeplerinden biridir. Çoğu yetişkin için sembollerle yapılan işlemler anlamdan yoksun kalmış ve matematiğe karşı olumsuz düşüncelerin oluşmasına neden olmuştur. Aslında semboller gerçek olayları temsil ederler ve problemlerin çözümü için faydalı araçlar olarak görülmelidirler. Bu nedenle öğrencilerin cebir öğreniminde zorlandıkları ve büyük öneme sahip olan iki konu karşımıza çıkar; eşit işareti ve değişken kavramı.

2.1.3.2.1 Eşit İşaretinin Anlamı

Cebirsel düşünmenin merkezinde iki ana tema yer almaktadır; bunlardan ilki genelleme yapma, ikincisi ise problem çözme ve matematiksel fikirlerin gösterimi için sembol kullanmadır (Carpenter ve Levi, 2000). Bu bağlamda eşitlik hem nicelikler ve nesneler arasında ilişki sunan bir bağıntı, hem de sembolü ile özdeşleşmiş bir kavramdır. Eşit işareti aritmetikte, cebirde, sayı ve işlemlerde kullanılan, en önemli sembollerden biridir (Van De Walle ve ark., 2014). Bununla birlikte literatürde cebirsel dili kullanabilme ve ilişkisel olarak eşit işaretinin anlamını bilme cebir bilgisinin önemli bileşenleri olarak görülmektedir (Dikkartın-Övez ve Çınar, 2018). Eşit işareti aritmetikte ve cebirde farklı anlam ve rollere sahiptir (Bulut, Aygün ve İpek, 2018). Öğrenciler eşit işaretiyle ilk olarak aritmetikte karşılaşmakta ve bu işareti sayısal ilişkilerde kullanmaktadır. Aritmetikte eşit işareti, tipik olarak gerçekleştirilecek eylem olarak yorumlanmaktadır (Behr, Erlwanger ve Nichols, 1980). Bu durum eşit işaretinin işlemsel anlamını ifade etmektedir. Fakat eşit işaretinin cebirdeki kullanımı bu şekilde değildir. Cebirde eşitlik prensibi, bir denklemin veya ifadenin her iki tarafının aynı miktarı ifade etmesidir. Kısacası eşit işaretinin anlamı, işaretin her iki tarafının da denk olması anlamına gelir (Carpenter, Franke ve Levi, 2003). Eşit işareti ilişkisel anlam taşıyan ve denge gösteren bir semboldür. Eşit işareti hakkında sınırlı kavrayış, cebir öğreniminde yaşanabilecek en büyük sorunlardan biridir. Eşit işaretinin ilişkisel olarak anlamlandırılamaması, cebir öğrenimi süresince öğrencilerin zorlanmalarına sebep olmaktadır (Rittle-Johnson ve Alibali, 1999). Eşit işaretini ilişkisel bir şekilde anlamak yalnızca denklemleri doğru yorumlamak ve üretmek için değil, aynı zamanda doğru işlemler yapmak için de gereklidir (Knuth, Stephens. McNeils ve Alibali, 2006).

Ne yazık ki birçok öğrenci eşit işaretinin anlamı konusunda birçok yanılgıya sahiptir ve onu yalnızca "işlemleri yerine getir" anlamında kullanmakta, ilişkisel anlamda "denk olan iki cümlenin karşılaştırılması" olarak değerlendirmemektedir (Oktaç, 2010). Ülkemizde de yapılan çalışmalarda öğrencilerin eşit işaretini ilişki bildiren bir sembol olarak değil, daha çok işlem bildiren bir sembol olarak anlamlandırdıkları tespit edilmiştir (Akkan ve Baki, 2016; Bulut, Aygün ve İpek, 2018; Usta ve Özdemir, 2018; Yıldız ve Atay, 2019). NCTM (2000) eşit işaretinin öğrenciler tarafından eylem bildiren bir sembol olarak görülmesinin giderilmesi gereken bir sorun olduğundan bahsetmiştir. Bu sorunun derslerde eşit işaretinin ilişkisel anlamından çok işlemsel anlamına daha fazla vurgu yapılmasından kaynaklandığı belirtilmiştir (McNeil, Grandau, Stephens, Krill, Alibali ve Knuth, 2004). Öğrenciler eşit işaretinin eşitliğin her iki yanında yer alan niceliklerin aynı olması anlamına geldiğini anladıklarında problemlerin çözümünü ilişkisel olarak düşünebileceklerdir. İlişkisel düşünme öğrencilerin miktarları hesaplamak yerine eşitliğin her iki yanındaki sayısal ilişkilere odaklanıp kullanmalarıyla ortaya çıkmaktadır (Van De Walle ve ark., 2014). Sınıf içinde yapılan etkinliklerde eşitlik kavramının öğretimi yapılırken öğrencilerin eşit işaretini "denge ve aynılık" anlamında ele almaları gerekmektedir.

2.1.3.2.2 Değişkenlerin anlamı

Değişken, erken yaşlardan itibaren matematik öğretimindeki en temel ve en önemli kavramlardan biridir (Philipp, 1992). Değişken kavramının anlaşılamaması, öğrencilerin cebirdeki başarılarını olumsuz yönde etkilemektedir (Kar, Çiltaş ve Işık, 2011; Kaya 2017). Çünkü öğrenciler eşit işareti ve değişkenin anlamını bilmeden cebir problemlerinin nasıl çözüleceğini anlamlandıramamaktadırlar (Van De Walle ve ark., 2014). Ayrıca bazı çalışmalarda lise ve daha ileri seviyelerdeki öğrencilerin öğreneceği diğer konuların anlaşılması için değişken kavramı üzerinde durulmuştur. Örneğin, fonksiyonların anlaşılması (Leinhardt, Zaslavsky ve Stein, 1990) ve analiz konularının öğretiminde (Jacobs, 2002) değişken kavramının önemine vurgu yapılmıştır. Cebir ile ilgili yapılan çalışmalarda değişken kavramına ait birçok tanıma rastlanmaktadır. Kieran (1981) ve Philipp (1992) değişkeni bir veya daha fazla sayıyı ifade eden harf ya da sembol olarak ifade ederken; Skemp (1971) verilen bir kümenin belirtilmemiş üyesi olarak tanımlamıştır. Tanımlarda geçen harf veya sembollerin ne olduğu ve hangi amaçla nasıl kullanıldığının açıklanmasına ihtiyaç duyulmaktadır. Çünkü matematiksel içeriğe göre değişken farklı anlamlara ve kullanımlara sahiptir. Bu bakımdan literatür incelendiğinde sembol ya da harflerin özelliklerine göre değişkenin bilinmeyen, parametre, nesne, sabit, yer tutucu, bağımlı ve bağımsız değişken, genelleştirilmiş sayı, etiket, soyut sembol gibi anlamlarının olduğu görülmektedir (Küchemann, 1978; Philipp, 1992; Usiskin, 1988).

Küchemann (1978) öğrencilerin harfli sembolleri yorumlamasını altı seviyede incelemiştir:

1. Harfe tek bir sayısal değer atanır.
2. Harf önemsenmez veya yorumlanmaz.
3. Harfi somut bir nesnenin kısaltılmışı ya da kendisi gibi görür.
4. Harfi bir bilinmeyen gibi düşünür ve değer vermeksizin üzerinde işlem yapılır.
5. Harfi genelleştirilmiş bir sayı olarak düşünür ve harfin birden fazla sayıyı temsil ettiğini benimser.
6. Harfi bir değişken olarak yorumlar ve harfi belli olmayan değerler kümesinin temsili olarak düşünür.

Bu kategorilerden özellikle son üçü öğrencilerin değişkenin farklı kullanım biçimlerinin farkında olmalarını gerektirmektedir. Değişken, bilinmeyen değer ve değişen nicelik anlamlarıyla kullanılabilir. Van De Walle ve ark.'nın (2014) bahsettiği gibi öğrenciler değişkenin bilinmeyen değer ve değişen nicelik anlamlarına daha fazla yoğunlaşmaktadırlar. İlkokul ve ortaokul seviyesinde verilen cebir öğretiminde her iki anlamını da kazandırmaya yönelik çalışmalar yapılmalıdır. Değişken kavramını anlama aritmetikten cebire geçişe temel sağlamakla birlikte, ileri seviyelerdeki tüm matematik öğrenimlerinin kavramsal olması için gereklidir (MacGregor ve Stacey, 1993).

Açık önermeleri doğru yapan evrensel kümenin her bir elemanı değişken olarak tanımlanmaktadır (Argün, Arıkan, Bulut ve Halıcıoğlu, 2014). Bu tanımda değişkenin değişen nicelik anlamı üzerinde vurgu yapılmaktadır. Van De Walle ve ark.'nın (2014) bahsettiği gibi değişkenin birden fazla hatta sonsuz değeri temsil edebilen önemli bir kavram olmasıyla beraber öğrenciler tarafından iyi anlaşılmamaktadır. Örneğin a+b=10 ifadesi birçok sayısal çözüme sahiptir ve burada değişkenler değişen nicelikler anlamında kullanılmıştır. Öğrenciler değişkeni bilinmeyen değerler anlamı ile öğrendikten sonra değişen nicelikler anlamına geçişte zorlanmaktadırlar. Bunun için ilkokulda öğrencilerin değişkenlerin çeşitli değerler alabileceğine yönelik deneyim kazanacakları etkinlikler yapılmalıdır.

Değişen nicelikler anlamının önemli noktalarından biri, en az iki değişkene sahip olması ve bu değişkenler arasında bir fonksiyonel ilişkinin olmasıdır (Dominguez, 2001). Yani 2x+3 ifadesi y gibi başka bir değere eşitlenirken x'e bağlı olarak y değişkeninin de değeri değişecektir. Dolayısıyla değişen nicelik anlamında kullanılan değişkenlerde en az iki değişken ve arasındaki ilişkiden bahsedilir. Buradan yola çıkarak Usiskin (1988) değişkenin, bilinmeyen değerler anlamı yerine değişen nicelikler anlamına vurgu yapılarak öğretilmesi gerektiğini savunmuştur.

Öğrencilerin değişkenler ile olan deneyimlerinde, değişkenleri bilinmeyen değerler olarak algıladıkları görülmüştür. Bilinmeyenin yerine gelmesi gereken sayının ne olabileceğini sormak yerine, cümleyi doğrulamak için hangi sayının kullanılması gerektiğini sormak ilişkisel düşüncenin gelişimini olumlu yönde etkiler (Van De Walle ve ark., 2014). Bilinmeyen anlamında değişkenin öğretiminde terazi modelleri kullanılabilir. Terazi modellerinde, somut şekillerin ardından harflerin kullanımı yapılarak sembol ve harflerin neyi temsil ettiğinin belirlenmesi sağlanabilir.

Sayılardan herhangi birini gizlemek denklem kavramına girişte yapılabilecek ilk adımlardan biridir. Sayıları gizleme ilk olarak parmakla, sonra bir kutu, en son bir harf kullanılarak yapılabilir. Sınıf içi uygulamalarında öğrencilerin denklemleri anlamalarını desteklemekte dikkat edilmesi gereken bazı hususlar vardır. Bunlar sırasıyla, eşit işaretinin denge anlamıyla kullanılması, bilinmeyeni temsil eden harfli sembollerin kullanılmaya başlanması, eşitliğin sağ tarafında bir sayısal değer yerine cebirsel ifade bulunan denklemler kullanılması ile öğrencilerin deneyimlerinin arttırılmasıdır (Çelik ve Arslan, 2019).

Denge anlamının verilmesinde en etkili yollardan biri terazi modelleridir. Sınıf içi uygulamalarda somut veya sanal terazi modelleri kullanılabilir. Terazi modelleri ile görselleştirme ve somutlaştırma öğrencilerin eşitlik ve denklem konusunu anlamalarına yardımcı olmaktadır. Burada ileriye dönük amaç denklemlerde sembolik yazıma geçildiğinde öğrencilerin artık terazi modelini kullanmadan da işlemleri yapabilmesidir. Terazi modeli kullanılarak eşitliğin her iki yanına aynı işlemlerin yapıldığı düşüncesi öne çıkarılır ve sonrasında denklem çözümüne devam edilir. Negatif içerikli durumlar ise gerçek yaşam durumlarına uymadığı için sadece matematiksel gösterimler üzerinden denklemler çözülmelidir.

Denklem çözme süreci eşitliğin her iki yanına aynı işlemlerin yapılarak bilinmeyenin bulunması temeline dayanır. Çelik ve Arslan (2019) yaptıkları çalışmada öğrencilerin denklem çözerken kullandıkları yöntemleri Çizelge 2.1'deki gibi sınıflandırmıştır.

Çizelge 2.1 Denklem çözüm yöntemleri (Çelik ve Arslan, 2019, s.160)

Çözüm Yöntemleri	**Örnek**
Sayılara ait özellikleri kullanma	Öğrencinin 7+x=12 denklemini çözmek için 7 ile 5'in toplamının 12 olduğunu bilgisinden hareketle x=5 cevabını vermesi
Sayma tekniklerini kullanma	7+x=12 denklemini çözmek için 7'nin üzerine 8, 9, 10, 11, 12 şeklinde sayarak 7'den 12'ye ulaşmak için 5 eklemek gerektiğini fark etmesi
Geriye doğru çalışma	2x+4=18 denklemini çözmek için eşitliğin sağ tarafındaki 18'i elde etmek için yapılan işlemler tersinden yürütülerek x=7 bulunur.
Deneme ve yanılma	2x+4=18 denklemini çözmek için x yerine 7 değerini verme ve eşitliği sağlayıp sağlamadığını kontrol etme
Yer değiştirme	2x+4=18 denklemini çözmek için 4 eşitliğin diğer tarafına -4 olarak geçer. Denklem 2x=14 formunu alır. x'in çarpım durumundaki katsayısı eşitliğin diğer tarafına bölü 2 olarak geçer ve x=7 bulunur.
Eşitliğin her iki yanına aynı işlemi yapma	2x+4=18 denklemini çözmek için eşitliğin her iki tarafından 4 çıkarılır. 2x+4-4=18-4, buradan 2x=14 elde edilir. Daha sonra eşitliğin her iki tarafı 2'ye bölünür ve x=7 bulunur.

Denklem çözmede formal yöntem olarak yer değiştirme ve eşitliğin her iki yanına aynı işlemleri yapma yöntemleri kullanılır. Bu iki yöntem cebire yeni başlayan öğrenciler için birbirinden çok farklı algılanmaktadır (Kieran, 1992). Aslında yer değiştirme eşitliğin her iki yanına aynı işlemi yapma yönteminin kısaltılmış halidir. Bazı öğrenciler yer değiştirme yöntemini kullanarak yaptıkları işlemlerin altında yatan anlamlarını düşünmeden, sadece kural uygulayarak mekanik bir şekilde denklemleri çözme eğilimindedir. Eşitliğin her iki yanına aynı işlemleri yapmak denklemin simetri özelliğine vurgu yaparken bu durum yer değiştirme yönteminde gözlemlenemememektedir (Çelik ve Arslan, 2019).

2.1.3.3 Sayı Sistemlerindeki Yapıyı Görünür Kılmak

Erken yaşlarda aritmetik konularını yeteri kadar öğrenen öğrencilerin ortaokulda cebir konularında da başarılı olmaları beklenmektedir. Çünkü cebirsel yapı, sayı sistemlerinin yapısının bir uzantısı olarak karşımıza çıkmaktadır (Greeno, 1991). Sayı sistemlerindeki özelliklerin farkına varan öğrenciler, değişkenleri kullanarak cebirsel genellemelerde bulunabilirler. Gerçek sayı sisteminde türetilen yapı ve özellikler ilişkisel düşünmenin gelişiminde öğrenciler tarafından informal olarak kullanılmaktadır. Dolayısıyla sayı sistemlerinde türetilen bu yapı ve özellikler özel sayılara işaret etmeksizin öğrencilere inceletilmeli ve öğrencilerin bunları genel terimlerle ifade etmeleri sağlanmalıdır (Van De Walle ve ark., 2014). Örneğin 457+348=B+457 eşitliğini değişkenin alacağı değeri bulmaya çalışan öğrenciler 457+348 ifadesi ile 348+457 ifadesinin aynı olduğunu söyleyebilir. Bahsedilen örnekteki asıl amaç; özel bir hali ile kullanılan değişme özelliğinin a+b=b+a gibi bir formda kullanıp bunun tüm sayılar için doğru olduğunu belirtmektir.

Sayı sistemlerindeki yapı ve özellikler üzerine kurulan varsayımların doğruluğunu gösterme girişimi önemli bir cebirsel düşünme biçimidir. Öğrencileri yaptıkları varsayımların doğruluğunu göstermeleri için doğru\yanlış ve açık cümle örneklerinden yararlanılabilir. Van De Walle ve ark.'nın (2014) bahsettiği gibi sınıflarda varsayımlar yapılırken öğrencilere doğru sonuç odaklı sorular sormak yerine "Bunun her zaman doğru olduğunu düşünüyor musun?", "Bütün sayılar için doğru mudur?", "Bunu nasıl anlayabiliriz?" şeklinde kendi düşüncelerini ortaya koyabilecekleri sorular yöneltilmelidir. Öğrencilere aşağıdaki Çizelge 2.2'de sunulan özellikleri hazır olarak sunmak yerine kendilerinin genelleme yapabilecekleri örnekler ve etkinlikler üzerine odaklanılmalıdır.

Çizelge 2.2 Sayı Sistemlerinin Özellikleri (Carpenter ve ark., 2003).

Sayı cümlesi	Öğrenci Varsayım İfadesi
	Toplama ve çıkarma
a+0 = a	Bir sayıya sıfır eklediğinizde, başlangıçtaki sayıyı elde edersiniz.
a-0 = a	Bir sayıdan sıfır çıkardığınızda, başlangıçtaki sayıyı elde edersiniz.
a-a = 0	Bir sayıyı kendisinden çıkardığınızda sıfır elde edersiniz.
a+b = b+a	Sayıları bir sıraya toplayıp ve sonra sıralamayı değiştirerek topladığınızda aynı sayıyı elde edersiniz.
	Çarpma ve bölme
ax1 = a	Bir sayıyı 1 ile çarptığınızda başlangıçtaki sayıyı elde edersiniz.
a÷1 = a	Bir sayıyı 1 ile böldüğünüzde başlangıçtaki sayıyı elde edersiniz.
a÷a = 1, a≠0	Sıfırdan farklı bir sayıyı kendisine böldüğünüzde 1 elde edersiniz.
ax0 = 0	Bir sayıyı sıfırla çarptığınızda sıfır elde edersiniz.
0:a = 0, a≠0	Sıfırı, sıfırdan farklı bir sayıyla böldüğünüzde sıfır elde edersiniz.
axb = bxa	İki sayıyı çarparken çarpmayı istediğiniz sırayla yaparsınız aynı sayıyı elde edersiniz.
	Temel özelliklerden elde edilen varsayımlar
a+b-b = a	Bir sayıya başka bir sayı eklediğinizde ve sonra eklediğiniz sayıyı çıkardığınızda başlangıçtaki sayıyı elde edersiniz.
axb÷b = a, b≠0	Bir sayıyı sıfırdan farklı bir sayıyla çarptığınızda ve sonra aynı sayıya böldüğünüzde başlangıçtaki sayıyı elde edersiniz.

Öğrencilere yaptıkları varsayımları deneme imkânları vererek çok büyük sayılarla hatta ondalık gösterimler ve rasyonel kesirleri kullanarak yaptıkları genellemeleri doğrulama fırsatı verilmelidir. Ayrıca uygun somut materyallerin kullanımı öğrencilerin genellemelerini desteklemede yardımcı olacaktır.

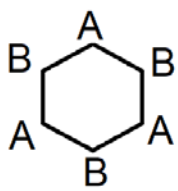
2.1.3.4 Örüntüler ve Fonksiyonları Çalışmak

Türk Dil Kurumunun güncel sözlüğünde örüntü, "olay ve nesnelerin düzenli bir biçimde birbirini takip ederek gelişmesi" şeklinde tanımlanmıştır (TDK, 2021). Matematik öğretimi alanında yapılan literatür incelemesinde farklı tanımlara rastlanmaktadır. Guerrero ve Rivera (2002) örüntüyü sayı ve şekiller gibi bir dizi matematiksel nesnelerin belli bir kural çerçevesinde bir araya getirilmesi olarak tanımlamıştır. Papic ve Mulligan (2005) sayılar ve uzayla ilgili düzen durumu; Olkun ve Toluk-Uçar (2006) ise belli bir düzene göre nesne ya da şekillerin oluşturduğu manzume olarak örüntüyü tanımlamışlardır. Bu tanımlardan da anlaşılacağı üzere örüntülerin en belirgin özellikleri kural, düzen ve genel ifadedir. Van De Walle ve ark.'nın (2014) bahsettiği üzere örüntüler matematiğin bütün alanlarında bulunur. Örüntü aramayı ve onların nasıl ifade edileceğini, farklı durumlara nasıl aktarılacağını ve nasıl genişletileceğini öğrenmek cebirsel düşünmenin bir parçasıdır. Literatürde yapılan incelemelerde örüntülerin yapılarına ve sunuş biçimlerine göre tekrarlayan örüntüler ve genişleyen örüntüler başlıkları altında iki sınıfta kategorize edildiği görülmüştür (Bukova Güzel, 2016; Tanışlı ve Özdaş, 2009; Warner ve Cooper, 2006).

Olkun ve Yeşildere'ye (2007) göre tekrarlanan\tekrarlayan örüntüler, terimler arasında sabit bir ilişkiyle dizilimin ötelenmesi sonucu oluşmuştur. Örüntünün en küçük parçası olan birim, tekrarlı şekilde ötelenir ve burada en küçük parça tekrar birimidir (Liljedahl, 2004). Tekrarlayan örüntülerin terimleri şekil, harf veya sayı olabilir. Papic (2007) tekrarlayan örüntüleri doğrusal, döngüsel ve sek sek örüntüler biçiminde üç grupta incelemiştir. Örneğin 192319231923… örüntüsü tekrarlayan doğrusal bir sayı örüntüsüdür. Bu örüntü dört nitelikli tekrarlayan bir örüntü olup tekrar birimi 1923'tür. Tekrarlayan doğrusal şekil örüntüsüne Şekil 2.1'deki örüntü örnek olarak verilebilir. Bu örüntü iki nitelikli tekrarlayan bir örüntü olup tekrar birimi 'dir.

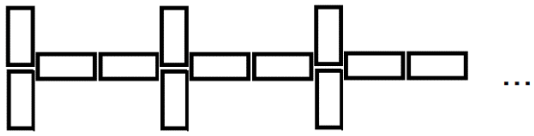
Şekil 2.1 Doğrusal Tekrarlayan Şekil Örüntüsü

Başlangıcı ve bitişi belli olmayan örüntülere döngüsel örüntü adı verilir. Örneğin Şekil 2.2'deki altıgenin köşelerindeki harfler döngüsel bir örüntü örneğidir.



Şekil 2.2 Döngüsel Tekrarlayan Örüntü Örneği

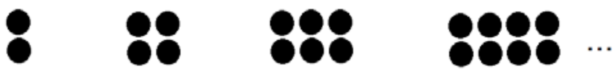
Papic'in (2007) değindiği sek sek örüntünün yatay ve dikey bloklar ile oluşturulmuş bir örneği Şekil 2.3'te sunulmuştur.



Şekil 2.3 Sek Sek Örüntü Örneği

Genişleyen örüntülerde terimler belli bir kurala göre sıralanır ve terimler arasındaki ilişkiler genişleyen veya daralan bir süreçle devam eder (Olkun ve Yeşildere, 2007). Tanışlı ve Olkun (2009) genişleyen örüntüleri aritmetik genişleyen, geometrik genişleyen, artarak genişleyen ve diğer (özel) genişleyen örüntüler olmak üzere dört alt kategoride incelemişlerdir.

Aritmetik genişleyen örüntülerde her bir terim kendinden öncekinden sabit bir sayı kadar fazlası veya sabit bir sayı kadar azı şeklinde ilerlemektedir. Örneğin Şekil 2.4'teki örüntüde terimler arasındaki sabit artış miktarı ikidir.



Şekil 2.4 Aritmetik (Sabit Değişen) Şekil Örüntüsü Örneği

Geometrik genişleyen örüntülerde iki terim arasında sabit bir oran vardır. Örneğin; "1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, …" şeklinde ilerleyen örüntünün ardışık terimleri arasındaki oranın 2 olduğu görülmektedir.

Artarak genişleyen örüntülerin terimleri arasındaki fark giderek artmaktadır. Örneğin; "1, 4, 9, 16, 25, 36, …" örüntüsünün terimleri arasındaki farkın ardışık tek sayılar olduğu gözükmektedir.

Diğer (özel) örüntü türlerinde terimler sabit ya da artarak değişen bir şekilde ilerlemez; yine de terimler arasında bir ilişki vardır. Örneğin; Fibonacci sayıları, "1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, …" şeklinde ilerler. Fibonacci sayılarında her terim kendisinden önceki iki terimin toplamı şeklinde ilerlemektedir.

Öğrencilere bahsi geçen farklı türlerden örüntü problemleri ile çalışma fırsatı verilmesi cebirsel düşünmenin gelişimine katkı sağlamaktadır (Akkan, Öztürk ve Akkan, 2017). Bunun yanında literatür incelendiğinde örüntüleri genellemede iki genelleme stratejisi karşımıza çıkmaktadır. Bunlar devam eden örüntünün yakın adımını bulma (yakın genelleme) ve verilen örüntünün genel terimini bulma (uzak genelleme) şeklindedir (Garcia-Kruz ve Martinôn, 1998; Stacey, 1989). Öğrenciler tarafından yakın genelleme yapmanın daha kolay olduğu aşikârdır (Çayir, 2013; Özdemir, Dikici ve Kültür, 2015). Örüntülerin yapısını anlamak amacıyla bu tür genelleme yapmak faydalıdır fakat cebirsel düşünmenin gelişimi açısından uzak genellemenin önemi daha fazladır. Bazı öğrencilerin örüntü ile ilgili kuralı bulup n. terimini bulmak yerine terimler arasındaki farkı her defasında ekleyerek n. terimi bulmaya çalışmaları genelleme yapmaları üzerinde büyük bir engeldir. Nitekim bu durum her seferinde örüntünün uzak adımlarını bulamamalarıyla sonuçlanabilir. Buna paralel olarak Stacey (1989) ile Samsan, Linchevski ve Olivier (1999) çalışmalarında öğrencilerin yakın genellemeleri kolayca yapabildiklerinden ancak uzak genellemede zorlandıklarından söz etmiştir. Benzer bir çalışmada Hargreaves, Shorrocks-Taylor ve Threlfall (1998) doğrusal sayı örüntülerinin kuralını bulmak için öğrencilerin terim ile ilgili terimin adım sayısı arasındaki ilişkiye yoğunlaşmak yerine terimler arasındaki sabit farka yoğunlaştığından bahsetmiştir. Bunun sonucu olarak öğrencilerin artarak değişen (terimlerin arasındaki farkın sabit olmadığı) örüntüleri sürdürmekte zorlandıkları belirtilmiştir. Ayrıca öğrencilerin şekil örüntülerinde şekilsel analizlerden çok, işlemsel analizlerle ilgilendikleri gözlemlenmiştir (Baş, Çetinkaya ve Erbaş, 2011; Yeşildere ve Akkoç, 2010). Ancak aynı çalışmalarda sayısal ilişkilerden çok modelle ilgilenen öğrencilerin uzak genelleme yapmada daha başarılı oldukları tespit edilmiştir.

Bu bakımdan etkinlikler esnasında öğrencilere her iki genelleme türünü (yakın ve uzak genelleme) yapmaları için fırsatlar verilmeli ve özellikle başlangıç aşamasında görsel yönü çok güçlü olan şekil örüntülerinden bol miktarda yararlanılmalıdır.

Örüntüleri oluşturma, devam ettirme ve kuralını bulmada farklı stratejiler ele alınmaktadır (Lannin, Barker ve Townsend, 2006; Orton ve Orton, 1999; Samsan ve ark., 1999). Fakat örüntü genellemeleri ile ilgili üç ana stratejiden bahsedilmektedir. Bunlar yinelemeli, bütüne genişletme ve belirgin stratejilerdir. Aşağıda bu stratejiler açıklanmaktadır:

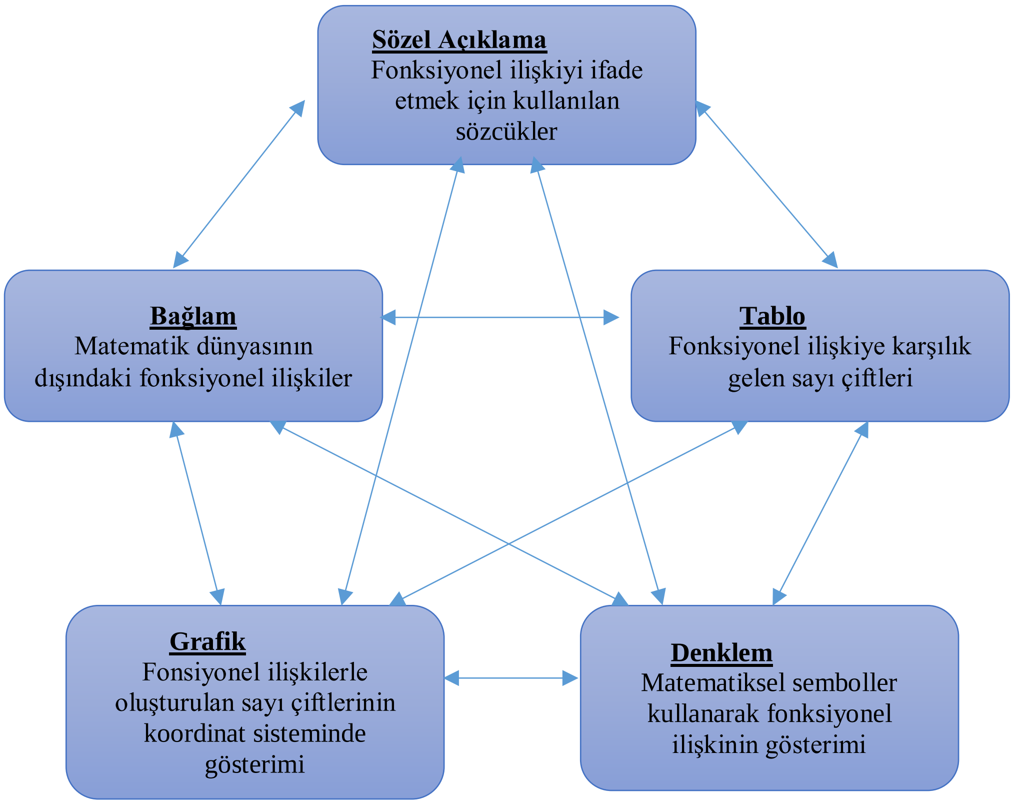
Yinelemeli (Recursive) Strateji: Bu stratejide örüntünün bir önceki teriminden yararlanarak bir sonraki terimini bulmaya odaklanılmaktadır. Bu süreçte örüntünün birbirini takip eden iki terimi arasındaki farkı bulunmaya çalışılmakta ve bu fark son verilen terimin üzerine eklenerek örüntü devam ettirilmektedir. Bu stratejide sadece çıktı değerleri üzerine yoğunlaşıldığından öğrenciler örüntülerdeki fonksiyonel ilişkileri görmekte zorlanmaktadır (Warren, 2005).

Bütüne Genişletme (Whole Object) Stratejisi: Bir örüntü sorusunun çözümüne orantısal akıl yürütme ile ulaşılan stratejidir. Yani bu stratejide örüntüdeki girdiler arasında bir oran bulunması ve daha sonra bu oranın örüntünün geneline uygulanması söz konusudur. Fakat bu strateji sık sık hatalı uygulanmaktadır. Örneğin yan yana dizilen iki masanın etrafında 6 kişi, üç masanın etrafında 8 kişinin oturduğu örnek verildiğinde, 10 masanın etrafında 30 kişinin oturması gerektiğinin söylenmesi hatalı bir yanıttır. Burada örüntünün ilk basamağında kişi sayısı, masa sayısının üç katı olduğundan 10 masa olması durumunda da 3 katı alınarak sonuç bulunmuştur.

Belirgin (Explicit) veya Fonksiyonel Strateji: Belirli bir girdi değeri için herhangi bir çıktı değerinin hesaplanması ile kuralın bulunduğu stratejidir. Bu strateji bağımlı ve bağımsız değişkenlerin arasındaki ilişkinin hesaplanmasına dayanır (Healy ve Hoyles, 1999). Örneğin yan yana dizilen iki masanın etrafında 6 kişi, üç masanın etrafında 8 kişinin oturduğu örnek verildiğinde kişi sayısının masa sayısının iki katının 2 eksiği olduğunun öğrenciler tarafından hesaplandığı stratejidir. Bu sayede öğrencilerin örüntünün kuralını 2n-2 şeklinde yazmaları kolaylaşacaktır. Bu stratejinin temelinde örüntüdeki fonksiyonel ilişkilerin farkına varılması yer almaktadır.

Blanton, Levi, Crites Daugherty ve Zbiek (2011) fonksiyonel düşünmeyi, “değişen nicelikler arasındaki ilişkiyi genelleme ve bu ilişkiyi kelime, sembol, grafik ve tablo gibi temsil biçimleriyle ifade etme ve fonksiyonu analiz etme için temsilleri kullanarak akıl yürütme” şeklinde tanımlamıştır. Genel anlamıyla fonksiyonlar daha özel olarak doğrusal fonksiyonlar (Uygulamada olan ilkokul ve ortaokul matematik programında öğrencilere fonksiyon kavramının verilmediğinden doğrusal fonksiyon yerine doğrusal ilişki olarak bahsedilmektedir.) ortaokul cebir öğretiminde temel konulardan biridir. Bu bakımdan öğrencilerin doğrusal ilişkileri farklı temsil biçimleri ile temsil etmeleri, temsiller arasındaki geçişleri yapabilmeleri, farklı temsilleri birbiri ile ilişkilendirebilmeleri ve bu ilişkileri kullanarak doğrusal ilişkileri çeşitli yönleriyle analiz edip genellemelere ulaşmaları beklenmektedir (MEB, 2018).

Doğrusal ilişkileri anlamlandırmada, bu ilişkiyi farklı temsillerle ifade etmede ve bu temsiller arasında geçiş yapmada değişken kavramı önemli bir rol oynamaktadır. Değişken kavramını farklı yönleriyle öğrenmede çoklu temsillerden yararlanmak büyük önem arz etmektedir. Çünkü öğrencilerin farklı temsil biçimleri arasında geçişte fonksiyon kavramının gelişimine doğrudan katkı sağlamaktadır (Knuth, 2000). Her temsil biçimi aslında aynı ilişkiyi temsil etmekte fakat farklı yönlerini ön plana çıkarmaktadır. Bu şekilde öğrenciler hem daha kolay öğrenebilmekte hem de çok yönlü bir bakış açısı kazanmaktadır. Bir cebirsel ilişkiye ait farklı temsil biçimleri ve bu temsil biçimleri arasındaki ilişkiyi Van De Walle ve ark.(2014) Şekil 2.5'teki gibi özetlemiştir:



Şekil 2.5 Cebirsel ilişkiye ait farklı temsiller arasındaki ilişkiler (Van De Walle ve ark., 2014).

Fonksiyonların öğrenciler tarafından anlamlandırılması farklı temsil yollarının kullanımıyla ve bu temsillerin aralarındaki ilişkilerin farkına varılmasıyla derinleşecektir. Buna paralel olarak Van De Walle ve ark.'nın (2014) bahsettiği üzere farklı temsillerin kullanımı fonksiyonel düşünmenin gelişimine katkı sağlayacaktır. İlginç ve anlamlı gelen problemlerde değişim ilişkisine odaklanılmasının, ardından bu ilişkileri kelime, grafik, tablo ve denklemlerle ifade edilmesinin önemi vurgulanmıştır. Sonuç olarak derslerde ele alınan kavramlarda mümkün olduğunca fazla temsil türüne yer verilmesi hem öğrencilerin kavramlara karşı anlamalarını kolaylaştırmak hem de derinleştirmek açısından önemlidir.

Son zamanlarda fonksiyonel düşünmenin doğası, bu düşüncenin nasıl ortaya çıktığı ve gelişim düzeylerini belirlemek adına bazı çalışmalar yapılmaktadır (Blanton, Brizuela, Gardiner, Sawrey ve Newman-Owens, 2015; Stephens, Fonger, Blanton ve Knuth, 2016; Stephens, Fonger, Strachota, Isler, Blanton, Knuth ve Gardiner, 2017; Türkmen ve Tanışlı, 2019). Blanton ve ark. (2015) yaptıkları çalışmada öğrencilerin fonksiyonel düşünme düzeylerini ortaya koymak amacıyla 8 hafta süren bir öğretim deneyi tasarlamışlardır. Tasarlanan bu öğretim deneyinde y=mx+n şeklindeki denklemler ele alınmış ve öğrencilerin fonksiyonel düşünme düzeyleri Çizelge 2.3'te gösterildiği gibi belirtilmiştir.

Çizelge 2.3 Fonksiyonel İlişkiyi Anlama Düzeyleri (Türkmen ve Tanışlı, 2019, s. 347)

Düzeyler	Özellikleri
Ön Yapısal	Öğrenciler verilen örüntüleri tanımlayamaz ya da kullanamazlar.
Yinelemeli-Özel	Öğrenciler yalnızca özel durumlar için yinelemeli örüntüyü tanımlayabilirler.
Yinelemeli-Genel	Öğrenciler belli örneklere bağlı kalmadan, keyfi ardışık değerler arasında yinelemeli örüntüyü tanımlayabilirler.
Fonksiyonel Özel	Öğrenciler belli dizinin tüm değerleri için genelleştirilmiş bir fonksiyonel ilişkiyi tanımlayamasa da özel durumlar için fonksiyonel ilişkiyi tanımlayabilirler.
Basit Fonksiyonel-Genel	Öğrenciler fonksiyonel ilişkiyi iki nicelik arasındaki genel bir ilişki olarak kavramsallaştırabilirler. Fakat iki keyfi nicelik arasında matematiksel bir dönüşüm tanımlayamazlar.
Gelişmiş Fonksiyonel-Genel	Öğrenciler fonksiyonel ilişkinin yanında karşılaştırılan nicelikleri de tanımlayabilir fakat nicelikler arasındaki matematiksel dönüşümleri açıkça ifade edemezler.
Yoğun Fonksiyonel –Genel	Öğrenciler nicelikler arasındaki ilişkiyi matematiksel cümlelerle ve değişken kullanarak doğru bir şekilde ifade ederler.
Nesnel Olarak Fonksiyon	Öğrenciler fonksiyonel ilişkiyi yapısal olarak kendi içinde süreçlerin gerçekleştirilebileceği bir nesne olarak kavramsallaştırırlar.

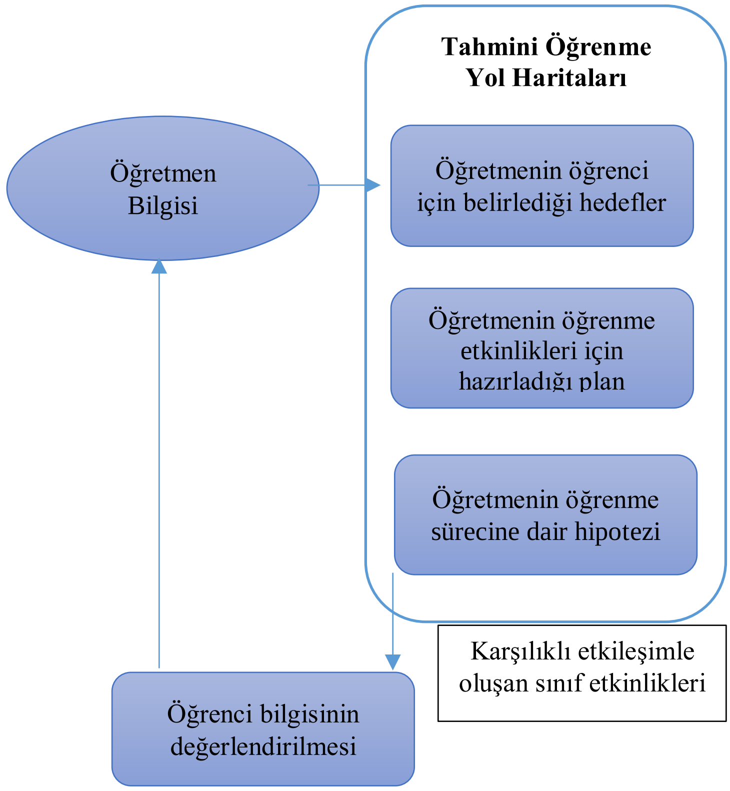
2.1.3.5 Matematiksel Modelleme Süreci

Kaput (1999) modellemeyi gerçek olgular ile başlayarak matematiksel cümleler vasıtasıyla ifade etme süreci olarak tanımlamıştır. Matematiksel modellemede gerçek yaşamda yer alan konular matematiksel olarak ele alınır. Böylece matematiksel teknikler asıl konuyu aydınlatmak için kullanılır. Bunun yanında Lingefjärd'a (2002) göre matematiksel modelleme bir fenomenin gözlenmesi, ilişkilerin ortaya çıkarılması, analiz edilmesi, sonuç çıkarılması ve yeniden yorumlanması sürecini içerir. Matematiksel modelleme en genel anlamıyla bir olayı, olguyu, olaylar arasındaki ilişkiyi matematiksel olarak ifade etme, matematiksel örüntüler çıkarma sürecidir (Verschaffel, Greer ve De Corte,2002).

2.2 Matematik Öğretim Döngüsü ve Tahmini Öğrenme Yol Haritaları (TÖYH)

Son yıllarda öğrencilerin öğrenmesine odaklanarak bu süreçte hangi yolları takip ettiklerini ortaya koymak amacıyla öğrenme haritaları ismiyle adlandırılan yeni bir araştırma konusu ortaya çıkmıştır. Öğrenme haritalarının literatürde farklı terimlerle birlikte kullanıldığı görülmüştür. Simon (1995) hipotezsel öğrenme yörüngesi; Brown ve Campione (1996) gelişimsel koridor, büyük fikirler; Confrey, Maloney, Nguyen, Wilson ve Mojica (2008) öğrenme yörüngesi; Catley, Lehrer ve Reiser (2004) öğrenme performansları terimlerini kullanmıştır. Bu çalışmalarda kullanılan farklı terimlerin ana teması bilginin zamanla tahmin edilebilir şekilde kolaydan zora doğru ilerlemesinin anlamlandırılması şeklinde ifade edilebilir (Clements, Wilson ve Sarama, 2004). Başka bir ifadeyle öğrencilerin bir kavrama dair düşünceleri ve öğrenmeleri betimlenerek daha derinlemesine bir öğrenmenin gerçekleşmesi için etkinlikler düzenlenebilir. Dolayısıyla öğrenme haritaları dersin planlanması, uygulanması ve değerlendirilmesinde öğretmenlerin kullandığı araç gereçlerin tamamı olarak ifade edilebilir.

Öğrenme haritaları literatürde ilk olarak Simon (1995) tarafından kullanmıştır. Simon'a (1995) göre öğretmenlerin öğretim öncesinde tahmini bir öğrenme haritası oluşturduğu, öğretim etkinlikleri için plan geliştirdiği bir süreçtir. Öğretmenler sınıf içerisinde öğrencilerle etkileşime girdikçe ve öğrencileri gözlemledikçe onlarla birlikte bir deneyim oluştururlar. Bu deneyim sosyal yapının doğası gereği beklenenden farklı olabileceğinden tahmini bir süreçtir. Simon (1995) bu tahmini öğrenme haritasının matematik öğretimi ile nasıl bir etkileşim içerisinde olduğunu Matematik Öğretim Döngüsü (MÖD) teorik çatısı altında açıklamıştır. Bu döngü Şekil 2.6'da gösterildiği gibi öğrenci bilgisinin değerlendirilmesini, öğretmen bilgisini ve Tahmini Öğrenme Yol Haritasını (TÖYH) içerir.



Şekil 2.6 Matematik Öğretim Döngüsü (Simon, 1995, s. 136)

Simon (1995) bu teorik çerçeveyi kavramsal öğrenmenin gerçekleşmesi için derslerin planlanmasında yol gösterici olmasını amaçlayarak matematik öğretiminde kullanılan bir tasarım aracı olarak üretmiştir. Matematik öğretim döngüsünün merkezinde yer alan TÖYH üç ana bileşenden oluşmaktadır. Bunlar sırasıyla şu şekildedir:

1. Öğretmenin öğrenci için belirlediği öğrenme hedefleri

2. Öğretimi destekleyecek ve geliştirecek etkinlikler/plan

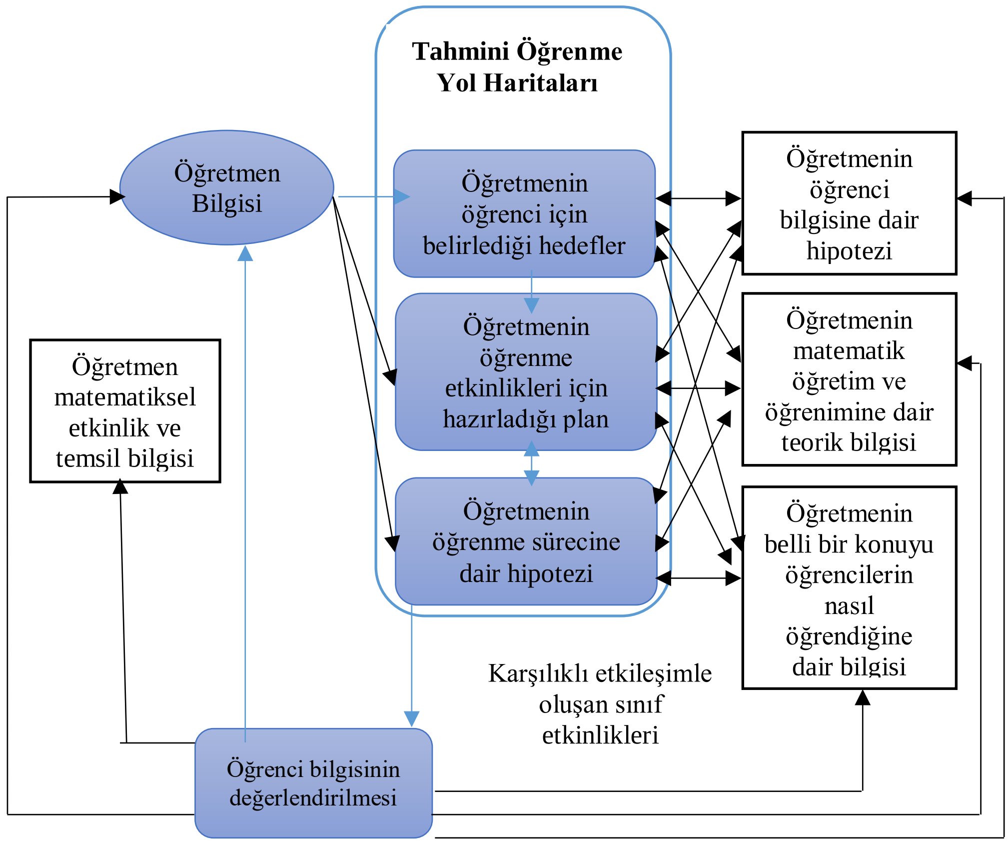
3. Öğrencilerin öğrenme etkinlikleri ile düşünme ve anlamalarının nasıl gerçekleşeceğine dair hipotezler

TÖYH'nin ilk bileşeni döngünün başlangıcı olan öğretmenin öğrenciler için belirlediği öğrenme hedefleridir. Simon (1995) öğrenme hedefini belirlemeyi birbirleriyle ilişkili olan iki faktöre dayandırmıştır. Bu iki faktör öğretmenin matematiksel bilgisi ve öğretmenin öğrencisinin bilgisi ile ilgili tahmini şeklindedir. Başka bir ifadeyle öğretmen öğrenme hedefini belirlerken belirlediği konu hakkında yeterli matematiksel bilgiye sahip olmalı, ayrıca bu hedefin öğrencilerin ön bilgilerine ve yeterlilik düzeylerine uygun olması gerekmektedir (Zembat, 2016). Bununla birlikte TÖYH, öğretmenin daima tek bir amacı takip etmesi ya da tek bir yol haritasını düşünmesi anlamına gelmemektedir. Aksine TÖYH'de hedefler sürekli revize edilebilmektedir.

TÖYH'nin ikinci aşamasında öğretmen bir plan dâhilinde öğretimi destekleyici ve geliştirici etkinlikler oluşturmaktadır. Matematiksel etkinlikler matematik öğretiminde anahtar rol oynamaktadır (Simon, 1995). Etkinlikler esnasında öğrenciler sınıf içi tartışmalarla birbirleriyle etkileşime girerek derinlemesine düşünme fırsatı bulurlar. Bu çalışma biçimi hem öğrencilerin öğrenmelerini destekleyecek hem de öğretmenlerin öğrencilerin bilgisini kontrol etmesine fırsat verecektir.

TÖYH'nin üçüncü bileşeni ise öğretmenlerin etkinlikler vasıtasıyla öğrencilerin düşünme ve anlayışlarının nasıl değişeceğine dair yaptığı hipotezleridir. Öğretmenin dersi planlarken öğrencilerin nasıl öğrenebileceği ve bu süreçte öğrencilerin yaşayabileceği sorunlara dair hipotezler kurması gerekmektedir (Zembat, 2016). Öğretmenin kurduğu hipotezler ne kadar tutarlı ise öğretim de o kadar iyi gerçekleşecektir. Etkinlikler hazırlanırken öğretimin nasıl gerçekleşeceğine dair hipotezler göz önünde bulundurulur. Öte yandan hipotezler belirlenen etkinliklere dayanmaktadır. Bu yüzden bu iki bileşen arasında çift yönlü bir ilişki bulunmaktadır. Böylece TÖYH'nin bileşenleri tamamlanmış olur.

Öğretmen bilgisi matematik öğretim döngüsünde oldukça önemli bir yere sahiptir. Dersler planlandığı üzere uygulandıktan sonra öğretmen kendi bilgisi ölçüsünde geriye dönük analizler yapar ve MÖD yeniden başlar. Öğretmen bilgisinin MÖD'nin bileşenleri ile olan ilişkisi Şekil 2.7'de daha ayrıntılı olarak gösterilmiştir.



Şekil 2.7 Matematik Öğretim Döngüsünün Etkileşimlerini İçeren Modeli (Simon, 1995 s.137)

Simon (1995) öğretmenin matematik bilgisi ve öğrenci bilgisinin, tahmini öğrenme hedefleri belirlenirken öğretmene katkı sağladığından bahsetmiştir. Ayrıca öğretmenin matematiksel etkinlik ve temsil bilgisi, öğretmenin matematik öğretimi ve öğrenimiyle ilgili teorik bilgisi, öğretmenin öğrencinin belirli bir konuyu öğrenirken nasıl öğrendiğine dair sahip olduğu bilgilerin tamamı; öğrenme etkinliklerinin ve tahmini öğrenme sürecinin gelişiminde katkıda bulunacağından bahsetmiştir (Simon, 1995). Öğretmenlerin bahsedilen bu bilgilerinin tamamı tahmini öğrenme haritasının oluşumu ve uygulanması sürecini etkilemektedir.

Öğretmen öğretim öncesinde bu yol haritaları sayesinde ders planları oluşturabilir. Dolayısıyla TÖYH belirli bir matematik konusunun öğretiminde kavramsal öğrenmeyi planlamak için bir ders aracı olarak kullanılabilir. Bu yapı iyi anlaşılır ve uygulanırsa başarılı bir ders tasarımı ya da revizesi mümkün olan bir ders tasarımı hazırlanabilir (Simon 1995).

Bu araştırmada TÖYH dersi planlama sürecinde öğretim aracı olarak kullanılmıştır. Cebir öğrenme alanında 7. sınıf kazanımlarını içeren bir öğretim deneyi sürecinde literatüre dayalı olarak matematik öğretimi alanında bir uzmanla birlikte TÖYH ve ders planları hazırlanmıştır.

2.3 İlgili Araştırmalar

Literatürde yapılan inceleme sonucu cebir öğretimi ve TÖYH ile ilgili yurt içinde ve yurt dışında yapılmış araştırmalara ulaşılmıştır. Bu araştırmalara Ulusal Tez Merkezi, EBSCO, Eric, Google Akademik vb. veri tabanlarının taranması ve eldeki mevcut kaynakların incelenmesi suretiyle ulaşılmıştır. Yapılan bu araştırma ile benzerlik gösteren bazı araştırmalar ve bulguları aşağıda özetlenmektedir.

2.3.1 Cebir Öğretimi İle İlgili Araştırmalar

Kieran (1992), çalışmasında öğrencilerin eşit işaretini nasıl algıladıklarını incelemiştir. Araştırmada öğrencilerden eşit işaretinin ne anlama geldiğini örneklerle açıklamaları istenmiştir. Ardından öğrencilere eşitliğin iki yanında aynı tür işlemlerin bulunduğu (örnek:3x6=2x9), daha sonra eşitliğin iki yanında farklı tür işlemlerin bulunduğu (örnek:4x3=10+2), en son olarak da eşitliğin her iki tarafında birden çok işlemin bulunduğu (ör: 7x2+3-2=5x2-1+6) örnekler verilmiştir. Öğrencilerden eşitliğin her iki tarafındaki eşitliği belirlemeleri istenmiştir. Araştırmanın sonucunda öğrencilerin eşittir işaretinin işlemsel anlamından ilişkisel anlamına geçtikleri gözlenmiştir. Öğrencilerin eşit işaretini her zaman sonuç ifade eden bir sembol olarak değil denklik ifade eden bir sembol anlamıyla kullanmaya başladıkları sonucuna ulaşılmıştır.

Falkner, Levi ve Carpenter (1999), araştırmalarında öğrencilerin eşitlik kavramını nasıl anladıklarını incelemiştir. Araştırma 145 6. sınıf öğrencisi ile yürütülmüştür. Araştırmada öğrencilere “8+4=□+5” eşitliğinde kutu yerine gelmesi gereken sayı sorulduğunda çoğu öğrencinin hatalı olarak 12 veya 17 cevabını verdiği görülmüştür. Araştırma sonucunda öğrencilerin eşit işaretini denge anlamında kullanamadıkları tespit edilmiştir. Bu nedenle eşit işaretinin ilişkisel yönüne vurgu yapan açık cümle örneklerinin cebir öğretiminde kullanılmasının öneminden bahsedilmiştir. Ayrıca açık cümle örneklerinin denklem kavramını anlamada ön koşul olduğu belirtilmiştir.

Stacey ve MacGregor (2000), araştırmalarında öğrencilerin cebirsel problemleri çözerken kullandıkları stratejileri ortaya koymaya çalışmışlardır. Araştırmacılar tarafından hazırlanan cebirsel problemler 900 öğrenciye uygulanmış, 30 öğrenci ile de görüşmeler yapılmıştır. Araştırma sonucunda öğrencilerin problem çözerken farklı yöntemler kullandıkları gözlenmiştir. Araştırmanın en çarpıcı bulgusu ise öğrencilerin denklemleri bir sonuca varmak için kullanılan işlemler olarak görmeleri olduğundan bahsedilmiştir.

Dede ve Argün (2003), araştırmalarını cebir konularının öğrenciler tarafından zor anlaşılmasının nedenlerini belirlemek amacıyla gerçekleştirmişlerdir. Araştırma sonunda cebir öğrenimi sırasında öğrencilerin zorlandıkları sonucuna ulaşılmıştır. Cebirin anlaşılmasındaki engeller üç başlık altında toplanmıştır. İlk başlık cebirin yapısıdır. Bu başlık altında cebirin dili ve içeriği üzerinde durulmuştur. İkincisi öğrencilerin zihinsel gelişimleri ve hazırbulunuşluk düzeyleridir. Bu başlık altında da eşitlik ile değişken kavramı ve aritmetik işlem bilgisi yer almaktadır. Son başlık altında ise cebir öğretimindeki eksiklikler yer almaktadır. Öğrencilerin zorlanmalarına neden olan etkenlerin öğretmenler tarafından sınıf ortamında giderilmesi gerektiği sonucuna varılmıştır. Cebir öğretiminde bahsi geçen olumsuzlukları ortadan kaldırmak için öğretmenlerin klasik öğretim yöntemine alternatif olabilecek modern öğretim yöntemlerini kullanmaları gerektiği belirtilmiştir.

Yaman, Toluk ve Olkun (2003), araştırmalarında ilköğretim öğrencilerinin eşitlik kavramını nasıl algıladıklarını ortaya koymayı amaçlamışlardır. Bu amaçla Bolu'daki bir ilköğretim okulunda öğrenim gören 2, 3, 4, 5 ve 6. sınıf seviyelerinden ikişer öğrenci olmak üzere toplam 10 öğrenci üzerinde çalışmışlardır. Araştırmada veri toplama aracı olarak klinik görüşme, ses kaydı ve araştırmacı notlarından yararlanılmıştır. Araştırma sonunda öğrencilerin eşitlik sembolünü ilişki ifade eden bir sembol değil, işlem bildiren bir sembol olarak algıladıkları sonucuna ulaşılmıştır. Ayrıca öğrencilerde bazı kavram yanılgıları olduğu sonucuna da ulaşılmıştır. Karşılaşılan başlıca kavram yanılgılarının, eşitliğin öğrenciler tarafından soldan sağa doğru bir işlemin sonucunu göstermede kullanılan bir sembol olarak görülmesi ve eşit işaretinin eylem bildiren bir sembol olarak düşünülmesinden kaynaklandığı tespit edilmiştir.

Lee ve Freiman (2006), araştırmalarında örüntünün keşfinin cebirsel düşünmenin gelişimindeki etkisini incelemişlerdir. Araştırmada çocukların erken yaşlarda örüntüleri keşfedebilecekleri tespit edilmiştir. Araştırmanın en ilgi çekici sonucu ise örüntülerin cebire girişin ön koşulu olduğu ve örüntülerin öğretimine erken yaşlarda başlanmasının cebirsel düşünmeyi olumlu etkileyeceğidir.

Soylu (2006), yapmış olduğu araştırmada öğrencilerin değişken kavramındaki öğrenme güçlüklerini ortaya koymaya çalışmıştır. Bu amaçla 2005-2006 eğitim-öğretim yılında Atatürk Üniversitesi, Ağrı Eğitim Fakültesi 2. sınıfta öğrenim gören 70 öğrenciyi katılımcı olarak araştırmaya dâhil etmiştir. Araştırmada 8 açık uçlu sorudan oluşan bir veri toplama aracı kullanmıştır. Bunun yanında bazı öğrenciler ile görüşmeler yaparak veri toplamayı hedeflemiştir. Araştırmada öğrencilerin değişkeni, bir çokluğu gösterme ya da değişen değerler anlamlarıyla kullanmak yerine bir nesnenin etiketi olduğunu düşünme gibi bir kavram yanılgısı içinde oldukları tespit edilmiştir.

MacGregor ve Stacey (2007), araştırmalarında öğrencilerin sözel problemlere uygun denklem kurma durumlarını incelemiştir. Öğrencilerin cebir kullanarak sözel problemlere ait denklem kurma durumlarını incelemek için 9, 10, 11 ve 12 yaşındaki öğrencilere zorluk seviyeleri farklı 6 tane cebir problemi yöneltilmiştir. Öğrencilerin harflerin kısaltmalar ya da bilinmeyenlerden hangisinin yerine kullanıldığını bilmedikleri için uygun denklemleri yazamadıkları belirlenmiştir. Çünkü harflerin bazı sorularda nesnelerin kısaltması, bazı sorularda ise bilinmeyen anlamında kullanılmasının öğrencilerin kafasını karıştırdığı gözlenmiştir. Araştırma sonucunda öğrencilerin sözel problemlerde denklem kuramamalarının temel sebebinin değişken kavramının iyi anlaşılmaması ve aritmetikte getirilen sorunlardan kaynaklandığı tespit edilmiştir.

Cai ve Moyer (2008), araştırmalarında erken yaşlarda cebirsel düşünmenin gelişimini literatürdeki çalışmaların bakış açılarını karşılaştırarak incelemişlerdir. İncelenen bu çalışmalarda erken yaşlarda cebirsel düşüncenin gelişimini etkileyen iki yaklaşım ele alınmıştır. Biri aritmetik ile cebir arasındaki ilişki, diğeri ise genellemedir. Araştırma sonucunda cebirsel düşünmenin erken yaşlarda gelişiminde bu iki yaklaşımın önemli rol oynadığı sonucuna ulaşılmıştır.

Hiççan (2008), 7. sınıf konularından birinci dereceden bir bilinmeyenli denklemler konusunda 5E öğrenme döngüsü modeliyle hazırlamış olan etkinliklerin öğrencilerin başarılarına etkisini ortaya koymak amacıyla araştırmasını yürütmüştür. Araştırmada 2005-2006 eğitim-öğretim yılında Kırıkkale'deki bir devlet okulunda 7. sınıf seviyesinde öğrenim gören 24 öğrenci katılımcı olarak yer almıştır. Veri toplama aracı olarak araştırmacı tarafından hazırlanan "Konu Başarı Testi" ve "Kalıcılık Testi" uygulanmış, ikinci aşamada derinlemesine veri toplamak amacıyla öğrencilerle yarı yapılandırılmış mülakatlar yapılmıştır. Bunun yanında ders esnasında öğrenciler üzerinde yaptığı gözlemleri de veri toplamada kullanmıştır. Çalışmanın sonucunda 5E öğrenme döngüsü modelinin birinci dereceden bir bilinmeyenli denklemler konusunda etkili bir yöntem olduğu sonucuna ulaşmıştır. Ayrıca 5E öğrenme döngüsünün kavramsal öğrenme üzerinde etkili olduğu, sınıf içinde öğrencilerin fikir alışverişi yapmalarına, yaparak ve yaşayarak öğrenmelerine, kendi bilgilerini oluşturmalarına fırsat tanıdığı sonucuna varılmıştır.

Yenilmez ve Avcu (2009), araştırmalarını 6. sınıf öğrencilerinin cebir öğrenimindeki başarı düzeylerini ortaya koymak amacıyla yapmışlardır. Araştırmanın çalışma grubunu Eskişehir'de bir ilköğretim okulunda 6. sınıfta öğrenim gören farklı başarı düzeylerinde 6 öğrenci olarak belirlemişlerdir. Veriler toplanırken denklem kurma ve denklem çözme ile ilgi hazırlanmış 4 açık uçlu sorudan yararlanılmıştır. Ayrıca yarı yapılandırılmış görüşme tekniği kullanılarak derinlemesine verilere ulaşılmaya çalışılmıştır. Araştırma sonucunda öğrencilerin problemleri hala ilkokulda edinmiş oldukları aritmetik alışkanlıkları kullanarak çözdükleri tespit edilmiştir. Ayrıca aritmetikte yaşadıkları olumsuzlukları cebir konularına transfer ettikleri görülmüştür. Bu doğrultuda öğrencilerin denklem kurma ve denklem çözme konusunda zorluk yaşadıkları sonucuna ulaşılmıştır.

Tanışlı ve Özdaş (2009), öğrencilerin örüntü genellemelerine ulaşma stratejilerini ortaya koymak amacıyla araştırmalarını yürütmüşlerdir. Araştırmada düşük, orta ve yüksek başarı düzeylerine sahip toplam 12 öğrenci çalışma grubunu oluşturmuştur. Öğrencilerle yapılan klinik görüşmeler ve öğrenci notlarıyla araştırmanın verileri toplanmıştır. Araştırma sonucunda sabit ve artarak değişen şekil örüntülerinin genellemesinde görsel ve cebirsel yaklaşımların öğrenciler tarafından benimsendiği sonucuna ulaşılmıştır. Ayrıca genelleme sürecinde örüntülerin yapısal özelliklerini daha iyi vurgulayan görsel gösterilerin daha etkili olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Öğrencilerin yakın genellemeler yaparken bir önceki terimden yararlandıkları, uzak genellemeler yaparken fonksiyonel ilişkilerden yararlandıkları tespit edilmiştir.

Akkan (2009), araştırmasıyla 5, 6, 7 ve 8. sınıflarda öğrenim gören öğrencilerin aritmetikten cebire geçiş süreçleri arasında anlamlı bir farkın olup olmadığını tespit etmeyi amaçlamıştır. Yanı sıra süreç boyunca öğrencilerin gelişiminin nasıl olduğunu, karşılaştıkları problemlerin neler olduğunu, problem çözme süreçlerinin nasıl geliştiğini, cebirsel genellemelerin nasıl yapıldığını, harflerin ve sembollerin nasıl kullanıldığını ortaya koymaya çalışmıştır. Araştırmanın çalışma grubu Trabzon'da iki ilköğretim okulunda öğrenim gören öğrencilerden oluşmaktadır. Pilot çalışmanın yapıldığı okulda 5, 6, 7 ve 8. sınıfta öğrenim gören 263 öğrenci, asıl çalışma için 5, 6, 7 ve 8. sınıfta öğrenim gören 285 öğrenci araştırmaya dâhil edilmiştir. Verilerin toplanması için dört boyuttan oluşan (problem çözme, genelleme yapma, sembollerin kullanımı ve harflerin anlamı) 14 açık uçlu soru ve 24 öğrenci ile yapılan mülakatlardan yararlanılmıştır. Araştırmanın sonucunda öğrencilerin sınıf düzeyleri arttıkça üzerinde çalışılan dört boyut açısından aritmetikten cebire geçiş seviyelerinde olumlu yönde değişimlerin olduğu tespit edilmiştir. Fakat genel olarak, farklı seviyedeki birçok öğrencinin aritmetikten cebire geçişte başarısız olduğu ve zorlandığı tespit edilmiştir.

Palabıyık ve Akkuş-İspir (2011) araştırmalarında cebir öğretiminin örüntü temelli yapılması ya da yapılmaması durumlarında 7. sınıf öğrencilerinin cebirsel düşünmelerinin ve matematiğe olan tutumlarının nasıl etkilendiğini ortaya çıkarmayı amaçlamışlardır. Araştırmanın çalışma grubunu 2008-2009 eğitim-öğretim yılında İç Anadolu Bölgesi'nde bir devlet okulunda 7. sınıfta öğrenim gören 40 öğrenci oluşturmaktadır. Araştırmada verilerin toplanması amacıyla Akkuş (2004) tarafından geliştirilen "Kavramsal Cebir Testi" ve "İşlemsel Cebir Testi" ile Aşkar (1986) tarafından geliştirilen "Matematiğe Karşı Tutum Ölçeği" kullanılmıştır. Bunların yanında öğrencilerden yarı yapılandırılmış görüşme tekniği ile veri toplanmıştır. Yapılan testler sonucunda örüntü temelli öğrenim gören deney gurubu ile örüntü temelli öğrenim görmeyen kontrol grupları arasında kavramsal cebir testleri sonucunda anlamlı farka ulaşılırken, işlemsel cebir testi sonucunda anlamlı farka ulaşılmamıştır. Örüntü temelli yapılan cebir öğretiminde genelleme ve örüntü kuralı bulma etkinlikleri sıklıkla kullanıldığından, değişken kavramının öğrenciler tarafından daha kavramsal yapılandırıldığı tespit edilmiştir.

Yaprak-Ceyhan (2012), araştırmasını matematik dersi öğretim programı vasıtasıyla yapılan öğretimin 6, 7 ve 8. sınıf öğrencilerinin cebir başarısına olan etkisini ortaya koymak amacıyla gerçekleştirmiştir. Araştırmanın çalışma grubunu 2009-2010 eğitim-öğretim yılında farklı bölgelerde bulunan 14 ildeki ilköğretim okulunda öğrenim gören farklı sınıf seviyelerinden (392'si 6. sınıf, 378'i 7. sınıf, 394'ü 8. sınıf) toplam 1164 öğrenci oluşturmaktadır. Araştırmanın verileri cebirsel düşünme düzeylerinin tespiti testi ile ulusal ve uluslararası sınavlardaki sorulardan yararlanılarak hazırlanan test vasıtasıyla toplanmıştır. Araştırmada matematik dersi öğretim programı çerçevesinde yapılan öğretimin cebir başarısını olumlu yönde etkilediği sonucuna ulaşılmıştır. Öğrencilerin cebir başarısının artmasının cebirsel düşünme düzeylerini de arttırdığı görülmüştür. Ayrıca ilköğretim 6, 7 ve 8. sınıf öğrencilerinin cebir başarıları ve cebirsel düşünme düzeylerinin bölge, il ve okul bazında farklılaştığı fakat öğrenciler arasında cinsiyete göre farklılaşmanın olmadığı tespit edilmiştir.

Kaya ve Keşan (2014), araştırmalarında ilköğretim öğrencilerinin cebirsel düşünme ve cebirsel muhakeme becerilerinin önemini tartışarak yapılan çalışmalar ışığında bu durumun gerekçesini ortaya koymayı amaçlamışlardır. Cebirsel düşünme üzerine yapılan literatür taraması sonucunda cebirsel düşünmenin sadece matematik dersinde değil günlük hayatta karşılaşılan problemler üzerine düşünmeye, yorumlamaya ve çözümler üretmeye yönelik aktiviteler olduğu belirlenmiştir. Öte yandan günümüz öğrenci merkezli eğitim sistemlerinde bilginin öğrenciler tarafından inşa edildiği göz önünde bulundurularak okullarda verilen cebir öğretiminin öğrencilere öğrendiklerini uygulama fırsatı veren, kavramlar arasında geçiş yapmalarını sağlayan ve çoklu temsillerle gösterebilmelerine yardımcı olan modern öğrenme ortamlarından oluşturulması gerektiği sonucuna ulaşılmıştır.

Gürbüz, Pırtıcı ve Toprak (2014) 7. sınıf öğrencilerinin denklemler konusunda aritmetikten cebire geçişi sağlamada yardımcı olacak etkinliklerin nasıl tasarlanması ve uygulanması gerektiğini ortaya koymak amacıyla bir araştırma yapmışlardır. 2010-2011 eğitim-öğretim yılında Doğu Anadolu Bölgesi'nde 7. sınıfta öğrenim gören 30'u deney grubu, 28'i kontrol grubu olmak üzere toplam 58 öğrenci araştırmanın çalışma grubunu oluşturmuştur. Verileri toplama amacıyla Akkan (2009) tarafından hazırlanan 7 soru, MEB'in merkezi sınavında kullanılan 1 soru ve matematik eğitimi alanında iki uzmanın görüşü alınarak hazırlanan 2 sorudan oluşan bir test uygulanmıştır. Yapılan araştırmada denklemler konusunda etkinlik temelli öğretimin konuyu kavramada yardımcı olduğu ve aritmetikten cebire geçişi desteklediği sonucuna ulaşılmıştır. Ayrıca öğrencilerin yaşayarak öğrenmelerine fırsat tanıyan etkinliklerin aritmetikten cebire geçişte etkili olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Etkinlik temelli yaklaşıma dayanan yapılandırmacı kuramın öğrenme sürecine olumlu etkileri olduğu tespit edilmiştir.

Yıldız, Çiftçi, Şengil Akar ve Sezer (2015), yaptıkları araştırmada öğrencilerin cebirsel ifadeleri ve değişkenleri yorumlama sürecinde yaptıkları hataları ortaya koymayı amaçlamışlardır. Araştırmada farklı başarı düzeylerine sahip 7. sınıfta öğrenim gören 4 öğrenci çalışma grubu olarak seçilmiştir. Öğrencilerin cebirsel ifadeler ve değişkenleri yorumlama sürecinde yaptıkları hataları tespit etmek amacıyla 7 sorudan oluşan bir matematik testi ile veriler toplanmıştır. Ayrıca öğrencilerle görüşmeler yapılmıştır. Bu görüşmeler sırasında ses ve video kayıtları alınmıştır. Araştırma sonunda öğrencilerin verilen bir sözel ifadeyi cebirsel olarak göstermede zorlandıkları görülmüştür. Ayrıca cebirsel ifadeleri, sonlandırılması gereken bir eylem olarak algıladıkları tespit edilmiştir. Bunların yanında cebirsel ifadedeki değişkenleri sayısal değer olarak değil, birer kısaltma olarak algıladıkları tespit edilmiştir. Araştırmada varılan bir diğer sonuç ise öğrencilerin değişkenleri sadece bilinmeyen olarak düşünüp sınırlı sayıda değer alabileceğini düşündüklerinin tespitidir.

Girit ve Akyüz (2016), farklı sınıf seviyelerindeki öğrencilerin örüntüleri genellemede kullandıkları akıl yürütmeleri ve çözüm stratejilerini ortaya koyma amacıyla araştırmalarını yürütmüşlerdir. Bu amaçla farklı sınıf seviyelerinden oluşan (6, 7 ve 8. sınıf) 154 öğrenci araştırmanın çalışma grubu olarak seçilmiştir. Verileri toplama amacıyla sayı, şekil ve tablo gösterimi gibi farklı temsillerle ifade edilen 6 sorudan oluşan bir örüntü testi öğrencilere uygulanmıştır. Ayrıca her sınıf seviyesinden ikişer öğrenciyle görüşmeler gerçekleştirilmiştir. Araştırmanın sonucunda öğrencilerin tablo temsili ile gösterilen sayı örüntülerinde n yerine bir sayı koyma eğiliminde oldukları belirlenmiştir. Şekil örüntülerinde bir sonraki adımları oluşturarak örüntüyü devam ettirdikleri ve genellemeyi cebirsel olarak gösterme eğiliminde olmadıkları görülmüştür. Sayı örüntülerinde ise sadece terimler arasındaki farka odaklanarak genelleme yapma eğiliminde oldukları tespit edilmiştir.

Gökçe ve Yeşildere-İmre (2017), araştırmalarında öğrencilerin sayı örüntülerinde genelleme yaparken yaşadıkları güçlükleri tespit etmeyi amaçlamışlardır. Araştırmada bir devlet okulunda 7. sınıfta öğrenim gören farklı başarı düzeylerinde 13 öğrenci katılımcı olarak yer almıştır. Araştırmacılar tarafından hazırlanan 8 etkinlikten oluşan, "Sayı Örüntülerini Genelleme Etkinlikleri" veri toplama amacıyla kullanılmıştır. Ayrıca araştırmacı notları, video ve ses kayıtları ve araştırmacılar tarafından yapılan gözlemler vasıtasıyla da araştırma için veriler toplanmıştır. Araştırma sonucunda öğrencilerin genelleme yapma sürecinde etkinlik temelli öğretimden önce;

- Örüntülerin terim sırası ile terim arasındaki ilişkiye odaklanmak yerine ardışık terimler arasındaki ilişkiye odaklandıkları,
- Ardışık terimler arasındaki ilişkilere odaklanan öğrencilerin yakın adımları hesaplayabilmelerine rağmen uzak adımları hesaplamada zorlandıkları,
- Yakın adımları bulurken sayma yöntemi kullandıkları, bunun yanında uzak adımların bulunmasında kullanışlı bir yöntem bulamayan öğrencilerin sayma, bütüne genişletme ve farkın çarpılması gibi yöntemlere başvurdukları,
- Genellemelerde genellikle sözel ifadeler kullanılmış cebirsel ifadeleri iyi kullandıkları, genelleme sürecinde çoğunlukla olgunlaşmamış tümevarım kullanılarak aritmetik genellemelerin yapılmasına karşın cebirsel genellemelerde zorlandıkları tespit edilmiştir.

Yapılan etkinliklerin öğrencilerin strateji kullanımında, cebirsel genellemeleri yapabilmelerinde, sembol kullanımlarında ve modelleri kural bulmada kullanabilmelerinde olumlu yönde etkilediği sonucuna ulaşılmıştır.

Usta ve Özdemir (2018), araştırmalarını ortaokul öğrencilerinin cebirsel düşünme düzeylerini incelemek amacıyla düzenlemişlerdir. Batı Karadeniz Bölgesi'nde bir devlet ortaokulunda 6, 7 ve 8. sınıfta öğrenim gören 12 öğrenci araştırmanın çalışma grubunu oluşturmaktadır. Araştırmada veri toplama amacı ile literatür üzerinde yapılan araştırmalardan yararlanarak hazırladıkları cebirsel düşünmenin dört düzeyini incelemek üzere, "Cebirsel Düşünme Tespit Formu" kullanılmıştır. Ayrıca klinik görüşmeler ve bu görüşmeler esnasında yapılan video ve ses kayıtlarından yararlanılmıştır. Araştırmada düzey 1'e ait sorulara verilen cevaplar incelendiğinde öğrencilerin harfleri birer nesne olarak algıladıkları ve harflere sayısal değerler vermeden cevaplar verdikleri sonucuna ulaşılmıştır. Düzey 2'ye ait sorulara verilen cevaplarda öğrencilerin bilinmeyenlere sayısal değerler vererek sonuca ulaştıkları tespit edilmiştir. Düzey 3'e ait sorulara verilen cevaplarda 5, 6 ve 7. sınıftaki öğrencilerin zorlandıkları ve harfleri bilinmeyen olarak algılamak yerine sayısal değer verme eğiliminde oldukları tespit edilmiştir. Düzey 4'e ait sorulara verilen cevaplar incelendiğinde zorlanan öğrencilerin çarpma işleminin cebirsel ifadenin değerini artıracağı yönünde algılarının olduğu tespit edilmiştir. Araştırmanın bir diğer sonucu ise sınıf seviyeleri ilerledikçe öğrencilerin cebirsel düşünme düzeylerinin arttığı ve düzeyler arasında sıkı bir ilişki olduğundan bir düzey tamamlanmadan üstteki bir düzeye geçilemeyecek olmasıdır.

Sayı (2018), araştırmasında ortaokul 7. ve 8. sınıf öğrencilerinin cebirsel düşünme düzeylerini belirleyerek problem kurma ile arasındaki ilişkiyi incelemeyi amaçlamıştır. Araştırmanın çalışma grubunu 2016-2017 eğitim-öğretim yılında Konya'da üç farklı devlet ortaokulunda 7. ve 8. sınıf seviyesinde öğrenim gören 308 öğrenci oluşturmaktadır. Verilerin toplanmasında Hart ve ark. (1998) tarafından hazırlanan ve Altun (2005) tarafından Türkçeye çevrilen, "Cebirsel Düşünme Düzeyi Testi" ve araştırmacı tarafından hazırlanan "Problem Kurma Testi" kullanılmıştır. Araştırmanın sonucunda öğrencilerin verilen denklemlere uygun problem kurmada genel olarak başarısız olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Ayrıca cebirsel düşünme ile problem kurma arasında pozitif yönde güçlü ilişkinin olduğu tespit edilmiştir.

Cengiz (2019) araştırmasını ortaokul 7. sınıf öğrencilerinin birinci dereceden bir bilinmeyenli denklemlerle ilgili problemlerde denklemi kuramama ve çözememe nedenlerini incelemek amacıyla hazırlamıştır. Birinci dereceden bir bilinmeyenli denklemler konusu 7. sınıfta 2. dönem konuları arasında olmasına rağmen zamanla ilgili sıkıntılardan dolayı uygulama öğrenciler 8. sınıfa geçince yapılmıştır. Araştırmanın çalışma grubu 2018-2019 eğitim-öğretim yılında Ankara'da bir devlet ortaokulunda 8. sınıf seviyesinde öğrenim gören 100 öğrenciden oluşmaktadır. Veri toplama amacıyla araştırmacı tarafından hazırlanan, "Denklem Kurma Testi" öğrencilere uygulanmıştır. Ayrıca yarı yapılandırılmış görüşmeler yapılmış, bu görüşmeler ses kaydı altına alınmıştır. Araştırmanın sonunda öğrencilerin değişken k ve eşitlik kavramları ile ilgili hatalar yaptıkları gözlenmiştir. Öğrencilerin geçmişten getirdikleri eksik aritmetiksel bilgilerin denklem kurma ve çözmede sorunlara neden olduğu tespit edilmiştir. Bunun yanında değişken kavramının anlamı ve kullanımıyla ilgili eksik öğrenmelerin denklem kurmada ve çözmede öğrencilerin problem yaşamalarına sebep olduğu gözlenmiştir. Öte yandan öğrencilerin eşit işaretini ilişkiler arasındaki denklik ifadesi olarak değil, işlemin sonucuna ulaşmak için kullanılan bir işaret olarak görmelerinin denklemi anlamalarını zorlaştırdığı tespit edilmiştir.

İncelenen bu araştırmaların sentezi ile aşağıdaki sonuçlara ulaşılmıştır:

- Cebir derslerinde öğrencilerin zorlandıkları ve cebirsel düşünme düzeylerinin düşük olduğu tespit edilmiştir. Bu durumun sebeplerinin ortaya konması ve öğretmenlerce ortadan kaldırılması gerekmektedir (Akkan, 2009; Cengiz, 2019; Dede ve Argün, 2003; Sayı, 2018; Usta ve Özdemir, 2018; Yenilmez ve Avcu, 2009).
- Öğretmenlerin cebir öğretimini daha etkili bir şekilde gerçekleştirebilmesi için geleneksel yöntemlere alternatif olarak yeni yaklaşımları takip etmeleri ve bu yöntemleri sınıflarına taşımaları gerekmektedir (Dede ve Argün, 2003; Gürbüz ve ark., 2014; Hiççan, 2008; Kaya ve Keşan, 2014; Yaprak Ceyhan, 2012).
- Öğrenciler cebirde matematiksel dili kullanmada yetersizdir, ayrıca çeşitli kavram yanılgıları ve hatalı öğrenmelere sahiptirler (Dede ve Argün, 2003; Soylu, 2006; Yıldız ve ark., 2015).
- Hazırbulunuşluk ve zihinsel gelişim önemli olup öğrencilerin aritmetik ile ilgili olan öğrenmeleri cebir öğrenmelerini etkilemektedir (Cengiz, 2019;

Dede ve Argün, 2003; Lee ve Freiman, 2006; Usta ve Özdemir, 2018; Yaman ve ark., 2003; Yenilmez ve Avcu, 2009).

- Öğrenciler aritmetikten cebire geçerken başarısız olmakta ve zorlanmaktadırlar (Akkan, 2009; Cengiz, 2019; Gürbüz ve ark., 2014; Kieran, 1992; Usta ve Özdemir, 2018).
- Eşitlik kavramını ilişkisel olarak anlayamayan öğrenciler eşit işaretini denklik ifade eden bir sembol olarak değil, bir işlemin sonucunu bulmak için gösterilen bir sembol olarak görmektedirler (Cengiz, 2019; Dede ve Argün, 2003; Falkner, Levi ve Carpenter, 1999; Stacey ve MacGregor, 2000; Yıldız ve ark., 2015).
- Öğrenciler değişken kavramını anlamakta zorlanmakta ve farklı anlamlarıyla kullanamamaktadırlar (Cengiz, 2019; Dede ve Argün, 2003; MacGregor ve Stacey, 2007; Soylu, 2006; Usta ve Özdemir, 2018; Yıldız ve ark., 2015).
- Öğrenciler genelleme sürecinde sözel olarak ifade edilen örüntü kuralını cebirsel olarak yazmakta zorlanmaktadırlar (Gökçe ve Yeşildere-İmre, 2017; Yıldız ve ark., 2015).
- Öğrenciler genelleme sürecinde terimler ile terimin sırası arasındaki ilişkiye yoğunlaşmak yerine ardışık terimler arasındaki ilişkiye yoğunlaşarak bir sonraki terimi bulma eğilimi göstermektedirler (Cai ve Moyer, 2008; Girit ve Akyüz, 2016; Gökçe ve Yeşildere-İmre, 2017; Tanışlı ve Özdaş, 2009).

Özetle yapılan araştırmalarda öğrencilerin cebir derslerinde zorlandıkları ve cebirsel düşünme düzeylerinin düşük olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Öğrencilerin aritmetikte kazandıkları öğrenmelerinin cebir öğrenimi ile yakından ilişkili olduğu tespit edilmiştir. Cebir öğretiminde kavramsal öğrenmenin gerçekleşmesi için öğrencilerin değişken ve eşitlik kavramlarını farklı kullanımlarıyla anlamaları gerekmektedir. Öğrenciler için bilgiyi kendilerinin yapılandırdığı, yaparak ve yaşayarak öğrenmelerini teşvik eden ortamların oluşturulmasının cebirsel düşünme düzeylerini olumlu etkileyeceği düşünülmektedir. Bu bağlamda geleneksel yöntemlerin dışında modern yöntem ve tekniklerin sınıflarda uygulanmasının olumlu sonuçlar vereceği vurgulanmıştır.

2.3.2 Tahmini Öğrenme Yol Haritaları (TÖYH) İle İlgili Araştırmalar

Wilson (2009) araştırmasında öğretmenlerin öğretimlerinde öğrenme yol haritalarını nasıl kullandıklarını incelemiştir. Araştırmaya katılan 33 öğretmen ile öğrenme yol haritalarına odaklanan 20 saatlik profesyonel bir gelişim programı verilmiştir. Araştırmanın sonunda öğrenme yol haritalarının öğrencilerin düşünmelerine dair kesin ve yeterli model oluşturmada, öğrencilerin daha sonra ne öğreneceğini belirlemede, ilgilenilen konuda öğrencilerin anlayışlarını derinleştirmede ve tutarlı öğretimi gerçekleştirmede öğretmenlere yardımcı olduğu tespit edilmiştir.

McColl (2009) öğrenme yol haritaları kapsamında çalışmasına mesleki gelişim için gönüllü katılan bir öğretmen ile 18 hafta boyunca araştırmasını yürütmüştür. Öğretmen, öğrencilerin ölçme kavramına dair anlayışları ile ilgili literatürde geçen çalışmaları incelemiş, öğrenci çalışma ve görüşmelerini analiz etmiş ve yapılacak görüşmeler için öğrenme yol haritalarına dayalı görevler geliştirerek haftalık mesleki gelişimini tamamlamıştır. Araştırmanın sonunda programın öğretmenin mesleki gelişimini desteklediği tespit edilmiştir. Ayrıca öğretmenin, öğrencilerin matematiksel düşünmelerine odaklanarak değerlendirmeler yapabildiği ve öğrencilerin zorlandıkları noktalarda öğretime yön vermek için öğretmen bilgisini kullanabildiği gözlemlenmiştir.

Wilson, Mojica ve Confrey (2013) araştırmalarını öğretmen eğitiminde öğrenme yörüngeleri ve öğrencilerin matematiksel düşünceleri hakkındaki öğretmen anlayışlarını destekleme konuları üzerine yapmışlardır. Araştırmada öğretmen ve öğretmen adaylarının öğrencilerin rasyonel sayılar hakkındaki düşüncelerini anlamak üzere öğrenme yörüngelerini kullanarak gerçekleştirilen iki çalışma hakkında bilgiler verilmektedir. Araştırma sonunda öğrenme yörüngelerinin öğretmen ve öğretmen adaylarının öğrencilerin matematiksel düşünceleri ile model oluşturabilmede, yapılan öğretim ile öğrencilerin düşüncelerini ilişkilendirebilmede ve öğretmenlerin kendi matematik bilgileri ile öğrencilerin akıl yürütmedeki anlayışlarını yeniden yapılandırmada öğretmenleri desteklediği sonucuna ulaşılmıştır.

Camci (2018) araştırmasını TÖYH kapsamında hazırlanan öğretim sürecinde ortaokul 6. sınıf öğrencilerinin geometri ve ölçme öğrenme alanı altındaki dikdörtgenler prizmasının hacmi konusuna ilişkin matematiksel soyutlama sürecini ve süreç sonunda matematiksel soyutlama mekanizmalarını ortaya koymak amacıyla yürütmüştür. Araştırmanın katılımcıları 2015-2016 eğitim-öğretim yılında Eskişehir'de bir devlet ortaokulunda 6. sınıf seviyesinde öğrenim gören 12 öğrenciden oluşmaktadır. Araştırmada veriler toplanırken üç odak öğrenciyle klinik görüşmeler yapılmış, ayrıca öğretim sürecinde video kayıtlarından, etkinliklerde kullanılan çalışma kâğıtlarından ve yarı yapılandırılmış öğrenci günlüklerinden yararlanılmıştır. Araştırma sonunda TÖYH kapsamında yürütülen öğretim süreci sonunda başta düşük seviyedeki öğrenci olmak üzere üç odak öğrencinin dikdörtgenler prizmasının hacmini hesaplama konusunda düşünmeye dayalı matematiksel soyutlama yapabildikleri ortaya konmuştur.

Güven Akdeniz (2018), TÖYH kapsamında yürüttüğü araştırmasında öğrenme güçlüğüne sahip öğrencilerin uzunluk kavramının öğretiminde matematiksel olarak nasıl düşündüklerini incelemek amacı ile hazırlamıştır. Araştırmasında katılımcı olarak biri 4. sınıfta, diğeri 5. sınıfta öğrenim gören öğrenme güçlüğüne sahip iki öğrenci yer almıştır. Araştırmada derinlemesine bilgilerin toplanması amacıyla öğrencilerle klinik görüşmeler yapılmıştır. Ayrıca kamera ve ses kayıtları alınmış, araştırmacı notları tutulmuştur. Araştırma sonucunda TÖYH kapsamında yürütülen öğretim deneyinin öğrencilerin gelişimini olumlu yönde desteklediği gözlemlenmiştir.

Özden (2019) araştırmasını, TÖYH'ye dayalı yürütülen bir öğretim sürecinde ortaokul 6. sınıf öğrencilerinin cebir ve aritmetik problemlerini çözerken nasıl düşündüklerini ortaya koymak amacıyla gerçekleştirmiştir. Araştırmanın katılımcıları bir devlet ortaokulunda 6. sınıfta öğrenim gören 24 öğrencidir. Araştırmada verilerin toplanmasında odak öğrencilerle gerçekleştirilen klinik görüşmeler, sınıf içi video kayıtları, etkinliklerde kullanılan çalışma kâğıtları, öğrenci notları ve araştırmacı günlükleri kullanılmıştır. Araştırmanın sonucunda TÖYH kapsamında yürütülen cebir konularında odak öğrencilerin öğretim sonunda başarı düzeylerinin arttığı gözlemlenmiştir. TÖYH kapsamında yürütülen öğretimin tüm öğrencileri olumlu yönde etkilediği tespit edilmiştir. Bununla birlikte cebire girişte eşit işaretinin kavramsal öğretimi ile ilişkisel düşünmenin önemli rol oynadığı tespit edilmiştir.

Aktaş (2020) araştırmasını, görme engelli öğrencilerin TÖYH kapsamında hazırlanan öğretim sürecinde cebir öğrenme alanındaki eşleme, ilişkilendirme ve temsil türleri kavramlarının öğretiminde cebirsel düşünme süreçlerini ortaya koymak amacıyla düzenlemiştir. İki aşamada yürütülen araştırmanın durum çalışması deseninde hazırlanan ilk aşamasında 7 görme engelli öğrenci, TÖYH'ye dayalı hazırlanan ikinci aşamasında 2 görme engelli öğrenci katılımcı olarak yer almıştır. Araştırmada veri toplamak amacıyla klinik görüşmeler, öğretim etkinlikleri ve video kayıtlarından yararlanılmıştır. Araştırmanın sonucunda cebir öğrenme alanı özelinde görme engelli bireylerin değişken, bilinmeyen, cebirsel ve grafiksel temsil türleri, eşitlik ve koordinat sistemi gibi temel cebirsel kavramlara dair bilgi eksiklikleri ve kavram yanılgıları olduğu tespit edilmiştir. TÖYH kapsamında yapılan öğretimle görme engelli bireylerin öğretim sürecinde bireysel özelliklerinin farklılaştığı ve öğretim sürecinde bu farklılaşmanın göz önünde bulundurulması gerektiği tespit edilmiştir. TÖYH'nin görme engelli bireyler için destek eğitim araçları ile zenginleştirilmiş bireysel eğitim programlarının tasarlanmasında rehber niteliği taşıdığı sonucuna ulaşılmıştır.

Bu araştırmada ise ortaokul 7. sınıf öğrencilerinin cebir öğrenme alanındaki öğrenmelerinin gelişimi amaçlanmış ve bu doğrultuda bir öğretim deneyi araştırması desenlenmiştir. TÖYH kapsamında döngüsel bir süreç tasarlanmış ve sınıf tabanlı bir öğretim düzenlenmiştir. Araştırma için hazırlanan TÖYH, öğretmenin öğrenme hedeflerini, öğrenmenin nasıl gerçekleşeceğine dair hipotezlerinin yanında öğretim etkinliklerini içermektedir. TÖYH kapsamında yürütülen öğretimde her aşamada öğrencilerden geri bildirim alınmış ve bu doğrultuda kavramsal öğretimin gerçekleşmesi için öğretim etkinliklerinin revize edilmesi yoluna gidilmiştir.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1 Araştırmanın Modeli ve Gerekçesi

Bu araştırmada tahmini öğrenme yol haritaları çerçevesinde tasarlanmış bir öğretim deneyinde öğrencilerin cebir öğrenme alanındaki öğrenme süreçleri incelenmiştir. Bu süreçte öğrencilerden karmaşık ve derinlemesine bilgi elde edilmesi (Creswell, 2007), bunun yanında gerçekçi ve bütüncül olarak doğal bir ortamda algı ve olayların incelenmesi (Yıldırım ve Şimşek, 2011) amaçlanmıştır. Bahsedilen amaç doğrultusunda araştırmanın deseni, katılımcıları, araştırmacının araştırmadaki rolü, verilerin toplanması ve analizi ile geçerlik ve güvenirlik bağlamında nitel araştırma yöntemi benimsenmiştir.

Araştırmanın deseni, öğretim deneyi (teaching experiment) (Cobb ve Steffe, 1983) olarak belirlenmiştir. Öğretim deneyinin temel amacı, araştırmacının öğrenme ortamında öğrencilerin öğrenmelerini ve akıl yürütmelerini gözlemlemektir (Steffe ve Thompson, 2000). Ayrıca, öğretim deneyi öğrencilerin matematiksel bilgileri nasıl öğreneceğini araştırmak için tasarlanmış bir yöntemdir (Clements vd, 2004; Steffe, 1991). Araştırmada öğrencilerin düzeyleri dikkate alınarak belirli bir düşünme seviyesine ulaşmaları için gerekli bilgileri öğrenmelerine yardımcı olmak amacıyla öğretim dizileri tasarlanmış ve süreç içerisinde öğrencilerin öğrenme durumları sürekli analiz edilmiştir. Bu süreçte öğrencinin düşünme ve öğrenmesinin, öğretimin, öğretim etkinliklerinin ve öğretim amaçlarının eş zamanlı olarak sürekli ve detaylı analizi gerekmektedir (Clements ve Sarama, 2007). Bu sebeple literatürde öğrenme yol haritaları çerçevesinde hazırlanan bir araştırmada öğretim deneyi metodolojisinin kullanılmasının tercih edilebilecek en iyi yollardan biri olduğu belirtilmektedir (Clements ve ark., 2004; Confrey, Maloney, Nguyen, ve Corley, 2012).

Bu araştırmada da öğretim deneyi ortaokul 7. sınıf öğrencilerinin cebir öğrenme alanındaki cebirsel ifadeler ile eşitlik ve denklem alt öğrenme alanındaki öğrenme süreçlerindeki gelişimini ortaya koymak için kullanılmıştır.

3.2 Katılımcılar

Araştırmaya 2020-2021 eğitim-öğretim yılında Ordu ilinde bir devlet ortaokulunda 7. sınıfta öğrenim gören 24 öğrenci katılmıştır. Sınıftaki öğrencilerden yüksek, orta ve düşük başarı düzeyinde üç odak öğrenci belirlenmiş ve odak öğrencilerin bilişsel gelişimleri izlenerek ortaya konmaya çalışılmıştır.

Nitel araştırmalarda amaç elde edilen bulguları evrene genellemek değil ana olgunun derinlemesine keşfedilmesidir (Creswell, 2017). Bu yüzden araştırmada çalışılan konuyu daha detaylı ve tüm yönleriyle incelemek için katılımcıların (odak öğrencilerin) belirlenmesinde ölçüt örnekleme yöntemi kullanılmıştır. Amaçlı örnekleme, zengin bilgiye sahip olduğu düşünülen durumların derinlemesine incelenmesine, olgu ve olayların keşfedilmesine ve açıklanmasına olanak sağlamaktadır (Yıldırım ve Şimşek, 2005). Amaçlı örnekleme farklı stratejiler kullanılarak yapılabilmektedir. Bunlardan biri de ölçüt örneklemedir. Bir araştırmada gözlem birimleri belli niteliklere sahip kişiler, nesneler, olaylar ya da durumlardan oluşabilir. Ölçüt örnekleme, önceden belirlenmiş bir dizi ölçütü karşılayan gözlem birimleri üzerine çalışılmasıdır (Yıldırım ve Şimşek, 2005). Bu araştırmada da amaçlı örnekleme yöntemlerinden ölçüt örnekleme yöntemi ile katılımcılar belirlenmiştir. Katılımcıların seçimi şu ölçütlere göre belirlenmiştir: Araştırmaya odak öğrenci olarak katılan üç öğrencinin düşük, orta ve yüksek başarı düzeyinde olmak üzere farklı başarı düzeylerinde olmasına dikkat edilmiştir. Katılımcılar belirlenirken kriter olarak 2019-2020 eğitim-öğretim yılındaki öğrencilerin matematik dersi karne notu ve öğrencilerin üç sene boyunca aralıksız olarak matematik öğretmenliğini yapan araştırmacının görüşü baz alınmıştır. Ayrıca seçilen öğrencilerin gönüllü olması katılımcıların belirlenmesinde rol oynamıştır.

Belirtilen ölçütlere göre seçilen katılımcıların gerçek isimleri bulgularda kullanılmamıştır. Yüksek başarı düzeyindeki öğrenci "A odak öğrencisi", orta başarı düzeyindeki öğrenci "B odak öğrencisi" ve düşük başarı düzeyindeki öğrenci "C odak öğrencisi" kodlamasıyla araştırmada yer almıştır. Benzer şekilde odak öğrencilerin dışındaki sınıf içi etkinliklere katılan diğer öğrenciler de "Ö1, Ö2, Ö3, …" şeklinde kodlanmıştır.

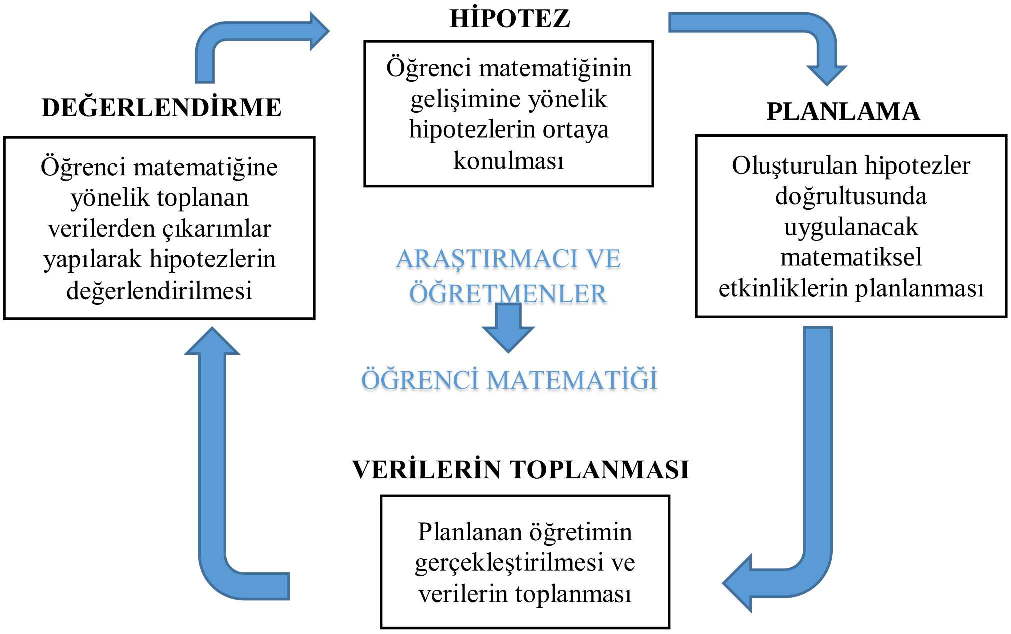
3.3 Öğretim Deneyi

Öğretim deneyinin Piaget'in klinik görüşmelerinden yola çıkılarak geliştirilen bir yöntem olduğundan bahsedilmektedir (Confrey, 2006; Steffe, 1991; Steffe ve Thompson, 2000). Fakat klinik görüşmelerde öğrencilerin bilgisine müdahale edilmeden sadece var olan bilginin ortaya konulması hedeflenmektedir. Bu yönüyle klinik görüşmeler öğrenme sürecinin anlaşılmasında yetersiz kalmaktadır. Bu yetersizlik öğretim deneyi yönteminin geliştirilmesinde en önemli nedenlerden birisi olmuştur. Çünkü öğretim deneyinin en temel özellikleri; bir öğretim şeklinin öğrencinin mevcut bilgisini ve akıl yürütmesini nasıl etkilediğini ortaya çıkarmak, matematiksel etkinliklerin ve davranışların modelini ortaya koymak, kullanılan öğretim yaklaşımının işleyen ve işlemeyen yönlerini tespit etmektir (Engelhardt, Corpuz, Ozimek ve Rebello, 2004; Lesh ve Kelly, 2000; Steffe ve Thompson, 2000).

Öğretim deneyi öğrencilerin matematik öğretimi sürecinde sahip oldukları matematiksel bilginin ne olduğunu ve tasarlanan öğretim sürecinde bu bilginin nasıl değişim gösterdiğini yakından tecrübe ettikleri öğretim temelli bir yaklaşımdır (Czarnocha ve Maj, 2008). Araştırmacının öğretim sürecinde öğrencilerin matematiksel bilgiyi nasıl öğrendikleri hakkında hipotezler üretmesi, hipotezleri öğrenme sürecinde değerlendirmesi ve bu süreç içerisinde matematiksel bilginin değişimi hakkında çıkarımlar yapması esastır (Simon, 1995). Bu açıdan öğretim deneyi okul matematiğinin hem teorik hem de pratik yönlerine vurgu yapmakta ve eğitimcilere öğrenci matematiğinin anlaşılmasında yardımcı olmaktadır. Burada öğrenci matematiği ile (student's mathematics) anlatılmak istenen, öğrencinin çevresinden bağımsız olarak sahip olduğu matematiksel gerçekleridir. Öğretim deneyinde öğretmenin görevi ise öğrenci matematiğini tespit ederek yorumlamak ve bu durumu modellemektir. Bu modelleme işine, algılanan öğrenci matematiği (mathematics of students) denilmektedir (Steffe ve Thompson, 2000; Steffe ve Ulrich, 2014). Yapılan tanımlar ışığında öğretim deneyi yönteminin genel amaçları; öğrencilere ait matematik öğrenmelerini ve akıl yürütmelerini anlamak, öğretim ortamını öğrencilerden alınan dönütlere göre tasarlamak ve daha kavramsal öğrenmelerin oluşumunu sağlamaktır.

Öğretim deneyi planlanmış ve birbirini takip eden öğretim etaplarından oluşmaktadır. Öğretim deneyine başlanmadan önce öğretimi yapılacak konunun kazanımları araştırmacı tarafından belirlenmelidir. Bu kazanımlar belirlenirken öğrencilerin hazırbulunuşlukları ve kazanımlardan elde edilecek davranışlar önceden tespit edilmelidir (Steffe ve Thompson, 2000). Belirlenen kazanımlara uygun öğretim etkinlikleri tasarlanıp pilot uygulama ile denenmelidir. Pilot uygulama esnasında yaşanan eksiklik tespit edilip gerekli iyileştirmeler yapılmalıdır. Steffe ve Thompson'a (2000) göre bu öğretim etaplarına birden fazla öğrencinin katılması gerekmektedir. Bu öğretimler bireysel olabildiği gibi küçük gruplar şeklinde de olabilmektedir. Öğretimler sonucunda öğrencilerin düşünme ve akıl yürütmelerinin değişmesinin öğretim deneyinin en kabul edilir çıktısı olduğu düşünülmektedir (Lesh ve Kelly 2000). Steffe'ye (1991) göre öğretim deneyinde araştırmacı öğretmen rolünde olmalıdır fakat Engelhardt ve ark.'na (2004) göre araştırmacıların gözlemci olabileceği de belirtilmiştir. Araştırmacı öğretmenin görevi, öğretim esnasında öğrencilerin aktif olarak katılabileceği matematiksel etkinlikleri oluşturup bu etkinliklerde etkileşimi sağlayacak soruları sormak ve etkinliklerin işlerliğini ortaya koyan analizler yapmaktır (Cobb, 2000; Steffe, 1991). Öğretim esnasında alınan kayıtlar analiz yapmaya yardımcı olacaktır. Steffe ve Ulrich'e (2014) göre bu kayıtlar öğretimin tasarlanmasında kullanılabileceği gibi öğretim sırasında veya sonrasında yapılan kavramsal analizlerde de kullanılabilir. Öğretim deneyinin kavramsal analizi iki şekilde yapılanmaktadır. Öğretim deneyinde veri analizinde sürekli analiz (*on-going*) ve geriye dönük (*retrospective*) analiz olmak üzere iki şekilde kavramsal analiz yapılmaktadır (Bu analiz ile ilgili geniş bilgi araştırmanın veri analizi kısmında verilmiştir). Bu analizler sayesinde öğretim deneyinde kullanılan etkinliklerin hangi durum ve şartlarda en etkili şekilde gerçekleşebileceğinin tespiti yapılır (Engelhardt ve ark., 2004).

Döngüsel bir yapısı olan öğretim deneyinin temel aşamaları yapılan literatür araştırması (Cobb, 2000; Simon, 1995; Steffe, 1991; Steffe ve Olive, 2010; Steffe ve Thompson, 2000) sonucunda Şekil 3.1'de gösterildiği gibidir.



Şekil 3.1 Bir Öğretim Deneyi Modeli (Uygan, 2019)

Şekil 3.1'de görüldüğü üzere öğretim deneyi modelinin merkezinde araştırmacının öğrenci matematiğini anlaması yer almaktadır. Öğretim deneyinin ilk aşamasında araştırmacının yapılan önceki araştırmalar ve kendi deneyimlerinden yola çıkarak öğrenci matematiğinin gelişimine yardımcı olacak öncül hipotezleri ortaya koyması yer almaktadır. Bu hipotezlerin ışığında uygulanacak olan öğretim planlanır ve yapılacak öğretim etkinlikleri belirlenir. Daha sonra öğretim gerçekleştirilir ve verilerin toplanmasına başlanır. Sonraki aşamada toplanan verilerin yardımıyla öncül hipotezlerin değerlendirilmesi yapılır. Öncül hipotezler değerlendirildikten sonra ileriye yönelik yeni hipotezler oluşturulmasına döngüsel biçimde devam edilmektedir. Öğretim deneyinde oluşturulan hipotezler öğretim boyunca değerlendirilmekte ve ileriye yönelik düzenlenmeler yapılmaktadır (Steffe ve Ulrich, 2014).

Bu araştırmada, öğretim deneyi sürecinde öncelikle hipotez aşamasında tahmini öğrenme yol haritaları hazırlanmıştır. Daha sonra bu yol haritalarına dayalı olarak ders planları oluşturulmuş ve hazırlanan bu plan doğrultusunda öğretim etkinlikleri hazırlanmıştır. Ardından hazırlanan öğretim etkinlikleri sınıfta uygulanmıştır. Uygulama sonunda yapılan değerlendirmeler neticesinde yol haritaları gerekli görüldüğü durumlarda revize edilmiştir.

3.4 Pilot Çalışma

Araştırmacı, 2020-2021 eğitim-öğretim yılının birinci döneminde uygulamanın yapılacağı okulun farklı bir şubesinde yine 7. sınıf seviyesindeki öğrencilerle pilot çalışma gerçekleştirmiştir. Yürütülecek olan araştırmanın hazırlanan öğretim dizilerini, planlarını ve etkinliklerini deneyimlemek; ayrıca araştırmacının öğretim deneyi sürecini yönetmesi konusunda deneyim kazanması amacıyla pilot çalışma gerçekleştirilmiştir. Araştırmada uygulanacak klinik görüşme soruları test edilerek gerekli düzeltmelerin yapılması için pilot uygulamanın yapılacağı sınıftan da başarı düzeyleri yüksek, orta ve düşük seviyede olan üç odak öğrenci seçilmiştir. Pilot çalışmanın tüm aşamaları ana çalışmayla benzer olacak şekilde altı haftalık bir zaman diliminde gerçekleştirilmiştir. Pilot çalışmada gerçekleştirilen tüm öğretim dersleri ve klinik görüşmeler video kayıtları altına alınarak alanında uzman bir matematik eğitimcisiyle sürekli analize tabi tutulmuştur. Araştırmacı ve uzman matematik eğitimcisi her bir klinik görüşme ve öğretim dersleri sonrasında önce ayrı ayrı, sonra birlikte video kayıtlarını izleyerek sürekli analizler gerçekleştirmiştir. Yapılan analizler neticesinde klinik görüşme sorularında ve öğretimde uygulanan etkinliklerde gerekli görülen noktalarda değişiklikler yapılmıştır. Ayrıca klinik görüşme sorularında ve etkinliklerdeki bazı soruların matematiksel dil ve anlatım olarak daha anlaşılır olması için bazı cümleler revize edilmiştir.

3.5 Veri Toplama Araçları

Öğretim deneyinde nitel veriler olası iki kaynaktan elde edilebilir. Bunlardan ilki öğrencilerle gerçekleştirilen öğretimler, diğeri ise gerekli görülen durumlarda öğrencilerle yapılan klinik görüşmelerdir (Cobb ve Steffe, 1983). Araştırmada veri toplama araçları olarak öğretim süreçleri esnasında alınan ses ve video kayıtları, klinik görüşmeler, öğrenci çalışma yaprakları, araştırmacı tarafından tutulan notlar ve gerekli görülen durumlarda öğrenciler tarafından tutulan öğrenci günlükleri kullanılmıştır.

3.5.1 Klinik Görüşmeler

Bu araştırmada, veri toplamada kullanılan tekniklerden biri klinik görüşmelerdir. Klinik görüşme, öğrencinin bilgi yapısını ve akıl yürütme sürecini araştırmak için Piaget'in öncülüğünde geliştirilen bir tekniktir. Klinik görüşme öğrencinin düşünce doğasıyla ilgili ipuçları veren ve böylece nasıl düşündüğünü ortaya çıkarmaya çalışan, bilişsel süreçleri zihnine nasıl işlediğini ve izlediği zihinsel süreçleri anlamaya fırsat veren bir veri toplama tekniğidir (Ginsburg, 1981). Klinik görüşmelerde önemli olan öğrencilerin soruları doğru yanıtlaması değil, süreç içerisinde öğrencilerin matematiksel görevleri yerine getirebilme kapasitelerinin ortaya çıkarılmasıdır. Böylece klinik görüşmelerle öğrencilerin matematiksel öğrenme ile ilgili matematiksel keşfetme, problem çözme ve öğrenme arasındaki ilişki derinlemesine ortaya çıkarılmaya çalışılır (Goldin, 2004). Bu araştırmada da odak öğrencilerle öğretim dizilerinin başında “ön klinik görüşmeler”, öğretim dizilerinin ilk ve tekrar etapları arasında “ara klinik görüşmeler” ve öğretim dizilerinin sonunda “son klinik görüşmeler” gerçekleştirilmiştir. Araştırmada uygulanacak öğretim, birbirini takip eden dört öğretim dizisini içerdiği için her bir öğretim dizisinden önce odak öğrencilerin ön bilgilerini ve hazırbulunuşluk düzeylerini tespit etmek için dört ayrı ön klinik görüşme düzenlenmiştir. Benzer şekilde öğretimin uygulama aşamasında her bir öğretim dizisi için ayrı olmak üzere dört ayrı ara klinik görüşme ve öğretim sona erdikten sonra her bir öğretim dizisi için dört ayrı son klinik görüşme düzenlenmiştir. Böylece her bir odak öğrenci ile 12 klinik görüşme gerçekleştirilmiştir.

Klinik görüşme soruları hazırlanırken araştırmanın amacı ve literatür taramasında elde edilen veriler göz önünde bulundurulmuştur. Ayrıca sorular hazırlandıktan sonra iki ayrı uzmandan görüş alınmıştır. Diğer yandan uygulama esnasında yaşanabilecek sorunları deneyimlemek ve klinik görüşme uygulamasında tecrübe kazanmak için pilot çalışma gerçekleştirilmiştir. Pilot çalışmadan elde edilen dönütler de değerlendirilerek klinik görüşme sorularına son şekli verilmiştir. Klinik görüşmeler için hazırlanan sorular Ek 3’te verilmiştir.

3.5.2 Öğretim Dizileri

Araştırmada cebir öğrenme alanının cebirsel ifadeler ile eşitlik ve denklem alt öğrenme alanında yer alan kazanımlar birbirini takip eden dört öğretim dizisi şeklinde ele alınmış ve 6 hafta süresince uygulanmıştır. Öğretimde işlenecek konular ile ilgili kazanımlar, içerikler ve ders saati süreleri haftalık olarak Çizelge 3.1’te verilmiştir.

Çizelge 3.1 Öğretim Dizilerindeki Kazanım, İçerik ve Ders Süresi

Öğretim dizisi	Hafta	Öğretim etabı	Kazanım	İçerik	Ders saati süresi
1.Öğretim dizisi	1.Hafta	Öğretimin ilk etabı	7.2.1.1. Cebirsel ifadelerle toplama ve çıkarma işlemleri yapar. 7.2.1.2. Bir doğal sayı ile bir cebirsel ifadeyi çarpar.	» Cebirsel ifadelerle toplama ve çıkarma işleminde uygun model kullanımı » Dağılma özelliği yardımıyla cebirsel ifadelerle çarpma işlemi çalışmaları	3
		Tekrar öğretim etabı			2
2.Öğretim dizisi	2.Hafta	Öğretimin ilk etabı	7.2.1.3. Sayı örüntülerinin kuralını harfle ifade eder, kuralı harfle ifade edilen örüntünün istenilen terimini bulur.	» Şekil örüntüleri » Sayı örüntüleri » Örüntülerin tablo ile temsili » Genel terim bulma çalışmaları	3
		Tekrar öğretim etabı			2
3.Öğretim dizisi	3.Hafta	Öğretimin ilk etabı	7.2.2.1. Eşitliğin korunumu ilkesini anlar.	»Eşitliğin korunduğunu göstermek için terazi veya benzeri denge modelleri » Açık sayı cümleleri » Doğru/yanlış cümleleri	3
		Tekrar öğretim etabı			2
4.Öğretim dizisi	4.Hafta	Öğretimin ilk etabı	7.2.2.2. Birinci dereceden bir bilinmeyenli denklemi tanır ve verilen gerçek hayat durumlarına uygun birinci dereceden bir bilinmeyenli denklem kurar.	» Sözel olarak ifade edilen eşitliklere ait denklemlerin kurulması » Terazi modelleri yardımıyla denklem çözümleri » Eşitliğin iki yanına aynı işlemleri yapma yöntemiyle denklem çözümleri	5
	5.Hafta		7.2.2.3. Birinci dereceden bir bilinmeyenli denklemleri çözer.		5
			7.2.2.4. Birinci dereceden bir bilinmeyenli denklem kurmayı gerektiren problemleri çözer.	» Günlük hayat problemlerine ait denklem kurma ve çözme çalışmaları	
		Tekrar öğretim etabı			5
	6.Hafta				

Öğrencilerin ön bilgilerini ölçmeye yönelik ön klinik görüşmeler yapıldıktan sonra elde edilen veriler ışığında TÖYH kapsamında ders planları ve etkinlikler hazırlanmış ve öğrencilerde tespit edilen kavram yanılgılarını ortadan kaldırmak ve bilgi eksikliklerini tamamlamak için öğretim dizilerinin ilk etap öğretimleri gerçekleşmiştir. Akabinde ara klinik görüşmeler düzenlenmiştir. Öğretim esnasında öğrencilerin yaşadığı zorluklara anında müdahale edilmiştir. Fakat uygulama esnasında giderilemeyen veya uygulama esnasında fark edilmediği halde ara klinik görüşmeler esnasında fark edilen zorluklar için tekrar öğretim etapları planlanmıştır. Öğretimin ilk etabı ve ara klinik görüşmeler neticesinde elde edilen bulguların analizi yapılarak öğretim kararları alınmış ve bu doğrultuda TÖYH revize edilmiştir.

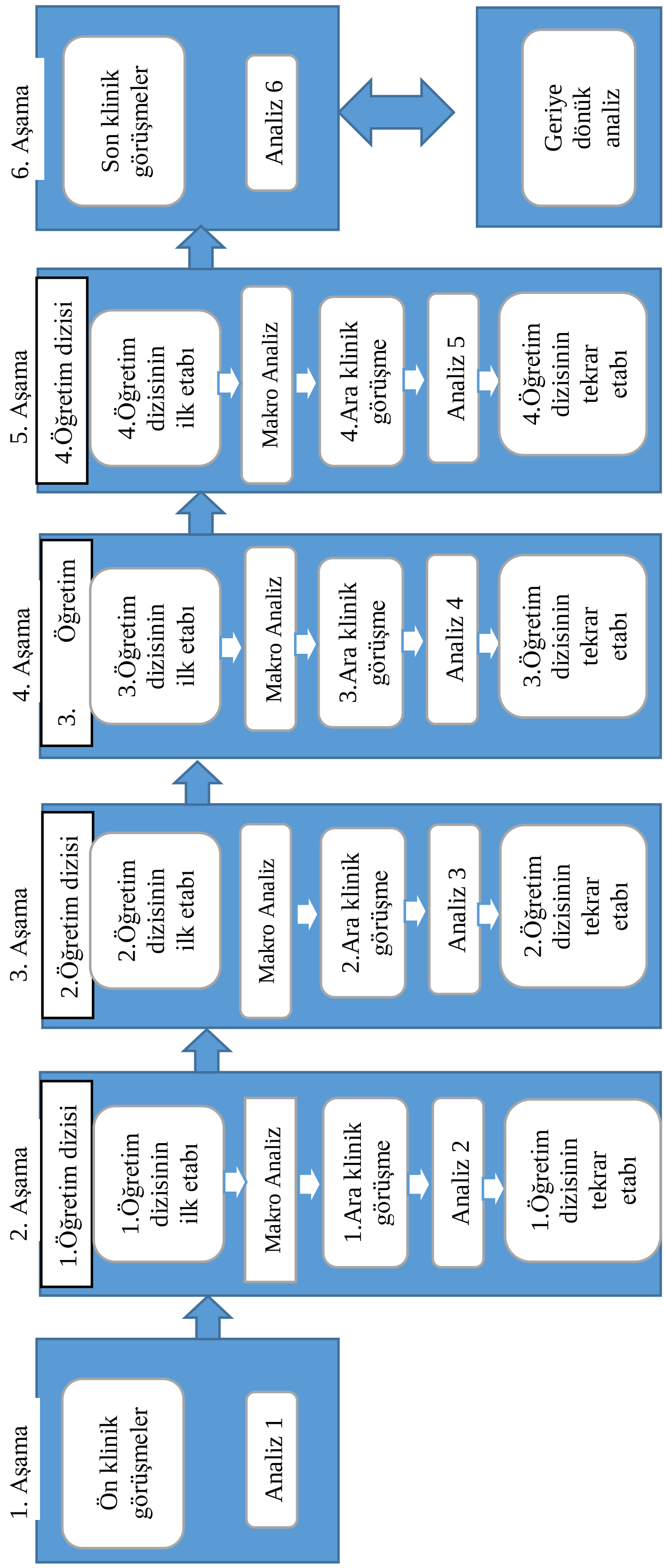
Ardından öğrencilerde tespit edilen eksiklikleri tamamlamak için öğretimin ilk etabındaki kazanımların tekrarını içeren tekrar öğretim etapları gerçekleştirilmiştir. Bu şekilde her öğretim dizisi içerisinde ilk ve tekrar etapları olmak üzere iki aşamada öğretim planlanmıştır. Planlanan dört öğretim dizisinin uygulanmasından sonra öğrencilerle son klinik görüşmeler yapılmıştır.

3.6 Verilerin Analizi

Öğretim deneyinde elde edilen verilerin analizi, sürekli analiz (ongoing analysis) ve geriye dönük analiz (retrospective analysis) olmak üzere iki analiz türünü içermektedir. Sürekli analiz öğrencilerle yapılan öğretim oturumu esnasında ve oturumun sonunda gerçekleştirilirken, geriye dönük analiz birbirini izleyen bir dizi öğretim oturumunun tamamı üzerinde gerçekleştirilir.

Sürekli analizin kilit noktası, araştırmacının öğrencilerin bilgilerine, eylemlerine ve eğilimlerine göre araştırmanın modelini oluşturabilmesi ve düzenleyebilmesidir. Bu amaç doğrultusunda, araştırmacı sürekli analiz sürecinde matematik eğitimi alanında bir uzman ile video kayıtlarını izleyerek elde edilen gözlemleri ve sonuçları tartışmış, öğretimin daha iyi hale gelmesi için gerekli düzenlemeler gerçekleştirmişlerdir. Geriye dönük analizler aşamasında ise araştırmadaki tüm veriler (klinik görüşmeler ve öğretim esnasındaki video ve ses kayıtları, öğrenci günlükleri, araştırmacı notları) analiz edilmiştir. Geriye dönük analizin amacı, öğrencilerin matematiksel gelişimini açıklayabilmektir (Simon, 2000). Araştırmanın sonunda elde edilen verilerin analiz edilmesiyle ortaya konan modelin güvenilir ve tutarlı olduğu gösterilmeye çalışılır (Cobb, 2000; Steffe ve Thompson, 2000).

Bir öğretim deneyinde, birden çok öğretim etabı yer alabilir. Bu öğretim etaplarında belirlenen hipotezler analiz edilir ve analizler sonucunda eksiklikler giderilir. Bu analizler neticesinde yeni hipotezler oluşturularak bir sonraki öğretim etabına geçilir (Steffe ve Thompson, 2000). Araştırmacı tarafından belirlenen hipotezler, öğrencilerden toplanan verilere bağlı olarak terk edilir veya revize edilerek yeni hipotezler oluşturulur. Bu araştırmada gerçekleştirilen öğretim deneyi Şekil 3.2'de gösterildiği gibi altı aşamalı olarak tekrarlanan bir süreci içermektedir.



Şekil 3.2 Verilerin Toplanma Aşaması ve Analizi

Araştırmada verilerin toplanması ve analizinin birinci aşamasında odak öğrencilerle ön klinik görüşmeler düzenlenmiş ve odak öğrencilerin sahip olduğu kavram yanılgıları ve hazırbulunuşluk düzeylerinin tespit edilmesi amacıyla Analiz 1 gerçekleştirilmiştir. Araştırma dört öğretim dizisi şeklinde planlandığı ve bu öğretim dizilerindeki öğretim hedefleri birbirinden farklı olmasından dolayı odak öğrencilerin her birisiyle dört ayrı ön klinik görüşme düzenlenmiştir. Klinik görüşmelerin ardından yapılan Analiz 1 ile öğrencilerin mevcut matematik bilgisi ve yanlış anlamaları hakkında araştırmacı bilgi edinmiştir.

Araştırmanın ikinci aşamasıyla birlikte öğretim uygulamaya geçirilmiştir. Öğretim uygulamaları birbirini takip eden dört öğretim dizisi şeklindedir. Ayrıca her öğretim dizisi ilk ve tekrar olmak üzere iki etap halinde gerçekleştirilmiştir. Araştırmanın öğretim uygulamalarının gerçekleştiği 2, 3, 4 ve 5. aşamalarında verilerin toplanması beş bölümden oluşmaktadır. Öğretim deneyinin uygulandığı bu beş bölüm öğretim dizisine ait ilk etap öğretimin geçekleşmesi, makro analiz, ara klinik görüşmeler, Analiz (2, 3, 4 ve 5) ve tekrar öğretim etabı şeklindedir. Her bir öğretim dizisi için süreç bu beş bölümün ayrı ayrı uygulanmasıyla gerçekleştirilmiştir. Araştırma boyunca sürekli ve detaylı analizler gerçekleştirilmiştir. Böylece araştırmacı analizler sonucunda öğrencilerin zihinsel aktivitelerinden haberdar olup uygulamada geriye dönük analizler yaparak öğretim sürecinde değişikleri kolayca yapabilmiştir. Daha sonra odak öğrencilerle ara klinik görüşmeler (1, 2, 3 ve 4) gerçekleştirilmiştir. Bu klinik görüşmelerde her bir öğretim dizisinde uygulanan öğretim deneyi sonrasında, öğrencilerin cebir öğrenme alanında karşılaştıkları konularda düşüncelerinde bir değişiklik olup olmadığı, kavram yanılgılarının giderilip giderilmediği ve öğretim esnasında eksik kalan bilgilerinin olup olmadığı ortaya çıkarılmaya çalışılmıştır. Ara klinik görüşmelerin gerçekleştirilmesinden sonra bu klinik görüşmelerin, öğretim esnasında alınan video ve ses kayıtlarının, öğrenci çalışma kâğıtlarının ve araştırmacı tarafından alınan notların analizi (Analiz 2, 3, 4 ve 5) gerçekleştirilmiştir. Son olarak, her bir öğretim dizisinde öğretimin ilk etabında ve ara klinik görüşmeler esnasında öğrencilerde rastlanan kavram yanılgılarını ve eksik öğrenmeleri ortadan kaldırmak için öğretim dizilerinin tekrar öğretim etapları gerçekleştirilmiştir. Bu şekilde beş bölümden oluşan aşamaların birinin bitmesinden sonra diğer öğretim dizisine geçilerek araştırmanın veri toplama ve analizinin 2, 3, 4 ve 5. aşamaları tamamlanmıştır.

Son olarak 6. aşamada öğrencilerle son klinik görüşmeler düzenlenmiştir. Her bir öğretim dizisi ayrı öğretim hedeflerini içermesinden dolayı ön klinik görüşmelerde olduğu gibi odak öğrencilerin her birisiyle dört son kinik görüşme gerçekleştirilmiştir. Bu aşamada amaç, uygulanan öğretim deneyi sürecinde öğrencilerin gelişimini ortaya koymaktır. Bu amaçla son klinik görüşmelerin düzenlenmesinden sonra Analiz 6 gerçekleştirilmiştir.

Geriye dönük analizlerde araştırmada veri toplamada kullanılan bütün araçlardan elde edilen verilerin analizi yapılmıştır. Öğretim deneyi sırasında öğretme ve öğrenme adına yapılan bütün gözlemler ve klinik görüşmelerin ışığında elde edilen verilerle öğrencilerin gelişimi aşama aşama kaydedilmiştir. Böylece öğretim deneyinin öğrenciler üzerinde oluşturduğu değişimler ve öğrencilerin cebir konularındaki gelişim sürecinin detaylı bir şekilde takip edilip incelenmesi sağlanmıştır.

3.7 Araştırmacının Rolü

Steffe'e (1991) göre öğretim deneyinin karakteristik özelliklerinden birisi de araştırmacının öğretmen rolünde olmasıdır. Ayrıca öğretim deneyinde araştırmacı öğretmen iki önemli görevi üstlenmektedir. Bunlardan ilki öğrencilerin derse aktif katılımlarını sağlayacak matematiksel durumları oluşturmak ve onlara matematiksel etkileşimi ortaya çıkaracak sorular sormak, diğeri ise her öğretim periyodunda öğrencilerin öğrenme etkinlikleri üzerinde nasıl çalıştıklarını, sınıf içi iletişimin ve etkinliklerin işlerliğinin sürekli analizini yapmaktır (Cobb, 2000; Steffe,1991).

Bu araştırmada araştırmacı öğretim deneyi sürecinde öğretmen rolüyle yer almıştır. Araştırma kapsamında yürütülen öğretim deneyi sürecinde, araştırmacı uygulamanın gerçekleşmesi için planlar ve etkinlikler hazırlamış, öğrencilerin öğretimin amacına yoğunlaşmak için yaratıcı sorular sormuş, sınıf içi etkileşimi oluşturacak uygun ortamı hazırlamış ve sınıf içi tartışmaları destekleyerek öğrencilere kendi düşüncelerini ifade etmeleri için fırsatlar tanımıştır. Araştırmacı öğretim süresince öğretmen rolüyle öğrencilerle aktif iletişime geçerek öğretimi destekleyici şekilde davranmıştır.

Araştırmacı öğretim esnasında öğrencilerin hedeflenen görevleri yerine getirirken sergilediği davranış ve eylemleri analiz ederek yorumlamış, bu yorumlara dayanarak hipotezler ortaya koymuş ve öğretimin amaçlarına dair kararlar almıştır. Bu açıdan araştırmacının öğretmen olması ile alandaki bilgi birikimi ve deneyimlerini yapmış olduğu analizlere yansıtmıştır (Yıldırım ve Şimşek, 2011). Bunun yanında araştırmacının yüksek lisans eğitimi sırasında aldığı, "Matematik Eğitiminde Araştırma Yöntemleri ve Yayın Etiği" ile "Nitel Veri Analizi" dersleri araştırma sürecinde araştırmacıya yol gösterici olmuştur.

3.8 Araştırmada Geçerlik ve Güvenirlik

Yıldırım ve Şimşek (2011) nitel araştırmalarda geçerlik ve güvenirlik kavramlarını nicel araştırmalardan farklı olarak inandırıcılık (iç geçerlik), aktarılabilirlik (dış geçerlilik), tutarlık (iç güvenirlik) ve teyit edilebilirlik (dış güvenirlik) gibi farklı boyutlarıyla ele almıştır. Bu araştırmada geçerlik ve güvenirliğin artırılması için belirtilen boyutlarda şu önlemler alınmıştır:

İnandırıcılık (İç geçerlik): Araştırmanın bulgularının gerçeklikle ne düzeyde uyumlu olduğunun ifade edilmesidir. Yıldırım ve Şimşek (2011) araştırmaya katılan bireylerin farklı algı ve bakış açıları olabileceğinden bahsederek araştırmanın bütün zenginliği ile ortaya koyulması için verilerin toplanmasında çeşitleme stratejisinin kullanılması gerektiğini vurgulamıştır. Dolayısıyla araştırmanın inandırıcılık boyutunu artırmak için video kayıtları, klinik görüşmeler, öğrenci çalışma kâğıtları ve araştırmacı notları gibi farklı veri toplama araçları (çeşitleme) kullanılmış ve elde edilen veriler sürekli karşılaştırılarak yorumlanmıştır. Süreç içerisinde öğrenciler sürekli gözlemlenmiş, bu gözlemler yorumlanmaya çalışılmış ve araştırmacı ile uzmanın katıldığı kısa aralıklı toplantılarda tartışılmıştır. Süreç içerisinde araştırmacı öğrencilerle uzun süreli etkileşim kurmuştur.

Aktarılabilirlik (Dış geçerlilik): Guba (1981) ve Leininger'e (1994) göre bir araştırmanın bulguları benzer çalışmalarla ne kadar uygun ve desteklenebilir olursa aktarılabilirlik o kadar yüksek olacaktır. Ayrıca araştırmacı araştırmanın süreçlerini net ve açık bir şekilde ortaya koymalıdır. Böylece teorik çatının ayrıntılı şekilde ele alınması, benzer çalışmayı yapacak araştırmacılar için farklı katılımcılarla uygulanıp uygulanamayacağına karar vermelerine yardımcı olur. Bu amaçla araştırmanın teorik çatısı net ve açık bir şekilde ortaya konulmaya çalışılmıştır. Bunun dışında, amaçlı örneklem yönteminin kullanılmasının araştırmanın aktarılabilirliğini arttırdığı düşünülmektedir (Yıldırım ve Şimşek, 2011).

Tutarlılık (İç güvenirlik): Aynı bağlamda aynı katılımcılarla aynı bulgulara ulaşılmasını ifade etmektedir. Bu amaçla araştırmada toplanan verilerin analizi araştırmacı ve alan uzmanı ile birlikte yapılmıştır. Bu analizler farklı zamanlarda tekrar tekrar incelenmiştir. Ayrıca bulgu ve sonuçlar arasındaki ilişkinin karşılaştırılması aşamasında uzman görüşlerinden yararlanılmıştır.

Teyit edilebilirlik (Dış güvenirlik): Araştırmanın bulgularının araştırmacının değil, katılımcıların deneyim ve düşüncelerinden kaynaklandığının ortaya konulmasıdır. Yıldırım ve Şimşek (2011) araştırmacının öznel yargılardan uzak olarak araştırmanın sonuçlarını sürekli teyit ederek okuyucuya mantıklı açıklamalar sunulması gerektiğini ifade etmiştir. Bu amaçla araştırmada sonuçların analizinde araştırmacı aldığı notlardan yararlanmıştır. Araştırmacı ve alan uzmanı analiz sürecinde farklı değerlendirmelerde bulundukları durumlarda tartışarak uzlaşmaya varmışlardır.

4. ARAŞTIRMANIN BULGULARI

Bu bölümde, araştırma sürecinde çeşitli veri toplama araçları ile toplanan verilerin analizi sonucunda elde edilen bulgulara ve bu bulguların yorumlarına yer verilmiştir. Bulgular; yapılan klinik görüşmelerde yöneltilen sorulara karşılık odak öğrencilerin yaptıkları açıklamalara, tüm öğrencilerin katıldığı sınıf tartışmalarına ve öğrencilerin görüşlerinden yapılan doğrudan alıntılara dayanmaktadır.

4.1 Odak Öğrencilerle Yapılan Ön Klinik Görüşmelere Ait Bulgular

TÖYH'ye dayalı bir öğretim sürecinde öğrenme amacı belirlenirken öğrencilerin konu ile ilgili ön bilgileri önem arz etmektedir. Bu nedenle öncelikle odak öğrencilerle ön klinik görüşmeler gerçekleştirilmiştir. Böylece amaca yönelik öğretimin gerçekleştirilmesi için öğrencilerin hazırbulunuşlukları, yeterlilikleri ve ön bilgileri tespit edilmeye çalışılmıştır.

Yüksek başarı seviyesinde olan A odak öğrencisi, orta başarı seviyesinde olan B odak öğrencisi ve düşük başarı seviyesinde olan C odak öğrencisi ile yapılan ön klinik görüşmelere ilişkin bulgular;

1. Cebirsel ifadelerle işlemler
2. Örüntü genellemeleri
3. Eşitliğin korunumu ve ilişkisel düşünme
4. Denklemler ve çözümleri

şeklinde dört ana başlık altında incelenmiştir.

4.1.1 Birinci Ön Klinik Görüşmelere Ait Bulgular: Cebirsel İfadelerle İşlemler

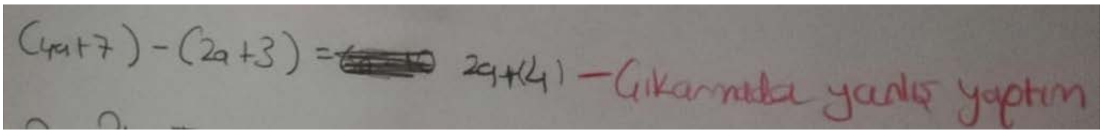
Odak öğrencilerle yapılan birinci ön klinik görüşmeler "7.2.1.1. Cebirsel ifadelerle toplama ve çıkarma işlemleri yapar." ve "7.2.1.2. Bir doğal sayı ile bir cebirsel ifadeyi çarpar." kazanımları kapsamında gerçekleştirilmiştir. Klinik görüşmelerde, açık uçlu sorular vasıtasıyla odak öğrencilerin benzer terimleri ayırt etme, cebirsel ifadelerle toplama ve çıkarma işlemleri yapma ve bir doğal sayı ile bir cebirsel ifadeyi çarpma sırasında, gerçekleştirdikleri ilk fiziksel/zihinsel eylemler gözlemlenmiştir. Ayrıca klinik görüşmeler esnasında odak öğrencilerin yapmış oldukları hata türleri ve sahip oldukları kavram yanılgıları da tespit edilmeye çalışılmıştır.

Odak öğrencilerle yapılan klinik görüşmelere, "Benzer terim nedir?" sorusu ile başlanmıştır. Yöneltilen soruya A odak öğrencisi, *"Değişkenleri aynı olan terimler benzerdir."* şeklinde, B odak öğrencisi, *"Bilinmeyen olarak kullanılan harfler aynı ise terimler benzerdir."* şeklinde, C odak öğrencisi ise, *"Harfleri aynı olan terimler benzerdir."* şeklinde ifadeler kullanarak yanıtlamışlardır. Öğrencilerin yanıtlarından da anlaşılacağı gibi, benzer terim tanımında odak öğrencilerin sadece aynı değişken kavramına odaklanıp değişkenlerin kuvvetlerinin aynı olması hususuna değinmedikleri tespit edilmiştir. Sonuç olarak benzer terim kavramı üzerinde öğrencilerin doğru fakat eksik bilgiye sahip oldukları gözlemlenmiştir.

Cebir karolarıyla modellenmesi istenen "3x+2x=?" ve "(-2x)+(-4x)=?" toplama işlemlerini odak öğrencilerin üçü de doğru olarak modelledikten sonra doğru cevaba ulaştıkları gözlemlenmiştir. Benzer terim hakkında eksik bilgiye sahip olmalarına rağmen, odak öğrencilerin hata yapmadıkları görülmüştür. Ayrıca üç odak öğrencinin de toplama işlemini bir araya getirme anlamında kullanabildikleri tespit edilmiştir.

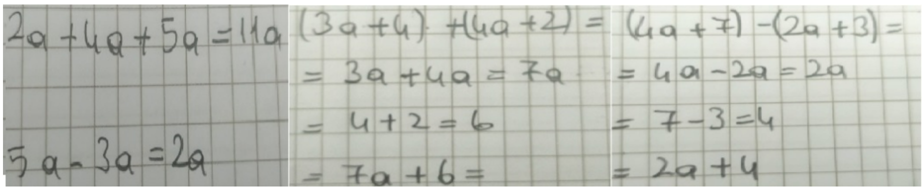
Benzer terim kavramı ile ilgili olarak eksik bilgilerin incelenebilmesi için odak öğrencilere yöneltilen soruda, yazılan farklı terimlerin 2a terimi ile benzer olup olmadığı sorgulanmıştır. Bu soruda C odak öğrencisi -5a,$\frac{7a}{5}$,$\frac{-a}{2}$ terimlerinin 2a ile benzer olmadığı görüşünü ileri sürmüştür. C odak öğrencisi, "*2a ile -5a benzer terim değildir. Çünkü -5a negatiftir.* $\frac{7a}{5}$ *ve* $\frac{-a}{2}$*'de 2a ile benzer değil çünkü kesir halinde yazılmış.*" şeklinde görüş bildirmiştir. C odak öğrencisinin düşüncesine göre *2a* ile bir terimin benzer olabilmesi için *3a* teriminde olduğu gibi katsayının pozitif bir tam sayı olması gerekmektedir. Yine C odak öğrencisi, "*2a ile* $2a^2$ *benzer terimdir.*" cevabını vermiştir. Verilen cevaplara göre C odak öğrencisinin benzer terim kavramı hakkında bir hayli eksik bilgiye sahip olduğu tespit edilmiştir. B odak öğrencisi ise yöneltilen soruya; "*2a ile 2ab ve* $2a^2$ *benzer terimdir.*" yanıtını vermiştir. Görüşme esnasında verilen bu hatalı cevabın ardından öğrenciye, "*2a ile 2ab terimleri toplanabilir mi?*" şeklinde başka bir soru yöneltilmiştir. B odak öğrencisi soruyu, *"Hayır toplanamıyor, o zaman yanlış söylemiş olmalıyım. Benzer terim değildirler."* şeklinde yanıtlamıştır. Aynı şekilde, "*2a ile* $2a^2$*terimleri toplanabilir mi?*" sorusuna ise, "*Evet toplanabilir,* $4a^2$*'dir.*" şeklinde hatalı yanıtlamıştır. Verilen yanıtlar doğrultusunda B odak öğrencisinin benzer terimleri temsil eden harflerin ve bu harflerin kuvvetlerinin aynı olması hususuna dikkat etmeden cevaplar verdiği tespit edilmiştir. A odak öğrencisi ile yapılan görüşmelerde ise; öğrencinin benzer terimin tanımını sözel olarak tam ifade edemese de, sorulan sorularda benzer terimleri ayırt edebildiği ve doğru cevaplar verebildiği gözlemlenmiştir. Genel olarak yapılan ön klinik görüşmelerde, odak öğrencilerin benzer terim kavramı hakkında eksik bilgilerinin olduğu tespit edilmiştir. Özellikle birden fazla harfli ifade ve bu harfli ifadelerin farklı kuvvetlerinin kullanıldığı cebirsel ifadelerde ya da rasyonel olarak gösterilen cebirsel ifadelerde benzer terimlerin tespitinde öğrencilerin hatalı cevaplar verdikleri görülmüştür.

Odak öğrencilere cebirsel ifadelerle toplama ve çıkarma işlemleri içeren "2a+4a+5a=?", "5a-3a= ?", "(3a+4)+(4a+2)=?" ve "(4a+7)-(2a+3)=?" şeklinde dört soru sunulmuştur. A odak öğrencisi toplama işlemlerinde benzer terimler arasında işlem yaparak doğru sonuçlara ulaşmıştır. Cebirsel ifadelerde çıkarma işlemi ile ilgili "5a-3a" sorusunu "2a" olarak doğru yanıtlamış fakat "(4a+7)-(2a+3)=?" sorusunun cevabını hatalı olarak "2a+10" şeklinde bulmuştur. Araştırmacının, *"Verilen işlemde çıkan ifade 2a mı yoksa 2a+3 mü?"* şeklindeki sorusunu, *"Parantez varmış. Bu durumu değiştirebilir. Ben sadece 2a'yı çıkarmışım. Aslında 2a+3'ün tamamını çıkarmalıyım. O zaman sonuç 2a+4 olacak."* ifadesini kullanarak cevaplamış ve yanıtını düzeltmiştir. A odak öğrencisinin yaptığı eylemler Şekil 4.1'de gösterilmiştir. Öğrencinin verdiği yanıtta ifade ettiği gibi parantezi önemsiz olarak düşünmesi şeklinde bir kavram yanılgısı içinde olduğu tespit edilmişitir.



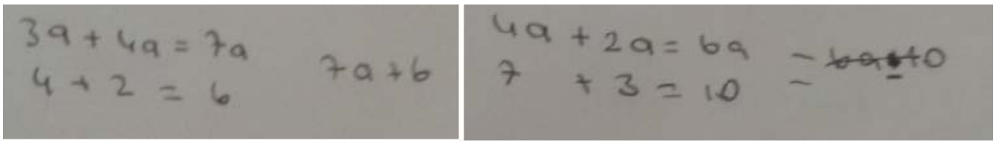
Şekil 4.1 A Odak Öğrencisinin Cebirsel İfadelerle Çıkarma İşlemindeki Eylemi

B odak öğrencisi yöneltilen soruları inceledikten sonra, "*Cebirsel ifadelerde benzer terimler arasında toplama ve çıkarma işlemi yapılabilir.*" şeklinde açıklama yapmıştır. B odak öğrencisinin Şekil 4.2.'de gösterildiği gibi sorulara doğru cevaplar verdiği gözlemlenmiştir. B odak öğrencisi toplama ve çıkarma işlemleri yaparken benzer terimleri bir araya getirerek gruplamış, değişken içeren gruptaki işlemleri ayrı bir soru, sabit terimleri içeren gruptaki işlemleri ayrı bir soru gibi ele almış, ardından iki ifadenin sonucunu birleştirmiştir.



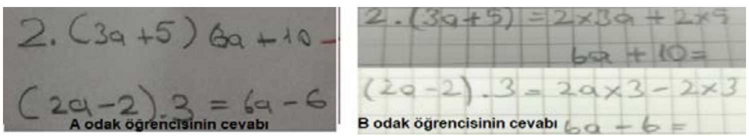
Şekil 4.2 B Odak Öğrencisinin Toplama ve Çıkarma İşlemlerindeki Eylemleri

C odak öğrencisi iki cebirsel ifadenin toplanması ile ilgili işlemleri doğru olarak cevaplamıştır. Çıkarma işlemlerinde ise "5a-3a=2a" doğru cevabına ulaşmasına rağmen "(4a+7)-(2a+3)" işlemini hatalı olarak "*6a+10*" şeklinde cevaplamıştır. Araştırmacı, öğrencinin işlemi toplama olarak anladığını fark etmiş ve işlemin çıkarma işlemi olduğu vurgusunu yapmıştır. Bu uyarının ardından C odak öğrencisi cevabını "6a-10" olarak güncellemiştir. Ancak öğrencinin soruyu tekrar gözden geçirerek cevapladığı fakat yine hatalı yanıtladığı gözlemlenmiştir. Verilen cevaplardan da anlaşılacağı gibi C odak öğrencisinin sabit terim içermeyen cebirsel ifadeler arasında çıkarma işlemi yapabilmesine rağmen, sabit terim içeren cebirsel ifadeler ile çıkarma işlemi yapmakta zorlandığı tespit edilmiştir.



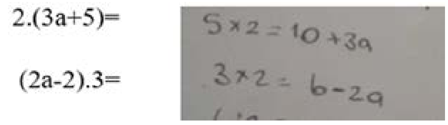
Şekil 4.3 C Odak Öğrencisinin Toplama ve Çıkarma İşlemlerindeki Eylemleri

Dağılma özelliğinden yararlanılarak bir doğal sayı ile bir cebirsel ifadenin çarpımını içeren "2.(3a+5)=?" ve "(2a-2).3=?" soruları odak öğrencilere yöneltilmiştir. A ve B odak öğrencileri geçmiş senelerde öğrendikleri dağılma özelliğinden yararlanarak sorulara Şekil 3.4'te gösterildiği gibi doğru cevaplar vermişlerdir.



Şekil 4.4 A ve B Odak Öğrencilerinin Çarpma İşlemine Yönelik Eylemleri

C odak öğrencisinin Şekil 4.5'te görüldüğü gibi çarpma işlemini verilen cebirsel ifadelerin sadece sabit terimleri ile yaptığı görülmüştür. Bu durumu C odak öğrencisi, "*Çarpma işlemi sadece benzer terimlerle yapılır, onun için bilinmeyenlerle* *çarpma yapmadım.*” şeklinde ifade etmiştir. C odak öğrencisinin hatalı cevabının toplama ve çıkarma işlemleri için geçerli olan bir durumu, yanlış genelleyerek çarpma işlemi için de doğru kabul etmesinden kaynaklandığı tespit edilmiştir. Ayrıca öğrencinin parantezi önemsiz görmesi gibi bir yanılgı içinde olduğu da tespit edilmiştir.



Şekil 4.5 C Odak Öğrencisinin Çarpma İşlemine Yönelik Eylemleri

4.1.2 İkinci Ön Klinik Görüşmelere Ait Bulgular: Örüntü Genellemeleri

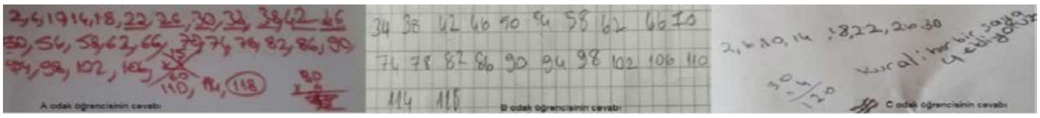
Odak öğrencilerle yapılan ikinci ön klinik görüşmeler “7.2.1.3. Sayı örüntülerinin kuralını harfle ifade eder, kuralı harfle ifade edilen örüntünün istenilen terimini bulur.” kazanımı kapsamında yapılmıştır. Klinik görüşmeler esnasında, açık uçlu sorular vasıtasıyla odak öğrencilerin şekil ve sayı örüntülerini, istenilen adıma kadar devam ettirmeleri, eksik bırakılan adımları bulmaları istenmiştir. Bununla birlikte örüntü genellemelerine yönelik odak öğrencilerin ilk fiziksel-zihinsel eylemleri incelenmiştir. Ayrıca görüşmeler esnasında öğrencilerin yapmış oldukları hataların nedenleri ve sahip oldukları kavram yanılgıları da tespit edilmeye çalışılmıştır. Odak öğrencilerin genelleme süreçleri incelenerek fonksiyonel ilişkiyi anlama düzeyleri tespit edilmeye çalışılmıştır.

Klinik görüşmelerde, odak öğrencilere ilk olarak Şekil 4.6’da verilen şekil örüntüsüyle ilgili, “Örüntünün ilerlemesi hakkında ne düşünüyorsunuz? ” sorusu yöneltilmiştir.

Şekil 4.6 Odak Öğrencilere Yöneltilen Şekil Örüntüsü Sorusu

C odak öğrencisi, *“Örüntü üçer üçer artmaktadır.”* yanıtını vermiştir. Ardından örüntünün 6. adımında karşılaşılan sayı sorulduğunda, *“3, 6, 9, 12, 15, 18”* şeklinde artış miktarını bir önceki terimin üzerine yinelemeli olarak ekleyerek cevaba ulaştığı gözlemlenmiştir. Aynı şekilde B odak öğrencisi de verilen şekil örüntüsünün artış miktarının 3 olduğunu söylemiş, bu artış miktarı ile ritmik sayma yaparak, *“3, 6,* *9, 12, 15, 18 şeklinde devam edersek 6. adımında 18 ile karşılaşırız.*" yanıtını vermiştir. A odak öğrencisi ise, *"Örüntüdeki üçgenler her adımda üç tane üçgen daha eklenerek ilerliyor."* ifadesini kullanmıştır. Örüntünün 6. adımında karşılaşılan üçgen sayısı sorulduğunda ise, *"Her adımda 3 üçgen var. 6. adımda 6.3=18 olduğundan 18 üçgen bulabiliriz."* yanıtını vermiştir. A odak öğrencisinin verdiği yanıttan da anlaşılacağı gibi diğer iki arkadaşının cevabından farklı olarak orantısal akıl yürütme ve bütüne genişletme stratejisini kullanarak sonuca ulaştığı gözlemlenmiştir. Odak öğrencilerin yanıtlarından da anlaşıldığı gibi, öğrencilerin verilen şekil örüntüsünün şekilsel analizini yapmak yerine, sayısal ilişkilere çevirdikleri gözlemlenmiştir. Öğrencilerin verilen şekil örüntüsünün yakın adımlarına ulaşırken, önce ardışık terimler arasındaki ortak farkı buldukları, sonra yinelemeli stratejiler ya da bütüne genişletme stratejilerini kullandıkları tespit edilmiştir. Odak öğrencilerin şekil örüntüsünün yakın adımlarına ulaşırken, ardışık terimler arasındaki ortak farka odaklanarak, fonksiyonel ilişkileri yinelemeli özel düzeyde ifade edebildikleri tespit edilmiştir.

Şekil örüntüsünde yakın adımlardaki terimlere ulaşabilen odak öğrencilere uzak adımlardaki terimler sorulduğunda nasıl düşündüklerini ortaya koymak amacıyla Şekil 4.7'deki sayı örüntüsünün 30. adımında hangi terim ile karşılaşacakları sorulmuştur.



Şekil 4.7 Odak Öğrencilerin Uzak Adımlara Ulaşırken Yaptığı Eylemler

A ve B odak öğrencileri artış miktarını tespit ettikten sonra 30. adıma kadar olan bütün adımları yazarak sonuca ulaşmıştır. İki terim arasındaki farkı bulduktan sonra bir önceki sayıya buldukları farkı ekleyerek, yinelemeli stratejiyi kullandıkları gözlemlenmiştir. Yinelemeli stratejileri kullanan öğrencilerin uzak adımlara ulaşırken bir hayli zaman harcadıkları tespit edilmiştir. Araştırmacının, "Daha uzak bir adım olsa yine aynı şekilde mi sonuca ulaşmaya çalışırdınız?" sorusuna A odak öğrencisi, *"Aslında ben önce 30 ile 4'ü çarptım 120 buldum. Ama emin olamadım. Çünkü diğer sayılar 4'ün katı değildi. Ben de tek tek yazdım. 30. adımda 118 buldum. Şimdi olsa 30'u 4 ile çarpıp 2 çıkartırdım."* şeklinde görüşünü bildirmiştir.

A Odak öğrencisinin yaptığı açıklamadan da anlaşılacağı gibi örüntüdeki ilişkiyi özel bir durum için tanımlayabilmiş ama genellemelerde bulunamamıştır. A odak öğrencisi örüntünün uzak adımlarını fonksiyonel özel düzeyde ifade ettiği tespit edilmiştir.

B ve C odak öğrencilerinin uzak adımlar için genellemeler yaparken yinelemeli stratejileri genel düzeyde kullanabildikleri tespit edilmiştir. Ayrıca C odak öğrencisi örüntünün 30. adımını bulmaya yönelik işlemler yaparken artış miktarının 4 olduğunu fark etmiştir. Ardından orantısal akıl yürüterek birinci adımdaki üçgen sayısının 30 katını alıp 30. adımdaki sayıya ulaşmaya çalıştığı gözlemlenmiştir. Öğrencinin girdi ve çıktı değerleri arasında orantı kurarak bütüne genişletme stratejisini hatalı kullanması sonucunda bu cevabı verdiği tespit edilmiştir.

Odak öğrencilerin uzak adımlardaki terimleri bulmaya yönelik işlemlerde adım sayısı ile adımda ulaşılacak sayı arasındaki ilişkiyi fark edemedikleri tespit edilmiştir. Odak öğrencilerin cevaplarından da anlaşıldığı gibi uzak genellemeler için yinelemeli stratejinin kullanılmasının beraberinde bazı zorlukları getirdiği gözlemlenmiştir.

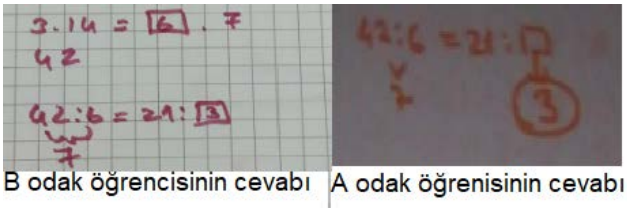
Odak öğrencilerin, örüntünün kuralını sözel olarak ifade ederken sadece artış miktarına dikkat çekerek, *"Dörder dörder artan bir örüntüdür."* şeklinde kısıtlı bir cevap verdikleri tespit edilmiştir. Bu durumun sonucu olarak öğrencilerin örüntüdeki ilişkilere değil, terimlerin arasındaki farka odaklandıkları gözlemlenmiştir. Öğrencilerin sadece çıktı değerlerine odaklanması örüntüdeki fonksiyonel ilişkilerin farkına varılmasını engellemiştir. Sadece A odak öğrencisi diğer arkadaşlarından bir miktar ayrılarak örüntünün uzak adımlarına ulaşırken fonksiyonel ilişkilerin kullanılabileceğini fark etmiştir. Bunun dışında ön klinik görüşmeler esnasında elde edilen bulgular ışığında, odak öğrencilerin örüntülerin yakın ve uzak adımlarını çoğunlukla yinelemeli-genel düzeyde ifade ettikleri tespit edilmiştir. Odak öğrencilerin örüntülerdeki ortak farkı bir önceki terime ekleyerek örüntüyü devam ettirebildikleri gözlemlenmiştir. Öğrencilerin yakın adımlardaki terimlere kolaylıkla ulaşabilmelerine rağmen, uzak adımlarda her zaman istenilen sonuca ulaşamadıkları tespit edilmiştir.

4.1.3 Üçüncü Ön Klinik Görüşmelere Ait Bulgular: Eşitliğin Korunumu ve İlişkisel Düşünme

Üçüncü ön klinik görüşmelerde öğrencilerin eşitliğin korunumu ilkesi ve ilişkisel düşünmenin tespiti amacıyla doğru/yanlış cümle örnekleri, açık cümle örnekleri ve açık uçlu sorular öğrencilere yöneltilmiştir. Yöneltilen bu sorular vasıtasıyla öğrencilerin düşünme biçimleri ortaya konulmaya çalışılmıştır.

C odak öğrencisi, eşitlik içeren veya içermeyen doğru yanlış sorularında eşit işaretini daha çok işlemlerin sonucunu gösteren bir sembol olarak ele alıp soruları yanıtlamıştır. C odak öğrencisi eşitlikte verilen sayıların arasındaki ilişkilerin farkına varamamış, işlemlerin özelliklerinden yararlanarak soruları yanıtlayamamıştır. Örneğin “7+5=5+7” eşitliğinde toplama işleminin değişme özelliğini fark etmeden işlemler yaparak eşitliğin doğruluğunu göstermeye çalışmıştır. Buna benzer olarak “81+24=83+26” eşitliğinde toplanan değerler arasındaki ilişkisel özellikleri kullanmak yerine yaptığı işlemlerle eşitliği göstermeye çalışmıştır. Fakat bu ilişkilerin ve özelliklerin farkına varamasa bile bütün soruları doğru cevapladığı gözlemlenmiştir. A ve B odak öğrencileri eşitlik içeren doğru ifadeleri bulurken “7+5=5+7” eşitliğinde toplama işleminin değişme özelliğini, “4.(5+7)=4.5+4.7” eşitliğinde dağılma özelliği fark ederek işlem yapmadan eşitliğin sağlandığını söylemişlerdir. “81+24=83+26” eşitliğinde ise yine A ve B odak öğrencileri sayılar arasındaki ilişkilerin farkına varmadan işlemler yaparak eşitliğin sağlandığını göstermeye çalışmışlardır.

Eşitliğin sağlanabilmesi için, eşitlikte eksik bırakılan yere yazılması gereken sayıların bulunması istenen açık cümle örneklerinde, C odak öğrencisinin eşitliğin sağ ve sol tarafındaki işlemleri yaparak, kutulara yazılması gereken sayılara ulaşmaya çalıştığı gözlemlenmiştir. C odak öğrencisi, “88-12=□-14”, “3.14=□.7”, “42:6=21:□” işlemlerinde eşitliğin ilişkisel anlamını kullanmadan bilinmeyenlere işlemler yaparak ulaşmıştır. “3.(5+7)=3.□+3.7” işleminde eşitliği, sonuç bildiren bir sembol olarak kullanmış ve dağılma özelliğinin farkına varamamıştır. A ve B odak öğrencileri ise değişme ve dağılma özelliklerinin farkına vararak, “□+5=5+7”, “3.(5+7)=3.□+3.7” eşitliklerindeki bilinmeyenleri bulabildikleri fakat “3.14=□.7” ve “42:6=21:□” açık cümle örneklerinde Şekil 4.8’de gösterildiği gibi ilişkisel düşünmeden işlemler yaparak bilinmeyenleri buldukları gözlemlenmiştir.



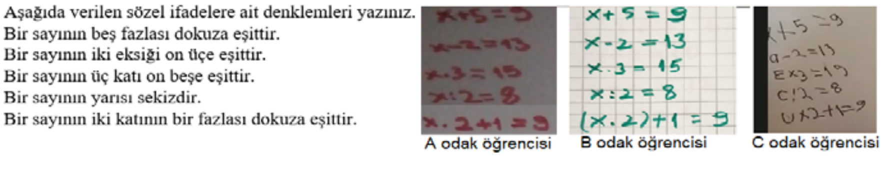
Şekil 4.8 A ve B Odak Öğrencilerinin Açık Cümle Örneklerindeki Eylemleri

Eşit işaretinin anlamını ve hangi durumlarda kullanıldığı sorulan, açık uçlu soruya A odak öğrencisi, *"İki işlem arasındaki eşitliği belirtmekte kullanılır. Örneğin; matematiksel işlemlerde sonuçları eşit olan yerlerde kullanılır."* şeklinde yanıtlamıştır. B odak öğrencisi ise, "*Eşit olan sayıları veya işlemlerin sonucunun eşit olduğu durumları göstermek için kullanılır."* şeklinde yanıtlamıştır. C odak öğrencisi ise, "*İki işlemin sonucu aynı ise eşitlik kullanılır."* şeklinde yanıtlamıştır. Odak öğrencilerin verdiği cevaplarda, eşit işaretini sonuçları aynı olan işlemlerde kullandıkları tespit edilmiştir. Eşitliği denge ve aynılık anlamında kullanmada zorlandıkları ve eşit işaretinin anlamında sınırlı bir kavrayış içinde oldukları gözlemlenmiştir.

4.1.4 Dördüncü Ön Klinik Görüşmelere Ait Bulgular: Denklemler ve Çözümleri

Dördüncü ön klinik görüşmelerde verilen sözel ifadelere ait eşitliklerin yazılması, denklemlerin terazi modelleri yardımıyla çözülmesi, denklemlerde bilinmeyenin bulunması ve denklem kurma ile ilgili açık uçlu sorular odak öğrencilerine yöneltilmiştir. Odak öğrencilerin ilk zihinsel/fiziksel eylemleri ortaya çıkarılmaya çalışılmıştır.

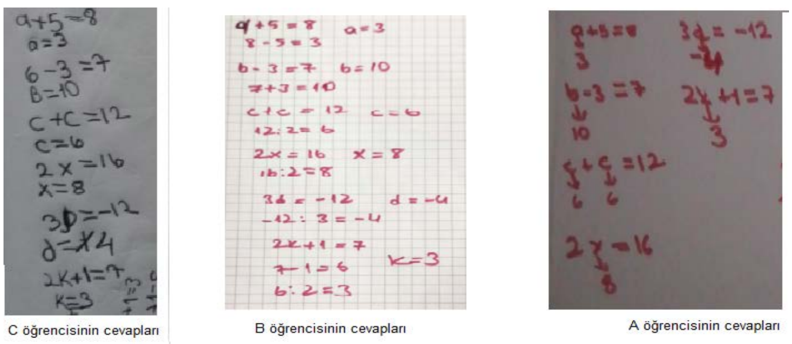
İlk olarak odak öğrencilere sözel olarak ifade edilen eşitliğe ait denklemin yazılmasını içeren, Şekil 4.9'daki açık uçlu sorular yöneltilmiştir. Bu sorularda öğrencilerin geçmiş senelerde öğrendiği sözel ifadelere ait cebirsel ifadelerin yazılması hakkındaki bilgileri ölçülmeye çalışılmış ve üç odak öğrencinin de bu konuda hazırbulunuşluk seviyelerinin ve ön bilgilerinin yeterli olduğu görülmüştür.



Şekil 4.9 Odak Öğrencilerin Denklemleri Yazarken Yaptıkları Eylemler

Ardından verilen terazi modelinde, terazinin sol kefesinde bulunan ağırlıkların sağ kefesinde bulunan ağırlıklar ile olan denge durumunu, üç odak öğrencinin de eşit işaretini kullanarak yazabildiği gözlemlenmiştir. Fakat üç odak öğrencinin de eşit kollu terazi modelinden yararlanarak, denklem çözümünü devam ettirmek yerine, yazdıkları sayısal eşitlik üzerinden denklemin sonucuna ulaşmaya çalıştıkları gözlemlenmiştir. Bu eşitliklere ait bilinmeyenleri bulurken, A ve B odak öğrencilerinin informal bir yöntem olan geriye doğru işlemler yaparak, C odak öğrencisinin ise sayma tekniklerini kullanarak doğru sonuçlara ulaştığı gözlemlenmiştir.

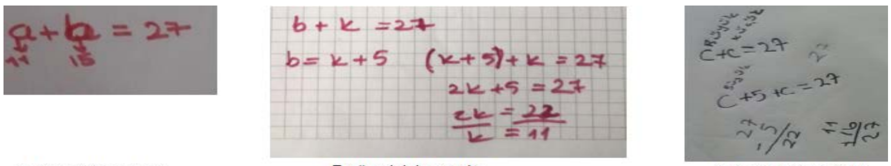
Bilinmeyenleri bulmaya yönelik olarak verilen denklemler konusunda odak öğrencilerin, bilinmeyeni bulurken kullandıkları düşünme biçimlerinin ortaya konması amacıyla, Şekil 4.10'daki denklemler öğrencilere sorulmuştur. C odak öğrencisinin bilinmeyeni bulurken, sayma teknikleri kullanarak bilinmeyenlere ulaşmaya çalıştığı gözlemlenmiştir. Örneğin "a+5=8" denkleminde, *"5'in üstüne 8'e kadar sayarsak a=3 buluruz.*" şeklinde yanıtlamıştır. B odak öğrencisi ise bütün denklemlerde bilinmeyi bulurken geriye doğru çalışarak doğru sonuçlara ulaşmıştır. Benzer şekilde A odak öğrencisi denklemlerde bilinmeyenleri bulurken geriye doğru çalışma yöntemiyle sonuçlara ulaşmıştır. Örneğin, *"b-3=7 olabilmesi için 10-3=7 olduğundan b=7 olmalıdır."* şeklinde yanıtlamıştır.



Şekil 4.10 Odak Öğrencilerin Denklem Çözümlerine Yönelik Eylemleri

Dördüncü ön klinik görüşmeler esnasında eşitliğin her iki tarafında da bilinmeyen bulunan denklemlerde, odak öğrencilerin zorlandıkları gözlemlenmiştir. C odak öğrencisi bilinmeyenle ilgili yetersiz bilgiye sahip olduğu için soruların hiç birisine cevap verememiştir. B odak öğrencisinin ise geriye doğru işlemler yaparak sonuca ulaşma eğiliminde olsa da denklemlerin sonucuna ulaşmada başarısız olduğu gözlemlenmiştir. Benzer olarak A odak öğrencisi de ilk başta eşitliğin iki tarafındaki bilinmeyenle nasıl işlem yapması gerektiğine karar verememiştir. Araştırmacı, terazi modeli yardımıyla “*x +8 =2x – 3*” denklemini modelledikten sonra iki taraftan da x’in çıkarılıp çıkarılamayacağını sormuştur. A odak öğrencisi ise, *“Evet... Eşitliğin her iki tarafına aynı işlemi yapabilirim. Bunu göstermek istiyorsunuz.”* şeklinde bir açıklama yaptıktan sonra eşitliğin korunumuna dikkat ederek denklemi çözüme ulaştırmıştır. Eşitliğin her iki tarafında bilinmeyen bulunan denklemlerde, odak öğrencilerinin denklemlerin sadece bir tarafında bilinmeyen bulunması gerektiğini düşünmesinden kaynaklı kavram yanılgısı içinde oldukları gözlemlenmiştir.

Verilen bir probleme ait denklemlerin kurulması ve bu denklemlerin çözümüne ilişkin, *“İki sayı toplamı 27’dir. Büyük sayı küçük sayının 5 fazlası ise bu sayılardan küçük olanını bulmaya yönelik denklemi kurunuz ve çözünüz.”* sorusu odak öğrencilere yöneltilmiştir. A odak öğrencisi denklemi kurarken iki bilinmeyen kullanmış ve bilinmeyeni bulurken deneme yanılma ve yerine koyma yöntemleri ile sorunun cevabına ulaşmıştır. B odak öğrencisinin ise istenilen denklemi doğru olarak kurduktan sonra bilinmeyeni bulduğu tespit edilmiştir. Öte yandan C odak öğrencisi geriye doğru çalışma yaparak bilinmeyene ulaşmıştır. Şekil 4.11’de gösterildiği gibi denklem çözerken B odak öğrencisi formal yöntemleri kullanırken, C ve A odak öğrencileri daha informal yöntemlere başvurmuşlardır.



A öğrecisinin cevabı B öğrecisinin cevabı C öğrecisinin cevabı

Şekil 4.11 Odak Öğrencilerin Problem Çözerken Yaptığı Eylemler

4.2 Birinci Öğretim Dizisi Cebirsel İfadelerle İşlemlere Ait Bulgular

Tahmini öğrenme yol haritaları kapsamında yürütülen öğretim deneylerinde, öğrencilerin sahip oldukları ön bilgilerin belirlenmesi, yapılan hataların ve kavram yanılgılarının farkına varılması önem arz etmektedir. Bu açıdan öğretime geçilmeden önce odak öğrencilerle ön klinik görüşmeler gerçekleştirilerek, öğrencilerin ön bilgileri ve sahip oldukları eksiklikler tespit edilmeye çalışılmıştır. Öğretim esnasında bu görüşmelerden elde edilen bulgular göz önüne alınarak etkinlikler hazırlanmış ve uygulamaya geçilmiştir.

Bu öğretim dizisinde “7.2.1.1. Cebirsel ifadelerle toplama ve çıkarma işlemleri yapar.” ve “7.2.1.2. Bir doğal sayı ile bir cebirsel ifadeyi çarpar.”

kazanımlarını içeren ders planı, beş ders saati boyunca uygulanmıştır. Bu uygulamalar sırasında öğrenme hedefleri; benzer terimlerin farkına varılabilmesi, cebirsel ifadelerle toplama ve çıkarma işlemlerinin yapılabilmesi, bir doğal sayı ile bir cebirsel ifadenin çarpılabilmesi olarak belirlenmiştir. Bahsedilen hedefler doğrultusunda uygulamanın ilk üç saatinde hazırlanan etkinlikler, sınıf tartışmasına açılmıştır. Bu sınıf tartışmaları sırasında öğrencilerin zihinsel eylemleri ve düşünme biçimleri ortaya konulmaya çalışılmıştır. Ardından odak öğrencilerle ara klinik görüşmeler gerçekleştirilmiştir. Yapılan öğretim oturumu ve ara kinik görüşmeler vasıtasıyla öğrencilerin yaptıkları hatalar ve kavram yanılgıları tespit edilerek bu eksikliklerin giderilmesi için kararlar alınmıştır. Ayrıca yapılan öğretimin ve uygulanan etkinliklerin işleyen ya da işlemeyen yerlerinin tespiti yapılmaya çalışılmıştır. Alınan bu kararlar doğrultusunda iki ders saati boyunca, tekrar öğretim etabı için hazırlanan etkinlikler uygulanmıştır. Son olarak uygulanan etkinlikler vasıtasıyla öğrencilerin zihinsel etkinlikleri ve düşünme biçimlerindeki değişimler incelenmiştir. Böylece eksik noktalar giderilerek, öğrencilerin konuyu kavramsal olarak anlamaları için yapılması gereken uygulamalar ortaya konulmaya çalışılmıştır. Birinci öğretim dizisinin ilk etabı sonucunda alınan kararlar Şekil 4.12’de gösterilmiştir.

Karar öncesi ilk zihinsel eylemler	Alınan kararlar ve öğretmen uygulamaları	Öğretim sonrası zihinsel eylemler
►Benzer terimleri tanıma ►Benzer terimlerle toplama işlemi yapma ►Benzer terimlerle çıkarma işlemi yapma ►Modelleme ile verilen cebirsel ifadeler ile toplama işlemi yapabilme ►Tek terimli bir cebirsel ifadenin doğal sayı katını alabilme	►Öğrencilerin benzer ve benzer olmayan terimleri ayırt etmesini sağlamak ►“+” ve “-” işaretlerinin daima sonuç üretmediğinin farkına vararak cebirsel ifadelerle toplama ve çıkarma işlemlerinin sadece benzer terimler arasında gerçekleştiğinin kavranmasını sağlamak ►Cebirsel ifadelerle toplama işlemi yapılırken benzer terimlerin katsayıları toplamının değişkene katsayı olarak, sabit terimlerin toplamının cebirsel ifadeye sabit terim olarak yazıldığını anlamalarını sağlamak ►Modelleme ya da işlemsel olarak verilen cebirsel ifadeler ile toplama ve çıkarma işlemlerini yapabilmelerini sağlamak ►Cebirsel ifadelerle çıkarma işlemini; çıkan ifadenin toplama işlemine göre tersi ile eksilen ifadenin toplamı şeklinde yazabilmelerini sağlamak ►Cebirsel ifadelerle çıkarma işleminde parantezin kullanıldığı durumlarda parantezin öneminin farkına varmalarını sağlamak ve bu tür durumlarda yapılan hataların önüne geçmek amaçlı etkinliklerin yapılması ►Cebirsel ifadelerle çıkarma işleminin değişme özelliğinin olmadığının farkına varılması ve bu tür hataların önüne geçmek amaçlı etkinliklerin yapılması ►En az iki terimli bir cebirsel ifade ile bir doğal sayının çarpımını yaparken dağılma özelliğinden yararlanmayı sağlamak	►Benzer olan terimlerin farkına varabilme ►Cebirsel ifadelerle toplama ve çıkarma işlemlerinde benzer terimlerle işlem yapabilme ►Cebirsel ifadelerle çıkarma işleminde çıkan ifadenin terimlerinin işaretini değiştirmeye dikkat etme ►Bir doğal sayı ile bir cebirsel ifadeyi çarparken dağılma özelliğini kullanabilme

Şekil 4.12 Birinci Öğretim Dizisinde Alınan Kararlar

4.2.1 Birinci Öğretim Dizisinin İlk Etabına Ait Bulgular

Cebirsel ifadelerle işlemlere geçmeden önce benzer terim kavramı üzerinde durulmuş ve derse giriş amacıyla benzer terimin ne olduğu öğrencilere sorulmuştur. Öğrencilerin benzer terimin tanımına ait ön bilgileri ortaya konulmaya çalışılmıştır. Ö6, *"Değişkenleri aynı olan terimlere benzer terim denir."*, Ö8 ise, *"İki terimde bulunan harfler aynı ise bu iki terim benzerdir."* şeklinde tanımlar yapmışlardır. Benzer terimler hakkında yapılan tanımların kısmen doğru olduğu fakat benzer terimi tanımlamak için yeterli olmadığı tespit edilmiştir. Bu sebeple öğrencilerin benzer ve benzer olmayan terimleri ayırt etmelerini sağlamak amacıyla Şekil 4.13'te verilen örnekler öğrencilere inceletilmiştir.

Benzer Terimler	Benzer Olmayan Terimler
4d ile – 7d	a ile b
3x ile 7x	7a ile $7a^2$
6x ile – 4x	– 5 ile 5c
7 ile – 4	9y ile 9z
c^2 ile $3c^2$	4ax ile $5x^2$

Şekil 4.13 Benzer Terimlere ve Benzer Olmayan Terimlere Örnekler

Örneklerin incelenmesi sırasında yaşanan diyaloglar şu şekilde gerçekleşmiştir:

Ö1: *Ben daha önce 7a ile $7a^2$'yi değişkeni aynı olduğu için benzer terim olduğunu düşünmüştüm.*

Araştırmacı: *Evet, örnekten önce yaptığın tanımda da değişkenleri aynı olan terimlerin benzer olduğundan söz etmiştin. Bu doğru ama eksik... Şimdi eksik kalan kısmı tamamlamak ister misin?*

Ö1: *Terimlerde bulunan değişkenlerin bazılarının karesi var. Bu harf aynı olsa bile benzer terim olmayı engellemiş.*

Araştırmacı: *O zaman değişkenlerin kuvvetleri de aynı olmalı diyebiliriz.*

Ö1: *Hem değişken aynı olacak hem de değişkenin kuvveti aynı olacak.*

Benzer ve benzer olmayan terimler hakkında yapılan tartışmalardan sonra öğrencilerin cebirsel ifadelerle toplama ve çıkarma işlemleri yapmaları istenen etkinliğe giriş yapılmıştır. Etkinlikte cebirsel ifadelerle toplama ve çıkarma işlemlerini benzer terimleri dikkate alarak yapmaları ve açıklamaları beklenmiştir.

Bu amaç doğrultusunda Şekil 4.14'te verilen cebirsel ifadelerle toplama ve çıkarma işlemi içeren soruların bulunduğu etkinlik sınıf tartışmasına açılmıştır.

a) $2a + 3a =$	g) $5x-(-2x)-3x=$
b) $6c-4c =$	h) $3a + 4b + 6a + 5b =$
c) $-2x + 7x=$	i) $2a + 3ab + 5a + 5ab =$
d) $-5x-5x=$	j) $2x + x^2 + 3x + 4x^2 =$
e) $3x + 4x + 7x=$	k) $3x + 4y + 2x =$
f) $2x + 5 + 3x + 6=$	l) $(5x+6)-(3x+2) =$

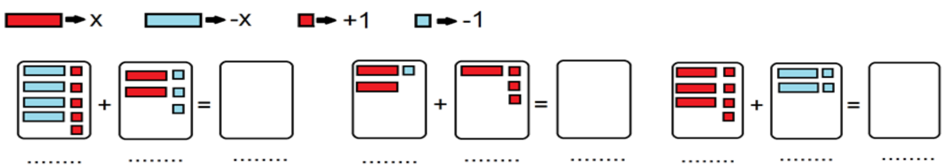
Şekil 4.14 Cebirsel İfadelerle Toplama ve Çıkarma İşlemi Örnekleri

Etkinlikte sınıf genelinde öğrencilerin "2a+3a =5a, 6c−4c =2c" işlemlerinin cevaplarına kolaylıkla ulaşabildikleri gözlemlenmiştir. Benzer olarak A odak öğrencisinin "3x + 4x + 7x" işlemini, *"Terimlerin hepsi benzer olduğu için hepsini toplayabiliriz."* açıklamasının ardından, *"14x"* doğru yanıtını vermiştir. Etkinlikteki "2x + 5 + 3x + 6" sorusunu Ö2, benzer ya da benzer olmayan terimleri dikkate almadan cevaplayarak "16x" şeklinde yanıtlamıştır. Öğrencinin hatalı sonuca nasıl ulaştığı sorulmuş ve *"2+5+3+6=16 olduğundan cevap 16x olur."* şeklinde bir açıklama yaptığı belirlenmiştir. Bu öğrencinin işlemleri yaparken benzer olmayan terimleri topladığı gözlemlenmiştir. Bu hatanın ortadan kaldırılması amacıyla cebirsel ifadelerle toplama ve çıkarma işlemlerinin yapılabilmesi için koşulların neler olduğu ve benzer terimlerle olan ilişkisi öğrencilere hatırlatılmıştır. Bu hatırlatmanın ardından söz alan B odak öğrencisi, *"Sadece benzer terimleri toplayabiliriz. O yüzden 2x ile 3x' i kendi arasında 5 ile 6'yı kendi arasında toplamalıyız."* şeklinde açıklamada bulunmuştur. Soruyu yanıtlarken yaptığı hatanın farkına varan Ö2 tekrar söz hakkı alarak benzer terimleri toplayıp "5x+11" doğru sonucuna ulaşmıştır. Sınıfta etkinlikle ilgili devam eden tartışmalar esnasında Ö3,*"5x ve 11" i bulduk bunlar benzer terim değil toplayamayacağız sonra ne yapacağız?"* şeklinde soru sormuştur. Araştırmacı, *"5x+11 şeklinde yazacağız. Burada benzer terimlerle toplama işlemi yaptıktan sonra 5x ve 11 terimlerini toplam şeklinde yazıyoruz ve devam ettiremiyoruz."* yanıtını vermiştir. Bu durum "+" veya "-" işaretlerinin daima sonuç ürettiğine inanan öğrenciler tarafından başlangıçta kabul görmese de araştırmacının açıklamasıyla açıklığa kavuşmuştur.

Etkinlikte cebirsel ifadelerle çıkarma işlemi içeren "5x– (–2x) –3x" sorusuna B odak öğrencisi, *"Burada iki tane çıkarma işlemi var, soldan sağa işlem sırası izlemeliyiz. Önce ilk işlemdeki çıkarmayı toplamaya çevirelim. 5x+(+2x)'i yapalım,* *7x olur. Sonra 7x-3x işlemini yapalım 4x olur. ”*şeklinde açıklamada bulunarak doğru sonuca ulaşmıştır. Öğrencinin verdiği cevaptan da anlaşılacağı gibi tam sayılarda çıkarma işlemlerinde kullandığı bilgiyi, cebirsel ifadelerle çıkarma işlemine transfer ettiği gözlemlenmiştir. C odak öğrencisi etkinlikteki “(5x+6) – (3x+2)” sorusunda “5x+6-3x+2=2x+8” işlemlerini yaparak hatalı sonuca ulaşmıştır. Araştırmacı tarafından yapılan sınıf içi gözlemde aynı şekilde hata yapan başka öğrencilerin de olduğu tespit edilmiştir. Verilen bu cevaba A odak öğrencisi itiraz ederek, *“Çıkarma işlemini toplama işlemine çevirirsek (5x+6) + (-3x-2) olur. 5x ile -3x toplarsak 2x,6 ile -2 toplarsak 4 olur. Sonuç 2x +4 olur.”* Şeklindeki açıklamasıyla doğru sonuca ulaştığı gözlemlenmiştir. Bu örnekte olduğu gibi cebirsel ifadelerle çıkarma işlemi yaparken, sınıftaki bazı öğrencilerin parantezin kullanıldığı durumlarda, parantezi önemsemeden işlemler yaptığı tespit edilmiştir.

Sınıfta uygulanan etkinlik esnasında araştırmacı, özellikle bazı öğrencilerin tam sayılarla toplama ve çıkarma işlemindeki eksik öğrenmelerin cebirsel ifadelerle toplama ve çıkarma işlemlerinde yapılan hataları etkileyen, en temel faktörlerden biri olduğunu tespit etmiştir. Karşılaşılan bu durumu ortadan kaldırmak amacıyla cebirsel ifadelerle toplama ve çıkarma işlemlerinin cebir karolarından yararlanarak modellenmesi konusunda karar alınmıştır.

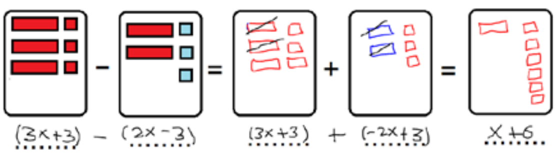
Öğretim dizisinde uygulanan ikinci etkinlik de Şekil 4.15’te gösterildiği gibi cebir karoları yardımıyla cebirsel ifadelerle toplama işlemlerinin modellenmesini içermektedir.



Şekil 4.15 Cebirsel İfadelerde Modelleme ile Yapılan Toplama İşlemi Örnekleri

Sunulan etkinlikte öğrencilerden cebir karolarıyla modellenen toplama işlemlerine ait sonuçların bulunması istenmiştir. Etkinlikteki ilk örneği B odak öğrencisi, “ *İlk kutuda 3 mavi dikdörtgen ve 5 kırmızı kare var. -4x+5. İkinci kutuda 2 kırmızı dikdörtgen ve 3 mavi kare var. 2x-3 ile gösterilir. İki kutudakileri 2 kırmızı dikdörtgen 2 mavi dikdörtgeni götürürse 3 mavi dikdörtgen kalır. 3 mavi kare 3 kırmızı kareyi götürürse 2 kırmızı kare kalır. -3x ile +2 benzer terim değil... Daha* *toplama yapamayız. Sonuç bu şekilde kalır, -3x+2 olur."* ifadesi ile doğru sonuca ulaşmıştır. Etkinlikteki ikinci örneği Ö4, *"İlk kutuda iki, ikinci kutuda bir tane kırmızı dikdörtgen var, toplam 3x. İlk kutudaki bir mavi, ikinci kutudaki bir kırmızı kareyi götürürse ikinci kutuda iki kırmızı kare kalır, +2, sonuç 3x+2 olur."* yanıtını vererek doğru sonuca ulaşmıştır. Etkinliğin üçüncü örneğini A odak öğrencisi (3x+4)+(-2x-2) şeklinde yazarak, *"İki mavi dikdörtgen (-2x) iki kırmızı dikdörtgeni (2x)'i götürür, bir tane kırmızı dikdörtgen (x) kalır. İki mavi kare (-2), iki kırmızı kareyi (+2)'yi götürür geriye iki kırmızı kare (+2) kalır. x ile 1 benzer değildir, sonuç x+1 olur."* yanıtını vermiştir. Verilen cevaplardan da anlaşıldığı gibi öğrencilerin benzer terimleri ayırt ederek, modellemelerdeki cebirsel ifadelerle toplama işlemlerinde doğru sonuçlara ulaşabildikleri görülmüştür.

Etkinliğin ikinci bölümünde cebir karoları yardımıyla modellenen, cebirsel ifadelerle çıkarma işlemi öğrencilere sunulmuştur. Öncelik olarak modellenen işlemin ne olduğu sorgulanmıştır. Modelleme ile ifade edilen işlemi sınıfta öğrencilerin geneli "(3x+3)-(2x-3)" şeklinde ifade edebilmiştir. Fakat C odak öğrencisi işlemi "3x+3-2x-3" şeklinde parantez kullanmadan ifade etmiştir. Bu hatalı ifadesinden dolayı işlemin sonucunu x olarak bulmuştur. C odak öğrencisinin sonuca ulaşırken parantezi kullanmadığından hatalı cevaba ulaştığı görülmüştür. Araştırmacı C odak öğrencisinin yanıtını sınıftaki öğrencilerin incelemesini isteyerek tartışmaya açmıştır. Bu tartışma esnasında Ö4, *"Sorunun cevabı yanlış... Çünkü toplamaya çevirirsek ilk cebirsel ifadeyi aynen yazarız, ikinci cebirsel ifadenin toplama işlemine göre tersini yazarsak kırmızılar maviye, maviler kırmızıya döner. (3x+3)+(-2x+3) şeklinde yazılır. -2x, 2x'i götürür, x kalır ve (+3)+(+3)=6 olur. Şimdi x ile 6'yı toplasak sonuç x+6 olur."* yanıtını vererek doğru sonuca ulaşmıştır. Öğrencinin ifadeleri doğrultusunda Şekil 4.16'da gösterilen çizim sınıftaki öğrencilerle paylaşılmıştır. Bu tartışma esnasında sınıfta yanlış cevap veren bazı öğrencilerin, C odak öğrencisi gibi parantezi önemsemediği, bunun sonucunda hatalı cevaba ulaştıkları gözlemlenmiştir.



Şekil 4.16 Cebirsel İfadelerde Modelleme İle Yapılan Çıkarma İşlemi Örneği

Birinci öğretim dizisine, cebirsel ifadelerde toplama ve çıkarma işlemleri kullanmaları gereken, günlük hayat bağlamında örnekler içeren etkinliğin uygulanmasıyla devam edilmiştir. Etkinliğin ilk örneğinde, "*İki arkadaş gittikleri marketten içerisinde eşit sayıda ve her birinde x adet çikolata bulunan kutulardan veya tekli olarak satılan çikolatalardan ihtiyaçları kadar almışlardır. Buna göre aşağıda verilen durumlara ait cebirsel ifadelerle ilgili işlemleri yapınız.*" açıklamasının ardından, *"Ali önce 2 kutu çikolata almıştır. Sonra 1 kutu ve tekli satılan çikolatalardan 5 tane daha almıştır. Ali'nin toplam kaç çikolatası vardır?"* sorusu öğrencilere yöneltilmiştir. Söz alan Ö2, "*Kutularda kaç çikolata olduğunu bilmiyorum x olsun, önce 2x sonra x+5 alsın, 2x+x+5=3x +5 olur. Yani kutuları kendi arasında topladım, tekli çikolatayı ayrı topladım.*" şeklinde yanıtlamıştır. Öğrencinin benzer terimleri dikkate alarak cebirsel ifadelerle toplama işlemini yapabildiği görülmüştür. Verilen etkinliğin ikinci örneğinde, *"Ahmet, 4 kutu ve 8 tekli satılan çikolatalardan 1 kutusunu ve tekli satılan çikolatalardan 5'ini kardeşine verdikten sonra kaç çikolatası kalır?*" sorusu öğrencilere yöneltilmiştir. Söz alan C odak öğrencisi, "*Kutular x olsun 4x+8 tane çikolatadan x+5 tane çikolata çıkarırsak 3x+13 çikolata kalır."* yanıtıyla hatalı cevap vermiştir. C odak öğrencisi araştırmacı tarafından önce eksilen ve çıkan cebirsel ifadeleri parantez kullanarak yazması gerektiği konusunda uyarılmış ve sonra sonuca ulaşması istenmiştir. C odak öğrencisi, "Eksilen *(4x+8), çıkan (x+5) o halde (4x+8)- (x+5)=4x+8 –x -5 =3x+3 olur. Ben parantez kullanmadım ondan hata yapmış olabilirim, hatamın farkına vardım."* şeklinde yanıtlayarak doğru sonuca ulaşmıştır.

Öğrencilerden, cebirsel ifadelerde toplama ve çıkarma işlemlerini kullanmaları gereken, günlük hayat bağlamında sunulan Şekil 4.17'deki etkinlikte uzunlukları cebirsel ifadelerle verilen iki çubuğun uzunlukları toplamı ve uzunlukları farkını bulmaları istenmiştir.

ETKİNLİK 4:

Aşağıda uzunlukları cebirsel ifadelerle gösterilen iki çubuğun uzunlukları verilmiştir. Buna göre;

kısa çubuk: 2x +6 santimetre

uzun çubuk: 5x - 8 santimetre

a) Bu iki çubuğun uzunları toplamı nedir?

b) Uzun çubukla kısa çubuğun uzunlukları farkı nedir?

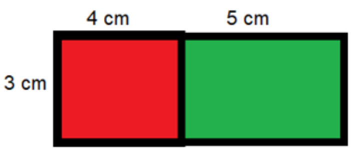
Şekil 4.17 Toplama ve Çıkarma İşlemi Yapılması İstenen Etkinlik Sorusu

B odak öğrencisi iki çubuğun uzunluklarının toplamına ait cebirsel ifadeyi bulmak için "2x+6+5x-8" şeklinde yazmıştır. 2x ile 5x terimlerinin benzer, aynı şekilde +6 ile -8 terimlerinin benzer olduğunu dolayısıyla benzer terimlerle kendi aralarında işlem yapılması gerektiğini ifade etmiştir. B odak öğrencisinin, *"x'leri kendi arasında toplarsak 3x, sabit terimleri kendi arasında toplarsak -2 olur. 3x ile -2 benzer olmadığından daha fazla ilerleyemeyiz, sonuç 3x-2 olur.*" şeklinde yanıt verirken benzer terimleri dikkate alıp cebirsel ifadelerle toplama işleminin doğru sonucuna ulaştığı gözlemlenmiştir. Benzer şekilde iki çubuğun uzunlukları arasındaki farkın sorgulandığı örnekte Ö14, *"İki çubuğun farkı (2x+6)–(5x-8)=(2x+6)+(-5x+8)=-3x +14 olur."* şeklinde hatalı olarak yanıtlamıştır. Söz alan A odak öğrencisi, *"Uzun çubuktan kısa çubuğu çıkarmalıyız. (2x+6)–(5x-8) değil, (5x-8)-(2x+6) olmalı... Toplama işlemine çevirirsek (5x-8)+(-2x-6) olur. Sonuç ise 3x -14 olacaktır."* yanıtını vererek doğru sonuca ulaşmıştır.

Birinci öğretim dizisinde uygulanan diğer bir etkinlikte, öğrencilere cebirsel ifadelerle toplama ve çıkarma işlemleri yapmaları gereken bir problem sunulmuştur. Verilen problemde, *"Bir ipin uzunluğu 50 metredir. Bu ipin 3x +4 metresi halıları bağlamak için, 12–2x metresi yorganları bağlamak için kullanılmıştır. Buna göre ipin geri kalanını gösteren cebirsel ifadenin en sade hali nedir?*" sorusu sorulmuştur. Bu soruya cevap vermek için söz almak isteyen öğrencilerin sayısının azaldığı gözlemlenmiştir. Öğrencilerin sorulan problemde, cebirsel ifadeleri kullanarak işlemlerin nasıl kurulması gerektiği konusunda zorlandıkları tespit edilmiştir. Söz alan A odak öğrencisinin, *"Önce kullanılan ipleri toplayalım. (3x+4)+(12-2x)=x+16 kullanıldı. Şimdi ipin tamamından, kullanılanı çıkaralım. 50-(x+16)=50+(-x-16)=34-x geriye kalır."* yanıtını vererek probleme ait işlemleri, sırasıyla yazabildiği ve doğru sonuca ulaşabildiği görülmüştür. A odak öğrencisi gibi doğru sonuca ulaşan öğrencilerin sınıfta az sayıda olduğu tespit edilmiştir. Etkinlik sonucunda öğrencilerin yaptığı yorumlar ve verilen yanıtlar doğrultusunda, öğrencilerin cebirsel ifadelerle toplama ve çıkarma işlemlerinde genel olarak, doğru sonuçlara ulaşabildiği fakat işlemleri kendileri yazmaları gereken problem durumlarında zorlandıkları gözlemlenmiştir.

Öğretim dizisine "7.2.1.2. Bir doğal sayı ile bir cebirsel ifadeyi çarpar." kazanımına yönelik etkinliklerin uygulanmasıyla devam edilmiştir. Etkinliklere geçilmeden önce doğal sayılarla çarpma işlemlerinin değişme ve birleşme özellikleri hatırlatılmıştır. Basit bir örnekle, “3.4.5” işleminin sonucu sorulmuş ve sınıftan “60” yanıtı alınmıştır. Ardından “3.(4.5)” ile “(4.3).5” işlemlerinde parantezin işlem önceliği vurgulanarak devamında “3.20” ve” 12.5” işlemlerine ulaşılmış ve iki işlemin sonucunda da öğrenciler “60” cevabına ulaşmışlardır. Sorulan işlemlerin sonuçlarının neden aynı çıktığı sorgulandığında, Ö5,*“Birleşme özelliği olduğu için önce hangi iki sayı arasında çarpmaya başlamamız sonucu değiştirmez .”* şeklinde yanıt vermiştir. Cebirsel ifadelerle çarpma işlemine giriş amacıyla basit örnekler içeren etkinlik öğrencilere sunulmaya başlanmıştır. İlk olarak araştırmacı sınıftaki öğrencilerle birlikte “3.2a” işleminde çarpma yaparak “6.a=6a” sonucuna ulaşmıştır. Ardından etkinlikte verilen örneklerde “4x.5” ifadesinin “4.5.x” şeklinde yazılabileceği ifade edilmiş ve çarpma işlemi yapılarak “20.x=20x” olarak hesaplanmıştır. Benzer olarak “4a.(–3)” örneğinde B odak öğrencisi, “4.(-3).a” şeklinde gösterip “-12a” sonucuna ulaşmıştır. Öte yandan verilen “5.(-3x)” örneğini Ö7, “(-15x)” şeklinde yanıtlamıştır. Benzer şekilde verilen “(–4c).(–3)” örneğine Ö4, önce “-12c” yanıtını vermiş ancak terimlerin işaretlerine dikkat ettikten sonra “12c” olarak yanıtını güncellemiştir.

İki terimli bir cebirsel ifade ile bir doğal sayının çarpımı ile ilgili örneklere geçilmeden önce çarpma işleminin toplama ve çıkarma işlemleri üzerine dağılma özelliği hatırlatılmış ve Şekil 4.18’deki verilen örnek öğrencilere inceletilmiştir.

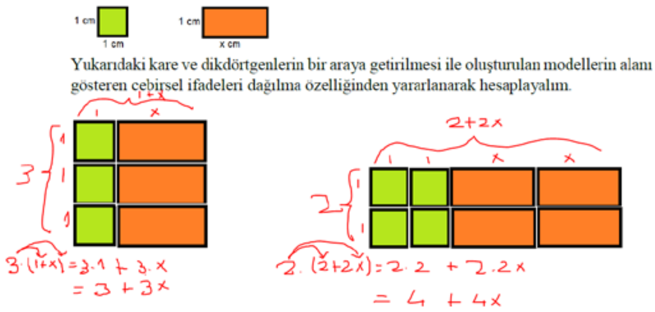


Örneğin yanda verilen dikdörtgenlerin alanları toplamı

3.(4+5)= 3.4 +3.5 şeklinde hesaplanır.

Şekil 4.18 Alanın Hesaplanmasına Yönelik Modelleme Örneği

Dağılma özelliği ile ilgili hatırlatmaların ardından dağılma özelliğinden yararlanarak cebirsel ifadelerle çarpma işlemleri içeren etkinliğin uygulamasına geçilmiştir. Etkinlikte öğrencilere yöneltilen sorularda “3.(x+4)” işlemini yapan Ö6, *“3.(x +4)=x+12”* şeklinde yanıtlamıştır. Öğrencinin hatalı yanıt verdiğini gören araştırmacı, *“Neden 3 ile x’i çarpmadın?”* sorusunu Ö6, *“Benzer terimleri çarpmalıyım, x ile 3 benzer terim değil.”* şeklinde yanıtlamıştır. Öğrencinin cebirsel ifadelerde toplama ve çıkarma işleminde kullanmış olduğu bir kuralı yanlış genelleyerek, çarpma işleminde de kullandığı ve bunun yanlış yanıtlamasına neden olduğu gözlemlenmiştir. Araştırmacı bir önceki etkinlikte dağılma özelliği ile ilgili yapılan model kullanımını hatırlatarak öğrencinin bu hatalı düşüncesini ortadan kaldırmaya çalışmıştır. Dağılma özelliğinden yararlanan B odak öğrencisinin, “3.(x+4)=3.x+3.4=3x+12” şeklinde işlem yaparak doğru sonuca ulaştığı gözlemlenmiştir. Ardından etkinlikteki diğer bir soru olan “2.(2x+4)” işlemini A odak öğrencisinin, *“2.(2x+2)=2.2x+2.2 olarak yazılır. Çarpma işlemleri yapılınca 4x+4 yazılır ve işlem daha devam etmez.”* şeklindeki açıklamasıyla dağılma özelliğinden yararlanarak işlemi doğru sonuçlandırıldığı gözlemlenmiştir. A odak öğrencisinin etkinlikte kullandığı eylemler Şekil 3.19’da gösterilmiştir.



Şekil 4.19 Cebirsel İfadelerle Çarpma İşlemine Yönelik Modelleme Etkinliği

Uygulanan etkinlikler esnasında yaşanan diyaloglar incelendiğinde bazı öğrencilerin yanlış genellemeler yaparak, toplama ve çıkarma işlemlerinde kullandıkları benzer terimlerle işlem yapmayı, çarpma işleminde de uygulama eğiliminde oldukları tespit edilmiştir. Bu durumun çözümüne ilişkin etkinliklerin yapılmasına karar verilmiştir.

Modelleme ile yapılan etkinlikten sonra öğrencilerin dağılma işleminden yararlanarak, cebirsel ifadelerle çarpma işlemi yapmaları gereken etkinlikle öğretime devam edilmiştir. Etkinlikteki “3.(x +4)” örneğini Ö7, *“3’ü x’e dağıtırız. Araya artı koyarız. 3’ü 4’e dağıtırız, 12 olur. Sonuç 3x+12’dir.”* şeklinde yanıtlamıştır. Ardından “(3x+6).2” şeklinde verilen örneğe B odak öğrencisi, *“2’yi sağ taraftan dağıtacağız, 3x.2=6x ve 6.2=12 araya artı yazarız, 6x+12 olur ve benzer terim olmadıkları için böyle kalır.”* yanıtı ile dağılmanın sağ taraftan da yapılabileceğini vurgulayarak doğru yanıta ulaştığı gözlemlenmiştir. Etkinlikteki diğer bir örnek olan “(5x–4).3” işlemini C odak öğrencisi, *“3’ü 4’e dağıtırız, 12, araya eksi koyarız, 3’ü 5x’e dağıtırız, 15x, sonuç 12-15x olur.”* yanıtını vermiştir. Araştırmacı tarafından yapılan uyarıdan sonra C odak öğrencisi tekrar söz alarak, *“Dağılmayı sağ taraftan* *yaptığımız için ben o sırayla yapmıştım ama 15x den 12'yi çıkarmalıydım, cevap 15x-12 olmalıydı."* ifadesiyle yanıtını güncellemiştir. Etkinlikte benzer olarak başka örnekler de sunulmuştur. Bu örneklerde sağ ve sol taraftan yapılan dağılma özelliklerinden yararlanılarak yapılan cebirsel ifadelerle çarpma işlemleri içeren örneklere genel olarak öğrenciler tarafından doğru yanıtların verildiği gözlemlenmiştir.

Öğretim dizisinde uygulanan diğer bir etkinlikte öğrencilerin problem bağlamında verilen cebirsel ifadelerle çarpma işlemleri yapmaları beklenmiştir. Şekil 4.20'de gösterilen etkinliğin her bir basamağında yapılan çarpma işlemleri, mümkün olduğunca farklı öğrencilerin katılımı sağlanarak sınıf halinde ortak çözüme ulaşılmaya çalışılmıştır.

Aşağıdaki tabloda bir manavdan alınan meyvelerin fiyatları ve kilogram cinsinden miktarları verilmiştir. Buna göre istenilen miktarlarda meyve alan bir müşteri 100 TL verirse para üstü olarak alacağı değerin TL cinsinden cebirsel ifadesi nedir?

Meyve isimi	1 Kg meyvenin fiyatı	Alınan meyvenin miktarı
Elma	x + 5	4 Kg
Armut	2x–4	3 Kg
Muz	5x –1	1 Kg
Portakal	3x+5	2 Kg

Şekil 4.20 Cebirsel İfadelerle İşlemler İçeren Etkinlik Sorusu

Verilen örneğe ait çözüme ulaşılırken sınıfta yaşanan diyaloglar şu şekilde gerçekleşmiştir:

Araştırmacı: *Önce problemi çözmemiz için yapmamız gereken işlemleri sıralarıyla belirleyelim. Sizce nasıl bir sıra izleyeceğiz?*

Ö7: *İlk olarak bütün meyvelere ödenecek ücretleri ayrı ayrı bulmamız gerekiyor. Sonra onları toplayıp 100 TL'den çıkarırsak para üstünü buluruz.*

Araştırmacı: *Elmalar için ödenecek ücret ne kadardır?*

Ö8: *4 ile x+5 çarpacağız yani 4'ü x'e dağıtalım, 4x, 5'e dağıtalım, 20, toplayalım 4x+20.*

Araştırmacı: *Armutlar için ödenecek ücret ne kadardır?*

Ö4: *3'ü 2x-4'e dağıtalım, 3'ü 2x ile çarpalım, 6x, 3'ü 4 ile çarpalım, 12, 6x-12 lira öderiz.*

Araştırmacı: *Muzlar için ödenecek ücret ne kadardır?*

__Ö10:__ 1.(5x -1) çarpma işleminde 1 etkisiz eleman olduğu için 5x-1 lira olur.

***Araştırmacı:** Portakallar için ödenecek ücret ne kadardır?*

***Ö7:** 2.(3x+5) yazılır. 2'yi dağıtırsak 6x+10 lira olur.*

***Araştırmacı:** Meyvelerin toplamı için ödenecek ücret ne kadardır?*

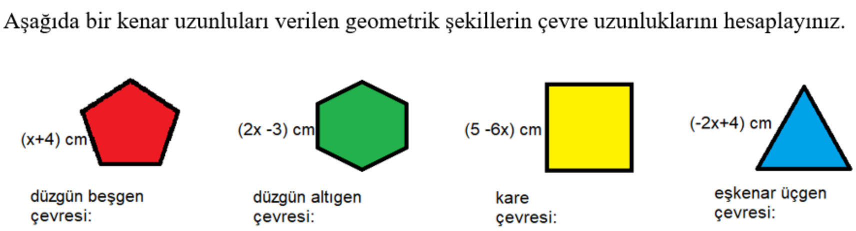
***A odak öğrencisi:** Tüm meyveler için ödenen ücretleri toplarken benzer terimleri toplamalıyız. Önce x'leri toplayalım. 4x+6x+5x+6x=21x, sonra sabit terimleri toplayalım. 20+(-12)+(-1)+10=17 21x ile 17 toplarsak 20x+17 lira toplam ödenecek ücret bulunur.*

***Araştırmacı:** Meyveler için ödememiz gereken toplam ücreti bulduk. 100 TL verirsek ne kadar para üstü alırız?*

***B odak öğrencisi:** 100 liradan 20x+17 lirayı çıkaracağız. Yani 100-(20x+17) olur. Toplamaya çevirirsek 100+(-20x-17)=83-20x lira para üstü alırız.*

Sınıf tartışması şeklinde gerçekleştirilen etkinlikteki diyaloglar ve öğrenci yorumlarından da anlaşıldığı gibi öğrencilerin genel olarak dağılma özelliğinden yararlanarak bir doğal sayı ile bir cebirsel ifadenin çarpımını gerektiren sorularda doğru sonuçlara ulaşabildikleri gözlemlenmiştir.

Öğretim dizisinde uygulanan diğer bir etkinlikte, bir kenar uzunluğu cebirsel ifadeler ile verilen düzgün çokgenlerin çevre uzunlukları cebirsel ifadelerle çarpma işlemi yapılarak hesaplanması istenilen Şekil 4.21'deki sorular sınıf tartışmasına açılarak çözülmesi amaçlanmıştır.



Şekil 4.21 Geometrik Şekillerin Çevrelerini Bulmaya Yönelik Etkinlik Soruları

Soruların çözümü esnasında yaşanan diyaloglar şu şekilde gerçekleşmiştir:

***Araştırmacı:** İlk örnekte verilen düzgün beşgenin çevre uzunluğunu nasıl hesaplarız?*

Ö11: *Şekil düzgün beşgen olduğu için x+4 ile 5'i çarpmalıyız. 5'i dağıtırsak 4.x+5.4 olur. Çevresi 4x+20 santimetredir.*

Araştırmacı: *Örnekteki düzgün altıgenin çevresi nedir?*

Ö7: *6 ile 2x-3 çarpmalıyız, 6.(2x-3)=12x-18 olur.*

Araştırmacı: *Karenin çevre uzunluğu nedir?*

Ö7: *(5-6x)'in 4 katını alacağız. 4.(5-6x)=6x.4-4.5=24x-20 olur.*

Araştırmacı: *Arkadaşınızın çözümü doğru mu?*

B odak öğrencisi: *Hayır. Yanlış yaptı. 24x'den 20'yi çıkardı. Tam tersi 20-24x olacaktı.*

Araştırmacı*: Eşkenar üçgenin çevre uzunluğu nedir?*

Ö4: *(-2x+4)'ün 3 katını alacağız. 3'ü dağıtırsak 3.(-2x)+3.(+4)=-6x +12 olur. Benzer terim olmadıklarından daha devam etmez.*

Sınıf tartışmaları esnasında yaşanan diyaloglardan da anlaşılacağı gibi sınıftaki öğrencilerin genelinin dağılma özelliğinden yararlanarak, bir doğal sayı ile bir cebirsel ifadeyi çarpabildikleri gözlemlenmiştir.

4.2.2 Birinci Ara Klinik Görüşmelere Ait Bulgular

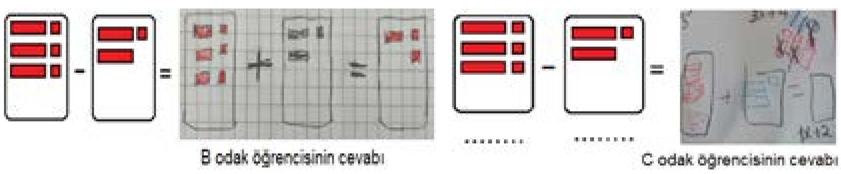
Birinci öğretim dizisinin ilk etabında gerçekleştirilen öğretim etkinliklerinin ardından, odak öğrencilerin konuyu zihinlerinde nasıl yapılandırdıklarını derinlemesine ortaya koymak amacıyla, odak öğrencilerle birinci ara klinik görüşmeler gerçekleştirilmiştir. Birinci ara klinik görüşmelerde "7.2.1.1. Cebirsel ifadelerle toplama ve çıkarma işlemleri yapar" ve "7.2.1.2. Bir doğal sayı ile bir cebirsel ifadeyi çarpar" kazanımlarını içeren görüşme soruları araştırmacı tarafından hazırlanmıştır. Hazırlanan sorular vasıtasıyla odak öğrencilerin öğretim etkinlikleri esnasında fark edilemeyen kavram yanılgıları, hata türleri ve zorlandıkları noktaların nedenleri ortaya konulmaya çalışılmıştır. Bu görüşmelerin analizi yardımıyla öğretim sürecinin aksayan yönleri tespit edilerek, yeni kararlar alınmaya çalışılmış ve etkinliklerde gerekli revizeler yapılarak tekrar öğretim etabında kavramsal öğrenmeyi gerçekleştirmek amacıyla kullanılmıştır.

Birinci ara klinik görüşmelerde cebirsel ifadelerle işlemler başlığı altında modeli verilen cebirsel ifadelerle toplama ve çıkarma işlemlerini yapmaları gereken, iki terimli iki cebirsel ifadeyi toplamaları ya da çıkarmalarını içeren sorular sorulmuştur. Ayrıca bir doğal sayı ile bir cebirsel ifadeyi dağılma özelliğinden yararlanarak çarpmaları ve cebirsel ifadelerle işlemler yapmaları gereken problemler vasıtasıyla, odak öğrencilerin eylemleri sorgulanmıştır.

Şekil 4.22'de görüldüğü gibi odak öğrencilerin modeli verilen cebirsel ifadelerle toplama işlemi yaparken pozitif x'leri temsil eden kırmızı dikdörtgenleri, negatif x'leri temsil eden mavi dikdörtgenleri ya da +1'i temsil eden kırmızı kareleri, -1'i temsil eden mavi kareleri benzer terim kavramını kullanarak kendi aralarında toplayabildikleri gözlemlenmiştir. Ayrıca odak öğrencilerin işlemleri yaparken tam sayılarda olduğu gibi +1 ile temsil eden bir karenin -1'i temsil eden bir kareyi nötrleştirdiği gibi +x'i temsil eden kırmızı dikdörtgenin –x'i temsil eden mavi dikdörtgeni nötrleştirdiğini fark ettikleri görülmüştür.

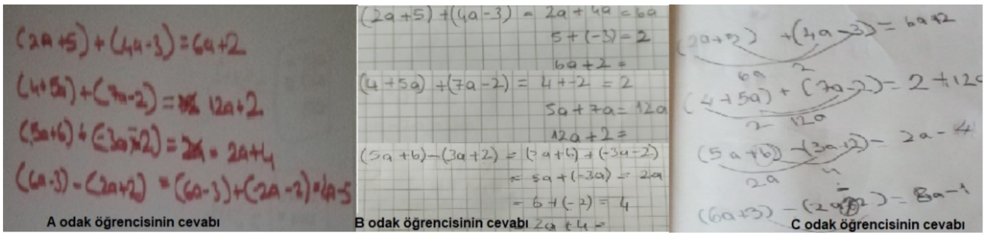
Şekil 4.22 Toplama İşleminin Modellenmesinde Odak Öğrencilerin Eylemleri

Benzer olarak Şekil 4.23'te gösterildiği gibi cebirsel ifadelerle çıkarma işlemini modellerken, işlemi önce toplama işlemine çevirdikleri ve ikinci cebirsel ifadeyi yazarken toplama işlemine göre tersini alırken cebirsel ifadedeki değişkenleri ve tam sayıları zıt işareti temsil eden renkle değiştirdikleri gözlemlenmiştir. Bu şekilde yapılan modellemelerin uzun süre almasına rağmen, kavramsal öğrenmeleri desteklediği görülmüştür.



Şekil 4.23 Çıkarma İşleminin Modellenmesinde Odak Öğrencilerin Eylemleri

Cebirsel olarak temsil edilen toplama işlemlerinde odak öğrencilerin benzer terim kavramını kullanarak, işlemlere devam ettikleri ve sorulan sorularda başarılı oldukları gözlemlenmiştir. Fakat cebirsel olarak ifade edilen çıkarma işlemlerinde bazı sorunların olduğu tespit edilmiştir.

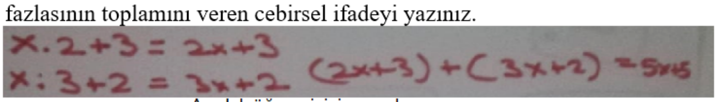


Şekil 4.24 Toplama ve Çıkarma İşlemlerine Yönelik Odak Öğrencilerin Eylemleri

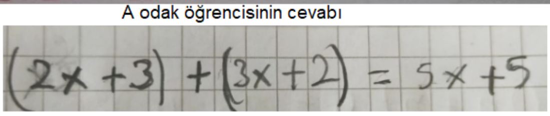
Şekil 4.24'te görüldüğü gibi C odak öğrencisinin, "(5a+6)-(3a+2)=2a-4" ve "(6a+3)-(2a+2)=8a-1" şeklinde yanlış cevaplar verdiği tespit edilmiştir. Yanlış verilen cevaplar incelendiğinde, öğrencinin cebirsel ifadelerle çıkarma işlemlerini yaparken çıkarma işlemini toplama işlemine dönüştürmeyi kullanmayıp, benzer terimleri kendi arasında çıkarmaya çalıştığı gözlemlenmiştir. C odak öğrencisi, "(5a+6)-(3a+2)" sorusunda benzer terimlerle çıkarma işlemi yaparken 2a ve 4 terimlerine ulaşmasına rağmen iki terimin arasına çıkarma işlemine vurgu yaparak "-" işareti koyduğu görülmüştür. C odak öğrencisinin, "(6a+3)-(2a+2)" sorusunda ise çıkarılan cebirsel ifadede sabit terim olan "+2" nin işaretini değiştirerek "-2" yaptığı fakat değişken içeren "2a" teriminin işaretini değiştirmediği gözlemlenmiştir. C odak öğrencisinin verdiği cevaplar ve yaptığı yorumlar incelendiğinde, özellikle cebirsel ifadelerle çıkarma işlemi yaparken toplama işlemine çevirme ve çıkarılan cebirsel ifadenin işaretini değiştirirken parantezi dikkate almadığı tespit edilmiştir. C odak öğrencisinin cebirsel ifadelerle çıkarma işlemi konusunda eksik öğrenmelere sahip olduğu tespit edilmiştir.

Cebirsel ifadelerle toplama işlemi yapmayı gerektiren problemde A ve B odak öğrencileri Şekil 4.25'te görüldüğü gibi doğru cevaplar verirken C odak öğrencisinin doğru cevaba ulaşamadığı gözlemlenmiştir.

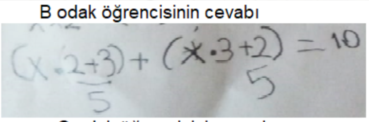
x bir sayı olmak üzere bu sayının iki katını 3 fazlası ile bu sayının 3 katının iki fazlasının toplamını veren cebirsel ifadeyi yazınız.



A odak öğrencisinin cevabı



B odak öğrencisinin cevabı

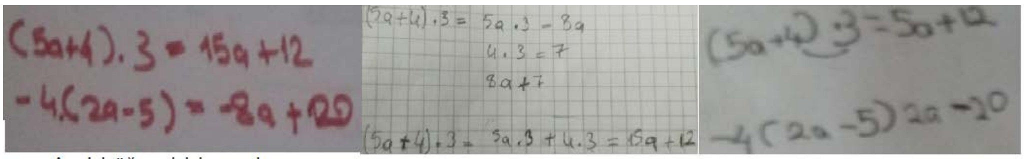


C odak öğrencisinin cevabı

Şekil 4.25 Toplama İşlemi İçeren Problemde Odak Öğrencilerin Eylemleri

C odak öğrencisi problemi çözerken, *“2 ile 3 toplarız 5, x ile çarparız yine 5, diğer tarafta 2 ile 3’ü toplarız 5 olur. 5 ile 5’i toplarız 10 olur.”* şeklinde görüş bildirmiştir. C odak öğrencisinin soruyu çözerken yaptığı yorumlar incelendiğinde cebirsel ifadelerle işlem yaparken değişkeni görmezden geldiği, bilindik olmayan durumlarla karşılaştığında, bilindik durumlara dönüştürerek tam sayılarla işlem yapmayı tercih ettiği gözlemlenmiştir. Özellikle cebirsel ifadelerle çıkarma işlemi yaparken tekrar yapılacak öğretimde C odak öğrencisinin sahip olduğu kavram yanılgıları dikkate alınarak etkinliklerin hazırlanması kararı alınmıştır.

Birinci ara klinik görüşmelerde diğer bir soruda “7.2.1.2. Bir doğal sayı ile bir cebirsel ifadeyi çarpar” kazanımı ile alakalı odak öğrencilerin düşünme biçimleri ortaya konulmaya çalışılmıştır. Bu amaçla öğrencilerden sağ taraftan ve sol taraftan dağılma özelliğinden yararlanılarak, bir doğal sayı ile bir cebirsel ifadenin çarpma işlemini yapmaları istenmiştir. Odak öğrencilerin sorulara verdikleri yanıtlar Şekil 4.26’da gösterilmiştir.

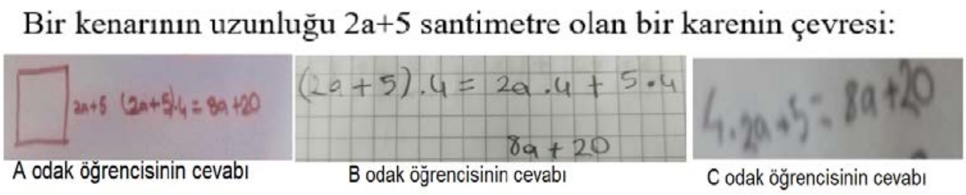


A odak öğrancisinin cevabı   B odak öğrancisinin cevabı   C odak öğrancisinin cevabı

Şekil 4.26 Çarpma İşleminde Odak Öğrencilerin Eylemleri

Cebirsel ifadelerle çarpma işlemi içeren sorulara A odak öğrencisi doğru cevaplar verirken B odak öğrencisi bir soruya yanlış, diğer bir soruya doğru cevap vermiştir. C odak öğrencisi ise iki soruyu da yanlış cevaplamıştır. Öğrencilerin yanlış sorularla ilgili yorumları incelendiğinde, B odak öğrencisinin yanlış yaptığı soruda “5a.3” işlemini yaparken çarpma işlemi yerine toplama işlemi kullandığı tespit edilmiştir. B odak öğrencisi ile yapılan görüşmede, çarpma işlemine hâkim olmasına rağmen dikkatsizlik yaparak hataya düştüğünü ve soruyu yanlış yaptığını ifade etmiştir. C odak öğrencisinin ise yanlış cevap vermesinin altında bazı kavram yanılgıları olduğu görülmüştür. C odak öğrencisinin dağılma özelliğine hâkim olmadığı için, doğal sayıları sadece kendi arasında çarptığı fakat değişkenlerle çarpmadığı gözlemlenmiştir. Araştırmacı tarafından yöneltilen, *“Neden değişkenlerle çarpma işlemi yapmıyorsun?”* sorusuna, *“Benzer terim olmadığı için…”* şeklinde yanıt vermiştir. Ayrıca öğrencinin işlemler sırasında işaretlere de dikkat etmediği görülmüştür. Tekrar yapılacak öğretimde bu kavram yanılgısını ortadan kaldırmaya yönelik etkinliklerin hazırlanması konusunda karar alınmıştır.

Problem şeklinde verilen bir doğal sayı ile bir cebirsel ifadenin çarpımına yönelik sorulan soruya, odak öğrencilerin üçü de şekilde gösterildiği gibi doğru yanıt vermiştir. Soruya verilen yanıtlar inceliğinde A odak öğrencisi, *“Karenin çevresi bulunurken bir kenarı 2a+5 ise çevresi bir kenarın dört katından 8a+20 olmalıdır.”* B odak öğrencisi soruyu, *“Karenin çevresi kenarın 4 katı olduğundan 4’ü 2a+5’e dağıtırız ve 8a+20 buluruz.”* şeklinde yanıtlamıştır. C odak öğrencisi ise, *“2a’nın dört katı 8a, 5’in dört katı 20 olduğundan çevresi 8a+20 olur.”* şeklinde ifade etmiştir. Odak öğrencilerin cebirsel ifadelerle çarpma işlemi yaparken dağılma özelliğini kullanarak Şekil 4.27’de gösterildiği gibi doğru sonuçlara ulaşabildikleri gözlemlenmiştir.



Şekil 4.27 Çarpma İşlemlerine Yönelik Problemde Odak Öğrencilerin Eylemleri

4.2.3 Birinci Öğretim Dizisinin Tekrar Etabına Ait Bulgular

Birinci öğretim dizisinin ilk etap öğretiminde ve yapılan birinci ara klinik görüşmelerde elde edilen bulguların analizi sonucunda, odak öğrencilerin bazı kavram yanılgılarına ve eksik öğrenmelere sahip oldukları ortaya konulmuştur. Odak öğrencilerin sahip olduğu kavram yanılgılarını ortadan kaldırmak, eksik öğrenmeleri gidermek ve öğretimin ilk etabında kullanılan etkinliklerin işlemeyen yerlerini revize etmek amacıyla, tekrar niteliğinde bir öğretim planlanmıştır. Tekrar niteliğinde olacak bu öğretim etabında bahsedilen amaçlar doğrultusunda, iki ders saati süresince “7.2.1.1. Cebirsel ifadelerle toplama ve çıkarma işlemleri yapar” ve “7.2.1.2. Bir doğal sayı ile bir cebirsel ifadeyi çarpar” kazanımlarını içeren etkinlikler sınıfta uygulanmıştır. Öğretimin ilk etabında ve ara klinik görüşmeler süresince gözlemler sonucunda tekrar öğretimine dair kararlar alınmıştır. Alınan bu kararlar tekrar öğretim etabında uygulanarak öğrencilerin zihinsel/fiziksel eylemlerinde değişimler gözlemlenerek incelenmiştir.

Birinci öğretim dizisinin tekrar etabı olan bu bölümde benzer terim ve dağılma özelliği kavramları üzerinde durulmuştur. Öğretimin bu etabının hedefleri öğrencilerin cebirsel ifadelerle toplama-çıkarma işlemlerini yapabilmeleri ve bir doğal sayı ile cebirsel ifadeyi çarpabilmeleri olarak belirlenmiştir.

Bu öğretim dizisinin tekrar etabına ilk olarak benzer terim kavramı hatırlatılarak başlanmıştır. Öğrencilerden, "3x+5y-4x-3y+1" cebirsel ifadesindeki benzer terimleri bulmaları istenmiştir. Öğrenciler değişkeni x olan 3x ve -4x terimleri ile değişkeni y olan 5y ve -3y terimlerinin benzer terimler olduğunu kolaylıkla fark edebilmişlerdir. Bu tür örneklerde artık öğrencilerin hata yapmadıkları görülmüştür. Odak öğrencilerle yapılan görüşmelerde, birden fazla değişkenin çarpım durumunda olduğu veya değişkenin farklı kuvvetlerinin bir arada bulunduğu terimleri içeren sorularda hatalı yanıtlar verildiği görülmüştür. Bu durumu ortadan kaldırmak için ve tekrar amaçlı olarak "2a+3-4ab+2" cebirsel ifadesinin benzer terimlerinin bulunması istenmiştir. Ö14, *"2a ile -4ab ve 3 ile 2 benzer terimdir."* şeklinde hatalı yanıt vermiştir. Ardından x^2-2y+x+3y cebirsel ifadesindeki benzer terimlerin bulunması istenmiştir. Ö12, *"x^2ile x ve -2y ile 3y benzerdir."* şeklinde hatalı yanıtlamıştır. A odak öğrencisi ise, *"x^2 ile x benzer terim değildir."* şeklinde yanıtlamıştır. Verilen bu yanıtlardan sonra araştırmacı tarafından, "*Bir cebirsel ifadede değişkenleri ve bu değişkenlerin kuvvetleri aynı olan terimlere benzer terim denir.*" hatırlatması yapılmıştır. Daha önce hatalı yanıt veren Ö12'nin, *"x^2 ile x benzer terim değiller. Ben yanlış cevap verdim. Benzer olması için değişkenlerin kuvvetleri de aynı olmalıdır."* şeklinde yanıt vererek hatasını düzelttiği gözlemlenmiştir. Yapılan hatırlatmalardan sonra sınıf genelinde öğrencilerin benzer ya da benzer olmayan terimleri ayırt edebildikleri gözlemlenmiştir.

Öğrencilerden "3x+4+x+2" ifadesini en sade haliyle yazmaları istenmiştir. Önce benzer terimlerin altını çizen öğrenciler kolaylıkla "4x+6" sonucuna ulaşmıştır. Öğrencilerden, "5x-3xy+x+7" cebirsel ifadesinin en sade halini yazmaları istendiğinde, birçok öğrencinin "6x-3xy+7" sonucuna ulaştığı görülmüştür. Ardından iki terimli iki cebirsel ifadenin toplama işlemini içeren Şekil 4.28'deki etkinlik öğrencilere sunulmuştur.

ETKİNLİK 1:

Aşağıdaki örnek çözümde olduğu gibi benzer terimleri bir araya getirerek cebirsel ifadelerle toplama işlemlerini yapınız.

$(2x+5)+(3x+1)=(2x+3x)+(5+1)=5x+6$

$(3x+5)+(\ x-2)\ =\ (\qquad\quad)+(\qquad\quad)=$

$(5x+6)+(-3x-2)=(\qquad\quad)+(\qquad\quad)=$

$(4x+5)+(-2x+2)=(\qquad\quad)+(\qquad\quad)=$

$(4x-3)+(-2x+6)=(\qquad\quad)+(\qquad\quad)=$

Şekil 4.28 Tekrar Öğretim Etabındaki Cebirsel İfadelerle Toplama İşlemi Etkinliği

Öğrencilere sunulan etkinlikte örnek çözümde olduğu gibi benzer terimleri ve sabit terimleri kendi aralarında yan yana yazmaları istenmiştir. Bu şekilde cebirsel ifadelerle toplama işlemlerinin yalnız benzer terimler arasında yapılabileceği daha görünür hale getirilmeye çalışılmıştır. Etkinlik esnasında tüm öğrencilerin etkinliklere katılması amacıyla kısa bir süre tanınmış ve ardından öğrenci yanıtları dinlenmiştir. İlk olarak "$(3x+5)+(x-2)$" sorusuna Ö2, *"Önce benzer terimleri kendi arasında bir araya getiririz. (3x+x)+(5+(-2))". Sonra parantez içlerini toplarız, sonuç 4x+3 olur."* şeklinde doğru yanıt verebildiği gözlemlenmiştir. Ardından "$(5x+6)+(-3x-2)$" ifadesini C odak öğrencisinin "(5x+(-3x)) + (6+(-2))" şeklinde önce benzer terimleri bir araya getirerek yazdığı ve sonrasında *"2x+4"* şeklinde yanıt verdiği gözlemlenmiştir. Etkinliğin diğer bir sorusu olan *"$(4x+5)+(-2x+2)$"* işleminin, vereceği yanıtın doğruluğundan emin olmayan Ö12 tarafından çözülmesi istenmiştir. Öğrenciye önce, *"Benzer terimler nelerdir?"* sorusu yöneltilmiştir. Ö12, *"4x ile -2x benzer terim, 5 ile 2 benzer terim."* şeklinde yanıtlamıştır. Sonra öğrenciden etkinlikteki diğer sorularda olduğu gibi benzer terimleri bir araya getirmesi istenmiştir. Ö12, *"(4x+(-2x))+(5+2)"* şeklinde yazarak *"2x+7"* sonucuna ulaşabilmiştir. Öğretimin ilk etabında yanlış yanıt veren veya yanıt vermekten çekinen öğrencilerin, benzer terimleri bir araya getirerek yazmalarının doğru yanıtlara ulaşmasında yardımcı olduğunun farkına vardıkları gözlemlenmiştir. Hazırlanan bu etkinliğin cebirsel ifadelerde toplama işleminde sadece doğru cevabı bulmaya odaklı etkinliklerdense, benzer terimlerle işlem yapmanın doğru sonuca götüren yol olduğunun vurgulaması açısından özellikle düşük seviyeli öğrencilerin öğrenmesini olumlu yönde etkilediği tespit edilmiştir. Son olarak "$(4x-3)+(-2x+6)$" sorusuna B odak öğrencisinin benzer terimleri bir araya getirerek "(4x+(-2x)) + ((-3)+6)" şeklinde yazdıktan sonra "2x +3" doğru sonucuna ulaşabildiği gözlemlenmiştir. Etkinlik esnasında öğrencilerin genel olarak cebirsel ifadelerle toplama işlemi yaparken benzer terimlerin farkına varıp bir arada yazabildikleri, benzer terimleri toplayıp benzer olmayan terimlerle karşılaştıktan sonra toplama işleminin daima sonuç üreten bir işaret olduğu yanılgısına düşmeden, doğru sonuçlara ulaşabildikleri tespit edilmiştir.

Öğretim dizisinin tekrar etabında uygulanan diğer bir etkinlikte ise cebirsel ifadelerle çıkarma işlemi içeren sorular sınıf ortamında uygulanmıştır. Öğretimin ilk etabında ve odak öğrencilerle yapılan görüşmeler esnasında çıkarma işlemi yaparken öğrencilerin daha çok hataya düştükleri ve kavram yanılgılarına sahip oldukları tespit edilmiştir. Bu kavram yanılgılarının başında, parantezin önemsiz olduğunun düşünülmesi ve çıkarma işleminin değişme özelliğinin olduğunun düşünülmesi gelmektedir. Öğrencilerdeki "parantezin önemsiz olduğunun düşünülmesi" kavram yanılgısının önüne geçirilmesi amacıyla Şekil 4.29'daki etkinlik soruları hazırlanmıştır.

Aşağıdaki örnek çözümde olduğu gibi cebirsel ifadelerle çıkarma işlemini çıkan ifadenin toplama işlemine göre tersi ile eksilen ifadenin toplamı şeklinde yazarak çözünüz.

$(4x+6)-(2x+3)=(4x+6)+(-2x-3)=(4x-2x)+(6-3)=2x+3$

$(6x+7)-(3x-1)=(\quad)+(\quad)=(\quad)+(\quad)=$

$(2x-1)-(x+3)=(\quad)+(\quad)=(\quad)+(\quad)=$

$(5x+6)-(-2x-3)=(\quad)+(\quad)=(\quad)+(\quad)=$

$(3x-1)-(x-3)=(\quad)+(\quad)=(\quad)+(\quad)=$

Şekil 4.29 Tekrar Öğretim Etabındaki Cebirsel İfadelerle Çıkarma İşlemi Etkinliği

C odak öğrencisi etkinlikteki "$(6x+7)-(3x-1)$" sorusunu cevaplarken önce toplama işlemine çevirerek "(6x+7) +(-3x-1)" şeklinde hatalı olarak yazmıştır. Bu öğrencinin bu hatayı daha önceki klinik görüşmeler esnasında da yaptığı gözlemlenmiştir. Araştırmacı tarafından öğrenciye, *"3x'in işaretini değiştirmene rağmen -1'in işaretini neden değiştirmedin?"* sorusu yöneltilmiştir. C odak öğrencisi, *"Çıkan terim 3x, onun işaretini değiştirdim."* yanıtını vermiştir. Araştırmacı, *"Şimdi örnek çözümde olduğu gibi parantezle gösterilen ikinci ifade çıkan olduğu için parantezin içindeki terimlerin hepsinin işaretini değiştirmelisin."* şeklindeki uyarıda bulunmuştur. Bu uyarıdan sonra C odak öğrencisi, "$(6x+7)-(3x-1)$*=(6x+7)+(-3x+1)*" şeklinde işlemlerini güncellemiştir. C odak öğrencisi, *"Şimdi benzer terimlerle toplama işlemi yapacağım. (6x-3x)+(7+1)=3x+8 sonucuna ulaşırız. Ben önceden parantezin içinde sadece değişken bulunan terimin işaretini* *değiştirmiştim.*” yanıtını vererek doğru sonuca ulaştığı gözlemlenmiştir. Etkinlikteki “$(2x-1)-(x+3)$” sorusuna Ö14’ün, *“Önce toplama işlemine çevirerek çıkan cebirsel ifadenin işaretini değiştiririm, (2x-1)+(-x-3) olur. Sonra benzer terimleri bir araya getiririm, (2x –x)+(-1+(-3))=x-4 olur. Bu şekilde parantezleri kullanarak yazmak uzun oluyor ama hata yapmamı engelledi.”* şeklinde yanıt vererek doğru sonuca ulaştığı gözlemlenmiştir. Etkinlikteki “$(5x+6)-(-2x-3)$” sorusuna B odak öğrencisinin, “(5x+6) −(−2x−3)=(5x+6)+(2x+3)=(5x+2x)+(6+3)=7x+9” ifadelerini kullanarak doğru çözüme ulaştığı belirlenmiştir. B odak öğrencisi bu soruda, *“Bu şekilde önce toplamaya çevirmek sonra toplamada yaptığımız benzer terimlerle işlem yapmak benim için daha kolay oldu. Önceden eksi ve artı işaretlerinde hatalar yapabiliyordum veya yaptığımdan bazen emin olamıyordum. Bundan sonra uzun da olsa parantezleri kullanarak yazacağım.”* şeklinde görüşünü belirtmiştir. Etkinlikte son olarak verilen “$(3x-1)-(x-3)$” işlemi için Ö11 ilk olarak çıkarma işlemini toplama işlemine çevirerek ikinci parantezdeki ifadelerin işaretinin değişmesi gerektiğini belirtmiş, “(3x-1)+(-x+3)” ifadesini yazmıştır. Ardından benzer terimleri bir araya getirerek “(3x –x)+(-1+3)=x+2” sonucuna ulaşmıştır. Ö11, *“Bundan sonra işlemi sonlandırırız. Çünkü x ile +2 benzer terim değil. Bu şekilde bırakırız.”* ifadesini kullanarak doğru sonuca ulaşmıştır. Öğrencinin yanıtından da anlaşılacağı gibi, cebirsel ifadelerle toplama ve çıkarma işlemlerinin sadece benzer terimler arasında yapılması gerektiğinin pekiştiği gözlemlenmiştir.

Tekrar amaçlı yapılan öğretim etabında cebirsel ifadelerle toplama ve çıkarma işlemleri içeren etkinlikler sonrasında sınıftaki öğrencilerin ve odak öğrencilerin yaptığı çözümler ya da yorumlar incelendiğinde benzer terim kavramının kavrandığı, parantez kullanımının öneminin farkına varıldığı, toplama ve çıkarma işlemlerinin daima sonuç üreten işaretler olmadığının anlaşıldığı görülmüştür. Uygulanan etkinlikler esnasında, sınıf genelinde öğrencilerin sorulan soruları kolaylıkla çözebildikleri ve önceden hata yapmalarına neden olan yanılgılardan uzaklaştıkları tespit edilmiştir.

Bu öğretim dizisinin tekrar etabına “7.2.1.2. Bir doğal sayı ile bir cebirsel ifadeyi çarpar” kazanımına yönelik etkinliklerin uygulanmasıyla devam edilmiştir. Öncelik olarak hatırlatma amacıyla bir doğal sayı ile sabit terim içermeyen cebirsel ifadelerin çarpımını içeren sorular öğrencilere yöneltilmiştir. İlk olarak “4.6x” cebirsel ifadesi verilmiş ve Ö3, *"4 ile 6'yı çarparsak 24, yanında x' de var, sonuç 24x olur."* ifadesini kullanarak doğru yanıtlamıştır. İkinci olarak "-3.5x" ifadesi verilmiştir. A odak öğrencisi, *"-15x"* yanıtını vermiştir. Ardından araştırmacı tarafından, *"3x.6 ile 6.3x ifadelerinin sonuçları aynı mıdır?"* sorusu yöneltilmiştir. Ö1, *"Evet ikisinin de sonucu 18x'dir. Çünkü çarpma işleminin değişme özelliği vardır."* ifadesini kullanarak soruyu doğru yanıtlamıştır. Verilen yanıtlar incelendiğinde, sabit terim içermeyen cebirsel ifadeler ile bir doğal sayının çarpımını içeren sorularda öğrencilerin hata yapmadan doğru sonuçlara ulaşabildikleri görülmüştür.

Öğretimin bu etabına dağılma özelliğinden yararlanılarak çarpma işlemlerinin yapılması istenen Şekil 4.30'da gösterilen etkinlik ile devam edilmiştir.

Aşağıdaki örnek çözümde olduğu gibi bir doğal sayı ile bir cebirsel ifadenin çarpımı şeklinde verilen ifadeleri çarpma işleminin toplama ve çıkarma işlemi üzerine sağdan ya da soldan dağılma özelliğinden yararlanarak çözünüz.

$2 \cdot (3x + 1) = 2.3x + 2.1 = 6x + 2$	$(2x + 5) \cdot 3 = 2x \cdot 3 + 5.3 = 6x + 15$
$4 \cdot (5x - 2) =$	$(3x - 1) \cdot 5 =$
$3 \cdot (4 - 2x) =$	$(-2x + 4) \cdot 3 =$
$5 \cdot (-4x - 2) =$	$(-3x - 2) \cdot 4 =$

Şekil 4.30 Tekrar Öğretim Etabındaki Cebirsel İfadelerle Çarpma İşlemi Etkinliği

Etkinlikle verilen "$4.(5x - 2)$" ifadesi için sınıf ortamında yapılan çözümler incelendiğinde, C odak öğrencisinin, *"5x-8"* gibi hatalı bir cevap verdiği tespit edilmiştir. Bu hatanın sebebinin ne olduğunu merak eden araştırmacı, *"Neden 4 ile 5x'i çarpmadın?"* sorusuna odak öğrencinin *"Benzer terim değil."* yanıtını vermesi üzerine araştırmacının, *"Burada senin yanlış bir genellemen var, benzer terimlerle işlem yapılması toplama ve çıkarma işlemleri için geçerliydi. Çarpma işlemi yaparken dağılma özelliğinden yararlanabilirsin."* şeklindeki açıklamasından sonra öğrencinin soruyu tekrar çözmesi istenmiştir. C odak öğrencisi, *"O zaman 4 ile 5x' çarpımı 20x, 4 ile (-2)'yi çarparım, (-8). Bunu zaten daha önce de yapmıştım. Sonuç, 20x-8 olur."* yanıtını vermiştir. Bu şekilde doğru sonuca ulaşan odak öğrencinin dağılma özelliğini doğru uyguladığı tespit edilmiştir. Sınıfta az da olsa bu tür hataya sahip başka öğrencilerin de olduğu görülmüştür.

Etkinlikteki başka bir soru olan "$3 \cdot (4 - 2x)$" ifadesi için sınıftaki birçok öğrenci doğru sonuç olan "12-6x" ifadesine ulaşmıştır. Fakat Ö2 soruyu, *"6x-12"* şeklinde cevaplamıştır. Bu durum üzerine araştırmacı öğrenciye cevabını nasıl bulduğunu sormuş, öğrenci yanıt olarak, *"3 ile 4'ün çarpımı 12, 3 ile 2x çarpımı 6x, arada eksi işareti olduğundan 6x-12 cevabını verdim."* ifadesini kullanmıştır. Araştırmacının sınıfa yönelttiği, *"Peki çıkarma işleminin değişme özelliği var mıdır?"* şeklindeki sorusuna, sınıf çoğunluğu, *"Hayır"* yanıtını vermiştir. Araştırmacının, *"Bu tür sorularda çıkarma işleminin değişme özelliğinin olmadığını unutmamalıyız."* şeklindeki açıklamasıyla çıkarma işlemin değişme özelliği olduğunu düşünen öğrencilerdeki kavram yanılgısının önüne geçilmeye çalışılmıştır.

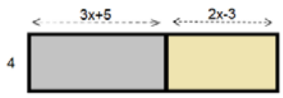
Etkinlikte verilen "$5 \cdot (-4x - 2)$" işleminde Ö10, *"5'i (-4x) ve (-2) ile ayrı ayrı çarparız, 5.(-4x)=-20x olur, 5.(-2)=-10 olduğundan sonuç -20x-10'dur."* ifadesi ile dağılma özelliğinden yararlanarak doğru sonuca ulaşabilmiştir. Sınıf genelinde birçok öğrencinin aynı şekilde doğru sonuca ulaşabildiği gözlemlenmiştir.

Etkinliğin ilk üç sorusunda cebirsel ifadelerle çarpılan doğal sayı, alışık olunduğu gibi parantezin önünde olarak verilmiştir. Etkinlikteki diğer üç soruda ise doğal sayı parantezden sonra verilmiştir. Öğretimin ilk etabında ve odak öğrencilerle yapılan görüşmelerde sağ taraftan uygulanan dağılma özelliğinde, öğrenci başarısının daha düşük olduğu tespit edilmiştir. Bu duruma neden olan hata türleri ve kavram yanılgılarının önüne geçilmeye çalışılmıştır. Etkinlikte verilen "$(3x - 1) \cdot 5$" ifadesini sınıftaki birçok öğrencinin çarpma işleminin çıkarma işlemi üzerine dağılma özelliğinden yararlanarak yani "3x.5-1.5=15x-5" şeklinde işlemler yaparak doğru olarak sonuçlandırdığı gözlemlenmiştir. Bunun yanında C odak öğrencisi, " 3x-15" şeklinde hatalı olarak çözmüştür. Araştırmacı C odak öğrencisine, *"Sınıftaki birçok arkadaşın farklı bir sonuç buldu. Sence 5 ile (-1) ifadesini mi yoksa (3x-1) ifadesini mi çarpmalıyız?"* sorusunu yöneltmiştir. C odak öğrencisi, *"(3x-1) ile 5'i çarpmalıyız. Ben parantezi fark etmedim, o zaman 3x ile 5'i çarparım, 15x. 1 ile 5'i çarparım, 5. Arada eksi olduğu için sonuç 15x-5 olur."* ifadesini kullanarak doğru sonuca ulaşmıştır.

Etkinliğin devamında "$(-2x + 4) \cdot 3$" sorusu öğrencilere sunulmuştur. B odak öğrencisi, *"(-2x) ile 3'ü çarparız, (-6x). 4 ile 3'ü çarparız, 12. Sonuç; -6x+12 olur."* yanıtını vererek doğru sonuca ulaşmıştır. Bu yanıtın ardından söz hakkı isteyen A odak öğrencisi, *"Örnek çözümlerde oklar çizilmişti. Buradaki iki ok ile* *gösterilen işlemlerin sırası önemli mi? Mesela ben 12-6x buldum. Bu sonuç da doğru, ben bazen bu durumu karıştırıyorum.”* ifadesi ile kafasına takılan bir durumu sınıf arkadaşları ile paylaşmıştır. Araştırmacı, *“Arkadaşınız güzel bir soru sordu. Burada önemli olan dağılmanın toplama işlemi üzerine mi yoksa çıkarma işlemi üzerine mi yapıldığıdır. Çünkü toplama işleminin değişme özelliği vardır. Ama çıkarma işleminde değişme özelliği yoktur. Çıkarma işlemi üzerine yapılan dağılmalarda sıranın önemi vardır. Aslında toplama işlemi üzerine yapılan dağılmada da sıra önemlidir fakat değişme özelliği olduğu için sonuç aynıdır.”* şeklinde yaptığı açıklama ile odak öğrencinin sorusunu yanıtlamıştır.

Etkinliğe “$(-3x-2)\cdot 4$” sorusu ile devam edilmiştir. Söz alan Ö2, *“Önce 4’ü sırasıyla (-3x) ile 2’ye dağıtırız, sonra araya eksi işareti koyarız. (-3x).4–2.4 =-12x -8 sonucuna ulaşırız.”* ifadesi ile doğru sonuca ulaşmıştır. Sınıf genelinde öğrencilerden gelen yanıtlar incelendiğinde öğrencilerin doğru sonuca ulaştıkları gözlemlenmiştir.

Öğretim dizisinin tekrar etabında uygulanan son etkinlikte Şekil 4.31’de gösterilen ve kenar uzunlukları verilen iki dikdörtgenin alanlarının toplamını veren cebirsel ifadenin yazılması istenmiştir.



Yukarıdaki şekilde kısa kenar uzunlukları eşit, uzun kenar uzunlukları farklı olan iki dikdörtgenin birleştirilmesi ile oluşan bölgenin alanını veren cebirsel ifadeyi hesaplayınız.

Şekil 4.31 Tekrar Öğretim Etabındaki Kenar Uzunluğu-Alan Etkinliği

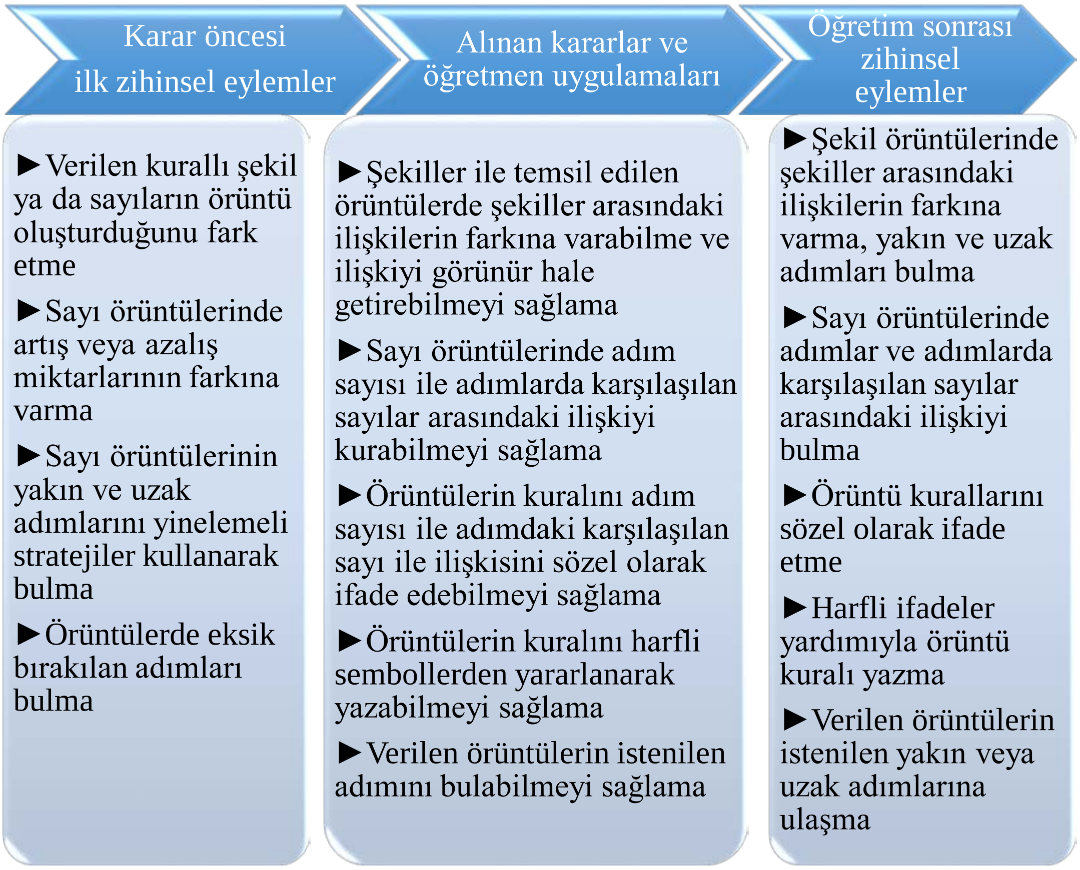
Söz alan Ö16, *“Uzun kenarlarda yazan cebirsel ifadeleri toplarız. Benzer terimleri kendi arasında toplarsak (2x+3x)=5x ve 5+(-3)=2, uzun kenarların toplamı 5x+2 olur. Şimdi dikdörtgenin alanını kısa kenarla uzun kenarların toplamını çarparak hesaplarsak 4.(5x+2)=4.5x+4.2=20x+8 bulunur.”* ifadesiyle doğru sonuca ulaştığı tespit edilmiştir. Araştırmacı tarafından sorunun farklı bir çözüm yolu olup olmadığı sorgulanmıştır. Söz alan B odak öğrencisi, *“Ben farklı bir yoldan buldum, önce iki dikdörtgenin alanlarını ayrı ayrı hesapladım. Birinci dikdörtgenin alanı 4.(3x+5), dağılma özelliğini kullanarak 4.3x+4.5=12x+20 olur. İkinci dikdörtgenin alanı 4.(2x-3,), dağılma özelliğinden 4.2x-4.3=8x-12 olur. Şimdi iki dikdörtgenin alanını toplarız. (12x+20)+(8x-12) işlemlerinde benzer terimleri toplarsak*

(12x+8x)+(20)+(-12)=20x+8 olur." açıklamasıyla kullandığı çözüm yolunu ifade etmiştir. Farklı çözüm yollarını kullanan öğrencilerin aynı sonuca ulaştıkları gözlemlenmiştir.

Öğretim dizisinin tekrar etabında uygulanan etkinlikler incelendiğinde sınıftaki öğrencilerin ve odak öğrencilerin bir doğal sayı ile bir cebirsel ifadenin çarpımında genel olarak başarılı oldukları tespit edilmiştir.

4.3 İkinci Öğretim Dizisi Örüntülere Ait Bulgular

Bu öğretim dizisinde "7.2.1.3. Sayı örüntülerinin kuralını harfle ifade eder, kuralı harfle ifade edilen örüntünün istenilen terimini bulur." kazanımı beş ders saati süresince sınıfta uygulanmıştır. Tahmini öğrenme yol haritaları kapsamında öğrenme hedefleri; şekil örüntülerini analiz ederek örüntünün adımlarını oluşturan şekiller ile adım sayıları arasındaki ilişkileri tespit edip şekilsel analizler yapmak, örüntülerdeki fonksiyonel ilişkilerin farkına varmak, örüntü kurallarını harfli ifadelerle temsil etmek ve kuralı verilen örüntülerin istenilen adımlarını bulmak olarak belirlenmiştir. Bahsedilen hedefler doğrultusunda öğretim dizisinin ilk etabında, üç ders saati boyunca araştırmacı tarafından hazırlanan etkinlikler, sınıf ortamında uygulanarak öğrencilerin zihinsel eylemleri ve düşünme biçimleri ortaya konulmaya çalışılmıştır. Ardından odak öğrenciler ile ara klinik görüşmeler gerçekleştirilmiştir. Öğretimin ilk etabında ve odak öğrencilerle yapılan ara klinik görüşmeler esnasında öğrencilerin yapmış olduğu hatalar ve kavram yanılgıları tespit edilmeye çalışılmıştır. Ayrıca öğrenci yanıtları ve yorumları analiz edilerek etkinliklerin işleyen ve işlemeyen noktaları tespit edilmiş, öğretimin tekrar etabında kullanılmak üzere Şekil 4.32'de gösterilen kararlar alınmıştır. Alınan bu kararlar doğrultusunda öğretim yeniden şekillendirilmiş ve bu kararları uygulamaya yönelik etkinlikler hazırlanarak öğretim dizisinin tekrar etabı sınıfta uygulanmıştır. Tekrar etabı için hazırlanan etkinlikler uygulanırken öğrencilerin zihinsel eylemleri ve düşünme biçimlerindeki değişimler gözlemlenmiştir. Bu şekilde öğrencilerin kavramsal öğrenmelerini destekleyen, olumlu yönde gelişimlerini sağlayan ve yapılan hataları önlemede kullanılan öğretim yöntemleri ortaya konulmaya çalışılmıştır.

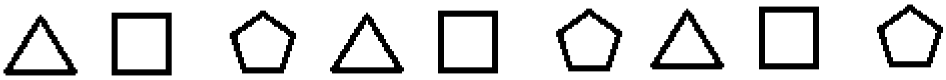


Şekil 4.32 İkinci Öğretim Dizisinde Alınan Kararlar

4.3.1 İkinci Öğretim Dizisinin İlk Etabına Ait Bulgular

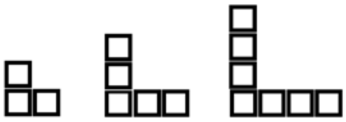
Bu öğretim dizisinin ilk etabında, öğrencilerden örüntünün tanımını yapmaları istenerek öğrencilerin bu kavram hakkındaki zihinsel eylemleri tespit edilmeye çalışılmıştır. Sınıf içinde yaşanan tartışmada Ö4, *"Düzenli biçimde ilerleyen sayılara veya şekillere örüntü denir."*; Ö11, *"Bir kurala göre değişen şekillere bazen de bir kurala göre değişen sayılara örüntü denir."*; Ö9, *"Hep aynı miktarda artan sayılar örüntü oluşturur."* şeklinde ifadelerle örüntü kavramı hakkındaki görüşlerini belirtmişlerdir. Genel olarak öğrenciler örüntü kavramının tanımını; belli bir kurala göre dizilen, düzenli bir şekilde birbirini takip eden, bazı durumlarda kendini tekrar edebilen sayılar ya da şekiller şeklinde ifade etmişlerdir.

İlk olarak Şekil 4.33'te verilen şekillerin bir örüntü oluşturup oluşturmadığı sorgulanmış ve sınıftaki öğrencilerin tamamının verilen şekillerin örüntü olduğunun farkına vardıkları gözlemlenmiştir.



Şekil 4.33 Tekrar Eden Örüntü Örneği

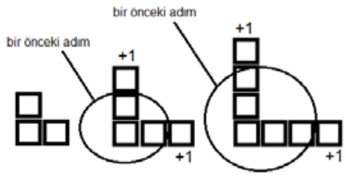
Ardından bir önceki örnekteki örüntüden farklı olarak Şekil 4.34’te verilen örneğin örüntü oluşturup oluşturmadığı sorgulanmıştır. İlk örnekte olduğu gibi sınıfta istisnasız bütün öğrencilerin verilen şekillerin örüntü oluşturduğunun farkına vardığı gözlemlenmiştir. Öğrencilere iki örnek arasındaki farkın ne olduğu sorulmuştur. A odak öğrencisi, *“İlk örnekteki şekiller üçgen, kare, beşgen olarak tekrar ederek ilerlemektedir. Fakat ikinci örnekteki kare sayıları artarak ilerlemektedir. Ama ikisi de örüntüdür.”* şeklinde yanıtlamıştır. Verilen bu yanıttan da anlaşılacağı gibi örüntülerin bazı durumlarda tekrarlı olarak ilerleyebildiği, bazı durumlarda ise genişleyerek ilerleyebildiğinin öğrenciler tarafından fark edildiği tespit edilmiştir.



Şekil 4.34 İkinci Öğretim Dizisinin İlk Etabında Kullanılan Şekil Örüntüsü Örneği

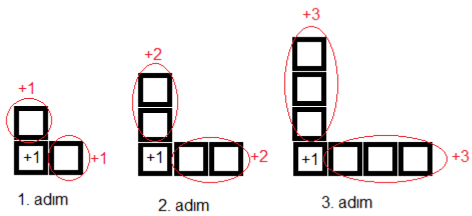
Öğrencilere şekil örüntülerindeki şekiller arasındaki ilişkilerin farkına vararak örüntülerdeki genişlemeleri ya da daralmaları kendi cümleleri ile ifade etmelerini sağlamak amacıyla, “*Verilen örüntüde fark ettiğiniz şeyler nelerdir?*” şeklinde bir soru yöneltilmiştir. Sınıftaki birçok öğrencinin görüşüne paralel olarak B odak öğrencisi, “*Örüntüde kare sayısı her adımda ikişer ikişer artmaktadır.*” şeklinde yanıt vermiştir. Artış miktarının farkına varılması önemli olmasına rağmen örüntünün kuralının bulunmasında tek başına yetersiz kalacağı tespit edilmiştir. Ayrıca birçok öğrencinin görsel analiz yapmadan şekil örüntüsünü sayı örüntüsüne çevirerek sayılar arasındaki ilişkiye odaklanıp artış miktarını söylediği gözlemlenmiştir.

Araştırmacı Şekil 4.35’te gösterilen çizimi yaparak, “*Sizlerin örüntüdeki şekiller arasında farkına vardığınız ilişki her bir şeklin üstüne iki kare eklenerek ilerlemiş olmasıdır.”* açıklamasını yapmıştır.



Şekil 4.35 Öğretimin İlk Etabındaki Şekil Örüntüsü Örneğinin Şekilsel Analizi 1

Örüntüdeki şekiller arasında ilişkinin sadece artış miktarı ile ifade edilmesinin yetersiz kaldığını düşünen araştırmacı, öğrencilere, *"Bu örüntünün nasıl genişlediğini bulacak başka yollar bulabilir misiniz?"* sorusunu yöneltmiştir. Fakat araştırmacı bu sorusuna istediği düzeyde yanıtlar alamamıştır. Araştırmacı, *"Şimdi size örüntüyü görsel olarak farklı bir şekilde analiz etmenizi sağlayacak bir çizim yapacağım."* şeklinde açıklama yaparak Şekil 4.36'daki görseli çizip öğrencilerden analiz etmelerini ve gösterilen çizimler vasıtasıyla öğrencilerin örüntünün nasıl genişlediğini tekrar yorumlamalarını istemiştir.



Şekil 4.36 Öğretimin İlk Etabındaki Şekil Örüntüsü Örneğinin Şekilsel Analizi 2

Öğrenciler araştırmacının yaptığı çizimi inceledikten sonra sınıfta araştırmacı ve öğrenciler arasında yaşanan diyalog şu şekilde gerçekleşmiştir:

> ***Araştırmacı:*** *Bu görselde gördüklerinizi paylaşarak sizden örüntünün nasıl genişlediğini bulmanızı istiyorum. Şekilde fark ettiklerinizi paylaşınız.*
>
> ***Ö3:*** *Her adımda sabit bir kare var, sonra kareler eklenerek devam etmiş.*
>
> ***Araştırmacı:*** *Eklenen kareler nasıl bir ilişki kullanılarak ilerlemiş?*
>
> ***Ö14:*** *Her adımda bir üstten bir tanede sağ taraftan kare eklenmiş, yani her adımda bir öncekinin üzerine ikişer kare eklenmiş.*
>
> ***Araştırmacı:*** *Peki bu eklenen karelerin sayısı ile adım sayıları arasında bir ilişki var mı?*

Ö14: *Evet var. Aslında adım sayısının iki katı kadar kare ekleniyor. Örneğin birinci adımda 2 kare eklenmiş, ikinci adımda 4 kare eklenmiş. Yani hangi adımdaysak onun iki katı kadar kare ekleniyor.*

Araştırmacı: *O zaman kare sayısı ile adım sayısındaki ilişkiyi kullanarak örüntü kuralını söyleyebilir misiniz?*

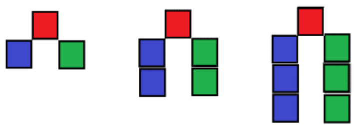
Ö1: *Başlangıçta bir kare var. Adım sayısının iki katı kadar daha kare ekleniyor. O zaman kare sayısı adım sayısının iki katının bir fazlası oluyor.*

Araştırmacı: *Şimdi örüntünün 43. adımı kaç kareden oluşur, bulabilir misiniz?*

Ö2: *Evet! 2.43+1 =86+1=87 kareden oluşur.*

Yaşanan diyaloglardan da anlaşılacağı gibi, öğrencilerin şekiller arasındaki ilişkiyi doğru yönlendirmeler sonucunda fark edebildikleri görülmüştür. Sadece artış miktarına değil adım sayısı ile oluşan kare sayısı arasındaki ilişkiyi de fark edebildikleri gözlemlenmiştir. Ö7, *"Ben sadece artış miktarına bakıyordum. Şimdi ilk adımdan itibaren bu artış miktarının adım sayısı ile çarpılarak her adıma eklendiğini fark ettim."* şeklinde görüşünü bildirmiştir. Etkinliğin sonunda öğrenciler cebirsel olarak bir genelleme yapamasa da öğrencilerin örüntülerin kuralları bulunurken adım sayısı ile her adımda karşılaşılan kare sayısı arasında nasıl bir ilişki kurulabileceğinin farkına varmaya başladıkları gözlemlenmiştir.

Öğretim dizisinde uygulanan diğer bir etkinlikte örüntü kuralının bulunmasında yardımı dokunacağına inanılan üç sütunlu tablolardan yararlanılmıştır. Üç sütunlu tablolar vasıtasıyla şekilsel analizlerin sayısal analizlere dönüştürülmesi hedeflenmiştir. Bu hedef doğrultusunda etkinlikte kullanılacak şekil örüntüsü Şekil 4.37'de gösterilmiştir.



Şekil 4.37 Renkli Karelerle Oluşturulan Şekil Örüntüsü

Araştırmacı tarafından sınıf tartışması şeklinde gerçekleştirilen etkinlik sırasında yaşanan diyaloglar şu şekilde gerçekleşmiştir:

Araştırmacı: *Bu örüntüde neler görüyorsunuz?*

Ö17: *Her adımda ortada bir kırmızı kare var. Bu hiç değişmiyor. Adım sayısı ilerledikçe mavi ve yeşil kareler adım sayısı ile ilişkili olarak artıyor.*

Araştırmacı: *Bu bahsedilen adım sayısı ve kare sayısı arasındaki ilişki tam olarak nasıldır?*

B odak öğrencisi: *Her adımda sabit bir kırmızı kare var. Mavi ve yeşil kare sayısı ise her adımda adım sayısına eşit.*

Araştırmacı: *Toplam kare sayısı ile adım sayısı arasındaki ilişkiyi gösteren üç sütunlu tabloyu beraber oluşturalım. Sizden bana yardımcı olmanızı istiyorum.*

Ö7: *Birinci adımda 1 kırmızı, 1 mavi, 1 yeşil, toplam 3 kare var. İkinci adımda 1 kırmızı, 2 mavi, 2 yeşil, toplam 5 kare var. Üçüncü adımda 1 kırmızı, 3 mavi, 3 yeşil, toplam, 7 kare var. Dördüncü adımda 1 kırmızı, 4 mavi, 4 yeşil kare, toplam 9 kare olur.*

Araştırmacı öğrencilerin vermiş olduğu yanıtlar doğrultusunda Şekil 4.37'de gösterildiği gibi üç sütunlu tabloyu öğrencilerle birlikte doldurmuştur.

Adım sayısı	Düşünceniz	Toplam kare sayısı
1	1+1+1	3
2	2+2+1	5
3	3+3+1	7
4	4+4+1	9

Şekil 4.38 Şekil Örüntünün Tablo Temsili İle Toplamsal Analizi

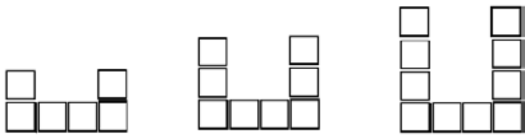
Araştırmacı, tabloyu doldurduktan sonra, "*Ortadaki sütun için adım sayısı ile toplam kare sayısı arasındaki ilişki ile ilgili düşüncenizi başka türlü ifade edebilir misiniz?*" şeklinde bir soruyu sınıf tartışmasına açmıştır. Sınıf genelinde birçok öğrencinin ilişkiyi toplamsal olarak ifade edebilmesine rağmen, çarpımsal bir ilişki kullanarak ifade edemediği gözlemlenmiştir. Bunun üzerine araştırmacı, örüntüdeki toplam kare sayılarını çarpımsal ilişki ile göstererek Şekil 4.39'da gösterilen üç sütunlu tabloyu oluşturmuş ve öğrencilerden bu tabloyu incelemelerini istemiştir.

Adım sayısı	Düşünceniz	Toplam kare sayısı
1	2.1+1	3
2	2.2+1	5
3	2.3+1	7
4	2.4+1	9

Şekil 4.39 Şekil Örüntüsünün Tablo Temsili İle Çarpımsal Analizi

Oluşturulan yeni tabloyu A odak öğrencisi, *"Orta sütunda toplam kare sayısı bulunurken adım sayısının iki katı alındıktan sonra 1 eklenmiştir."* şeklinde yorumlamıştır. Ayrıca Ö1, *"İlk başta ben fark edememiştim ama tabloyu inceleyince fark ettim. Toplam oluşan kare sayısı her adım için adım sayısının iki katının bir fazlası şeklinde oluyor."* şeklinde yorumlamıştır. Bu yorumlardan da anlaşılacağı gibi öğrencilerin tablolar vasıtasıyla örüntüde genelleme yaparken adım sayısı ile oluşan kare sayıları arasındaki ilişkiyi daha rahat fark edebildikleri gözlemlenmiştir.

Bu öğretim dizisinde, daha önce uygulanan etkinliklerde şekilsel analizler sayısal analizlere çevrildikten ve tablolar yardımıyla örüntülerin nasıl ilerlediği sözel olarak ifade edildikten sonra, örüntünün yakın adımlarının yanında artık uzak adımlarının da sorgulanmasına başlanmıştır. Bunun yanında yapmış oldukları genellemeleri sözel olarak ifade etmelerinin ardından, değişken kullanarak örüntülerin genel terimlerini yazmalarını da destekleyecek etkinliklere yer verilmiştir. Bu amaçla Şekil 4.40'da verilen örüntü öğrencilere sunulmuştur.



Şekil 4.40 Öğretimin İlk Etabında Kullanılan Şekil Örüntüsü

Etkinlikteki örüntünün 4. adımının öğrenciler tarafından oluşturulması istendiğinde sınıf genelinde tüm öğrencilerin rahatlıkla toplam 12 kareden oluşan 4. adımı oluşturabildikleri gözlemlenmiştir. Ardından öğrencilere örüntünün 10. adımında oluşan kare sayısı sorulmuştur. Sınıftaki öğrencilerin bir kısmının istenen adımdaki şekli çizmeye çalıştığı ve oluşan şekildeki kare sayısını saydığı gözlemlenmiştir. Sınıftaki bazı öğrencilerin ise ilk adımda 6, ikinci adımda 8, üçüncü adımda 10 kare olduğunu görüp buldukları sayılarla 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24 şeklindeki sayı örüntüsünü oluşturarak istenen adıma ulaştıkları gözlemlenmiştir. Örüntüdeki artış miktarının farkına vardıktan sonra bir önceki terimin üzerine artış miktarını yinelemeli olarak ekleyerek sonuca ulaşmaya çalışan C odak öğrencisi ile araştırmacı arasında yaşanan diyaloglar şu şekilde gerçekleşmiştir:

Araştırmacı: *Örüntünün 10. adımını bulman istenmişti. Nasıl bulduğunu bize anlatır mısın?*

C odak öğrencisi: *Şekli incelediğimde her adımda iki kare eklendiğini fark ettim sonra her adımın üzerine 2 ekleyerek 10. adıma kadar ilerledim ve sonucu buldum.*

Araştırmacı: *Peki örneğin örüntünün 53. adımını bulmanı istesem bu işlemi bütün terimleri yazarak bulmaya çalışman seni zorlamayacak mı?*

C odak öğrencisi: *Evet çok fazla sayı yazmam gerekir. Bu çok uzun sürer.*

Araştırmacı: *O zaman sadece artış miktarına odaklanmak yerine biraz şekiller arasındaki ilişkileri bulmaya çalışalım. Mesela her şekilde değişmeden duran kareler var mı?*

C odak öğrencisi: *Evet aslında var. Her şekilde alt sırada dört kare var.*

Araştırmacı: *Tamam birde artan kareler var onlar nasıl artmış?*

C odak öğrencisi: *En başta ve en sondaki karelerin üzerinde birer tane olmak üzere her adımda iki kare eklenmiş ve böyle eklenerek devam etmiş.*

Araştırmacı: *İşte o eklenen kare sayıları adım sayısı ile ilişkili mi?*

C odak öğrencisi: *Aslında dört karenin üzerine birinci adımda 2 kare, ikinci adımda 4 kare, üçüncü adımda 6 kare eklenmiş. Yani adım sayısının iki katı kadar kare eklenmiş.*

Araştırmacı: *Şimdi adım sayısı ile adımlarda oluşan kare sayıları arasındaki ilişkiyi bize ifade edebilir misin?*

C odak öğrencisi: *Sabit olan dört karenin üzerine adım sayısının iki katı kadar kare ekleniyor.*

Yaşanan diyaloglar sonucunda yakın adımlarda kullanılan artış miktarı odaklı yinelemeli stratejinin kullanılmasının, uzak adımları bulurken öğrencilerin zorlanmasına sebep olduğu gözlemlenmiştir. Bunun yanında adım sayısı ve adımlarda karşılaşılan kare sayıları arasındaki ilişkinin fark edilememesinin örüntü genellemesinde karşılaşılan bir zorluk olduğu tespit edilmiştir. Etkinliğe öğrencilerle birlikte örüntüye ait üçlü sütun tablosunun doldurulmasıyla devam edilmiştir.

Öğrencilerden alınan yanıtlar doğrultusunda Şekil 4.41'de gösterilen üç sütunlu tablo oluşturulmuştur.

Adım sayısı	Düşünceniz	Toplam kare sayısı
1	2.1+4	6
2	2.2+4	8
3	2.3+4	10
4	2.4+4	12
10	2.10+4	24
53	2.53+4	110
100	2.100+4	204

Şekil 4.41 Öğretimin İlk Etabındaki Şekil Örüntüsünün Tablo Temsili

Örüntüye ait tablo oluşturulurken öğrencilere tablonun satırlarında sabit kalan ve değişen değerlerin neler olduğu sorulmuştur. Sınıftaki öğrenciler tablonun satırları oluşturulurken çarpım durumunda olan 2 ile toplam durumunda olan 4'lerin sabit kaldığının, adım sayılarını gösteren "1, 2, 3, 4" gibi sayıların değiştiğinin farkına varmışlardır. Ardından öğrencilerden örüntünün kuralını cebirsel olarak temsil etmeleri istenmiş ve bu esnada öğrenciler ile aşağıdaki diyaloglar yaşanmıştır:

Araştırmacı: *Bilmediğimiz bir adımda (bu adım n olsun) kaç tane kare ile karşılaşırız?*

Ö11: *Bütün adımlarda sabit dört kare var. Bunun üzerine adım sayısına göre kare ekliyorduk.*

Araştırmacı: *Evet, doğru… Peki, bilmediğimiz n. adımda kaç kare ekleriz?*

Ö14: *Bilmediğimiz adıma n dersek ilk ve son sütunlara n tane eklenirse toplam 2.n tane daha kare ekleriz.*

Araştırmacı: *Evet, doğru… Şimdi her adımda sabit olan ve eklenen kareyi temsil eden terimleri birleştirerek örüntünün kuralını cebirsel olarak ifade edelim.*

Ö14: *O zaman bilmediğimiz n. adımda 2n+4 tane kare ile karşılaşırız.*

Araştırmacı: *Haklısınız, 2n+4 örüntünün cebirsel olarak kuralını veren cebirsel ifadedir. Başka bir deyişle, örüntünün genel terimidir.*

Ö1: *Örüntünün genel terimi bize ne ifade ediyor? Ben çok anlamadım.*

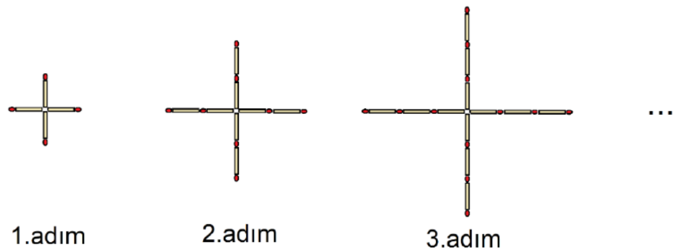
Araştırmacı: *Genel terim bize örüntünün kuralı hakkında cebirsel olarak bilgi veriyor. Örüntünün genel terimini bilirsek istediğimiz adımındaki kare sayısını bulabiliriz. Örneğin 100. adım bize* *sorulduğunda 2n+4 genel teriminde n yerine 100 yazarsak 2.100+4=204 kare olduğunu bulabiliriz.*

A odak öğrencisi: *Bu şekilde çok büyük ve çok küçük sayılar olsa bile istediğimiz adımdaki kare sayısını bulabiliyoruz. Sadece adım sayısını yerine yazmamız yeterli.*

Araştırmacı: *Evet… Arkadaşınız doğru söylüyor. Genel terimin bulunması bu açıdan çok önemli.*

Diyaloglardan anlaşılacağı üzere sınıf tartışması sonucunda öğrencilerin, değişken kullanarak örüntünün genel terimini yazabildikleri görülmektedir. Öğrencilerin sadece artış miktarına yoğunlaşarak, genel terimi ve uzak adımlardaki terimleri bulmada zorlandığı tespit edilmiştir.

Öğretim dizisinde uygulanan diğer bir etkinlikte verilen şekil örüntüsüne ait tablonun doldurulmasından sonra adımlar arasındaki ilişkinin farkına varılıp örüntünün genel teriminin bulunması hedeflenmiştir. Bu hedef doğrultusunda ilk üç adımı Şekil 4.42'de gösterilen şekil örüntüsü öğrencilere sunulmuştur.



Şekil 4.42 Kibrit Çöpleri İle Oluşturulan Şekil Örüntüsü

İlk olarak öğrencilerden örüntünün dördüncü adımını oluşturmaları istenmiştir. Öğrencilerin tamamı dördüncü adımı başarıyla oluşturmuştur. Örüntünün nasıl ilerlediği sorgulandığında, Ö8 *"Her adımda dört kibrit çöpü eklenmiş"* ve Ö1 *"Her adımda sağdan, soldan, aşağıdan ve yukarıdan birer kibrit çöpü eklenmiştir."* ifadelerini kullanarak örüntüyü sayısal ve görsel olarak tanımlamışlardır. Araştırmacı tarafından, *"Bu örüntü bir önceki etkinlikte kullanılan örüntüden biraz farklı… Bunu fark edebildiniz mi?"* sorusunu sınıfa yöneltmiştir. A odak öğrencisi, *"Bu örüntüde her adımda sabit olarak verilen kibrit çöpü yok, ilk adımdan itibaren dörder kibrit çöpü eklenerek devam etmiştir."* yanıtını vermiştir. Ardından öğrencilerden adım sayıları ile kibrit çöpü sayıları arasındaki ilişkiyi bulmaları için birer tablo oluşturmaları ve örüntünün kuralını sözel olarak ifade ettikten sonra genel terimi bulmaları istenmiştir.

Genel olarak öğrencilerin tablodaki adım sayıları ve oluşan kibrit çöpü sayıları ile ilgili satırları doğru olarak doldurdukları gözlemlenmiştir. Ayrıca tablodaki verilerin öğrenciler tarafından doğru olarak yorumlandığı tespit edilmiştir. Buna rağmen bazı öğrencilerin örüntünün kuralını ifade edemediği gözlemlenmiştir. Bu sorunu yaşayan Ö10, *"Örüntüdeki kibrit çöpleri her adımda dörder dörder artıyor. Örüntü 4, 8, 12, 16… olarak ilerliyor."* şeklinde örüntü hakkındaki görüşünü belirtmiştir. Öğrencinin yapmış olduğu açıklamadan da anlaşılacağı gibi örüntünün kuralını bulurken sadece kare sayıları arasındaki artış miktarına odaklanıp adım sayıları ile olan ilişkiye odaklanmadığı gözlemlenmiştir. Bunun yanında A odak öğrencisinin, *"Tabloyu doldururken oluşan kibrit çöpü sayısı her adım için adım sayısının dört katı oluyor. Örüntünün kuralını bulurken bilmediğimiz n. adımda da n'nin dört katı kadar kibrit sayısı olacaktır. O halde örüntünün genel terimi 4n şeklinde olmalıdır."* ifadesini kullanarak örüntünün genel terimine ulaşabildiği tespit edilmiştir.

Örüntünün uzak adımlarından 100. adımda karşılaşılan kibrit çöpü adedi sorgulandığında genel terime ulaşabilen öğrencilerin "4.100=400" işlemini yaparak rahatlıkla doğru sonuca ulaşabildiği gözlemlenmiştir. Fakat bazı öğrencilerin sonuca ulaşmakta zorlandıkları tespit edilmiştir. Bu sorunu yaşayan Ö9 ile araştırmacı arasında şu diyalog yaşanmıştır:

> ***Araştırmacı:*** *Örüntüde istenen adımda karşılaşılan kibrit çöpü sayısını bulmak için önce örüntünün kuralını buluyoruz. Kural hakkındaki görüşün nedir?*
> ***Ö9:*** *Kibrit çöpü adım sayısının dört katı. Bunu arkadaşlarımın yaptığı açıklamadan anladım ama bu n. adım ne demek? Nasıl bilmediğimiz bir adımda 4n kibrit çöpü oluyor? Bu bana çok karışık geliyor.*
> ***Araştırmacı:*** *Anlaşılan sen n gösteriminin ne anlama geldiğini anlamadın.*
> ***Ö9:*** *Evet…*

Araştırmacı: *n örüntüde cebirsel genelleme yapmak için kullandığımız bir değişken. Genel terimde n'ye bulmak istediğim adımın değerini vererek oluşan kibrit çöpü sayısını buluyoruz.*

Ö9: *Yani n farklı değerler alabiliyor.*

Araştırmacı: *Evet…*

Yaşanan diyaloglardan da anlaşılacağı gibi öğrencinin "n" notasyonunu kavrayamadığı için örüntünün genellemesini yapamadığı görülmektedir. Öğrencinin bu yüzden örüntü kuralını sözel olarak ifade edebilse bile cebirsel bir ifade olarak yazamadığı tespit edilmiştir.

Bu öğretim dizisinin diğer bir etkinliğinde günlük hayat problemi bağlamında sözel olarak temsil edilen bir örüntünün ilk üç adımında karşılaşılan terimler sorgulanmış, etkinliğin devamında ise verilen bir terime örüntünün hangi adımında karşılaşılacağı sorgulanmıştır. Bu amaçlar doğrultusunda Şekil 4.43'te gösterildiği gibi sözel olarak ifade edilen örüntü sorusu etkinliği öğrencilere sunulmuştur.

Tahta oyuncak imalatı yapan bir işçi atölyesinde 1 saatte 5 adet oyuncak üretilmektedir. Bu oyuncakları üreten işçi günde 10 saat çalışmaktadır. Buna göre bu oyuncak atölyesinde

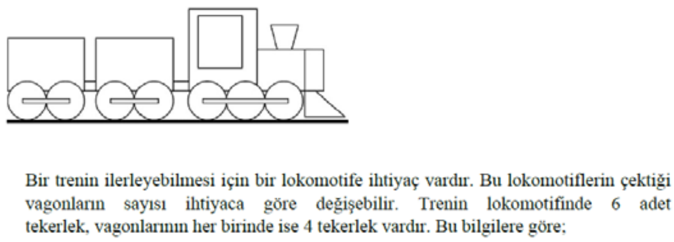
a) 1 günde üretilen tahta oyuncak sayısını işlem yaparak bulunuz.
b) 2günde üretilen tahta oyuncak sayısını işlem yaparak bulunuz.
c) 3 günde üretilen tahta oyuncak sayısını işlem yaparak bulunuz.
d) Bu atölyede 500 tahta oyuncak üretilebilmesi için işçinin kaç gün ve kaç saat çalışması gerekmektedir? Açıklayınız.
e) Üretilen oyuncak sayısı ile harcanan saat sayısı arasındaki nasıl bir ilişki vardır? Bu ilişkiyi gösteren örüntünün kuralını bulunuz. Bu kurala nasıl ulaştığınızı açıklayınız.

Şekil 4.43 Öğretimin İlk Etabında Sözel Olarak İfade Edilen Örüntü Sorusu

Etkinlikte sorulan ilk soruda Ö12, "*1 saatte 5 oyuncak yapabiliyorsa 10 saatte 10.5=50 oyuncak yapar."* açıklamasını yaparak doğru sonuca ulaşmıştır. Etkinlikteki ikinci soruyu B odak öğrencisi, *"Bir günde 50 oyuncak yapılırsa 2 günde 50.2=100 oyuncak yapar."* şeklinde doğru yanıtlamıştır. Sınıftaki öğrencilerin genelinin, üçüncü günde üretilen oyuncak sayısının 150 olacağı sonucuna ulaştıkları gözlemlenmiştir.

İlk üç soruyu kolayca yanıtlayan öğrencilere 500 oyuncak yapılabilmesi için kaç gün gerektiği sorulmuştur. Ö4'ün, *"Her gün 50 oyuncak yapılıyor. 500 oyuncak için kaç gün gerektiği sorulmuş. 50'yi 10 ile çarparsak 500 eder. Cevap 10 gün. Eğer saat olarak istenirse 1 günde 10 saat çalışmış, 10 günde 100 çalışmıştır."* ifadesi ile doğru sonuca ulaştığı gözlemlenmiştir. Ardından üretilen oyuncak sayısı ile harcanan saat sayısı arasında nasıl bir ilişki olduğu ve bu ilişkiyi kullanarak oluşturulan örüntünün kuralının ne olduğu sorgulanmıştır. C odak öğrencisi, *"Bir saatte 5 oyuncak üretiliyor. Üretilen oyuncak sayısını saatin 5 katını alarak buluyoruz. Örüntünün genel terimi 5n olur."* ifadesi ile örüntünün kuralını hem sözel hem de cebirsel olarak doğru ifade edebilmiştir. Daha önceki örneklerde genel terimi bulmakta zorlanan C odak öğrencisi bu soruda zorlanmadan nasıl bulduğu sorulduğunda, *"Önceki örneklerde sayılar ve şekiller bazen kafamı karıştırıyordu. Burada oyuncak, saat gibi şeyler kullanmak bana daha anlaşılır geldi."* ifadesi ile görüşünü belirtmiştir. Öğrencinin bahsettiği gibi daha aşina olunan ve günlük hayatta sık karşılaşılan durumlardan örneklerin verilmesi, birçok konuda olduğu gibi örüntü kuralı bulunmasında da öğrencilerin daha kolay fark etmelerini sağladığı görülmüştür. Üretilen oyuncak sayısı bulunurken yapılan gün sayısı çarpı beş işleminin, genel terim bulunurken "5.n" ifadesini daha görünür hale getirdiği tespit edilmiştir.

Öğretim dizisinde uygulanan diğer bir etkinlikte öğrencilerden Şekil 4.44'te gösterilen trenin tekerlek sayıları ile oluşturulan örüntüyü keşfetmeleri beklenmiştir. Etkinlikte üst üste eklenerek devam eden ve her adımda değişmeden sabit kalan, terimleri kolaylıkla fark edilebilen bir örüntü seçilmiştir.



Şekil 4.44 Öğretimin İlk Etabında Kullanılan Tren Sorusu

Öğrenciler trenin tekerlek sayısının vagonlar eklendikçe arttığını kolaylıkla fark edebilmiştir. Bu artışın nasıl gerçekleştiği sorgulandığında Ö4, *"Her vagon eklendiğinde 4 tekerlek daha artmıştır."* ifadesiyle örüntüdeki artış miktarına dikkat çekerek her adımda artışın aynı olduğunun farkına varmıştır. Her adımda değişmeden sabit kalan terimin ne olduğu sorgulandığında B odak öğrencisi, *"Tren kaç vagondan oluşursa oluşsun bir tane lokomotifi vardır. Lokomotifin 6 tane tekerleği var. Bu 6 tekerlek her adımda değişmeden sabit kalıyor."* yanıtıyla örüntünün sabit teriminin 6 olması gerektiğini ifade etmiştir. Bu durum sınıftaki diğer öğrenciler tarafından da fark edilmiştir.

Sınıftaki öğrencilerle birlikte örüntünün ilk beş adımı ve bu adımlara karşılık gelen tekerlek sayıları tablo temsili şeklinde Çizelge 4.1'de gösterildiği gibi aktarılmıştır.

Çizelge 4.1 Tekerlek Sayısı ile Oluşturulan Örüntüdeki İlişkiyi Gösteren Çizelge

Adım sayısı (vagon sayısı)	**Adımlarda karşılaşılan sayı (tekerlek sayısı)**	**İlişki**
1	10	6+4.1
2	14	6+4.2
3	18	6+4.3
4	22	6+4.4
5	26	6+4.5

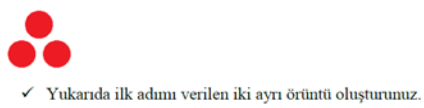
Çizelge öğrencilerle birlikte doldurulurken Ö14, *"Birinci adımda bir vagon ve lokomotif olduğundan toplam 6+4.1 tekerlek olur."* şeklinde görüşünü bildirmiştir. Örüntünün ikinci adımı için Ö1, "İkinci *adımda 2 vagon var. Vagon sayısını 4 katı kadar tekerlek olacak. Bir de lokomotif var. Toplam tekerlek sayısı 4.2+6 olur."* yanıtını vermiştir. Üçüncü adım için Ö9, *"3 vagonlu trende bir lokomotif olacak, 6 teker var. Üç tane vagonda 3.4 tekerlek var."* ifadesini kullanmıştır. Aynı şekilde sınıf genelinde görüşler alınarak dördüncü ve beşinci adımlar da doldurularak tablo temsiline son şekli verilmiştir.

Verilen örüntüye ait tablo oluşturulduktan sonra ilişki sütununda değişmeden kalan ve değişen değerlerin neler olduğu sorgulanmıştır. A odak öğrencisi, *"Her adımda lokomotifin tekerlerinden dolayı eklediğimiz +6 ve her bir vagondaki tekerleklerin sayısını bulurken çaptığımız 4 değişmemiştir. Fakat vagon sayısını değiştirmek için 4 ile çarptığımız 1, 2, 3, 4, 5 sayıları her adımda değişmiştir."* ifadesini kullanarak örüntünün adımlarında değişmeden kalan ve değişen terimleri ifade etmiştir. A odak öğrencisinin ifade ettiği sabit ve değişen terimlerin sınıf geneli tarafından fark edildiği tespit edilmiştir.

Örüntünün genel terimini bulmaya yönelik olarak "n." adımda karşılaşılan tekerlek sayısı sorulduğunda, adım sayısı ile adımlarda karşılaşılan tekerlek sayısı arasındaki ilişkinin farkına varan öğrencilerin rahatlıkla doğru yanıtı verebildiği gözlemlenmiştir. Ö8'in, *"n. adımda n tane vagon olacak. Her vagonda 4 tekerlek olduğu için 4.n tane tekerlek ile lokomotifte bulunan 6 tekerleği toplarsak örüntünün* *genel terimi 4n+6 olur."* ifadesini kullanarak örüntünün genel terimini doğru şekilde bulduğu gözlemlenmiştir. Bunun dışında sınıfta birkaç öğrencinin ilişkileri kullanmak yerine verilen örüntüyü sayısal değerlere çevirdiği gözlemlenmiştir. Örüntüyü, "10, 14, 18, 22, 26…" şeklinde sayı örüntüsüne dönüştüren öğrencilerden bazılarının yanlış sonuca ulaştığı görülmüştür. Bunun dışında Ö16 örüntünün genel terimini 10n olarak bulmuştur. Bu hatalı sonuca nasıl ulaşıldığı sorgulandığında, "İlk *terimde 10 var. 10.1=10 ilk terim için denedim. Bu da doğru çıktı."* şeklinde yanıtlamıştır. Öğrencinin tek bir örnekten hareket ederek aşırı genelleme yaparak hatalı yanıt verdiği tespit edilmiştir.

Ardından, *"Trenin 46 tekerleği olduğu bilindiğine göre bu tren kaç vagondan oluşmuştur?"* sorusu öğrencilere yöneltilmiştir. Genel terime ulaşabilen öğrencilerin soruya kolaylıkla doğru yanıt verdiği gözlemlenmiştir. Ö3,*"Genel terim 4n+6'da n yerine ne yazarsak 46 sonucuna ulaşırız demek istiyor. 4n+6=46 olabilmesi için denklemi çözersek n=10 olur."* ifadesi ile doğru sonucun 10. terim olması gerektiğini ifade etmiştir. Çok az da olsa bazı öğrencilerin "10, 14, 18, 22, 26, 30, 34, 38, 42, 48" şeklinde örüntüyü istenilen terimi bulana kadar devam ettirerek sonuca ulaştığı tespit edilmiştir. Bu şekilde örüntüyü sayı örüntüsüne çevirerek sonuç bulmaya çalışan öğrencilerin genel terimi bulmada da başarısız oldukları görülmüştür.

Öğretim dizisine ilk adım verildikten sonra öğrenciler tarafından farklı şekillerle devam etme fırsatı sunan bir etkinlikle devam edilmiştir. Şekil 4.45'te ilk adımı verilen örüntünün diğer adımlarının öğrenciler tarafından inşa edilmesi istenmiştir.



Şekil 4.45 Noktalarla Oluşturulan Şekil Örüntüsünün İlk Adımı

İlk adımları aynı olan iki ayrı örüntü fikri bazı öğrenciler tarafından ilginç bulunmuştur. Araştırmacı tarafından tartışmaya açılan etkinliğe B odak öğrencisinin görüşü alınarak başlanmıştır. Bu öğrenci *"İlk adımda verilen üç tane dairenin altına her adımda ikişer daire eklenerek devam edebiliriz."* şeklinde görüşünü belirtmiş ve bu görüşe ait çizim Şekil 4.46'da gösterildiği gibi oluşturularak incelenmiştir.

Şekil 4.46 B Odak Öğrencisinin Oluşturduğu Şekil Örüntüsü

B odak öğrencisinin oluşturduğu örüntünün genel terimini bulması istendiğinde, *"Üstteki daireler her adımda sabit olan daireler. Bu dairenin altına her adımda adım sayısının iki katı kadar daire eklenerek ilerliyor. Bu örüntünün genel terimi 2n+1 olur."* şeklinde doğru yanıt verdiği gözlemlenmiştir. Sınıfta farklı bir örüntü oluşturan olup olmadığı sorgulandığında, yanıt vermek isteyen öğrenci sayısının üç veya dört kişi ile sınırlı olduğu gözlemlenmiştir. Söz hakkı alan A odak öğrencisi, *"Ben aşağıdaki iki daireyi sabit tuttum ve her adımda üstüne birer daire ekleyerek örüntümü oluşturdum."* şeklinde görüşünü ifade etmiştir. A odak öğrencisinin ifadesi ile ilgili çizim Şekil 4.47'deki gibi oluşturularak incelenmeye başlanmıştır.

Şekil 4.47 A Odak Öğrencisinin Oluşturduğu Şekil Örüntüsü

A odak öğrencisi oluşturduğu örüntünün genel terimini bulurken, *"Ben alttaki iki dairenin üstüne her adımda birer daire ekleyerek örüntüyü oluşturdum. Benim örüntümün genel terimi n+2 olur."* ifadesini kullanarak örüntünün genel terimine ulaştığı görülmüştür. Araştırmacı tarafından farklı bir örüntünün oluşturulup oluşturulmadığı sorgulandığında çekingen bir tavırla C odak öğrencisi, *"Ben tam emin değilim ama her adımda dörder daire eklesek örüntü oluşturabiliriz diye düşünüyorum. Ama ilk adımda dört tane daire yok bu kafamı karıştırıyor."* ifadesi ile görüşünü belirtmiştir. Öğrencinin bildirdiği görüş ile ifade ettiği örüntü Şekil 4.48'de gösterildiği gibi çizilmiş ve incelenmeye başlanmıştır.

Şekil 4.48 C Odak Öğrencisinin Oluşturduğu Şekil Örüntüsü

Yukarıda verilen örüntünün genel terimi bulunurken sınıfta yaşanan diyaloglar şu şekilde gerçekleşmiştir:

Araştırmacı: *Bahsettiğin görüşle ilgili yaptığımız çizim bir örüntü oluşturuyor mu?*

C odak öğrencisi: *Evet oluşturuyor.*

Araştırmacı: *Bu örüntüdeki adımlar ve adımlarda karşılaşılan daire sayısı hakkında nasıl bir görüşün var?*

C odak öğrencisi: *Benzer örüntülerde dörder dörder artması durumunda adım sayısının dört katı şeklinde bir ifade kullanıyorduk ama burada ilk adımda dört daire yok, o benim kafamı biraz karıştırıyor.*

Araştırmacı: *Anladım, benzer olanlarda dört katını alıp sabit olan bir sayı varsa ekleme yoluna gitmiştik. Peki, bu sabit terim hep eklenir mi? Çıkarıldığı durumlarla ilgili bir örüntü olabilir mi?*

C odak öğrencisi: *Evet… Aslında sabit terim eklenir diye bir şart yok. Bazı durumlarda sabit terim de olmuyordu.*

Araştırmacı: *Mesela adım sayısının dört katı alındıktan sonra sabit terim çıkarılarak olamaz mı?*

C odak öğrencisi: *Galiba anladım! Sanki burada adım sayısının dört katı alındıktan sonra hep bir çıkartılıyor. O zaman örüntünün genel terimi 4n-1 olur.*

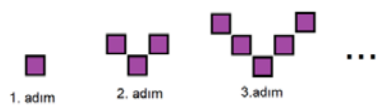
Yaşanan diyaloglardan da anlaşılacağı gibi genel terim yazılırken sabit terimlerin çıkarıldığı durumlar öğrenciler tarafından ilk başta zor olarak algılanmasına rağmen, yapılan müdahale sonrasında örüntünün genel terimine nasıl ulaşıldığının anlaşıldığı görülmüştür. Örüntünün genel terimi bulunurken adımlar ile adımlarda karşılaşılan sayılar arasındaki ilişkiye odaklanmanın önemi bir kez daha vurgulanmıştır. Sadece örüntüdeki sayılara odaklanan öğrenciler için aynı sayı ile başlayan farklı örüntülerin olamayacağı fikrinin, adımlar ile adımlarda karşılaşılan sayı arasındaki ilişkiye odaklanılması sonucunda değişikliğe uğradığı tespit edilmiştir.

Bu öğretimin ilk etabında uygulanan etkinliklerin işleyen ve işlemeyen noktaları tespit edilmeye çalışılmıştır. Öğretim esnasında öğrencilerin zorlandıkları noktaları ve sahip oldukları kavram yanılgıları ortaya çıkarılmıştır. Yapılan bu tespitler doğrultusunda öğretim dizisinin tekrar etabında uygulanmak üzere Şekil 4.32'de gösterilen kararlar alınmıştır.

4.3.2 İkinci Ara Klinik Görüşmelere Ait Bulgular

İkinci öğretim dizisinin ilk etabında yapılan öğretimden sonra odak öğrencilerin bu süreçte konuyu zihinlerinde nasıl yapılandırdıklarını daha ayrıntılı olarak ortaya koymak amacıyla ikinci ara klinik görüşmeler düzenlenmiştir. İkinci ara kinik görüşmelerde "7.2.1.3. Sayı örüntülerinin kuralını harfle ifade eder, kuralı harfle ifade edilen örüntünün istenilen terimini bulur." kazanımı ile ilgili görüşme soruları hazırlanmıştır. Hazırlanan görüşme soruları vasıtasıyla öğrencilerin öğretim esnasında yaptıkları hatalar ve sahip oldukları kavram yanılgılarının daha derinlemesine incelenmesi hedeflenmiştir. Ayrıca öğrencilerin öğretim öncesinde yapılan ilk klinik görüşmelerden sonra yapılan öğretimin, öğrencilerin örüntüler konusundaki fonksiyonel ilişkileri anlama düzeylerine olan etkisi de incelenmeye çalışılmıştır.

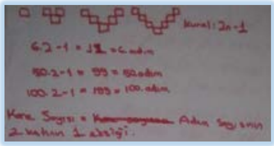
Odak öğrencilere Şekil 4.49'da ilk üç adımı gösterilen şekil örüntüsü sunulmuştur. Öğrencilerden sunulan şekil örüntüsünün, yakın ve uzak adımlarını bulmaları ardından örüntünün kuralına ulaşmaları istenmiştir.



Şekil 4.49 İkinci Ara Klinik Görüşmelerde Sorulan Şekil Örüntüsü

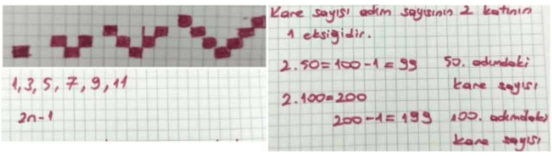
Verilen şekil örüntüsünün görsel analizini yapan A odak öğrencisi, *"Örüntü ilerlerken şeklin en sağ ve en soldaki karelerine birer kare eklenerek devam etmiştir."* ifadesini kullanmıştır. A odak öğrencisinin yaptığı bu görsel analizden sonra, *"Her adımda ikişer kare artarak örüntü devam ediyor. Adım sayısıyla bir ilişki kurduğumda adım sayının iki katı olsa 2, 4, 6, 8… şeklinde devam ederdi. Ama burada hep bir eksiği ile karşılaşıyorum. O zaman kare sayısı adım sayısının iki katının bir eksiğidir."* ifadesi ile bu öğrencinin örüntünün adım sayısı ile adımda karşılaşılan kare sayıları arasındaki fonksiyonel ilişkinin farkına vardığı gözlemlenmiştir. Ardından, *"Kuralı yazarsak n. adımın 2 katının bir eksiğini 2n-1 ile ifade edilir."* ifadesiyle örüntünün kuralını cebirsel olarak da ifade edebilmiştir. Örüntünün 6. adımında karşılaşılan kare sayısı sorgulandığında n yerine 6 yazarak

“6.2-1=11” işlemini yaparak istenilen doğru sonuca ulaşabilmiştir. A odak öğrencisine örüntünün 50. ve 100. adımlarında oluşan kare sayıları sorulduğunda, Şekil 4.50’de gösterildiği gibi 50. adım için “50.2-1=99” ve 100. adım için “100.2-1=199” işlemlerini yaparak doğru sonuçlara ulaşabilmiştir. A odak öğrencisinin yakın ve uzak adımları temel fonksiyonel düzeyde hesaplayabildiği görülmüştür. A odak öğrencisi örüntüdeki adımlar ile adımlarda karşılaşılan kare sayıları arasındaki fonksiyonel ilişkinin farkına varabilmiştir. Öğretimin ilk etabı gerçekleştirilmeden önce yapılan ön klinik görüşmelerde A odak öğrencisi yakın ve uzak adımlar için yinelemeli-genel düzeydeydi. Yapılan öğretim etkinliklerinin öğrencinin fonksiyonel ilişkileri anlama düzeyinde olumlu sonuçlar doğurduğu tespit edilmiştir.



Şekil 4.50 İkinci Ara Klinik Görüşmelerde A Odak Öğrencisinin Eylemi

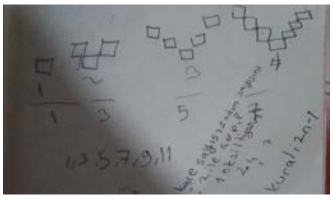
B odak öğrencisi verilen şekil örüntüsünün görsel analizini yaparken örüntünün ilk üç adımını inceledikten sonra örüntünün adımlarında karşılaştığı kare sayılarını yazarak sayı örüntüsüne çevirmiştir. *“Her adımda iki kare eklenerek devam ediyor.”* ifadesini kullanarak örüntünün ilk altı adımını oluşturmuştur. Örüntünün yakın adımlarını bulurken terimler arasındaki ortak farkı bir önceki terimin üstüne ekleyerek ilerlediği tespit edilmiştir. Bu eylemi incelendiğinde odak öğrencinin yakın adımları bulurken yinelemeli strateji kullandığı tespit edilmiştir. Örüntü kuralının bulunması aşamasında, B odak öğrencisi, *“Her adımda iki kare üstüne eklenerek devam ediyor. Adımlardaki kare sayısını bulurken adım sayısının iki katını almalıyız. Fakat burada her adımda adım sayısının iki katı değil bir eksiği var. Örüntünün kuralı adım sayısının iki katının bir eksiği şeklinde olacaktır.”* ifadesini kullanarak örüntünün kuralını sözel olarak ifade etmiştir. B odak öğrencisinin örüntünün kuralını sözel olarak ifade ettikten sonra cebirsel olarak “2n-1” olarak yazdığı gözlemlenmiştir. Ardından örüntünün uzak adımlarından 50. ve 100. adımlardaki kare sayıları sorulduğunda, *“Örüntünün genel terimi 2n-1’de 50. adımı bulmak için n yerine 50 yazarsak 2.50-1=99, 100. adımı bulurken n yerine 100 yazarsak 2.100-1=199 bulunur.”* ifadesini kullanmıştır. B odak öğrencisinin Şekil 4.51’de gösterildiği gibi uzak adımlara ulaşabildiği tespit edilmiştir. Uzak adımlara ulaşırken yakın adımlarda kullandığı yinelemeli stratejiyi kullanmak yerine fonksiyonel ilişkileri kullanarak sonuçları bulduğu tespit edilmiştir. B odak öğrencisi ile yapılan ön klinik görüşmede örüntülerin yakın adımlarını bulurken yinelemeli genel düzeyde olduğu görülmüştü. Yapılan öğretim sonrasında örüntü genellemelerinde yakın adımlar için düzeyinin değişmediği tespit edilmiştir. B odak öğrencisinin örüntü genellemelerinde uzak adımlara ulaşırken ön klinik görüşmelerde yinelemeli genel düzeyde iken ara klinik görüşmelerde temel fonksiyonel düzeyde olduğu görülmüştür. Bu durum B odak öğrencisi için örüntülerin genellemesinde uzak adımlar için yapılan öğretimin olumlu sonuçlar verdiğini göstermektedir. Öğretim esnasında da derse aktif katılan öğrencinin fonksiyonel ilişkileri anlamlandırmada yol kat etmeye başladığı sonucuna ulaşılmıştır.



Şekil 4.51 İkinci Ara Klinik Görüşmelerde B Odak Öğrencisinin Eylemi

C odak öğrencisi ilk üç adımı verilen şekil örüntüsünün dördüncü adımını kendisi çizdikten sonra şeklin altına adım sayılarını ve bu adımda karşılaşılan kare sayılarını yazarak şekil örüntüsünü, "1, 3, 5, 7, 9, 11…" şeklinde sayı örüntüsüne çevirmiştir. "*Örüntüde her adımda iki kare artarak devam ediyor.*" ifadesini kullanarak örüntüyü kendi cümleleriyle açıklamaya çalışmıştır. Bu işlemler sırasında C odak öğrencisinin şekilsel analizlerden çok sayısal analizler yaptığı gözlemlenmiştir. Odak öğrencinin ön klinik görüşmede olduğu gibi ara klinik görüşmede de örüntü genellemelerinde yakın adımlar için yinelemeli genel düzeyde olduğu tespit edilmiştir. Örüntünün kuralını bulurken, *"Her adımda 2 kare arttığından 2 ile çarpma işlemi kullanacağız ama birinci adımda bir kare var. O zaman 1 eksiltmeliyim. İkinci adımda 2'nin iki katını alırsam 4 ama bir eksiği 3 var, burası da sağladı. Örüntünün kuralı 2 ile çarp bir eksilt olmalı."* ifadesini kullanmıştır. Ardından örüntünün genel terimini, *"n'yi 2 ile çarpıp 1 eksiltirsek 2n-1 olur."* ifadesini kullanarak "2n-1" olarak yazmıştır. C odak öğrencisinin genel terimi bulurken görsel yaklaşımlardan uzak olarak sayısal yaklaşımlar kullanarak ulaştığı gözlemlenmiştir. Örüntünün uzak adımlarını bulmak için istenen 50. ve 100.

adımlardaki oluşan kare sayılarını Şekil 4.52'de gösterildiği gibi "2.50-1=99" ve "2.100-1=199" işlemlerini yaparak doğru hesaplamıştır. Yakın adımlarda olduğu gibi uzak adımlarda görsel yaklaşımları kullanmadan sadece sayısal yaklaşımlar kullanarak örüntünün genel terimini bulmuştur. C odak öğrencisi temel seviye fonksiyonel ilişkiler kullanmış olsa da fonksiyonel ilişkideki karşılaştırılan girdi ve çıktılara ait nicelikleri tanımlamada zorlanmıştır. Ancak örüntünün tüm basamakları üzerine genelleyemese de fonksiyonel ilişkiyi fark edebilmiştir. Dolayısıyla C odak öğrencisinin örüntü genellemede uzak adımlar için özel fonksiyonel düzeyde olduğu tespit edilmiştir. Ön klinik görüşmelerde, uzak adımlar için yapılan genellemelerde temel yinelemeli düzeyde olan C odak öğrencisinin, gelişim göstererek özel fonksiyonel düzeye çıktığı gözlemlenmiştir. Fakat öğrencinin fonksiyonel ilişkiyi anlamada zorlandığı ve anlamsal ilişki kurmakta zorlandığı tespit edilmiştir. Özellikle genel terim yazarken deneme yanılma yoluyla adımlardaki sayıları işlemlerle test ederek ilerlediği gözlemlenmiştir. Bu açıdan tekrar öğretim etabında fonksiyonel ilişkinin desteklenmesi adına etkinliklerin düzenlenmesi kararı alınmıştır.



Şekil 4.52 İkinci Ara Klinik Görüşmelerde C Odak Öğrencisinin Eylemi

4.3.3 İkinci Öğretim Dizisinin Tekrar Etabına Ait Bulgular

İkinci öğretim dizisinin ilk etabında yapılan öğretim esnasında ve odak öğrencilerle gerçekleştirilen ikinci ara klinik görüşmelerde elde edilen bulgular neticesinde bazı hata türlerine ve kavram yanılgılarına rastlanması sebebiyle tekrar amaçlı bir öğretim planlanmıştır. Planlanan bu öğretimde "7.2.1.3. Sayı örüntülerinin kuralını harfle ifade eder, kuralı harfle ifade edilen örüntünün istenilen terimini bulur." kazanımını içeren etkinlikler vasıtası ile öğrencilerde tespit edilen eksiklikler giderilmeye çalışılmıştır.

Öğretimin ilk etabında ve klinik görüşmeler esnasında bazı öğrencilerin şekil örüntülerinde modellerden çok sayılar arasındaki ilişkiye odaklandığı, "n" gösterimini anlamlandıramadığı, örüntüleri genellerken örüntünün terimleri arasında fonksiyonel ilişki yerine terimler arasındaki farka odaklandığı görülmüştür. Bunun yanında, öğrencilerin örüntünün sabit farkını bulduktan sonra bu farkı katsayı olarak ele alıp genel terim yazma eğiliminde oldukları görülmüştür. Bahsedilen bu durumların önüne geçmek ve eksiklikleri gidermek amacıyla iki ders saati boyunca uygulanacak tekrar öğretim etabı planlanmıştır. Öğretimin ilk etabı ve klinik görüşmeler esnasında elde edilen bulgular vasıtasıyla alınan öğretim kararları tekrar öğretim etabında uygulanmıştır. Ayrıca öğrencilerin zihinsel ve fiziksel eylemleri de gözlemlenerek gelişimleri takip edilmeye çalışılmıştır.

Tekrar öğretim etabında şekil örüntülerinde şekilsel analizlerin yapılması, örüntülerde değişen ve sabit kalan terimlerin farkına varılması ve örüntülerdeki fonksiyonel ilişkilerin anlaşılması ile yakın ve uzak adımlar için genellemelerin yapılması amaçlanmıştır. Bu amaçlar doğrultusunda Şekil 4.53'te gösterilen benzer adımlardan oluşan iki şekil örüntüsü verilmiştir. Öğrencilerden bu örüntülerin benzer ve farklı noktalarını tespit ederek örüntülerin yakın adımlarını, uzak adımlarını ve genel terimlerini bulmaları istenmiştir.

Şekil 4.53 Artış Miktarları Aynı Olan Farklı Şekil Örüntüleri

Etkinliğe başlarken öğrencilerden ilk verilen örüntüyü tanımlamaları istenmiştir. Ö2, ilk örüntüyü *"Birinci adımında 5 kare, ikinci adımında 9 kare, üçüncü adımında 1 kare var."* şeklinde ifade etmiştir. Örüntünün nasıl ilerlediği sorgulandığında ise C odak öğrencisi, *"Her adımda köşelerinden dörder kare eklenerek ilerliyor."* ifadesi ile örüntüdeki adımlar arasındaki artış miktarı hakkındaki görüşünü bildirmiştir. B odak öğrencisi ise, *"Ortada bir kırmızı kare var her adımda uç köşelerden olmak üzere dörder kare ekleniyor."* şeklinde sabit kalan kare ve her adımda değişen karelere vurgu yaparak görüşünü ifade etmiştir.

İkinci örüntünün nasıl ilerlediği sorgulandığında ise öğrencilerden ilk örüntüdeki yanıtlara benzer yanıtlar gelmiştir. Ö11, *"İlk örüntüde olduğu gibi bu örüntüde de her adımda dörder kare eklenerek artmış. Aslında aynı örüntü gibi ama 1. adımları farklı. Birinci adımda bir kare var sonra dörder kare eklenerek ilerliyor. İlk adımı saymazsak aynı şekilde devam etmiş."* şeklinde görüşünü belirtmiştir.

Öğrencilerin iki örüntü arasında benzer durumların olduğu fakat başlangıç adımlarının farklı olduğunu fark ettiği gözlemlenmiştir. Öğretimin ilk etabında "y=mx+n" şeklinde örüntünün kuralının yazımında zorlanmayan öğrencilerin "y=mx-n" şeklinde verilen örüntülerin kuralının yazılmasında zorlandığı tespit edilmişti. Bu durum göz önüne alınarak öncelikle ilk örüntünün kuralı bulunduktan sonra iki örüntü arasındaki farktan yola çıkarak ikinci örüntünün kuralının yazılması hedeflenmiştir. Bu hedef doğrultusunda sınıfta örüntülerin kuralları bulunurken geçen diyaloglar şu şekilde gerçekleşmiştir:

> ***Araştırmacı:*** *Örüntülerin kuralını sözel olarak ifade ederken sadece artış miktarına odaklanmamızın bize yeterli bilgiyi vermediğini daha önce görmüştük. Bu bakımdan sadece artış miktarına göre bu iki örüntü aynıdır. Ama biz adım sayıları ve adımlarda karşılaştığımız kare sayıları arasındaki ilişkileri görebilirsek kuralı istenilen seviyede ifade edebiliriz. İlk örüntümüzü bu şekilde değerlendirirsek kuralını sözel olarak nasıl ifade edebiliriz?*
>
> ***B odak öğrencisi:*** *İlk örüntüde ortada sabit bir kare var. Her adımda köşelerden dört kare ekleniyor.*
>
> ***Araştırmacı:*** *Evet doğru… Kuralı sözel olarak ifade eder misin?*
>
> ***B odak öğrencisi:*** *Adım sayısının dört katı kadar kare ekleniyor. Başlangıçtaki kareyi de ekliyoruz, böylece kare sayısı bulunuyor. Her adımda kare sayısı adım sayısının dört katının bir fazlası oluyor.*
>
> ***Araştırmacı:*** *Evet ifaden doğru... Şimdi n. adım için genel terimi söyleyebilir misin?*
>
> ***B odak öğrencisi:*** *n. adımda n'nin dört katının bir fazlası 4n+1'dir.*
>
> ***Araştırmacı:*** *Şimdi ikinci örüntünün ilk örüntüden farkını kim söylemek ister?*
>
> ***Ö11:*** *İkinci örüntü ilk örüntünün bir adım öncesi gibi başlamış.*
>
> ***Araştırmacı:*** *Evet doğru… Peki, bu durum kare sayısını ikinci örüntüde nasıl etkilemiş?*
>
> ***Ö11:*** *İkinci örüntüde her adımda ilk örüntüye göre dört eksik kare sayısıyla karşılaşıyoruz. Örneğin ilk örüntüde birinci adımda 5 kare var, ikinci örüntüde 1 kare var.*

Araştırmacı: *İkinci örüntüyü de ilk örüntü gibi sözel olarak ifade edebilir misin?*

Ö11: *İkinci örüntüde kare sayısı adım sayısının dört katının üç eksiği olur.*

A odak öğrencisi: *Ben şöyle buldum. İlk örüntüde kare sayısı adım sayısının dört katının bir fazlasıydı. İkinci örüntüde her adımda dört eksik oluyordu. Yani kare sayısı adım sayısının dört katının bir fazlasının dört eksiği oluyor. Toparlarsak kare sayısı adım sayısının dört katının üç eksiği oluyor.*

Araştırmacı: *Bu güzel bir açıklama oldu. Şimdi kim genel terimi söylemek ister?*

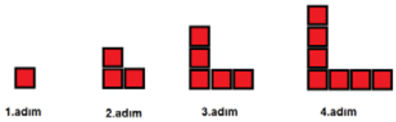
A odak öğrencisi: *n. terimde 4n -3 kare olur.*

Yaşanan diyaloglardan anlaşılacağı gibi öğrencilerin iki örüntünün benzer ve farklarından yola çıkarak "y=mx-n" şeklindeki örüntünün kuralını sözel olarak ifade ettikten sonra genel terimine ulaşabildikleri gözlemlenmiştir.

Ardından etkinliğe yakın adımların bulunması ile devam edilmiştir. Araştırmacı, yakın adımlar için yinelemeli strateji yerine, fark edilen fonksiyonel ilişkileri kullanarak öğrencilerin ilk altı adıma kadar örüntüyü devam ettirmelerini istemiştir. Ö8, *"İlk örüntüde 4. adımda dördün dört katının bir fazlasını alırsak 17 kare, beşinci adımda beşin dört katının bir fazlası 21 kare ve altıncı adımda altının dört katının bir fazlası 25 kare bulunur."* şeklinde ifade ederek ilk örüntünün yakın adımlarına ulaştığı gözlemlenmiştir. B odak öğrencisinin, "*İkinci örüntüde adımlar için dört katının bir eksiğini alacağız. Dördüncü adımda 4.4-1=15, beşinci adımda 4.5-1=19 ve altıncı adımda 4.6-1=23 kare vardır."* ifadesiyle ikinci örüntünün yakın adımlarına ulaştığı gözlemlenmiştir. Öğrencilerin vermiş olduğu yanıtlardan da anlaşıldığı gibi yakın adımlar için örüntülerin genellemesinde fonksiyonel ilişkilerin kullanıldığı tespit edilmiştir.

Etkinlikte son olarak örüntülerin uzak adımı olan 100. adımlarda karşılaşılan kare sayıları sorgulanmıştır. C odak öğrencisi, *"İlk örüntüde 100. adımda yüzün dört katının bir fazlasını alırsak 401 tane kare ile karşılaşırız."* ifadesi ile doğru sonuca ulaşmıştır. Ö1, *"İkinci örüntüde genel terimi 4n-1 bulmuştuk. Genel terimdeki n* *yerine 100 yazarsak 4.100-1=400-1=399 kare ile karşılaşırız."* ifadesi ile doğru sonuca ulaşmıştır. Verilen yanıtlardan da anlaşılacağı gibi öğrencilerin öğretimin ilk etabındaki etkinliklerde, uzak adımlarda kullandığı yinelemeli stratejiyi uygulamak yerine fonksiyon ilişkileri kullandığı tespit edilmiştir. Bu yönüyle yapılan öğretimin öğrencilerin örüntü genellemeleri yaparken fonksiyonel ilişkileri anlama düzeylerinde gelişmeye neden olduğu tespit edilmiştir.

Bir önceki etkinlikte "y=mx-n" şeklinde oluşturulan örüntülerde deneyim kazanan öğrencilerin fonksiyonel ilişkileri daha rahat görebilmeleri adına tablo temsilinden yararlanmalarını teşvik edecek yeni bir etkinlik sunulmuştur. Bu amaçla öğrencilerden Şekil 4.54'te ilk dört adımı verilen şekil örüntüsünün incelenmesi istenmiştir.



Şekil 4.54 Öğretimin Tekrar Etabında Kullanılan Şekil Örüntüsü

Öğrencilerden verilen şekil örüntüsünü tanımlamaları istenmiş ve örüntüdeki adımlar arasındaki değişimin nasıl gerçekleştiği sorgulanmıştır. A odak öğrencisi, *"Örüntüdeki birinci adımda kullanılan kare her adımda sabit kalıyor. Bu sabit karenin üstüne ve sağına her adımda birer kare eklenerek ilerliyor."* şeklinde görüşünü bildirmiştir. B odak öğrencisi bu görüşe ilave olarak, *"Burada ilk adımda bir eklenme olmuyor kare eklenmesi ikinci adımdan başlamış. Yani eklenen kare sayısı adım sayısının iki katı değil. Bir önceki adım sayısının iki katı. Örneğin ikinci adımda bir sabit kareye eklenen kare sayısı bir önceki adım sayısının iki katı kadar olan 2 karedir."* şeklinde görüşlerini ifade etmiştir.

Örüntüdeki adımlar arasındaki değişimler ifade edildikten sonra örüntüye ait tablonun doldurulması için öğrencilerin görüşleri alınmaya başlanmıştır. B odak öğrencisi, *"Örüntünün birinci adımında bir önceki adımın yani sıfırıncı adımın dört katı kare 4.0=0 olduğundan kare eklenmemiş. Sabit bir kare vardı onu ekliyoruz. Toplam kare sayısını 4.0+1=1 ile buluruz."* şeklinde ifade ederek tablonun birinci satırı hakkındaki görüşünü belirtmiştir. A odak öğrencisi, *"İkinci adımda 4.(2-1)=4.1=4 kare ekleniyor sabit kareyi de eklersek 4+1=5 kare olur."* şeklinde ifadesi ile tablonun ikinci satırı hakkındaki görüşünü belirtmiştir. Ö14, *"Üçüncü adımda bir* *önceki adım sayısı olan ikinin dört katı kadar kare sabit karenin üzerine ekleniyor. Toplam 4.(3-1)+1=9 kare."* ifadesi ile tablonun üçüncü satırı hakkında görüşünü belirtmiştir. Ö1,*"Dördüncü adımda 4.(4-1)+1=4.3+1=12+1=13 kare vardır."* ifadesi ile dördüncü adım hakkındaki görüşünü ifade etmiştir. Öğrencilerin tablo hakkındaki bildirdikleri görüşler dikkate alınarak Şekil 4.55'te gösterilen üç sütunlu tablo oluşturulmuştur.

Adım sayısı	İlişki	Adımlarda karşılaşılan kare sayısı
1	4·(1-1) +1	0+1 =1
2	4·(2-1) +1	4+1 =5
3	4. 3-1) +1	8 + 1 =9
4	4.(4-1)+1	12 + 1 =13
...	...	...
n		

Şekil 4.55 Tekrar Etabında Kullanılan Şekil Örüntüsünün Tablo Temsili

Tablonun ilk dört adımındaki ilişkiler yerine yazıldıktan sonra öğrencilerden örüntünün kuralını sözel olarak ifade etmeleri ve genel terimi yazmaları istenmiştir. Ö8, *"Her adımda bir önceki adım sayısının dört katı kadar kare sabit karenin üzerine ekleniyor."* şeklinde, A odak öğrencisi ise, *"Her adımın sonunda adım sayısının dört katının dört eksiğinin bir fazlası kadar kare oluşuyor."* şeklinde örüntünün kuralı hakkındaki görüşlerini belirtmişlerdir. Öğrencilerden örüntünün kuralını sözel olarak ifade etmelerinden sonra genel terimi bulmaları istenmiştir. B odak öğrencisinin, *"Örüntünün n. adımında 4.(n-1)+1 ifadesi ile karşılaşırız. Dağılma özelliği kullanırsak 4.n-4.1+1=4n-4+1=4n-3 örüntünün genel terimidir."* ifadesini kullanarak örüntünün genel terimine ulaştığı gözlemlenmiştir. Bu durum sınıftaki bazı öğrenciler için anlaşılması zor bir durum olarak görülse de genel terimi yazan öğrencilerin çoğunlukta olduğu gözlemlenmiştir.

Örüntünün genel terimine ulaşılmasının ardından, öğrencilerden örüntünün beşinci ve altıncı adımlarındaki kare sayılarına ulaşmaları istenmiştir. C odak öğrencisi, *"Örüntünün kuralı adım sayısının dört katının üç eksiğidir. Beşinci adımda beşin dört katının üç eksiğini alacağız. İşlemini yapalım, 4.(5-1)+1=16+1=17 kare oluşur."* ifadesini kullanarak doğru sonuca ulaşmıştır. Daha önceki yapılan ön ve ara görüşmeler esnasında yakın adımlara yinelemeli stratejileri kullanarak ulaşan C odak öğrencisinin tekrar etabındaki öğretim esnasında yakın adımlara fonksiyonel ilişkileri kullanarak ulaştığı tespit edilmiştir. Ardından yine fonksiyonel ilişkileri kullanarak C odak öğrencisinin 6. adım için "4.(6-1)+1" işlemini yaptıktan sonra 21 kare sayısına ulaştığı gözlemlenmiştir.

Etkinlikte son olarak 50. ve 60. adımlarda karşılaşılan kare sayılarının öğrenciler tarafından bulunması istenmiştir. B odak öğrencisinin, *"Genel terimi 4n-3 olarak bulmuştuk. 50. adım için n yerine 50 yazalım, 4.(50-1)+1= 4.49+1= 196+1= 197 kare ile karşılaşırız."* ifadesini kullanarak kuralı verilen bir örüntünün istenilen adımına ulaştığı gözlemlenmiştir. Verilen örüntünün 60. adımı bulmak için söz alan Ö18'in,*"60. adımda altmışın dört katının üç eksiğini bulacağız. Altmışın dört katı 240'dır. 240'ın üç eksiği 237 olur."* ifadesini kullanarak doğru sonuca ulaştığı gözlemlenmiştir.

Öğrenci yanıtlarından da anlaşıldığı gibi uzak adımlar için örüntü genellemesi yapan öğrencilerin, örüntünün fonksiyonel ilişkisini fark ettikten sonra kolaylıkla istenilen sonuca doğru olarak ulaştıkları tespit edilmiştir. Ayrıca kuralı verilen örüntünün istenilen adımına ulaşırken de cebirsel olarak işlemleri rahatlıkla yaptıkları gözlemlenmiştir. Bu süreçte öğrencilerin zorlandığı kısmın fonksiyonel ilişkiyi fark ederek, genel terimin yazılması olduğu tespit edilmiştir. Kural verildikten sonra istenilen adıma ulaşma konusunda öğrencilerin daha az zorluk yaşadığı gözlemlenmiştir.

Tekrar öğretim etabında uygulanan etkinliklerde, şekilsel analizler yardımıyla fonksiyonel ilişkilerin farkına varmaya başlayan öğrencilere tablo temsili ile verilen örüntüler ve günlük hayatta karşılaştıkları örnekler sunularak genellemeler yapmaları hedeflenmiştir. Bu hedef doğrultusunda Şekil 4.56'da gösterilen örnek öğrencilere sunularak etkinliğe başlanmıştır.

İnternette gördüğü kalemlerden sipariş etmek isteyen Kerem kargo parası ile birlikte ödemesi gereken tutar için aşağıdaki fiyat tablosu ile karşılaşmıştır.

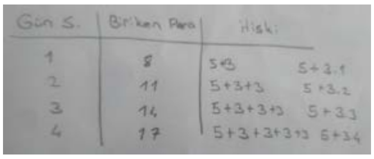
Kalem adedi	Ödenecek tutar (TL)
1	12
2	17
3	22
4	27

Şekil 4.56 Öğretimin Tekrar Etabında Kullanılan Örüntü Problemi

Şekil 4.56'daki tabloyu inceleyen öğrencilere, *"Tabloyu incelediğinizde kargo ücreti ve kalemler için ödemeniz gereken toplam tutarlar gösteriliyor. Bu tutarlar bir örüntü oluşturuyor mu?"* şeklinde sorulan soruya sınıftaki öğrencilerin tamamının, *"Evet"* yanıtını verdiği gözlemlenmiştir. Örüntüyü fark eden öğrencilere araştırmacı tarafından, *"Tabloyu incelediğinizde fark ettiğiniz örüntüyü tanımlayabilir misiniz?"* sorusu yöneltilmiştir. B odak öğrencisi, *"Tablodaki tutarlara göre ne kadar kalem alırsak alalım sabit bir kargo ücreti ödüyoruz. Aldığımız kalem sayısı kadar da kalemlere para ödüyoruz. Kargo parası 7 TL, kalemlerin fiyatı 5 TL oluyor."* yanıtıyla tabloda karşılaştığı örüntüyü ifade etmeye çalışmıştır. B odak öğrencisinin örüntü hakkındaki görüşünü ifade etmesi sırasında, sınıfta birçok öğrenci bu tür bir alış veriş tutarı ile günlük hayatta da karşılaştıklarını belirtmiştir. Bu sıklıkla karşılaşılan gerçek hayat durumunun, öğrencilerin örüntüyü tanımlamalarında kolaylık sağladığı tespit edilmiştir. Ardından araştırmacı öğrencilerden tanımladıkları örüntüyü sözel olarak ifade ettikten sonra örüntünün genel terimine ulaşmalarını istemiştir. Söz alan Ö7, *"Kalemlerin tanesi 5 TL ve kargo ücretinin de 7 TL olduğunu biliyoruz. Ödenecek tutarı bulurken kalem sayısını 5 TL ile çarpıp sonra 7 TL kargo ücretini ekliyoruz."* şeklinde ifade etmiştir. C odak öğrencisi ise, *"Ödenecek tutar kalem sayısının beş katının yedi fazlası."* şeklinde görüşünü ifade etmiştir. Sınıftaki birçok öğrencinin de benzer yanıtlar vererek örüntünün kuralını sözel olarak ifade edebildiği gözlemlenmiştir. Sözel olarak kuralın ifade edilmesinden sonra örüntünün genel teriminin bulunması esnasında A odak öğrencisinin, *"Tabloya baktığımızda az önce söylenen kurala göre bütün satırlar yazılabilir. Birinci satırda 5.1+7=12, ikinci satırda 5.2+7=17, üçüncü satırda 5.3+7=22, dördündü satırda 5.4+7=27 oluyor. Burada kargo ücretinde 7 hiç değişmiyor, o sabit terim. Kalem sayısı 1, 2, 3, 4'ü de 5 ile çarpıyoruz sonra 7 ile topluyoruz. Aynı şekilde genel terimi yazarken herhangi bir n. satırda 5.n+7 ile karşılaşırız."* ifadesini kullanarak genel terime ulaştığı gözlemlenmiştir.

Etkinlikte genel terime ulaşılmasının ardından, *"8 kalem alan Kerem'in ödeyeceği tutarı hesaplayınız."* ifadesi ile örüntünün yakın adımlarından biri sorgulanmıştır. Ö2, *"8 kalem için sekizin beş katının yedi fazlasını bulmalıyız. Sekizin beş katı kırk, yedi fazlası kırk yedi eder."* ifadesi ile örüntünün yakın bir adımına ulaşırken fonksiyonel ilişkileri kullanmıştır. Etkinlik esnasında yinelemeli stratejileri kullanarak, 8. adıma kadar ilerleyerek, yakın adımlara ulaşan öğrenci sayısının giderek azaldığı gözlemlenmiştir. Yakın adımlara rahatlıkla ulaşabilen öğrencilere, *"40 kalem alan Kerem'in ödeyeceği tutarı hesaplayınız."* ifadesi ile örüntünün uzak adımlarından birisi olan 40. adımda karşılaşılan terimin ne olduğu sorulmuştur. C odak öğrencisinin, *"40 kalem için kırkın beş katının yedi fazlası kadar para öderiz. 5.40+7 işlemini yaparsam 200+7=207 lira olur."* ifadesi ile doğru sonuca ulaştığı gözlemlenmiştir. C odak öğrencisinin genel terimi yazarken, "Artış miktarını katsayı olarak yaz, sabit terimi ekle." gibi işlem yönü kuvvetli ezbere dayalı stratejiler yerine daha fonksiyonel ilişki odaklı stratejiler kullanmaya başladığı gözlemlenmiştir.

Öğretim dizisinin tekrar etabında uygulanan diğer bir etkinlikte öğrencilere, *"Doğum gününde İrem'e annesi içerisinde 5 TL bulunan kumbarayı hediye etmiş ve her gün aldığı harçlıkların 3 TL'sini kumbarasında biriktirmesini istemiştir. Buna göre harçlıklarını biriktiren İrem'in 20. gün sonunda kumbarasında kaç TL birikmiş olur?"* şeklinde sözel olarak ifade edilen örüntü sorusu sunulmuştur. Soru ile ilgili olarak ilk gün kaç para biriktirdiği sorulduğunda Ö6,*"5 liranın üstüne 3 lira eklersek 8 lirası olur."* şeklinde yanıt vermiştir. Benzer şekilde 2. ve 3. günler ne kadar parası biriktiği sorulduğunda Ö6, *"2. gün 5+3+3=11 lira 3. gün 5+3+3+3=14 lira biriktirir."* şeklinde yanıtlamıştır. Adımlarda karşılaşılan ilişkileri toplamsal olarak gösteren öğrencinin yanıtının doğru olduğu belirtilerek aynı şekilde ilişkilerin çarpımsal olarak da ifade edilebileceği vurgulanmış ve öğrencilerden bu ilişkileri tablo temsili ile göstermeleri istenmiştir. Ö12, *"1.gün 5+3.1, 2.gün 5+3.2, 3.gün 5+3.3"* ifadesini kullanarak ilişkileri çarpımsal olarak ifade etmiştir. Sınıf genelinde birçok öğrencinin tabloyu oluşturduğu tespit edilmiştir. Bu tablolara örnek olarak Ö13'ün oluşturduğu tablo Şekil 4.57'de gösterilmiştir.

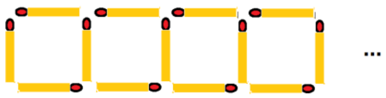


Gün S.	Biriken Para	İlişki	
1	8	5+3	5+3.1
2	11	5+3+3	5+3.2
3	14	5+3+3+3	5+3.3
4	17	5+3+3+3+3	5+3.4

Şekil 4.57 İkinci Öğretim Dizisinin Tekrar Etabında Ö13'ün Eylemi

Sözel olarak ifade edilen örüntünün tablo temsiline aktarılmasından sonra ilişki sütununda kurulan çarpımsal ilişkinin incelenmesi istenmiştir. A odak öğrencisi çarpımsal ilişkiye göre 1, 2, 3, 4 sayılarının gün sayısına bağlı olarak değiştiği ve her gün biriken 3 TL ile çarpım durumunda olduğunu, ayrıca kumbarada başlangıçtan itibaren bulunan 5 TL'nin sabit terim olarak her adımda eklendiğini dile getirmiştir. Bu ifadesinin ardından A odak öğrencisi örüntünün kuralını, *"Biriken para miktarı gün sayısının üç katının beş fazlasıdır."* şeklinde ifade etmiştir. Sözel olarak kuralı ifade edilen örüntünün genel terimi sorgulandığında Ö4, *"3n+5"* şeklinde ifade etmiştir. Genel terimi ifade eden öğrenciye 20. günün sonunda biriken para miktarı sorulduğunda, *"3n+5 genel teriminde n yerine 20 yazarsak 3.20+5 işleminin sonucundan 65 TL buluruz."* şeklinde yanıtlamıştır.

Öğretim dizisinin tekrar etabında uygulanan diğer bir etkinlikte öğrencilerin uzak adımdan birinde karşılaştıkları bir terimin adım sayısı sorgulanmıştır. Bu amaçla öğrencilere Şekil 4.58'de gösterilen kibrit çöpleri ile oluşturulmuş bir örüntü sunulmuştur.



Şekil 4.58 Kibrit Çöpleri İle Oluşturulan Örüntü Sorusu

Öğrencilerden verilen şekil örüntüsünü incelemeleri istendikten sonra oluşan kare sayısı ile kullanılan kibrit çöpü sayısı arasındaki ilişkiyi ifade etmeleri istenmiştir. B odak öğrencisi, *"İlk kareyi oluşturmak için dört kareye ihtiyacımız var. Ama yanına kare eklediğimizde dört kibrit çöpü daha eklemiyoruz. Bir kibrit çöpü önceki kare ile ortak kullanılıyor. Aslında yeni bir kare oluşturmak için üç kibrit çöpü daha kullanıyoruz."* ifadesi ile örüntüyü tanımlamıştır. A odak öğrencisi ise B odak öğrencisinin söylediklerine ek olarak, *"Yeni bir kareyi oluşturmak için üç kibrit çöpü daha ekliyoruz. Şöyle düşünebiliriz en solda bir kibrit çöpü var bu sabit olan kibrit çöpü oluyor. Sonra üç kibrit çöpü ekliyoruz bir kare oluşuyor. Ardından üç kibrit çöpü daha ekliyoruz yeni bir kare oluşuyor. Bu şekilde devam edip gidiyor."* şeklinde örüntüyü tanımlamıştır. Örüntüyü doğru şekilde tanımlayan A odak öğrencisi oluşan kare sayılarını önce toplamsal olarak, *"Bir kare için 1+3, iki kare için 1+3+3, üç kare için 1+3+3+3, dört kare için 1+3+3+3+3 kibrit çöpüne ihtiyacımız vardır."* şeklinde ifade etmiştir. Sonra, *"Bu işlemleri düzenlersek bir kare için 1+3.1, iki kare için 1+3.2, üç kare için 1+3.3, dört kare için 1+3.4 kibrit çöpüne ihtiyacımız vardır."* ifadesi ile çarpımsal olarak ilişkiyi ifade etmiştir. Ardından örüntünün kuralını, *"Kullanılan kibrit çöpü sayısı oluşan kare sayısının üç katının bir fazlasıdır."* şeklinde sözel olarak ifade etmiştir.

Örüntünün genel terimi sorgulandığında Ö6, *"Oluşan kare sayısı n olmak üzere kullanılan kibrit çöpü sayısını bulmamızı istiyor. n'nin üç katı 3n, bir fazlası da 3n+1 olur."* açıklaması ile örüntünün genel terimini ifade etmiştir. Ardından etkinliğin son sorusu olan 100 kibrit çöpü kullanıldığında oluşan kare sayısının ne olacağı sorgulanmıştır. A odak öğrencisi, *"Örüntünün genel terimi 3n+1'dir. Burada n yerine ne yazılırsa 100'e eşit olacağını soruyor. 3n+1=100 olabilmesi için 3n=99, n=33 olmalı. Demek ki 100 kibrit çöpü ile 33 kare oluşur."* ifadesini kullanarak doğru sonuca ulaşmıştır. Öğrenci yanıtlarından da anlaşıldığı gibi örüntüdeki fonksiyonel ilişkinin farkına varan öğrenciler genel terime rahatlıkla ulaşabilmişlerdir.

4.4 Üçüncü Öğretim Dizisinde Eşitliğin Korunumu ve İlişkisel Düşünmeye Ait Bulgular

Bu öğretim dizisinde, "7.2.2.1. Eşitliğin korunumu ilkesini anlar." kazanımı beş saatlik plan çerçevesinde sınıfta uygulanmıştır. Tahmini öğrenme yol haritaları kapsamında öğrenme hedefleri, eşit işaretinin denge anlamının vurgulanması, eşitliklerde ilişkisel düşünmelerin gerçekleşmesi ve eşitliğin korunumu ilkesinin anlaşılması olarak belirlenmiştir. Bu hedefler doğrultusunda, sınıftaki öğrencilerle üç saat boyunca araştırmacı tarafından hazırlanan etkinlikler sınıfta uygulanarak öğrencilerin eksik oldukları, zorlandıkları ya da kavram yanılgılarına sahip oldukları noktalar tespit edilmeye çalışılmıştır. Öğretimin ilk etabının ardından odak öğrencilerle ara klinik görüşmeler gerçekleştirilmiştir. Öğretimin ilk etabında uygulanan etkinliklerin, işleyen ya da işlemeyen noktaları tespit edilerek Şekil 4.59'da gösterilen öğretim kararları alınmıştır. Alınan bu kararlar iki ders saati boyunca tekrar öğretim etabında uygulamaya konulmuştur.

Karar öncesi ilk zihinsel eylemler	Alınan kararlar ve öğretmen uygulamaları	Öğretim sonrası zihinsel eylemler
►Eşitlik işaretini genellikle “işlem yap sonuç bul” anlamında bir sembol olarak kullanma ►Nadiren eşitlik işaretini denklik ve aynılık anlamında bir sembol olarak kullanma ►Verilen açık cümle örneklerinde istenen bilinmeyenleri işlemler yaparak bulabilme ►Eşitliklerde verilen işlemleri yaparak iki tarafın sonucunun aynı olduğunu fark ederek eşitlik sembolünü kullanabilme	►Eşitliğin denge anlamını ön plana çıkartan etkinlikler düzenleme ►Eşitliğin korunumu ilkesince eşitliğin iki tarafına aynı işlemlerin uygulanması sonucu denge durumunun değişmediğini vurgulayan etkinliklerin yapılması ►Açık cümle örneklerinde istenen verilmeyen sayıları ilişkisel düşünme yardımıyla cevaplamalarını teşvik etme ►Terazi modellerinden yararlanılarak eşitliğin korunumu için yapılması gerekenleri ön plana çıkaran etkinliklerin düzenlenmesi ►Terazi modellerinin denge durumlarını koruyarak eşit işareti kullanımını içeren etkinliklerin düzenlenmesi	►Eşitlik sembolünü denklik ve aynılık anlamında ilişkisel bir sembol olarak kullanma ►Eşitliklerde işlem yaparken temel aritmetik işlem özelliklerini kullanma ►Eşitliklerde işlem yaparken ilişkisel düşünebilme ►Eşitliğin korunumu ilkesini terazi modelleri yardımıyla modelleyebilme ►Eşitliklerde denge durumunu koruyabilmek için iki tarafa aynı işlemlerin uygulanması gerektiğini fark edebilme

Şekil 4.59 Üçüncü Öğretim Dizisinde Alınan Kararlar

4.4.1 Üçüncü Öğretim Dizisinin İlk Etabına Ait Bulgular

Bu bölümde, eşit işaretinin anlamı ve eşitliğin korunumu ile ilgili etkinlikler sınıfta uygulanmıştır. Üç ders saati boyunca gerçekleştirilen öğretim dizisinin ilk etabında öğrencilerin yapmış olduğu hatalar ve sahip oldukları kavram yanılgıları tespit edilerek, uygulanan etkinliklerin işleyen ya da işlemeyen yönleri incelenerek kavramsal öğretimin gerçekleştirilmesi amacıyla, tekrar öğretim etabında uygulanmak üzere kararlar alınmıştır.

Öğretim etabına eşit işaretinin denge anlamını vurgulamak amacıyla doğru/yanlış cümleleri etkinliği ile başlanmıştır. Şekil 4.60’da gösterilen doğru/yanlış cümleleri vasıtasıyla eşitlik içeren/içermeyen cümlelerde öğrencilerin verdiği yanıtlar incelenerek, eşit işareti hakkında düşünme biçimleri ortaya çıkarılmaya çalışılmıştır.

Aynı değere sahip olan ifadelerin arasına "eşittir" sembolü konulması gerektiğinin farkına varmışsınızdır. Aşağıda sizlere bazı matematiksel cümleler verilmiştir. Fakat bu cümlelerin bazılarında eşitliğin sağ ve sol tarafındaki değerler birbirleri ile aynı bazıları ise birbirlerinden farklıdır. Bu bilgiyi göz önüne alarak doğru olanları yuvarlak içine alınız.

• 6+5 = 11	• 4+8 =14	• 9 = 6+3	• 12 = 5+9
• 10 =5 + 5	•12 – 8 =4	• 8 =15 -7	• 3 x 6 =18
• 6 = 24 : 4	• 21 =3 x 7	• 12 =12	• 3+ 5 =3+5
• 4+5 =5+4	• 6 - 2 =2+3	• 8 – 3 = 12 -7	• 4+5 = 5 – 4

Şekil 4.60 Öğretimin İlk Etabında Kullanılan Doğru/Yanlış Cümle Örnekleri

Verilen doğru/yanlış cümleleri incelendiğinde, doğru ve yanlış cümlelerin sınıftaki öğrenciler tarafından ayırt edilebildiği tespit edilmiştir. Bu esnada sınıfta yaşanan diyaloglar şu şekilde gerçekleşmiştir:

Araştırmacı: *İncelediğiniz 6+5=11 örneği hakkında ne düşünüyorsunuz?*

B odak öğrencisi: *Bu örnek doğru. Araya eşit işareti konulmalıdır.*

Araştırmacı: *Nedeni hakkında ne düşünüyorsun?*

Ö4: *Çok kolay, bu sürekli yaptığımız bir şey. Altı ile beşin toplamı nedir diye sormuş. Sonuç 11 oluyor. Araya eşit işareti koymuş.*

Araştırmacı: *Evet… 6+5=11 ifadesinde eşit işaretinin kullanımı doğru. Peki, yanlış kullanımına bir örnek verir misiniz?*

A odak öğrencisi: *12=5+9 yanlış. Çünkü beş ile dokuzun toplamı 14 olur. Araya eşit işareti konulması yanlış olur.*

Araştırmacı: *Evet… Haklısın, bu kullanım yanlış olmuş. Peki, eşit işareti işlem sonucunu gösterme dışında başka nasıl bir anlamda kullanılmış?*

B odak öğrencisi: *4+5=5+4 burada eşit olduğunu işlem yapmadan bulabiliriz. Burada toplama işleminin değişme özelliği var ve iki tarafın da aynı olduğunu göstermiş.*

Araştırmacı: *Evet, güzel bir cevap… Aslında sorduğum şeylerden biri de buydu. Eşit işaretinin bir diğer anlamı da aynılık ilişkisinin gösterimidir.*

Sınıftaki öğrencilerin verdiği yanıtlardan da anlaşılacağı gibi genel olarak öğrenciler eşit işaretini "işlemleri yerine getir", "cevap bul" ve "sağda işlem yap/solda cevap bul" anlamlarında kullandıkları gözlemlenmiştir. Araştırmacı, bu durumun farkına vararak eşit işaretinin "aynılık" ve "denklik" anlamını vurgulamak için Şekil 4.61'de gösterilen açık cümle örneklerini öğrencilere sunmuştur. Bu örneklerde dengenin kurulması için öğrencilerden boşluklara gelmesi gereken sayıları işlemsel yorumlardan uzak olarak yorumlamaları istenmiştir.

Aşağıda verilen cümlelerin sağ tarafları ile sol taraflarının aynı olabilmesi için boş bırakılan yelere gelmesi gereken sayıları bulunuz.

• 7 + 8 = □	• 6 + □ =13	• 12- □=5	• 2 x 8 = □
• □ : 4 =12	• □=5+7	• □=2x7	• □=16:2
• 4+7 =7+ □	• □-6 = 8-6	• 3x5=5x□	• 4+8=15-□
•6-□=9-7	• 7+5=6+□	• 6 + 5=2 x □	• 12 :□ =3 +1

Şekil 4.61 Öğretimin İlk Etabında Kullanılan Açık Cümle Örnekleri

Sınıf tartışması şeklinde devam eden etkinlikte, eşitliğin "işlem yap, sonuç bul" anlamının dışında "aynılık ve denklik" anlamlarının üzerine vurgu yapılmaya çalışılmıştır. Mümkün oldukça işlemsel değil ilişkisel yanıtlar ön plana çıkarılmaya çalışılmıştır. Bu esnada sınıfta yaşanan diyaloglar şu şekilde gerçekleşmiştir:

Araştırmacı: *Birçoğunuz etkinlikteki boşluklara gelmesi gereken sayıları bulabiliyorsunuz. Burada sizden sağ taraf ile sol tarafın aynı olması için ilişkisel yorumlar yapmanızı istiyorum. Örnekler üzerinden sayılar arasındaki ilişkileri kullanarak yorumlar yapınız.*

Ö7: *4+7=7+□ işleminde sağ taraf ile sol tarafın aynı olması için boşluğa 4 yazılmalı. Toplama işleminde değişme özelliği var.*

Araştırmacı: *Evet haklısın. Benzer şekilde yorum yapmak isteyen var mı?*

B odak öğrencisi: *□=5+7 sağ ve sol tarafın aynı olması için boşluk yerine 12 yazılmalı.*

Araştırmacı: *Evet arkadaşlarınızın yorumları doğru… Ben çok güzel bir örnek gördüm. Siz biraz işlemlerin sonuçlarına odaklandığınız için* *fark edemediniz. 6-□=9-7 örneğini beraber inceleyelim. İşlemdeki eksilen sayılar 6 ve 9 arasındaki ilişki nedir?*

***Ö8:** Altı dokuzdan üç eksik.*

***Araştırmacı:** Şimdi çıkan sayılara odaklanın. Farkın sabit kalması için 9'dan 7 eksiliyorsa 6'dan kaç eksilmelidir?*

***Ö8:** 4 eksilmelidir. O zaman iki tarafta da fark 2 olur.*

***Araştırmacı:** Evet doğru bazen işlem yapmadan sadece sayılar arasındaki ilişkilere odaklanarak da boşluklara gelmesi gereken sayıları bulabiliriz.*

Öğrencilerden gelen yanıtlarda, eşitliğin ilişkisel anlamına vurgu yapan eşitlik cümlesine ait iki üyenin karşılaştırılması şeklindeki yorumlar ön plana çıkartılmak istenmiştir. Böylece eşit işaretinin "işlem yap" anlamından çok, simetrik ve geçişli karakteri de görünür hale getirilmeye çalışılmıştır. "4+7=7+□", "3x5=5x□" sorularında bazı öğrencilerin önce sol taraftaki işlemleri yapıp, buldukları sonuçla sağ taraftaki bilinmeyenleri bulmaya yönelik işlemlerle devam ettikleri gözlemlenmiştir. Araştırmacının, *"Bu soruları işlem yapmadan çözebilir miyiz?"* sorusuna Ö1, *"Evet toplama ve çarpma işlemlerinin değişme özelliği var. İşlem yapmamıza gerek yok"* şeklinde yanıtlamıştır. Öğrencinin verdiği bu yanıtın sınıftaki birçok öğrenci tarafından da fark edildiği gözlemlenmiştir. Sorulara işlem odaklı yanıt veren öğrencilerin, bazı kavram yanılgılarından dolayı hatalı yanıt verdikleri de gözlemlenmiştir. Örneğin Ö22, "6+5=2x□" eşitliğinde "6+5=11", "11x2=22" şeklinde yazarak yanlış sonuca ulaşmıştır. Bu hatanın sebebinin, eşitliğin sonuç ifade eden bir sembol olarak görülmesinden kaynaklandığı tespit edilmiştir. Benzer olarak "□:4 =12" sorusunu Ö12, *"Soru yanlış mı? 12:4=3 ama 3, 4'e bölünmez. Bilinmeyen yanlış yere yazılmış olabilir."* şeklinde yanıtlamıştır. Öğrencinin eşitliğin yön belirten bir ifade olduğuna dair bir kavram yanılgısına sahip olduğu gözlemlenmiştir. Bu yanılgılar araştırmacı tarafından yapılan açıklamalarla ortadan kaldırılmaya çalışılmıştır.

Araştırmacı öğrencilere Şekil 4.62'de gösterilen sayılar arasında ilişkileri kullanarak rahatlıkla sonuçlarına ulaşabilecekleri örnekler sunarak, öğretim etabına devam etmiştir.

• 534+163=532+□ •47+□=46+53 •213 -39 = □ – 40 •20 x 34 =40 x □

• □ – 48 = 123 - 50 • 5 x 48 =10 x □ • 40 : 5 = □ : 10 •64 : 8 =32 : □

Şekil 4.62 Öğretimin İlk Etabındaki Açık Cümle Örnekleri

Örnekleri inceleyen öğrencilerin örnekleri yanıtlarken araştırmacı ile yaşanan diyalogları şu şekilde gerçekleşmiştir:

Araştırmacı: *İncelediğiniz örnekleri mümkünse dört işlem yaparak değil de sayılar arasındaki ilişkileri kullanarak yanıtlayın. Şimdi size yanıtlamanız için söz hakkı veriyorum.*

Ö2: *534+163=532+□ sağ taraf ile sol tarafın dengede olabilmesi için toplanan sayılardan ilki 534'den 532'ye düşmüş. O zaman diğeri 163'den 165'e çıkarsa denge bozulmaz.*

Ö12: *47+□=46+53 toplanan sayılardan 47'nin karşılığı olarak 46 var. 53 karşılığında 52 olmalı.*

Araştırmacı: *Evet arkadaşlarımızın yanıtları doğru... Dengeyi korumak için sizce sayılar arasındaki ilişkilere bakarak sonuçlara daha kolay ulaşabiliyor muyuz?*

B odak öğrencisi: *Aslında evet. İşlem yapmadan daha kolay ulaşıyoruz ama bazen ben karıştırıyorum. Mesela 40:5=□:10 bilinmeyenini nasıl buluyoruz?*

Araştırmacı: *Dengeyi bozmadan işlemler yapalım. Sana basit bir örnek vereyim. 40 cevizi beş arkadaş bölüştük. Herkese düşen ceviz değişmesin istiyoruz. Kaç cevizi 10 kişi bölüştürürsek kişi başına düşen ceviz miktarı değişmez?*

B odak öğrencisi: *80 ceviz olmalı. Evet, böyle düşününce kolay gibi…*

Araştırmacı: *5 x 48 =10 x □ örneği hakkında görüşü olan var mı?*

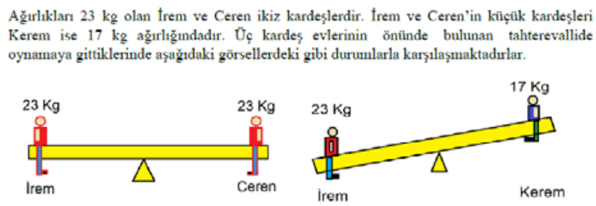
Ö14: *Sağ tarafta 5 ile 48'i çarpmış. Sol tarafta 5'in 2 katını alırsak 48'in de 2 katını alırız, 96 olur.*

Araştırmacı: *Arkadaşınız sol taraftaki ilk çarpan olan 5'in sağ tarafta iki katı alınınca dengenin bozulmaması için sağ taraftaki ikinci çarpanın da iki katını almamız gerektiğini söyledi. Yani eşitliğin sağ tarafındaki iki çarpanın da iki katını aldı. Bu dengeyi bozmaz mı?*

Ö19: *Evet dengeyi bozar. Çarpanlardan birinin iki katı alınınca diğerinin yarısını almamız gerekirdi.*

Yaşanan diyaloglardan da anlaşılacağı gibi bazı öğrencilerin eşitliğin denge anlamını kullanma ve bu dengenin sağlanması için sayılar arasındaki ilişkilerin farkına varmaları noktasında bir hayli zorlandıkları görülmüştür. Öğrencilerin bir kısmının sayılar arasında ilişkilerin farkına vararak boşluklara gelmesi gereken sayıları kolaylıkla bulmasına rağmen, işlemsel odaklı düşünen öğrencilerin sonuca ulaşamadıkları gözlemlenmiştir. Araştırmacı, öğretim etapları boyunca eşitliğin denge anlamını vurgulamada ve sayılar arasındaki ilişkileri kullanmada öğrencileri destekleme yönünde kararlar almıştır.

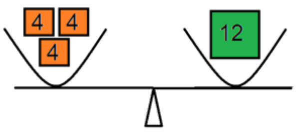
Öğretim dizisine Şekil 4.63’te gösterilen tahterevalli etkinliği ile devam edilmiştir. Etkinlikte öğrencilerden tahterevallideki durumları incelemeleri istenmiştir.



Şekil 4.63 Öğretimin İlk Etabında Kullanılan Tahterevalli Örneği

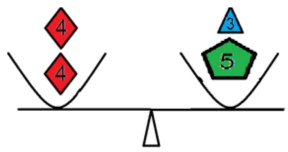
Öğrencilerin İrem ve Ceren’in tahterevallideki konumlarını inceleyerek “23=23” eşitliğine ulaştıkları, İrem ve Kerem’in tahterevallideki konumlarını inceleyerek “23>17” eşitsizliğine ulaştıkları gözlemlenmiştir. Araştırmacı tarafından *“23=23” eşitliğinde “=” işareti ile tahterevallinin konumu arasında nasıl bir ilişki vardır?”* sorusu öğrencilere yöneltilmiştir. Ö11, *“İrem ile Ceren’in ağırlıkları aynıdır. Tahterevalli de dengededir. Aynı ağırlıklar dengede olmaya sebep olmuştur.*” şeklinde yanıtlamıştır. Ö8, *“İki kardeşin ağırlıkları eşittir. Tahterevalli de dengededir. Eşit ağırlıklar dengede durur.*” şeklinde yanıtlamıştır. Verilen yanıtlardan da anlaşılacağı gibi öğrencilerin eşit işaretini denklik ilişkisine ait bir sembol olarak kullanabildiği tespit edilmiştir. Denge ve dengede olmama durumları için tahterevalli örneğinin (denge modellerinin) öğrenciler için anlamayı kolaylaştıran bir örnek olduğu gözlemlenmiştir.

Tahterevalli etkinliği ile denge ve dengede olmama durumları incelendikten sonra benzer olarak eşit kollu terazi etkinliğine geçilmiştir. Bu etkinlikte denge durumunda olan eşit kollu teraziler incelenerek denge durumuna ait eşitliklerin yazılması öğrencilerden istenmiştir. İlk olarak Şekil 4.64'te gösterilen eşit kollu terazi modeli öğrencilere sunulmuş ve denge durumunu sözel olarak ifade etmeleri, ardından denge durumuna ait matematik cümlesini yazmaları istenmiştir. A odak öğrencisi, *"Denge durumunda eşit kollu terazinin sağ tarafındakiler ile sol tarafındakiler birbirine eşittir. Sol taraftaki üç tane dört ile sağ taraftaki 12 birbirini dengeler."* şeklinde terazinin denge durumu hakkında görüşünü bildirmiştir. Ardından A odak öğrencisinden bu denge durumunu matematik cümleleri ile ifade etmesi istenince "4+4+4=12" şeklinde yanıtlamıştır. Eşit işaretinin denge anlamını vurgulamak için kullanılan eşit kollu terazi örneğinde A odak öğrencisinin kolaylıkla matematiksel cümleyi yazabildiği ve eşit işaretini kullanabildiği gözlemlenmiştir.



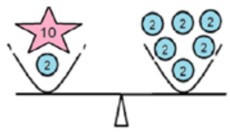
Şekil 4.64 Öğretimin İlk Etabında Kullanılan Eşit Kollu Terazi Örneği 1

Etkinlikteki diğer bir örnekte sol tarafta iki adet 4 sayısının, sağ tarafında 5 ve 3 sayılarının bulunduğu Şekil 4.65'te gösterilen terazi modeli verilmiştir. Eşit kollu terazideki denge durumunun terazinin kolları arasındaki sayılar arasındaki ilişki yardımı ile nasıl kurulduğu sorgulanmıştır. Ö7, *"Terazinin sol kefesinde 4+4, sağ kefesinde ise 3+5 sayıları var. Sonuçlar birbirine eşit olduğu için 4+4=3+5 yazılabilir. Terazi dengededir."* şeklinde görüşünü bildirmiştir. Araştırmacı, eşitliği kullanırken öğrencinin yazmış olduğu matematik cümlesinin doğru olduğunu belirttikten sonra, *"Burada kullandığın toplanan sayıların arasında bir ilişki var mı? Mesela biri artarken diğeri azalmış mı?"* şeklinde soruyla öğrenciyi eşitliği ilişkisel olarak incelenmeye teşvik etmiştir. A odak öğrencisi eşitliği ilişkisel olarak incelerken, *"Sol tarafta 4+4 verilmişti. Toplanan sayılardan sağ tarafta ilki 1 azalırken ikincisi 1 artmıştır. Bu durum dengeyi bozmamıştır."* ifadesi ile görüşünü bildirmiştir. Öğrencinin verdiği yanıttan da anlaşılacağı gibi önce işlemsel olarak ifade edilen eşitliğin araştırmacının teşviki ile ilişkisel olarak da ifade edilebildiği gözlemlenmiştir.



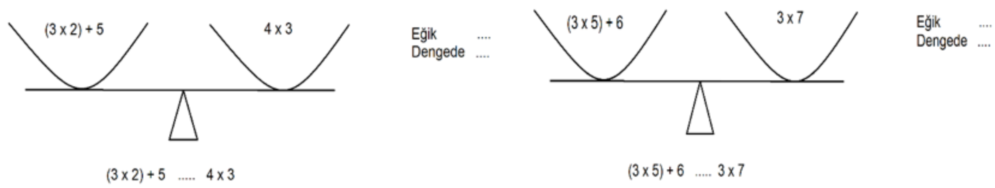
Şekil 4.65 Öğretimin İlk Etabında Kullanılan Eşit Kollu Terazi Örneği 2

Etkinliğin son örneğinde eşit kollu terazilerin sağ ve sol kefelerinde birbirini dengeleyen ifadelerin görünür hale gelmesi amacıyla bir kefesinde 10 ve 2 sayılarının bulunduğu, diğer kefesinde ise 6 tane 2 sayısının bulunduğu Şekil 4.66'daki örnek öğrencilere sunulmuştur. Terazideki denge durumunu A odak öğrencisi, *"Terazi dengededir. Bu durumu sayılarla 10+2=2.6 olarak yazarız. Sağ taraftaki sayıların toplamı ile sol taraftaki sayıların çarpımı aynıdır."* şeklinde ifade etmiştir. A odak öğrencisinin yapmış olduğu açıklamadan da anlaşılacağı üzere öğrencilerin eşit işaretini denge ve aynılık anlamlarıyla da kullanmaya başladıkları gözlemlenmiştir.



Şekil 4.66 Öğretimin İlk Etabında Kullanılan Eşit Kollu Terazi Örneği 3

Eşit işaretinin denge anlamını vurgulamak üzere eşit kollu terazilerin sağ ve sol kefelerinde işlemler yazan Şekil 4.67'de gösterilen etkinliğe geçilmiştir. Öğrencilere terazinin denge durumunda eşit işaretinin kullanılması gereken, dengenin sağlanmadığı durumlarda ise eşit işaretinin kullanılamayacağı örnekler sunulmuştur. Sınıftaki öğrenciler bir kefesinde "(3x2)+5" ifadesi diğer kefesinde "4x3" ifadesinin bulunduğu terazi modelini, ardından bir kefesinde "(3x5)+6" diğer kefesinde "3x7" ifadesinin bulunduğu terazi modelini incelemeye başlamışlardır.



Şekil 4.67 Öğretimin İlk Etabında Kullanılan Eşit Kollu Terazi Örneği

Terazi modellerinin incelenmesinden sonra eşitliğin denge durumlarında kullanımı konusunda sınıftaki öğrenciler ile araştırmacı arasında yaşanan diyaloglar şu şekilde gerçekleşmiştir:

Araştırmacı: *Terazi modellerini incelediniz. Sizce teraziler dengede mi?*

A odak öğrencisi*: İlk terazi dengede değil, ikinci terazi ise dengededir.*

Araştırmacı: *Verilen yanıt doğru. Peki dengede olduğunu nasıl anladınız?*

B odak öğrencisi: *İlk terazide (3x2)+5=11 ama diğer kefede 4x3=12, ikisi aynı değil. İkinci terazide bir kefede (3x5)+6=21, diğer kefede 3x7=21 yazıyor, ikisi de aynı olduğu için ilk terazi dengede değil, ikinci terazi dengede.*

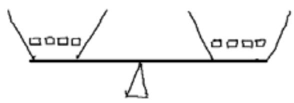
Araştırmacı: *O zaman hangi terazide eşit işaretini kullanabiliriz?*

B odak öğrencisi: *İkinci terazide eşit işaretini kullanabiliriz. Çünkü ikinci terazi dengede, ilk terazi dengede değil. Eşit işaretini kullanamayız.*

Araştırmacı: *Evet arkadaşınızın verdiği yanıt doğru... O zaman denge ve aynılık durumlarında eşit sembolünü kullanabiliyoruz.*

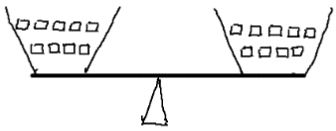
Sınıfta yaşanan diyaloglardan da anlaşılacağı üzere öğrencilerin eşitliğin sadece işlemlerin sonucunu gösteren bir sembol olan anlamının dışında "denge" ve "aynılık" durumlarında da kullanabildikleri gözlemlenmiştir.

Öğretim dizisinin ilk etabına "Eşitliğin Korunumu" adlı etkinlikle sınıfta devam edilmiştir. Eşitliğin korunumuna ait öğrencilerin düşünme biçimlerini ortaya çıkarmak amacıyla öğrencilerin sorulara verdiği yanıtlar gözlemlenmiştir. Öncelikle öğrencilerden bir terazi modelinde iki kefeye de bir miktar birim küp ekleyerek teraziyi dengeye getirmeleri istenmiştir. Ö2, *"Her iki kefeye de 4 tane birim küp ekleyebiliriz."* şeklinde yanıtlamıştır. Araştırmacı tarafından bu durum Şekil 4.68'de gösterildiği gibi modellenmiştir.



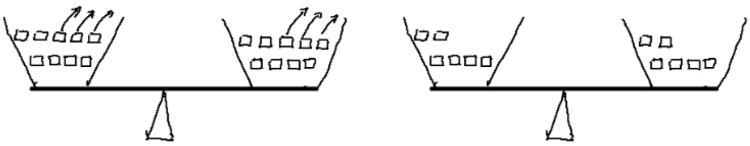
Şekil 4.68 Eşitliğin Korunumu Etkinliğinin Terazi Modeli İle Gösterimi 1

Ardından araştırmacı tarafından, *"Her iki kefeye 5'er birim küp daha ilave edilmesi durumunda ortaya çıkacak durumu ifade ediniz."* şeklinde yapılan yönergeye Ö7, *"4 +5=4+5 gibi bir eşitlik olur. Her iki yana da eşit miktar eklendiğinden denge korunur."* şeklinde görüşünü belirtmiştir. Bu durum araştırmacı tarafından Şekil 4.69'da gösterildiği gibi modellenmiştir.



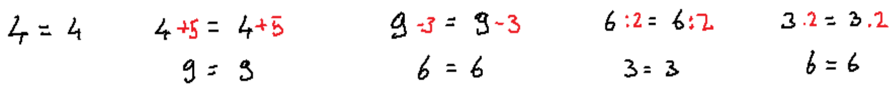
Şekil 4.69 Eşitliğin Korunumu Etkinliğinin Terazi Modeli İle Gösterimi 2

Araştırmacının, *"Şimdi her iki taraftan da 3'er birim küp çıkarın. Ortaya çıkacak durumu ifade ediniz."* şeklindeki yönergesine Ö7, *"Her iki tarafta da 9 birim küp vardı, üçer tane çıkarırsak 9-3=9-3 olur, yani denge yine bozulmaz."* yanıtı gelmiştir. Araştırmacı tarafından bu durum Şekil 4.70'de gösterildiği gibi modellenmiştir.



Şekil 4.70 Eşitliğin Korunumu Etkinliğinin Terazi Modeli İle Gösterimi 3

Araştırmacının, *"Şimdi ise her iki kefedeki birim küp sayısını yarıya indirelim. Ortaya çıkan durumu ifade ediniz."* şeklindeki yönergesine Ö10, *"Son olarak kefelerde 6'şar küp kalmıştı, yarıya inerse 6:2=6:2 olur. 3=3 olduğundan denge bozulmaz."* şeklinde yanıtlamıştır. Araştırmacı tarafından son olarak, *"Şimdi her iki yanındaki küp sayısını 2 katına çıkaralım. Ortaya çıkan durumu ifade ediniz"* şeklindeki yönergesine Ö9,*"3.2=3.2 olacağından 6=6 olur. Yine denge bozulmaz."* yanıtını vermiştir. Araştırmacı öğrencilerin ifade ettikleri durumları işlemlerle ifade ederek yaptıkları işlemleri görünür hale getirmiş ve eşitliğin korunumunu kullanmayı pekiştirmek amacıyla Şekil 4.71'deki gösterimi yapmıştır.



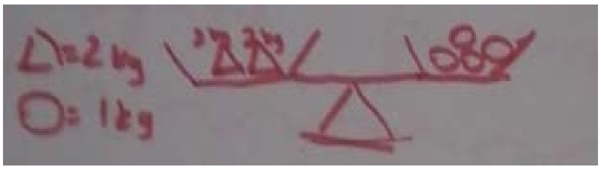
Şekil 4.71 Öğretimin İlk Etabındaki Eşitliğin Korunumu Etkinliğindeki İşlemler

Araştırmacı, etkinlik boyunca yapılan işlemleri görünür hale getirdikten sonra eşitliğin korunumu için yapılanlar hakkında öğrencilerin görüşlerini almak için, *"Yapılan işlemler sonucunda eşitliliğin korunumuna dair görüşleriniz nelerdir?"* sorusunu sınıf tartışmasına açmıştır. A odak öğrencisi, *"Eşitliğin her iki yanı aynı sayı ile toplar, çıkarır, çarpar ya da bölersek denge bozulmaz."* şeklinde görüşünü belirtmiştir. Sınıftaki öğrencilerin eşitliğin her iki yanına aynı sayı ile yapılan işlemlerin dengeyi bozmayacağı konusunda fikir birlikteliğinde oldukları tespit edilmiştir.

4.4.2 Üçüncü Ara Klinik Görüşmelere Ait Bulgular

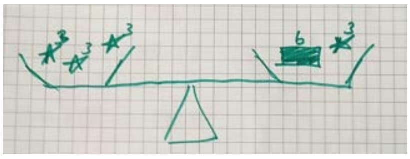
Üçüncü öğretim dizisinin ilk etabı gerçekleştirildikten sonra eşitliğin denge anlamının ve eşitliğin korunumu ilkesinin odak öğrencilerin zihinlerinde nasıl yapılandırdığını derinlemesine ortaya koymak amacıyla üçüncü ara klinik görüşmeler düzenlenmiştir. Üçüncü ara klinik görüşmelerde "7.2.2.1. Eşitliğin korunumu ilkesini anlar." kazanımı kapsamında hazırlanan görüşme soruları odak öğrencilere yöneltilmiştir. Hazırlanan görüşme soruları vasıtasıyla öğrencilerin öğretim esnasında yaptıkları hatalar ve sahip oldukları kavram yanılgılarının daha derinlemesine incelenmesi hedeflenmiştir. Ayrıca odak öğrencilerin öğretim öncesinde yapılan ilk klinik görüşmelerdeki düzeyleri ile ara klinik görüşmeler esnasındaki düzeyleri incelenerek gelişimleri gözlemlenmiştir. Öğrencilerin gelişimi üzerinde öğretim esnasında uygulanan etkinliklerin, işleyen ve işlemeyen yönleri tespit edilerek tekrar öğretim etabında uygulamak amacıyla kararlar alınmıştır.

Ara klinik görüşmelere araştırmacı tarafından, *"Bir terazinin dengede olabilmesi için kefelerine konulması gereken kütlelerin nasıl olması gerekir? Örnek bir durumla açıklayın."* sorusunun odak öğrencilere yöneltilmesi ile başlanmıştır. Odak öğrencilerden kendilerine ait bir denge durumu ifade ederek eşitliği kurmaları beklenmiştir. A odak öğrencisi Şekil 4.72'de gösterildiği gibi terazinin bir kefesine 2 kg'lık 2 cisim, diğer kefesine de 1kg'lık dört cisim yerleştirerek denge durumunu '2+2=1+1+1+1' eşitliğini kullanarak göstermiştir. A odak öğrencisinin, *"Eşitliği kullanabilmek için terazinin dengede olması gerekir. 2+2=1+1+1+1 eşitliği yazılabilir. Çünkü iki kefedeki kütleler aynıdır."* şeklindeki ifadesinden de anlaşılacağı gibi eşit işaretini denge ve aynılık anlamlarıyla kullanabildiği görülmektedir. A odak öğrencisinin denge durumlarında eşit işaretini kullandığı ve bu denge durumunu kendine ait örneklerle gösterebildiği tespit edilmiştir. Öğretim etapları öncesinde yapılan ön klinik görüşmelerde A odak öğrencisinin eşit işaretini sonuç ifade eden bir sembol olarak kullandığı tespit edilmişti. Öğretimin ilk etaplarında kullanılan terazi modeli etkinliklerinin, öğrencinin eşit sembolünün denge anlamının kavramasında olumlu rol oynadığı gözlemlenmiştir.



Şekil 4.72 Üçüncü Ara Klinik Görüşmelerde A Odak Öğrencisinin Eylemi

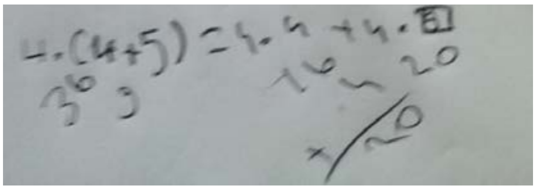
B odak öğrencisi de denge ifade eden örnek durumu eşit kollu terazinin bir kefesine üç tane 3, diğer kefesinde bir tane 6 ve bir tane 3 sayılarını yerleştirerek Şekil 4.73'te gösterildiği gibi modellemiştir. Vermiş olduğu örnekte denge durumunu "3+3+3=6+3" eşitliğini kullanarak ifade etmiştir. B odak öğrencisi modellediği terazideki denge durumunu, *"Sol kefeye üç tane üç yerleştirdim. Sağ kefedeki bir tane üç ile sol kefedeki bir tane üç birbirini dengeliyor. Sol taraftaki iki tane üçü dengelemek için sağ kefeye 6 yazdım onlar da birbirini dengeliyor. Terazi dengede olduğu için 3+3+3=6+3 iki kefedeki sayıların arasına eşit yazılır."* şeklinde ifade etmiştir. B odak öğrencisinin yaptığı terazi modeli ve yaptığı açıklamadan da anlaşılacağı üzere eşit işaretini denge durumlarını ifade ederken kullanabildiği görülmektedir.



Şekil 4.73 Üçüncü Ara Klinik Görüşmelerde B Odak Öğrencisinin Eylemi

Denge durumuna ait örnek bir durum yazması ve eşit sembolü kullanarak ifade etmesi istenen C odak öğrencisi terazinin bir kefesine 2+3, diğer kefesine ise 5 yazarak denge durumunu ifade etmiştir. C odak öğrencisi bu denge durumu için, *"Bir kefeye 2+3 yazarım, diğer kefeye 5 yazarım. İki ile üçün toplamı beş olduğundan terazi dengede olur. 2+3=5 işlemin sonucu doğru olduğundan eşitlik kullanılır."* şeklinde açıklamada bulunmuştur. C odak öğrencisinin vermiş olduğu yanıtlar incelendiğinde eşit sembolünün "denge ve aynılık" anlamını fark etmeye başladığı gözlemlenmiştir.

Ara klinik görüşmeler esnasında açık cümle örnekleri ile eşitlik durumlarının sorgulandığı örneklerde A odak öğrencisi ve B odak öğrencisi sayı kümelerinin değişme, birleşme ve dağılma özelliklerinin farkına vararak ya da sayılar arasındaki ilişkileri kullanarak soruları kolaylıkla yanıtladıkları gözlemlenmiştir. Fakat C odak öğrencisi açık cümlelerde, boş bırakılan yerlere gelmesi gereken soruları yanıtlarken sayıların ilişkisel özelliklerini fark etmeden işlemler yaparak doğru sonuçlara ulaşmıştır. Örneğin C odak öğrencisi, “4.(4+5)=4.4.+4.□” açık cümlesinde dağılma özelliğinin farkına varamamıştır. Benzer olarak “3x□=6x8” açık cümlesinde çarpılan sayıların arasındaki ilişkileri fark edememiştir. Şekil 4.74’te gösterilen dağılma özelliği ile rahatlıkla yanıtlanabilen açık cümle örneğini dört işlemden yararlanarak yanıtlamaya çalışmıştır. Bu işlemleri yaptıktan sonra açık cümle örneğinde boş bırakılan yere gelmesi gereken sayıyı doğru olarak bulduğu tespit edilmiştir.



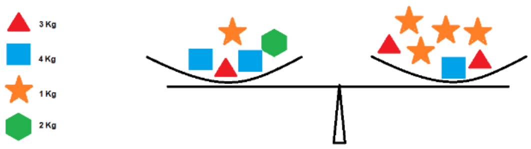
Şekil 4.74 Üçüncü Ara Klinik Görüşmelerde C Odak Öğrencisinin Eylemi

Ara klinik görüşmelere eşitliğin korunumu ile ilgili örnek durumların incelenmesiyle devam edilmiştir. İncelenen örneklerde, denge durumunda bulunan bir terazinin kefelerindeki kütlelerin iki katına çıkarılması, iki kefeden de “5 kg” kütle eksilmesi ve kefelerden birine “4 kg” diğerine “3 kg” kütle eklenmesi halinde denge durumları teker teker sorgulanmıştır. Odak öğrencilerin incelenen ilk iki durumda uygulanan işlemler sonucunda eşitliğin korunacağını ve eşit işaretinin kullanılması gerektiğini, son örnekte ise terazinin kefelerine uygulanan işlemlerin denge durumunu bozacağını ve eşit işaretinin kullanılamayacağını ifade ettikleri gözlemlenmiştir.

4.4.3 Üçüncü Öğretim Dizisinin Tekrar Etabına Ait Bulgular

Üçüncü öğretim dizisinin ilk etabında, sınıfta uygulanan etkinlikler ve odak öğrenciler ile yapılan ara klinik görüşmeler de eşit işaretinin denge anlamı, ilişkisel durumların farkına varılması ve eşitliğin korunumu konularında öğrencilerin zorlandıkları noktalar ve eksik öğrenmeler tespit edilmeye çalışılmıştır. Öğretimin ilk etabında, uygulanan etkinliklerin işleyen ya da işlemeyen noktaları tespit edildikten sonra kavramsal öğrenmenin gerçekleşmesi adına tekrar öğretim etabı planlanmıştır. Planlanan bu tekrar öğretim etabında “7.2.2.1. Eşitliğin korunumu ilkesini anlar.” kazanımını içeren etkinlikler vasıtası ile öğrencilerde tespit edilen eksiklikler giderilmeye çalışılmıştır.

Üçüncü öğretim dizisine ait tekrar etabında, ilk olarak Şekil 4.75’te gösterilen eşit kollu terazi modeli yardımıyla denge durumunda olan iki kefeden birine eklenen ya da çıkarılan kütleler için yazılabilecek yeni denge durumları sorgulanmıştır.



Şekil 4.75 Öğretimin Tekrar Etabında Kullanılan Terazi Modeli Sorusu

Modeli inceleyen öğrencilerden eşitliğin korunumu ilkesi çerçevesinde işlemler yapmaları ve farklı durumlara ait terazi modellerindeki eşitlik cümlelerini yazmaları istenmiştir. Sınıf tartışmaları şeklinde geçen etkinlik sırasında yaşanan diyaloglar şu şekilde gerçekleşmiştir:

Araştırmacı: *Etkinlikte verilen eşit kollu terazi modeli ile ifade edilen eşitlik cümlesi nedir?*

A odak öğrencisi: *Sağ kefede bulunan kütleler ile sol kefede bulunan kütlelerin ağılıkları toplamı birbirine eşittir. Eşitlik 4+3+1+4+2=3+1+1+1+1+4+3 şeklinde gösterilir. Her iki kefede de 14 kg kütle bulunmaktadır. Terazi dengededir.*

Araştırmacı: *Evet arkadaşınızın eşitlik cümlesi doğru… Şimdi sizden terazinin denge durumunu bozmadan etkinlikte sorulan, “Terazinin sağ kefesinden mavi kare ile modellenen kütlenin alınması durumunda terazinin sol kefesinde yapılabilecek durumları açıklayınız.” sorusu hakkındaki görüşlerinizi söylemenizi istiyorum.*

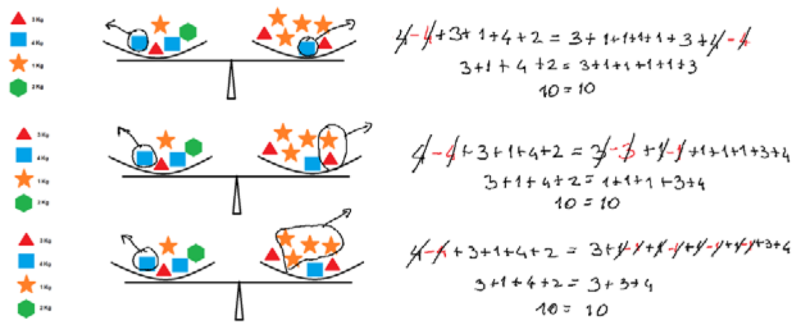
Ö11: *Sağ kefeden 4 kg ağılığındaki mavi kütle alınırsa dengenin bozulmaması için sol kefeden de bir tane mavi kütle alınır ve denge bozulmaz. Son durumda 3+1+4+2=3+1+1+1+1+3 eşitliği elde edilir. Terazinin iki kefesinde de 10 kg kütle kaldığı için terazi yine dengede olur.*

Araştırmacı: *Evet arkadaşınız eşitliği koruyarak yeni denge durumuna ait eşitliği yazdı. Farklı bir şekilde denge sağlanabilir mi?*

B odak öğrencisi: *Sağ kefeden 4kg ağırlığında kütle çıkarıldığında sol kefeden 4kg ağırlığında tek bir kütle çıkarmak yerine bir tane 1kg ve bir tane 3kg ağırlığında kütle çıkarılırsa da denge bozulmaz. Eşitlik 3+1+4+2=1+1+1+4+3 şeklinde gösterilir.*

Ö7: *Sağ kefeden 4kg çıkarılırsa dengeyi bozmamak için sol kefeden 4 tane 1kg kütleli yıldızlar da çıkarılırsa denge bozulmaz. Eşitlik 3+1+4+2=3+4+3 şeklinde gösterilir. Her iki kefede de yine 10kg kütleli cisimler kalır.*

Araştırmacı: *Arkadaşlarınız dengeyi korumak için farklı işlemler yaptılar. Farklı işlemler yapsalar da dengeyi koruyarak doğru eşitlikler kurabildiler. Şimdi onların yaptığı işlemleri birlikte modelleyelim.*



Şekil 4.76 Öğretimin Tekrar Etabında Sınıfta Yapılan Eylemler

Araştırmacı: *Şimdi etkinliğin diğer sorusu, "Terazinin sağ kefesine kırmızı üçgen ile modellenen kütlenin eklenmesi durumunda terazinin sol kefesinde yapılabilecek durumları açıklayınız." hakkındaki görüşlerinizi belirtiniz.*

Ö14: *Terazinin sağ kefesine 3 kg ağırlığında kütle eklenirse dengeyi bozmamak için sol kefeye de 3 kg kütleli cisim eklenebilir. Ya da kütleleri toplamı 3 kg olacak şekilde 1 tane 2 kg ve bir tane 1 kg eklenebilir veya 3 tane 1 kg kütleli cisim de eklenebilir. Önemli olan sağ kefeye eklenen cismi denge tutacak toplamı 3kg olacak kütleler eklenmelidir.*

Öğrencilerle yaşanan diyaloglardan anlaşılacağı gibi başlangıçta dengede olan terazilerin kefelerine eklenen ya da çıkarılan cisimlerin kütlelerinin dengeyi bozmayacak şekilde eklenmesi ya da çıkarılması gerektiği öğrenciler tarafından anlaşıldığı görülmektedir. Ayrıca etkinlikte farklı durumlara ait denge durumlarının kurulmasının öğrencilerin eşit işaretinin denge anlamının farkına varmalarında olumlu rol oynadığı gözlemlenmiştir.

Tekrar öğretim etabında, uygulanan diğer bir etkinlikte ise açık cümle örneklerinden yararlanılarak eşitliğin korunumu ilkesini pekiştirecek işlemler yapılmıştır. Etkinlikte dört adet açık cümle örneği verilerek, öğrencilerden eşitliği korurken yapmaları gereken işlemlerin ne olduğu sorgulanmış ve boşluklara gelmesi gereken sayıları bulmaları istenmiştir. Etkinlikteki ilk örneği B odak öğrencisi, *"▲+3=5+8 eşitliğinde üçgenin yanındaki 3'ün yanına -3 yazarsak üçgen tek başına kalacaktır. Diğer tarafa da – 3 yazarsak ▲+3-3=5+8-3 olur. Üçgen tek başına kalınca ▲=5+8-3 olur. Sol taraftaki işlemin sonucunu yapınca ▲=10 olur."* şeklinde doğru yanıtlamıştır. Etkinlikteki ●-6=18-1 açık cümle örneğini Ö4, *"Eşitliğin her iki tarafına 6 eklersek daire yalnız kalır. Sol tarafta 18-1+6 işlemini yaparsak ●=23 olur."* şeklinde yanıtlayarak doğru sonuca ulaşabilmiştir. Öğrencilerin eşitliğin korunumu ilkesince her iki yana eklenen ya da çıkarılan sayıların aynı olması durumunda dengenin bozulmayacağının farkına vardıkları tespit edilmiştir. Boşluklara gelmesi gereken sayıları yalnız bırakacak şekilde işlemler yaparak doğru sonuçlara ulaşabildikleri gözlemlenmiştir.

Etkinlikte verilen "3.♦=18-6" açık cümle örneğini A odak öğrencisi, *"Önce sol taraftaki işlemin sonucunu bulalım. 18-6 işleminin sonucu 12'dir. İşlem daha sade olarak 3.♦=12 şeklinde yazılır. Eşitliğin korunumundan her iki yanı da üç ile bölersek denge bozulmaz. İki yandaki ifadelerde 3.♦ ifadeyi 3'e bölersek ♦ olur, 12'yi 3'e bölersek 4 olduğundan ♦=4 olur."* şeklinde açıklamada bulunarak doğru sonuca ulaşmıştır. Etkinlikteki son açık cümle örneği olan "♥:2=12+5" ifadesini Ö1, *"12 ile 5'i topladıktan sonra ifade ♥:2=17 şekline dönüşür. Kalp sembolünü yalnız bırakmak için iki yanı da 2 ile çarparız. ♥=34 olur."* şeklinde yanıtlayarak doğru sonuca ulaşmıştır. Öğrencilerin verdiği yanıtlardan anlaşılacağı üzere eşitliğin denge anlamını ve eşitliğin korunumu ilkesini kavrayan öğrencilerin, açık cümle örneklerinde boş bırakılan yerlere gelmesi gereken sayıları rahatlıkla bulabildikleri gözlemlenmiştir.

Üçüncü öğretim dizisinin tekrar etabında eşit işaretinin denge anlamı ve eşitliğin korunumu ilkesi üzerinde durulduktan sonra daha çok öğretimin ilk etabında ve odak öğrencilerle yapılan klinik görüşmeler esnasında zorlandıkları bir durum olan ilişkisel düşünme üzerinde durulmuştur. Etkinlikte dört işlem yapılması gereken günlük hayat durumları ile işlemlerin ögeleri arasındaki ilişkiler görünür hale getirilerek öğrencilerin ilişkisel düşünmeleri desteklenmeye çalışılmıştır.

Etkinlikte öğrencilerden önce örnek durumların incelenmesi istenmiş sonra bu örnek durumlara benzer olarak oluşturulan açık cümle örneklerinde verilmeyen ögelerin bulunması istenmiştir. İlk olarak Şekil 4.77'de gösterilen örnek durum öğrencilere sunulmuştur.

a)Bir sepetteki kırık ve sağlam yumurtaların toplamını eşit işareti yardımıyla gösterebiliriz. Bu sepette 5 kırık 15 sağlam yumurta vardır. Sepetteki yumurtalardan 2 tanesi daha kırılırsa kaç tane sağlam yumurta kalır? Bu duruma ait eşitlikte boşluğa gelmesi gereken sayıyı bulunuz.

5+15=7+□ (Denge durumunda toplanan sayılardan biri 2 artarsa diğeri 2 azalır.)

Şekil 4.77 Öğretimin Tekrar Etabındaki Açık Cümle Etkinliğinin İlk Sorusu

Örnek durum öğrenciler tarafından incelendikten sonra toplama işleminde verilmeyen ögenin 15'in 2 eksiği olan 13 sayısı olması gerektiği farkına varılmıştır. Ardından "123+56=120+□" açık cümlesinde verilmeyen öge sorgulandığında Ö2, "*Eşitliğin sol yanında 123 sağ yanında ise 120 sayısı var. Toplanan sayılardan ilki 3 eksilmiştir. Dengenin bozulmaması için toplanan ikinci sayılarda sol tarafta 56 olduğundan sağ tarafta 56'nın 3 fazlasından 59 olmalıdır.*" şeklinde görüşünü bildirmiştir. Sınıfta genel olarak öğrencilerin benzer yanıtlar vererek doğru sonuca işlem yapmadan sadece ilişkisel olarak doğru yanıt verebildiği gözlemlenmiştir.

Etkinlikte çıkarma işlemleri ile eşitliğin kurulduğu Şekil 4.78'de gösterilen ikinci örnek durumun öğrenciler tarafından incelenmesi istenmiştir.

b) Kerem ile babasının yaşları farkı hayatları boyunca sabit kalacaktır. Kerem 4 yaşında iken babası 37 yaşındadır. Kerem 10 yaşına gelince babası kaç yaşında olacaktır? Bu durma ait yazılan eşitlikte boşluğa gelmesi gereken sayıyı bulunuz.

37– 4 = □ –10 (Denge durumunda farkı alınan iki sayıdan biri 6 eksilirse diğeri de 6 eksilir.)

Şekil 4.78 Öğretimin Tekrar Etabındaki Açık Cümle Etkinliğinin İkinci Sorusu

Örnek durumu inceleyen öğrenciler baba ile oğlunun yaşları arasındaki farkın sabit kalacağını düşünerek eşitlikte verilmeyen ögenin 37'nin 6 fazlası olan 43 olması gerektiğini söylemişlerdir. Ardından "37– 4 = □ –10" açık cümle örneğinde boşluğa gelmesi gereken sayı sorgulandığında B odak öğrencisi, *"Çıkarma işlemlerinde farkın sabit kalması için sağ tarafta çıkan sayı 6 azalırsa eksilen sayı da 6 azalmalıdır. Boşluğa gelmesi gereken sayı 37'nin altı eksiği 31 olmalıdır."* şeklinde açıklamada bulunarak soruyu yanıtlamıştır. Klinik görüşmeler esnasında açık cümle örneklerinde daha çok işlemsel düşünerek yanıtlar veren B odak öğrencisinin etkinlikte örnek durumu inceledikten sonra zorlanmadan ilişkisel düşünerek doğru yanıtlara ulaşabildiği gözlemlenmiştir.

Etkinlikte çarpma işlemleri ile eşitliğin kurulduğu Şekil 4.79'da gösterilen üçüncü örnek durumun öğrenciler tarafından incelenmesi istenmiştir.

c) Ordu ile Ankara arasındaki yolu 100 km/saat hızla 6 saatte giden bir araç 50 km/saat hızla kaç saatte gider? Bu durma ait yazılan eşitlikte boşluğa gelmesi gereken sayıyı bulunuz.

100.6 =50.□ (Denge durumunda çarpanlardan birinin 2 ile çarpılırken diğeri 2 ile bölünür.)

Şekil 4.79 Öğretimin Tekrar Etabındaki Açık Cümle Etkinliğinin Üçüncü Sorusu

Örnek durum öğrenciler tarafından incelendikten sonra araştırmacı, "*Verilen örnekte 600 km yol değişmemektedir. Fakat hız arttıkça buna bağlı olarak* zaman *azalmaktadır. Bu durumun farkına varabildiniz mi?"* şeklindeki sorusuna sınıftaki öğrenciler farkına vardıklarını ifade etmişlerdir. *"O zaman hızın yarısını alırsak zamanda nasıl bir değişme olur?"* sorusuna ise yine sınıftaki öğrenciler, "*İki katına çıkar."* şeklinde yanıtlamıştır. Ardından araştırmacı tarafından "100.6 =50.□" açık cümlesinde boşluğa gelmesi gereken sayı sorgulandığında Ö20,*"Eşitlikte dengenin bozulmaması için çarpılan iki sayıdan birinin yarısı alınırsa diğerinin iki katı alınır. O zaman 6'nın iki katı 12 boşluğa yazılması gereken sayıdır."* şeklinde doğru olarak soruyu yanıtlamıştır. Günlük hayattan verilen örnek durumun incelenmesinden sonra öğretimin ilk etabına göre bu tip bir soruya ilişkisel düşünerek doğru yanıt veren öğrenci sayısının belirgin bir şekilde arttığı gözlemlenmiştir.

Ekinliğe bölme işlemleri ile eşitliğin kurulduğu Şekil 4.80'de gösterilen örnek durumun öğrenciler tarafından incelenmesi istenilerek devam edilmiştir.

d) İrem 48 TL ile kilosu 3 TL olan domateslerden alarak konserve yapmıştır. Ertesi sene yine aynı miktarda konserve yapmak için pazardan kilosu 6TL olan domateslerden alırsa ödemesi gerek para miktar ne kadar olacaktır? Bu durma ait yazılan eşitlikte boşluğa gelmesi gereken sayıyı bulunuz.

48 : 3 = □ : 6 (Denge durumunda bölen sayı iki katına çıkarsa bölünen sayıda iki katına çıkar.)

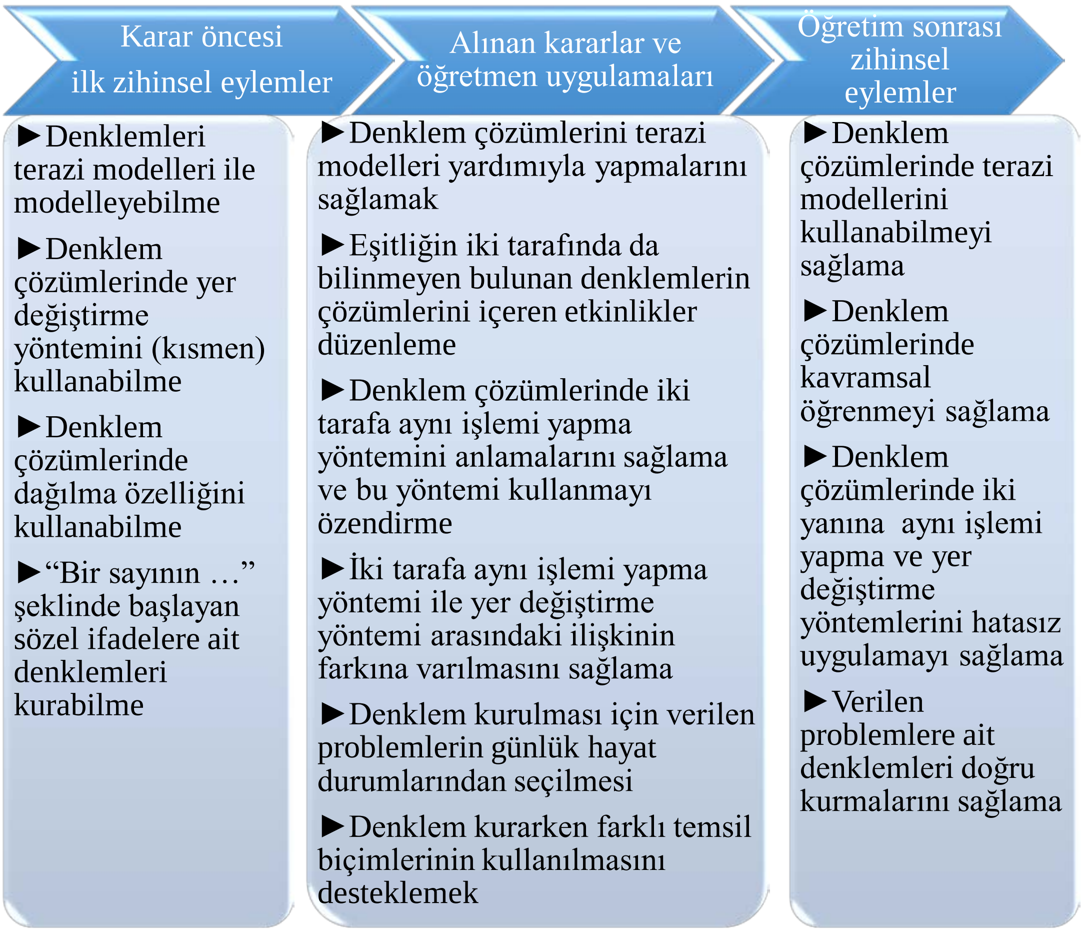
Şekil 4.80 Öğretimin Tekrar Etabındaki Açık Cümle Etkinliğinin Dördüncü Sorusu

Sınıftaki öğrenciler örnek durumu inceledikten sonra araştırmacı, öğrencilere *"Verilen örnekte eşitlik kurulurken eşitliğin iki tarafında bölme işlemleri sonucunda elde edilen sayı neyi ifade etmektedir? Bu eşitlikte bölme işlemine ait ögeler nasıl bir ilişki içermektedir?"* şeklinde bir soru yöneltmiştir. B odak öğrencisi, *"Eşitliğin iki tarafında bölme işlemlerinin sonucu aynı miktarda yapılacak olan konserve miktarını göstermektedir. İki tarafta da domateslere ödenen para miktarı kilogram başına ödenecek ücrete bölündüğünde konserve miktarını gösterecektir. Kilogram başına ödenecek miktar iki katına çıkarsa toplam ödenecek ücret de iki katına çıkmalı. Bölme işlemlerinin sonucunun aynı olması için bölen iki katına çıkarsa bölünen de iki katına çıkar. Ödenen toplam ücret 48'in iki katından 96 lira olmalı."* şeklinde açıklama yaparak soruyu yanıtlamıştır. Ardından araştırmacı örnek duruma benzer olarak "96:2=□:6" açık cümlesinde boşluğa gelmesi gereken sayının ne olması gerektiğini sorgulamıştır. C odak öğrencisinin yöneltilen soruya, *"Bu soruda sanırım az önceki örnektekine benzer olacak. Bölen 3 katına çıkmış bölünen de 3 katına çıkar diye düşünüyorum. Boşluğa gelmesi gereken sayı 288 olmalı."* şeklinde açıklama yaparak doğru sonuca ulaştığı gözlemlenmiştir.

C odak öğrencisinin öğretim dizisinin ilk etabında bu tür soruları genelde işlemsel olarak yapma eğiliminde olduğu tespit edilmişti. C odak öğrencisine bu etkinlik vasıtasıyla ilişkisel düşünme fırsatı verilmesinin olumlu sonuçlar doğurduğu tespit edilmiştir. Benzer olarak uygulanan etkinlik vasıtasıyla sınıftaki birçok öğrencinin, bu tür sorularda sayılar arasında ilişkileri fark etmelerini kolaylaştırdığı tespit edilmiştir.

4.5 Dördüncü Öğretim Dizisi Denklemler ve Çözümlerine Ait Bulgular

Dördüncü öğretim dizisinde "7.2.2.2. Birinci dereceden bir bilinmeyenli denklemi tanır ve verilen gerçek hayat durumlarına uygun birinci dereceden bir bilinmeyenli denklem kurar.", "7.2.2.3. Birinci dereceden bir bilinmeyenli denklemleri çözer." ve "7.2.2.4. Birinci dereceden bir bilinmeyenli denklem kurmayı gerektiren problemleri çözer." kazanımları 15 saatlik plan çerçevesinde sınıfta uygulanmıştır. Tahmini öğrenme yol haritaları kapsamında öğrenme hedefleri, sözel olarak verilen eşitlik durumlarına ilişkin denklemleri kurulabilme, verilen denklemleri eşitliğin korunumu ilkesi yardımıyla çözebilme, günlük hayat durumlarına ilişkin verilen durumlara ait denklemleri kurabilme ve çözebilme olarak belirlenmiştir. Bu hedefler doğrultusunda hazırlanan etkinlikler sınıftaki öğrencilere 10 saat boyunca uygulanmış ve öğrencilerin eksik oldukları, zorlandıkları ya da kavram yanılgılarına sahip oldukları noktalar tespit edilmeye çalışılmıştır. Bu 10 saatlik öğretim etabının ardından odak öğrencilerle ara klinik görüşmeler gerçekleştirilmiştir. Tespit edilen bu hatalar ve eksikliklerin giderilmesi amacıyla Şekil 4.81'deki öğretim kararları alınarak beş ders saati süresince öğretim dizisinin tekrar etabı uygulanarak tespit edilen eksiklikler giderilmeye çalışılmıştır.



Şekil 4.81 Dördüncü Öğretim Dizisinde Alınan Kararlar

4.5.1 Dördüncü Öğretim Dizisinin İlk Etabına Ait Bulgular

Öğretim dizisinin ilk etabına denklemin ne olduğu sorusuyla başlanmıştır. Öğrencilerin denklemler konusuna başlamadan önce matematik derslerinde birçok kez duydukları kavram hakkında kısmen de olsa doğru bilgilere sahip oldukları görülmüştür. Sınıftaki öğrenciler, *"Bilinmeyeni bulmaya yarar."*; *"İçerisinde bilinmeyen harfler olan eşitlikler."* gibi açıklamalarla kavramı tanımlamaya çalışmıştır. Araştırmacı öğrencilere denklem örnekleri ("x+5=12", "2a+6=3a-4", “3.(x+2)=12”) ve denklem olmayan örnekleri (“5+3=8”, “x+2”, “8-4=4”, “2a+b”) vererek öğrencilerden denklem kavramını yeniden tanımlamalarını beklemiştir.

Örnekleri inceleyen öğrencilere araştırmacı, *“İncelediğiniz örneklerde gözünüze çarpan durumları ifade edebilir misiniz?”* sorusunu yöneltmiştir. Ö1, *“5+3=8 bir eşitlik fakat içerisinde bilinmeyen yok. Onun için denklem değil. x+2’ de ise eşitlik yok, ona cebirsel ifade diyorduk.”* şeklinde soruyu yanıtlamıştır. Araştırmacı öğrencinin vermiş olduğu yanıtın doğru olduğunu belirttikten sonra denklem kavramının tanımını öğrencilerden yeniden yapmasını istemiştir. A odak öğrencisi, *“Denklem, içerisinde bilinmeyeni gösteren harflerin bulunduğu eşitliklerdir.”* şeklinde tanımlamada bulunmuştur. Sınıftaki öğrenciler de benzer olarak, *“Bilinmeyen içeren eşitliklerdir.”; “Bir cebirsel ifadenin bir sayıya ya da başka cebirsel ifadeye eşitlenmesidir.”* gibi tanımlamalar yapmışlardır.

Ardından araştırmacı, *“Denklemde birden fazla bilinmeyenin olabileceği durumlar olabilir mi? Örnek verebilir misiniz?”* sorusunu sınıfa yöneltmiştir. B odak öğrencisi, *“Bence olabilir. Örneğin a + b=10 içerisinde bilinmeyenler bulunan bir eşitliktir.”* şeklinde soruyu yanıtlamıştır. B odak öğrencisinin verdiği yanıt bazı öğrencilere anlamsız gelmiştir. C odak öğrencisi, *“Ama burada bilinmeyenin sonucunu bulamayız, bence denklem değil.”* şeklinde açıklama yaparak kafasını karıştıran durumu belirtmiştir. Araştırmacı, *“Bir denklemde birden fazla bilinmeyen olabilir. Örneğin arkadaşınızın verdiği örnekte toplamları 10 eden iki sayıdan bahsediyor. Toplamları 10 eden birden fazla sayı olabilir. Bu bir denklemdir ama iki bilinmeyenli bir denklemdir. Denklemlerdeki bilinmeyenler bazen birden fazla olabilir, yani bilinmeyenin değişen nicelik anlamı ile kullanıldığı durumlar da vardır. Biz bu sene genelde içerisinde bir bilinmeyen olan denklemler ile ilgileneceğiz.”* açıklamasını yapmıştır.

Araştırmacı, *“a^2=9 ifadesi sizce bir denklem midir?”* sorusunu sınıfa yöneltmiştir. Sınıftaki öğrenciler bu konuda kararsız kalmışlardır. Ö11, *“İçerisinde bilinmeyen bulunan bir eşitlik denklem gibi duruyor ama cevabı nedir bilmiyorum.”* şeklinde soruyu yanıtlamıştır. Araştırmacı, *“Evet denklemdir. Burada bilinmeyen olan a’nın ikinci kuvveti alınmış bilinmeyenin farklı kuvvetleri alınarak da denklem kurulabilir. Burada bilinmeyenin kuvveti denklemin derecesidir. Biz bu sene birinci* *dereceden denklemler ile ilgileneceğiz."* açıklamasında bulunmuştur. Araştırmacı denklemler konusunda karşılaşacakları bilinmeyen sayısı ve derece konularına açıklık getirdikten sonra öğrencilerden birinci dereceden bir bilinmeyenli denklemlere örnekler vermelerini istemiştir. Sınıftaki öğrenciler, *"x+2=5"*, *"2a+5=10"*, *"3b+5=20"* vb. örnekler vermiştir. Araştırmacının sorduğu, *"2x+y=x+3y derece ve bilinmeyen olarak nasıl bir denklemdir?"* sorusuna B odak öğrencisi, *"Birinci dereceden iki bilinmeyenli denklemdir."* şeklinde doğru yanıt vermiştir. Ardından araştırmacının, *"$a^2+b^2=10$ derece ve bilinmeyen olarak nasıl bir denklemdir*?" sorusunu Ö7, *"İkinci dereceden iki bilinmeyenli, bir denklemdir."* şeklinde doğru olarak yanıtlamıştır.

Araştırmacı denklem nedir sorusu ile başladığı ve bilinmeyen sayısı ile derece kavramlarının anlamı ile devam ettiği dersin giriş aşamasında öğrencilerden gelen yanıtları toparlayarak, *"İçerisinde bilinmeyen bulunan eşitliklere denklem denir. a,b,c (a≠0) katsayıları bilinen sayılar ve x değişkeni bilinmeyen sayı olmak üzere ax+b=c şeklindeki matematiksel ifadelere birinci dereceden bir bilinmeyenli denklemler denir. Bir denklem kurulurken bilinmeyen yerine x, y, z, a, b… gibi harfler kullanılabilir."* şeklindeki tanımı öğrencilerle paylaşmıştır.

Araştırmacı denklemlerin tanımını yaptıktan sonra öğrencilerin 6.sınıfta görmüş oldukları cebirsel ifadeler konusunu hatırlatarak verilen sözel ifadelere ait cebirsel ifadeleri yazmalarını istediği örnekleri öğrencilere sunmuştur. İlk olarak, *"Bir sayının iki katının beş fazlasını ifade eden cebirsel ifade nedir?"* sorusunu sormuş ve Ö2 tarafından soru, *"Bir sayı x olsun iki katı 2x ise 5 fazlası 2x+5 olarak yazılır."* şeklinde doğru olarak yanıtlanmıştır. Ardından, *"Bir sayının 3 fazlasının 5 katını ifade eden cebirsel ifade nedir?"* sorusu C odak öğrencisi tarafından, *"x+3.5"* şeklinde hatalı olarak yanıtlanmıştır. Bu esnada söz alan B odak öğrencisi, *"Bence parantez kullanılmalı, (x+3).5 şeklinde olmalı."* şeklindeki ifadesiyle doğru yanıta ulaşmıştır. Sınıfta C odak öğrencisi gibi hatalı yanıt veren öğrencilerin olduğu gözlemlenmiştir. Araştırmacı tarafından yapılan hatalar parantezin önemine vurgu yapılarak ortadan kaldırılmaya çalışılmıştır. Ardından "bir sayının üç katı", "bir sayının dörtte biri", "bir sayının beş katının üç eksiği", "bir sayını iki katı ile toplamı", "bir sayının yedi eksiğinin yarısı", "bir sayının dört fazlasının üçte biri" şeklindeki sözel ifadelere ait cebirsel ifadeler sınıftaki öğrenciler tarafından bulunmaya çalışılmıştır. Sınıf tartışması şeklinde gerçekleştirilen etkinlikte öğrencilerin genelinin verilen sözel ifadelere ait cebirsel ifadeleri doğru olarak yazabildikleri tespit edilmiştir. Fakat hatalı yanıt veren öğrencilerin de olduğu gözlemlenmiştir. Hatalı yanıtlara müdahale edilerek gerekli hatırlatmalar yapılmıştır. Böylece öğrencilerin denklem kurmada karşılaşacakları durumlara hazırlık yapılmaya çalışılmıştır.

Öğretim dizisine denklem tanımının öğrencilerle birlikte yapılması ve cebirsel ifadelerin hatırlatılmasından sonra verilen farklı durumlara ait denklem kurma çalışmaları ile devam edilmiştir. Araştırmacı öğrencilerden, *"Bir sayının iki katının sekiz fazlası yirmidir."* ifadesine ait denklemi kurmalarını istemiştir. Ö6,*"Bir sayı x olsun. İki katı 2x ise iki katının sekiz fazlası 2x+8 olur. Bu yirmiye eşit ise denklem 2x+8=20 şeklinde kurulur."* ifadesi ile denklemi doğru olarak kurmuştur. Benzer olarak, *"İki eksiğinin dört katı yirmi sekiz olan sayı nedir?"* ifadesine ait denklemi C odak öğrencisi, *"İki eksiğinin dört katı 2-4x olur. Bu yirmi sekize eşit ise 2-4x=28 olarak denklem kurulur."* şeklinde açıklama yaparak denklemi yanlış kurduğu gözlemlenmiştir. C odak öğrencisinin verilen sözel ifadelerin cebirsel olarak neye karşılık geldiğini anlamadığı tespit edilmiştir. Söz alan A odak öğrencisi denklemin yanlış kurulduğunu ifade ederek, *"Bilinmeyen sayı x olsun bunun iki eksiği x-2 olarak yazılır. İki eksiğinin dört katını almak için parantez kullanarak yazmak gerekir, denklem (x-2).4=28 olarak yazılır."* açıklamasıyla denklemi doğru bir şekilde kurduğu tespit edilmiştir.

Araştırmacı tarafından sunulan diğer bir örnekte, öğrenciler tarafından *"Bir sınıftaki kızların sayısı erkeklerin sayısının iki katıdır. Bu sınıftaki kızlar ile erkekler arasındaki ilişkiyi gösteren denklemi kurunuz."* ifadesine ait denklemin kurulması istenmiştir. Verilen ifadeye ait denklemi Ö8, *"Sınıftaki kızları k ile erkekleri e ile gösterirsek, kızlar daha fazla, k=2e şeklinde denklem kurulmalıdır."* şeklinde doğru yanıtlamıştır. Fakat denklemi yanlış kuran öğrencilerin de olduğu gözlemlenmiştir. Hatalı denklem kuran öğrenciler dinlendiğinde Ö20'nin,*"Kızlar iki kat, erkekler 1 kat. Kızların başına 2 gelir, 2k=e"* şeklinde yanıtlayarak değişkenleri yanlış tanımladığı için hata yaptığı gözlemlenmiştir. Yine benzer olarak hatalı yanıt veren Ö21, *"Kızlar iki kat, erkekler 1 kat, sınıf mevcudu 3 kat olacağından e+k=3 olur."* şeklinde yanlış yanıtlamıştır. Ö21'in bilinmeyenlerin önünde katsayı olmadığından bilinmeyenleri 1'e ve 2'ye eşitlediği ve toplamlarını 3 olarak yazdığı için hata yaptığı gözlemlenmiştir.

Öğretim dizisine, *"İrem'in yaşı Kerem'in yaşının iki katından bir eksiktir. İrem ile Kerem'in yaşları toplamı 11 ise Kerem'in yaşını bulmamız için kurulması gereken denklem nedir?"* sorusu yöneltilerek devam edilmiştir. B odak öğrencisinin, *"Kerem'in yaşı x olsun. İrem Kerem'in iki katının bir eksiği ise İrem'in yaşı da 2x-1 olur. İkisinin yaşları toplamı 11 olduğundan denklem x+2x-1=11 şeklinde kurulabilir."* açıklaması ile istenen denklemi doğru olarak kurduğu tespit edilmiştir. Sınıftaki öğrencilerin genelinin bu şekilde denklemi doğru olarak kurabildiği gözlemlenmiştir. Benzer olarak, *"Bir çiftlikte bulanan tavuk ve ineklerin sayısı yirmidir. Bu çiftlikteki inek ve tavukların ayaklarının sayısı elli olduğuna göre bu çiftlikte kaç inek vardır?"* sorusuna ait denklemin öğrenciler tarafından kurulması istenmiştir. Sınıftaki öğrencilerin bu soruya ait denklemi kurarken oldukça zorlandıkları gözlemlenmiştir. Öğrencilerin inek sayısını x ile gösterdikten sonra tavuk sayısını ne ile göstermeleri gerektiğini bulamadıkları tespit edilmiştir. Bu durum üzerine araştırmacı öğrencilerle birlikte çiftlikteki inek ve tavukları sayısının nasıl bulunabileceğini göstermek için Çizelge 4.2'de gösterilen tabloyu hazırlamış ve bu sayede tavukların sayısını hangi cebirsel ifade ile göstermeleri gerektiğini öğrencilere sormuştur.

Çizelge 4.2 İnek ve Tavuk Sayılarını Cebirsel Olarak Göstermede Kullanılan Çizelge

İnek Sayısı	Tavuk Sayısı
1	20-1
2	20-2
3	20-3
x	?

Öğrenciler çizelgede gösterilen tablo temsilini inceledikten sonra inek sayısının x olduğunda tavuk sayısının ne olacağını bulurken araştırmacı ile öğrenciler arasında yaşanan diyaloglar şu şekilde gerçekleşmiştir:

Araştırmacı: *Tabloyu incelediğinizde inek sayıları verildiği zaman tavuk sayıları nasıl bulunur?*

Ö1: *Çiftlikteki hayvan sayısı 20 olduğu için inek sayısını 20'den çıkararak tavuk sayısı bulunmuş.*

Ö7: *Mesela 2 inek varsa 20-2=18 tane tavuk vardır.*

Araştırmacı: *Evet doğru… Ama inek sayısı x olursa tabloda eksik bıraktığım tavuk sayısı ne olur?*

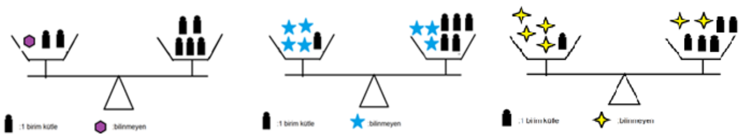
Ö14: *Aynı diğer satırlarda olduğu gibi 20'den çıkarmalıyız. Siz x tane inek var yazmışsınız, o zaman tavuk sayısı 20-x olacak.*

Araştırmacı: *Arkadaşınız doğru söylüyor. Şimdi denklemi kurmaya çalışalım. Toplam ayak sayısını biliyoruz 50 tane. Unutmayın ineklerin dört tavukların iki ayağı vardır.*

A odak öğrencisi. : *Her ineğin dört ayağı varsa 4.x ineklerin ayak sayıları gösterir. Her tavuğun iki ayağı olduğu için (20-x).2 tavukların toplam ayak sayısı. Şimdi inek ve tavukların ayakları toplamını 50'ye eşitleyelim. Denklem 4.x+(20-x).4=50 şeklinde kurulur.*

Diyaloglardan da anlaşılacağı üzere, öğrencilerin doğru şekilde yönlendirilmesiyle soruya ait denklemi nasıl kurabilecekleri öğrencilere hissettirilmiştir. Sınıftaki öğrencilerin çoğunun denklemi tablo temsilinden yararlandıktan sonra rahatlıkla kurabildiği gözlemlenmiştir.

Öğretim dizisine "7.2.2.3. Birinci dereceden bir bilinmeyenli denklemleri çözer." kazanımı çerçevesince hazırlanan etkinliklerin uygulanmasıyla devam edilmiştir. Şekil 4.82'de verilen terazi modelleri öğrencilere sunulmuş, ardından öğrencilerden modellenen denklemleri yazarak denklemleri çözmeleri beklenmiştir.



Şekil 4.82 Öğretimin İlk Etabında Kullanılan Terazi Modeli Etkinlikleri

Terazi modelleri ile verilen denklemler sınıftaki öğrencilerin geneli tarafından "x+2=5", "4x+1=3x+5" ve "4x+1=2x+5" şeklinde doğru olarak ifade edilmiştir. Kurulan denklemlerde terazinin iki kefesine de dengeyi bozmayacak şekilde aynı işlemlerin uygulanarak öğrenciler tarafından çözülmesi istenmiştir. Ö1, *"Terazinin sol kefesinde x+2, sağ kefesinde 5 birim kütle var. Her iki kefeden 2 birim kütle çıkarırsak denge bozulmaz. Bilinmeyen ile gösterilen x, 3 birim kütleye eşit olur."* şeklinde açıklama yaparak denklemi doğru olarak çözmüştür. İkinci terazi modeli öğrencilere biraz daha karışık gelmiştir. Araştırmacı, terazi modelinde yapılması gereken işlemleri gösteren çizimleri öğrencilerden aldığı yanıtlara göre ilerletmiştir. Bu esnada yaşanan diyaloglar şu şekilde gerçekleşmiştir:

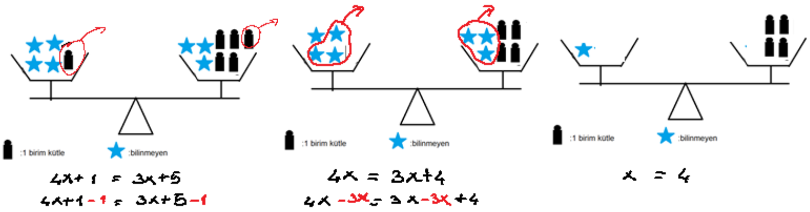
Araştırmacı: *Terazi modelinde 4x+1=3x+5 denkleminin modellendiğini söylemiştiniz. Dengeyi bozmadan nasıl ilerleyebiliriz?*

Ö11: *Her iki yanından da 1 birim kütle çıkarılabilir. Sol yanında 4x, sağ yanında 3x+4 kalır. 4x=3x+4 elde deriz.*

Araştırmacı: *Evet… Şimdi kefenin bir yanında 4x, diğer yanında 3x +4 kaldı. Galiba iki yanında da bilinmeyen bulunması size biraz karışık geldi. Az önce iki kefeden bilinen kütleleri dengeyi bozmadan çıkardınız. Sizce terazinin iki kefesinden de eşit miktarda bilinmeyen çıkarsa denge bozulur mu?*

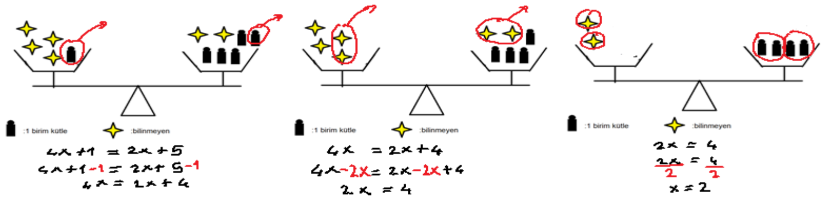
B odak öğrencisi: *Hayır… Bence bozulmaz. Terazinin iki kefesinde x'ler var. Eşit miktarda çıkarabiliriz. İki yanından da 3'er tane x çıkaralım. 4x-3x=3x-3x+4, çıkarmaları yaptıktan sonra x=4 olur.*

Araştırmacı terazi modelleri ile verilen denklemi çözerken diyaloglarda yapılan işlemlerin görünür hale gelmesi için Şekil 4.83'te gösterildiği gibi işlemleri adım adım modellemiştir.



Şekil 4.83 Öğretimin İlk Etabındaki Terazi Modeli ile Denklem Çözümü 1

Son terazi modelinde verilen "4x+1=2x+5" çözümü istendiğinde A odak öğrencisinin, *"Önce iki kefeden 1'er birim kütle çıkaralım. 4x+1-1=2x+5-1 işlemi sonunda terazide 4x=2x+4 eşitliği oluşur. Şimdi her iki kefeden 2x çıkaralım. 4x-2x=2x-2x+4 işlemi sonunda 2x=4 eşitliği oluşur. En son iki kefenin de yarısını alırsak, 2x:2=4:2 işlemi sonunda x=2 oluşur."* şeklinde açıklama yaparak denklemi doğru olarak çözdüğü gözlemlenmiştir. A odak öğrencisinin çözüm esnasında yaptığı işlem basamakları araştırmacı tarafından Şekil 4.84'te yapılan çizimlerle gösterilmiştir.



Şekil 4.84 Öğretimin İlk Etabındaki Terazi Modeli ile Denklem Çözümü 2

Terazi modelleri yardımıyla denklem çözümünde tecrübe kazanan öğrencilerden denklem çözerken fark ettikleri durumlar hakkındaki görüşleri alınmış ve kullandıkları yöntemler tespit edilmeye çalışılmıştır. Araştırmacı öğrencilerle görüş alışverişinde bulunurken yaşanan diyaloglar şu şekilde gerçekleşmiştir:

Araştırmacı: *Denklem çözümlerinde bilinmeyeni bulmaya çalışırken nasıl bir yol izliyorsunuz?*

Ö11: *Denklemleri çözerken öncelikli hedefimiz bilinmeyenleri bulmak. Bilinmeyeni bulurken sürekli bilinmeyeni eşitliğin bir yanında yalnız bırakmaya çalışıyoruz.*

Araştırmacı: *Evet… Denklem çözerken bilinmeyeni yalnız bırakmaya çalışıyoruz, bu doğru. Peki, bu işlemleri yaparken nelere dikkat ediyorsunuz?*

Ö8: *Bilinmeyeni yalnız bırakmaya çalışırken yaptığımız işlemlerde sürekli dengeyi korumaya çalışıyoruz. Eşitliğin korunumu ilkesinden hareketle eşitliğin iki yanına da aynı işlemleri yapmaya çalışıyoruz.*

Araştırmacı: *Evet… Denklem çözerken sürekli eşitliğin korunumu ilkesine dikkat ediyoruz. Peki denklem çözümlerinde bilinmeyeni yalnız bırakırken işlemlerin sırası sizce önemli mi? Örneğin 2x+4=12 ve 2.(x+4)=12 denklemleri çözülürken aynı işlem sırası mı uygulanır?*

Ö2: *Aynı olmamalı. Bu durum benim kafamı biraz karıştırdı. Nasıl olmalı, yardımcı olur musunuz?*

Araştırmacı: *Bu tür durumlarda denklemin neyi ifade ettiğini anlamanız çok önemli. İlk* denklemde, *"Hangi sayının iki katının dört fazlası on iki eder?" ifadesi var. Geriye doğru işlemler yapabiliriz. "Dört fazlası olmasaydı ne olurdu?" sorusunu kendimize sorarsak eşitliğin her iki yanından* dört eksiltebiliriz. *Önce eşitliğin her iki yanından* dört eksiltelim.*"2x+4-4=12-4" iki yanındaki işlemleri* *yaparsak "2x=8" olur. Şimdi "İki katı olmasaydı ne olurdu?" sorusunu cevaplayalım. Her iki yanını da ikiye bölelim, "2x:2=8:2". Her iki yanındaki işlemleri yaparsak x=4 sonucunu buluruz. Sizce diğer denklem nasıl çözülecek?*

Ö14: *2.(x+4)=12 denkleminde "Hangi sayının dört fazlasının iki katı on ikidir?" ifadesi var. Burada önce "İki katı olmasaydı ne olurdu?" sorusunu cevaplamalıyız. Her iki yanını da önce ikiye bölelim "x+4=6" olur. Şimdi her iki yanından dört eksiltelim, x=2 sonucuna ulaşırız.*

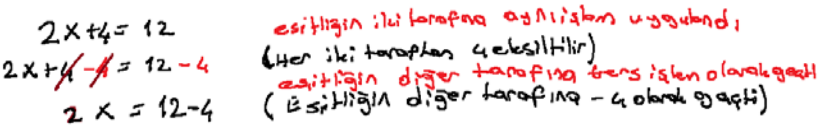
Araştırmacı: *Evet gördüğünüz gibi iki denklemde bilinmeyenleri yalnız bırakırken farklı sıralar kullanıldı. Bu sebeple denklemin neyi ifade ettiğini anlamak çok önemli… Ayrıca ikinci denklemi çözerken dağılma özeliğinden de yararlanılabilir.*

B odak öğrencisi: *Bende fark etmiştim. Ben önce dağılma özelliğinden 2.(x+4)=12 denklemini 2x+8=12 olarak yazdım. Ardından iki yanından sekiz çıkardım, 2x=4. Sonra iki yanını da 2'ye böldüm, x=2 buldum.*

Araştırmacı: *Denklem çözerken kullandığınız farklı yöntemler var mı?*

A odak öğrencisi: *Ben daha farklı çözüyorum. Örneğin ilk denklemde "x+4=12 yazıyordu. +4'ü eşitliğin diğer yanına -4 olarak yazıyorum, 2x=12-4 oluyor. Sonra işlemi yapıyorum. 2x=8, sonra çarpı iki diğer yana bölü iki olarak geçince x=8:2 oluyor. Son olarak x=4 sonucunu buldum.*

Araştırmacı: *Evet… Böyle bir çözüm yolu var. Aslında terazi modellerinde iki yanına da aynı işlemi uyguladığımız yöntemle aynı. İsterseniz arkadaşınızın anlattığı yöntemle aynı olduğunu gösterelim. Ama ezbere yapmak biraz riskli olabilir. Nedenleri üzerinde duralım.*



Şekil 4.85 İki Yana Aynı İşlemi yapma Yöntemi İle Denklem Çözümü Örneği

Şekil 4.85'te gösterildiği gibi yer değiştirme yönteminin aslında her iki yana aynı işlemi yapma yönteminin daha hızlı yazılmış hali olduğu vurgulanmıştır. Sınıftaki diğer öğrenciler arasında da denklem çözümlerinde yer değiştirme yöntemini kullananların olduğu tespit edilmiştir. Araştırmacı denklem çözümlerinde eşitliğin her iki yanına aynı işlemi yapma yöntemini ön plana çıkarmaya çalışmıştır. Yer değiştirme yöntemini kullanan öğrencileri ezberden uzaklaştırmak için yöntemin aslında eşitliğin her iki yanına aynı işlemi yapma yönteminin farklı bir gösterimi olduğunu göstermiştir.

Terazi modelleri yardımıyla denklem çözümlerinde tecrübe kazanmaya başlayan sınıftaki öğrencilere, hazırlanan etkinlikte çözmeleri için bazı denklemler sunulmuştur. Etkinlikte ilk olarak öğrencilerden "$-x+6=-12$" denkleminin çözümü istenmiştir. Ö11, *"Eşitliğin her iki yanından 6 çıkarırsak "–x=-12-6 şeklinde yazılır. Ardından sağ yandaki işlemi yaparsak -x =-18 olacaktır. Eşitliğin her iki yanını -1 ile çarparsak x=18 olacaktır."* şeklinde doğru olarak çözüme ulaşmıştır. Fakat sınıftaki bazı öğrencilerin bilinmeyenin kat sayısının negatif olmasından dolayı bilinmeyenin sonucunun negatif olması gerektiğini düşündüğünden "x=-18" gibi hatalı yanıtlar verdiği gözlemlenmiştir. Araştırmacı, *"Bilinmeyenin önünde eksi işareti olduğu durumlarda arkadaşımızın yaptığı gibi her iki yanı -1 ile çarpabilirsiniz, bilinmeyenin katsayısının negatif olması sonucun negatif olmak zorunda olduğu anlamına gelmez."* açıklamasıyla bilinmeyenin katsayısının negatif olduğu denklemlerde yapılan hataların önüne geçmeye çalışmıştır.

Etkinliğe "3x+8=26" denkleminin çözümü sorgulanarak devam edilmiştir. A odak öğrencisi eşitliğin iki yanına aynı işlemi yaparak "3x+8-8=26-8", "3x=18", "3x:3=18:3", "x=6" işlem basamaklarıyla doğru sonuca ulaşmıştır. Bu esnada sınıftaki bazı öğrencilerin yer değiştirme yöntemi kullanarak doğru sonuca ulaştığı gözlemlenmiştir.

Etkinlikteki "6.(x+5) =48" denklemini çözerken sınıftaki öğrencilerin geneli önce dağılma özelliğinden yararlanmıştır. Dağılma özelliği ile çözüme başlayan Ö7, *"Dağılma özelliğini kullanırsak denklem 6.x+6.5=48 şeklinde yazılır. İşlemler yapılıp denklem tekrar düzenlenirse 6x+30=48 olarak yazılır. Şimdi 30'u diğer tarafa -30 olarak geçirelim. 6x=48-30 olur ve en sade hali 6x=18 olarak yazılır. Son olarak çarpı 6 diğer tarafa bölü 6 olarak yazılırsa x=18:6 olur ve x=3 bulunur."* şeklinde açıklama yaparak yer değiştirme yöntemiyle denklemi doğru olarak çözmüştür.

Etkinlikteki “3(x+2)=5(x−2)” denklemini B odak öğrencisi dağılma özelliğinden yararlandıktan sonra “3x+6=5x-10” şekline çevirdikten sonra, *“Bilinenleri bir tarafa, bilinmeyenleri bir tarafa toplarsak 3x ,-3x olarak sağ tarafa, -10 da +10 olarak sol tarafa geçerse 6+10=5x-3x şeklinde yazılır. İşlemleri yaparsak 16=2x olur. Son olarak çarpı 2 diğer tarafa bölü 2 olarak geçer, sonuç x=8 olur.”* açıklamasını yaparak soruyu doğru olarak çözmüştür. Fakat bazı öğrencilerin sonucu “x=2” olarak buldukları gözlemlenmiştir. Bu şekilde hatalı yanıt veren C odak öğrencisinin yanıtı incelendiğinde “6+10=16” ve “5x+3x=8x” işlemlerini ayrı bir yerde yaptıktan sonra eşitliği “8x=16” olarak yazarak “x=2” sonucunu bulduğu tespit edilmiştir. C odak öğrencisinin yer değiştirme yöntemini yanlış uyguladığı tespit edilmiştir. Bunun yanında, her iki yana aynı işlemi yapma yöntemi ile denklemi çözmeye çalışan öğrencilerin denklemi çözerken daha az hata yaptığı gözlemlenmiştir.

Araştırmacı denklem çözerken hata yapan öğrencilerin sayısının azımsanmayacak kadar fazla olduğunu ve yer değiştirme yöntemini kullanan bazı öğrencilerin denklem çözümünde ezbere işlemler yaptığını gözlemlemiştir. Bu sebeple öğrencileri ezberden uzaklaştırmak amacıyla verilen denklemlerin eşitliğin her iki yanına aynı işlemleri yapma yöntemi kullanılarak çözülmesi istenmiştir.

Etkinlikteki “5(x−8)=3x−6” denkleminin çözümü istendiğinde C odak öğrencisi sol taraftaki çarpma işlemini “5x-8=3x-6” şeklinde yazmıştır. Parantezin önemini dikkate almadan işlem yapan C odak öğrencisi, araştırmacı tarafından dağılma özelliğinin kullanması yönünde uyarıldıktan sonra hatasını düzelterek denklemi “5x-40=3x-6” şeklinde yazmıştır. Bu esnada C odak öğrencisi, *“Sol tarafa 40 eklersek -40 gidecektir, sağ tarafa 40 eklersek 5x=3x+36 olur. Ama iki tarafta da bilinmeyen var. Bu tür işlemler bana zor geliyor.”* şeklinde açıklama yaparak zorlandığı durumu ifade etmiştir. Araştırmacı, *“Her iki tarafa da aynı işlemi yapma burada işimizi kolaylaştırıyor. İstersen iki yandan da 3x çıkarabilirsin. Böylece sol taraftaki bilinmeyenden kurtulabilirsin.”* ifadesi ile öğrenciyi yönlendirmiştir. C odak öğrencisinin bilinmeyenin sadece bir tarafta olması gerektiğini düşündüğü gözlemlenmiştir. C odak öğrencisinin yapılan açıklamadan sonra her iki taraftan 3x çıkararak “2x=36” şeklinde denklemi yazdıktan sonra doğru sonuç olan “x=18” ifadesine ulaştığı gözlemlenmiştir.

Ardından etkinlikteki "$\frac{3x}{5} - 4 = 2$" denkleminin çözümüne geçilmiştir. A odak öğrencisi önce her iki yana 4 eklemiş ve "$\frac{3x}{5}$=6" eşitliğini yazmıştır. Her iki yanı 5 ile çarpıp "3x=30" olarak yazdıktan sonra her iki yanı 3 ile bölüp "x=10" doğru sonucuna ulaşmıştır. Fakat bu denklemi çözerken Ö2, *"Önce her iki yanı 5 ile çarpmamız gerekmiyor mu? En solda bölü 5 var. Soldan sağa işlem yapmamız gerekmiyor mu?"* şeklinde bir soru sormuştur. Öğrencinin matematikte her zaman soldan sağa doğru işlem yapılması gerektiğini düşündüğü için kavram yanılgısı içerisinde olduğu gözlemlenmiştir. Öğrenciye işlem önceliği hakkında hatırlatmalar yapılarak, A odak öğrencisinin çözümünün doğru olduğu vurgulanmıştır.

Yapılan etkinlik esnasında "yer değiştirme" ya da "eşitliğin her iki yanına aynı işlemleri yapma" yöntemlerinin nasıl uygulandığını anlamayan öğrencilerin az sayıda da olsa olduğu gözlemlenmiştir. Kuralları hatırlamaya çalışırken bazı öğrencilerin kafasının karıştığı ve kuralları çarpıtarak yanlış kullandıkları gözlemlenmiştir. Tespit edilen bu hataların ortadan kaldırılması amacıyla tekrar öğretim etabında kullanılmak üzere öğretim kararları alınmıştır. Bu hata ve yanılgıları ortadan kaldırmaya yönelik etkinliklerin hazırlanmasına karar verilmiştir.

Öğretim dizisinde "7.2.2.4. Birinci dereceden bir bilinmeyenli denklem kurmayı gerektiren problemleri çözer." kazanımı çerçevesince hazırlanan etkinliklerin uygulanmasına geçilmiştir. Öncelikle öğrencilerden, *"İrem'in yaşı Kerem'in yaşının iki katının bir eksiğidir. 6 yıl sonra ikisinin yaşları toplamı 23 olacağına göre Kerem'in yaşı kaçtır?"* problemine ait denklemin kurulması istenmiştir. Araştırmacı öğrencilerden problemde verilen çocukların yaşlarına ait cebirsel ifadeleri yazmalarını istemiştir. A odak öğrencisi, *"Kerem'in yaşı x olsun. İrem, Kerem'in iki katının bir eksiği ise 2x-1 yaşında olur. Fakat bize ikisinin altı yıl sonraki yaşları toplamı verilmiş. Kerem altı yıl sonra x+6, İrem ise altı yıl sonra 2x-1+6 yaşında olacaktır."* şeklinde görüşünü ifade ederek problemde geçen çocukların altı yıl sonraki yaşlarını cebirsel ifadelerle göstermiştir. Ardından araştırmacı probleme ait denklemin kurulmasını istediğinde Ö1, *"Çocukların altı yıl sonraki yaşları x+ 6 ve 2x-1+6 olacak. Bu iki cebirsel ifadeyi toplayarak ikisinin altı yıl sonraki yaşları toplamı olan 23'e eşitlemeliyiz. Probleme ait denklem x+6+2x-1+6=23 olarak kurulur."* açıklaması ile probleme ait denklemi doğru olarak kurmuştur. Son olarak kurulan denklemin çözülmesi istendiğinde B odak öğrencisinin, *"x+6 +2x-1+6=23 denkleminin sol tarafında benzer terimler var. Öncelikle onlarla ilgili toplama işlemlerini yapalım. Benzer terim olan x ile 2x toplanırsa 3x olur. Tam sayılar da kendi aralarında toplanırsa 11 elde ederiz. Denklem en sade haliyle 3x+11=23 olarak yazılır. Denklemin her iki tarafından 11 çıkarırsak 3x+11-11=23-11 şeklinde yazılır. Buradan 3x=12 ile karşılaşırız. Son olarak iki tarafi da üç ile bölersek 3x:3=12:3 şeklinde yazılır ve x=4 sonucunu buluruz. Problemde sorulan Kerem'in yaşı 4'tür."* şeklinde açıklamada bulanarak denklemi doğru çözdüğü gözlemlenmiştir. Verilen örnek problem sınıfta öğrencilerle birlikte çözülürken öğrencilerin en zorlandığı kısmın, denklemi kurma noktası olduğu tespit edilmiştir. Denklem kurulduktan sonra sınıf geneli tarafından denklemin çözümüne rahat bir şekilde ulaşıldığı tespit edilmiştir.

Öğretim dizisine Şekil 4.86'daki etkinliğin incelemeleri için öğrencilere sunulmasıyla devam edilmiştir.

Bir ev hanımı elindeki malzemeleri kullanarak türlü yemeği yapmak istemektedir. Yapacağı yemeğin tarifi şu şekildedir;

- Bir miktar yemeklik kuşbaşı et
- Kuşbaşı et miktarının 3 katı kadar patates
- Kuşbaşı et miktarının 2 katının 150 gram fazlası kadar patlıcan
- Kuşbaşı et miktarının 4 katı kadar su
- Kuşbaşı et miktarının 250 gram eksiği kadar baharat
- 200 gram kadar havuç

Yukarıdaki tarife göre hazırlanan yemeğin toplam ağırlığı 4500 gram olduğuna göre tarifte kullanılan malzemelerin her birinin ağırlığı ne kadar olmalıdır? Denklem kurarak çözünüz.

Şekil 4.86 Öğretimin İlk Etabında Öğrencilere Yöneltilen Problem 1

Etkinlikte verilen problemi inceleyen öğrenciler ile denklemin kurulması ve kurulan denklemin çözümü esnasında yaşanan diyaloglar şu şekilde gerçekleşmiştir:

Araştırmacı: *Verilen problemi incelediğinizde verilen malzemelere ait cebirsel ifadeleri nasıl yazarız?*

Ö11: *Problemde verilen malzemeler hep kuşbaşı et miktarına bağlı olarak verilmiş. Kuşbaşı et miktarını bilirsek diğer malzemeleri de rahatlıkla bulabiliriz. Öncelikle kuşbaşı et miktarına x diyebiliriz.*

Araştırmacı: *Evet… Doğru söylüyorsun. Problemde bütün malzemeler kuşbaşı et miktarına bağlı. Kuşbaşı et miktarına x demek doğru bir başlangıç olur. Şimdi, patates miktarını gösteren cebirsel ifade ne olmalıdır?*

Ö14: *Patates miktarı kuşbaşı et miktarının üç katı olduğu için ona 3x diyebiliriz.*

Araştırmacı: *Patates miktarı da doğru ifade edildi. Patlıcan miktarını nasıl ifade edebiliriz?*

Ö8: *Patlıcan miktarı kuşbaşı et miktarının üç katının 150 gram eksiği ise 3x-150 ile ifade edilir.*

Araştırmacı: *Yemekteki su miktarını kim ifade edebilir?*

Ö7: *Su miktarı kuşbaşı et miktarının 4 katı ise 4x ile ifade edilir.*

Araştırmacı: *Yemekteki baharat miktarı nasıl ifade edilebilir?*

Ö21: *Baharat miktarı kuşbaşı et miktarının 250 gram eksiği olduğu için x-250 ile ifade edilir.*

Araştırmacı: *Havuç miktarı da 200 olarak verilmişti. Bütün malzemeleri cebirsel ifadelerle gösterdik. Şimdi sıra probleme ait denklemi kurmaya geldi sizce denklem nasıl kurulacak?*

B odak öğrencisi: *Verilen bütün malzemelerin toplamı 4500 gram olduğu söylenmiş. Biz de bulduğumuz cebirsel ifadelerin toplamını 4500'e eşitleyerek denklemi kurabiliriz. Bu denklemin çözümü bize kuşbaşı et miktarını verecek. Sonra diğer malzemelerin de miktarını bulabiliriz. Probleme ait denklem (x)+(3x)+(2x+150)+(4x)+(x-250)+200=4500 olur.*

Araştırmacı: *Denklemi doğru olarak kurduk. Sıra denklemi çözmede... Kim bize denklemi çözmek ister?*

A odak öğrencisi: *Denklemin sol tarafında benzer terimler var. Önce onları toplayarak daha sade yazalım. Sol tarafta x+3x+2x+4x+x=11x ve 150+(-250)+200=100 işlemlerini yaparız. Denklemi en sade haliyle 11x+100=4500 şeklinde yazabiliriz. Şimdi eşitliğin her iki tarafından 100 çıkaralım, 11x+100-100=4500-100 olur. Artık denklem 11x=4400 olarak yazılabilir. Son olarak eşitliğin iki tarafını da 11'e bölersek, 11x:11=4400:11 ve sonuç x=400'dür. Kuşbaşı et miktarı 400 gram olmalıdır.*

Araştırmacı: *Kuşbaşı et miktarını 400 gram olarak bulduk. Şimdi kim bize diğer malzemeleri bulmak ister?*

Ö18: *Patates kuşbaşı etin 3 katından 1200 gram, patlıcan 2 katının 150 gram eksiğinden 650 gram, su 4 katından 1200 gram ve baharat miktarı 250 gram eksiğinden 150 gramdır. Havuç miktarı zaten problemde 200 gram olarak verilmişti.*

Yaşanan diyaloglardan da anlaşılacağı üzere, sınıf katılımını arttırarak işlem basamakları uzun olan bir problemin denkleminin kurulduğu ve çözümünün yapıldığı gözlemlenmiştir. Bu etkinliğin özellikle problem kurmada sorun yaşayan öğrenciler açısından iyi bir tecrübe olduğu ve olumlu sonuçlar verdiği tespit edilmiştir.

Öğretim dizisinde uygulanan diğer bir etkinlikte, araştırmacı öğrencilere, *"Toplamları 75 olan ardışık üç sayıdan en küçük olanını bulmaya yönelik bir denklem kurunuz ve bu denklemi çözünüz."* şeklinde bir problem durumu sunmuştur. Sunulan problem durumuna ait görüşler istendiğinde B odak öğrencisinin, *"Ardışık üç sayıdan en küçüğü x olsun. Sayılar ardışık olduğu için diğer sayılar x+1 ve x+2 ile gösterilir. Bu sayıların toplamı 75 olduğu için üç cebirsel ifadeyi toplayıp 75'e eşitlersek x+(x+1) +(x+2) =75 şeklinde denklem kurulur. Sol taraftaki ifadeleri daha sade yazmak için benzer terimleri toplarsak 3x+3=75 olur. Bu denklemi çözerken +3 diğer tarafa geçerken işaret değiştirse -3 olarak yazılırsa 3x=72 olur, son olarak iki tarafı 3'e bölersek x=24 olur. En küçük sayı 24 olarak bulunur."* şeklinde problemi doğru olarak çözdüğü görülmüştür. Araştırmacı az önce yapılan problem durumuna benzer olarak, *"Toplamları 75 olan ardışık üç sayıdan en büyüğüne ait denklem nasıl kurulur?"* sorusunu yöneltmiştir. Sınıftaki birçok öğrenci, *"En küçük sayıya 2 ekleriz."* şeklinde yanıt vermiştir. Araştırmacı, *"Evet, söylediğiniz doğru. Fakat özel olarak sadece denklemi kurmamız istenirse ne yaparsınız? Arkadaşınızın kurduğu denklem en küçük sayıyı bulmaya yönelik. Yani x'in cevabı direkt en büyük sayıyı vermesi istenirse nasıl bir denklem kurarsınız?"* şeklinde yeni bir soru sormuştur. A odak öğrencisi, *"O zaman biz de en büyük sayıya x deriz. Diğer sayılar x-1 ve x-2 olur. Yeni denklemi x+(x-1) +(x-2) =75 şeklinde kurarız. Ardından benzer terimleri toplarsak 3x-3=78 olur -3 diğer tarafa +3 olarak yazılırsa 3x=78 ve x=26 olur. En büyük sayı 26'dır."* açıklamasını yaparak yeni problem durumuna ait denklemi doğru kurup sonrasında çözdüğü gözlemlenmiştir.

Öğretim dizisine Şekil 4.87'deki etkinliğin araştırmacı tarafından öğrencilere sunulması ve öğrencilerin etkinliği incelemesi istenerek devam edilmiştir.

Ali, Hasan ve Murat adlı üç kardeş annelerine marketten aldıkları malzemeleri taşımada yardım etmektedir. Anneleri şeffaf poşetlerde ağırlıkları birbirine eşit olan 6 paket toz şeker, 3 kg ağırlığına un, 4 kg ağılığında domates ve 0,5 kg ağırlığında tuz almıştır.

- Ali 2 poşet şeker ve 3 kg ağırlığındaki unu taşımaktadır.
- Hasan 1 poşet şeker ve 4 kg ağırlığındaki domatesleri taşımaktadır.
- Murat 3 poşet şeker ve 0,5 kg ağırlığındaki tuzu taşımaktadır.

Ali marketten çıkmadan kendi taşıyacağı bütün malzemeleri tarttığında 7 kg olduğunu görmüştür. Bu bilgilere göre;

a) Bir şeker poşetinin ağırlığını denklem kurarak bulunuz.

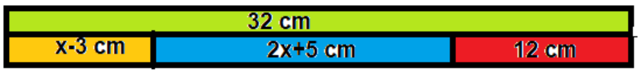
Şekil 4.87 Öğretimin İlk Etabında Öğrencilere Yöneltilen Problem 2

Etkinlikte ilk olarak öğrencilerden ağırlığı verilmeyen şeker poşetlerinin ağırlıklarının bulunmasına yönelik denklemin kurulması ve ardından denklemin çözülmesi istenmiştir. Söz alan Ö11, *"Ağırlıklarını bilmediğimiz ve soruda bizden istenen şeker poşetlerinin ağırlığı x olsun. Soruda Ali'nin 2 poşet şeker ve 3 kg ağırlığında unu taşıdığı söylenmiş. Ayrıca Ali'nin taşıdığı poşetlerin toplam 7 kg olduğu da verilmiş. O zaman 2x+3=7 olmalı. Bu denklemi çözerken her iki taraftan 3'ü çıkaralım, denklem 2x+3-3=7-3 şeklinde yazılır. Sol tarafta 3'ler birbirini götürür ve sağ tarafta 7'den 3 çıkınca 2x=4 kalır. Son olarak her iki tarafı 2'ye bölersek x=2 olur. Ağırlığını bilmediğimiz şekerler 2 kg ağırlığındadır."* açıklamasında bulunarak denklemi doğru olarak çözmüştür. Bilinmeyen bulunduktan sonra etkinlikte geçen Murat ve Hasan'ın taşıdığı poşetlerin ağırlıklarının bulunması istenmiştir. B odak öğrencisi, *"Hasan'ın taşıdığı poşetlerin toplamı x+4 olarak yazılır. Bulduğumuz x=2'yi yerine yazarak 2+4=6 kg Hasan'ın taşıdığı poşetlerin toplam ağırlığıdır. Aynı şekilde Murat'ın taşıdığı poşetlerin toplamı 3.2+0,5=6,5 kg'dır."* şeklinde açıklamada bulunarak soruyu doğru olarak yanıtlamıştır.

Öğretimin ilk etabında uygulanan son etkinlikte şekil 4.88'de gösterilen bir çubuk parçalara ayrılmış ve bazı parçalarının uzunlukları cebirsel ifadelerle gösterilmiştir. Öğrencilerden uzunlukları verilmeyen parçaların uzunluklarını denklem yardımıyla bulmaları istenmiştir.

Şekil 4.88 Çubuk Modeli İle Modellenen Denklem Sorusu 1

Sınıftaki öğrenciler zorlanmadan mavi ve kırmızı çubukların uzunlukları toplamının yeşil çubuğun uzunluğuna eşit olacağını fark etmişlerdir. Hatta birçok öğrenci deneme yanılma veya yerine koyma stratejileri kullanarak mavi çubuğun uzunluğunun 7 cm dolayısıyla verilmeyen x'in 4 cm olduğunu söylemiştir. Araştırmacı C odak öğrencisinden denklem kurarak soruyu çözmesini istemiştir. C odak öğrencisi, *"Uzunluğu x+3 cm olan mavi ve uzunluğu 8 cm olan kırmızı çubuğun uzunlukları toplamı 15 cm olacak. Denklem kurarsak x+3+8=15 olmalıdır. 3 ile 8 toplanırsa denklem x+11=15 olur. Şimdi +11 sağ tarafa –11 olarak geçer, x=15-11 ve x=4 olur."* şeklinde açıklama yaparak denklemi kurup ardından çözüme ulaşmıştır. C odak öğrencisinin daha bilindik bir durum üzerinden denklem kurmasının işini kolaylaştırdığı gözlemlenmiştir. Genel olarak öğrencilerin problemin gelişimi hakkında tam olarak karar veremediği durumlarda denklemi kurmakta daha fazla zorlandıkları tespit edilmiştir. Ardından etkinliğin ikinci bölümünde Şekil 4.89'da verilen benzer durum için uzunlukları verilmeyen çubukların denklem yardımıyla bulunması istenmiştir.



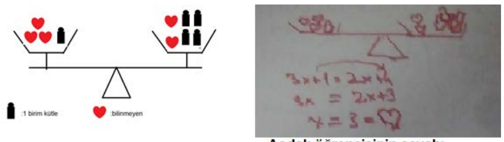
Şekil 4.89 Çubuk Modeli İle Modellenen Denklem Sorusu 2

Etkinliğin ilk bölümünde yapılan çözümden duruma aşina olan öğrencilerin bu bölümde ifade edilen çubuk uzunluklarının daha karışık terimlere sahip olmasına rağmen daha az zorlanarak denklemi kurdukları gözlemlenmiştir. Söz alan Ö2, *"Bu sefer üç çubuğu toplayacağız yani (x-3)+(2x+5)+12=32 olacak. Sağ tarafta benzer terimler var. x'lerin toplamından 3x gelir, sayıların toplamından 14 gelir, denklem 3x+14=32 olur. Şimdi 14 sayısını diğer tarafa -14 olarak geçirelim. 3x=32-14'den 3x=18 ise x=6 cm olur. Sarı çubuk 6-3=3cm, mavi çubuk 2.6+5=17 cm olur."* ifadesi ile istenilen çubukların uzunluklarını doğru olarak bulmuştur. Etkinlik esnasında öğrencilerin verilen problemlerde ne yapmaları gerektiğini planladıktan sonra denklemleri kurabildikleri fakat problem durumu anlaşılmadığında denklemi kuramadıkları gözlemlenmiştir. Bu sebeple öğrencilerin günlük hayatın içerisinden problemlerle hazırlanan etkinliklerle karşılaştırılması konusunda kararlar alınmıştır. Özellikle öğretim etabının ilk etkinliklerinde kullanılan "hangi sayının…" şeklinde başlayan soru tiplerinin öğrencilerin konuyu anlamalarında daha az etki gösterdiği gözlemlenmiştir.

4.5.2 Dördüncü Ara Klinik Görüşmelere Ait Bulgular

Dördüncü öğretim dizisinin ilk etabı gerçekleştirildikten sonra odak öğrencilerin denklem kurma ve denklem çözme konularında kullandıkları stratejileri, yaptıkları hata ve sahip oldukları kavram yanılgılarını daha derinlemesine ortaya koymak amacıyla ara klinik görüşmeler düzenlenmiştir. Dördüncü ara klinik görüşmelerde odak öğrencilerine “7.2.2.2. Birinci dereceden bir bilinmeyenli denklemi tanır ve verilen gerçek hayat durumlarına uygun birinci dereceden bir bilinmeyenli denklem kurar.”, “7.2.2.3. Birinci dereceden bir bilinmeyenli denklemleri çözer.” ve “7.2.2.4. Birinci dereceden bir bilinmeyenli denklem kurmayı gerektiren problemleri çözer.” kazanımları kapsamında hazırlanan klinik görüşme soruları yöneltilmiştir. Odak öğrencilerin öğretimin ilk etabı öncesinde yapılan ön klinik görüşmelerdeki düzeyleri ile ara klinik görüşmeler esnasındaki düzeyleri incelenerek gelişimleri gözlemlenmiştir.

Klinik görüşmelerde Şekil 4.90’da gösterilen terazi modelleri ile verilen eşitliğe ait denklemlerin terazi modellerinden yararlanarak öğrencilerin çözmeleri istenmiştir. Odak öğrencilerin üçü de modelde verilen denklemi, cebirsel olarak ifade ettikten sonra yer değiştirme yöntemi ile çözüme ulaşmışlardır.

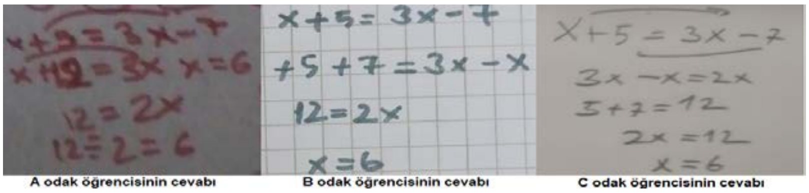


Aodak öğrencisinin cevabı

Şekil 4.90 Terazi Modelinde A Odak Öğrencisinin Eylemi

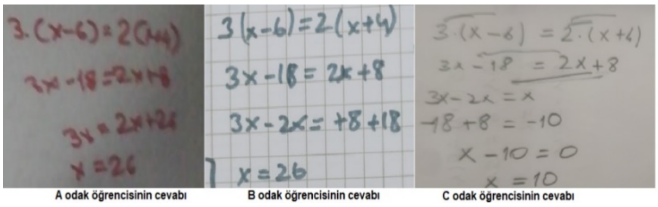
Üç odak öğrencinin de denklem çözerken terazi modelini kullanmanın pratik olmadığını düşünmelerinden dolayı, denklemleri çözerken yer değiştirme yöntemini kullandıkları tespit edilmiştir.

Ara klinik görüşmelerde odak öğrencilerden “x+5=3x–7” ve “3.(x–6) =2(x+4)” denklemlerini çözmeleri istenmiştir. Klinik görüşmeler esnasında odak öğrencilerin üçünün de denklemleri çözerken yer değiştirme yöntemini kullandığı tespit edilmiştir. Odak öğrencilerin üçü de “x+5=3x–7” denklemini Şekil 4.91’de gösterildiği gibi doğru olarak çözmüşlerdir.



Şekil 4.91 Dördüncü Ara Klinik Görüşmelerde Odak Öğrencilerin Eylemleri 1

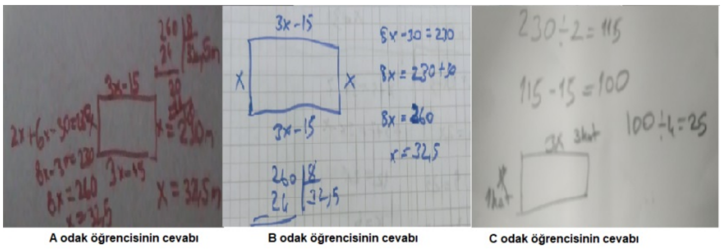
Ara klinik görüşmelerde “3.(x–6)=2(x+4)” denklemini A ve B odak öğrencilerinin Şekil 4.92’de gösterildiği gibi yer değiştirme yöntemi ile doğru olarak çözdükleri, fakat C odak öğrencisinin yer değiştirme yöntemini hatalı uygulamasından dolayı yanlış çözdüğü tespit edilmiştir.



Şekil 4.92 Dördüncü Ara Klinik Görüşmelerde Odak Öğrencilerin Eylemleri 2

C odak öğrencisi ile denklem çözerken kullandığı yöntem ve hatası üzerine yapılan görüşmede, *“Ben iki yana aynı işlemleri yapmak yerine karşı tarafa ters işaretlisini geçirerek yapıyorum. Bu çok daha kolay oluyor. Artı ise eksi yazıyorum. Bazen de çarpma ise bölme olarak yazıyorum veya tam tersi oluyor, kolay bir yöntem. Bazen işaretleri karıştırdığım oluyor ama genelde doğru yapıyorum. İki yana aynı işlemlerin yapılması çok daha farklı, bana karışık geliyor. Orda yapılan işlemler bence çok uzun.”* şeklindeki ifadesi ile çözüm yöntemi hakkındaki görüşünü belirtmiştir. Ara klinik görüşme esnasında A odak öğrencisi, *“Denklemleri yer değiştirme ile de iki yana aynı işlemleri uygulayarak da çözebiliyorum. Aslıda ikisi de aynı işlemi yapmamıza yarıyor. Sonuç olarak denge bozulmuyor. Ama yer değiştirme ile daha hızlı çözdüğüm için onu tercih ettim.”* ifadesini, B odak öğrencisi ise *“Denklemleri çözerken ilk başta aynı işlemi iki yana uygulayarak yapıyordum. Sonra iki yana aynı işlemi yapmanın yer değiştirme ile aynı olduğunu anladım. Hızlı yapmak için yer değiştirmeyi artık daha çok tercih ediyorum.”* ifadelerini kullanarak denklemleri çözerken kullandıkları yöntemler hakkındaki görüşlerini belirtmişlerdir. Odak öğrencilerle yapılan ara klinik görüşmelerde, A ve B odak öğrencilerinin denklem çözümlerinde eşitliğin her iki yanına aynı işlemleri yapma yöntemini kullanabildikleri fakat tercihen hız kazanmak amacıyla yer değiştirme yöntemi ile çözümleri yaptıkları tespit edilmiştir. C odak öğrencisinin ise denklem çözümlerinde, eşitliğin her iki yanına aynı işlemleri yapma yöntemini tam olarak anlamadığı, ezbere dayalı olarak yer değiştirme yöntemini kullandığı tespit edilmiştir. Ayrıca C odak öğrencisi her iki yana aynı işlemi yapma ve yer değiştirme yöntemlerinin birbirinden bağımsız olduğunu ve ayrı çözüm yolları olduğunu ifade etmiştir. C odak öğrencisinin hatalarının genelinin yer değiştirme yönteminin hatalı uygulamalarından kaynaklandığı tespit edilmiştir.

Klinik görüşmede sorgulanan bir diğer soru da verilen bir problem durumuna ait denklemi kurarak çözmeleri olmuştur. Bu amaçla, *“Çevre uzunluğu 230 metre olan dikdörtgen şeklindeki bir bahçenin uzun kenarı kısa kenarının 3 katından 15 metre daha kısadır. Buna göre bu bahçenin kısa kenarı kaç metredir? Uygun denklemi kurarak çözünüz.”* sorusu odak öğrencilere yöneltilmiştir. A odak öğrencisi verilen problem durumuna ait bir dikdörtgen modelini çizdikten sonra, “*Kısa kenar uzunluğu x olsun. Uzun kenar kısa kenarın 2 katının 15 metre eksiği ise 3x-15 ile gösterilir. Çevre sorulduğu için kenarların iki katını alıp toplarız.”* ifadesini kullanarak denklemi kurmuş, ardından yer değiştirme yöntemini kullanarak denklemi çözmüştür. Benzer olarak B odak öğrencisi de bir dikdörtgen modeli kullanarak, *“Kısa kenar x, uzun kenar 3x-15 olur. Dikdörtgenin çevresi x+x+3x-15+3x-15=8x-30 olur. Soruda çevresi 320 metre verilmiş o zaman denklem 8x-30=320 olur.”* ifadesini kullanarak denklemi kurmuş ve çözmüştür. C odak öğrencisi ise verilen probleme ait denklemi kuramamıştır. C odak *öğrencisi*, “*Çevresi 230 olarak verilmiş, 230’u ikiye bölersek kısa kenarla uzun kenarın toplamı 115 olur. Uzun kenar 15 fazla, 115’den 15 çıkarsa 100 kalır. Kısa kenar 1 kat, uzun kenar 3 kat olduğundan 100’ü dörde böleriz kısa kenar 25 çıkar.”* ifadesi ile geriye dönük işlemler yaparak problemi çözmeye çalışmıştır. Fakat bu geriye dönük işlemleri yaparken de hata yapmıştır. Odak öğrencilerin probleme ait eylemleri Şekil 4.93’te gösterilmiştir.



Şekil 4.93 Dördüncü Ara Klinik Görüşmelerde Odak Öğrencilerin Eylemler 3

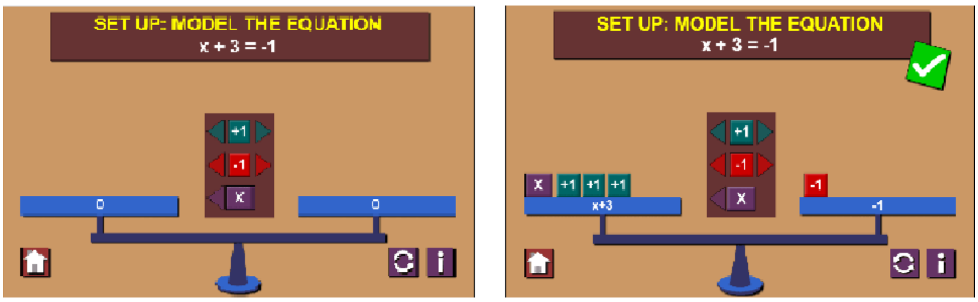
Odak öğrencilerle yapılan ara klinik görüşmeler neticesinde, tekrar öğretim etabında denklem çözümlerini terazi modelleri ile modelledikten sonra her iki yana aynı işlemleri yapma ve yer değiştirme yöntemleri ile olan ilişkisini göstermeye yönelik etkinliklerin düzenlenmesine karar verilmiştir.

4.5.3 Dördüncü Öğretim Dizisinin Tekrar Etabına Ait Bulgular

Dördüncü öğretim dizisinin ilk etabında yapılan öğretim ve odak öğrencilerle yapılan ara klinik görüşmeler neticesinde denklem kurma ve denklem çözme konusunda öğrencilerin zorlandıkları noktalar ve eksik öğrenmeler tespit edilmeye çalışılmıştır. Ayrıca öğretim dizisinin ilk etabında uygulanan etkinliklerin işleyen ya da işlemeyen noktaları da ortaya konulmaya çalışılmıştır. Elde edilen bulgular göz önünde bulundurularak öğretim kararları alınmış ve alınan bu kararları uygulamak amacıyla tekrar öğretim etabı planlanmıştır. Tekrar öğretim etabında “7.2.2.2. Birinci dereceden bir bilinmeyenli denklemi tanır ve verilen gerçek hayat durumlarına uygun birinci dereceden bir bilinmeyenli denklem kurar.”, “7.2.2.3. Birinci dereceden bir bilinmeyenli denklemleri çözer.” ve “7.2.2.4. Birinci dereceden bir bilinmeyenli denklem kurmayı gerektiren problemleri çözer.” kazanımlarını içeren etkinlikler vasıtasıyla öğrencilerde tespit edilen eksiklikler ortadan kaldırılmaya çalışılmıştır.

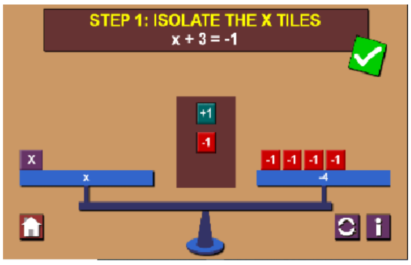
Dördüncü öğretim dizisinin tekrar etabında terazi modelleri yardımıyla denklem çözümlerinin modellenmesi amacıyla sanal manüplatiflerden yararlanılmıştır (https://www.mathplayground.com/model_algebra/index.html). Bu amaçla etkileşimli etkinlikler sınıf ortamında uygulanmıştır.

Etkinlikte ilk olarak Şekil 4.94’te gösterilen “x+3=-1” denkleminin terazinin kefelerinde modellenmesi istenmiştir. Ö7, etkinlikteki cebir karolarını sağ kefeye bir tane x ve üç tane “+1”, sol kefeye de bir tane “-1” karolarını yerleştirerek terazi modelini denge konumuna getirerek modellemiştir.



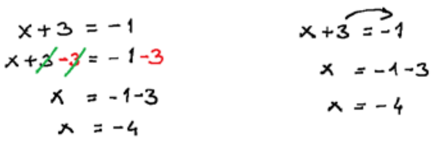
Şekil 4.94 Sanal Terazi Modeli Örneği 1’in Çözüm Aşaması 1

Ardından etkinlikte x'in yalnız bırakılması istenmiştir. Bunun için Ö7, "-1" sekmesine üç kere basmıştır. Ö7 "-1" sekmesine her bastığında sağ ve sol kefeye birer tane "-1" ile gösterilen cebir karosu ilave edilmiştir. Bu esnada sol kefeye eklenen her "-1" cebir karosuna karşılık "+1" ile gösterilen cebir karosu yok olurken, sağ kefeye her seferinde bir tane "-1" cebir karosu eklenmiştir. Yapılan işlem sonucunda Şekil 4.95'te gösterilen terazi modeli oluşarak denklemin sonucu "x=-4" olarak bulunmuştur.



Şekil 4.95 Sanal Terazi Modeli Örneği 1'in Çözüm Aşaması 2

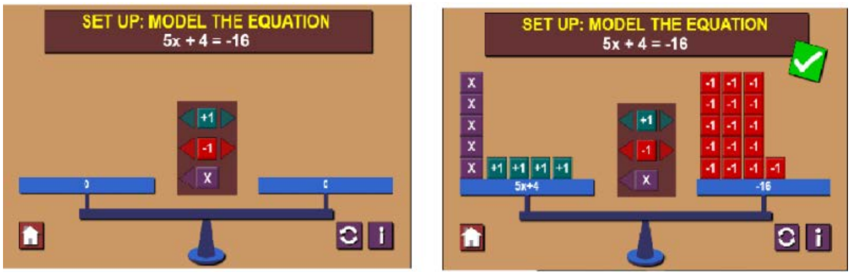
Araştırmacı yapılan terazi modeli ile denklem çözümünün öğrencilerin kullandıkları denklem çözümü yöntemleri arasındaki ilişkisini görünür hale getirtmek için aynı denklemi önce eşitliğin her iki yanına aynı işlemleri yaparak sonra da yer değiştirme yöntemlerini kullanarak Şekil 4.96'da gösterildiği gibi çözmüştür.



Şekil 4.96 Sanal Terazi Modeli Örneği 1'in Çözüm Aşaması 3

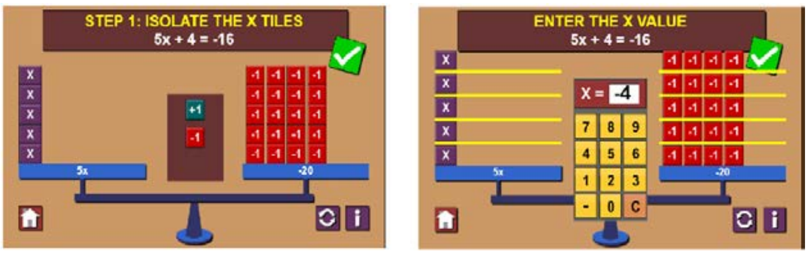
Araştırmacı yapılan çözümlerde kullanılan yöntemler arasındaki ilişkiyi sorguladığında A odak öğrencisi, *"İki yana aynı işlemi uyguladığımız yöntem, terazi modelleri ile yaptığımız çözümün birebir aynısı. Yer değiştirme yönteminde de aslında aynı, sadece iki yana eklediğimiz -3, sol taraftaki +3'ü yok ediyor ve sağ tarafa yazılan -3 kalıyor. Yer değiştirme yönteminde bunu sadece daha pratik olarak yazıyoruz. Ama ilk başta +3 diğer tarafa -3 olarak geçer deseydik biraz ezbere olacaktı. Siz sadece dengenin bozulmadan neden işaret değiştirerek diğer tarafa geçtiğini göstermek istediniz."* şeklinde ifade etmiştir.

Ardından bir diğer etkinlikte bilinmeyenin katsayısı 1'den farklı olan "5x+4=-16" denkleminin terazi modeliyle çözümüne geçilmiştir. Yapılan öğretimin ilk etabında ve ara klinik görüşmelerde terazi modelleri ile denklem çözümlerinde zorlanan C odak öğrencisinden etkinliği yapması istenmiştir. Öncelikle terazinin sol kefesine “x” ile modellenen cebir karosundan beş tane, “+1” ile modellenen cebir karosundan 4 tane yerleştiren C odak öğrencisi terazinin sağ kefesine “-1” ile modellenen cebir karosundan 16 tane yerleştirerek terazi modelini Şekil 4.97’de gösterildiği gibi denge konumuna getirmiştir.



Şekil 4.97 Sanal Terazi Modeli Örneği 2’nin Çözüm Aşaması 1

Etkinlikte verilen denklemi terazinin kefelerinde modelleyen C odak öğrencisinden x’i yalnız bırakması istenmiştir. C odak öğrencisi önce “-1” sekmesine 4 kez basarak her iki tarafa “-4” eklemiştir. Bu işlemden sonra terazinin sol kefesinde 5 adet x, sağ kefesinde 20 adet “-1” ile modellenen cebir karosu ile denge konumu oluşmuştur. Son olarak x’i yalnız bırakmak için her iki tarafın 5 ile bölümü modellendikten sonra Şekil 4.98’de gösterildiği gibi “x=-4” değeri ile karşılaşılmıştır.



Şekil 4.98 Sanal Terazi Modeli Örneği 2’nin Çözüm Aşaması 2

C odak öğrencisi yaptığı terazi modeli ile denklem çözümü hakkında, “*Eşitliğin korunumu ilkesinde her iki yana aynı işlem yapıldığında dengenin bozulmadığını görmüştük. Şimdiye kadar ben denklem çözümlerini daha çok yer değiştirerek yapıyordum. Fakat bazen hata yapabiliyordum. Hem yer değiştirirken neden işaret değişiyor, bunu da anlamış oldum.*” şeklinde görüşünü bildirmiştir. C odak öğrencisinin yaptığı açıklamadan da anlaşılacağı üzere terazi modelleri ile yapılan denklem çözümlerinin öğrencileri ezbere bilgilerden uzaklaştırarak kavramsal öğrenmeyi destekliği gözlemlenmiştir. Yapılan etkileşimli etkinliğin devamında mümkün oldukça daha çok öğrenci dâhil edilerek farklı denklemler çözülmüştür.

Öğretim dizisinin tekrar etabında terazi modelleri ile denklem çözümlerinde tecrübe kazanan öğrencilere, işlemsel yönü daha ağır basan, eşitliğin her iki yanına aynı işlemin yapıldığı denklem çözüm yöntemi ile denklemlerin çözülmesi istenen etkinlik sunulmuştur. İlk olarak Şekil 4.99'da verilen denklemlerin çözüm basamaklarını inceleyen öğrencilerden basamakların yanında yapılan açıklamadaki boşlukların doldurmaları istenmiştir.

$3.(x-5)=18$

$3.x-3.5=18$ (……………. özelliğini uygulayalım.)

$3x-15=18$

$3x-\cancel{15}+\cancel{15}=18+15$ (eşitliğin her iki tarafına …………….)

$3x=33$

$\dfrac{\cancel{3}x}{\cancel{3}}=\dfrac{33}{3}$ (eşitliğin her iki tarafını ……………..)

$x=11$

Şekil 4.99 Tekrar Öğretim Etabındaki Denklem Çözümü Etkinliği 1

Sunulan denklemin çözüm basamaklarını inceleyen Ö7, *"İlk açıklamaya dağılma özelliği yazılmalıdır. Dağılma özelliğini kullandıktan sonra denklemde verilen x'i yalnız bırakma amacıyla işlemler yapılmış. İkinci açıklamaya eşitliğin her iki tarafına 15 eklenir yazılmalı. Üçüncü açıklamaya ise eşitliğin iki tarafı 3'e bölünür yazılmalı."* şeklinde açıklama yaparak denklem çözümlerinin basamaklarındaki boşluklara gelmesi gerekenleri doğru olarak ifade etmiştir. Etkinliğin devamında Şekil 4.100'de verilen yer değiştirme yönteminin kullanıldığı denklem çözümünün öğrenciler tarafından incelenmesi istenmiştir.

$3.(x+5)=5(x-3)$

$3.x+3.5=5.x-5.3$ (………….. özelliğini uygulayalım.)

$3x+15=5x-15$

$3x-5x=-15-15$ (sayı veya değişkenler eşitliğin diğer tarafına ………………. geçer.)

$-2x=-30$

$\dfrac{\cancel{-2}x}{\cancel{-2}}=\dfrac{-30}{-2}$ (eşitliğin her iki tarafını ……………..)

$x=15$

Şekil 4.100 Tekrar Öğretim Etabındaki Denklem Çözümü Etkinliği 2

Sunulan yeni denklemin çözüm basamaklarını inceleyen A odak öğrencisi, *"Denklemi çözerken dağılma özelliğini kullanarak başlamış. Devamında bilinenler bir tarafa bilinmeyenler bir tarafa toplamaya çalışmış. Bunu yaparken ikinci* *açıklamaya, sayı ve değişkenler eşitliğin diğer tarafına işaret değiştirerek geçer şeklinde yazabiliriz. Son olarak x'i yalnız bırakmak için üçüncü açıklamada eşitliğin her iki tarafını -2 ile bölmüştür yazılmalı."* ifadesini kullanarak boşluklara gelmesi gerekenleri doğru olarak ifade etmiştir. Yapılan etkinlik vasıtasıyla denklem çözümlerinde kullandıkları eşitliğin iki yanına aynı işlemlerin yapılması ile yer değiştirme yöntemlerinin öğrenciler tarafından doğru kullanılması hedeflenmiştir. Uygulanan etkinlikte denklem çözümlerinde kullanılan yöntemlerde tecrübe kazanan öğrencilere, denklem çözümlerinde daha fazla pratik yapmalarını hedefleyen etkinliğe geçilmiştir.

İlk olarak öğrencilerden "4x-3=13" denklemini çözmeleri istenmiştir. Sınıftaki birçok öğrencinin zorlanmadan çözebildiği denklemi söz alan Ö8, *"Eşitliğin iki yanına 3 eklersek 4x=16 olur. Sonra eşitliğin iki yanını 4 ile bölersek x=4 buluruz."* ifadesini kullanarak doğru çözüme ulaşmıştır. Ardından öğrencilerden "3a+4=2a+8" denkleminin çözülmesi istenmiştir. Bu denklemin çözümünde öğrencilerin denklem çözümünde iki yöntemi de kullandıkları gözlemlenmiştir. Eşitliğin iki yanına aynı işlemleri yaparak denklemi çözenler arasından söz alan Ö11, "*Eşitliğin iki yanından 4 çıkarırsak 3a=2a+4 olur. Sonra iki yanından 2a çıkarırsak a=4 olur."* açıklamasını yaparak doğru çözüme ulaşmıştır. Yer değiştirme yöntemi ile çözüme ulaşan öğrencilerden C odak öğrencisinin, *"Ben bilinenleri bir tarafa bilinmeyenleri bir tarafa geçirdim. 2a sol tarafa -2a olarak, +4 sağ tarafa -4 olarak geçerse 3a-2a=8-4 olur. Çıkarma işlemlerini yaparsak a=4 şeklinde sonuç buluruz. Aslında iki yöntemde aynı sonucu bulduruyor. Zaten iki yöntemin birbiri ile alakalı olduğu söylenmişti."* açıklamasıyla doğru sonuca ulaştığı gözlemlenmiştir Etkinliğin devamında öğrencilerden "2.(m+3)=12" denkleminin çözümü istenmiştir. Sınıftaki öğrencilerin geneli denklem çözümüne dağılma özelliğinden yararlanarak başlamış ve denklemi "2m+6=12" şeklinde düzenlemiştir. Bu esnada birkaç öğrencinin parantezin önemini göz ardı ederek ya da dağılma özelliğini yanlış uygulayarak "2m+3=12" şeklinde yazdığı gözlemlenmiştir. Fakat bu hatanın rastlandığı öğrenci sayısının çok olmadığı, bir iki öğrenci ile sınırlı kaldığı gözlemlenmiştir. Yapılan uyarılar ile bu öğrenciler de hatalarının farkına varmışlardır. Ardından söz alan Ö2, *"Dağılma özelliği uyguladıktan sonra 2m+3=12 şeklinde yazılır. Sonra iki taraftan 3 çıkarırız, 2m=12 ise m=6 olur."* şeklinde açıklama yaparak doğru çözüme ulaşmıştır. Etkinlikte son olarak öğrencilerden “3.(x-2)+5=26” denkleminin çözülmesi istenmiştir. Diğer denklemlere göre işlem basamakları daha karışık olmasına rağmen tecrübe kazanan öğrencilerin katılımı arttırdığı gözlemlenmiştir. Önceki çözümler esnasında daha az söz hakkı alan Ö22, “*Önceki örnekte olduğu gibi dağılma ile başlayacağız. Dağıttıktan sonra 3x-6+5=26 şeklinde yazarız ve düzenlersek 3x-1=26 olur. Şimdi iki tarafa da 1 ekleyelim 3x=27 olur. Son olarak iki tarafı 3 ile bölersek x=9 olur.*” ifadesini kullanarak denklemin çözümünü doğru olarak yaptığı gözlemlenmiştir. Etkinlik esnasında, öğrencilerin denklem çözümü konusunda bir hayli tecrübe kazandığı ve sınıf genelinde denklemlerin çözümünün anlaşılmaya başlandığı tespit edilmiştir.

Tekrar öğretim etabına “7.2.2.4. Birinci dereceden bir bilinmeyenli denklem kurmayı gerektiren problemleri çözer.” kazanımını içeren etkinliklerin sınıf ortamında uygulanmasıyla devam edilmiştir. Öğretimin ilk etabında ve odak öğrencilerle yapılan ara klinik görüşmeler esnasında öğrencilerin denklem kurmakta yaşadıkları sorunlar göz önüne alınarak araştırmacı tarafından hazırlanan etkinlikler sınıf tartışmalarına açılmıştır. İlk olarak Şekil 4.101’de gösterilen problem durumunun öğrencilere sunulması ile başlanmış ve öğrencilerden ilgili probleme ait denklemi kurmaları istenmiştir.

Bir grup öğrenci kantindeki her masada 3 kişi olacak şekilde oturursa 15 öğrenci, her masada 4 kişi olacak şekilde oturursa 1 öğrenci ayakta kalıyor. Buna göre;

a) Kantinde kaç masa vardır? b) Bu grupta kaç öğrenci vardır?

Şekil 4.101 Tekrar Öğretim Etabındaki Denklem Kurma Etkinliği

Problemi inceleyen öğrenciler ile probleme ait denklem kurulması aşamasında yaşanan diyaloglar şu şekilde gerçekleşmiştir:

> ***Araştırmacı:*** *İncelediğiniz problem durumunda bizden bulmamızı istediği bilinmeyen nedir, görüşlerinizi alabilir miyim?*
>
> ***Ö7:*** *Problemde iki soru var. Birinde kantindeki masa sayısını istiyor, diğerinde ise öğrenci sayısını istiyor. Zaten masa sayısını bulursak öğrenci sayısını da kolaylıkla bulabiliriz. Asıl istenen masa sayısı.*
>
> ***Araştırmacı:*** *Evet, masa sayısını bulursak öğrenci sayısını da bulabiliriz. Problemde bulmaya çalışacağınız masa sayısı ile ilgili verilenler neler açıklayabilir misiniz?*

Ö11: *Öğrencilerin masa sayılarını kullanarak kantinde oturmaları ile ilgili iki durum verilmiş. Birinde her masada 3 kişi oturuyor ve 15 öğrenci ayakta kalıyor, diğerinde ise her masada 4 öğrenci oturuyor ve 1 öğrenci ayakta kalıyor. Bu iki durumda kantindeki masa sayısı ve gruptaki öğrenci sayısı değişmiyor.*

Araştırmacı: *Arkadaşınıza katılıyorum. Kantindeki masa sayısı ve gruptaki öğrenci sayısı değişmiyor. Burada eşitlik cümleleri var ve az önce esas bilmemiz gereken masa sayısı demiştiniz. Bu durumla ilgili nasıl bir denklem kurmalıyız?*

B odak öğrencisi: *Öncelikle masa sayısını bulmak istiyorsak masa sayımız x olsun. Bu x tane masaya iki farklı oturma düzeni ile öğrenciler yerleştirilmiş. Unutmayalım ki iki durumda da öğrenci sayıları eşit, aynı öğrencileri yerleştireceğiz. İlk durumda her masaya 3 kişi oturursa 3x kişi oturur, 15 kişi ayakta kalır. Yani grupta toplam 3x+15 öğrenci var. İkinci durumda her masada 4 öğrenci oturuyor ve 1 kişi ayakta kalıyor toplam 4x+1 öğrenci var. İki durumda da öğrenci sayısı aynı olunduğundan 3x+15=4x+1 şeklinde denklem kurabiliriz.*

Araştırmacı: *Arkadaşınız doğru açıklamalar yaparak denklemi kurdu. Bu denklemi bize kim çözmek ister?*

C odak öğrencisi: *3x+15=4x+1 denkleminde bilinenleri bir tarafa bilinmeyenleri diğer tarafa işaret değiştirerek geçirirsek 15-1=4x-3x şeklinde yazılır. Buradan denklemin çözümü 14=x olur. Bu durumda kantinde 14 masa olduğunu anlarız.*

Araştırmacı: *Kantinde 14 masa olduğu doğru. Şimdi bu grupta kaç öğrenci vardır? Bunu nasıl bulabiliriz?*

Ö8: *Öğrenci sayısını ister ilk oturma düzeninden ister ikinci oturma düzeninden bulabiliriz. Masa sayısı 14 olduğu için ilk düzende her masa 3 kişi oturursa 3.14=42 kişi, 15 kişi ayakta toplam 57 öğrenci var. İkinci oturma düzeninde her masada 4 kişi oturuyor. 4.14=56 kişi eder, 1 kişi de ayakta toplam 57 öğrenci eder.*

Sınıf tartışması şeklinde ilerleyen etkinlikte, öğrencilerin verilenleri kullanarak istenenleri bulmak için yaptıkları planlar ve uyguladıkları çözümler diyaloglarda verilmiştir. Gerçekleştirilen etkinlik esnasında sınıftaki öğrencilerin genelinin katılımı ile denklem kurma ve çözme basamakları başarı ile gerçekleştiği gözlemlenmiştir.

Tekrar öğretim etabında uygulanan diğer bir etkinlikte, *"Kerem'in kumbarasında 50 kuruşluk ve 25 kuruşluk toplam 20 tane madeni para vardır. Kumbaradaki paraların toplamı 600 kuruş olduğuna göre kaç tane 50 kuruş vardır? Probleme ait uygun denklemi kurarak çözünüz."* şeklinde bir problem durumu verilmiştir. Verilen problem durumuna ait denklemin kurulmasında sınıftaki bazı öğrencilerin zorlandığı tespit edilmiştir. Öğrencilerin 50 kuruşluk madeni paraların sayısına x dedikten sonra 25 kuruşluk madeni paraların sayısına verecekleri cebirsel ifadeyi bulma noktasında zorlandıkları tespit edilmiştir. Araştırmacı, bu durumu açıklığa kavuşturmak amacıyla tablo temsilinden yararlanarak madeni paraların sayılarını gösteren Çizelge 4.4'teki tabloyu oluşturmuş ve 50 kuruşların sayısının x olması durumunda 25 kuruşların sayısını gösteren cebirsel ifadenin öğrenciler tarafından fark edilmesini beklemiştir.

Çizelge 4.4 Madeni Para Sayılarını Cebirsel Olarak Gösterirken Kullanılan Çizelge

50 kuruşluk madeni para sayısı	25 kuruşluk madeni para sayısı
1	20-1=19
2	20-2=18
3	20-3=17
…	…
x	?

Araştırmacı, tablo temsilini inceleyen öğrencilere, *"50 kuruşların sayısı bilindiğinde 25 kuruşların sayısı nasıl bulunuyor? Eğer x tane 50 kuruş varsa kaç tane 25 kuruş olur?"* sorusunu öğrencilere yöneltmiştir. B odak öğrencisi, *"Madeni paraların toplamı 20 olduğu için örneğin 1 tane 50 kuruş varsa 20'den 1 çıkararak 19 tane olduğunu buluyoruz. Aynı şekilde x tane 50 kuruş varsa 20'den x'i çıkarırsak 20-x tane 25 kuruş olur."* şeklinde açıklamada bulunmuştur. Araştırmacının tablo temsilinden yararlanarak, öğrencilerin anlamakta zorlandıkları noktaları açıklığa kavuşturduğunu gözlemlemiştir. Denklemin kurulmasında öğrencilere engel oluşturan durum açıklığa kavuşturulduktan sonra söz alan A odak öğrencisi, *"Kumbaradaki 50 kuruşlardan x tane varsa 25 kuruşluklardan 20-x tane vardır. O zaman 50 kuruşlukların toplamı 50.x ile 25 kuruşlukların toplamı 25(20-x) ile* *bulunur ve ikisinin toplamı da 600 kuruştur. Denklem 50x+25(20-x)=600 şeklinde kurulur."* ifadesi ile denklemi doğru olarak kurmuştur. Ardından B odak öğrencisi denklemi, *"Önce dağılma özelliğinden yararlanarak 25'i dağıtırsak 50x+500-25x=600 ile karşılaşırız. Sol tarafta x'leri çıkarırsak 25x+500=600 olur. İki taraftan 500 çıkarırsak 25x=100 ve son olarak her iki tarafı 25'e bölersek x=4 olur. Sonuç olarak kumbarada 4 tane 50 kuruş varmış."* ifadesini kullanarak çözmüştür.

Tekrar etabında uygulanan diğer bir etkinlikte öğrencilere, *"İrem 210 sayfalık bir kitabı her gün bir önceki günden 20 sayfa fazla okuyarak üç günde bitirmiştir. Buna göre İrem üçüncü gün kaç sayfa kitap okumuştur? Probleme ait uygun denklemi kurarak çözünüz."* şeklinde bir problem durumu sunulmuştur. Sunulan problem durumuna ait denklemin kurulması için B odak öğrencisi, *"Birinci gün x sayfa okunursa, ikinci gün x+20 ve üçüncü gün x+40 sayfa kitap okunur. Kitap toplam 210 sayfa olduğu için üç günün toplamı 210 sayfa edecektir. Denklem x+(x+20)+(x+40)=210 olarak kurulur. Sol taraftaki cebirsel ifadeleri toplarsak 3x+60=210 ile karşılaşırız. İki taraftan 60 çıkarsa 3x=150 ve x=50 olur."* şeklinde açıklama yaparak denklemi çözmüştür. B odak öğrencisi birinci günü x olarak kabul ettiği için birinci gün okunan sayfa sayısını 50 olarak bulmuştur. Araştırmacı, *"Soruda üçüncü günü soruyor. Sen birinci günü bulmuş oldun. O zaman üçüncü gün için 50+40=90 işleminin de yapılması gerekir."* açıklamasını yaparak B odak öğrencisinin yaptığı hatayı düzeltmiştir. Ardından araştırmacı, *"Üçüncü gün okunan sayfa sayısı x olursa denklem nasıl kurulur?"* sorusunu öğrencilere yöneltmiştir. A odak öğrencisi, *"O zaman birinci gün okunan x-40, ikinci gün okunan x-20 ve üçüncü gün okunan sayfa sayısı x olur ve denklem (x-40)+(x-20)+x=210 olarak kurulur. Denklemi çözerken 3x-60=210 ile karşılaşırız. Eşitliğin sol tarafındaki -60 sağ tarafa +60 olarak geçerse 3x=270 ve x=90 olarak bulunur."* açıklamasını yapmıştır. Araştırmacı, *"Arkadaşınızın kurduğu denklem üçüncü günü bulmaya yönelik olarak kuruldu ve bulmuş olduğu x değeri direkt olarak üçüncü günü verdi."* açıklamasını yapmıştır. Etkinlik esnasında sınıftaki bazı öğrencilerin denklemi B odak öğrencisi gibi kurduğu için hatalı sonuca ulaştığı gözlemlenmiştir. Yapılan açıklamadan sonra öğrencilerin hatalarını düzelttiği tespit edilmiştir.

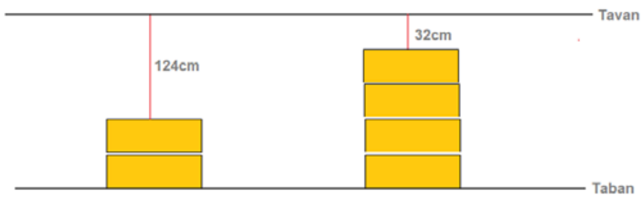
Tekrar öğretim etabına öğrencilerin günlük hayatta karşılaştıkları ve daha çok görsellerle desteklenmiş problem durumlarını içeren etkinliklerin sunulmasıyla devam edilmiştir. Öğrencilere daha somut durumlar sunularak denklem kurma tecrübeleri arttırılmaya çalışılmıştır. Bu amaçla araştırmacı ilk olarak, *"Sinemaya giden 8 arkadaştan ikisi yanlarına para almayı unuttukları için diğer arkadaşları onların yerine 4 TL fazla para vererek biletlerini almışlar. Buna göre bir sinema biletinin fiyatı ne kadardır? Probleme ait uygun denklemi kurarak çözünüz."* şeklinde bir problem durumu sunmuştur. Öğrencilerin problemi incelemesinin ardından problemin kurulması ve çözümü aşamalarında araştırmacı ile öğrenciler arasında geçen diyaloglar şu şekilde gerçekleşmiştir:

> ***Araştırmacı:*** *İncelediğiniz problem durumunda değişmeyen nicelikler var, fark edebildiniz mi? Bunlar nelerdir?*
>
> ***Ö7:*** *Bence sinema biletlerinin fiyatları değişmiyor.*
>
> ***Araştırmacı:*** *Evet… Bilet fiyatları değişmiyor. Peki, para veren kişi sayısı değişince alınacak toplam bilet sayısı ve sinemaya ödenecek toplam tutar değişiyor mu?*
>
> ***Ö6:*** *Hayır... Toplam tutar değişmez. Sinemaya 8 kişi gitmiş. Herkes para verse de vermese de 8 bilet alınacak ve toplam 8 bilet parası ödenecek.*
>
> ***Araştırmacı:*** *Doğru söylüyorsun. Ama 2 kişi para getirmedi onların yerine para verenler 4 TL daha fazla verecek. Bu sizce ne anlama geliyor?*
>
> ***B odak öğrencisi:*** *Şimdi herkes para getirseydi bir sinema bileti parası verecekti. Ama 2 kişi para getirmeyince diğer 6 kişi hem kendi bilet parasını hem de arkadaşı için 4 TL fazla ödeyecek. Aynı zamanda sinemaya ödenecek toplam para da değişmeyecek.*
>
> ***Araştırmacı:*** *Bu söylediklerin doğru… Söylediklerinle ilgi denklemi kurabilir misin?*
>
> ***B odak öğrencisi:*** *Şimdi bir sinema bileti x lira olsun. Herkes kendi parasını verseydi 8x lira sinemaya ödenecekti. Ama 2 kişi para getirmeyince 6 kişi 6.(x+4) lira sinemaya ödüyor. Sinemaya ödenen toplam para değişmiyor. Denklem 8x=6.(x+4) şeklinde olur.*
>
> ***Araştırmacı:*** *Kurulan denklem doğru. Denklemi kim çözmek ister?*

Ö21: *Önce sağ tarafta dağılma var, onu yaparsak 8x=6x+24 olur. Sonra iki taraftan 6x çıkaralım, 2x=24 ve son olarak x=12 olur. Demek ki bir sinema bilet 12 liradır.*

Etkinlik uygulanırken yaşanan diyaloglar esnasında sınıf tartışmasına katılan öğrencilerin söylediklerini takip eden birçok öğrencinin problem durumunu anladıktan sonra arkadaşlarının yaptığı açıklamalardan yola çıkarak ilgili probleme ait denklemi kurabildikleri gözlemlenmiştir.

Tekrar öğretim uygulamasına Şekil 4.102'de verilen görsellerle desteklenmiş etkinlikteki problem durumunun incelenmesi ile devam edilmiştir.

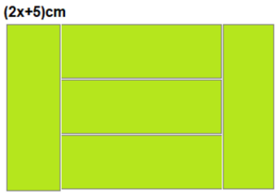


Bir depoda şekilde gösterildiği gibi üst üste 2 koli yerleştirildiğinde en üsteki koli ile tavan arasında 124 cm, dört koli yerleştirildiğinde ise 32 cm boşluk kalmaktadır. Buna göre bir kolinin yüksekliği nedir? Probleme ait uygun denklemi kurarak çözünüz.

Şekil 4.102 Öğretimin Tekrar Etabında Denklem Kurma Etkinliği Sorusu 1

Problemi inceleyen C odak öğrencisi, *"Burada iki durumda da taban ile tavan arasındaki mesafe değişmiyor. Birinci durumda 2 kolinin üstünde 124 cm boşluk kalıyor. İkinci durumda ise 4 kolinin üstünde 32 cm boşluk kalıyor. Kolilerin her birinin bilmediğimiz yüksekliği x olursa 2x+124=4x+32 olur."* şeklinde açıklama yaparak probleme ait denklemi doğru olarak kurmuştur. Önceki derslerde denklem kurma konusunda zorlanan C odak öğrencisi, *"Şekilde yapmamız gerekenler çok daha kolay görünüyor. İki durumdaki koliler ve boşlukların toplamı eşit olacak. Bu problemde denklemi kurarken yapmam gerekenleri daha iyi anladığım için denklemi kurmam daha kolay oldu."* açıklamasını yaparak daha önce aslında problemi anlamakta zorlandığı için denklemi kuramadığını ifade etmiştir. Ardından sınıftaki birçok öğrencinin yaptığı gibi C odak öğrencisi de bilinenleri bir tarafa bilinmeyenleri bir tarafa toplanması gerektiğini ifade ederek "124-32=4x-2x" eşitliğini yazdıktan sonra "92=2x" eşitliğini yazmış ve son olarak "x=48" olduğunu söyleyerek denklemi doğru olarak çözdüğü gözlemlenmiştir.

Tekrar öğretim etabına Şekil 4.103’te gösterilen etkinliğin öğrencilere sunulmasıyla devam edilmiştir.



Şekilde gösterildiği gibi kısa kenarının uzunluğu 2x+5 cm olan beş eş dikdörtgenin aralarında boşluk kalmadan birleştirilmesi ile oluşan büyük dikdörtgenin çevresi 240 santimetredir. Buna göre x kaç santimetredir?

Şekil 4.103 Öğretimin Tekrar Etabında Denklem Kurma Etkinliği Sorusu 2

Problem durumunu inceleyen öğrencilerden bazılarının probleme ait denklemi kurma konusunda zorlandıklarını fark eden araştırmacı, *“Sanırım eş dikdörtgenlerin uzun kenarını bulmakta zorlanıyorsunuz. Üç tane kısa kenarın üst üste dizilmesi ile bir uzun kenarın oluştuğunu fark edebildiniz mi?”* şeklinde açıklama yaptıktan sonra zorlanan öğrencilerin eş dikdörtgenlerin uzun kenarı hakkında yorum yapabildiklerini gözlemlemiştir. Ardından söz alan B odak öğrencisi, *“Büyük dikdörtgenin çevresi verilmiş. Bu çevre uzunluğu ile küçük dikdörtgenin kısa ve uzun kenarları arasında eşitlik kurabiliriz.”* şeklinde bir açıklama yaparak arkadaşlarına denklemin nasıl kurulabileceği hakkında fikir vermiştir. Bu esnada söz alan Ö7 arkadaşının söylediğine ek olarak, *“Bence uzun kenarları da kısa kenar cinsinden ifade edebiliriz. Şekilde bir uzun kenarın üç tane kısa kenara eşit olduğu gözüküyor. Bence büyük dikdörtgenin çevresini sadece küçük dikdörtgenlerin kısa kenarı ile alakalı olarak yazabiliriz.”* şeklinde görüşünü belirtmiştir. Araştırmacının ve söz alan öğrencilerin yaptığı açıklamalar sayesinde sınıftaki birçok öğrencinin denklemin nasıl kurulması gerektiği hakkında fikir sahibi olmaya başladığı gözlemlenmiştir. Araştırmacı sınıftaki öğrencilere düşünmeleri için kısa bir süre verdikten sonra öğrencilere tekrar söz hakkı vermeye başlamıştır. Söz alan A odak öğrencisi, *“Büyük çevrede 4 kısa 4 tane uzun kenar vardı. Uzun kenarları da kısa kenarın üç katı olarak ifade edersek toplam 16 tane kısa kenar olur.”* açıklamasını yapmıştır. Bu açıklamadan sonra sınıftaki öğrencilerin artık denklemi kurmaya başladıkları gözlemlenmiştir. Birçok öğrencinin “16.(2x+5)=240” denklemini kurduğunu gören araştırmacı, denklemin çözümünü yapmaları için öğrencilere tekrar kısa bir süre vermiştir. Denklemin çözümü için söz alan Ö4, *“Ben önce eşitliğin iki tarafını 16’ya böldüm. 2x+5=15 çıktı. Sonra iki taraftan 5 çıkardım 2x=10 oldu. Son olarak iki tarafı 2 ile bölünce x=5 sonucuna ulaştım.”* ifadesini kullanarak denklemi doğru olarak çözmüştür. Sınıf tartışması şeklinde gerçekleşen etkinlikte öğrencilerin sınıf ile paylaştıkları fikirlerin birbirlerinin düşüncelerini olumlu yönde etkilediği gözlemlenmiştir. Etkinlikteki probleme ait denklemin çözümü gerçekleştikten sonra tekrar öğretim etabına son verilmiştir.

4.6 Son Klinik Görüşmelere Ait Bulgular

Bu bölümde gerçekleştirilen öğretim etapları sonrasında odak öğrencilerle yapılan klinik görüşmelerde elde edilen bulgular sunulacaktır. Yapılan son klinik görüşmelerde, öğretim etapları sırasında odak öğrencilerin özellikle tartışılan noktaları zihinlerinde nasıl yapılandırdıklarının incelenmesinin yanı sıra öğretim sürecinde oluşan kavram yanılgılarının ve eksik öğrenmelerin giderilip giderilmediğinin incelenmesi de yapılmıştır. Ayrıca ön ve ara klinik görüşmelerde elde edilen bulgulara göre karşılaştırmalar yapılarak üç odak öğrencinin gelişim düzeyleri de gözlemlenmeye çalışılmıştır.

Araştırma bulgularının genelinde olduğu gibi son klinik görüşmelere ait bulgular;

1. Cebirsel ifadelerle işlemler
2. Örüntü genellemeleri
3. Eşitliğin korunumu ve ilişkisel düşünme
4. Denklemler ve çözümleri

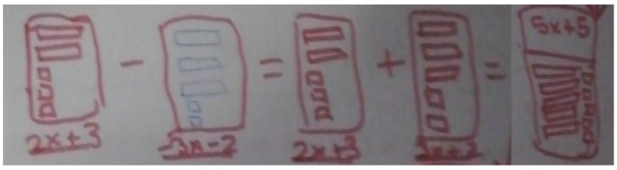
şeklinde dört ana başlık altında incelenerek sunulmuştur.

4.6.1 Birinci Öğretim Dizisine Ait Son Klinik Görüşme Bulguları

Odak öğrencilerle yapılan birinci son klinik görüşmeler "7.2.1.1. Cebirsel ifadelerle toplama ve çıkarma işlemleri yapar." ve "7.2.1.2. Bir doğal sayı ile bir cebirsel ifadeyi çarpar." kazanımları kapsamında gerçekleştirilmiştir. Bu kazanımlar çerçevesinde cebirsel ifadelerle işlemler yapmaları gereken klinik görüşme soruları odak öğrencilere yöneltilmiştir.

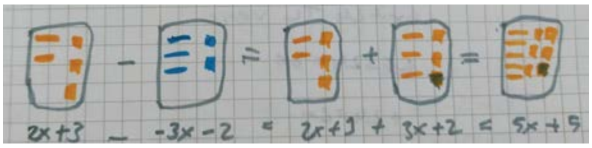
Gerçekleştirilen öğretimlerde ve birinci ara klinik görüşmelerde odak öğrenciler de dâhil sınıftaki öğrencilerin cebir karoları yardımıyla modellenen toplama işlemlerinde başarılı oldukları gözlemlenmiştir. Fakat sınıftaki öğretimin ilk etabında ve odak öğrencilerle yapılan ara görüşmelerde modeller yardımıyla cebirsel ifadelerle çıkarma işlemleri yapılırken istenilen başarıya ulaşılmadığı gözlemlenmiştir. Bu sebeple tekrar öğretim etabında uygulanan etkinlikler, bu durum göz önüne alınarak tasarlanmıştır.

Klinik görüşmelere "(2x+3)-(-3x-2)" işleminin modeller yardımıyla yapılması istenen soru ile başlanmıştır. A odak öğrencisi, *"Çıkarma işlemini öncelikle toplama işlemine çevirmeliyiz ve ikinci taraftaki cebirsel ifadenin işaretini değiştiririz."* şeklinde açıklamada bulunmuştur. Şekil 4.104'te gösterildiği gibi modelleme yaparak ara klinik görüşmelerde de olduğu gibi doğru sonuç olan "5x+5"e ulaştığı gözlemlenmiştir.



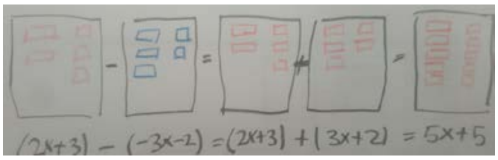
Şekil 4.104 A Odak Öğrencisinin Çıkarma İşlemindeki Eylemi

B odak öğrencisi "(2x+3)-(-3x-2)" işlemini modeller yardımıyla yaparken, *"Çıkarma işlemini toplamaya çevireceğiz ve aynı zamanda çıkan ifadenin işaretleri değişecek. Bu işaret değişimini yaparken modellerin de rengini değiştiriyorum, sonra aynı toplamadaki gibi iki kutuda bulunanları birleştiririm."* açıklamasını yaparak Şekil 4.105'te gösterilen modellemeleri yaparak doğru sonuca ulaşmıştır.



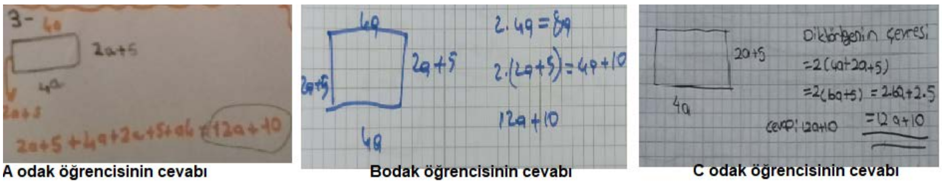
Şekil 4.105 B Odak Öğrencisinin Çıkarma İşlemindeki Eylemi

C odak öğrencisinin ara klinik görüşmelerde özellikle çıkarma işlemlerinde parantezin önemini dikkate almayarak hata yaptığı gözlemlenmiştir. Fakat tekrar öğretim etabında yapılan etkinlikler esnasında bu durumu düzeltme eylemi içerisine girdiği gözlemlenmiştir. Buna paralel olarak son klinik görüşmede verilen "(2x+3)-(-3x-2)" işlemini cebir karoları yardımıyla modellerken, *"İlk cebirsel ifadeyi aynen yazarım. Sonra çıkarmayı toplamaya çevirip ikinci cebirsel ifadenin işaretlerini değiştiririm. İşaret değiştirirken hem x' lerin hem de sayıların işaretini değiştiririm. En son iki kutudakileri toplayacağım."* açıklamasının ardından Şekil 4.106'da gösterilen modellemeyi yaparak doğru sonuç olan "5x+5" ifadesine ulaştığı gözlemlenmiştir. C odak öğrencisinin verdiği yanıt ve yaptığı modellemeden de anlaşılacağı üzere tekrar öğretim etabında yapılan etkinlikler vasıtasıyla öğrencinin cebirsel ifadelerle çıkarma işleminde yaptığı hataları tekrar etmediği, eksik öğrenmelerini giderdiği gözlemlenmiştir.



Şekil 4.106 C Odak Öğrencisinin Çıkarma İşlemindeki Eylemi

Son klinik görüşmelere bir kenarının uzunluğu "4a", diğer kenarının uzunluğu "2a+5" cebirsel ifadeleri ile verilen bir dikdörtgenin çevresini bulmaları istenen soru ile devam edilmiştir. Üç odak öğrencinin de cebirsel ifadelerle toplama işlemi yapmaları gereken soruya doğru yanıtlar verdiği gözlemlenmiştir. Soruyu yanıtlarken A odak öğrencisi, *"Dört kenarını ayrı ayrı yazdıktan sonra benzer terim olan a'ları kendi aralarında, sayıları ise kendi arasında toplarız."* açıklamasını yaparak doğru sonuç olan, *"12a +10"* yanıtını vermiştir. B odak öğrencisinin ise, *"Önce iki kenar uzunluklarını toplarız 4a+2a+5 =6a+5 sonra dikdörtgenin iki kısa, iki uzun kenarı olduğundan 2.(6a+5)=12a+10 sonucunu buluruz."* şeklinde açıklama yaparak doğru sonuca ulaştığı gözlemlenmiştir. C odak öğrencisi dikdörtgenin çevresini hesaplarken B odak öğrencisinin yanıtına paralel olarak kısa ve uzun kenarını topladıktan sonra iki katını alarak "12a+10" sonucuna ulaşmıştır. Bu yanıtlardan anlaşılacağı üzere üç odak öğrencinin de cebirsel ifadelerle toplama işlemleri yaparken benzer terim kavramının farkına vararak Şekil 4.107'de gösterildiği gibi doğru sonuçlara ulaşabildikleri gözlemlenmiştir.

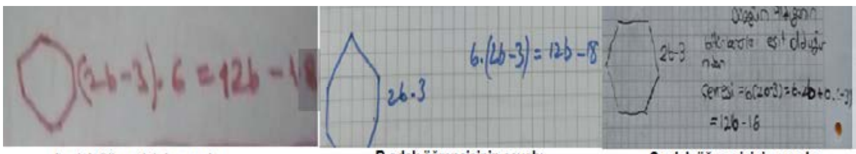


A odak öğrencisinin cevabı | Bodak öğrencisinin cevabı | C odak öğrencisinin cevabı

Şekil 4.107 Odak Öğrencilerin Çarpma İşlemindeki Eylemleri 1

Klinik görüşmeye bir doğal sayının bir cebirsel ifade ile dağılma özelliğinden yararlanılarak çarpımını amaçlayan soru ile devam edilmiştir. Sorgulanan soruda bir kenar uzunluğu "2b-3" cebirsel ifadesi ile gösterilen düzgün altıgenin çevresinin hesaplanması istenmiştir. A odak öğrencisi, *"Düzgün altıgenin çevresini hesaplarken bir kenar uzunluğu olan 2b-3 ile 6'yı çarpmalıyız. Yani (2b-3).6 işlemini yaparız.*

Dağılma özelliğini kullanarak sonucu 12b-18 buluruz." şeklinde açıklama yaparak doğru sonuca ulaşmıştır. A odak öğrencisinin çarpma işleminin çıkarma işlemi üzerine soldan dağılma özelliğini başarılı bir şekilde uygulayarak doğru sonuca ulaştığı tespit edilmiştir. B odak öğrencisinin ise, *"Çevrenin bulunması için 6 ile 2b-3 çarpılmalıdır. Dağılma özelliği kullanmamız gerekir. 6'yı 2b ve 3 ile çarptıktan sonra arasına eksi işaret koyarız."* şeklinde açıklamada bulunarak dağılma özelliğini kullanarak doğru sonuca ulaştığı gözlemlenmiştir. C odak öğrencisinin öğretimin ilk etabında ve ara klinik görüşmeler esnasında dağılma özelliğinden yararlanarak çarpma işlemi yaparken sıklıkla hata yapmıştır. Çıkarma işleminin değişme özelliği olduğunu düşünmesi ve parantezi dikkate almama gibi yanılgılara sahip olduğu tespit edilmişti. Tekrar öğretim etabı esnasında bu yanılgıları ortadan kaldırmaya yönelik etkinlikler vasıtası ile dağılma özelliğini doğru bir şekilde kullanmaya başladığı gözlemlenmişti. Bu bulgulara paralel olarak son klinik görüşmeler esnasında C odak öğrencisi düzgün altıgenin çevresini hesaplarken, *"Düzgün altıgenin bütün kenar uzunlukları birbirine eşittir. Bir kenarı 2b-3 olduğundan 6.(2b-3) işlemini yapmalıyız. Dağılma özelliğinden 6.2b+6.(-3) =12b-18 olur."* şeklindeki açıklamasıyla dağılma özelliğinden yararlanarak cebirsel ifadelerle çarpma işlemini doğru olarak yapabilmiştir. Odak öğrencilerin son klinik görüşmelerde bir doğal sayı ile bir cebirsel ifadenin çarpımı ile ilgili soruya Şekil 4.108'de gösterildiği gibi dağılma özelliğinden yararlanarak doğru yanıtlar verdikleri gözlemlenmiştir. Odak öğrencilerin verdiği doğru yanıtlardan da anlaşılacağı üzere tekrar etabında uygulanan dağılma özelliğini uygulamaya yönelik etkinliklerin olumlu sonuçlar verdiği tespit edilmiştir.



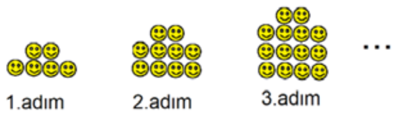
A odak öğrencisinin cevabı B odak öğrencisinin cevabı C odak öğrencisinin cevabı

Şekil 4.108 Odak Öğrencilerin Çarpma İşlemindeki Eylemleri 2

4.6.2 İkinci Öğretim Dizisine Ait Son Klinik Görüşme Bulguları

Odak öğrencilerle yapılan ikinci öğretim dizisine ait son klinik görüşmeler "7.2.1.3. Sayı örüntülerinin kuralını harfle ifade eder, kuralı harfle ifade edilen örüntünün istenilen terimini bulur." kazanımı kapsamında gerçekleştirilmiştir. Örüntüler konusu ile alakalı olarak yapılan ara görüşmelerde elde edilen bulgulardan sonra tekrar öğretim etabı gerçekleştirilmiştir. Bu tekrar öğretim etabından sonra öğrencilerin gelişimlerini tespit etmek amacıyla odak öğrencilerle son klinik görüşmeler yapılmıştır. Böylece uygulanan etkinliklerin öğrencilerde tespit edilen kavram yanılgıları ve eksik öğrenmeleri gidermesi açısından etkinliği ortaya konulmaya çalışılmıştır.

İkinci öğretim dizisine ait son klinik görüşmelere Şekil 4.109'da ilk üç adımı verilen şekil örüntüsünün önce yakın adımlarının, sonra ise uzak adımlarının sorgulandığı sorularla başlanmıştır.



Şekil 4.109 Odak Öğrencilere Yöneltilen Şekil Örüntüsü

Verilen şekil örüntüsünü inceleyen A odak öğrencisinden örüntünün adımları arasındaki ilişki hakkındaki görüşleri istenmiştir. Bu esnada araştırmacı ile A odak öğrencisi arasında yaşanan diyaloglar şu şekilde gerçekleşmiştir:

Araştırmacı: *Örüntü nasıl ilerlemiştir?*

A odak öğrencisi: *Her adımda 4 tane gülen yüz eklenmiştir.*

Araştırmacı: *Bunun dışında her adım için değişmeden kalan gülen yüzler var mı?*

A odak öğrencisi: *Evet var... Aslında her adımda üstte iki tane gülen yüz var. Sonra kaçıncı adımda ise adım sayısının dört katı kadar gülen yüz altına eklenerek devam etmiş.*

Araştırmacı: *Örüntünün dördüncü adımında kaç tane gülen yüz olur?*

A odak öğrencisi: *En üstte iki tane, altında 4 sıra halinde dörder tane gülen yüz eklenir. Toplam 2+16=18 tane gülen yüz olur.*

Araştırmacı: *Evet doğru… Peki, 20. ve 30. adımlar için kaçar tane gülen yüz olacağını hesaplayabilir misin?*

A odak öğrencisi: *20. adımda 2 gülen yüzün altına 20.4=80 tane eklenir, toplam 82 tane gülen yüz olur. Aynı şekilde 30. Adımda 2+30.4=2+120=122 tane olur.*

Araştırmacı: *Sonuçların doğru… Bize örüntünün kuralını sözel olarak ifade edebilir misin?*

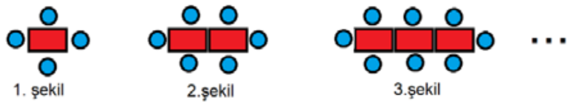
***A odak öğrencisi:** Gülen yüz sayısı her adımda adım sayısının dört katının iki fazlasına eşit oluyor.*

Yaşanan diyaloglardan da anlaşılacağı üzere A odak öğrencisinin örüntünün yakın ve uzak adımlarına ulaşırken yapmış olduğu genellemelerde, temel fonksiyonel düzeyde olduğu gözlemlenmiştir. Öğretim etaplarından önce gerçekleştirilen ön klinik görüşmeler esnasında yinelemeli stratejiler kullanan öğrencinin gelişiminin olumlu yönde ilerlediği tespit edilmiştir. Bunun dışında örüntünün kuralını sözel olarak ifade ederken sadece artış miktarına odaklanmadan şekilsel analizler yardımıyla adım sayısı ile adımlarda karşılaşılan terimler arasındaki fonksiyonel ilişkinin farkına varabildiği tespit edilmiştir.

B odak öğrencisi şekil örüntüsünün istenilen adımlarına ulaşırken, *"Dördüncü adımda üsteki iki gülen yüze 4.4 =16 tane gülen yüz eklenir 18 gülen yüz oluşur. 20. adımda ise 2 tane gülen yüze 20.4=80 tane gülen yüz eklenir 82 tane gülen yüz oluşur. Aynı şekilde 30. adımda 2+30.4=2+120=124 tane gülen yüz oluşur."* şeklinde görüşünü bildirmiştir. A odak öğrencisine benzer şekilde B odak öğrencisinin de yakın ve uzak adımlara ulaşırken öğretim etapları öncesinde kullandığı yinelemeli stratejiler yerine, adım sayıları ve adımlarda karşılaşılan terimler arasındaki fonksiyonel ilişkilere odaklanarak sonuçlara ulaştığı gözlemlenmiştir.

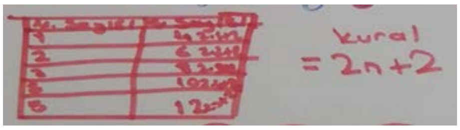
C odak öğrencisi verilen şekil örüntüsünü inceledikten sonra örüntünün kuralı hakkında, *"Adım sayısını dört ile çarpıp iki ekleriz."* şeklinde görüş belirtmiştir. C odak öğrencisi kuralı sözel olarak ifade ettikten sonra örüntünün dördüncü adımındaki gülen yüz sayısının "4.4+2" işlemini yaparak "18" olarak hesaplamıştır. Yine aynı şekilde 20. ve 30. adımlardaki gülen yüz sayılarını sözel olarak ifade etmiş olduğu gözlemlenmiştir. Örüntü kuralına uygun işlemler yaparak sırasıyla "4.20+2=82" ve "4.30+2=122" olarak sonucu hesaplamıştır. Öğretim etapları öncesinde yapılan ilk klinik görüşmeler esnasında yakın ve uzak adımlardaki terimlere ulaşırken yinelemeli stratejiler kullanan C odak öğrencisinin, artık temel fonksiyonel düzeyde örüntü genellemeleri yapabildiği gözlemlenmiştir. Bunun yanında C odak öğrencisinin örüntüde genellemeler yaparken şekilsel analizler yerine sayısal ilişkilerden yararlanarak istenilen adımlardaki gülen yüz sayılarına ulaştığı gözlemlenmiştir.

Klinik görüşmelere şekil 4.110'da gösterilen masalar ve etraflarına yerleştirilen sandalyeler ile oluşturulan bir şekil örüntüsünün öğrencilere sunulmasıyla devam edilmiştir.



Şekil 4.110 Masalar ve Sandalyeler İle Oluşturulan Şekil Örüntüsü

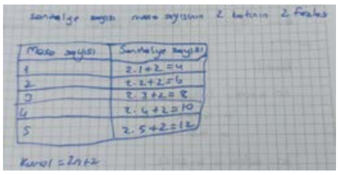
A odak öğrencisi ilk üç adımı verilen şekil örüntüsünün dördüncü adımında istenen sandalye sayısına ulaşırken, üçüncü adımdaki şekle bir masa ve iki sandalye daha ekleyerek 10 sandalye sayısına rahatlıkla ulaşabilmiştir. Ardından örüntüdeki masa ve sandalye sayıları arasındaki ilişkiyi, *"Yan yana dizilen masaların en başında ve en sonunda birer tane olmak üzere iki sandalye sabit olarak duruyor. Masalar eklendikçe altına ve üstüne birer tane gelecek şekilde her masa için iki tane daha sandalye ekleniyor. Sandalye sayısı masa sayısının iki katı olarak artıyor sonra masaların başlarında duran iki sandalyeyi ekliyoruz."* şeklinde ifade etmiş ve bu ifadesine uygun olarak Şekil 4.111'de gösterilen tabloyu doldurarak örüntünün kuralını cebirsel olarak "2n +2" şeklinde göstermiştir. Ardından örüntünün 50. adımı için 50 masanın etrafına dizilen sandalye sayısına "50.2+2=102" işlemini yaparak rahatlıkla ulaşabildiği gözlemlenmiştir. A odak öğrencisinin örüntüde şekilsel analizi yaptıktan sonra örüntü kuralına ulaştığı ve uzak adımlar için örüntü genellemeleri yaparken temel fonksiyonel düzeyde olduğu tespit edilmiştir.



Şekil 4.111 A Odak Öğrencisinin Kullandığı Tablo Temsili

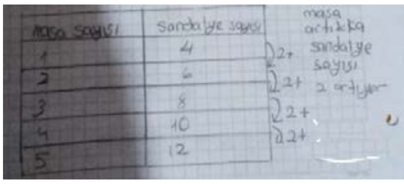
B odak öğrencisi, ilk üç adımı verilen şekil örüntüsünü incelikten sonra dördüncü adımda şekle bir masa ve iki sandalye ekledikten sonra şekilde dört masanın etrafına 10 sandalye çizerek örüntünün dördüncü adımını doğru olarak oluşturmuştur. B odak öğrencisi örüntünün kuralı hakkında, *"Her masa eklenmesiyle ikişer tane sandalye daha ekliyoruz. Örüntüde sandalye sayısı ikişer ikişer artıyor. Bir de her şekilde uç kısımlarda bulunan birer sandalye var. Onları da ekliyoruz.*

Sandalye sayısı masa sayısının iki katının iki fazlası oluyor." görüşünü ifade etmiştir. Şekilsel analizin ardından sözel olarak ifade ettiği örüntünün genel terimini bulurken Şekil 4.112'de gösterilen tablo temsilinden yararlanarak "2n+2" şeklinde ifade edebilmiştir. Son olarak 50 masa etrafına dizilebilecek sandalye sayısına "2.50+20=102" işlemini yaparak doğru olarak ulaşabildiği gözlemlenmiştir. Verilen yanıtlardan da anlaşıldığı gibi B odak öğrencisinin, örüntü genellemelerinde yakın ve uzak adımlar için temel fonksiyonel düzeyde olduğu gözlemlenmiştir.



Şekil 4.112 B Odak Öğrencisinin Kullandığı Tablo Temsili

C odak öğrencisi ilk üç adımı verilen şekil örüntüsünün dördüncü adımını oluştururken ilk üç adımdaki sandalye sayılarının ikişer ikişer arttığını vurgulamıştır. Ardından, dört masanın etrafına 10 sandalyeyi yerleştirerek öğrencinin doğru çizimi yaptığı gözlemlenmiştir. C odak öğrencisi örüntünün kuralı hakkında, *"Her adımda sandalye sayısı ikişer ikişer artıyor. Yani masa sayısını iki katı kadar sandalye ekleyeceğiz. Fakat ilk adımda 2.1=2 değil, 4 sandalye var. Yani iki fazlası, ikinci adımda 2.2= 4 değil 6 sandalye var, yine iki fazlası. Sandalye sayısı masa sayısının iki katının iki fazlası oluyor."* şeklinde görüşünü bildirmiştir. Ardından sözel olarak ifade ettiği örüntü kuralına paralel olarak Şekil 4.113'te gösterilen tabloyu oluşturduktan sonra örüntünün kuralını cebirsel olarak "2n+2" şeklinde ifade etmiştir. Son olarak 50 masa etrafına dizilebilecek sandalye sayısına, "2.50+2=102" işlemini yaparak ulaşmıştır. C odak öğrencisinin örüntünün yakın ve uzak adımları için temel fonksiyonel düzeyde genellemeler yapabildiği gözlemlenmiştir. Bunun yanında öğrencinin bu genellemeler esnasında şekilsel analizler yerine daha çok sayısal analizlerden yararlandığı gözlemlenmiştir.



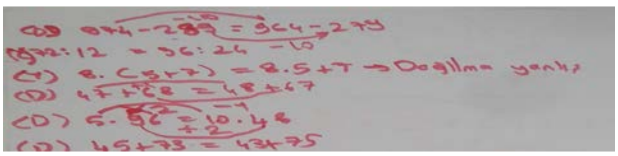
Şekil 4.113 C Odak Öğrencisinin Kullandığı Tablo Temsili

Odak öğrencilerle yapılan son klinik görüşmeler esnasında öğrencilerin örüntü genellemelerinde, öğretim etapları öncesinde kullandıkları yinelemeli stratejiler yerine fonksiyon ilişkileri kullanmaya başladıkları gözlemlenmiştir. Bu açıdan öğretim etaplarında kullanılan etkinliklerin öğrencilerin gelişimini olumlu yönde etkilediği tespit edilmiştir. Ayrıca A ve B odak öğrencilerinin şekilsel analizlerden yararlanarak örüntü genellemelerini kolaylıkla yapabildikleri görülmüştür. C odak öğrencisinin, örüntü genellemeleri esnasında sayısal ilişkileri kullanarak genelleme yapması, fonksiyonel ilişkinin farkına varmasını zorlaştırdığı tespit edilmiştir.

4.6.3 Üçüncü Öğretim Dizisine Ait Son Klinik Görüşme Bulguları

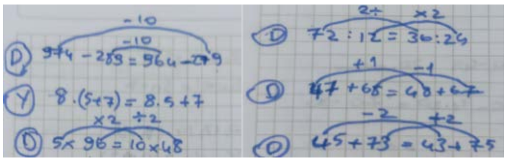
Odak öğrencilerle yapılan üçüncü öğretim dizine ait son klinik görüşmeler "7.2.2.1. Eşitliğin korunumu ilkesini anlar." kazanımı kapsamında hazırlanan sorular çerçevesinde gerçekleştirilmiştir. Odak öğrencilerle üçüncü öğretim dizisine ait ara klinik görüşmelerde elde edilen bulgular neticesinde alınan öğretim kararları tekrar öğretim etabında hazırlanan etkinlikler vasıtasıyla sınıfta uygulanmıştır. Eşit işaretinin denge anlamı ve eşitliğin korunumu konularını içeren etkinliklerin odak öğrencilerin eksikliklerini ne ölçüde giderdiği ve zihinsel gelişimlerini nasıl etkilediğini ortaya koymak amacıyla son klinik görüşmeler gerçekleştirilmiştir.

Klinik görüşmelere doğru/yanlış cümleleri ile hazırlanan soruların odak öğrencilere sunulmasıyla başlanmıştır. Genel olarak ilişkisel düşünülerek çözülebilen sorularda öğrencilerin nasıl düşündükleri gözlemlenmeye çalışılmıştır. A odak öğrencisi ara klinik görüşmelerde ve öğretimin ilk etabında sayılar arasındaki ilişkilerden yararlanılarak çözülebilen soruları ilişkisel düşünerek çözebilmesine rağmen, sayılarla işlemler yaparak çözmeyi tercih etmekteydi. Fakat tekrar öğretim etabında uygulanan etkinliklerden sonra ilişkisel düşünmenin bariz bir şekilde geliştiği tespit edilmiştir. Şekil 4.114'te görüldüğü gibi son klinik görüşmede sorulan soruda sayılar arasındaki ilişkileri oklarla göstererek kolayca sonuçlara ulaşabildiği tespit edilmiştir.



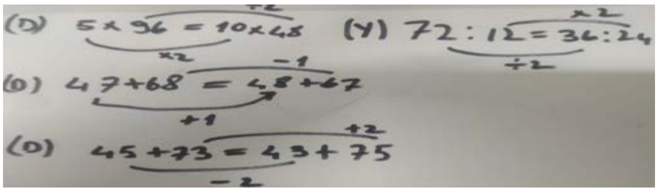
Şekil 4.114 A Odak Öğrencisinin Doğru/Yanlış Cümlelerindeki Eylemleri

B odak öğrencisi, ara klinik görüşmelerde özellikle toplama ve çarpma işlemleri içeren sorularda ilişkisel olarak düşünürken sorunlar yaşamaktaydı. Toplanan iki sayıdan biri artarken dengenin bozulmaması için diğer sayının aynı miktarda artması gerektiğini düşünüyordu. Benzer olarak çarpılan iki sayıdan birinin herhangi bir katı alınırken, diğer çarpanın da aynı katını alarak hatalı sonuçlara ulaşıyordu. B odak öğrencisinin tekrar öğretim etabında uygulanan etkinlikler vasıtasıyla bu hatalarının ortadan kalktığı ve doğru yanıtlara kolaylıkla ulaştığı gözlemlenmiştir. B odak öğrencisi "47+68=48+67" eşitliğinin doğru kurulduğunu soru üzerinde çizdiği oklar yardımıyla bulurken, *"Eşitliğin sağındaki 47 diğer tarafa 48 olarak yazılmış. Toplanan sayılardan biri 1 artarsa dengenin bozulmaması için diğer sayı 1 eksilmelidir. Eşitliğin sağındaki toplanan diğer sayı 68 yerine sol tarafta bir eksik olarak 67 yazılmış. Bu sebeple eşitlik doğru kurulmuştur."* şeklinde açıklamada bulunmuştur. Benzer olarak "5x96=10x48" eşitliği hakkında, *"Eşitliğin sağ tarafında 5 ile 96 sayıları çarpılıyor. Sol tarafında ise 5'in iki katı olan 10 yazılmış. Dengeyi bozmamak için diğer çarpan olarak 96'nın yarısı olan 48 alındığından eşitlik doğru olarak kurulmuştur."* şeklinde açıklama yaparak doğru sonuca ulaşmıştır. Şekil 4.115'te gösterildiği gibi B odak öğrencisinin doğru/yanlış cümlelerinde sayılar arasındaki ilişkileri çizimler yaparak göstererek soruları doğru yanıtladığı tespit edilmiştir.



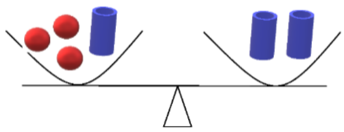
Şekil 4.115 B Odak Öğrencisinin Doğru/Yanlış Cümlelerindeki Eylemleri

C odak öğrencisi öğretimin ilk etabında ve ara klinik görüşmeler esnasında ilişkisel düşünme ile ilgili sorularda sorun yaşamaktaydı. Genel olarak soruları, eşit işaretinin "sonuç bul" anlamını kullanarak iki tarafta işlemler yaptıktan sonra bulduğu gözlemlenmekteydi. Son klinik görüşmelerde "974-289=964-279" eşitliğinin doğru kurulduğunu, *"Sağ taraftaki çıkarma işlemindeki eksilen sayı 10 azaltılmış aynı şekilde çıkanda 10 azaltılmış. Bu durum dengeyi bozmaz, eşitlik doğrudur."* şeklinde açıklama yaparak belirtmiştir. Benzer olarak "5x96=10x48" eşitliğinin doğru kurulduğunu, *"Bu soruyu önceden işlemleri yaparak yapıyordum. Aslında kolay bir yolu varmış. Çarpılan iki sayıdan birinin iki katı alınırsa dengenin* *bozulmaması için diğerinin yarısı alınır."* şeklinde ifade etmiştir. Şekil 4.116'da görüldüğü gibi C odak öğrencisi ilişkisel olarak çözülebilen sorularda sayılar arasındaki ilişkileri çizdiği oklarla göstermiş ve işlem yapmadan doğru sonuçlara ulaşabilmiştir.



Şekil 4.116 C Odak Öğrencisinin Doğru/Yanlış Cümlelerindeki Eylemleri

Son klinik görüşmelerde sorgulanan diğer bir durum ise eşitliğin korunumu ilkesini kullanarak denge durumunda verilen terazi modellerinin kefelerine yerleştirilen cisimlerin kütleleri arasındaki ilişkilerin ifade edilebilmesi ile ilgilidir. Ara klinik görüşmelerde üç odak öğrencinin de eşitliğin iki yanına aynı işlemlerin yapılmasının dengeyi bozmayacağı fikrine sahip olduğu tespit edilmişti. Son klinik görüşmelerde öğrencilerin eşitliğin korunumu ilkesi yardımıyla kütleleri bilinmeyen cisimlerin kütleleri arasındaki ilişkileri ifade etmelerini sağlamak amacıyla Şekil 4.117'de gösterilen kütleler arasındaki ilişki sorgulanmıştır.



Şekil 4.117 Son Klinik Görüşmelerde Yöneltilen Terazi Modeli Sorusu

A odak öğrencisi denge durumundaki terazi modelindeki cisimlerin kütleleri arasındaki ilişkiyi, *"Terazinin sol kefesinde bir silindir ve üç top, sağ kefesinde ise iki silindirin dengede olduğu gözüküyor. İki kefeden de birer silindirin çıkarılması dengeyi bozmaz. Silindirler çıktıktan sonra sol kefede üç tane top kalır. Yani üç top bir silindire eşittir."* şeklinde ifade etmiştir. A odak öğrencisinin ifadesinden de anlaşılacağı gibi öğrencinin eşitliğin korunumu ilkesini doğru olarak kullanabildiği ve kütleleri verilmeyen cisimlerin birbirleri ile olan ilişkisini ifade edebildiği tespit edilmiştir.

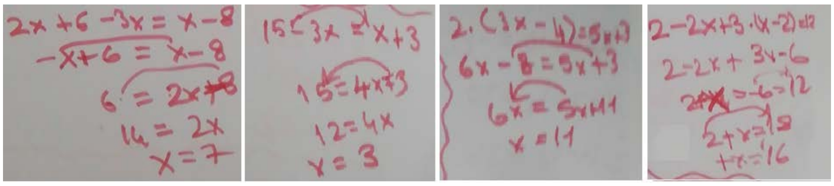
B odak öğrencisi ise denge durumunda verilen terazi modelindeki kütleler arasındaki ilişkiyi ifade ederken, *"Terazinin sol kefesinde 3 top ve bir silindir, sağ kefesinde iki silindir vardır. Bu durumu 3T+1S=2S şeklinde yazabiliriz. Eşitliğin iki* *tarafından da birer S çıkarırsak 3T+1S-1S=2S-1S olur. İşlemleri yaparsak 3T=1S kalır. Üç tane top bir silindirin ağırlığına eşittir."* açıklamasında bulunmuştur. B odak öğrencisi cisimlerin kütlelerini bilmediği için eşitliğin korunumu ilkesini kullanırken bilinmeyenlerden yararlanmıştır. Daha önceki öğretim etaplarında bilinmeyenlerle işlem yapmaya alışkın olan B odak öğrencisi kütleler arasındaki ilişkileri bilinmeyen kullanarak doğru ifade edebilmiştir.

C odak öğrencisi denge durumundaki terazi modelindeki kütleler arasındaki ilişkileri ifade ederken bir miktar zorlanarak doğru sonuca ulaşmıştır. Denge durumunu ifade ederken bilenmeyen ifadeler kullanmak yerine sayı değerleri vererek eşitliği sağlamaya çalışmış sonra verdiği değerler arasındaki ilişkiden yararlanarak kütleler arasındaki ilişkiyi ifade etmeye çalışmıştır. C odak öğrencisi, *"İki tarafta da birer silindir birbirini dengeliyor. Sağ taraftaki üç topu sol taraftaki diğer silindir dengeliyor. Örneğin toplardan biri 5 olursa silindir 15 olabilir. Eşitlik 5+5+5+15=15+15 şeklinde kurulursa denge oluşur. Silindir 15, top 5 ise silindir topun üç katı olacaktır."* şeklinde açıklamada bulunmuştur. C odak öğrencisi eşitliğin korunumu ilkesini kullanmasına rağmen bilinmeyenlerle işlem yapmaktan kaçınmış sayısal değerler vererek denge durumunu ifade etmeye çalışmıştır.

4.6.4 Dördüncü Öğretim Dizisine Ait Son Klinik Görüşme Bulguları

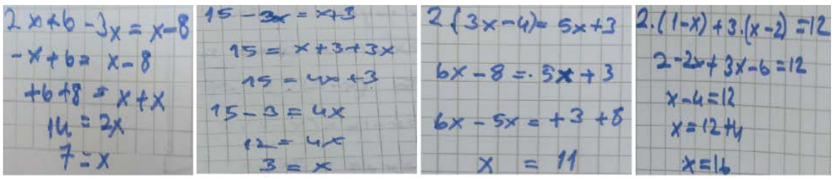
Odak öğrencilerle gerçekleştirilen ara klinik görüşmelerden elde edilen bulgular neticesinde öğretim kararları alınmış ve bu kararlar tekrar öğretim etabı boyunca uygulanmıştır. Odak öğrencilerin ara klinik görüşmelerden sonra uygulanan tekrar öğretim etabında denklem kurma ve çözme konularındaki gelişimlerini ortaya koymak amacıyla dördüncü öğretim dizisine ait son klinik görüşmeler düzenlenmiştir. Odak öğrencilerle yapılan dördüncü öğretim dizisine ait son klinik görüşmeler; "7.2.2.2. Birinci dereceden bir bilinmeyenli denklemi tanır ve verilen gerçek hayat durumlarına uygun birinci dereceden bir bilinmeyenli denklem kurar.", "7.2.2.3. Birinci dereceden bir bilinmeyenli denklemleri çözer." ve "7.2.2.4. Birinci dereceden bir bilinmeyenli denklem kurmayı gerektiren problemleri çözer." kazanımları çerçevesinde gerçekleştirilmiştir.

Dördüncü öğretim dizisine ait son klinik görüşmelerde zorluk dereceleri farklı ("2x+6 –3x= x –8"; "15–3x =x+3"; "2.(3x–4) =5x+3"; "2.(1 –x) + 3.(x–2) =12") denklemler odak öğrencilere sunulmuştur. Sunulan denklemleri A odak öğrencisinin Şekil 4.118'de gösterildiği gibi gerekli yerlerde dağılma özelliğinden yararlandıktan sonra yer değiştirme yöntemini kullanarak çözdüğü gözlemlenmiştir. Öğretim etaplarında terazi modellerinden yararlanarak veya eşitliğin iki yanına aynı işlemleri yaparak denklem çözümleri yapabilen A odak öğrencisi son klinik görüşmede tercihen yer değiştirme yöntemini kullandığı belirtmiştir. A odak öğrencisi kullanmış olduğu yöntem ile ilgili, "*İşaret değiştirerek karşı tarafa geçirirken daha hızlı işlem yapabiliyorum. Zaten iki yana aynı işlemleri yaptığım yöntem ile aynı anlama geliyor.*" şeklinde görüşünü bildirmiştir. A odak öğrencisinin yapmış olduğu açıklamadan da anlaşılacağı gibi uyguladığı yöntemi ezberden uzak ve diğer yöntemlerle olan ilişkisinin farkında olarak kullandığı gözlemlenmiştir.



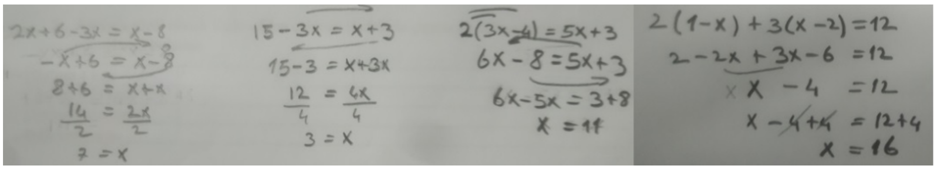
Şekil 4.118 A Odak Öğrencisinin Denklem Çözerken Gerçekleştirdiği Eylemler

B odak öğrencisi sunulan denklemleri çözerken Şekil 4.119'da gösterildiği gibi yer değiştirme yöntemini kullandığı tespit edilmiştir. Yapılan görüşmede denklem çözümlerinde kullandığı yöntem ile ilgili, "*Derslerde denklemleri çözerken eşitliğin iki yanına da aynı işlemleri yapmamız gerektiğini öğrendik. Örneğin ilk denklemde sağ tarafta -8 var. İki yana +8 eklersek sağ tarafta +8, -8'i yok ediyor ve sol tarafa + 8 yazılıyor. Bunu daha kısa olarak sağ taraftaki -8'i sol tarafa +8 olarak yazabiliriz. Ben genelde yer değiştirerek denklemleri çözdüm.*" açıklamasını yapmıştır. B odak öğrencisinin yaptığı açıklamadan da anlaşılacağı gibi iki yana aynı işlemi yapma ve yer değiştirme yöntemleri arasındaki ilişkinin farkına vardığı gözlemlenmiştir.



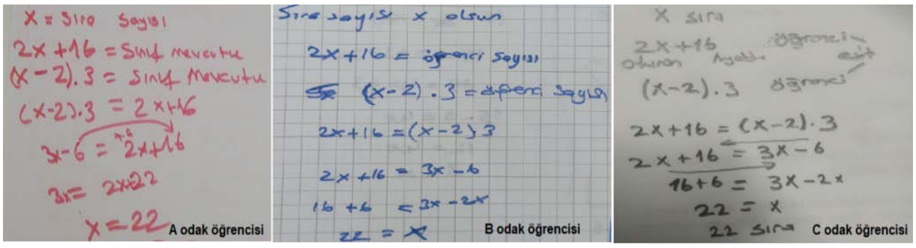
Şekil 4.119 B Odak Öğrencisinin Denklem Çözerken Gerçekleştirdiği Eylemler

Ara klinik görüşmeler esnasında ve öğretimin ilk etabında denklem çözümlerinde bir hayli sıkıntı yaşayan C odak öğrencisinin son klinik görüşmeler esnasında denklem çözümlerinde başarı seviyesinin arttırdığı gözlemlenmiştir. Denklem çözümlerinde Şekil 4.120’de gösterildiği gibi iki yana aynı işlemleri yapma ve yer değiştirme yöntemlerini kullandığı tespit edilmiştir. C odak öğrencisi denklemlerin çözümleri hakkında, *“Derslerde iki yana aynı işlemi yapma yönteminin nasıl olduğunu anlamaya başladım. Ben denklem çözümünü sadece işaret değiştir, karşı tarafa geçir olarak anlamıştım. Önceden hata yapıyordum. Şimdi iki yana aynı işlemi uygulayınca daha kısa olarak işaret değiştirerek geçtiğini anladım.”* şeklinde açıklama yaparak görüşünü belirtmiştir. Öğrencinin yaptığı açıklamadan da anlaşılacağı gibi tekrar etabındaki etkinliklerin öğrenciyi ezbere yapılan işlemlerden uzaklaştırdığı tespit edilmiştir.



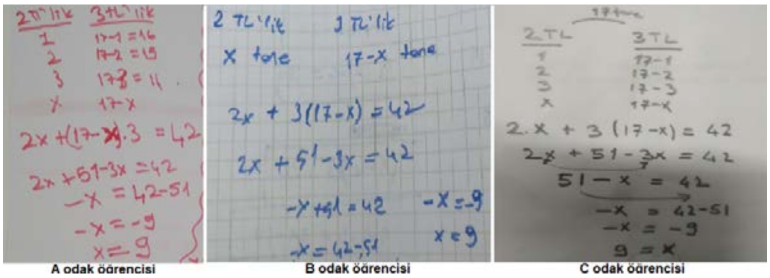
Şekil 4.120 C Odak Öğrencisinin Denklem Çözerken Gerçekleştirdiği Eylemler

Odak öğrencilerle yapılan görüşmelerde verilen problem durumlarına ait denklemi kurmaları ve kurulan denklemi çözmeleri amacıyla araştırmacı tarafından, *“Bir sınıftaki öğrenciler sıralara ikişer ikişer oturtulurlarsa 16 öğrenci ayakta kalıyor. Üçer üçer oturtulurlarsa 2 sıra boş kalıyor. Buna göre bu sınıfta bulunan sıra sayısını denklem kurarak bulunuz.”* şeklinde problem durumu sunulmuştur. Odak öğrencilerin üçünün de Şekil 4.121’de gösterildiği gibi doğru sonuca ulaştıkları gözlemlenmiştir.



Şekil 4.121 Odak Öğrencilerin Denklem Kurarken Gerçekleştirdiği Eylemler 1

Benzer olarak araştırmacı tarafından, *“Tanesi 2 TL ve 3 TL olan çikolatalardan 17 tane alan Kerem toplam 42 TL ödeme yapıyor. Buna göre 2 TL’lik çikolatalardan kaç tane aldığını denklem kurarak bulunuz.”* şeklinde başka bir problem durumu sunulmuştur. Klinik görüşmeler esnasında A ve C odak öğrencilerinin denklem kurarken kullanacakları cebirsel ifadeleri bulurken tablo temsilinden yararlandıkları gözlemlenmiştir. Üç odak öğrencinin de Şekil 4.122'de gösterildiği gibi denklemleri kurduktan sonra denklemleri doğru çözdükleri tespit edilmiştir.



Şekil 4.122 Odak Öğrencilerin Denklem Çözerken Gerçekleştirdiği Eylemler 2

Klinik görüşmeler esnasında elde edilen bulgulardan yola çıkılarak yapılan tekrar öğretimlerde kullanılan etkinliklerin odak öğrencilerde denklem çözme ve denklem kurma konularını olumlu yönde etkilediği tespit edilmiştir. Özellikle C odak öğrencisinin denklem kurma konusunda yaşadığı zorlukları aşmaya başladığı gözlemlenmiştir. Bu açıdan farklı temsillerden yararlanılması ve günlük hayat problemlerinden yola çıkılmasının öğrencilerin problem kurmada yaşadıkları zorlukları aşmada yardımcı olduğu tespit edilmiştir.

5. TARTIŞMA ve SONUÇ

Bu araştırmada, tahmini öğrenme yol haritalarına dayalı olarak yürütülen sınıf tabanlı öğretim deneyi sürecinde ortaokul yedinci sınıfta öğrenim gören üç odak öğrencinin cebir konularını zihinlerinde nasıl yapılandırdıklarının incelenmesi ve bu süreçte öğrencilerin öğrenmelerini destekleyecek araçların belirlenmesi amaçlanmıştır. Bu bölümde araştırmanın amacına uygun olarak elde edilen bulguların literatüre dayandırılarak tartışılmasına ve elde edilen sonuçların değerlendirilmesine yer verilmiştir. Araştırmadan elde edilen bulgular ile ilgili tartışma ve sonuç aşağıda belirtildiği şekilde dört alt başlık altında sunulmuştur:

1. Cebirsel ifadelerle toplama, çıkarma ve çarpma işlemleri
2. Örüntü genellemeleri
3. Eşitliğin korunumu ve ilişkisel düşünme
4. Denklem kavramı ve çözümleri

5.1 Cebirsel İfadelerle Toplama, Çıkarma ve Çarpma İşlemlerine İlişkin Tartışma ve Sonuç

Araştırmada cebirsel ifadelerle işlemler konusunu içeren kazanımlar doğrultusunda, öğrencilerin ön bilgileri ile kavram yanılgıları dikkate alınarak literatürde yapılan çalışmalar incelenmiş ve tahmini öğrenme yol haritaları hazırlanmıştır. Hazırlanan bu tahmini öğrenme yol haritaları doğrultusunda ders planları ve etkinlikler tasarlanmıştır. İlk olarak benzer terim kavramı üzerinde durulduktan sonra benzer terimlerden yararlanılarak cebirsel ifadelerle toplama ve çıkarma işlemleri ile ilgili öğretim gerçekleştirilmiştir. Odak öğrenciler de dâhil sınıftaki birçok öğrencinin benzer terim kavramının tanımı konusunda eksik bilgiye sahip olduğu gözlemlenmiş ve bu eksik öğrenmeler gerçekleştirilen öğretim sayesinde giderilmeye çalışılmıştır.

Araştırmada öğrencilerin cebirsel ifadelerle işlemlerde en sık yaptığı hatalardan birinin, benzer olmayan terimlerin toplanması ya da çıkarılması olduğu tespit edilmiştir. Literatürde bu hatanın değişken kavramının iyi kavranamamasından ve cebirsel ifadenin bir bütün halinde düşünülmemesinden kaynaklandığı belirtilmektedir (Akkan, Çakıroğlu ve Güven, 2008; Dede ve ark., 2002; Ersoy ve Erbaş, 2000). Araştırmada cebirsel ifadelerle toplama ve çıkarma işlemlerinde sıklıkla karşılaşılan kavram yanılgısı ise "parantezin önemsiz olduğunun düşünülmesi" olmuştur. Özellikle düşük başarı düzeyine sahip olan öğrencilerde bu kavram yanılgısı gözlemlenmiştir. Örneğin C odak öğrencisi, "(3x+5)-(2x+3)" işleminde parantez kullanılmasına rağmen parantezin önemsiz olduğu yanılgısına sahip olması nedeniyle sonucu "x+8" şeklinde bulmuştur. Bu kavram yanılgısından literatürdeki birçok çalışmada da bahsedilmiştir (Akkaya ve Durmuş, 2006; Erbaş, Çetinkaya ve Ersoy, 2009; Gürel ve Okur, 2017; Perso, 1992). Mevcut çalışmada cebir karoları yardımıyla modellemeler yapılarak toplama ve çıkarma işlemlerini içeren etkinliklere önem verilmiş ve yapılan bu öğretim ile karşılaşılan hata türleri ve kavram yanılgıları giderilmeye çalışılmıştır. Ayrıca cebir karoları yardımıyla cebirsel ifadelerle toplama ve çıkarma işlemlerinin görsel temsili ile cebirsel temsili arasında geçiş yapılarak öğrencilerin kavramsal öğrenmeleri desteklenmeye çalışılmıştır. Nitekim son klinik görüşmelerde cebirsel ifadelerle toplama ve çıkarma işlemlerinde odak öğrencilerin başarı düzeylerinde olumlu yönde ilerleme yaşandığı gözlemlenmiştir. Zira literatürdeki benzer çalışmalarda da cebir karolarının kullanımının öğrencilerin cebir konularını daha iyi anlamalarına yardımcı olduğundan ve dersleri daha ilgi çekici hale getirdiğinden bahsedilmiştir (Aktaş, 2017; Çaylan, 2018; Karataş ve Bahadır, 2018; Sharp, 1995).

Bu araştırmada öğrencilerin bir doğal sayı ile sabit terim içermeyen bir cebirsel ifadenin çarpımını sorun yaşamadan yapabildikleri gözlemlenmiştir. Fakat bir doğal sayı ile sabit terim içeren bir cebirsel ifadeyi çarparken dağılma özelliğinin yanlış uygulamalarından kaynaklanan hatalarla karşılaşılmıştır. Bu tür hataların temelinde dağılma özelliğinde yaşanan ön bilgi eksiklerinin olduğu düşünülmektedir. Araştırmacı, geçmişten gelen gözlem ve deneyimleri ile dağılma özelliğini tam manasıyla kavrayamayan öğrencilerin cebirsel ifadelerde çarpma işleminde de başarı düzeylerinin düşük olduğunu tespit etmiştir. Yenilmez ve Teke (2008) çalışmalarında bu görüşe benzer olarak dağılma özelliğini kullanamayan öğrencilerin cebirsel ifadelerde çarpma işlemi yaparken zorlandıklarını belirtmektedir. Buna istinaden, araştırmada gerçekleştirilen öğretim etaplarında dağılma özelliğinin geometrik gösterimine vurgu yapılarak, kenar uzunluğu-alan ilişikleri içeren etkinlikler vasıtasıyla öğrencilerin cebirsel ifadelerle çarpma işleminde yaşadığı zorluklar aşılmaya çalışılmıştır. Nitekim cebirsel ifadelerle işlemlerin öğretiminde daha çok görsel temsil içeren cebirsel problemlerin öğrencilere sunulmasının kavramsal öğrenmeyi desteklediği literatürdeki çalışmalarda da vurgulanmaktadır (Akkaya ve Durmuş, 2006; Benson, Wall ve Malm, 2013; Birgin ve Demirören, 2020; MacGregor ve Stacey, 1997; Perso, 1992). Son klinik görüşmeler esnasında özellikle düşük başarı düzeyinde olan C odak öğrencisinin dağılma özelliğinden yararlanarak cebirsel ifadelerle çarpma işlemindeki başarı düzeyinin ön ve ara klinik görüşmelere kıyasla belirgin bir şekilde gelişim gösterdiği tespit edilmiştir.

Sonuç olarak gerçekleştirilen öğretimde uygulanan etkinliklerin, ön ve ara klinik görüşmelerde odak öğrencilerde tespit edilen kavram yanılgıları ile eksik öğrenmelerini ortadan kaldırmaya yardımcı olduğu söylenebilir.

5.2 Örüntü Genellemelerine İlişkin Tartışma ve Sonuç

Bu araştırmanın ön klinik görüşmelerinde öğrencilerin şekil örüntülerinin yakın adımlarını bulurken, görsel yaklaşımlar yerine sayısal yaklaşımlar kullandıkları tespit edilmiştir. Bu duruma paralel olarak Stacey (1989) çalışmasında öğrencilerin şekil örüntülerinde genelleme yaparken modellerden çok işlemlerle ilgilendiklerinden bahsetmiştir. Ayrıca, odak öğrencilerin ön klinik görüşmelerde şekil örüntülerinin genel terimlerini sayısal ilişkilere odaklanarak buldukları ve yakın adımlara yinelemeli stratejileri kullanarak ulaştıkları gözlemlenmiştir. Yani odak öğrenciler ardışık terimler arasındaki farkı yinelemeli olarak ekleyerek örüntüyü istenen terime kadar devam ettirmişlerdir. Bu durumun doğal sonucu olarak odak öğrencilere örüntünün uzak bir adımı sorulduğunda zorlandıkları gözlemlenmiştir. Benzer sonuç literatürde de belirtilmektedir (Çayir, 2013; Özdemir, 2013; Samsan ve ark., 1999; Stacey, 1989; Uzun, 2021; Yeşildere-İmre, Akkoç ve Baştürk-Şahin, 2017).

Ön klinik görüşmelerde odak öğrencilerden örüntülerin kuralını sözel olarak ifade etmeleri istendiğinde örüntünün sadece terimleri arasındaki artış miktarına odaklandıkları gözlemlenmiştir. Odak öğrencilerin örüntüye ait kuralı yazmak için cebirsel temsili kullanmada zorlandıkları tespit edilmiştir. Bu bulgu Palabıyık ve Akkuş-İspir (2011), Yaman (2010), ve Yıldız ve ark., (2015) tarafından yapılmış olan çalışmaların bulgularıyla tutarlıdır. Öğrencilerin örüntünün genel terimini “an±b” şeklinde ifade etme sürecinde ardışık iki terim arasındaki farkı “a” değeri olarak ele aldıkları, ardından herhangi bir terim için girdi çıktı değerleri ile işlemler yaparak "±b" değerini deneme yanılma yöntemiyle bulmaya çalıştıkları gözlemlenmiştir. Literatürde bu araştırmada olduğu gibi öğrencilerin sabit farka odaklanarak örüntü kuralını bulmaya çalıştıklarını belirten çalışmalara rastlanmıştır (El Mouhayar ve Jurdak, 2016; Girit ve Akyüz, 2016; Gökçe ve Yeşildere-İmre, 2017; Özdemir ve ark., 2015; Tanışlı ve Köse, 2011). Bu araştırmanın bulgularına paralel olarak, MacGregor ve Stacey (1993) de öğrencilerin az bir kısmının terimler ile terim sayıları arasındaki ilişkiyi kurabildiğinden bahsederek genelde öğrencilerin terimler arasındaki artış miktarına odaklandıklarından örüntü kuralını cebirsel olarak ifade etmekte zorlandıklarını belirtmiştir. Becker ve Rivera (2005), öğrencilerin sayı örüntüsünde kural bulurken geçmiş deneyimlerinden kaynaklı olarak terimler arasındaki farka odaklanmadığından bahsetmiştir. Bu sebeple, araştırmada öğrencilerin örüntülerdeki fonksiyonel ilişkileri fark etmelerini destekleyecek etkinliklere yer verilmeye çalışılmıştır.

Araştırmada yapılan ön klinik görüşmelerde tespit edilen en belirgin bulgu, verilen şekil örüntülerinde odak öğrencilerin şekilsel analizler yapmada zorlanmalarıdır. Oysa örüntünün adım sayısı ile o adımda karşılaşılan sayı arasındaki ilişkiyi bulmak için şekil örüntülerinin yapısı iyi analiz edilmelidir. Şekilsel analizler yardımıyla örüntüde fiziksel olarak nelerin değiştiği ve nelerin sabit kaldığının farklı stratejilerle çözülebileceği fikri öğrencilere kazandırılmalıdır. Dolayısıyla görsel ilişkiler ile örüntünün analiz edilmesi, fonksiyonel ilişkinin keşfedilmesi ve sayısal yaklaşımlarla üretilmesi zor olan formüllerin üretilmesi açısından önemli role sahiptir (Markworth, 2010; Rivera ve Becker, 2008; Tanışlı ve Köse, 2011). Bu nedenle özellikle görsel olarak sunulan örüntü sorularında şekillerin yapılarının dikkate alınması tavsiye edilmektedir (Becker ve River, 2006; El Mouhayar ve Jurdak, 2016; Özdemir ve ark., 2015; Tanışlı ve Köse, 2011). Bu tavsiyeler dikkate alınarak araştırmada öğrencilerin şekilsel analiz yapmalarını destekleyecek etkinliklere yer verilmeye çalışılmıştır.

Araştırmanın ön klinik görüşmelerinde elde edilen bulgular göz önünde bulundurularak literatürden alınan destekle, örüntü genellemelerine ve fonksiyonel düşünmenin gelişimine yönelik tahmini öğrenme yol haritaları hazırlanmıştır. Hazırlanan öğrenme yol haritalarını uygulamaya yönelik ders planları ve etkinlikler tasarlanmıştır. Tasarlanan ders planları ve etkinliklerde şekil örüntüleri ile çalışmaya özen gösterilerek, öğrencilerin örüntülerde görsel analizler yapması ve fonksiyonel düşünmelerinin geliştirilmesi hedeflenmiştir. Son klinik görüşmelerde ise odak öğrencilerin şekil örüntülerini görsel olarak analiz etmeye başladıkları ve örüntüleri genelleme sürecinde farklı çözüm stratejilerini kullanabildikleri gözlemlenmiştir. Benzer olarak yapılan birçok çalışmada (Bukova-Güzel, 2016; Kabael ve Tanışlı, 2010; Rivera ve Becker, 2007; Yaman ve Umay, 2013) belirtildiği gibi öğrencilerin görsel yaklaşımlar sayesinde fonksiyonel ilişkileri daha kolay görebildikleri sonucuna ulaşılmıştır. Bunun yanında, Walkowiak (2014) tarafından yapılmış olan çalışmadaki sonuçlara benzer olarak yapılan ara klinik görüşmelerde başarı düzeyi yüksek ve orta seviyede olan odak öğrencilerin şekilsel analizler yapmaya daha yatkın oldukları ve yapısal özelliklere daha çok dikkat ettikleri gözlemlenmiştir.

Araştırmada öğretimler esnasında öğrencilerin örüntü genellemeleri yaparken daha da uzmanlaşmalarını desteklemek amacıyla birçok çalışmada önemi vurgulanan ve sayısal ilişkileri daha görünür hale getiren tablo temsilinden yararlanılmıştır (Kieran, 1992; MacGregor ve Stacey, 1993; Palabıyık ve Akkuş-İspir, 2011). Öğretim etaplarında kullanılan etkinliklerde değişen ve sabit kalan niceliklerin daha rahat görülmesi amacıyla farklı renkli örüntü blokları kullanılmıştır. Farklı renkli blokların kullanılmasının sayısal verilerin tablo temsili ile gösterimini kolaylaştırdığı ve öğrencilerin sayısal analizler yapmalarını desteklediği söylenebilir. Benzer bulgulara literatürde birçok çalışmada rastlanmıştır (El Mouhayar, 2021; Tanışlı, 2008; Walkowiak, 2014; Yeşildere-İmre ve ark., 2017). Tablo temsili kullanılarak yapılan öğretimin öğrencilerin şekilsel analizler yapmasında başlangıç noktası olduğu düşünülmektedir (Friel ve Markworth, 2009).

Araştırma süresince yapılan tüm etkinliklerin yansıması son klinik görüşmelerde ortaya çıkmıştır. Son klinik görüşmelerde üç odak öğrenci de örüntülerin yakın ve uzak adımlarını bulurken sıklıkla kullandıkları yinelemeli (recursive) stratejiler yerine belirgin (explicit) stratejileri kullanabilmişlerdir. Ross (2011) yakın adımları bulurken kullanılan stratejilerin uzak adımları bulurken değişim göstermesi gerektiğinden bahsetmiştir. Bu değişimin yinelemeli stratejilerin yerini belirgin stratejilerin alması şeklinde olması gerektiğini savunmuştur. Bu açıdan değerlendirildiğinde örüntü genellemeleri konusunda öğrencilerin ilk ve son zihinsel etkinlikleri arasında belirgin bir gelişimin gerçekleştiği söylenebilir. Araştırmada kullanılan etkinliklerde şekil örüntülerinde öğrencilerin şekilsel analiz yapmalarının teşvik edilmesinin ve örüntü genellemelerine ulaşılırken tablo temsillerinden yararlanılmasının kavramsal öğrenmenin gerçekleşmesinde önemli rol oynadığı düşünülmektedir.

5.3 Eşitliğin Korunumu ve İlişkisel Düşünmeye İlişkin Tartışma ve Sonuç

Yapılan ön klinik görüşmelerde odak öğrencilerin eşit işaretini ilişkisel anlamıyla kullanmak yerine işlemsel bir sembol olarak kullandıkları tespit edilmiştir. Nitekim literatürde yapılan incelemede bu duruma paralel görüş bildiren birçok çalışmaya rastlanmıştır (Behr, Erlwanger ve Nichols, 1975; Carpenter, Levi, Franke ve Zeringue, 2005; McNeil, Hornburg, Devlin, Carrazza ve McKeever, 2019; Yaman ve ark., 2003). Cebir öğrenmeye başlayan öğrencilerin yaşadığı en büyük zorluklardan birinin eşit işaretinin ilişkisel anlamıyla anlaşılamamasından kaynaklandığı belirtilmektedir (Rittle-Johnson ve Alibali, 1999). Öğrencilerin yaşadığı bu zorluğun nedenini Perso (1992) eşit işaretinin eylem bildiren bir sembol olarak düşünülmesinden kaynaklanan bir kavram yanılgısı ile açıklamıştır. Dolayısıyla eşit işaretinin ilişkisel olarak anlaşılması ve uygun kullanımı, ilişkisel düşünmenin önemli bir ölçütüdür (Carpenter ve ark., 2005; Fyfe, Matthews ve Amsel, 2020). Bu sebeple araştırmada öğrencilerin eşit sembolünü ilişkisel olarak anlamalarının cebir öğretimi açısından kritik bir öneme sahip olduğu düşünülmektedir.

Carpenter ve ark. (2005) cebir öğretiminde doğru/yanlış ve açık cümle örneklerinin kullanılmasının ilişkisel düşünmeye başlamada ve ilişkisel anlamı öğrenmede önemli bir araç olduğundan bahsetmektedir. Literatürde birçok çalışmada (Carpenter ve ark., 2003; Koehler, 2004; Köse ve Tanışlı, 2011; Molina ve Ambrose, 2006) bahsi geçtiği gibi doğru/yanlış ve açık cümle örnekleri ile yapılacak öğretimlerin, standart sayı cümleleri ile yapılacak öğretime kıyasla öğrencilerin eşit işaretinin anlamını kavramalarına yardımcı olduğu ve ilişkisel düşünmeyi daha çok desteklediği belirtilmektedir. Bu bakımdan ön klinik görüşmelerin bulgularından yola çıkarak ve literatürden alınan destekle öğrencilerde ilişkisel düşüncenin gelişimine yönelik tahmini öğrenme yol haritaları hazırlanmıştır. Ardından hazırlanan öğrenme yol haritalarını uygulamaya yönelik ders planları ve etkinlikler tasarlanmıştır. Öğretim etaplarında hazırlanan etkinliklerin uygulanması esnasında sıklıkla sınıf tartışmalarına yer verilmiştir. Zira yapılan birçok çalışmada (Behr vd, 1980; Carpenter ve Levi, 2000; Falkner ve ark., 1999; Kızıltoprak ve Köse, 2013; Köse ve Tanışlı, 2011) sınıf tartışmalarının öneminden bahsedilerek ilişkisel düşünmenin gelişimdeki etkisinden söz edilmektedir. Pedagojik olarak eşit işaretinin anlamı üzerine yapılan sınıf içi tartışmaların cebirsel düşünmenin gelişimi için iyi bir başlangıç noktası olduğundan bahsedilmektedir (Jacobs, Franke, Carpenter, Levi ve Battey, 2007; Kızıltoprak, 2014). Gerçekleştirilen öğretim etaplarının ardından yapılan son klinik görüşmelerde odak öğrencilerin eşit işaretini sonuç bildiren işlemsel bir sembol yerine, sayılar ve ifadeler arasında ilişki kurmaya yarayan bir sembol olarak kullanmaya başladıkları gözlemlenmiştir. Bu araştırmada da eşit işaretinin anlamının öğrenciler tarafından gelişimi Yaman'ın (2004) yapmış olduğu çalışmadaki gibi önce işlemsel anlamın gelişimi, sonra ilişkisel anlamın gelişimi şeklinde olmuştur. Son klinik görüşmeler esnasında eşit işaretinin öğrenciler tarafından ilişkisel anlamıyla kullanılmaya başlandığı gözlemlenmiştir. Ayrıca odak öğrencilerin terazi modellerinin dengede kalmasını sağlamak ve cebirsel olarak eşitliğin korunumu için yapılması gereken işlemlere yönelik soruları doğru olarak yanıtladıkları tespit edilmiştir. Bunun dışında araştırmada elde edilen en önemli sonuçlardan biri de yapılan öğretimlerde doğru/yanlış ve açık cümle örnekleri kullanılmasıyla öğrencilerin sayılar arası ilişkileri ve işlem özelliklerini kullanarak işlem yapmadan eşitlik aksiyonlarının farkına daha kolay varmalarıdır. Nitekim araştırmanın son klinik görüşmelerinde odak öğrenciler doğru/yanlış ve açık cümle örneklerini ilişkisel düşünerek yanıtlayabilmiştir. İlişkisel düşünerek soruları yanıtlayan öğrencilerin daha başarılı oldukları aşikârdır (Fyfe ve ark., 2020; Köse ve Tanışlı, 2011). Bunun yanında, ilişkisel düşünmenin verilen sayı cümlelerindeki sayıları ya da işlemleri farklı formlara dönüştürürken çeşitli yollar arama noktasında öğrencileri cesaretlendirdiğinden bahsedilmektedir (Koehler, 2004). Bu bilgilerden yola çıkarak araştırma süresince öğrencilerin ilişkisel düşünmelerini geliştirmeye yönelik etkinlikler sınıf tartışmasına açılmıştır. Yapılan öğretim sonrasında son klinik görüşmelerde odak öğrencilerin açık cümle örneklerinde işlemleri rahatlıkla yaparak eşit işaretini "denklik ve aynılık" anlamında kullanabildikleri tespit edilmiştir. Bunun yanında, verilen eşitliklerde öğrencilerin işlemler yapmak yerine sayılar arasındaki ilişkileri kullanmalarının cebirsel düşünmelerini olumlu yönde etkilediği düşünülmektedir. Açık cümle ve doğru yanlış cümle örnekleri ile öğrencilerde eşitliğin korunumu ilkesinin kavramsal öğreniminin daha kolay gerçekleştiği tespit edilmiştir. Bu durum Molina ve Ambrose'nin (2006) yapmış oldukları çalışmanın bulguları ile tutarlılık göstermektedir.

5.4 Denklemler ve Çözümlerine İlişkin Tartışma ve Sonuç

Bu araştırmada odak öğrencilerle yapılan ön klinik görüşmelerde sözel olarak ifade edilen ya da terazi modelleri ile gösterilen eşitliklere ait denklemlerin çözümünde odak öğrencilerin informal yöntemler kullanarak bilinmeyenleri bulabildikleri fakat denklemleri kurma ve formal yöntemlerle çözme konusunda problem yaşadıkları gözlemlenmiştir. Araştırmanın bu bulgusuyla paralel olarak Yenilmez ve Avcu (2009) ile Sayı (2018), öğrencilerin denklem çözme ve kurma problemlerinde zorlandıklarını belirtmişlerdir. Özellikle denklem kurmada yaşanılan zorluğun öğrencilerin problem durumunu anlamamalarından kaynaklandığı düşünülmektedir. Literatür incelendiğinde birçok çalışmada bu iddiayı destekleyen görüş ile karşılaşılmıştır (Didiş ve Erbaş, 2012; Umurbek, 2020). Ön klinik görüşmeler esnasında odak öğrencilerin denklem çözümlerinde deneme yanılma ve ilkokuldan alışkın oldukları geriye doğru çalışma yöntemlerinden yararlandıkları gözlemlenmiştir. Bu duruma literatürdeki ilgili çalışmalarda da rastlanmıştır (Akkan, Baki ve Çakıroğlu, 2012; Khng ve Lee, 2009; Yenilmez ve Avcu, 2009).

Denklem kurma ve çözme konusunda kavramsal bir öğretimin yapılabilmesi için işlemsel bilginin yanında kavramsal bilginin ve işlemlerin altında yatan kavramsal anlayışın da öğrencilere kazandırılması gerekmektedir. Aksi takdirde yapılan öğretim ezbere dayalı olacak ve etkinliğini yitirecektir. Dolayısıyla odak öğrencilerle yapılan ön görüşmelerden elde edilen bulgular ve literatürde yapılan çalışmalar incelenerek öğrencilerin denklem kurma ve çözme süreçlerini desteklemek amacıyla tahmini öğrenme yol haritaları hazırlanarak ders planları ve etkinlikler tasarlanmıştır. Bu süreçte hazırlanan etkinliklerde, denklem çözümlerinde önemi sıklıkla vurgulanan terazi modellerinden yararlanılmıştır. Denklem çözümlerinin terazi modelleri kullanılarak yapılmasının, denklemin simetrisini vurgulaması (Kieran, 1992) ve denklem çözümünde kullanılan kurallar arasındaki kavramsal anlayışı vermesi (Van De Walle ve ark., 2014) bakımından etkili bir yöntem olduğundan bahsedilmektedir (Altun, 2005; Fyfe ve ark., 2020; Gürbüz ve ark., 2014; Kutluca ve Akın, 2014; Uzun, 2021). Bu sebeple gerçekleştirilen öğretimde denklem çözümlerine terazi modelleri kullanılmasıyla başlanıp, sonrasında sembolik dünyada çalışmayı gerektirecek bir öğretim yolu tercih edilmiştir.

Araştırmada gerçekleştirilen öğretimin ilk etabında ve yapılan ara klinik görüşmelerde, denklem çözümlerinde öğrencilerin sıklıkla yer değiştirme yöntemi ile denklemlerin çözümüne ulaşmaya çalıştıkları gözlemlenmiştir. Yüksek ve orta başarı düzeyindeki öğrencilerin yer değiştirme yöntemi ile doğru çözümlere ulaşabilmelerine rağmen düşük başarı düzeyindeki C odak öğrencisinin yer değiştirme yöntemini yanlış uygulamasından dolayı hatalı sonuçlara ulaştığı tespit edilmiştir. Kieran (1992) bu tip hatanın sebebini; denklemde eşitliğin korunumu ilkesinden yararlanarak bir tarafa uygulanan işlemin aynısının diğer tarafa uygulanması mantığının kavranması yerine, ezbere dayalı olarak terimin karşı tarafa zıt işareti ile geçirilmeye çalışılması olarak açıklamıştır. Bu çalışmada da denklem çözümlerinde eşitliğin korunumu ilkesini dikkate almaksızın, yer değiştirme yönteminin direkt olarak kullanılmasının öğrencileri ezbere yapılan işlemlere yönelttiği gözlemlenmiştir.

Araştırmada elde edilen bir diğer bulgu da klinik görüşmeler esnasında ve öğretim etaplarında özelikle düşük başarı düzeyindeki öğrencilerin denklem kurmada zorluk yaşamalarıdır. Araştırmanın bu bulgusu, cebirsel problemleri denklem şeklinde göstermede öğrencilerin zorlandığından bahseden Dede'nin (2004) ve öğrencilerin denklem kurarken ve çözerken zorlandıklarını belirten Özarslan'ın (2010) çalışmalarının sonuçları ile benzerlik göstermektedir. Öte yandan öğrencilerin geçmişten getirdikleri eksik aritmetiksel öğrenmelerinin, denklem kurma ve çözmede sorunlara neden olduğundan bahsedilmektedir (Cengiz, 2019). Öğrencilerin aritmetikten cebire geçiş süreçleri göz önüne alınarak araştırma kapsamında uygulanan etkinliklerde günlük hayat problemlerine daha çok yer verilmeye çalışılmıştır. Öğrencilere verilen problemlere ait denklem kurma ve çözme süreçlerinde tartışma ve sorgulama ortamları oluşturulmaya çalışılmıştır. Ayrıca terazi modellerinden yararlanılarak denklem çözümleri yapılması öğrencilerin görsel, sembolik ve cebirsel gösterimler arasında geçiş yapmalarını desteklenmiştir.

Gerçekleştirilen öğretim etaplarından sonra odak öğrencilerle yapılan son klinik görüşmelerde üç odak öğrencinin de denklem kurma ve çözme başarı düzeylerinin olumlu yönde etkilendiği gözlemlenmiştir. Terazi modelleri, Van Amerom'un (2002) çalışmasında da bahsettiği gibi eş değer ifadeleri tanımlama ve yorumlama ile bilinmeyenler hakkında akıl yürütmeyi desteklemektedir. Dolayısıyla işlem odaklı geleneksel öğretim yerine, manipülatiflerin kullanılmasının ve öğrenci merkezli olarak sınıf içi tartışma ortamlarının oluşturulmasının yapılan cebir öğretimi için olumlu sonuçlar doğuracağı düşünülmektedir.

6.ÖNERİLER

Bu bölümde araştırmadan elde edilen sonuçlara ve gelecekte yapılabilecek çalışmalara yönelik önerilerde bulunulmuştur.

6.1 Araştırmanın sonuçlarına yönelik öneriler

1. Öğrencilerin ilgili konularda yaşayabilecekleri ve yaşadıkları kavram yanılgıları, hatalar ve ön bilgi eksiklikleri öğretmenler tarafından bilinerek planlı ve programlı öğretimler gerçekleştirilmedir. Bu bağlamda TÖYH doğası gereği adım adım, tahmini ve hiyerarşik bir şekilde öğrencilerin süreç içerisinde yaşadığı problemler göz önüne alınarak tasarlanan bir öğretim aracı olduğundan matematik dersi öğretim programına dâhil edilebilir.

2. TÖYH matematik öğrenme ve öğretme sürecinde etkili bir öğretim aracı olarak kullanılmaktadır. Öğretmenlerin nitelikleri arttıkça öğretimin kalitesinin de artacağı şüphesizdir. Dolayısıyla TÖYH'nin öğretimde nasıl etkili bir araç olarak kullanılacağı öğretmenlere hizmet içi eğitimlerle tanıtılabilir.

3. Bu araştırmada öğrencilerin örüntüleri genelleme sürecinde yinelemeli stratejiyi kullanma eğilimde oldukları, bunun sonucu olarak uzak adımları bulurken ve genelleme yaparken zorlandıkları tespit edilmiştir. Araştırmada şekil örüntülerinde şekilsel analizlerin ilişkisel düşünmenin gelişimini desteklediği görülmüştür. Bu sebeple şekil ve sayı örüntülerinin matematik dersinde nasıl kullanılabileceğine dair öğretmenlere hizmet içi eğitimler verilebilir ve ilişkisel düşünme matematik dersi öğretim programında daha etkin bir şekilde yerini alabilir.

4. Bu araştırmada sayı ve işlemler arasındaki ilişkilerin anlaşılmasında ve ilişkisel düşünmenin gelişiminde doğru/yanlış ve açık cümle örneklerinden yararlanılmıştır. Bunun öğrencilerin cebirsel düşünmelerinin gelişiminde önemli rol oynadığı tespit edilmiştir. Dolayısıyla ders kitaplarında ve öğretmenlerin sınıf içi uygulamalarında eşit işaretinin öğretiminde standart sayı cümleleri yerine daha çok doğru/yanlış ve açık cümle örneklerine yer verilebilir.

5. Bu araştırmada öğrencilerin denklem çözümlerini ve işlemlerin altında yatan anlamları kavramsal olarak inceleyebilmeleri için terazi modellerinden yararlanılmıştır. Denklem çözümlerine terazi modelleri ile başlandıktan sonra modelde gerçekleştirilen eylemlerin işlemsel karşılığı olan iki tarafa aynı işlemi yapma yöntemine geçilmiştir. Böylelikle öğrencilerin denklem çözmedeki başarısının arttığı tespit edilmiştir. Bu bağlamda öğretmenler sınıf içi etkinliklerde yer değiştirme yöntemi ile öğretime başlamak yerine terazi modelleri ve iki tarafa aynı işlemi yapma yöntemleri ile başlayan etkinlikler tasarlayabilirler.

6. Bu araştırmada öğretim sürecinde sınıf içi tartışmalarının öğrencilerin işbirliği içerisinde birbirlerinin aktif öğrenmelerine katkı sağladığı gözlemlenmiştir. Öğrenciler kendi çıkarımlarını arkadaşları ile paylaşmış ve diğer arkadaşlarının çıkarımları ile sınama imkânı bulmuştur. Dolayısıyla öğretmenler sınıf içi etkinlikleri hem bireysel hem de grup çalışmaları şeklinde tasarlayabilirler.

6.2 Gelecek araştırmalara yönelik öneriler

1. Bu araştırma sınıf düzeyi bakımından 7.sınıf öğrencileri ile sınırlıdır. Dolayısıyla cebir konuları ile farklı sınıf düzeylerinde benzer çalışmalar yapılabilir.

2. Araştırmanın öğretim etaplarında ve klinik görüşmeler esnasında öğrencilerde karşılaşılan kavram yanılgılarını ve hata türlerini daha derinlemesine inceleyecek çalışmalar yapılabilir.

3. Araştırmada cebir konuları üzerine bir öğretim deneyi yapılmıştır. Gelecek çalışmalarda farklı konular üzerine öğretim deneyi gerçekleştirilebilir.

4. TÖYH döngüsel ve esnek bir yapıya sahiptir. Bu araştırma 6 haftalık bir süre ile sınırlı olduğundan döngüsel yapının ilerlemesinde zaman önemli bir sınırlayıcı olarak karşımıza çıkmıştır. Gerçekleştirilen öğretiminde döngüsel süreçlerin sayısı arttırılabilir ve gelecekteki çalışmalarda daha uzun çalışılarak daha derinlemesine bilgiler elde edilebilir.

5. TÖYH öğretmenlere ve uygulayıcılara sistematik bir yol sunar. Fakat doğası gereği TÖYH doğrusal veya sabit olmadığından öğrencilerin kültürel, bölgesel ve öğrenme düzeyleri arasındaki farklar göz önüne alındığında farklı çalışma grupları aynı sonuçları doğurmayabilir. Dolayısıyla araştırmadaki problemler ve etkinlikler değiştirilmeden farklı çalışma gruplarına eş zamanlı öğretim deneyleri gerçekleştirilebilir. Bu gruplar arasındaki farklar ve benzerlikler incelenebilir.

7. KAYNAKLAR

Akkan, Y. (2009). İlköğretim öğrencilerinin aritmetikten cebire geçiş süreçlerinin incelenmesi. Doktora Tezi, Karadeniz Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.

Akkan, Y. & Baki, A. (2016). Ortaokul öğrencilerinin aritmetikten cebire geçiş süreçlerinin incelenmesi. *Bayburt Eğitim Fakültesi Dergisi*, *11*(2), 270-305.

Akkan, Y., Baki, A. & Çakıroğlu, Ü. (2012). 5-8. sınıf öğrencilerinin aritmetikten cebire geçiş süreçlerinin problem çözme bağlamında incelenmesi. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi,* 43(2012), 01-13.

Akkan, Y., Çakıroğlu, U. & Güven, B. (2008). Öğrencilerin Cebir Öğrenme Alanında Sahip Oldukları Bazı Hata ve Kavram Yanılgıları. *Journal of Educational Sciences & Practices, 7*(13), 55-74.

Akkan, Y., Öztürk, M. & Akkan, P. (2017). İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının örüntüleri genelleme süreçleri: Stratejiler ve gerekçelendirmeler. *Türk Bilgisayar ve Matematik Eğitimi Dergisi*, 8(3), 513-550.

Akkan, Y., Öztürk, M., Akkan, P. & Küçük Demir, B. (2019). Ortaokul matematik öğretmenlerinin aritmetik ve cebir problemleri hakkındaki inanışları. *Erzincan Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 21(1), 156-176.

Akkaya, R. & Durmuş, S. (2006). İlköğretim 6-8. sınıf öğrencilerinin cebir öğrenme alanındaki kavram yanılgıları. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 31(31), 1-12.

Aktaş, FN. (2020). Görme engelli öğrencilerin cebirsel düşünme süreçlerinin incelenmesi: Öğrenme yol haritaları. Doktora Tezi, Gazi Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

Aktaş, GS. (2017). Matematik öğretiminde somut materyaller ve tasarımları. *Pegem Atıf İndeksi*, 001-126.

Altun, M. (2005). İlköğretim ikinci kademede matematik öğretimi. Alfa Basım Yayınları, Bursa.

Altun, M. (2010). İlköğretim ikinci kademe (6, 7, 8. Sınıflarda) matematik öğretimi. Aktüel Alfa Yayınları, Bursa.

Argün, Z., Arıkan, A., Bulut, S. & Halıcıoğlu, S. (2014). Temel matematik kavramlarının künyesi. Gazi Kitapevi, Ankara.

Armstrong, B. (1995). Teaching patterns, relationships, and multiplication as worthwhile mathematical tasks. *Teaching Children Mathematics*, *1*(7), 446-450.

Baki, A. (2018). Matematiği öğretme bilgisi. Pegem Akademi, Ankara.

Baş, S., Çetinkaya, B. & Erbaş, AK. (2011). Öğretmenlerin dokuzuncu sınıf öğrencilerinin cebirsel düşünme yapılarıyla ilgili bilgileri. *Eğitim ve Bilim*, *36*(159).41-55.

Becker, JR. & Rivera, F. (2005). Generalization Strategies of Beginning High School Algebra Students. *International Group for the Psychology of Mathematics Education, 4*, 121-128.

Becker, JR. & Rivera, F. (2006). Sixth graders' figural and numerical strategies for generalizing patterns in algebra: Proceedings of the 28th Annual Meeting of The North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 2, Ed.: Alatorre, S., Cortina, JL. & Mendez, A., Merida, Mexico, 95-101.

Behr, M., Erlwanger, S. & Nichols, E. (1975). How children view the equals sign (Report no. PMDC-TR-3). Tallahassee, Fla.:Florida State University, (ERIC Document Reproduction Service No.ED 144 802).

Behr, M., Erlwanger, S. & Nichols, E. (1980). 'How children view the equals sign?'. *Mathematics Teaching, 92(1),* 13-15.

Benson, CC., Wall, JT. & Malm, C. (2013). The distributive property in Grade 3? *Teaching Children Mathematics, 19*(8), 498-506.

Birgin, O. & Demirören, K. (2020). Ortaokul yedinci ve sekizinci sınıf öğrencilerinin cebirsel ifadeler konusundaki başarı performanslarının incelenmesi. *Pamukkale Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 50, 99-117.

Blanton, M., Brizuela, BM., Gardiner, A., Sawrey, K. & Newman-Owens, A. (2015). A learning trajectory in six-year-olds' thinking about generalizing functional relationships. *Journal for Research in Mathematics Education, 46*(5), 511-558.

Blanton, M., Levi, L., Crites, T., Dougherty, B. & Zbiek, RM. (2011). Developing Essential Understanding of Algebraic Thinking for Teaching Mathematics in Grades 3-5. Series in Essential Understandings. National Council of Teachers of Mathematics. 1906 Association Drive, Reston, VA 20191-1502.

Brown, AL. & Campione, JC. (1996). Psychological theory and the design of innovative learning environments: On procedures, principles, and systems: Innovations in learning: New environments for education, Ed.: Schauble L. & Glaser R., Erlbaum, Mahwah, NJ., 289-325.

Bukova Güzel, E. (2016). Örüntü ve dizi: Temel matematiksel kavramlar ve uygulamaları, Editörler: Elçi AN., Bukova Güzel E., Cantürk Günhan B. ve Ev Çimen E., Pegem akademi, Ankara.

Bulut, DB., Aygün, B. & İpek, AS. (2018). Meaning of the primary and secondary school students towards equal sign. *Turkish Journal of Teacher Education*, 7(1), 1-16.

Cai, J. & Moyer, J. (2008). Developing algebraic thinking in earlier grades: Some insights from international comparative studies. *Algebra and algebraic thinking in school mathematics, 70,* 169-182.

Camci, F. (2018). Altıncı sınıf öğrencilerinin tahmini öğrenme yol haritası çerçevesinde tasarlanan bir öğretim deneyindeki matematiksel soyutlama süreçleri. Doktora Tezi, Eskişehir Anadolu Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir.

Carpenter, TP., Franke, ML. & Levi, L. (2003). Thinking mathematically: Integrating arithmetic and algebra in elementary school. Heinemann, Portsmouth, NH.

Carpenter, TP. & Levi, L. (2000). Developing conceptions of algebraic reasoning in the primary grades. Research Report: National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science, Wisconsin University, Madison.

Carpenter, TP., Levi, L., Franke, ML. & Zeringue, JK. (2005). Algebra in elementary school: Developing relational thinking. *ZDM*, *37*(1), 53-59

Catley, K., Lehrer, R., & Reiser, B. (2004). Tracing a prospective learning progression for developing understanding of evolution. National Academy Press, Washington, DC.

Cengiz C. (2019). Ortaokul öğrencilerinin denklem çözmede ve kurmada yaşadıkları zorlukların incelenmesi. Yüksek Tezi, Ankara Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ankara**.**

Clements, DH. & Sarama, J. (2007). Early childhood mathematics learning: Second handbook of research on mathematics teaching and learning: A Project of the National Council of Teachers of Mathematics, Ed.: Lester F. K., Information Age, New York, the United States, 461-555.

Clements, DH., Wilson, DC., & Sarama, J. (2004). Young children's composition of geometric figures: A learning trajectory. *Mathematical Thinking and Learning*, *6*(2), 163-184.

Cobb P. & Steffe LP. (1983). The constructivist researcher as teacher and model builder. *Journal for Research in Mathematics Education*, *14*(2): 83–94.

Cobb, P. (2000). Conducting teaching experiment in collaboration with teachers: Handbook of research design in mathematics and science education, Ed.: Kelly AE. & Lesh RA., Lawrence Erlbaum Associates, Publishers, Mahwah, NJ., 307-333.

Confrey, J. (2006). The evolution of design studies as methodology: The Cambridge Handbook of the Learning Sciences, Ed.: Sawyer RK., Cambridge University Press, New York, the United States, 135-152.

Confrey, J., Maloney, A., Nguyen, KH. & Corley, AK. (2012). A design study of a wireless interactive diagnostic system based on a mathematics learning trajectory. In Annual Meeting of the American Educational Research Association, Vancouver, BC, Canada.

Confrey, J., Maloney, A., Nguyen, K., Mojica, G. & Myers, M. (2009). Equipartitioning/splitting as a foundation of rational number reasoning using learning trajectories. In Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education Thessaloniki, Greece, 345–353.

Confrey, J., Maloney, A., Nguyen, K., Wilson, PH. & Mojica, G. (2008). Synthesizing research on rational number reasoning. Working Session at the

Research Pre-session of the National Council of Teachers of Mathematics, Salt Lake City, UT.

Cooper, T., Boulton-Lewis, G., Athew, B., Wilssi L. & Mutch, S. (1997). The transition arithmetic to algebra: Initial understandings of equals, operations and variable. *International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 21(2), 89-96.

Creswell, JW. (2007). Qualitative inquiry & research design: Choosing among five approaches (2nd ed.). Sage Publishing, Thousand Oaks, CA.

Creswell, JW. (2017). Eğitim araştırmaları: Nicel ve nitel araştırmanın planlanması, yürütülmesi ve değerlendirilmesi. (Çev: Halil Ekşi), EDAM, İstanbul.

Czarnocha, B. & Maj, B. (2008). A teaching experiment: Handbook of mathematics teaching research -A tool for teachers- researchers, Ed.: Czarnocha B., University of Reszów, Poland, 47–58.

Çayir, MY. (2013). 9. Sınıf öğrencilerinin örüntü genelleme problemlerini çözme başarılarının ve kullandıkları stratejilerin belirlenmesi. Yüksek lisans tezi, Balıkesir Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Balıkesir.

Çaylan, B. (2018). Cebir karosu kullanımının altıncı sınıf öğrencilerinin cebir başarısı, cebirsel düşünmeleri ve cebir karosu kullanımına ilişkin görüşleri üzerindeki etkileri. Yüksek lisans tezi, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Sosyal Bilimler Enstitüsü, Ankara.

Çelik, D. (2007). Öğretmen adaylarının cebirsel düşünme becerilerinin analitik incelenmesi. Doktora Tezi, Karadeniz Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.

Çelik, D. & Arslan, Z. (2019). Matematik öğretiminin temelleri: Ortaokul, Editörler: Hacıömeroğlu, G. & Tarım, K., Anı Yayınları, Ankara, 145-194.

Çelik, E. & Işık A. (2020). Cebir öğrenme alanında probleme dayalı işbirlikli öğrenmenin akademik başarıya ve edinilen bilgilerin kalıcılığına etkisi. *Erzincan Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 23(3), 736-767.

Dede, Y. (2004). Öğrencilerin cebirsel sözel problemleri denklem olarak yazarken kullandıkları çözüm stratejilerinin belirlenmesi. *Journal of Educational Sciences & Practices*,3(6).

Dede, Y. & Argün, Z. (2003). Cebir, öğrencilere niçin zor gelmektedir? *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, *24*(24).

Dede, Y., Yalın, HA. & Argün, Z. (2002). İlköğretim 8. sınıf öğrencilerinin değişken kavramının öğrenimindeki hataları ve kavram yanılgıları. V. Ulusal Fen ve Matematik Eğitimi Kongresi, ODTÜ, Ankara.

Didiş Kabar, MG. & Erbaş, AK. (2012). Lise öğrencilerinin cebirsel sözel problemleri çözmedeki başarısı. X. Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi, 27 - 30 Haziran.

Dikkartın-Övez, FT. & Çınar, BA. (2018). Ortaokul 8. sınıf öğrencilerinin cebir bilgileri ve cebirsel düşünme düzeylerinin problem kurma becerileri açısından incelenmesi. *Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi*, *20*(1), 483-502.

Dominguez, A. (2001). College algebra students' understanding of the concept of variable. Doctoral thesis, Syracuse University, Mexico.

Drijvers, P., Goddijn, A. & Kindt, M. (2011). Algebra education: Exploring topics and themes: Secondary algebra education: Revisiting topics and themes and exploring the unknown, Ed.: Drijvers P., Sense Publishing, Rotterdam, The Netherlands, 5-26.

Driscoll, M. (1999). Fostering algebraic thinking: A guide for teachers, Grades 6-10. Portsmouth, NH: Heinemann.

El Mouhayar, R. (2021). Investigating quality of class talk in grade 7: The case of pattern generalization. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *19*(5), 1015-1036.

El Mouhayar, R. & Jurdak, M. (2016). Variation of student numerical and figural reasoning approaches by pattern generalization type, strategy use and grade level. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *47*(2), 197-215.

Engelhardt, PV., Corpuz, EG., Ozimek, DJ. & Rebello, NS. (2004, September). The teaching experiment- What it is and what it isn't. In 2003 Physics Education Research Conference, Vol. 720, 157-160.

Erbaş, AK., Çetinkaya, B. & Ersoy, Y. (2009). Öğrencilerin basit doğrusal denklemlerin çözümünde karşılaştıkları güçlükler ve kavram yanılgıları. *Eğitim ve Bilim*, 34(152), 45-59.

Erbaş, AK. & Ersoy, Y. (2000). Cebir Öğretiminde Öğrencilerin Güçlükleri-II: Yanlışlarla İlgili Öğretmen Görüşleri. *IV. Ulusal Fen Eğitimi Kongresi*, 625-629.

Erdem, Ö. & Sarpkaya Aktaş, G. (2018). Ortaokul 7. sınıf öğrencilerinin cebir öğrenme alanında yaşadıkları kavram yanılgılarının giderilmesinde etkinlik temelli öğretimin değerlendirilmesi. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education (TURCOMAT)*, 9(2), 312-338.

Ersoy, Y. & Erbaş, A. (2005). Kassel projesi cebir testinde bir grup Türk öğrencinin genel başarısı ve öğrenme güçlükleri. *Elementary Education Online*, 4(1), 18-39.

Ertekin, E. (2019). Denklem kavramı ve denklem kavramının öğretimi: Uygulama önekleriyle cebirsel düşünme ve öğretimi, Editör: Sarpkaya Aktaş G., Pegem akademi, Ankara, 191-219.

Falkner, KP., Levi, L. & Carpenter, TP. (1999). Early childhood corner: Children’s understanding of equality: A foundation for algebra. *Teaching Children Mathematics, 6(4),* 232-236.

Friel, SN. & Markworth, KA. (2009). A framework for analyzing geometric pattern tasks. *Mathematics teaching in the Middle school*, 15 (1), 24-33.

Fyfe, ER., Matthews, PG. & Amsel, E. (2020). College developmental math students' knowledge of the equal sign. *Educational Studies in Mathematics*, *104*(1), 65-85.

Garcia-Kruz, JA. & Martinôn, A. (1998). Level of generalization linear patterns. Proceedings of the 22nd Conference of the lntemational Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 2: 329-336, Stellenbosch: PME.

Ginsburg, HP. (1981). The clinical interview in psychological research on mathematical thinking: Aims, rationales, technigues. *For the Learning of Mathematics*, 1(3), 4-11.

Girit, D. & Akyüz, D. (2016). Farklı sınıf seviyelerindeki ortaokul öğrencilerinde cebirsel düşünme: Örüntülerde genelleme hakkındaki algıları. *Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen ve Matematik Eğitimi Dergisi*, *10*(2), 243-272.

Goldin, GA. (2004). Representations in school mathematics: A unifying research perspectives: A Research Companion to Principles and Standards for School Mathematics, Ed.: Kilpatrick J., Martin WG. & Schifter D., Reston, VA: NCTM, 275-285.

Gökçe, R. & Yeşildere-İmre, S. (2017). Cebirsel genelleme yapmayı destekleyen etkinliklerin 7. sınıf öğrencilerinin genelleme yapma becerilerini şekillendirmedeki rolü. *Gaziantep University Journal of Social Sciences*, *16*(1).

Greeno, JG. (1991). Number sense as situated knowing in a conceptual domain. *Journal for Research in Mathematics Education*, *22*(3), 170-218.

Guba, EG. (1981). Criteria for assessing the trustworthiness of naturalistic inquiries. *Educational Technology research and development*, 29(2), 75-91.

Guerrero, L. & Rivera, A. (2002). Exploration of patterns and recursive functions. *Proceedings of the Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (24th October 26-29, Athens, Georgia*), 1(4), 262-272.

Gürbüz, R., Pırtıcı, Z. & Toprak, Z. (2014). Aritmetikten cebire geçişi sağlayacak etkinliklerin tasarlanması, uygulanması ve değerlendirilmesi. *Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen ve Matematik Eğitimi Dergisi*, *8*(1), 178-203.

Gürel, ZÇ. & Okur, M. (2017). 7. ve 8. sınıf öğrencilerinin eşitlik ve denklem konusundaki kavram yanılgıları. *Cumhuriyet Uluslararası Eğitim Dergisi*, *6*(4), 479-507.

Güven Akdeniz, D. (2018). Öğrenme güçlüğüne sahip öğrencilerin uzunluk kavramına ilişkin öğrenme yol haritaları: Öğretim deneyi. Doktora Tezi, Gazi Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

Hargreaves, M., Shorrocks-Taylor, D. & Threlfall, J. (1998) Children's strategies with number patterns. *Educational Studies*. 24(3), 315-331.

Hart, KM., Brown, ML., Kuchermann, DE., Kerslach, D., Ruddock, G. & Mccartney, M. (1998). Children's Understanding of Mathematics: 11-16, Ed: K.M. Hart, Antony Rowe Publishing Services, London.

Healy, L. & Hoyles, C. (1999). Visual and symbolic reasoning in mathematics: Making connections with computers? *Mathematical Thinking and Learning*,1(1), 59-84

Herbert, K. & Brown, R. (1997). Patterns as tools for algebraic reasoning. *Teaching Children Mathematics*, 3(6), 340-344.

Hersovics, N. & Linchevski, L. (1994). A Cognative gap between arithmetic and algebra. *Educational Studies in Mathematics*, 27(1), 59-78.

Hiçcan, B. (2008). 5e öğrenme döngüsü modeline dayalı öğretim etkinliklerinin ilköğretim 7. sınıf öğrencilerinin matematik dersi birinci dereceden bir bilinmeyenli denklemler konusundaki akademik başarılarına etkisi. Yüksek Lisans Tezi, Gazi Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

Jacobs, S. (2002). Advanced placement BC calculus student's ways of thinking about variable. A Dissertation Presented in Partial Fulfilment of the Requirements for the Degree Doctor of Philosophy, Arizona State University, Arizona, the USA.

Jacobs, VR., Franke, ML., Carpenter, TP., Levi, L. & Battey, D. (2007). Professional development focused on children's algebraic reasoning in elementary school. *Journal for research in mathematics education*, *38*(3), 258-288.

Kabael, TU. & Tanışlı, D. (2010). Cebirsel düşünme sürecinde örüntüden fonksiyona öğretim. *İlköğretim Online*, *9*(1), 213-228.

Kaf, Y. (2007). Matematikte model kullanımının 6. sınıf öğrencilerinin cebir erişilerine etkisi. Yüksek Lisans Tezi, Hacettepe Üniversitesi, Sosyal Bilimler Enstitüsü, Ankara.

Kaput, J. (1998). Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by 'algebrafying' the K-12 curriculum. In the nature and role of algebra in the k-14 curriculum: Proceedings of a national symposium, May 27-28, (pp.25-26), Washington, the United States.

Kaput, JJ. (1999). Teaching and learning a new algebra. In E. Fennema & TA. Romberg (Eds.), Mathematics classrooms that promote understanding (pp. 133-155). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Kar, T., Çiltaş, A. & Işık, A. (2011). Cebirdeki kavramlara yönelik öğrenme güçlükleri üzerine bir çalışma. *Kastamonu Üniversitesi Kastamonu Eğitim Dergisi*, 19(3), 939-952.

Karataş, CG. & Bahadır, E. (2018). 8. Sınıf Cebirsel İfadeler ve Özdeşlikler Konusunun Cebir Gösterim Karosu Materyali ile Öğretilmesi ve Materyalin Kullanabilirliğinin İncelenmesi. *Uluslararası Sosyal ve Eğitim Bilimleri Dergisi*, *5*(10), 209-224.

Kaya, D. (2017). Yedinci sınıf öğrencilerinin cebirsel düşünme düzeyleri ile becerilerinin incelenmesi. *Bartın Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi,* 6(2), 657-675.

Kaya, D. & Keşan, C. (2014). İlköğretim seviyesindeki öğrenciler için cebirsel düşünme ve cebirsel muhakeme becerisinin önemi. *International Journal of New Trends in Arts, Sports & Science Education*, *3*(2), 38-47.

Khng, KH. & Lee, K. (2009). Inhibiting interference from prior knowledge: Arithmetic intrusions in algebra word problem solving. *Learning and Individual Differences*, *19*(2), 262-268.

Kızıltoprak, A. (2014). Ortaokul 5. sınıf öğrencilerinde ilişkisel düşünmenin gelişimi: bir öğretim deneyi. Yüksek Lisans Tezi, Anadolu Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir.

Kızıltoprak, A. & Köse, NY. (2013). Eşit işaretini anlama ve ilişkisel düşünme. *12.* Matematik Sempozyumu: Toplumda Matematik, 23-25 Mayıs, Hacettepe Üniversitesi, Ankara, 76-77.

Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational Studies in Mathematics*, *12(3)*, 317-326.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra: Handbook of research on mathematics teaching and learning, Ed.: Grouws D.A., Macmillan, New York, the United States, 390-419.

Kieran, C. & Chalouh, L. (1993). Prealgebra: The transition from arithmetic to algebra: Research ideas for the Classroom: Middle Grades Mathematics, Ed.: Owens, Reston, VA: NCTM.

Knuth, EJ. (2000). Understanding connections between equations and graphs. *The Mathematics Teacher*, *93*(1), 48-53.

Knuth, EJ., Stephens, AC., McNeil, NM. & Alibali, MW. (2006). Does understanding the equal sign matter? Evidence from solving equations. *Journal for research in Mathematics Education*, *37*(4), 297-312.

Koehler, JL. (2004). Learning to think relationally: Thinking relationally to learn. Doctoral dissertation, University of Wisconsin-Madison, Wisconsin, the United States.

Köse, NY. & Tanışlı, D. (2011). İlköğretim matematik ders kitaplarında eşit işareti ve ilişkisel düşünme. *Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen ve Matematik Eğitimi Dergisi*, *5*(2), 251-277.

Kutluca, T. & Akın, MF. (2014). Dört kefeli cebir terazisi somut materyali yardımı ile tam sayılar konusunun öğretimi. *İlköğretim Online, 13*(1), 17-26.

Küchemann, D. (1978). Children's understanding of numerical variables. *Mathematics in School, 7*(4), 23-26.

Lannin, JK., Barker, DD. & Townsend, BE. (2006). Recursive and explicit rules: How can we build student algebraic understanding?. *The Journal of Mathematical Behavior*, *25*(4), 299-317.

Lee, L. & Freiman, V. (2006). Developing algebraic thinking through pattern exploration. *Mathematics teaching in the middle school*, *11*(9), 428-433.

Leinhardt, G., Zaslavsky, O. & Stein, MK. (1990). Functions, graphs, and graphing: Tasks, learning, and teaching. *Review of educational research*, *60*(1), 1-64.

Leininger, M. (1994). Evaluation criteria and critique of qualitative research studies: Critical Issues in Qualitative Research Methods, Ed.: Morse J. M., SAGE Publications, Inc., Thousand Oaks, CA, 95-115.

Lesh, R. & Kelly, A. (2000). Multitiered teaching experiments: Research Design in Mathematics and Science Education, Ed.: Kelly A., Lesh R., Lawrence Erlbaum Associates, Mahwah, New Jersey, 197-230.

Lew, HC. (2004).Developing algebraic thinking in early grades: Case study of Korean elementary school mathemathics. *The Mathemathic Educator*, 8(1), 88-106.

Lingefjärd, T. (2002). Teaching and assessing mathematical modeling. *Teaching Mathematics and its Applications*, *21*(2), 75-83.

MacGregor, M. & Stacey, K. (1993). Cognitive models underlying students' formulation of simple linear equations. *Journal for Research in Mathematics Education, 24*(3), 217-232.

MacGregor, M. & Stacey, K. (1997). Students' understanding of algebraic notation: 11-15. *Educational Studies in Mathematics*, 33, 1-19.

MacGregor, M. & Stacey, K. (1999). A flying start to algebra. *Teaching Children Mathematics*, *6*(2), 78-85.

MacGregor, M. & Stacey, K. (2007). Students' understanding of algebraic notation: 11-15. *Stepping stones for the 21st century*, 63-81.

Markworth, AK. (2010). Growing and Growing: Promoting Functional Thinking with Geometric Growing Pattern. Doctor of Philosophy, University of North Carolina at Chapel Hill.

McCool, JK. (2009). Measurement learning trajectories: A tool for professional development. Doctoral dissertation, Illinois State University, Illinois, the United States.

McNeil, N., Grandau, L., Stephens, A., Krill, D., Alibali, MW. & Knuth, E. (2004). Middle-school students' experience with the equal sign: Saxon Math does not equal Connected Mathematics. In Proceedings of the twenty-sixth annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Toronto, 271-275.

McNeil, NM., Hornburg, CB., Devlin, BL., Carrazza, C. & McKeever, MO. (2019). Consequences of individual differences in children's formal understanding of mathematical equivalence. *Child Development*, *90*(3), 940-956.

Milli Eğitim Bakanlığı [MEB]. (2018). Ortaokul matematik dersi öğretim programı (İlkokul ve Ortaokul 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ve 8. Sınıflar), Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı, *MEB Basımevi*, Ankara.

Molina, M. & Ambrose, RC. (2006). Fostering relational thinking while negotiating the meaning of the equals sign. *Teaching Children Mathematics*, *13(2)*, 111-117.

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM]. (1997). A framework for constructing a vision of algebra: A discussion document. Reston, VA: NCTM.

National Council of Teachers of Mathematics. [NCTM]. (2000). Principles and standards for school mathematics. Reston, VA: NCTM.

National Council of Teachers of Mathematics. (2006). Curriculum focal points forprekindergarten through grade 8 mathematics: A quest for coherence. Reston, VA: NCTM.

Oktaç, A. (2010). Birinci dereceden tek bilinmeyenli denklemler ve ilgili kavram yanılgıları: İlköğretimde karşılaşılan matematiksel zorluklar ve çözüm önerileri. Pegem Akademi, Ankara, 241-262.

Olkun, S. & Toluk-Uçar, Z. (2006). İlköğretimde matematik öğretimine çağdaş yaklaşımlar: Yeni ilköğretim programları ve öğretmen yeterlilikleri ışığında. Ekinoks Yayınları, Ankara.

Olkun, S. & Yeşildere, S. (2007). Sınıf Öğretmeni Adayları İçin Temel Matematik 1. Maya Akademi, Ankara.

Orton, A. & Orton, J. (1999). Pattern and the approach to algebra. *In A. Orton (Ed.), Pattern in the Teaching and Learning of Mathematics.* s. 104-120. Cassel, London.

Özarslan, P. (2010). İlköğretim 7. sınıf öğrencilerinin cebirsel sözel problemleri denklem kurma yoluyla çözme becerilerinin incelenmesi. Yüksek Lisans Tezi, Çukurova Üniversitesi, Adana.

Özdemir, E. (2013). İlköğretim 6, 7 ve 8. sınıf öğrencilerinin matematiksel örüntüleri kavrayabilme ve genelleyebilme süreçleri. Doktora tezi, Atatürk Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.

Özdemir, E., Dikici, R. & Kültür, MN. (2015). Öğrencilerin örüntüleri genelleme süreçleri: 7. sınıf örneği. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, *23*(2), 523-548.

Özden D. (2019). Altıncı sınıf öğrencilerinin cebir öğrenme alanına ilişkin öğrenme süreçlerinin incelenmesi: Tahmini öğrenme yol haritalarına dayalı bir öğretim deneyi. Yüksek Lisans Tezi, Anadolu Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir.

Palabıyık, U. & Akkuş-İspir, O. (2011). Örüntü temelli cebir öğretiminin öğrencilerin cebirsel düşünme becerileri ve matematiğe karşı tutumlarına etkisi. *Pamukkale Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi,* 30(30), 111-123.

Papic, M. (2007). Promoting repeating patterns with young children-more than just alternating colours! *Australian Primary Mathematics Classroom*, 12 (3), 8-13.

Papic, M. & Mulligan, JT. (2005). Pre-schoolers' mathematical patterning: Building connections: Theory, research and practice, Ed.: Clarkson P., Downton A., Gronn D., McDonough A., Pierce R. & Roche A., MERGA, Sydney, 609-616.

Perso, T. (1992). Making the most of errors. *Australian Mathematics Teacher*, *48*(2), 12-14.

Philipp, R. (1992). The many uses of algebraic variable. *The Mathematics Teacher*, 85 (7), 557-561.

Rittle-Johnson, B. & Alibali, MW. (1999). Conceptual and procedural knowledge of mathematics: Does one lead to the other?. *Journal of educational psychology*, *91*(1), 175-189.

Rivera, FD. & Becker, JR. (2007). Abduction-induction (generalization) processes of preservice elementary majors on patterns in algebra. *Journal of Mathematical Behavior*, 26(2), 140–155.

Rivera, FD. & Becker, JR. (2008). Middle school children's cognitive perceptions of constructive and deconstructive generalizations involving linear figural patterns. *ZDM-Mathematics Education, 40***,** 65–82.

Ross, MK. (2011). Fifth graders' representations and reasoning on constant growth function problems: Connections between problem representations, student work and ability to generalize. Degree of Doctor of Philosophy, the University of Arizona.

Samsan, MC., Linchevski, L. & Olivier, A. (1999). The influence of different representations on children's generalisation thinking processes. Proceedings of the Seventh Annual Conference of the Southern African Association for research in Mathematics and Science Education, Harare, Zimbabwe, 406-415.

Sarpkaya Aktaş, G. (2019). Uygulama örnekleriyle cebirsel düşünme ve öğretimi. Pegem Akademi, Ankara.

Sayı, MŞ. (2018). Ortaokul öğrencilerinin problem kurma becerileri ile cebirsel düşünme düzeyleri arasındaki ilişki. Yüksek Lisans Tezi, Necmettin Erbakan Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Konya.

Sfard, A. (1995). The development of algebra: Confront historical and psychological perspectives. *Journal of Mathematical Behavior*, *14(1)*, 15-39.

Sharp, JM. (1995). Results of Using Algebra Tiles as Meaningful Representations of Algebra Concepts. The Annual Meeting of the Mid-Western Education Research Association, Chicago, the U.S.A., 1-8.

Simon, MA. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal Research Mathematics Education*, 26(2), 114–145.

Simon, MA. (2000). Research on the development of mathematics teachers: The teacher development experiment: Handbook of research design in mathematics and science education, Ed.: Kelly AE. & Lesh RA., Lawrence Erlbaum Associates Publishers, London, England, 335-359.

Skemp, RR. (1971). The psychology of learning mathematics. Penguin, London, the UK.

Soylu, Y. (2006). Öğrencilerin değişken kavramına vermiş oldukları anlamlar ve yapılan hatalar. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, *30*(30), 211-219.

Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalising problems. *Educational Studies in Mathematics*. 20(2), 147-164.

Stacey, K. & MacGregor, M. (1997). Ideas about symbolism that students bring to algebra. *The Mathematics Teacher*, *90*(2), 110-113.

Stacey, K. & MacGregor, M. (2000). Learning the algebraic method of solving problems. *Journal of Mathematical Behaviour,* 18(2), 149-167.

Steffe, LP. (1991). The constructivist teaching experiment: Illustrations and implications: Radical Constructivism in Mathematics Education, Ed.: Von Glasersfeld E., Kluwer Academic Publishers, New York, the United States, 177-194.

Steffe, LP. & Olive, J. (2010). Children's fractional knowledge. Springer, New York, the United States.

Steffe, LP. & Thompson, PW. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements: Handbook of research design in mathematics and science education, Ed.: Kelly AE. & Lesh RA., Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum, 267-306.

Steffe, LP. & Ulrich, C. (2014). Constructivist teaching experiment: Encyclopedia of mathematics education, Ed.: Lerman, S., Springer, Netherlands, 102-109.

Stephens, M. (2006). Describing and exploring the power of relational thinking. Conference: MERGA 29, Volume 2, 479-486.

Stephens, A., Fonger, NL., Blanton, M., & Knuth, E. (2016). *Elementary Students' Generalization and Representation of Functional Relationships: A Learning Progressions Approach*. Poster to be presented at the Annual Meeting of the American Education Research Association, Washington, DC., 95-132.

Stephens, AC., Fonger, NL., Strachota, S., Isler, I., Blanton, M., Knuth, E. & Gardiner, A. (2017). A learning progression for elementary students' functional thinking. *Mathematical Thinking and Learning, 19(3), 143-166.*

Swadener, M. & Soedjadi, R. (1988). Values, mathematics education and the task of developing pupils' personalities: An Indonesian perspective. *Educational Studies In Mathematics,* 19(2), 193-208.

Swafford, JO. & Langrall, CW. (2000). Grade 6 students' preinstructional use of equations to describe and represent problem situations. *Journal for Research in Mathematics Education, 31*(1), 89-112.

Tall, D. (1992). The transition to advanced mathematical thinking: Functions, limits, infinity and proof: Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning, Ed.: Grouws D., Macmillan Publishing Company, New York, 495-514.

Tanışlı, D. (2008). İlköğretim beşinci sınıf öğrencilerinin örüntülere ilişkin anlama ve kavrama biçimlerinin belirlenmesi. Doktora Tezi, Anadolu Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir.

Tanışlı, D. & Köse, NY. (2011). Lineer şekil örüntülerine ilişkin genelleme stratejileri: Görsel ve sayısal ipuçlarının etkisi. *Eğitim ve Bilim*, *36*(160).

Tanışlı, D. & Olkun, S. (2009). Basitten karmaşığa örüntüler. Maya Akademi, Ankara.

Tanışlı, D. & Özdaş, A. (2009). İlköğretim beşinci sınıf öğrencilerinin örüntüleri genellemede kullandıkları stratejiler. *Educational Sciences*: *Theory & Practice*, 9(3), 1453-1497.

TDK (2021). Türk dil kurumu sözlükleri. https://sozluk.gov.tr [Ziyaret Tarihi: 25 Haziran 2021].

Thorpe, JA. (1999). Algebra: What should we teach and how should we teach it: Algebraic Thinking, Grades 9-12, Ed.: Moses B., Readings from NCTM's School Based Journals and Other Publications, Reston, VA, National Council of Teachers of Mathematics, 31-39.

Türkmen, H. & Tanışlı, D. (2019). Cebir Öncesi: 3, 4 ve 5. Sınıf Öğrencilerinin Fonksiyonel İlişkileri Genelleme Düzeyleri. *Eğitimde Nitel Araştırmalar Dergisi*, *7*(1), 344-372.

Umurbek, M. (2020). Yedinci sınıf öğrencilerinin cebirsel sözel problemleri çözme sürecinin incelenmesi. Yüksek Lisans Tezi, Aydın Adnan Menderes Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Aydın.

Usiskin, Z. (1988). Conceptions of school algebra and uses of variables. *The ideas of algebra*, *K-12*, *8*, 19.

Usiskin, Z. (1997). Doing algebra in grades K-4. *Teaching children mathematics*, *3*(6), 346-356.

Usta, N. & Özdemir, BG. (2018). Ortaokul öğrencilerinin cebirsel düşünme düzeylerinin incelenmesi. *Eğitimde Nitel Araştırmalar Dergisi*, *6*(3), 427-453.

Uygan, C. (2019). Öğrenci matematiğini araştırmada öğretim deneyi yöntemi: Kuramsal temeller ve örnek bir uygulamadan yansımalar. *Eğitimde Nitel Araştırmalar Dergisi – Journal of Qualitative Research in Education,* 7(2), 792-825.

Uzun, N. (2021). Cebire geçiş sürecini desteklemeye yönelik sanal manipülatiflerin tasarımı, uygulaması ve değerlendirilmesi. Doktora Tezi, Trabzon Üniversitesi, Lisansüstü Eğitim Enstitüsü, Trabzon.

Van Amerom, B. (2002). Reinvention of early algebra: Developmental research on the transition from arithmetic to algebra. Doctoral dissertation, University of Utrecht, The Netherlands.

Van Amerom, B. (2003). Focusing on informal strategies when linking arithmetic to early algebra. *Educational Studies in Mathematics*, *54*(1), 63-75.

Van de Walle, J., Karp, K. & Bay-Williams, J. (2014). İlkokul ve ortaokul matematiği: Gelişimsel yaklaşımla öğretim (Çev: S. Durmuş, Çev.). Nobel Akademik, Ankara.

Vance, J. (1998). Number operations from an algebraic perspective. *Teaching Children Mathematics*, 4(5), 282-285.

Verschaffel, L., Greer, B. & Corte, ED. (2002). Everyday knowledge and mathematical modeling of school word problems: Symbolizing, modeling and tool use in mathematics education, Ed.: Gravemeijer, KP., Lehrer, R., van Oers, HJ., & Verschaffel, L. Springer, Dordrecht, 257-276.

Walkowiak, TA. (2014). Elementary and middle school students' analyses of pictorial growth patterns. *The Journal of Mathematical Behavior*, 33, 56-71.

Warren, E. (2005). Patterns supporting the development of early algebraic thinking. In P. Clarkson, A. Downton, D. Gronn, M. Horne, A. McDonough, R. Pierce, & A. Roche (Eds.), *Building connections: Research, theory and practice (Proceedings of the 28th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia*, Melbourne, s. 759-766). MERGA, Sydney.

Warner, E. & Cooper, T. (2006). Using repeating patterns to explore functional thinking. *Australian Primary Mathematics Classroom,* 11 (1), 9-14.

Williams, S. (1997). Algebra: What students can learn? The nature and algebra in the K-14 curriculum. Proceedings of a National Symposium, May 27-28, Washington, DC.

Wilson, PH. (2009). Teachers' uses of a learning trajectory for equipartitioning. Doctoral dissertation, North Carolina State University, Raleigh, North Carolina.

Wilson, PH., Mojica, GF. & Confrey, J. (2013). Learning trajectories in teacher education: Supporting teachers' understandings of students' mathematical thinking. *Journal of Mathematical Behavior*, 32(2), 103-121.

Yaman, H. (2004) İlköğretim ikinci sınıf öğrencilerinde eşit işaretinin ilişkisel anlamını geliştirme. Yüksek Lisans Tezi, Abant İzzet Baysal Üniversitesi, Bolu.

Yaman, H. (2010). İlköğretim öğrencilerinin matematiksel örüntülerdeki ilişkileri algılayışları üzerine bir inceleme. Doktora Tezi, Hacettepe Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü, Ankara.

Yaman, H., Toluk, Z. & Olkun, S. (2003). İlköğretim öğrencileri eşit işaretini nasıl algılamaktadırlar? *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, *24*, 142-151.

Yaman, H. & Umay, A. (2013). İlköğretim Öğrencilerinin Sunum Biçimlerine Göre Matematiksel Örüntüleri Algılayışları. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, *28*(28-1), 405-416.

Yaprak-Ceyhan, E. (2012). İlköğretim matematik dersi öğretim programı çerçevesindeki öğretimin öğrencilerin cebir başarısına etkisi. Yüksek Lisans Tezi, Marmara Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.

Yenilmez, K. & Avcu, T. (2009). Altıncı sınıf öğrencilerinin cebir öğrenme alanındaki başarı düzeyleri. *Ahi Evran Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 10*(2), 37-45.

Yenilmez, K. & Teke, M.(2008). Yenilenen matematik programının öğrencilerin cebirsel düşünme düzeylerine etkisi. *İnönü Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, *9*(15), 229-246.

Yeşildere, S. (2007). İlköğretim matematik öğretmen adaylarının matematiksel alan dilini kullanma yeterlikleri. *Boğaziçi Üniversitesi Eğitim Dergisi,* 24(2), 61-70.

Yeşildere, S. & Akkoç, H. (2010). Matematik öğretmen adaylarının sayı örüntülerine ilişkin pedagojik alan bilgilerinin konuya özel stratejiler bağlamında incelenmesi. *OMÜ Eğitim Fakültesi Dergisi*. 29 (1), 125-149.

Yeşildere-İmre, S., Akkoç, H. & Baştürk-Şahin, BN. (2017). Ortaokul öğrencilerinin farklı temsil biçimlerini kullanarak matematiksel genelleme yapma becerileri. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education*, *8*(1), 103-129.

Yıldırım, A. & Şimşek, H. (2005). Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri. Beşinci Basım, Seçkin Yayıncılık, Ankara.

Yıldırım, A. & Şimşek, H. (2011). Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri. Sekizinci Baskı, Seçkin Matbaacılık, Ankara.

Yıldız, P. & Atay, A. (2019). Ortaokul Beşinci Sınıf Öğrencilerinin Eşit İşaretine İlişkin Anlamaları. *Ahi Evran Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Dergisi*, *5*(2), 426-438.

Yıldız, P., Çiftçi, ŞK., Şengil-Akar, Ş. & Sezer, E. (2015). Ortaokul 7. sınıf öğrencilerinin cebirsel ifadeleri ve değişkenleri yorumlama sürecinde yaptıkları hatalar. *Hacettepe Eğitim Araştırmaları Dergisi*, *1*(1).

Zembat, İÖ. (2016). Matematik Öğretim Döngüsü ve 'Tahmini Öğrenme Yol Haritaları': *Matematik Eğitiminde Teoriler,* Bingölbali, E., Arslan, S. ve Zembat, I., Pegem Akademi, Ankara, 509-518.

EKLER

EKLER

EK 1: Tahmini Öğrenme Yol Haritaları

<table>
<tr><th colspan="2">7. Sınıf Matematik Dersi 3. Ünite
Cebirsel İfadeler İle Eşitlik ve Denklem Alt Öğrenme Alanı
Tahmini Öğrenme Yol Haritası (1.Hafta)</th></tr>
<tr><td colspan="2">Kazanımlar: 7.2.1.1. Cebirsel ifadelerle toplama ve çıkarma işlemleri yapar.
7.2.1.2. Bir doğal sayı ile bir cebirsel ifadeyi çarpar.</td></tr>
<tr><td>Öğrenme Hedefleri</td><td>Öğrenmenin Nasıl Gerçekleşeceğine Dair Hipotezler</td></tr>
<tr><td>• Terim, sabit terim ve katsayı kavramlarını anlamlandırır.
• Benzer terim kavramını anlamlandırır. Benzer ve benzer olmayan terimleri ayırt eder.
• Benzer terimler içeren cebirsel ifadelerle toplama ve çıkarma işlemlerini yapar.
• Hem benzer hem de benzer olmayan cebirsel ifadelerle toplama ve çıkarma işlemleri yapar.</td><td>Öğrenciler;
• Değişkenle çarpım halinde olan ya da değişkenin kaç katı olduğunu ifade eden sayıyı katsayı olarak adlandırabilir.
• Cebirsel ifadede toplananların veya çıkarılanların her birini terim olarak adlandırabilir.
• Değişken içermeyen terimleri sabit terim olarak adlandırabilir.
• Cebirsel ifadede aynı değişkene ve kuvvete sahip olan terimleri benzer terim olarak adlandırabilir.
• Cebirsel ifadelerle toplama ve çıkarma işlemlerinin yalnız benzer terimler arasında yapılabileceğinin farkına varabilir.
• Sabit terim içeren ya da içermeyen cebirsel ifadelerdeki benzer terimleri modelleyerek toplayabilir.</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td></td>
<td>

<li style="list-style-type:none">

Cebirsel ifadenin her bir terimini model ile gösterebilir.
Oluşturduğu modellerde toplama işlemini bir araya getirerek benzer terimleri kendi içinde gruplandırabilir.
Modellediği gruplardaki işlemlere karşılık gelen cebirsel ifadeleri yazabilir.

Sabit terim içeren ya da içermeyen cebirsel ifadelerdeki benzer terimleri modelleyerek çıkarabilir.

Cebirsel ifadenin eksilen terimlerini modelleyebilir.
Çıkarma işlemini eksilme anlamında kullanarak çıkan terimleri eksilen terimden çıkarabilir.
Model gruplarına ve işlemlere karşılık gelen cebirsel ifadeleri yazabilir.

Benzer olmayan terimler içeren cebirsel ifadeleri modelleyebilir. Benzer olanları gruplandırarak toplayabilir ve cebirsel olarak ifade edebilir.

Benzer olmayan terimleri toplarken hatalı olarak sadece katsayıları toplayabilir (2a+3b=5).
Benzer olmayan terimleri hatalı olarak toplayabilir (5a+3=8a).

Cebirsel ifadelerle toplama ve çıkarma işlemlerini benzer terim kavramını dikkate alarak yapabilir.

Katsayısı 1’den farklı olan benzer terimler ile toplama ve çıkarma işlemleri yapar.

2a+3a, -2a+3a, 5a-3a, -4a-2a, …
Katsayısı 1 veya 1’den farklı olan benzer terimlerle toplama ve çıkarma işlemleri yapar.
a+4a, 5a+a, -a+4a, 5a-a, a-3a, 4a-3a, -a-5a, …
İkiden fazla benzer terimle toplama ve çıkarma işlemleri yapar.
2a+3a+5a, 5a-3a+a, 4a+5a-a, a+6a-5a, …
</td>
</tr>
</table>

	o Benzer olmayan ve sabit terim içermeyen cebirsel ifadelerle toplama ve çıkarma işlemleri yapar.(2a+3b)+(3a+4b), (5a+3b)-(3a+2b), … o Sadece benzer terimlerden oluşan ve sabit terim içeren cebirsel ifadeleri toplayabilir veya çıkartabilir.(3a+1)+(4a+5), (5a-1)+(-2a+5), (5a+3)-(3a+1), (4a+2)-(3a-2), … o Sabit terim içeren benzer olmayan terimlerle toplama ve çıkarma işlemleri yapar. (3a+4b+5)+(2a+3b+2), (4a+5b+7)-(2a+5b-2), …
• Bir doğal sayı ile bir cebirsel ifadeyi çarpar.	Öğrenciler; • Bir doğal sayı ile sabit terimi olmayan bir cebirsel ifadeyi çarpar. 3.2a, 4.(-3a), 5.(-a) • Bir kenar uzunluğu doğal sayı, diğer kenar uzunluğu cebirsel ifade olan bir dikdörtgenin alanını cebirsel ifadelerle çarpma işlemi yaparak hesaplar. o Kenar uzunlukları a+3 ve 5 olan dikdörtgenin alanını cebirsel ifadelerin çarpımı olarak yazabilir. o Kenar uzunlukları a+3 ve 5 olan dikdörtgenin alanını bulmak için şekli parçalara ayırabilir. o Parçalara ayırdığı her bir dikdörtgensel bölgenin alanını tek tek hesaplayarak bulduğu alanları toplayabilir. o Dikdörtgensel bölgenin alanını ifade etmek için yazdığı çarpım ile topladığı cebirsel ifadeleri ilişkilendirebilir. • Dağılma özelliğinden yararlanarak bir doğal sayı ile sabit terimi bulunan bir cebirsel ifadeyi çarpar.4.(a+1), 4(3a+1), 3.(4a+5), 4.(a-6), 5.(2a-3), (3a+5).6, … o Dağılma özelliğini parantezin içindeki sayının sağından ya da solundan

	uygulayabilir. o Parantezin önemsiz olduğu düşünülerek dağılma işlemi hatalı uygulanabilir. 3.(a+5)=3a+5 o Çıkarma işleminin değişme özelliği olduğu düşünülebilir. 3.(5-a)=3a-15 veya (3a-5).4=20-12a • Bir tam sayı ile bir cebirsel ifadeyi çarpar. -2.3a, -3.(a+5), -4.(2a+3), -2(a-3), -4.(2a-3), (-3a.-4).2, …

<table>
<tr><td colspan="2">7. Sınıf Matematik Dersi 3. Ünite
Cebirsel İfadeler İle Eşitlik ve Denklem Alt Öğrenme Alanı
Tahmini Öğrenme Yol Haritası (2.Hafta)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Kazanımlar: 7.2.1.3. Sayı örüntülerinin kuralını harfle ifade eder, kuralı harfle ifade edilen örüntünün istenilen terimini bulur.
a) Adımlar arasındaki farkı sabit olan örüntülerle sınırlı kalınır.
b) Değişken kullanımının önemi ve gerekliliği vurgulanır.
c) Sayı örüntüleri incelenerek örüntünün kuralını bir değişken ile (örneğin n cinsinden) yazmaya yönelik çalışmalar yapılır. Örneğin ilk dört terimi 3, 9, 15 ve 21 olan bir aritmetik örüntünün kuralı 6n–3 olarak ifade edilir.
ç) Günlük hayat durumlarında veya şekil örüntülerindeki ilişkileri örüntüye dönüştürerek kuralı bulmaya yönelik çalışmalara da yer verilir.</td></tr>
<tr><td>Öğrenme Hedefleri</td><td>Öğrenmenin Nasıl Gerçekleşeceğine Dair Hipotezler</td></tr>
<tr><td>• Şekiller ile temsil edilen örüntülerin şekilsel analizini yapabilir ve şekiller arasındaki genişlemeyi veya daralmayı tespit eder.
• Şekil örüntüsünde istenen adımındaki şekil sayısını bulmak için kısa yollar bulur.
• Bulduğu bu kısa yolların matematiksel ilişkilerini yazar.</td><td>Öğrenciler;
• Günlük hayat durumlarından örüntülere örnekler verebilir.
• Şekil örüntülerinde şeklin yapısını analiz edebilir.
o Şekil örüntülerini sayı örüntüsüne dönüştürebilir. Terimler arasındaki sabit farka odaklanır.
o Şekil örüntüsündeki sabit farka odaklanabilir.
• Şekil örüntüsünün devamındaki yakın adımları çizebilir.
• Şekil örüntüsünün yakın adımındaki yapıyı çizmeden tahmin edebilir.
o Şekil örüntüsünün yakın adımlarını yinelemeli stratejiler kullanarak</td></tr>
</table>

• Matematiksel ilişkilerdeki değişen ve sabit kalan değerleri fark eder. • Matematiksel ilişkilerdeki değişen değerler yerine harfli semboller kullanır. • Belli bir adıma kadar verilen şekil örüntüsünün yakın adımlarını oluşturur. • Örüntüde yer alan ilişkisel yapıyı ortaya koyarak örüntünün uzak adımlarına ulaşır. • Kuralı verilen örüntülerin eksik adımlarını bulur. • Kuralı verilen şekil ve sayı örüntülerini oluşturur.	bulabilir. • Şekil örüntüsünün uzak adımlarındaki yapıyı tahmin edebilir. o Sabit farkı katsayı olarak alabilir ya da rastgele katsayılar kullanarak deneme yanılma yöntemi ile örüntünün terimlerine ulaşabilir. o Bütüne genişletme stratejileri kullanabilir.(Örneğin 4. terim 17 ise 8. terim 2x17=34) o Aritmetik diziler kullanabilir. • Şekil örüntülerindeki adım sayıları ve adımlarda karşılaşılan şekil sayılarını tablo temsiline aktararak matematiksel ilişkileri yazabilir. o Tabloda değişen nicelikleri önce toplamsal sonra çarpımsal olarak yazabilir. o Tabloda sabit kalan ve değişen niceliklerin neler olduğunu belirleyebilir. o Değişen nicelikler arasındaki fonksiyonel ilişkiyi keşfeder. • Örüntüdeki değişen nicelikle arasındaki ilişkileri sözel olarak ifade edebilir. • Örüntülerdeki keşfettiği ilişkileri harfli sembollerle ifade edebilir. • Örüntülerde eksik bırakılan adımları bulabilir. • Kuralı (genel terimi) verilen örüntüleri istenen adıma kadar devam ettirebilir. • Genel terimi verilen sayı ve şekil örüntülerini oluşturabilir.

7. Sınıf Matematik Dersi 3. Ünite Cebirsel İfadeler İle Eşitlik ve Denklem Alt Öğrenme Alanı Tahmini Öğrenme Yol Haritası (3.Hafta)	
Kazanımlar: 7.2.2.1. Eşitliğin korunumu ilkesini anlar. a) 7 + 2 = Δ +3 gibi eşitliklerin bozulmaması için Δ yerine gelecek sayıyı bulmaya yönelik çalışmalar yapılır. b) Ekleme ve çıkarma durumlarında eşitliğin korunduğunu göstermek için terazi veya benzeri denge modellerine yer verilir. c) Eşitliğin her iki tarafına aynı sayının eklenmesi veya çıkarılması ve iki tarafın aynı sayıyla çarpılması veya bölünmesi durumunda eşitliğin korunması ele alınır.	
Öğrenme Hedefleri	**Öğrenmenin Nasıl Gerçekleşeceğine Dair Hipotezler**
• Eşit işaretini denge ve aynılık anlamıyla kullanır. • Eşit işaretinin ilişkisel anlamını kavrar. • Doğru/yanlış cümlelerinde eşitliğin doğru kullanımlarını fark eder. • Açık cümle örneklerinde eşitliğin sağlanması için boşluklara gelmesi gereken sayıları önce işlemler yaparak sonra ilişkisel düşünmeler gerçekleştirerek bulabilir. • Eşitliğin korunumu ilkesi anlar.	Öğrenciler; • Eşit işaretinin anlamını kavrayabilir. • Eşit işaretini işlemsel bir sembol (işlem yap sonuç bul) olarak kullanabilir. • Eşit işaretini ilişkisel (denklik veya aynılık) bir sembol olarak kullanabilir. • Eşitliği denge anlamıyla kullanabilir. • Doğru/ yanlış cümlelerinde eşitliğin doğru kullanımlarını bulabilir. • Açık cümle örneklerinde boşluklara gelmesi gereken sayıları bulabilir. • Açık cümle örneklerinde eşitliğin sağlanması için boşluklara gelmesi gereken sayıları işlemler yaparak bulabilir. • Sayı kümelerinin özelliklerinden yararlanarak (değişme, birleşme, dağılma özellikleri) açık cümle örneklerindeki boşluklara gelmesi gereken sayılara

	işlem yapmadan kolayca ulaşabilir. • İlişkisel düşünerek açık cümle örneklerindeki boşluklara gelmesi gereken sayıları bulabilir. • Eşit kollu terazi modelleri veya benzeri denge modellerinde aynı çoklukların eklenmesi veya çıkarılması durumunda dengenin korunduğunu gösterebilir. • Eşitliğin her iki tarafına aynı sayının eklenmesi veya çıkarılması ve iki tarafın aynı sayı ile çarpılması veya bölünmesi durumunda eşitliğin korunduğunu gösterebilir. o 17-5=11+1 (her iki tarafa 5 ekleme) 17-5+5=12+5 17=17 o 8+7=13+2 (her iki taraftan 7 çıkarma) 8+7-7=15-7 8=8 o $\frac{28}{2}$ =15-1 (her iki tarafı 2 ile çarpma) 2. $\frac{28}{2}$ = 2. (15-1) 28=28 o 3.6=15+2 (her iki tarafı da 3 ile bölme) $\frac{3.6}{3}=\frac{15+2}{3}$ 6=6

<table>
<tr><th colspan="2">7. Sınıf Matematik Dersi 3. Ünite
Cebirsel İfadeler İle Eşitlik Ve Denklem Alt Öğrenme Alanı
Tahmini Öğrenme Yol Haritası (4., 5. ve 6. Hafta)</th></tr>
<tr><td colspan="2">Kazanımlar: 7.2.2.2. Birinci dereceden bir bilinmeyenli denklemi tanır ve verilen gerçek hayat durumlarına uygun birinci dereceden bir bilinmeyenli denklem kurar.
7.2.2.3. Birinci dereceden bir bilinmeyenli denklemleri çözer. Denklemlerdeki katsayılar tam sayılardan seçilir.
7.2.2.4. Birinci dereceden bir bilinmeyenli denklem kurmayı gerektiren problemleri çözer.</td></tr>
<tr><th>Öğrenme Hedefleri</th><th>Öğrenmenin Nasıl Gerçekleşeceğine Dair Hipotezler</th></tr>
<tr><td>• Denklem kavramını tanımlar.
• Verilen sözel durumlara ait denklemleri kurar.
• Terazi ve benzeri denge modelleriyle ifade edilen denklemleri kurar.
• Terazi modelleri yardımıyla denklem çözümleri yapar.
• Eşitliğin her iki tarafına aynı işlemleri yaparak denklemleri çözer.
• Terimleri zıt işareti ile karşı tarafa geçirerek denklemleri çözer.
• Yer değiştirme ve her iki tarafa aynı</td><td>Öğrenciler;
• İçerisinde bilinmeyen bulunan eşitlikleri denklem olarak ifade edebilir.
• Sözel olarak ifade edilen eşitliklere ait denklemleri yazabilir.
• Bilinmeyenin katsayısı bir olan denklemleri kurabilir. Örneğin; Bir sayının 2 fazlası 10’a eşittir, bir sayının 5 eksiği 23’e eşittir, bir sayının (-5) fazlası 11’e eşittir.
• Bilinmeyenin katsayısı 1’den farklı olan denklemleri kurabilir. Örneğin; bir sayının 3 katının 5 fazlası 20’ye eşittir, bir sayının 4 katının 3 eksiği 17’ye eşittir.
• Dağılma özelliği kullanılarak denklemler kurabilir. Örneğin; bir sayının 3 fazlasının 4 katı 32’ye eşittir, bir sayının 4 eksiğinin 5 katı 35’e eşittir.</td></tr>
</table>

işlemleri yapma yöntemleri arasındaki ilişkiyi kavrar. • Günlük hayat problemlerine ait denklemleri kurar ve çözer.	• Eşitliğin iki tarafında bilinmeyen bulunan denklemleri kurabilir. Örneğin; bir sayının 2 katının 5 fazlası aynı sayının 23 katının 7 eksiğine eşittir. • Terazi modelleri veya denge modelleri ile ifade edilen eşitliklere ait denklemleri yazabilir. • Terazi modeli yardımıyla eşitliğin korunumu çerçevesinde terazinin kefelerinden aynı çoklukları çıkararak veya ekleyerek basit denklemlerin çözümünü yapabilir. o Denklem çözümlerinde informal yöntemleri kullanabilir (deneme yanılma, geriye doğru işlemler yapma gibi). o • Verilen denklemlerde eşitliğin iki tarafına aynı işlemleri yaparak denklemleri çözebilir. $x-5=12$ $x+7=15$ $\frac{x}{2}=14$ $3x=18$ $x-5+5=12+5$ $x+7-7=15-7$ $2.\frac{x}{2}=2.14$ $\frac{3x}{3}=\frac{18}{3}$ $x=17$ $x=8$ $x=28$ $x=6$ • Denklemleri yer değiştirme yöntemi ile çözebilir. $2x+5=25$ $2.(x+5)=16$ $2x=25-5$ $(x+5)=\frac{16}{2}$ $2x=20$ $x+5=8$ $x=\frac{20}{2}$ $x=8-3$ $x=10$ $x=5$

	1. Bilinmeyenin katsayısı 1 veya (-1) olan denklemleri çözebilir. x+6=10 7+x=12 (-x)+5=17 8+(-x)= -3 10=7-x 23=-x+8 25=x+9 2. Bilinmeyenin katsayısı 1'den farklı olan ve sabit terim içermeyen denklemleri çözebilir. 2x=24 (-3x)=27 72=4x 64=(-8x) 3. Bilinmeyenin katsayısı 1'den farklı ve sabit terim içeren denklemleri çözebilir. 3x+5=32 6+2x=24 4x-7=21 7-3x=-5 12=-x+5 15=-3x+9 4. Eşitliğin iki tarafında da bilinmeyen bulunan denklemleri çözebilir.

	2x+5=3x-9 -3x+9=2x-16 • Verilen problemlere ait denklemleri kurup çözebilir. o Toplamları 24 olan iki sayıdan büyük olan küçük olanın 4 katından 1 eksiktir. Buna göre küçük olan sayı kaçtır? o İnek ve horozların bulunduğu bir çiftlikte toplam 20 hayvan vardır. Çiftlikteki hayvanların ayaklarının toplam sayısı 64 olduğuna göre bu çiftlikteki ineklerin sayısı kaçtır? • Problemlerde istenenleri ve verilenleri cebirsel olarak ifade edebilir. • Denklemleri kurarken gerekli durumlarda tablo, şekil ve grafiklerden yararlanabilir. • Problemlere ait kurduğu denklemleri denklem çözüm yöntemleri yardımıyla çözebilir.

EK 2: Ders Planları

<table>
<tr><td colspan="2">7. Sınıf Matematik Dersi 3. Ünite
Cebirsel İfadeler İle Eşitlik ve Denklem Alt Öğrenme Alanı
1. HAFTA DERS PLANLARI</td></tr>
<tr><td colspan="2">Genel Amaç: Öğrenciler değişken kavramını farklı anlamlarıyla kullanabilecek; terim, sabit terim ve katsayı kavramlarını anlamlandırabileceklerdir. Benzer ve benzer olmayan terimleri ayırt edip cebirsel ifadeler ile toplama ve çıkarma işlemleri yapabileceklerdir. Bir doğal sayı ile bir cebirsel ifadeyi çarpabileceklerdir.</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td colspan="2">Kazanımlar: 7.2.1.1. Cebirsel ifadelerle toplama ve çıkarma işlemleri yapar.
7.2.1.2. Bir doğal sayı ile bir cebirsel ifadeyi çarpar.</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>Öğrencilerin Ön Bilgileri</td><td>Kavram yanılgıları/Hatalar</td></tr>
<tr><td>
• Değişkenin bilinmeyen nicelik ve değişen nicelik anlamlarını kullanabilir.
• Değişkenin farklı kullanımlarına yönelik kavramsal bir anlayış geliştirebilir.
• Terim, sabit terim ve katsayı kavramlarını anlamlandırabilir.
• Cebirsel ifadenin her bir bileşenini terim olarak adlandırabilir.
• Cebirsel ifadedeki toplananların veya çıkarılanların her birinin terim olduğunun farkına varabilir.
• Cebirsel ifadede bulunan değişkenlere verilen herhangi bir sayısal değere göre cebirsel ifadenin de değerinin değişeceğinin farkına varır, değişmeyen terimleri sabit terim olarak isimlendirir. Sadece değişken içeren terimlerden oluşan bir cebirsel ifadenin sabit teriminin 0 olduğunun farkına varabilir.
• Değişkenin kaç katı olduğunu gösteren ve değişkenle çarpım durumunda olan sayısal değerin katsayı olduğunu anlamlandırır. Sabit terimin de bir katsayı olduğunun farkına varabilir.
• Benzer terim kavramını anlamlandırabilir.
• Sözel olarak verilen basit cebirsel ifadeleri harfli sembollerle gösterebilir.
</td><td>
• Bir cebirsel ifadedeki katsayılar bulunurken işaret önemsenmeden sadece sayının söylenmesi. Örneğin 4a-3b+5c ifadesindeki katsayıların 4, 3 ve 5 olduğu cevabının verilmesi.
• Sabit terim bulunurken önündeki işaretin önemsenmemesi. Örneğin a-5 ifadesindeki sabit terimin 5 olduğunun düşünülmesi.
• Bir terimde bulunan, içinde birden fazla sayısal değer durumunda katsayının başta olması gerektiğinin düşünülmesi. Örneğin 5ab2 ifadesinde katsayının 5 olduğunun düşünülmesi.
• Benzer terimlerin doğru, benzer olmayan terimlerin yanlış olduğunun düşünülmesi.
• İki terimin benzer olabilmesi için aynı harf ve harfin kuvvetinin aynı olmasının yeterli olduğunun düşünülmesi. Örneğin a ile 1/a’nın benzer terim olduğunun düşünülmesi.
• Benzer terim kavramının anlaşılamamasından dolayı yapılan hatalar. Örneğin 3a+2=5 veya 3a+2b=5ab olduğunun düşünülmesi.
• Cebirsel ifadelerle toplama işlemi yaparken 5a+6b ifadesinde değişkenleri görmezden gelip sonucun 11 yazılması.
• Cebirsel ifadelerde çıkarma işlemi yapılırken parantezin önündeki – işaretinin parantezin tamamını kapsadığının göz ardı edilmesi. Örneğin 3a-(4b-7)=3a-4b-7 şeklinde yazılıp -7’nin işaretinin değiştirilmemesi.
• Cebirsel ifadelerde çarpma işlemi yapılırken sağdan yapılan dağılmalarda hata yapılması. Örneğin (3-2a)5=10a-15 şeklinde yazılması.

• “+” veya “-” ile = işaretlerinin daima sonuç ürettiğinin düşünülmesi. Örneğin 3+a=3a
• Parantezin öneminin dikkate alınmaması. Örneğin 3(a+2)=3a+2
• İşlem sırasını dikkate almadan daha kolay yapabilecek işlemlerden başlanması.
</td></tr>
<tr><td>Materyaller: Etkinliklerin yer aldığı çalışma kâğıtları</td><td>Süre: 5 ders saati</td></tr>
</table>

DERSİN İŞLENİŞİ

Derse giriş:

Cebirsel ifade nedir? Değişken nedir? Hatırlayalım.

✓ Değişken: Bir veya birden fazla sayıyı ifade eden harf veya sembollerdir.

Değişken kavramının farklı kullanımlarına (bilinmeyen, parametre, sabit, yer tutucu, bağımlı ve bağımsız değişken, genelleştirilmiş sayı, etiket, soyut sembol, nesne) değinilir.

✓ Cebirsel ifade: İçerisinde en az bir bilinmeyen ve işlem bulunduran ifadelere cebirsel ifade denir.

Cebirsel ifadelere örnekler verelim. Hatırlayalım.

❖ a+2, 2a, 3x, 4b-1, …

Sözel ifadelere uygun cebirsel ifadeleri yazalım. Hatırlayalım.

❖ Bir sayının 5 fazlası: a+5
❖ Bir sayının 6 eksiği: a-6
❖ Bir sayının 3 katı: 3a
❖ Bir sayının beşte biri: a/5
❖ Bir sayının 2 katının 5 fazlası: 2a+5
❖ Bir sayının 5 fazlasının 2 katı: 2.(a+5)

Terim, sabit terim, katsayı nedir? Hatırlayalım.

✓ Terim: Cebirsel ifadelerin (+) veya (-) sembolleri kullanılarak ayrılan her bir parçasına terim denir.
✓ Katsayı: Değişkenlerin önündeki her bir sayıya katsayı denir.
✓ Sabit Terim: Yanında değişken olmayan katsayılara sabit terim denir.

Hatırladığımız terim, terim sayısı, katsayı ve sabit terim kavramlarına göre aşağıdaki örneklerde istenenleri bulalım.

Cebirsel İfade	Terimler	Terim sayısı	Katsayılar	Sabit terim
$3a + 1$				
$-5x + 9$				
$a^2 - 7a + 11$				
$6a^2 + 3a - 1$				
$y^2 - 6$				
$c^2 - d$				

Benzer terim nedir? Hatırlayalım.

❖ Benzer Terim: Bir cebirsel ifadede değişkeni temsil eden harfleri ve bu harflerin kuvvetleri aynı olan terimlere benzer terim denir.

Aşağıdaki örneklerde benzer ve benzer olmayan terimleri inceleyelim.

Benzer Terimler	Benzer Olmayan Terimler
$4d$ ile $-7d$	a ile b
$3x$ ile $7x$	$7a$ ile $7a^2$
$6x$ ile $-4x$	-5 ile $5c$
7 ile -4	$9y$ ile $9z$
c^2 ile $3c^2$	$4ax$ ile $5x^2$

DERS:

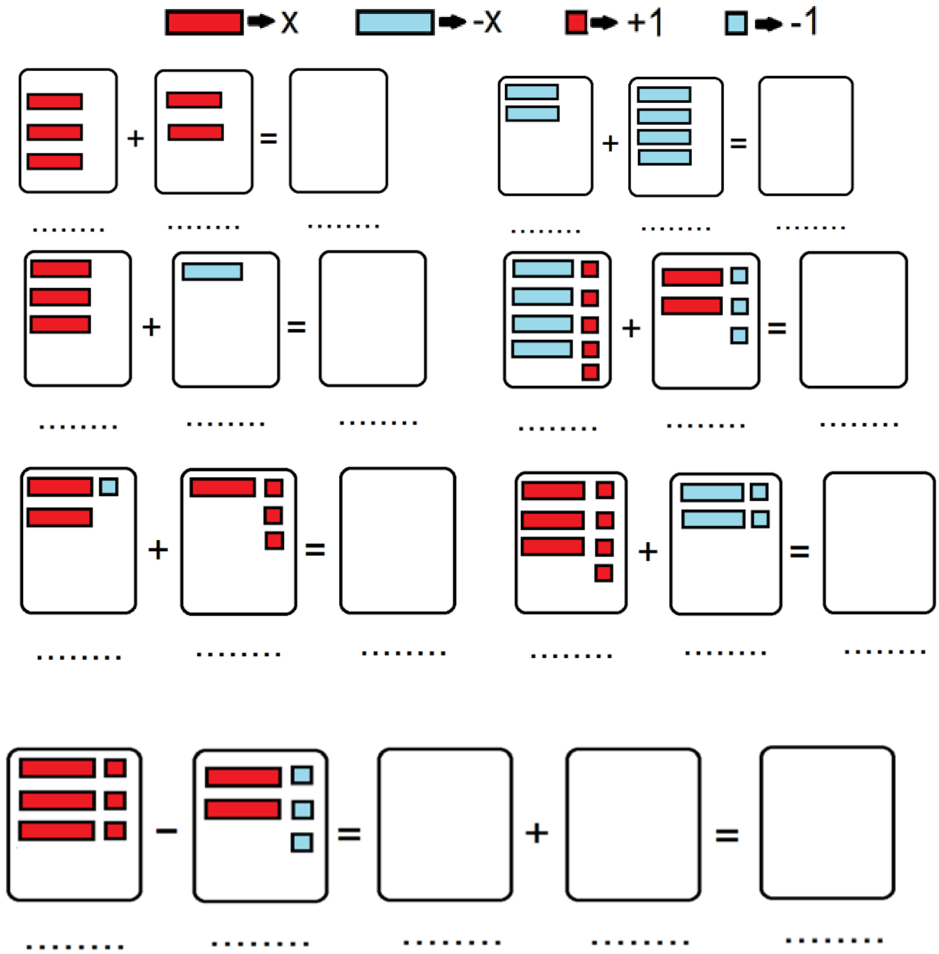
ETKİNLİK 1:

Cebirsel ifadelerle toplama ve çıkarma işlemleri yapılırken sadece benzer terimlerle kendi aralarında toplanıp çıkartılabilir. Buna göre aşağıdaki cebirsel ifadelerle toplama ve çıkarma işlemlerini yaparak en sade hallerini yazalım.

a) $2a + 3a =$
b) $6c - 4c =$
c) $-2x + 7x =$
d) $-5x - 5x =$
e) $3x + 4x + 7x =$
f) $2x + 5 + 3x + 6 =$
g) $5x - (-2x) - 3x =$
h) $3a + 4b + 6a + 5b =$
i) $2a + 3ab + 5a + 5ab =$
j) $2x + x^2 + 3x + 4x^2 =$
k) $3x + 4y + 2x =$
l) $(5x+6) - (3x+2) =$

ETKİNLİK 2:

Aşağıda verilen modellemelere karşılık gelen cebirsel ifadelerle bulalım. Sonra ilgili işlemleri yapıp sonuçlarını modeller yarımıyla gösterip cebirsel olarak ifade edelim.



ETKİNLİK 3:

Her birinde eşit sayıda çikolata bulunan kutuların her birinde x tane çikolata bulunmaktadır. Buna göre aşağıda verilen durumlara ait cebirsel ifadeleri yazınız.

a) Ali önce 2 kutu çikolata almıştır. Sonra 1 kutu ve tekli satılan çikolatalardan 5 tane daha almıştır. Ali'nin toplam kaç çikolatası vardır?

b) Ahmet 4 kutu ve 8 tekli satılan çikolatalardan1 kutusunu ve tekli satılan çikolatalardan 5'ini kardeşine verdikten sonra kaç çikolatası kalır?

ETKİNLİK 4:

Aşağıda uzunlukları cebirsel ifadelerle gösterilen iki çubuğun uzunlukları verilmiştir. Buna göre;

kısa çubuk: 2x +6 santimetre

uzun çubuk: 5x - 8 santimetre

a) Bu iki çubuğun uzunları toplamı nedir?

b) Uzun çubukla kısa çubuğun uzunlukları farkı nedir?

ETKİNLİK 5:

Şekilde görülen ipin uzunluğu 50 metredir. Bu ipin 3x +4 metresi halıları bağlamak için, 12–2x metresi yorganları bağlamak için kullanılmıştır. Buna göre ipin geri kalanını gösteren cebir sel ifadenin en sade halini yazınız.

ETKİNLİK 6:

Doğal sayılarda çarpma işlemlerini hatırlayalım.

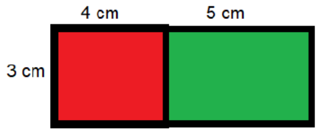
4.5.3=?

4.(5.3)=(4.5).3 (Doğal sayılarda çarpma işlemi birleşme özelliğine sahiptir.)

- 3.2a=
- 4x.5=
- 4a.(–3)=
- 5.(-3x)=
- –8.2b=
- (–4c) . (–3)=

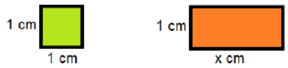
ETKİNLİK 7:

Çarpma işleminin toplama ve çıkarma işlemleri üzerine dağılma özelliği vardır.

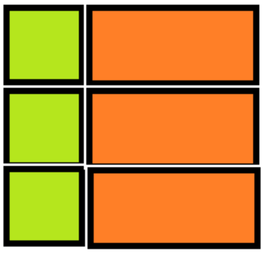


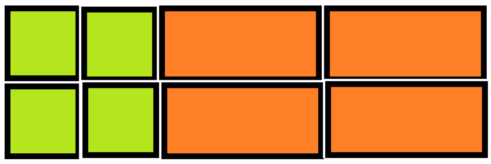
Örneğin yanda verilen dikdörtgenlerin alanları toplamı

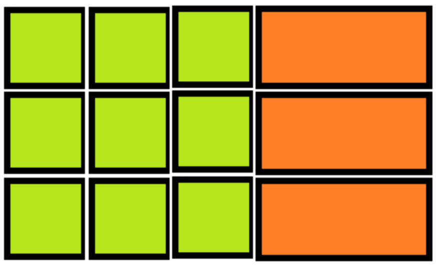
3.(4+5)= 3.4 +3.5 şeklinde hesaplanır.

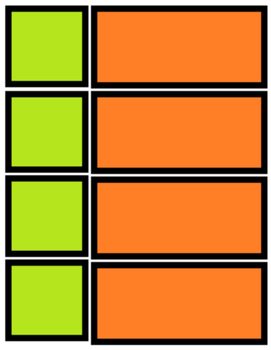


Yukarıdaki kare ve dikdörtgenlerin bir araya getirilmesi ile oluşturulan modellerin alanını gösteren cebirsel ifadeleri dağılma özelliğinden yararlanarak hesaplayalım.









ETKİNLİK 8:

Aşağıda bir tam sayı ile bir cebirsel ifadenin çarpımı ile ilgili sorulan soruların cevaplarını yazınız.

a) 3.(x +4) =
b) (3x+6).2 =
c) 5.(3x +6)=
d) 7.(2x–5) =
e) (5x–4).3=
f) –4.(2x+5)=
g) –3.(2x–4)=
h) (5–2x).4=
i) 5.(–3x+2)=
j) 3.(–2x–5)=

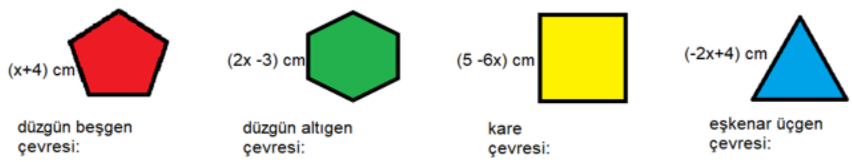
ETKİNLİK 9:

Aşağıdaki tabloda bir manavdan alınan meyvelerin fiyatları ve kilogram cinsinden miktarları verilmiştir. Buna göre istenilen miktarlarda meyve alan bir müşteri 100 TL verirse para üstü olarak alacağı değerin TL cinsinden cebirsel ifadesi nedir?

Meyve ismi	1 Kg meyvenin fiyatı	Alınan meyvenin miktarı
Elma	x + 5	4 kg
Armut	2x–4	3 kg
Muz	5x –1	1 kg
Portakal	3x+5	2 kg

ETKİNLİK 10:

Aşağıda bir kenar uzunluları verilen geometrik şekillerin çevre uzunluklarını hesaplayınız.



ETKİNLİK 11:

Bir çiftlikte x tane tavuk, tavukların sayısının 3 katının 5 fazlası kadar inek vardır. Bu çiftlikteki hayvanların ayak sayısını gösteren cebirsel ifadenin en sade halini yazınız.

TEKRAR ÖĞRETİM DERSLERİ:

ETKİNLİK 1:

Aşağıdaki örnek çözümde olduğu gibi benzer terimleri bir araya getirerek cebirsel ifadelerle toplama işlemlerini yapınız.

$(2x+5)+(3x+1)=(2x+3x)+(5+1)=5x+6$

$(3x+5)+(\ x-2)\ =\ (\qquad\qquad)+(\qquad\qquad)=$

$(5x+6)+(-3x-2)=(\qquad\qquad)+(\qquad\qquad)=$

$(4x+5)+(-2x+2)=(\qquad\qquad)+(\qquad\qquad)=$

$(4x-3)+(-2x+6)=(\qquad\qquad)+(\qquad\qquad)=$

ETKİNLİK 2:

Aşağıdaki örnek çözümde olduğu gibi cebirsel ifadelerle çıkarma işlemini çıkan ifadenin toplama işlemine göre tersi ile eksilen ifadenin toplamı şeklinde yazarak çözünüz.

$(4x+6)-(2x+3)=(4x+6)+(-2x-3)=(4x-2x)+(6-3)=2x+3$

$(6x+7)-(3x-1)=(\quad)+(\quad)=(\quad)+(\quad)=$

$(2x-1)-(x+3)=(\quad)+(\quad)=(\quad)+(\quad)=$

$(5x+6)-(-2x-3)=(\quad)+(\quad)=(\quad)+(\quad)=$

$(3x-1)-(x-3)=(\quad)+(\quad)=(\quad)+(\quad)=$

ETKİNLİK 3:

Aşağıdaki örnek çözümde olduğu gibi bir doğal sayı ile bir cebirsel ifadenin çarpımı şeklinde verilen ifadeleri çarpma işleminin toplama ve çıkarma işlemi üzerine sağdan ya da soldan dağılma özelliğinden yararlanarak çözünüz.

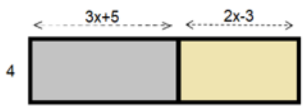
$2\cdot(3x+1)=2.3x+2.1=6x+2$ $\qquad$ $(2x+5)\cdot 3=2x\cdot 3+5.3=6x+15$

$4\cdot(5x-2)=$ $\qquad$ $(3x-1)\cdot 5=$

$3\cdot(4-2x)=$ $\qquad$ $(-2x+4)\cdot 3=$

$5\cdot(-4x-2)=$ $\qquad$ $(-3x-2)\cdot 4=$

ETKİNLİK 4:



Yukarıdaki şekilde kısa kenar uzunlukları eşit, uzun kenar uzunlukları farklı olan iki dikdörtgenin birleştirilmesi ile oluşan bölgenin alanını veren cebirsel ifadeyi hesaplayınız.

7. Sınıf Matematik Dersi 3. Ünite

Cebirsel İfadeler İle Eşitlik ve Denklem Alt Öğrenme Alanı

2. HAFTA DERS PLANLARI

Genel Amaç:

Öğrenciler verilen şekil veya sayı örüntülerinin yapılarını inceleyerek örüntülerin terimleri arasındaki sabit ve değişen niceliklerinin farkına varabileceklerdir. Örüntülerin terimleri ile terimin bulunduğu sıra arasındaki ilişkilerin farkına varıp matematiksel ilişkiyi kuracaklardır. Belirlenen ilişkilere dair genellemelerin sembolik kurallarla gösterimini yapacaklardır. Benzer olarak kuralı verilen örüntülerin istenen adımlarını bulacaklardır.

Kazanımlar: 7.2.1.3. Sayı örüntülerinin kuralını harfle ifade eder, kuralı harfle ifade edilen örüntünün istenilen terimini bulur.

a) Adımlar arasındaki farkı sabit olan örüntülerle sınırlı kalınır.

b) Değişken kullanımının önemi ve gerekliliği vurgulanır.

c) Sayı örüntüleri incelenerek örüntünün kuralını bir değişken ile (örneğin n cinsinden) yazmaya yönelik çalışmalar yapılır. Örneğin ilk dört terimi 3, 9, 15 ve 21 olan bir aritmetik örüntünün kuralı 6n–3 olarak ifade edilir.

ç) Günlük hayat durumlarında veya şekil örüntülerindeki ilişkileri örüntüye dönüştürerek kuralı bulmaya yönelik çalışmalara da yer verilir.

Öğrencilerin Ön Bilgileri:	**Kavram yanılgıları/Hataları:**
• <u>İlkokulda</u> 1. Sınıf öğrencileri ögeleri nesneler, geometrik şekiller ve cisimler olan örüntünün ilişkisini belirler ve eksik bırakılan ögesini bulur. En çok üç ögeli geometrik örüntüler oluşturabilir. 2. sınıfta tekrarlayan örüntülerde eksik bırakılan ögenin farkına varabilir ve tamamlayabilir. Bir örüntüdeki ilişkiyi göstererek farklı malzemeler kullanarak aynı ilişkiye sahip örüntüler oluşturabilir. 3. sınıfta şekil modelleri kullanarak kaplamalar yapabilir ve kaplama yaptığı örüntüyü noktalı veya kareli kâğıtlara çizebilir. 4. sınıfta belli bir kurala göre artan veya azalan sayı örüntüleri oluşturabilir ve kuralını açıklar. • <u>Ortaokulda</u> 5. sınıfta kuralı verilen sayı ve şekil örüntülerinin (adımlar arasındaki farkın sabit olduğu örüntüler) istenen adımını oluşturabilir. 6. sınıfta cebirsel ifadenin değerini değişkenin alacağı doğal sayı değeri için hesaplayabilir. Basit cebirsel ifadelerin anlamını açıklayabilir.	• Örüntüde verilen kuralı iki basamaklı bir sayı gibi algılayıp arada çarpma işareti olduğunu göz ardı edebilmektedirler. Örneğin kuralı 3n olan örüntünün 5. adımını bulurken n yerine 5 yazarak 35 sonucuna ulaşılabilir. • Kuralı mx+n şeklinde verilen örüntülerde artış miktarını x'in katsayısı olarak alıp kuralı mx şeklinde yazarak n sabitini eklenmeyi göz ardı edilebilir. • Örüntülerde genelleme sürecinde terimin bulunduğu sıra ile terim arasındaki ilişkiye odaklanmak yerine terimler arasındaki artış miktarına odaklanan öğrenciler ardışık terimlere artış miktarını ekleyerek ilerlemektedirler. Bu durum örüntünün uzaktaki terimlerini bulamamalarıyla sonuçlanabilir. • Kuralı mx olan örüntüler için kullanılabilen bir özelliği mx+n şeklinde de uygulamaya çalışmak yanlış bir stratejidir. Örneğin 2, 4, 6, 8, 10, … şeklinde ilerleyen örüntünün 5. terimi 10 ise 20. terimi (5. terimin 4 katından) 40'dır. Fakat 3, 5, 7, 9, 11, … şeklindeki örüntünün 5. teriminin 11, 20. teriminin (5. terimin 5 katından) 11.5=55 olduğunu düşünmek yanlış sonuçlara neden olur. • Örüntülerin kuralı bulunurken artış miktarını n'in katsayısı olarak aldıktan sonra deneme yanılma yoluyla n'e 1'den başlayarak değerler vererek örüntünün kuralını bulmaya çalışabilir. Örneğin üstteki örüntüde artış miktarı 2'yi n'in katsayısı olarak 2n olarak yazar ve kuralı deneyerek bulabilir. Bu tür stratejiler fonksiyonel düşünceyi engellemektedir. • Sabit artan örüntülerdeki artış miktarını bulduktan sonra kuralı bulmada hata yapabilirler. Örneğin yukarıdaki örüntüde kuralı n+2 yazmak gibi.

Materyaller: Etkinliklerin yer aldığı çalışma kâğıtları	**Süre:** 5 ders saati

DERSİN İŞLENİŞİ

Derse giriş:

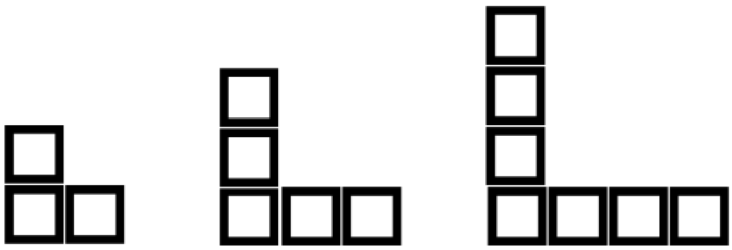
Öncelik olarak öğrencilerin şekiller arasındaki ilişkinin farkına vararak sabit değişen bir örüntüdeki genişlemeyi veya daralmayı ifade etmeleri üzerine çalışmalar yapılarak derse başlanmalıdır. Burada öncelik olarak genelleme yapmak ve kural oluşturmak hedeflenmemelidir. Öğrencilere adım sayısı verilmeden örüntüde gördüklerini yorumlamaları beklenmektedir.

Hatırlayalım.

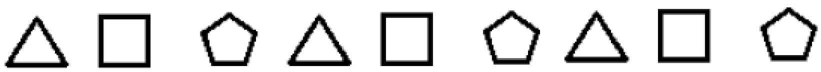
✓ Örüntü nedir?
✓ Çevremizde ve günlük hayatta karşılaştığımız şekil ve sayı örüntülerine örnekler nelerdir?

DERS:

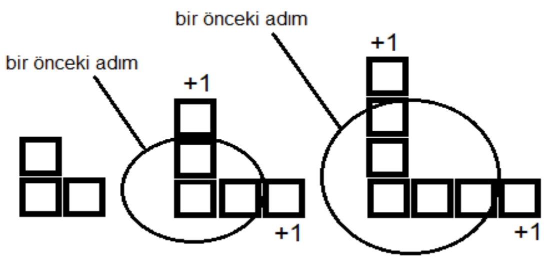
ETKİNLİK 1:



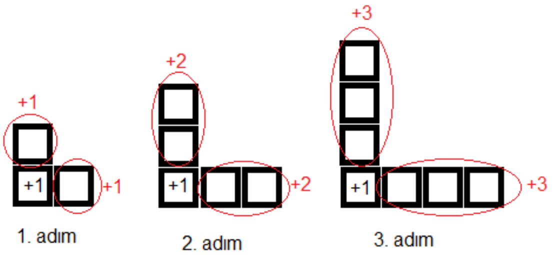
✓ Bu bir örüntü müdür?
✓ Verilen örüntüde fark ettiğiniz şeyler nelerdir?



✓ Yukarıdaki örüntü ile bu örüntü arasında fark var mıdır? İfade ediniz.
✓ Örüntüde yer alan şekilleri ifade ederken her birisini nasıl adlandırabiliriz? Önerileriniz nelerdir?
✓ Örüntüde yer alan her bir şekli birinci adım, ikinci adım diye isimlendirebiliriz. (öğrenci önerilerinden yola çıkarak etiketleme yapılabilir)
✓ Örüntünün 4. adımını çizmeleri istenir.
✓ Örüntünün 10. adımında ve 17. adımında kaç adet kare ile karşılaşılacağı sorulur.
✓ Bu örüntünün nasıl genişlediğini bulacak başka yollar bulabilir misiniz?



Öğrencilerin ilk fark ettikleri genelden yinelemeli strateji olarak isimlendirilen bir önceki adımın üzerine ekleme yapılarak bir sonraki adımın bulunmasıdır. Burada her bir adımda L'nin kollarına birer kare eklenerek bir sonraki adımda 2 karenin eklenmesidir (Bir sonraki adımdaki kare sayısı= bir önceki adımdaki kare sayısı +2).



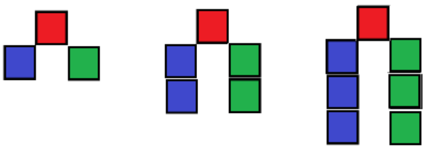
L örüntüsünün her bir kolu üzerine eklenen kare sayısı adım sayısı ile ilişkilidir. Burada K kare sayısı n ise adım sayısı olmak üzere K=2n+1'dir. Yani her bir adımda oluşan kare sayısı adım sayısının iki katının bir fazlasıdır.

Keşfetme:

Öğrenciler genellikle yakın adımlardaki kare sayısı sorulduğunda bir önceki adımla olan ilişkiyi kullanarak sonuca ulaşmaya çalışacaktır. Fakat bu çözüm yolu uzak adımların bulunmasında öğrencileri zorlayabilir. Sorulan sorularda 10. ve 43. adımdaki kare sayılarını bulmak için kare sayılarının adım sayıları ile olan ilişkilerini fark etmeleri beklenmektedir.

ETKİNLİK 2:

Bu etkinlikte öğrencilerin şekilsel muhakemeyi sayısal muhakemeye çevirmesi ve sabit değişen örüntülerdeki adım sayısı ve adıma ait terim sayısı arasındaki ilişkinin görünür kılınması amacıyla üç sütunlu tablonun tanıtımı ve kullanımı yapılacaktır.



- ✓ Bu örüntüde neler görüyorsunuz?
  (Burada öğrencilerden beklentimiz kırmızı karelerin sayısının değişmediği, mavi ve yeşil karelerin sayısının adım sayısı ile ilişkili olarak değiştiğini söyleyebilmeleridir.
- ✓ Dördüncü adımda nasıl bir şekil bekliyorsunuz?
- ✓ 17. ve 23. adımlarda nasıl şekiller bekliyorsunuz?
- ✓ Örüntünün ilk dört adımını fark ettiğiniz ilişkilerden yararlanarak doldurunuz.
  (Tablolardaki ilişkilerin gösterimi önce toplamsal sonra çarpımsal şekilde gösterilebilir)

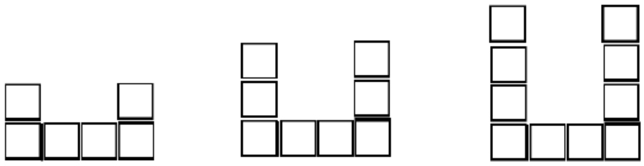
Muhtemel cevaplar:

Adım sayısı	Düşünceniz	Toplam kare sayısı
1	1+1+1	3
2	2+2+1	5
3	3+3+1	7
4	4+4+1	9

Adım sayısı	Düşünceniz	Toplam kare sayısı
1	2.1+1	3
2	2.2+1	5
3	2.3+1	7
4	2.4+1	9

- ✓ Tablo hakkında ne düşünüyorsunuz?
- ✓ Tablonun orta sütunu ile adım sayısı arasında nasıl bir ilişki vardır?
- ✓ Adım sayısı ile toplam kare sayısı arasında nasıl bir ilişki vardır?

ETKİNLİK 3:



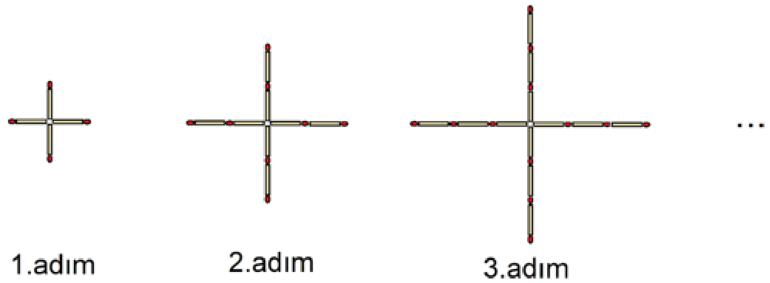
- ✓ Örüntünün 4. adımını çiziniz ve açıklayın.
- ✓ Örüntünün 10. adımında nasıl bir şekil oluşur? Açıklayınız.
- ✓ Örüntünün 53. adımında nasıl bir şekil oluşur? Açıklayınız.
- ✓ Aşağıdaki tabloyu doldurunuz.

Adım sayısı	Düşünceniz	Toplam kare sayısı
1		
2		
3		
4		
10		
53		
100		

- ✓ Tabloda hangi örüntüleri görüyorsunuz.
- ✓ Orta sütünü doldururken sabit kalan nedir?
- ✓ Orta sütunda değişenler neye göre değişmiştir?
- ✓ Orta sütundaki sayılar ile adım sayısı arasındaki ilişki nedir?
- ✓ Herhangi bir adımdaki kare sayısı bulunabilir mi? Açıklayınız
- ✓ Bunu bir kurala çevirebilir misiniz?

Şimdiye kadar öğrenciler yakın ve uzak adımlarla ilgili genellemeler yaptılar. Ayrıca üç sütunlu tabloları kullanarak sayısal analizler de yaptılar. Bunun yanında adım sayısı ile terim sayıları arasındaki ilişkilerin de farkına vardılar ve sözel olarak bu ilişkiyi ifade ettiler. Artık öğrencilerden örüntülerin kurallarını sözel olarak ifade etmenin yanında değişen nicelikler, değişken kullanarak ifade etmeleri beklenmektedir. Artık örüntü kurallarını sembol kullanımıyla ifade edebilmelilerdir.

ETKİNLİK 4:



- ✓ Örüntünün 4. adımını oluşturunuz.
- ✓ Aşağıdaki tabloyu doldurunuz.

Adım sayısı	Düşünceniz	Toplam kibrit çöpü sayısı
1		
2		
3		
4		
5		
. . .	. . .	. . .
n		

- ✓ Örüntüdeki adım sayısı ile oluşan kibrit çöpü sayısı arasında nasıl bir ilişki vardır?
- ✓ Örüntünün 100. adımında kaç kibrit çöpü vardır?
- ✓ Bilinmeyen bir adımda kaç tane kibrit çöpü olacağını bulabilir misiniz? Nasıl?
- ✓ Örüntünün kuralını değişken kullanarak ifade edebilir misiniz?

ETKİNLİK 5:

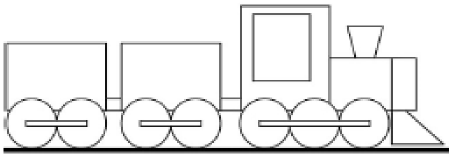
Tahta oyuncak imalatı yapan bir işçi atölyesinde 1 saatte 5 adet oyuncak üretilmektedir. Bu oyuncakları üreten işçi günde 10 saat çalışmaktadır. Buna göre bu oyuncak atölyesinde

a) 1 günde üretilen tahta oyuncak sayısını işlem yaparak bulunuz.
b) 2 günde üretilen tahta oyuncak sayısını işlem yaparak bulunuz.
c) 3 günde üretilen tahta oyuncak sayısını işlem yaparak bulunuz.
d) Bu atölyede 500 tahta oyuncak üretilebilmesi için işçinin kaç gün ve kaç saat çalışması gerekmektedir? Açıklayınız.
e) Üretilen oyuncak sayısı ile harcanan saat sayısı arasında nasıl bir ilişki vardır? Bu ilişkiyi gösteren örüntünün kuralını bulunuz. Bu kurala nasıl ulaştığınızı açıklayınız.

ETKİNLİK 6:

- ✓ Yukarıda ilk adımı verilen iki ayrı örüntü oluşturunuz.
- ✓ 1,2,3,4,10. adımlarını üçlü tablo oluşturarak gösteriniz.
- ✓ Herhangi bir adımını bulmak için örüntülerin kuralını oluşturunuz.

ETKİNLİK 7:



Bir trenin ilerleyebilmesi için bir lokomotife ihtiyaç vardır. Bu lokomotiflerin çektiği vagonların sayısı ihtiyaca göre değişebilir. Trenin lokomotifinde 6 adet tekerlek, vagonlarının her birinde ise 4 tekerlek vardır. Bu bilgilere göre;

a) Aşağıdaki tabloda boş bırakılan yerleri doldurunuz.(Trenin tekerlek sayısını hesaplarken lokomotifin tekerleklerinin sayısını unutmayınız!)

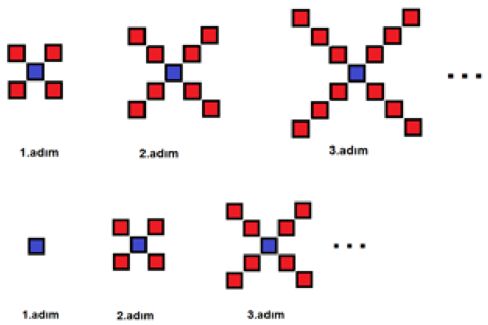
Trenin vagon sayısı	Trenin tekerlek sayısı
1	
2	
3	
4	
5	

b) Trenin 46 tekerleği olduğu bilindiğine göre bu tren kaç vagondan oluşmuştur? Açıklayınız.

c) Trenin vagon sayısı ile tekerlek sayısı arasında nasıl bir ilişki vardır? Bu ilişkiyi gösteren örüntünün kuralını bulunuz. Bu kuralı nasıl bulduğunuzu açıklayınız.

TEKRAR ÖĞRETİM DERSLERİ:

ETKİNLİK 1:



Şekilde ilk üç adımı verilen iki örüntü gösterilmektedir.

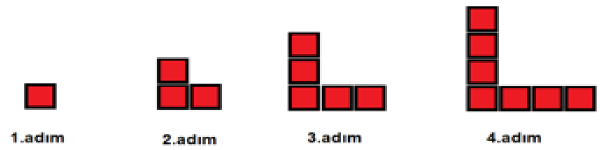
a) İki örüntünün arasında nasıl bir fark vardır? Açıklayınız.

b) Bu iki örüntünün kuralını sözel olarak ifade ettikten sonra genel terimlerini yazınız.

c) Bu şekil örüntülerini inceledikten sonra 4. 5. ve 6. adımlarında karşılaşılan kare sayılarını nasıl bulursunuz?

d) Bu iki örüntünün 100. adımlarında karşılaşılan kare sayılarını hesaplayınız.

ETKİNLİK 2:



Şekilde ilk dört adımı verilen örüntü gösterilmektedir.

a) Örüntünün nasıl ilerleğini açıklayınız.

b) Örüntüdeki adım sayıları ve bu adımlarda bulunan kare sayıları arasındaki ilişkileri bularak tabloyu doldurunuz.

Adım sayısı	İlişki	Adımlarda karşılaşılan kare sayısı
1		
2		
3		
4		
n		

c) Tabloyu doldururken ulaştığınız örüntünün kuralını sözel olarak ifade ediniz ve genel terimini yazınız.
d) Örüntünün beşinci ve altıncı adımlarında karşılaşılan kare sayılarını bulunuz.
e) Örüntünün 50. ve 60. adımlarında karşılaşılan kare sayılarını bulunuz.

ETKİNLİK 3:

İnternette gördüğü kalemlerden sipariş etmek isteyen Kerem kargo parası ile birlikte ödemesi gereken tutar için aşağıdaki fiyat tablosu ile karşılaşmıştır.

Kalem adedi	Ödenecek tutar (TL)
1	12
2	17
3	22
4	27

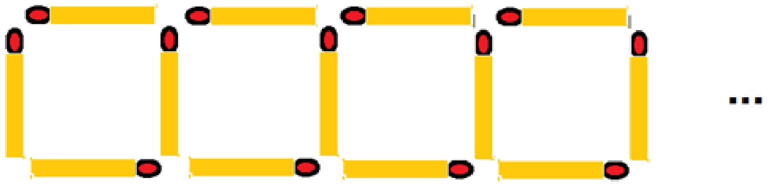
Buna göre;

a. Tabloyu incelediğinizde fark ettiğiniz örüntüyü tanımlayabilir misiniz?
b. Ödenecek tutarların oluşturulduğu örüntünün kuralını sözel olarak ifade ediniz. Bu örüntünün genel terimi nedir?
c. 8 kalem alan Kerem'in ödeyeceği tutarı hesaplayınız.
d. 40 kalem alan Kerem'in ödeyeceği tutarı hesaplayınız.

ETKİNLİK 4:

Doğum gününde İrem'e annesi içerisinde 5 TL bulunan kumbarayı hediye etmiş ve her gün aldığı harçlıkların 3 TL'sini kumbarasında biriktirmesini istemiştir. Buna göre harçlıklarını biriktiren İrem'in 20. günün sonunda kumbarasında kaç TL birikmiş olur?

ETKİNLİK 5:



Kibrit çöplerinin şekilde gösterildiği gibi bir araya getirilmesi ile yan yana dizilen kareler oluşturulmuştur. Bu dizilim yeteri kadar kibrit çöpü olması durumunda aynı şekilde devam edebilmektedir. Buna göre;

a. Bu dizilimde oluşan kare sayısı ile kullanılan kibrit çöpü sayısı ilişkisini açıklayınız.
b. Dizilim sonucunda oluşan kare sayısı n olmak üzere kullanılan kibrit çöplerinin oluşturduğu örüntünün genel terimini yazınız.
c. 100 kibrit çöpü kullanılması durumunda oluşan kare sayısını hesaplayınız.

7. Sınıf Matematik Dersi 3. Ünite

Cebirsel İfadeler İle Eşitlik ve Denklem Alt Öğrenme Alanı

3. HAFTA DERS PLANLARI

Genel Amaç:

Öğrencilerin eşit işaretini ilişkisel olarak denge biçiminde anlamaları hedeflenmiştir. Daha önce doğal sayılar kullanarak oluşturulan eşitlikler artık cebirsel bağlamda da gösterilebilecektir. Öğrencilerin eşitliğin korunumu ilkesini anlamaları beklenmektedir. Eşitliğin korunumu için yapılması gereken işlemlerin farkına varmaları amaçlanmaktadır. Bunun yanında eşitliğin korunumu ile ilgili verilen terazi ve diğer denge modellerinin öğrencilere yol göstermesi hedeflenmiştir.

Kazanımlar: 7.2.2.1. Eşitliğin korunumu ilkesini anlar.

a) $7 + 2 = \Delta + 3$ gibi eşitliklerin bozulmaması için Δ yerine gelecek sayıyı bulmaya yönelik çalışmalar yapılır.

b) Ekleme ve çıkarma durumlarında eşitliğin korunduğunu göstermek için terazi veya benzeri denge modellerine yer verilir.

c) Eşitliğin her iki tarafına aynı sayının eklenmesi veya çıkarılması ve iki tarafın aynı sayıyla çarpılması veya bölünmesi durumunda eşitliğin korunması ele alınır.

Öğrencilerin Ön Bilgileri

- 2.sınıfta eşit işaretinin matematiksel ifadeler arasındaki “eşitlik” anlamının farkındadır. Eşit işaretinin her zaman işlem sonucu taşımadığının, eşitliğin iki tarafında denge durumunu ifade ettiğini bilir. Bunun yanında işlemin sadece eşit işaretinin sağında olmak zorunda olmadığının, solunda veya iki tarafında bulunduğu örneklerin farkındadır.
- 4. sınıfta aralarında eşitlik durumu bulunan iki matematiksel ifadeden birinde verilmeyen değeri bulabilir ve eşitliğin sağlanmadığı durumları açıklayabilir. Aralarında eşitlik durumu olmayan iki matematiksel ifadenin eşit olması için yapılması gereken işlemleri açıklayabilir.
- 6. sınıfta işlem önceliğini dikkate alarak doğal sayılarla dört işlem yapabilir. Doğal sayılarda ortak çarpan parantezine alma ve dağılma özelliğini uygulamaya yönelik işlemler yapabilir. Eşitlik cümlelerinin gösterimi için modellerden yararlanabilir. Basit cebirsel ifadelerin anlamını açıklayabilir.
- 7. sınıfta cebirsel ifadelerle toplama ve çıkarma işlemlerini yapabilir. Bir doğal sayı ile bir cebirsel ifadeyi çarpabilir.

Kavram yanılgıları/Hatalar

- Eşitliğin “işlemi yerine getir” anlamında kullanılarak, ilişkisel anlamıyla eşitlik cümlesine ait iki çokluğun karşılaştırılması olarak görülmemesi. Örneğin $x=y$ gibi bir ifadenin kabul edilmemesi
- Eşitliğin sonuç ifade eden bir sembol olarak görülmesi ve ya bir işlemin cevabını göstermede kullanılması. Bu tarz yanılgı içerisinde olan öğrenciler $5+6=\ldots+7$ ifadesinde boşluğa yazılması gereken sayının 11 veya 18 olması gerektiğini düşünebilir.
- Eşitliğin ilişkisel anlamının farkına varamayan öğrenciler $3+6=6+3$ eşitliğinin aynı sayılardan oluştuğu için doğru $5+7=3+9$ ifadesinin farklı sayılardan oluştuğu için yanlış olduğunu düşünürler.
- Eşitliğin yön belirttiğini düşünme. Örneğin $x=a+b$ eşitliğini kabul etmeyip $a+b=x$ olarak düzeltilmesi gerektiğinin düşünülmesi veya aynı düşünceyle 10 eşittir 4 artı 6 sözel ifadesine karşı çıkıp 4 artı 6 eşittir 10 olduğunu düşünme. Bununla beraber $10=4+x$ gibi bilinmeyenin sağda olduğu durumlarda zorluk yaşama.

Materyaller: Etkinliklerin yer aldığı çalışma kâğıtları

Süre: 5 ders saati

DERSİN İŞLENİŞİ

Derse giriş:

Öğrencilere işlem özelliklerini (değişme, birleşme, dağılma, ters eleman, etkisiz eleman) hatırlatan örneklerle derse giriş yapılacaktır.

• 81+76=76+81

• 3. (15+7) =3.15+3.7

• (6+25).4=6.4+25.4

• 76.89=89.76

• 27.1=1.17

• 24+(25+36)=(24+25)+26

• 9.(12.23)=(9.12).23

• 5+0=0+5

• 23.(-1)=-23

• 25+(-25)=0

• 12.(5.4)=(12.5).4

• 6.5+6.17=6.(5+17)

Öğrencilerle işlem özellikleri hakkında tartışılarak kendilerinin örnekler vermesi istenir ve özellikleri kullanmaları beklenir.

DERS:

ETKİNLİK 1: Doğru, Yanlış cümleler

Aynı değere sahip olan ifadelerin arasına "eşittir" sembolü konulması gerektiğinin farkına varmışsınızdır. Aşağıda sizlere bazı matematiksel cümleler verilmiştir. Fakat bu cümlelerin bazılarında eşitliğin sağ ve sol tarafındaki değerler birbirleri ile aynı bazıları ise birbirlerinden farklıdır. Bu bilgiyi göz önüne alarak doğru olanları yuvarlak içine alınız.

- 6+5 = 11
- 4+8 =14
- 9 = 6+3
- 12 = 5+9
- 10 =5 + 5
- 12 – 8 =4
- 8 =15 -7
- 3 x 6 =18
- 6 = 24 : 4
- 21 =3 x 7
- 12 =12
- 3+ 5 =3+5
- 4+5 =5+4
- 6 - 2 =2+3
- 8 – 3 = 12 -7
- 4+5 = 5 – 4
- 6 +7 =13 – 0
- 2+2 =2 x 2
- 3 x 7 =25 - 3
- 0 x 6 = 8 – 8

ETKİNLİK 2: Açık Cümleler

Aşağıda verilen cümlelerin sağ tarafları ile sol taraflarının aynı olabilmesi için boş bırakılan yelere gelmesi gereken sayıları bulunuz.

- 7 + 8 =☐
- 6 + ☐ =13
- 12- ☐=5
- 2 x 8 = ☐
- ☐ : 4 =12
- ☐=5+7
- ☐=2x7
- ☐=16:2
- 4+7 =7+ ☐
- ☐-6 = 8-6
- 3x5=5x☐
- 4+8=15-☐
- 6-☐=9-7
- 7+5=6+☐
- 6 + 5=2 x ☐
- 12 :☐ =3 +1

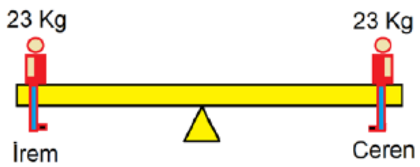
Şimdi de işlem yapmaktan çok biraz da sayılar arasındaki ilişkilere odaklanarak boşluklara gelmesi gereken sayıları bulmaya çalışalım.

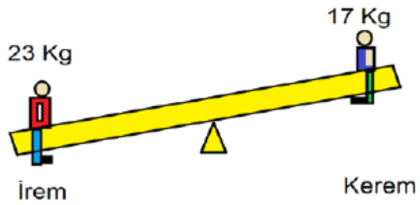
• 534+163=532+□ •47+□=46+53 •213 -39 = □ – 40 •20 x 34 =40 x □

• □ – 48 = 123 - 50 • 5 x 48 =10 x □ • 40 : 5 = □ : 10 •64 : 8 =32 : □

ETKİNLİK 3:

Ağırlıkları 23 kg olan İrem ve Ceren ikiz kardeşlerdir. İrem ve Ceren'in küçük kardeşleri Kerem ise 17 kg ağırlığındadır. Üç kardeş evlerinin önünde bulunan tahterevallide oynamaya gittiklerinde aşağıdaki görsellerdeki gibi durumlarla karşılaşmaktadırlar.





- Görsellerdeki durumlara bakarak kardeşlerin ağırlıklarını karşılaştırmak için sayılar arasındaki boşluklara gelmesi gereken sembolleri yazınız.

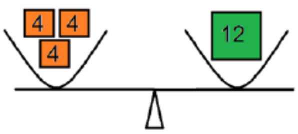
23…..23 23…..17

- Yukarıda İrem ve Ceren kardeşlerin ağırlıklarını karşılaştırdığınızda kullanmış olduğunuz işaret ile tahterevallnin konumu arasındaki ilişkiyi açıklayınız.

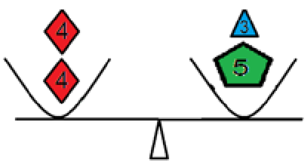
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………

ETKİNLİK 4:

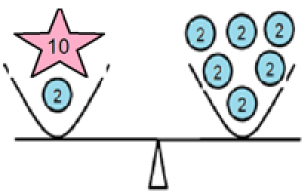
Aşağıda denge durumunda olan terazi modelleri verilmiştir.Bu durumlara ait denge durumlarını sözel olarak ve matematiksel cümlelerle ifade ediniz.



sözel olarak dengeyi ifade edniz.
……………………………………………
……………………………………………
……………………………………………
dengeyi matematik cümlesi olarak yazınız.
…………..=…………..



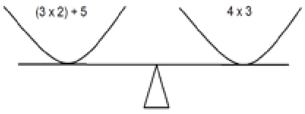
sözel olarak dengeyi ifade edniz.
……………………………………………
……………………………………………
……………………………………………
dengeyi matematik cümlesi olarak yazınız.
…………..=…………..



sözel olarak dengeyi ifade edniz.
……………………………………………
……………………………………………
……………………………………………
dengeyi matematik cümlesi olarak yazınız.
…………..=…………..

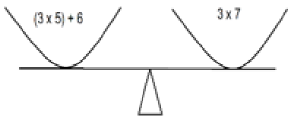
ETKİNLİK 5:

Aşağıdaki terazilerin dengede ya da eğik durma durumlarını belirleyip, terazilerin altında bulunan ifadelerdeki boşluklara uygun sembolü yazınız.



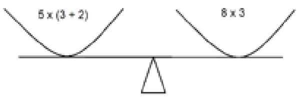
Eğik ....
Dengede ....

(3 x 2) + 5 ..... 4 x 3



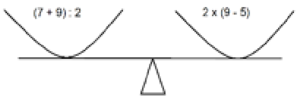
Eğik ....
Dengede ....

(3 x 5) + 6 ..... 3 x 7



Eğik ....
Dengede ....

5 x (3 + 2) ..... 8 x 3



Eğik ....
Dengede ....

(7 + 9) : 2 ..... 2 x (9 - 5)

ETKİNLİK 6: Denklik

Materyaller: eşit kollu terazi, çok sayıda birim küpler

Etkinlikte istenilen adımları ardı ardına sırasıyla takip ediniz.

1. Terazinin her iki kefesine bir miktar birim küp yerleştirerek teraziyi denge durumuna getiriniz.

2. Her iki kefeye 5'er tane birim küp eklenmesi halinde ortaya çıkacak sonucu tahmin ediniz ve bu durumu sözel olarak ifade ediniz.
   ....
   ....

3. Her iki kefeden 3'er tane birim küp eksiltiniz ve ortaya çıkan durumu ifade ediniz.
   ....
   ....

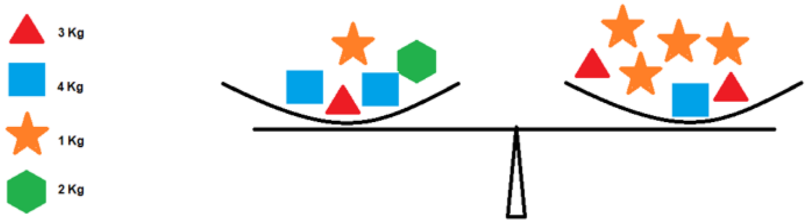
4. Denge durumundaki bir terazinin her iki tarafında bulunan birim küp sayısını iki katına çıkararak oluşan durum hakkındaki gözleminizi yazınız.
   ....
   ....

5. Denge durumundaki bir terazinin her iki tarafında bulunan birim küp sayısını yarıya indirerek oluşan durum hakkındaki gözleminizi yazınız.
   ....
   ....

6. Terazinin bir kefesine 5 birim küp yerleştiriniz. Diğer kefesine saymadan bir avuç birim küp yerleştiriniz. Terazinin konumuna bakarak bir avuç olarak yerleştirdiğiniz birim küp sayısı 5'den az mı yoksa çok mu olduğunu nasıl anlayabilirsiniz? Açıklayınız.
   ....
   ....

TEKRAR ÖĞRETİM DERSLERİ:

ETKİNLİK 1:



Yukarıda iki kefesinde farklı kütleler yardımıyla denge konumuna getirilmiş eşit kollu bir terazi modeli verilmiştir.

a) Terazinin sağ kefesinden mavi kare ile modellenen kütlenin alınması durumunda terazinin sol kefesinde yapılabilecek durumları açıklayınız.

b) Terazinin sağ kefesine kırmızı üçgen ile modellenen kütlenin eklenmesi durumunda terazinin sol kefesinde yapılabilecek durumları açıklayınız.

ETKİNLİK 2:

Aşağıdaki eşitliklerde eşitliklerin bozulmaması için ▲,♦,● ve ♥ şekillerinin yerine yazılması gereken sayıları eşitliğin korunumu ilkesinden yararlanarak bulunuz.

▲+3=5+8 ●-6=18-1 3.♦=18-6 ♥:2=12+5

ETKİNLİK 3:

Günlük hayatta birçok yerde eşit sembolünü kullanırken eşitliği bozmadan dengeyi koruyacak şekilde işlemler yaparız.

a)Bir sepetteki kırık ve sağlam yumurtaların toplamını eşit işareti yardımıyla gösterebiliriz. Bu sepette 5 kırık 15 sağlam yumurta vardır. Sepetteki yumurtalardan 2 tanesi daha kırılırsa kaç tane sağlam yumurta kalır? Bu duruma ait eşitlikte boşluğa gelmesi gereken sayıyı bulunuz.

5+15=7+□ (Denge durumunda toplanan sayılardan biri 2 artarsa diğeri 2 azalır.)

Şimdi siz de aşağıdaki eşitlikte boşluğa gelmesi gereken sayıyı eşitlikte yazan sayılar arasındaki ilişkiden yararlanarak yazınız.

123+56=120+□

b) Kerem ile babasının yaşları farkı hayatları boyunca sabit kalacaktır. Kerem 4 yaşında iken babası 37 yaşındadır. Kerem 10 yaşına gelince babası kaç yaşında olacaktır? Bu duruma ait yazılan eşitlikte boşluğa gelmesi gereken sayıyı bulunuz.

37– 4 = □ –10 (Denge durumunda farkı alınan iki sayıdan biri 6 eksilirse diğeri de 6 eksilir.)

Şimdi siz de aşağıdaki eşitlikte boşluğa gelmesi gereken sayıyı eşitlikte yazan sayılar arasındaki ilişkiden yararlanarak yazınız.

83– 14 = □ –12

c) Ordu ile Ankara arasındaki yolu 100 km/saat hızla 6 saatte giden bir araç 50 km/saat hızla kaç saatte gider? Bu duruma ait yazılan eşitlikte boşluğa gelmesi gereken sayıyı bulunuz.

100.6 =50.□ (Denge durumunda çarpanlardan birinin 2 ile çarpılırken diğeri 2 ile bölünür.)

Şimdi siz de aşağıdaki eşitlikte boşluğa gelmesi gereken sayıyı eşitlikte yazan sayılar arasındaki ilişkiden yararlanarak yazınız.

63.6 =21.□

d) İrem 48 TL ile kilosu 3 TL olan domateslerden alarak konserve yapmıştır. Ertesi sene yine aynı miktarda konserve yapmak için pazardan kilosu 6 TL olan domateslerden alırsa ödemesi gerek para miktar ne kadar olacaktır? Bu durma ait yazılan eşitlikte boşluğa gelmesi gereken sayıyı bulunuz.

48: 3 = □ : 6 (Denge durumunda bölen sayı iki katına çıkarsa bölünen sayı da iki katına çıkar.)

Şimdi siz de aşağıdaki eşitlikte boşluğa gelmesi gereken sayıyı eşitlikte yazan sayılar arasındaki ilişkiden yararlanarak yazınız.

7. Sınıf Matematik Dersi 3. Ünite

Cebirsel İfadeler İle Eşitlik ve Denklem Alt Öğrenme Alanı

4. HAFTA, 5. HAFTA VE 6. HAFTA DERS PLANLARI

Genel Amaç:

Sözel temsiller ile ifade edilen eşitliklere ait denklemleri sayısal değerler ve bilinmeyenleri kullanarak ifade edeceklerdir. Verilen problem durumlarına ait denklemleri kurup çözeceklerdir. Bunun yanında verilen denklemleri formal denklem çözme yöntemlerini ve eşitliğin korunumu ilkesini kullanarak çözeceklerdir.

Kazanımlar: 7.2.2.2. Birinci dereceden bir bilinmeyenli denklemi tanır ve verilen gerçek hayat durumlarına uygun birinci dereceden bir bilinmeyenli denklem kurar.

7.2.2.3. Birinci dereceden bir bilinmeyenli denklemleri çözer. Denklemlerdeki katsayılar tam sayılardan seçilir.

7.2.2.4. Birinci dereceden bir bilinmeyenli denklem kurmayı gerektiren problemleri çözer.

Öğrencilerin Ön Bilgileri

- 6.sınıfta

İşlem önceliğini anlayarak doğal sayılarla dört işlem yapabilir. Doğal sayılarda ortak çarpan parantezine alma ve dağılma özelliğini uygulamaya yönelik işlemler yapabilir. Doğal sayılarla dört işlem yapmayı gerektiren problemleri kurabilir ve çözebilir. Sözel olarak verilen bir duruma uygun cebirsel ifade ve verilen bir cebirsel ifadeye uygun sözel ifade yazabilir. Basit cebirsel ifadelerin anlamını açıklayabilir.

- 7. sınıfta

Tam sayılarla toplama ve çıkarma işlemlerini yapabilir, ilgili problemleri çözebilir. Toplama işleminin özelliklerini akıcı işlemler yapmak için birer strateji olarak kullanabilir. Tam sayılarda çarpma ve bölme işlemlerini yapabilir. Cebirsel ifadelerle toplama ve çıkarma işlemlerini yapabilir. Bir doğal sayı ile bir cebirsel ifadeyi çarpabilir. Eşitliğin korunumu ilkesini anlayabilir.

Kavram yanılgıları/Hatalar

- Verilen denklemlerde mevcut işlem yerine başka bir işlemin tersini kullanabilir. Örneğin 3x=1 denklemini x=1-3 şeklinde çözmeye çalışma.
- Ters işlemin sınırlı kullanılmasından kaynaklanan hatalar. Örneğin x/2=60 denklemini x=60/2 şekline dönüştürülmesi veya 30x=5 denkleminin x=30/5 şekline dönüştürülmesi. Bunun yanında x/3+4=15 denkleminin x+4=45 şekline dönüştürülmesi.
- Eşitliğin diğer tarafına geçirdiği sayının işaretinin değişmeyeceğini düşünebilir. Örneğin x-15=27 denkleminde x'in değerinin 12 olduğunu düşünebilir. Bunun dışında x+5=3 denklemini x+2=0 denklemine dönüştürüp x'in cevabının 2 olduğunu düşünebilir.
- Tanıdık olmayanın görmezden gelinmesi ile ilgili yapılan hatalar. 15x-116=124 gibi alışık olmadığı bir denklemi x-116=124 gibi daha iyi bilinen bir denkleme dönüştürmesi.
- Aritmetik işlemlerin yanlış bir şekilde cebire genellemesi ile ilgili yapılan hatalar. Örneğin 5x+4 ifadesini öğrencinin kendilerine göre sadeleştirerek 9x veya 9 şeklinde kullanması.
- Yeniden dağıtma ve toplamanın yer değiştirmesi ile ilgili yapılan hatalar. Örneğin x+21=95 denklemi ile x+21-10=95+10 denkleminin veya x+21=95 denklemi ile x=95+37 denkleminin çözüm kümelerinin aynı olduğunun düşünülmesi.
- Dağılma işlemi ile ilgili yapılan hatalar. Örneğin 3.(x+5) ifadesi yerine 3x+5,3x+8,14+x gibi ifadelerin kullanılması.
- Çıkarma işleminin değişme özelliğinin olduğunun düşünülmesi ile yapılan hatalar. Örneğin 16-3x ile 3x-16 eşit olduğunun düşünülmesi.
- Eksi işaretinin negatif sayılarla özdeşleştirilmesi ile ilgili yapılan hatalar. –x=5 gibi ifadelerde – işaretinin doğal sayının önünde kullanılan bir işaret olduğunu, x'in mutlaka pozitif bir doğal sayı olması gerektiğini düşünmesi.

Materyaller: Etkinliklerin yer aldığı çalışma kâğıtları

Süre: 20 ders saati

DERSİN İŞLENİŞİ

Derse giriş:

Öğrencilerden öncelikle verilen sözel durumlara ait cebirsel ifadeleri yazması istenir. Örneğin;

- Bir sayının 2 fazlası
- Bir sayının 5 eksiği
- Bir sayının (-5) fazlası
- Bir sayının (-7) eksiği
- Bir sayının 3 katının 5 fazlası
- Bir sayının 4 katının 3 eksiği
- Bir sayının (-2) katının 3 fazlası

Ardından verilen cebirsel ifadeler, eşitlik cümleleri ile kullanılarak bu eşitlik cümlelerini matematiksel sembollerle göstermeleri istenir.

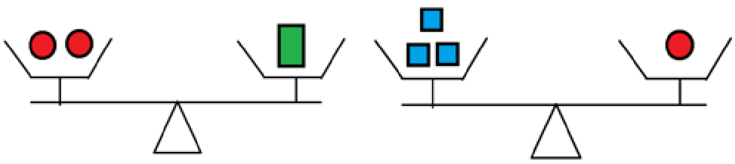
- Bir sayının 2 fazlası 10'a eşittir.
- Bir sayının 5 eksiği 23'e eşittir.
- Bir sayının (-5) fazlası 11'e eşittir.
- Bir sayının (-7) eksiği 13'e eşittir.
- Bir sayının 3 katının 5 fazlası 20'ye eşittir.
- Bir sayının 4 katının 3 eksiği 17'ye eşittir.
- Bir sayının (-2) katının 3 fazlası 28'e eşittir.

Farklı olarak;

- Bir sayının 3 fazlasının 4 katı 32'ye eşittir.
- Bir sayının 4 eksiğinin 5 katı 35'e eşittir.
- Bir sayının 2 katının 5 fazlası aynı sayının 23 katının 7 eksiğine eşittir.
- Bir sayının 2 fazlasının 3 katı aynı sayının 2 katının 8 eksiğine eşittir.

DERS:

ETKİNLİK 1:

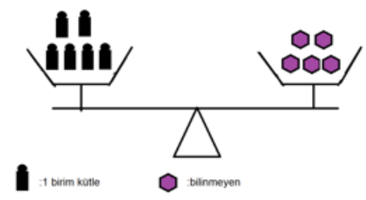


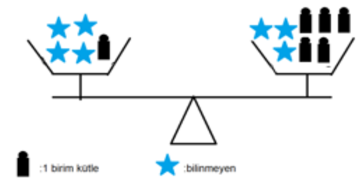
Yukarıda denge durumunda verilen terazilerin kefelerinde bulunan cisimlerden en hafif ve en ağır olanlarını bulunuz nedenlerini açıklayınız.

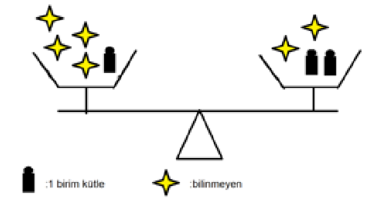
....

ETKİNLİK 2:

Aşağıda terazi modelleri ile temsil edilen eşitliklerde bulunan bilinmeyenleri bulmaya yönelik denklemleri yandaki boşluklara yazınız.Eşitliklerdeki bilinmeyenleri bulunuz.







ETKİNLİK 3:

Bir ev hanımı elindeki malzemeleri kullanarak türlü yemeği yapmak istemektedir. Yapacağı yemeğin tarifi şu şekildedir;

- Bir miktar yemeklik kuşbaşı et
- Kuşbaşı et miktarının 3 katı kadar patates
- Kuşbaşı et miktarının 2 katının 150 gram fazlası kadar patlıcan
- Kuşbaşı et miktarının 4 katı kadar su
- Kuşbaşı et miktarının 250 gram eksiği kadar baharat
- 200 gram kadar havuç

Yukarıdaki tarife göre hazırlanan yemeğin toplam ağırlığı 4500 gram olduğuna göre tarifte kullanılan malzemelerin her birinin ağırlığı ne kadar olmalıdır? Denklem kurarak çözünüz.

ETKİNLİK 4:

Ali, Hasan ve Murat adlı üç kardeş annelerine marketten aldıkları malzemeleri taşımada yardım etmektedir. Anneleri şeffaf poşetlerde ağırlıkları birbirine eşit olan 6 paket toz şeker, 3 kg ağırlığına un, 4 kg ağılığında domates ve 0,5 kg ağırlığında tuz almıştır.

- Ali 2 poşet şeker ve 3 kg ağırlığındaki unu taşımaktadır.
- Hasan 1 poşet şeker ve 4 kg ağırlığındaki domatesleri taşımaktadır.
- Murat 3 poşet şeker ve 0,5 kg ağırlığındaki tuzu taşımaktadır.

Ali marketten çıkmadan kendi taşıyacağı bütün malzemeleri tarttığında 7 kg olduğunu görmüştür. Bu bilgilere göre;

a) Bir şeker poşetinin ağırlığını denklem kurarak bulunuz.

b) Hasan ve Murat'ın taşıdıkları malzemelerin ağırlığını denklem kurarak bulunuz.

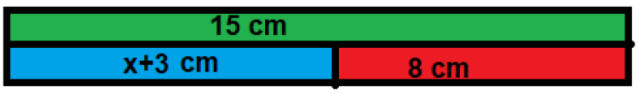
c) Bu üç kardeşin taşımış oldukları malzemelerin toplam ağırlığını bulunuz.

d) Bu üç kardeşin taşıdıkları malzemelerin ağırlıklarını karşılaştırınız.

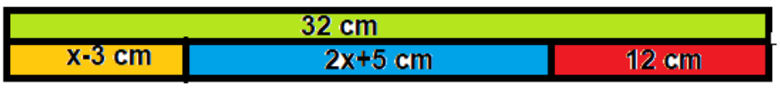
ETKİNLİK 5:

Aşağıda bazı uzunlukları verilen çubuklarda verilmeyen uzunlukları bulunuz.

a)



b)



ETKİNLİK 6:

Aşağıdaki denklemleri çözünüz.

a) $-x+6=-12$

b) $3x+8=26$

c) $6(x+5)=48$

d) $3(x+2)=5(x-2)$

e) $5(x-8)=3x-6$

f) $\frac{3x}{5}-4=2$

g) $\frac{x-3}{5}=7$

h) $3.(3x-6)-7=20$

TEKRAR ÖĞRETİM DERSLERİ:

ETKİNLİK 1:

Verilen denklemlerin çözümlerini inceleyiniz. Denklem çözümlerinde uygulanan işlem basamaklarının yanına yazılan boşlukları doldurunuz.

$3.(x-5)=18$

$3.x-3.5=18$ (……………. özelliğini uygulayalım.)

$3x-15=18$

$3x-\cancel{15}+\cancel{15}=18+15$ (eşitliğin her iki tarafına …………….)

$3x=33$

$\frac{\cancel{3}x}{\cancel{3}}=\frac{33}{3}$ (eşitliğin her iki tarafını ……………..)

$x=11$

$3.(x+5)=5(x-3)$

$3.x+3.5=5.x-5.3$ (………….. özelliğini uygulayalım.)

$3x+15=5x-15$

$3x-5x=-15-15$ (sayı veya değişkenler eşitliğin diğer tarafına ………………. geçer.)

$-2x=-30$

$\frac{\cancel{-2}x}{\cancel{-2}}=\frac{-30}{-2}$ (eşitliğin her iki tarafını ……………..)

$x=15$

ETKİNLİK 2:

Aşağıdaki denklemleri her iki tarafa aynı işlemleri uygulayarak çözünüz. İşlem basamakları sırasında uyguladığınız işlemleri belirtiniz.

a) 4x-3=13
b) 3a+4=2a+8
c) 2.(m+3)=12
d) 3.(x-2)+5=26

ETKİNLİK 4:

Kerem'in kumbarasında 50 kuruşluk ve 25 kuruşluk toplam 20 tane madeni para vardır. Kumbaradaki paraların toplamı 600 kuruş olduğuna göre kaç tane 50 kuruş vardır? Probleme ait uygun denklemi kurarak çözünüz.

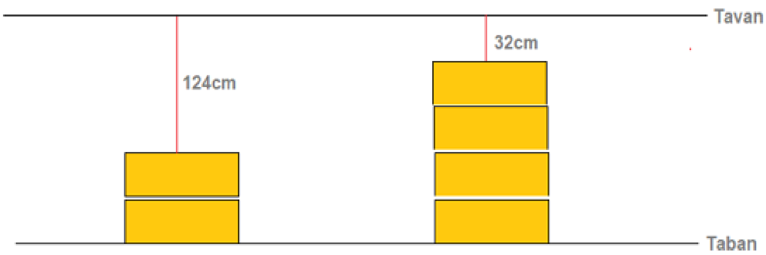
ETKİNLİK 6:

Sinemaya giden 8 arkadaştan ikisi yanlarına para almayı unuttukları için diğer arkadaşları onların yerine 4 TL fazla para vererek biletleri almışlardı. Buna göre bir sinema biletinin fiyatı ne kadardır? Probleme ait uygun denklemi kurarak çözünüz.

ETKİNLİK 5:

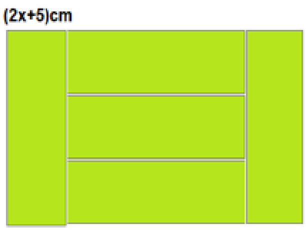
İrem 210 sayfalık bir kitabı her gün bir önceki günden 20 sayfa fazla okuyarak üç günde bitirmiştir. Buna göre İrem üçüncü gün kaç sayfa kitap okumuştur? Probleme ait uygun denklemi kurarak çözünüz.

ETKİNLİK 7:



Bir depoda şekilde gösterildiği gibi üst üste 2 koli yerleştirildiğinde en üsteki koli ile tavan arasında 124 cm, dört koli yerleştirildiğinde ise 32 cm boşluk kalmaktadır. Buna göre bir kolinin yüksekliği nedir? Probleme ait uygun denklemi kurarak çözünüz.

ETKİNLİK 8:

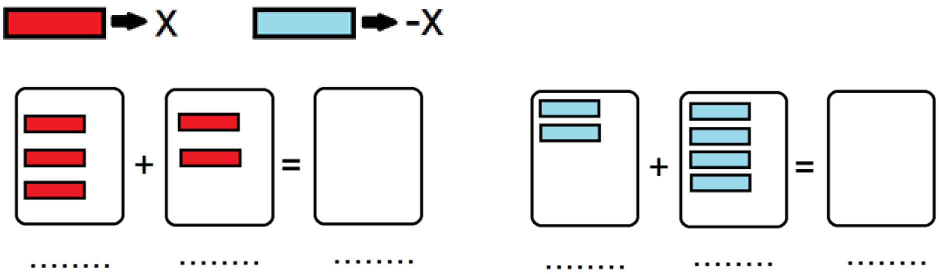


Şekilde gösterildiği gibi kısa kenarının uzunluğu 2x+5 cm olan beş eş dikdörtgenin aralarında boşluk kalmadan birleştirilmesi ile oluşan büyük dikdörtgenin çevresi 240 santimetredir. Buna göre x kaç santimetredir?

EK 3: Klinik Görüşme Soruları

Birinci Öğretim Etabına Ait Ön Klinik Görüşme Soruları

1.Aşağıdaki cebir karolarıyla modellenen toplama işlemlerini yapınız.



2.Aşağıda yazan terimlerden 2a ile benzer olan terimleri işaretleyiniz.

3a	2ab
2x	$2a^2$
-5a	-3ba
$\frac{7a}{5}$	$\frac{-a}{2}$

3.Aşağıdaki toplama ve çıkarma işlemlerini yapınız.

2a+4a+5a= (3a+4)+(4a+2)=

5a-3a= (4a+7)-(2a+3)=

4.Cebirsel ifadelerde toplama ve çıkarma işlemlerinde karşılaşacağımız 2a+3b ve 7a-3b ifadelerinin sonuçları nelerdir? Açıklayınız ve düşüncenizi ifade ediniz.

5.Aşağıda sözel olarak ifade edilen cebirsel ifadelerle çarpma ve bölme işlemlerinin sonuçlarını bulunuz.

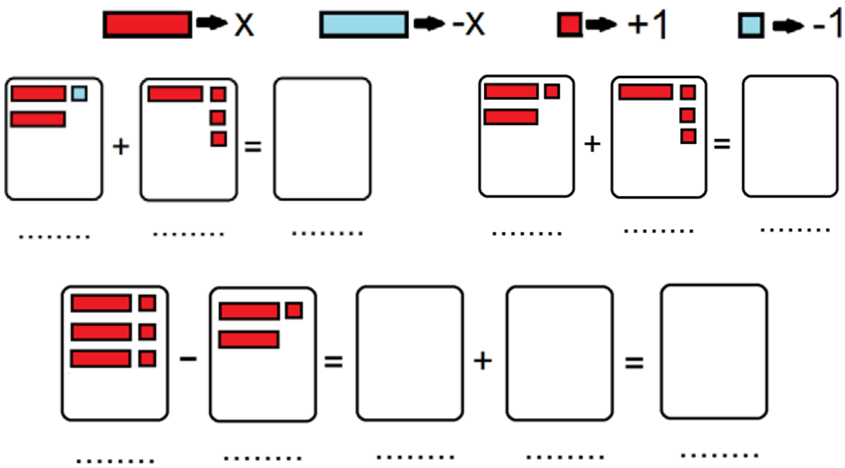
2a'nın 4 katı	
3a'nın (-2) katı	
6a'nın üçte biri	
-8a'nın yarısı	

6.Aşağıda verilen cebirsel ifadelerle çarpma işlemlerini yapınız.

2.(3a+5)= (2a-2).3=

Birinci Öğretim Etabına Ait Ara Klinik Görüşme Soruları

1.Aşağıdaki cebir karolarıyla modellenen toplama ve çıkarma işlemlerini yapınız.



2.Aşağıda verilen cebirsel ifadelerle toplama ve çıkarma işlemlerini yapınız.

(2a+5)+(4a-3)= (5a+6)-(3a+2)=

(4+5a)+(7a-2)= (6a-3)-(2a+2)=

3. x bir sayı olmak üzere bu sayının iki katının 3 fazlası ile bu sayının 3 katının iki fazlasının toplamını veren cebirsel ifadeyi yazınız.

4.Aşağıdaki cebirsel ifadelerle çarpma ve bölme işlemlerinin sonuçlarını yazınız.

(5a+4).3= -4(2a-5)=

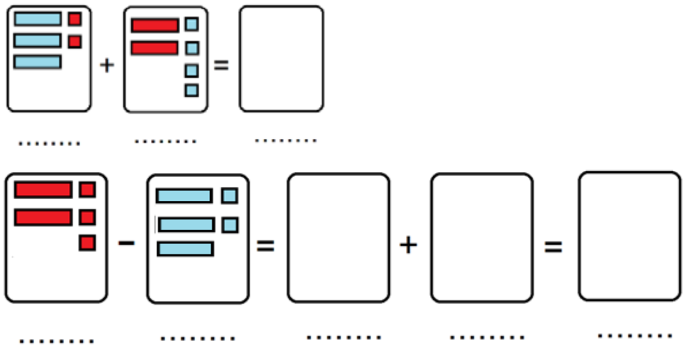
5.Aşağıda verilen sözel ifadelere ait cebirsel ifadeleri yanlarına yazınız.

Bir kenarının uzunluğu 2a+5 santimetre olan bir karenin çevresi:

Çevresi 9b-24 santimetre olan eşkenar üçgenin bir kenar uzunluğu:

Birinci Öğretim Etabına Ait Son Klinik Görüşme Soruları

1.Aşağıdaki cebir karolarıyla modellenen toplama ve çıkarma işlemlerini yapınız.



2.Aşağıda verilen cebirsel ifadelerin toplama ve çıkarma işlemlerini yaparak en sade hallerini yazınız.

7x-5x+8x-x=

-3x+8+7x-9=

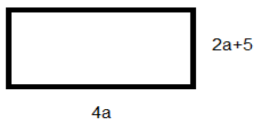
5b-(4b-3)=

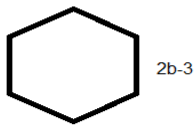
(3c-4)-(-4b-7)=

$4x^2$+5x-x^2=

2ab+a-ab+3a=

3.Aşağıda verilen şekillerin çevre uzunluklarını hesaplayınız.

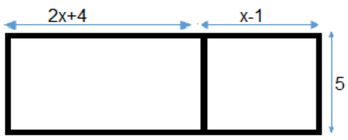




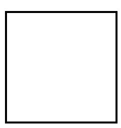
dikdörtgenin çevresi=

düzgün altıgenin çevresi=

4.Aşağıda yan yana iki dikdörtgen verilmiştir. Bu dikdörtgenlerin alanları toplamını veren cebirsel ifadeyi yazınız.



5.Aşağıda çevre uzunluğu verilen karenin bir kenarının uzunluğunu cebirsel ifade ile gösteriniz.



çevre=8a-12b+24

Karenin bir kenarı=

İkinci Öğretim Etabına Ait Ön Klinik Görüşme Soruları

1.Üçgenlerle oluşturulmuş bir şekil örüntüsünün ilk üç adımı verilmiştir.

Bu şekil örüntüsünün 6. Adımında kaç üçgen vardır?

Örüntünün ilerlemesi hakkında ne düşünüyorsunuz?

Bu örüntüde istediğimiz bir adımdaki üçgen sayısını bulabilir miyiz?

Bu örüntüdeki kuralı bulabilir misin?

2. Aşağıda verilen sayı örüntüsü ile ilgili sorulan soruları cevaplayınız.

2	6	10	14	18			
1.adım	2adım	3.adım	4.adım	5.adım	6.adım	7.adım	8.adım

Örüntünün 6, 7 ve 8. adımlarında yazılması gereken sayıları bulunuz.

Örüntüde 30. adıma hangi sayı gelmelidir?

Örüntünün kuralını sözel olarak ifade ediniz.

3. Aşağıda verilen örüntülerde eksik bırakılan yerleri doldurunuz.

3, 6, 9, __, 15, 18, … 8, 11, 14, __, 20, …

4, 9, __, 19, 24, … 90, 85, 80, __, 70, …

4. Aşağıda verilen sayı örüntülerinin kuralını harfli ifadeleri kullanarak yazınız.

5, 10, 15, 20, 25, … Kural:

8, 13, 18, 23, 28, … Kural:

4, 8, 12, 16, 20, … Kural:

2, 6, 10, 14, 18, … Kural:

5. Kuralı harfli ifadelerle verilen örüntülerin ilk beş adımını yazınız.

4n: , , , ,

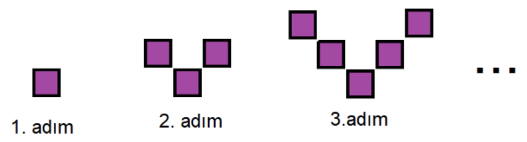
3n+1: , , , ,

5n-2: , , , ,

-2n: , , , ,

İkinci Öğretim Etabına Ait Ara Klinik Görüşme Soruları

1. Aşağıda karelerle oluşturulmuş bir şekil örüntüsü verilmiştir. Bu örüntüye ait soruları cevaplayınız.



Örüntünün 4. adımını çiziniz

Verilen şekil örüntüsünün ilk 6. adımında oluşan kare sayılarını yazınız.

Bu şekil örüntüsünün 50. ve 100. adımlarında oluşan kare sayısını yazınız.

2. Örüntünün adım sayısı ve kare sayısı arasındaki ilişkiden yararlanarak kuralını yazınız.

Örüntünün kuralını harfli ifadelerden yararlanarak yazınız.

3. Aşağıda verilen örüntülerde eksik bırakılan adımları tamamlayınız.

2, 4, 6, __, 10, 12, … 3, 5, __, 9, 11, 13, …

81, 72, __, 54, 45, … 100, 97, 94, __, 88, 85, …

4. Aşağıda verilen örüntülerin kurallarını harfli ifadelerden yararlanarak yazınız.

4, 8, 12, 16, 20, … Kural:

5, 15, 25, 35, … Kural:

-5, -10, -15, -20, … Kural:

4, 9, 14, 19, 24, … Kural:

5. Aşağıda kuralı verilen sayı örüntülerinin ilk beş adımını yazınız.

4n+1: , , , ,

3n-2: , , , ,

50-5n: , , , ,

-3n: , , , ,

6. Aşağıda kuralı verilen sayı örüntülerinin istenilen adımlarını bulunuz.

4n+20 sayı örüntüsünün 60. adımı:

5n-4 sayı örüntüsünün 50. adımı:

-4n+2 sayı örüntüsünün 30. adımı:

90-2n sayı örüntüsünün 10. adımı:

İkinci Öğretim Etabına Ait Son Klinik Görüşme Soruları

1. Aşağıda ilk üç adımı verilen şekil örüntüsünün,

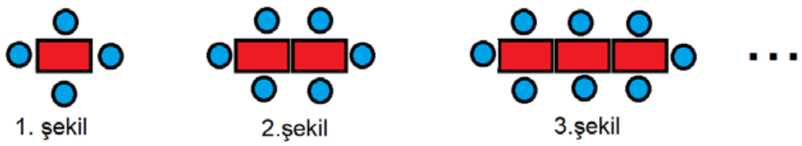
Örüntünün 4. adımında kaç gülen yüz olmalıdır?

Örüntünün 20. ve 30. adımında kaçar tane gülen yüz olmalıdır?

Örüntünün kuralını sözel olarak açıklayınız.

Örüntünün kuralını cebirsel olarak harflerle ifade ediniz.

2. Aşağıda masalar ve bu masaların etrafına yerleştirilen sandalyeleri gösteren şekil örüntüsü verilmiştir.



Bu şekil örüntüsünde yan yana dizilen 4 masanın etrafına yerleşecek sandalye sayısı nedir?

Masa sayısı ile sandalye sayısı arasındaki ilişkiyi gösteren tabloyu doldurup kuralını bulunuz.

Masa sayısı	Sandalye sayısı
1	
2	
3	
4	
5	

Kural:

Bu kurala göre yan yana 50 masa dizilirse etrafına kaç sandalye yerleşebilir?

3. Aşağıda verilen örüntülerin kurallarını harfli ifadelerden yararlanarak yazınız.

3, 5, 7, 9, 11, … Kural: -2, 3, 8, 13, 18, … Kural:

-4, -8, -12, -16, -20, … Kural: 20, 17, 14, 11, 8, … Kural:

4. Aşağıda kuralı verilen sayı örüntülerinin istenilen adımlarını bulunuz.

5n+23 sayı örüntüsünün 60. adımı: 70-4n sayı örüntüsünün 20. adımı:

7n-5 sayı örüntüsünün 50. adımı: -3n+-2 sayı örüntüsünün 30. adımı:

5. Kuralı 2n +3 olan bir örüntünün adım sayısı ile adımda karşılaşılan sayı arasındaki ilişkiyi ifade ediniz.

Üçüncü Öğretim Etabına Ait Ön Klinik Görüşme Soruları

1. Aşağıdaki ifadelerden doğru olanların başına D, yanlış olanların başına Y yazınız.

( ) 7+5=5+7	( ) 4.(5+7)=4.5+4.7
( ) 8+7=12+3	( ) 4.(3+5)=48:2
( ) 21-5=20-7	( ) 6+(25:5)= (2.6)-1
( ) 2.7=12+2	( ) 3+4+5 = 144:12
( ) 12.6=68+6	( ) 4.(8-5)=4.8+4.5
( ) 48:12=60:6 -5	( ) 81+24=83+26

2. Aşağıdaki boşluklara gelebilecek sayıları yazınız.

□+5=5+7	3.8=□+□+□
15+7=16+□	4.6=(3.7)+□
88-12=□-14	(5.8) -□= 17+6
□=25-17	3.(5+7)=3.□+3.7
57+63=48+35+□	□+□=□+□
3.14=□.7	□- □=□-□
42:6=21:□	□+=□-□

3. Aşağıdaki soruları cevaplayınız.

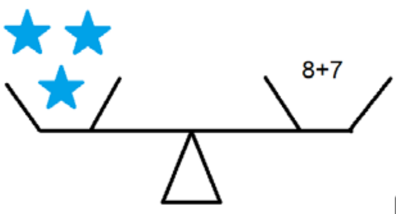
Eşit kollu bir terazinin iki kefesinde de 6 kilogramlık cisim bulunursa terazi dengede midir?

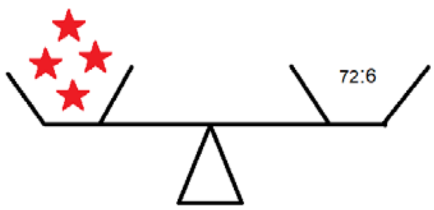
Bu terazinin iki kefesine de 4'er kilogramlık cisimler eklersek terazi yine dengede midir?

Teraziyi dengelemek için başka neler yapılabilir? Örnek veriniz.

Eşit işaretinin anlamı nedir? Eşit işareti hangi durumlarda kullanılır? Açıklayınız.

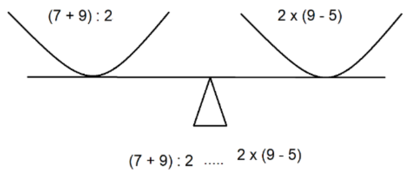
4. Aşağıdaki terazi modelinde terazinin dengede kalabilmesi için yıldızlar yerine hangi sayılar yazılmalıdır?





Üçüncü Öğretim Etabına Ait Ara Klinik Görüşme Soruları

1. Aşağıdaki terazi görselinde işlemlerin sonucu kadar birim kütle kefelere konulduğundaki terazinin konumu hakkındaki görüşünüzü yazınız.



Eğik ....
Dengede ....

2. Bir terazinin dengede olabilmesi için terazinin kefelerine konulması gereken kütlelerin nasıl olması gerekmektedir? Bir örnek durumla açıklayınız.

3. Aşağıda verilen durumların hangisinde eşitlik söz konusudur? Eşit sembolü kullanarak belirtiniz. Eşitliğin söz konusu olmadığı durumlarda "<" veya ">" sembolleri kullanınız.

4.(6+7) … 4.6+4.7   28-(5.3) … 4+(5.6)

7.4+5 … 35-2   (13-6).2 … (25:5)+9

85+8 …87+6   (44:11)+7….(36:4) -3

4. Aşağıdaki eşitliklerin sağlanabilmesi için boşluklara gelmesi gereken sayıları yazınız.

□=9-5   24+23+37= □- 17

7-□=8-3   3x14 =□: 2

3x□ =6 x 8   7 +32 = 45 -□

(4 x 5) - 6 =2 x □   4.(4+5) =4.4+4.□

7 + 8 = □ - 3   8+7 =□+0

5. Başlangıçta denge durumunda olan bir terazinin,

Her iki kefesine de başlangıçtaki kütlerinin iki katı kadar kütle eklenirse denge durumu nasıl değişir?

Her iki kefeye de başlangıçtaki kütlelerin üzerine 5 kilogramlık cisimler eklenirse denge durumu nasıl değişir?

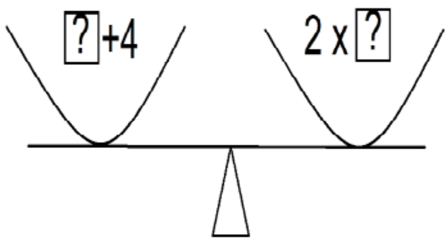
Başlangıçtaki kütlelerin üzerine sağ kefeye 4 kilogramlık sol kefeye ise 3 kilogramlık cisim eklenirse denge durumu nasıl değişir?

Üçüncü Öğretim Etabına Ait Son Klinik Görüşme Soruları

1. Aşağıdaki ifadelerden doğru olanların başına D, yanlış olanların başına Y yazınız.

( ) 974-289=964-279	( ) 72: 12=36:24
( ) 8.(5+7)=8.5+7	( )47+68=48+67
( ) 5x96=10x48	( ) 45+73=43+75

2. Aşağıdaki terazi modelinde kefelerde değeri verilmeyen kutular birbiri ile eştir. Terazinin istenilen konumda olabilmesi için kutulara yazabileceğiniz sayılara örnekler veriniz. Bu durumları “=”, “<” , “>” sembolleri ile ifade ediniz.



Terazinin sol kefesinin aşağıda olması için; □+4 … 2 x □

Terazinin kefelerinin dengede olması için; □+4 … 2 x □

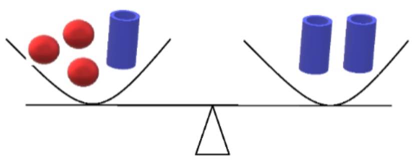
Terazinin sağ kefesinin aşağıda olması için; □+4 … 2 x □

Aşağıdaki eşitlik cümlelerini eşitliği bozmayacak şekilde doldurunuz.

___+___= ___+ ___   ___-___=___-___   ___+___=___-___

___x___=___x___   ___:___=___:___   ___x___=___:___

3. Terazinin kefelerinde bulunan silidirler aynı ağırlıktadır. Terazinin sol kefesinde bulunan topların ağırlıkları da birbiri ile aynıdır. Bu bilgilere göre silindirin ağılığı ile topun ağırlığı hakkında sahip olduğunuz ilişkiyi açıklayınız.



4. Aşağıdaki eşitliklerin sağlanabilmesi için boşluklara gelmesi gereken sayıları yazınız.

354+123=□ +125	4 x □ =8 x16
12+13+25=□ – 15	64: 4 =32 :□
30 x 25=6 x	52 – 14=55-□
46+23=48+□	(7+9).6=7.6+6.□

Dördüncü Öğretim Etabına Ait Ön Klinik Görüşme Soruları

1. Aşağıda verilen sözel ifadelere ait denklemleri yazınız.

Bir sayının beş fazlası dokuza eşittir.

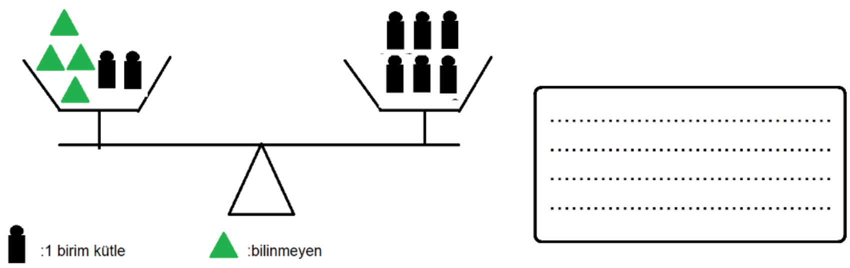
Bir sayının iki eksiği on üçe eşittir.

Bir sayının üç katı on beşe eşittir.

Bir sayının yarısı sekizdir.

Bir sayının iki katının bir fazlası dokuza eşittir.

2. Aşağıda terazi modeli ile temsil edilen eşitlikte bulunan bilinmeyeni bulmaya yönelik denklemi yandaki boşluğa yazınız. Eşitlikteki bilinmeyeni bulunuz.



3. Aşağıda verilen denklemlerde bilinmeyen değerleri bulunuz.

a + 5 = 8	2x =16
b – 3 = 7	3d= -12
c + c = 12	2k+1=7

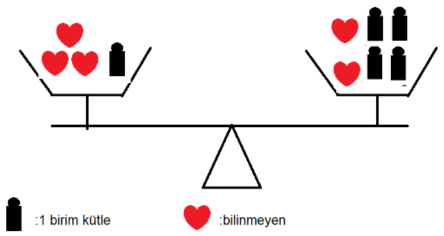
4. İki sayı toplamı 27'dir. Büyük sayı küçük sayının 5 fazlası ise bu sayılardan küçük olanını bulmaya yönelik denklemi kurunuz ve çözünüz.

5. Aşağıda verilen denklemlerde bilinmeyen değerleri bulunuz.

x +8 =2x – 3	3a=2a +8
b + 8 +5 = 2b	15 =c + 9

Dördüncü Öğretim Etabına Ait Ara Klinik Görüşme Soruları

1. Aşağıda terazi modeli ile temsil edilen eşitlikte bulunan bilinmeyeni bulmaya yönelik denklemi yandaki boşluğa yazınız. Eşitlikteki bilinmeyeni bulunuz.



....
....
....
....

2. Aşağıda verilen sözel ifadelere ait denklemleri yazınız.

Bir sayının iki fazlası aynı sayının iki katının üç eksiğine eşittir.

Bir sayının sekiz fazlası aynı sayının iki katına eşittir.

Bir sayının dört eksiğinin beş katı yirmi beşe eşittir.

Hangi sayının on iki fazlasının dört katı seksen sekizdir?

Hangi sayının beş fazlasının beş katı -20'dir?

3. Aşağıda verilen denklemlerde bilinmeyen değerleri bulunuz.

x+5 =3x– 7	3.(x– 6)=2(x+4)
2.(x+5)=26	4.(x-3) – 2(x – 5)=0

4. Çevre uzunluğu 230 metre olan dikdörtgen şeklindeki bir bahçenin uzun kenarı kısa kenarının 3 katından 15 metre daha kısadır. Buna göre bu bahçenin kısa kenarı kaç metredir? Uygun denklemi kurarak çözünüz.

5. Sekiz arkadaş birlikte sinemaya gidiyorlar. İki kişi para getirmeyi unuttukları için diğer arkadaşları onların yerine 4'er TL vererek arkadaşlarının biletini alıyorlar. Buna göre bir sinema bileti kaç TL'dir? Uygun denklemi kurarak çözünüz.

Dördüncü Öğretim Etabına Ait Son Klinik Görüşme Soruları

1. Aşağıda verilen sözel ifadelere ait denklemleri yazınız.

Hangi sayının beş katının on fazlası –20'dir?

Yarısının dört eksiği otuz olan sayı kaçtır?

Hangi sayının dört eksiğinin üç katı yirmi dörttür?

Hangi sayının beş katının dört eksiği, bu sayının iki katının on dört eksiğine eşittir?

Üç eksiğinin dört katı kendine eşit olan sayı nedir?

2. Bir sınıftaki öğrenciler sıralara ikişer ikişer oturtulurlarsa 16 öğrenci ayakta kalıyor. Üçer üçer oturtulurlarsa 2 sıra boş kalmaktadır. Buna göre bu sınıfta bulunan sıra sayısını denklem kurarak bulunuz.

3. Tanesi 2 TL ve 3 TL olan çikolatalardan 17 tane alan Kerem toplam 42 TL ödeme yapıyor. Buna göre 2 TL'lik çikolatalardan kaç tane aldığını denklem kurarak bulunuz.

4. Aşağıda verilen denklemlerde bilinmeyen değerleri bulunuz.

$2x+6-3x=x-8$ $\qquad$ $15-3x=x+3$

$2.(3x-4)=5x+3$ $\qquad$ $2.(1-x)+3.(x-2)=12$

EK 4: Kurumlardan Alınan İzinler

T.C.
ORDU ÜNİVERSİTESİ REKTÖRLÜĞÜ
Sosyal ve Beşeri Bilimler Araştırmaları Etik Kurulu

OTURUM TARİHİ	OTURUM SAYISI	KARAR SAYISI
25/11/2020	12	2020-91

KARAR NO: 2020-91

Doç. Dr. Meral CANSIZ AKTAŞ'ın "Tahmini Öğrenme Yol Haritalarına Dayalı Öğretim Deneyi ile 7. Sınıf Öğrencilerinin Cebir Öğrenme Süreçlerinin İncelenmesi" başlıklı çalışması etik yönden incelendi.

Doç. Dr. Meral CANSIZ AKTAŞ'ın "Tahmini Öğrenme Yol Haritalarına Dayalı Öğretim Deneyi ile 7. Sınıf Öğrencilerinin Cebir Öğrenme Süreçlerinin İncelenmesi" başlıklı çalışmasının etik yönden uygun olduğuna, toplantıya katılanların oy birliğiyle karar verildi.

ASLI GİBİDİR
25/11/2020

Dr. Öğr. Üyesi Hasan Hüseyin MUTLU
Başkan

T.C.
ORDU VALİLİĞİ
İl Millî Eğitim Müdürlüğü

Sayı : E.18802389-44-18647710 30.12.2020
Konu : Araştırma İzni
(Özgür Ulaş DEMİR)

VALİLİK MAKAMINA

İlgi :a)Milli Eğitim Bakanlığı Yenilik ve Eğitim Teknolojileri Genel Müdürlüğünün 21.01.2020 tarihli ve 1563890 sayılı yazısı (Genelge 2020/2)
b)Ordu Üniversitesi Rektörlüğü Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğünün 15.12.2020 tarihli ve 555007 sayılı yazısı.

Ordu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Anabilim Dalında kayıtlı 18521200019 numaralı tezli yüksek lisans Öğrencisi Özgür Ulaş ÖZGÜR'ün, Doç. Dr. Meral CANSIZ danışmanlığında yürütmüş olduğu "Tahmini Öğrenme Yol Haritalarına Dayalı Öğretim Deneyi ile 7.Sınıf Öğrencilerine Cebir Öğrenme Süreçlerinin İncelenmesi" konulu tezi ile ilgili bilimsel çalışmasına veri sağlamak amacıyla anket çalışması yapma izin talebine ilişkin ilgi (b) yazı ve ekleri, Müdürlüğümüz Araştırma Değerlendirme Komisyonu tarafından ilgi (a) genelge hükümleri doğrultusunda incelenmiş olup, uygulanmasında sakınca görülmemiştir.

Söz konusu anket çalışmasının, yüz yüze eğitim öğretime ara verilmesi göz önüne alınarak örgün eğitimin tam olarak başlaması ile birlikte rdu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Anabilim Dalında kayıtlı 18521200019 numaralı tezli yüksek lisans Öğrencisi Özgür Ulaş ÖZGÜR tarafından; eğitim öğretim faaliyetlerini aksatmamak, uygulamalarda olur ekinde yer alan imzalı ve mühürlü formun kullanılması, öğrencilere ait çalışmaların veli izni doğrultusunda ve elde edilen verilerin herhangi bir haber, resmi özel web sayfaları, yerel ve ulusal basında paylaşılmaması kaydıyla, İlimiz genelindeki resmi ve özel ilkokul öğrencilerine 2020-2021 Eğitim ve Öğretim Yılı içerisinde okul ve kurum müdürlüğünün sorumluluğunda gönüllülük esasına göre uygulanması Müdürlüğümüzce uygun görülmektedir.

Makamlarınızca da uygun görülmesi halinde Olur 'larınıza arz ederim.

Musa GÖZÜDİK
Şube Müdürü

Uygun görüşle arz ederim.

Olgun KÜÇÜK
Müdür a.
İl Millî Eğitim Müdür Yardımcısı

OLUR
30.12.2020

Mehmet Fatih VARGELOĞLU
Vali a.
İl Millî Eğitim Müdürü

Ek :Komisyon kontrol tutanağı ve anket formu (32 Sayfa)

Bu belge güvenli elektronik imza ile imzalanmıştır.
Adres : Saray Mah. Ulukonak Cd. No:5 PK.52089 Altınordu/ORDU
Belge Doğrulama Adresi : https://evraksorgu.meb.gov.tr
Bilgi için: Ayşe ÖZCANLI (Strateji Geliştirme Şube Müdürlüğü)
Unvan : Şef
Telefon No : 0 (452) 223 16 29
E-Posta: ab52@meb.gov.tr
Kep Adresi : meb@hs01.kep.tr
İnternet Adresi: ordu.meb.gov.tr Faks:4522250144

EK 5: Öğrenci ve Veli İzin Belgeleri

ORDU ÜNİVERSİTESİ

VELİ ONAY FORMU

Sevgili Anne/Baba,

Bu katıldığınız çalışma bilimsel bir araştırma olup, araştırmanın adı Tahmini Öğrenme Yol Haritalarına Dayalı Öğretim Deneyi ile 7.Sınıf Öğrencilerinin Cebir Öğrenme Süreçlerinin İncelenmesidir. Bu çalışma, Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi öğretim elemanlarından Doçent Doktor Meral CANSIZ AKTAŞ danışmanlığında Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Matematik Bölümü Yüksek Lisans öğrencisi Özgür Ulaş DEMİR tarafından yürütülen bir çalışmadır. Bu çalışmanın amacı öğrencilerin cebir konularında karşılaştıkları eşitlik, değişken, örüntü ve denklem kavramlarını öğrenirken matematiksel olarak nasıl düşündüklerini ortaya koymak ve bu kavramların öğretimini kolaylaştıracak araçları belirlemektir. Bu çalışmaya eğer çocuğunuz katılırsa çocuğunuzdan çalışma için 7. Sınıf matematik dersi kapsamında cebir ünitesinin öğretiminin yapıldığı 6 hafta boyunca (18 ocak 2020 ile 7 Mart 2021) yapılan etkinlikler zaman ayırması istenecektir. Araştırma belirtilen tarihlerde okulların açık olması durumunda yüz yüze, aksi durumunda online iletişim kanalları ile uzaktan eğitim esnasında yapılacaktır. Araştırmanın uygulanması esnasında öğrencilerin ses ve görüntü kayıtları alınarak veriler toplanacaktır. Bu çalışmada çocuğunuzdan çalışmalara aktif katılımı, çalışma kâğıtlarını not kaygısı olmaksızın doldurmaları sorulan soruları içtenlikle cevaplamaları, gerek duyduğunda öğrenci notları almaları ve bu notlarını araştırmacı ile paylaşmaları, gerek görüldüğü durumlarda klinik görüşmelere katılıp bu görüşmelerde içten cevaplar vermeleri beklenmektedir. Çocuğunuzun çalışmaya katılımının onun psikolojik gelişimine hiçbir olumsuz etkisi olmayacağından emin olabilirsiniz. Çalışmaya katılım tamamen gönüllülük esasına dayanmaktadır. Sizden izin istenildiği gibi çalışma öncesinde çocuğunuzun da sözel olarak rızası alınacaktır. Çocuğunuzun dolduracağı testlerde cevapları kesinlikle gizli tutulacak ve bu cevaplar sadece bilimsel araştırma amacıyla kullanılacaktır. Bu formu imzaladıktan sonra da çocuğunuz katılımcılıktan ayrılma hakkına sahip olacaktır.

Çocuğunuzun bu çalışmaya katılımı ile ilgili lütfen aşağıdaki seçeneklerden size uygun olanını imzalayıp çocuğunuzla birlikte okula gönderiniz.

Bu çalışmaya çocuğum………………..'un gönüllü olarak katılmasını kabul ediyorum.

Anne/Baba Ad Soyad	Tarih	İmza
…………….…………….……	…./…./20..	

BİLGİLENDİRİLMİŞ GÖNÜLLÜ OLUR FORMU

Bu katıldığınız çalışma bilimsel bir araştırma olup, araştırmanın adı Tahmini Öğrenme Yol Haritalarına Dayalı Öğretim Deneyi ile 7.Sınıf Öğrencilerinin Cebir Öğrenme Süreçlerinin İncelenmesidir. Bu çalışma, Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi öğretim elemanlarından Doçent Doktor Meral CANSIZ AKTAŞ danışmanlığında Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Matematik Bölümü Yüksek Lisans öğrencisi Özgür Ulaş DEMİR tarafından yürütülen bir çalışmadır. Bu çalışmanın amacı ortaokul 7. Sınıf öğrencilerinin tahmini yol haritalarına dayalı yürütülen bir öğretim sürecinde cebir konularında karşılaştıkları eşitlik, değişken, örüntü ve denklem kavramlarını öğrenirken matematiksel olarak nasıl düşündüklerini ortaya koymak ve bu kavramların öğretimini kolaylaştıracak araçları belirlemektir. Bu çalışmaya katılırsanız 7. Sınıf matematik dersi kapsamında cebir ünitesinin öğretiminin yapıldığı 6 hafta boyunca(18 Ocak 2020 ile 7 Mart 2021) yapılan etkinlikler zaman ayırması istenecektir. . Araştırma belirtilen tarihlerde okulların açık olması durumunda yüz yüze, aksi durumunda online iletişim kanalları ile uzaktan eğitim esnasında yapılacaktır. Araştırmanın uygulanması esnasında öğrencilerin ses ve görüntü kayıtları alınarak veriler toplanacaktır. Bu çalışmada sizden derslere aktif katılım, çalışma kâğıtlarını not kaygısı olmaksızın doldurmanız sorulan soruları içtenlikle cevaplamanız, gerek duyduğunda öğrenci notları almanız ve bu notlarını araştırmacı ile paylaşmanız, gerek görüldüğü durumlarda klinik görüşmelere katılıp bu görüşmelerde içten cevaplar vermeniz beklenmektedir. Çalışmaya katılım tamamen gönüllülük esasına dayanmaktadır. Sizden kimlik belirleyici hiçbir bilgi istenmeyecektir. Cevaplarınız tamamen gizli tutulacak ve sadece araştırmacılar tarafından değerlendirilecekti ve elde edilecek bilgiler bilimsel yayımlarda kullanılacaktır.

Çalışma, kişisel rahatsızlık verecek unsurlar içermemektedir. Ancak, çalışma sırasında sorulardan ya da herhangi bir nedenden ötürü kendinizi rahatsız hissederseniz çalışmayı yarıda bırakıp çıkmakta serbestsiniz. Çalışma sonunda, bu çalışmayla ilgili sorularınız cevaplanacaktır. Bu çalışmaya katıldığınız için şimdiden teşekkür ederiz. Çalışma hakkında daha fazla bilgi almak ve sorularınız için

ile iletişim kurabilirsiniz.

Bu çalışmaya tamamen gönüllü olarak katılıyorum ve istediğim zaman yarıda kesip çıkabileceğimi biliyorum. Verdiğim bilgilerin bilimsel amaçlı yayımlarda kullanılmasını kabul ediyorum. Ad-Soyad Tarih İmza

……….……………… …./…./20..

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler	
Adı Soyadı	ÖZGÜR ULAŞ DEMİR
Doğum Yeri	
Doğum Tarihi	
Uyruğu	■ T.C. ❒ Diğer:
Telefon	
E-Posta Adresi	

Eğitim Bilgileri	
Lisans	
Üniversite	Atatürk Üniversitesi
Fakülte	Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi
Bölümü	İlköğretim Matematik Öğretmenliği
Mezuniyet Yılı	08.06.2007

Yayınlar

Demir, ÖU. ve Cansız Aktaş, M., "8. Sınıf Öğrencilerinin Çoklu Temsiller Arasındaki Geçiş Becerileri: Doğrusal İlişki İçeren Durumlar Örneği" 4. Uluslararası Türk Bilgisayar ve Matematik Eğitimi (TÜRKBİLMAT-4) Sempozyumu, 2019.