



T.C.

ORDU ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**RASYONEL KÜBİKLERLE POZİTİF VERİLERİN KORUNMASI VE
SINIRLI VERİLERİN GÖRSELLEŞTİRİLMESİ**

KÜRŞAT ÇAKMAK

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

ORDU 2019

T.C.
ORDU ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

**RASYONEL KÜBİKLERLE POZİTİF VERİLERİN KORUNMASI VE
SINIRLI VERİLERİN GÖRSELLEŞTİRİLMESİ**

KÜRŞAT ÇAKMAK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ORDU 2019

TEZ ONAY

TEZ ONAY

Ordu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü öğrencisi **Kürşat ÇAKMAK** tarafından hazırlanan ve **Doç. Dr. Mehmet KORKMAZ** danışmanlığında yürütülen “**RASYONEL KÜBİKLERLE POZİTİF VERİLERİN KORUNMASI VE SINIRLI VERİLERİN GÖRSELLEŞTİRİLMESİ**” adlı tez çalışmasının savunma sınavı 23.12.2019 tarihinde yapılmış ve jüri tarafından oy birliği / oy çokluğu ile Ordu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü MATEMATİK ANABİLİM DALI YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

İmza

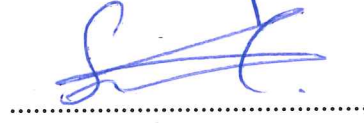
Danışman
Doç. Dr. Mehmet KORKMAZ



Üye
Prof. Dr. Selahattin MADEN
Matematik, Ordu Üniversitesi



Üye
Dr. Öğr. Üyesi Sercan TURHAN
Matematik, Giresun Üniversitesi



24 / 12 / 2019 tarihinde enstitüye teslim edilen bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulu'nun 30 / 12 / 2019 tarih ve 2019 / 782 sayılı kararı ile onaylanmıştır.



Enstitü Müdürü
Prof. Dr. Selahattin MADEN



TEZ BİLDİRİMİ

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.



İmza

Kürşat ÇAKMAK

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

RASYONEL KÜBİKLERLE POZİTİF VERİLERİN KORUNMASI VE SINIRLI VERİLERİN GÖRSELLEŞTİRİLMESİ

Kürşat ÇAKMAK

Ordu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ, 61 s.

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Mehmet KORKMAZ

Bu çalışma, veriler pozitif olduğunda grafiklerin gösterilmesine katkı sağlar. Burada verilerin görsel görüntüsünün düzgün ve tatmin edici görünmesini sağlayacak şekilde temsil edilmesi gerekir. Görsel görüntünün pozitifliği her yerde korunur ve hesaplama maliyeti ekonomiktir. A, C^1 parçalı rasyonel kübik fonksiyonu, genel formda, bu amaç için kullanılmıştır. Yöntem başlangıçta 1D verileri için uygulanır ve sonra dikdörtgen bir ızgara üzerinde düzenlenen veriler için enterpolasyonlu rasyonel bir kübik olmayan forma genişletilir. Pozitif verileri, pozitif eğriler ve yüzeyler formunda görselleştirmek için rasyonel fonksiyon tanımında serbest parametrelerde basit yeterli koşullar geliştirilmiştir. A, C^1 parçalı rasyonel kübik fonksiyonu en genellenen formu sınırlı eğrilerin görünümündeki sınırlı verilerin görselleştirilmesinde kullanılır. Rasyonel kübik fonksiyonu, rasyonel bikübik fonksiyonuna genişleyebilir. Yeterli kabul edilen veriler yüzeyi korumak için rasyonel bikübik fonksiyonun açıklamasındaki şekil parametrelerini şekillendirir. Ayrıca, iyi bir görsellik elde etmek için şekil üzerinde dört farklı parametreyi seçebiliriz. Bu tasarı sadece şekil korunmasını ve iyi görselleştirilmesini değil ayrıca ekonomik hesaplamayı da açıklar.

Anahtar Kelimeler: Pozitiflik, Görselleştirme, Sınırlandırılmış veri, Rasyonel kübikler, Rasyonel bikübikler, Rasyonel kübik fonksiyonu, Serbest parametreler

ABSTRACT

PROTECTION OF POSITIVE DATA WITH RATIONAL CUBICS AND VISUALIZING OF CONSTRAINED DATA

KÜRŞAT ÇAKMAK

Ordu University Institute of Natural and Applied Sciences

MATHEMATICS

Msc. Thesis, 61 p.

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Mehmet KORKMAZ

This study contributes to the display of graphs when the data is positive. Here the data must be represented in such a way that the visual appearance of the data appears smooth and satisfactory. The positivity of the visual image is maintained everywhere and the cost of calculation is economical. A, C^1 piecewise rational cubic function, in its most general form, has been utilized for this objective. The method is implemented for the 1D data initially and then it is extended to an interpolating rational bicubic form for the data arranged over a rectangular grid. Simple sufficient conditions are developed on the free parameters in the description of the rational function to visualize the positive data in the form of positive curves and surfaces. A, C^1 piecewise rational cubic function in its most generalized form has been used to visualize constrained data in the view of constrained curves. The rational cubic function is then extended to rational bicubic function. Data dependent sufficient conditions are developed on shape parameters in the description of rational bicubic function to preserve the shape of constrained data arranged over rectangular grid in the view of constrained surfaces. In addition, we can select four different parameters on the figure to get a good visuality. This scheme not only explains shape preservation and good visualization, but also economic calculation.

Anahtar Kelimeler: Positivity, Visualization, Constrained data, Rational cubics,
Rational bicubics, Rational cubic function, Free parameters

TEŞEKKÜR

Tüm çalıőmalarım boyunca her zaman bilgi ve deneyimleriyle yolumu aan, desteğini esirgemeyen değerli danışman hocam, Sayın Doç. Dr. Mehmet KORKMAZ'a ve Ordu Üniversitesi Fen Edebiyat Fakóltesi Matematik Bölümü öğretim üyelerine ve öğretim elemanlarına sonsuz teşekkür ve őükranlarımı sunarım.

Öğrenim hayatım boyunca gösterdikleri maddi, manevi destekleri ve fedakarlıkları ile her zaman benim yanımda olan annem ve babama teőekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
TEZ BİLDİRİMİ	I
ÖZET	II
ABSTRACT	III
TEŞEKKÜR	IV
İÇİNDEKİLER	V
ŞEKİL LİSTESİ	VI
ÇİZELGE LİSTESİ	VII
1.GİRİŞ	1
2. MATERYAL VE YÖNTEM	3
2.1 Rasyonel Kübik Fonksiyonu.....	3
2.1.1 Hermite Enterpolasyon Polinomları.....	4
2.1.2 Hermite Kübik Enterpolasyonu.....	5
2.1.3 Temel Fonksiyonları Kullanarak Genel Hermite Enterpolasyonu.....	8
2.1.4 Shepard Metodu.....	10
2.1.5 3D Enterpolasyonu.....	11
2.1.6 Bezier Eğrisi.....	12
2.1.7 B-spline.....	13
2.2 İki Değişkenli Açıklama.....	14
2.3 2D Sınırlandırılmış Verilerin Görselleştirilmesi.....	16
2.3.1 3D Sınırlandırılmış Verilerin Görselleştirilmesi.....	18
2.4 Pozitif Eğri Enterpolasyonu.....	27
2.4.1 Pozitif Yüzey Enterpolasyonu.....	29
3.ARAŞTIRMA BULGULARI	33
3.1 Sınırlı Verilerin Görselleştirilmesinde Sayısal Uygulamalar.....	32
3.2 Pozitif Verilerin Korunmasının Gösterimi.....	40
4. TARTIŞMA VE SONUÇ	48
5. KAYNAKLAR	50
ÖZGEÇMİŞ	51

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil 2.1 Değerlere karşılık gelen fonksiyonlar.....	4
Şekil 2.2 Fonksiyon ve türevinin veri noktalarının gösterimi.....	4
Şekil 2.3 Fonksiyon ve türev ilişkisinin grafiksel gösterimi.....	7
Şekil 2.4 Eğriye ait kontrol noktaları.....	12
Şekil 2.5 B-spline eğrisi.....	13
Şekil 3.1 Kübik Hermite Spline	32
Şekil 3.2 $r_i = w_i = 0.5$ iken rasyonel kübik fonksiyon	32
Şekil 3.3 $r_i = w_i = 0.25$ iken rasyonel kübik fonksiyon	33
Şekil 3.4 $r_i = w_i = 0.1$ iken rasyonel kübik fonksiyon	33
Şekil 3.5 Z tarafından oluşturulan yüzey.....	35
Şekil 3.6 11. Eşitlikteki $r_{i,j} = w_{i,j} = \hat{r}_{i,j} = \hat{w}_{i,j} = 1$ ve $u_{i,j} = v_{i,j} = \hat{u}_{i,j} = \hat{v}_{i,j} = 3$ için bikübik fonksiyon tarafından oluşturulan yüzey.....	35
Şekil 3.7 Şekil 3.6'nın rotasyonundan sonraki durum.....	36
Şekil 3.8 $r_{i,j} = w_{i,j} = \hat{r}_{i,j} = \hat{w}_{i,j} = 0.8$ için Bölüm 2.3.1'de geliştirilen şekil tarafından oluşturulan yüzey.....	37
Şekil 3.9 Şekil 3.8'in rotasyonundan sonra oluşan düzlem yüzeyin altındadır.....	37
Şekil 3.10 Kübik Hermite Fonksiyonu.....	38
Şekil 3.11 $r_i = w_i = 2$ olan pozitif rasyonel kübik spline.....	39
Şekil 3.12 $r_i = w_i = 1.6$ olan pozitif rasyonel kübik spline.....	39
Şekil 3.13 Kübik Hermite fonksiyon.....	40
Şekil 3.14 $r_i = w_i = 0.1$ olan pozitif rasyonel kübik spline.....	41
Şekil 3.15 $r_i = w_i = 0.5$ olan pozitif rasyonel fonksiyon.....	42
Şekil 3.16 Bikübik Hermite,denklemdaki (66) pozitif fonksiyondan alınan 3D veri kümesine yüzey oluşturur.....	43
Şekil 3.17 Döndürmeden sonra Şekil 3.7'deki bikübik Hermit yüzeyinin farklı bir görüntüsü.....	43
Şekil 3.18 $r_{i,j} = \hat{r}_1 = w_{i,j} = \hat{w}_{1,j} = 0.001$ olan pozitif rasyonel bikübik yüzey.....	44
Şekil 3.19 Bikübik Hermite, denklemdaki (67) pozitif fonksiyondan alınan 3D veri kümesine yüzey oluşturur.....	44
Şekil 3.20 $r_{i,j} = \hat{r}_1 = w_{i,j} = \hat{w}_{1,j} = 0.005$ olan pozitif rasyonel bikübik yüzey.....	45

ÇİZELGE LİSTESİ

	<u>Sayfa</u>
Çizelge 2.1 [0,1] aralığındaki fonksiyon ve türevleri.....	5
Çizelge 3.1 Şekil korunmasında verilerin değerler.....	33
Çizelge 3.2 Fonksiyondan oluşturulan bilgiler.....	36
Çizelge 3.3 Z düzlemi tarafından oluşturulan veriler ...	36
Çizelge 3.4 Pozitif Veriler.....	40
Çizelge 3.5 Bilinen NaOH hacminin pozitif verileri.....	42
Çizelge 3.6 Denklemden (66) pozitif bir fonksiyondan alınan bir 3D veri seti.....	44
Çizelge 3.7 Denklemden (67) pozitif bir fonksiyondan alınan bir 3D veri seti.....	45

1.GİRİŞ

Brodli ve ark. (1995)'nin son yıllarda yayımlanan çoğu çalışmaları, şekil üzerindeki eğrilerin ve yüzeylerin korunmasına odaklandı. Pozitiflik, önemli bir şekil özelliği haline geldi. Değerler pozitifken varlıklarının anlam kazandığı birçok durum mevcuttur. Örneğin; yayılma eğilimi gösteren grafiklerin gösterimi daima pozitiftir. Farklı bir örnek vermek istersek de nüfus grafiklerinde de benzer durum vardır. Kimyasal deneylerdeki gaz tahliyesinin grafiği de buna örnek olabilir. Pozitiflikle ilerlemek için enterpolasyon içeren üç boyutlu uygulamalar da vardır. Bu nedenle hesaplama işleminin ekonomik olması için pozitif enterpolasyonu tartışmak önemlidir. Farklı bilimsel problemlerde de görsel olarak bu durumu incelemek doğru olur.

Konunun bir kısmının pozitif olarak incelenmesi Hussain (2006) tarafından gösterildi. Schmidt ve Hess (1988) kübik polinomları kullandılar. Schmidt ve Hess (1988) enterpolasyonu pozitif hale getirmek için gerekli ve yeterli koşulları elde ederek kullandılar. Çalışmalarda yeterli koşullar verilerek tahmin edilen veri noktalarındaki eğimler, çalışmaların enterpolasyon algoritmalarının temelini oluşturur. Butt ve Brodli (1993)'nin tartışılan problemi, veri noktalarındaki eğimleri verildiğinde pozitiflik sorunun ortaya çıkmasıdır. Butt and Brodli (1993), çalışmalarındaki şekil inşasında kübik polinomları kullandılar, Safraz ve ark. (1994) da onlar gibi parçalı rasyonel kübik fonksiyonları kullanmıştı. Butt and Brodli (1993) algoritması gerektiğinde pozitif verilerin şeklini korumak için bir veya iki ekstra düğüm ekleyerek bu durumu çalıştılar. Safraz ve ark. (1994)'nin çalışmalarında kullanılan rasyonel fonksiyonun daha fazla aralığı küçülttüğümüzde istenen eğrileri üretmek için bir serbest parametresi vardır.

Sınırlı görselleştirme sorunu, Asim (2000)'in ortaya attığı pozitif veri görselleştirme sorunu için bir genelleştirmedir. Bu sorun genellikle verilerin karşılaştırmalı çalışmasında ortaya çıkmaktadır. Sınırlı yüzeyler, n negatif bir tamsayı olmak üzere aşağıdaki formda olabilir.

$$Z(x, y) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + b_n y^n + b_{n-1} y^{n-1} + c_n x^{n-1} y + \dots + c_0 x y^{n-1} + e,$$

Bu sınırlanmış yüzeyler verilerin alt veya üst sınırları olabilir. Burada $Z(x, y)$, $n = 1$ için alt sınır olarak kabul edilir.

Birçok yazar pozitif verilerin görselleştirilmesi problemini tartıştı, ancak sadece birkaçı sınırlı veri görselleştirmesine odaklandı. Kısa bir incelemeyi konuşursak, Asim ve Brodlie (2003), pozitiflik sorununu tartıştılar. Veri noktalarında verilen değerlere ve eğimlere bir eğri sığdırmak için parça parça kübik Hermite enterpolasyonunu kullandılar. Pozitifliğin kaybolduğu herhangi bir aralıkta parçalı kübik enterpolasyonunu görsel olarak tatmin edici bir eğriye dönüştürmek için iki eğri arasına ekstra düğümler ekleyerek bir eğri çizdiler. Brodlie ve ark. (1995), basit doğrusal kısıtlamalara tabi olan enterpolasyon sorununu ele aldılar. Dikdörtgen bir ağ üzerindeki verilerden parçalı bir bikübik fonksiyon olan $f(x, y)$ oluşturdular, öyle ki $f(x, y)$ pozitif olması gerekir. Pozitiflik için yeterli koşullar, ilk kısmi türevler, karışık kısmi türevler açısından türetilir. Bu koşullar pozitif bir enterpolasyon algoritmasının temelini oluşturur. Pozitiflik sorunu, lineer olarak sınırlandırılmış enterpolasyon durumunda genelleştirilir ve burada $f(x, y)$, x ve y 'nin lineer fonksiyonları olan sınırlar arasında olması gerekir. Brodlie ve ark. (2005), kısıtlı verileri görselleştirme yöntemini ortaya çıkardı. Pozitifliği korumak için herhangi bir boyutluluğun dağınık verilerini araştıran ikinci dereceden Shepard yöntemine genişlettiler. İkinci dereceden temel fonksiyonları pozitif olmaya zorladılar. Fonksiyonel verilerde olduğu gibi alt sınır 0 ve üst sınır 1 dahil diğer kısıtlama türlerini ele alma yöntemini genişlettiler. Ayrıca, genel aralık sınırlamaları için yöntemi genişleterek alt ve üst sınır olarak belirtilen herhangi iki fonksiyon arasında kalan bir enterpolasyon oluşturdular. Chan ve Ong (2001), dağınık veri aralığı için C^1 enterpolasyonunu kısıtlayan yerel bir şema tanımlamıştır. Enterpolasyon yüzeyi, üç kübik Bezier koordinatlarının birinci dereceden kısmi türevlerini değiştirerek elde ettiler. Chang ve Sederberg (1994), kübik Bezier üçgen yamalarını içeren enterpolasyon yüzeylerini inşa ettiler. Pozitifliğin korunmasını sağlamak için her üçgende Bezier kontrol ağının koordinatlarına yeterli koşullar getirdiler. Ayrıca yaptıkları çalışmada veri noktalarındaki türevlerin bu koşullarla tutarlı olduğunu belirttiler.

2. MATERYAL ve YÖNTEM

2.1 Rasyonel Kübik Fonksiyonu

Bu bölümde Safraz ve ark. (1994) tarafından başlangıçta geliştirilen çalışmada parçalı rasyonel kübik fonksiyonunu tanıtaacağız. $(x_i, f_i), i = 0, 1, 2, \dots, n$ belirli bir veri noktaları kümesi olmak üzere $x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n$ olsun. Bunu (1) denkleminde uygularsak

$$h_i = x_{i+1} - x_i, \Delta_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{h_i} \quad (1)$$

elde edilir.

Her bir aralıkta $I_i = [x_i, x_{i+1}]$, kübik formda tanımlayabildiğimiz bir rasyonel $S_i(x)$ fonksiyonu:

$$S_i(x) = \frac{p_i(\theta)}{q_i(\theta)} \quad (2)$$

ile

$$\begin{aligned} p_i(\theta) &= r_i f_i (1-\theta)^3 + (u_i f_i + h_i r_i d_i)(1-\theta)^2 \theta + (v_i f_{i+1} - h_i w_i d_{i+1})(1-\theta) \theta^2 + w_i f_{i+1} \theta^3, \\ q_i(\theta) &= r_i (1-\theta)^3 + u_i (1-\theta)^2 \theta + v_i (1-\theta) \theta^2 + w_i \theta^3, \end{aligned}$$

ve

$$\theta = \frac{x - x_i}{h_i}.$$

gösterilir.

(2) denklemi ile ifade edilen rasyonel kübik fonksiyonu

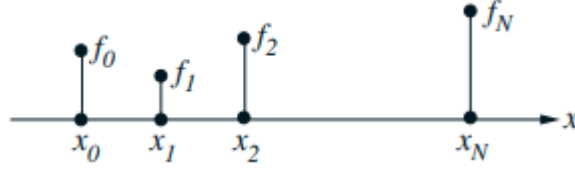
$$\left. \begin{aligned} S(x_i) &= f_i, S(x_{i+1}) = f_{i+1}, \\ S^{(1)}(x_i) &= d_i, S^{(1)}(x_{i+1}) = d_{i+1}. \end{aligned} \right\}$$

yukarıdaki özelliklere sahiptir. Burada $S^{(1)}$, x 'e göre birinci türevidir ve d_i , düğümlerdeki x_i noktasındaki (bazı yöntemlerle verilen veya tahmin edilen) türev değerlerini belirtir. $S(x) \in C^1[x_0, x_n]$, $[x_i, x_{i+1}]$ aralığında r_i, u_i, v_i, w_i gibi parametreleri bağımsızdır.

Her I_i aralığında, $r_i = w_i = 1$ ve $u_i = v_i = 3$ aldığımızda parçalı rasyonel kübik fonksiyonu standart kübik Hermite'e düşürülür. $r_i = w_i = 1$ ve $u_i = v_i = 3$ Safraz ve ark. (1994)'deki rasyonel kübiğin özel durumunu sağlar.

2.1.1 Hermite Enterpolasyon Polinomları

Hermite enterpolasyonu genel olarak Lagrange enterpolasyonu olarak da bilinir. Bu polinom Şekil 2.1'deki $N + 1$ verisine veya enterpolasyon noktalarına N . dereceden polinom şemalarını dikkate alalım.



Şekil 2.1 Değerlere karşılık gelen fonksiyonlar

Bu Lagrange enterpolasyon yöntemleri

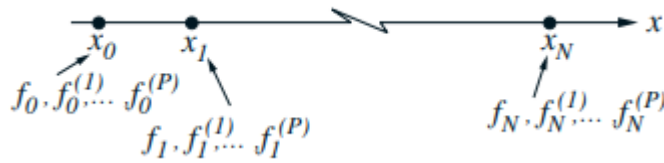
$$g(x) = \sum_{i=0}^N a_i x^i \Rightarrow$$

$$g(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_N x^N$$

şeklindedir. Enterpolasyon yapan polinomun veri noktalarındaki fonksiyon değerlerine eşit olmasını gerektiren

$$g(x_i) = f_i, \quad i = 0, N$$

şekilde veri noktalarının yerleştirilmesidir. Hermite Enterpolasyonu ise Şekil 2.2'de gösterildiği gibi fonksiyon ve türevlerini veri noktalarına göre düzenleyen bir enterpolasyon polinomdan üretilir.



Şekil 2.2 Fonksiyon ve türevinin veri noktalarının gösterimi

Bu polinomu üretirken

$$g(x_i) = f_i \quad i = 0, N \quad (N+1)$$

$$g^{(1)}(x_i) = f_i^{(1)} \quad i = 0, N \quad (N+1)$$

:

$$g^{(p)}(x_i) = f_i^{(p)} \quad i = 0, N \quad (N+1)$$

$N+1$ kısıtlmaya ihtiyacımız var. Böylece dereceli bir genel polinom oluşturmamız gerekir.

2.1.2 Hermite Kübik Enterpolasyonu

Çizelge 2.1'deki $[0,1]$ aralığı için fonksiyondan ve ilk türevinden geçen iki veri noktasından Hermite enterpolasyon fonksiyonu geliştirilir.

Çizelge 2.1 $[0,1]$ aralığındaki fonksiyon ve türevleri

	x	f	$f^{(1)}$
x_0	0	f_0	$f_0^{(1)}$
x_1	+1	f_1	$f_1^{(1)}$

Böylece $p = 1$ olduğunda ve $N + 1 = 2$ sınırlaması yapıldığında 3. Dereceden bir polinoma ihtiyaç duyarız.

3. dereceden bir polinom olan

$$g(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$$

$$g^{(1)}(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2$$

polinomuna sınırlama getirirsek

$$g(0) = f_0 \quad \Rightarrow \quad a_0 = f_0$$

$$g(1) = f_1 \quad \Rightarrow \quad a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = f_1$$

$$g^{(1)}(0) = f_0^{(1)} \quad \Rightarrow \quad a_1 = f_0^{(1)}$$

$$g^{(1)}(1) = f_1^{(1)} \quad \Rightarrow \quad a_1 + 2a_2 + 3a_3 = f_1^{(1)}$$

şeklinde olur. Ayrıca bu sınırlama denklemleri matris formunda

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_0^{(1)} \\ f_1^{(1)} \end{bmatrix}$$

yazılır ve a_0, a_1, a_2, a_3 için çözüm

$$a_0 = f_0$$

$$a_1 = f_0^{(1)}$$

$$a_2 = 3f_1 - 3f_0 - f_1^{(1)} - 2f_0^{(1)}$$

$$a_3 = -2f_1 + 2f_0 + f_0^{(1)} + f_1^{(1)}$$

şeklinde bulunur ve böylece

$$g(x) = f_0 + f_0^{(1)}x + (3f_1 - 3f_0 - f_1^{(1)} - 2f_0^{(1)})x^2 + (-2f_1 + 2f_0 + f_0^{(1)} + f_1^{(1)})x^3$$

elde edilir. Sınırlamaların yerine getirildiğinden emin olmak için $g(x)$ 'yi kontrol edersek:

$$g(0) = f_0$$

$$g(1) = f_1$$

$$g^{(1)}(0) = f_0^{(1)}$$

$$g^{(1)}(1) = f_1^{(1)}$$

olur. $g(x)$ 'in, fonksiyon ve türev değerlerin hesaba katıldığı şekilde yeniden yazdığımızda

$$g(x) = f_0(2x^3 - 3x^2 + 1) + f_1(-2x^3 + 3x^2) + f_0^{(1)}(x^3 - 2x^2 + x) + f_1^{(1)}(x^3 - x^2)$$

bu şekilde olur ve $g(x)$, genel formda

$$g(x) = f_0\alpha_0(x) + f_1\alpha_1(x) + f_0^{(1)}\beta_0(x) + f_1^{(1)}\beta_1(x)$$

bu şekilde ifade edilir.

$$\alpha_0(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$$

x_0 noktasındaki fonksiyonuyla ilişkili

$$\alpha_1(x) = -2x^3 + 3x^2$$

x_1 noktasındaki fonksiyonuyla ilişkili

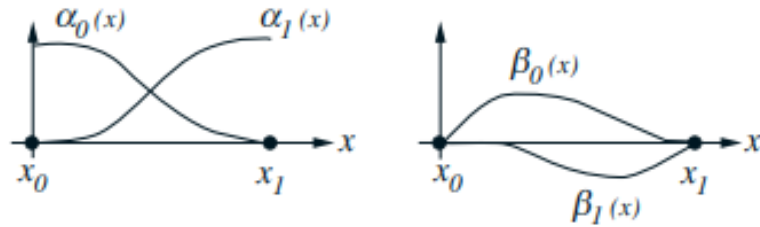
$$\beta_0(x) = x^3 - 2x^2 + x$$

x_0 noktasındaki birinci türeviyle ilişkili

$$\beta_1(x) = x^3 - x^2$$

x_1 noktasındaki birinci türeviyle ilişkili

şeklinde ifade edilir. Yukarıdaki ilişkiler Şekil 2.3'de Kübik Hermite temel fonksiyonu x 'e bağlı olarak



Şekil 2.3 Fonksiyon ve türev ilişkisinin grafiksel gösterimi

bu şekilde gösterilir.

2.1.3 Temel Fonksiyonları Kullanarak Genel Hermite Enterpolasyonu

Genel olarak, Hermite enterpolasyonu

$$g(x) = \sum_{i=0}^N \alpha_i(x)f_i + \sum_{i=0}^N \beta_i(x)f_i^{(1)} + \dots + \sum_{i=0}^N \theta_i(x)f_i^{(p)}$$

bu şekilde ayarlanabilir ve sınırlamaları yerine getirdiğimizde

$$g(x_j) = f_j \quad j = 0, N$$

$$g^{(1)}(x_j) = f_j^{(1)} \quad j = 0, N$$

$$\vdots$$

$$g^{(p)}(x_j) = f_j^{(p)} \quad j = 0, N$$

olur. Denklemleri düzenlersek

$$g(x_j) = f_j$$

$$\Rightarrow$$

$$\sum_{i=0}^N \alpha_i(x_j)f_i + \sum_{i=0}^N \beta_i(x_j)f_i^{(1)} + \dots + \sum_{i=0}^N \theta_i(x_j)f_i^{(p)} = f_j$$

elde edilir. Bu denklemlere sınırlama getirirsek

$$\alpha_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases} \quad i, j = 0, N$$

$$\beta_i(x_j) = 0 \quad i, j = 0, N$$

$$\vdots$$

$$\theta_i(x_j) = 0 \quad i, j = 0, N$$

olur. Denklemleri düzenlersek

$$g^{(1)}(x_j) = f_j^{(1)} \quad j = 0, N$$

\Rightarrow

$$\sum_{i=0}^N \alpha_i^{(1)}(x_j) f_i + \sum_{i=0}^N \beta_i^{(1)}(x_j) f_i^{(1)} + \dots + \sum_{i=0}^N \theta_i^{(1)}(x_j) f_i^{(p)} = f_j^{(1)}$$

elde edilir. Denklemleri düzenlersek

$$\alpha_i^{(1)}(x_j) = 0 \quad i, j = 0, N$$

$$\beta_i^{(1)}(x_j) = \delta_{ij} \quad i, j = 0, N$$

\vdots

$$\theta_i^{(1)}(x_j) = 0 \quad i, j = 0, N$$

olur ve p. dereceden türev koşulları

$$g^{(p)}(x_j) = f_j^{(p)} \quad j = 0, N$$

\Rightarrow

$$\sum_{i=0}^N \alpha_i^{(p)}(x_j) f_i + \sum_{i=0}^N \beta_i^{(p)}(x_j) f_i^{(1)} + \dots + \sum_{i=0}^N \theta_i^{(p)}(x_j) f_i^{(p)} = f_j^{(p)}$$

sağlanır. Denklemleri düzenlersek

$$\alpha_i^{(p)}(x_j) = 0 \quad i, j = 0, N$$

$$\beta_i^{(p)}(x_j) = 0 \quad i, j = 0, N$$

\vdots

$$\theta_i^{(p)}(x_j) = \delta_{ij} \quad i, j = 0, N$$

elde edilir. Her temel fonksiyon kümesi aşağıdaki genel forma sahiptir.

$$\alpha_i(x) = \sum_{j=0}^{(p+1)(N+1)-1} a_{ij}x^j \quad i = 0, N$$

$$\beta_i(x) = \sum_{j=0}^{(p+1)(N+1)-1} b_{ij}x^j \quad i = 0, N$$

$$\vdots$$

$$\theta_i(x) = \sum_{j=0}^{(p+1)(N+1)-1} t_{ij}x^j \quad i = 0, N$$

2.1.4 Shepard Metodu

Ters uzaklık ağırlıklı enterpolasyonun en basit şekli, ‘‘Shepard Metodu’’ (Shepard, 1968) olarak adlandırılır. Bu metotta kullanılan denklem

$$F(x, y) = \sum_{i=1}^n w_i f_i$$

şeklindedir. n , enterpolasyon için kullanılan noktaların sayısıdır, f_i noktalarda belirtilen fonksiyon değerleridir ve w_i her noktaya atanan ağırlık fonksiyonlarıdır. Ağırlık fonksiyonunun klasik olarak

$$w_i = \frac{h_i^{-p}}{\sum_{j=1}^n h_j^{-p}}$$

şeklindedir. Burada p , ağırlıklandırma üssü olarak adlandırılan ve pozitif olarak 2’ye ayarlanan keyfi bir pozitif gerçekte sayıdır. Ağırlıklandırma üssü, klasik ağırlık fonksiyonu olarak da kullanılabilir. h_i noktadan enterpolasyon konumuna uzaklığı

$$h_i = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}$$

ile ifade edilir. (x, y) , enterpolasyon konumunun koordinatlarıdır ve (x_i, y_i) her noktanın koordinatlarıdır. Ağırlık fonksiyonu, noktadaki uzaklık arttıkça noktadaki

ortalama değerinden sıfıra yaklaşan değer kadar değişir. Ağırlık fonksiyonları normalleştirilir, böylece ağırlıklar ortalama toplar.

Yukarıda gösterilen ağırlık fonksiyonu, ters mesafe ağırlıklı enterpolasyonda ağırlık fonksiyonunun klasik şekli olmasına rağmen, aşağıdaki denklem yüksek lisans ve doktora derslerinde kullanılır.

$$w_i = \frac{\left[\frac{R-h_i}{Rh_i}\right]^2}{\sum_{j=1}^n \left[\frac{R-h_j}{Rh_j}\right]^2}$$

h_i , enterpolasyon konumundan i noktasına olan mesafedir, R , enterpolasyon konumundan en uzak noktaya olan mesafedir ve n , toplam nokta sayısıdır. Bu denklemin klasik denklemden daha üstün sonuçlar verdiği tespit görülür.

Ağırlık fonksiyonu, Öklid mesafesinin bir fonksiyonudur ve her nokta etrafında radyal olarak simetriktir. Sonuç olarak, enterpolasyon yapan yüzey her nokta için biraz simetriktir ve noktalar arasındaki nokta verilerinin ortalama değerine doğru meyillidir. Shepard'ın metodu sadeliği nedeniyle yoğun bir şekilde kullanılmıştır.

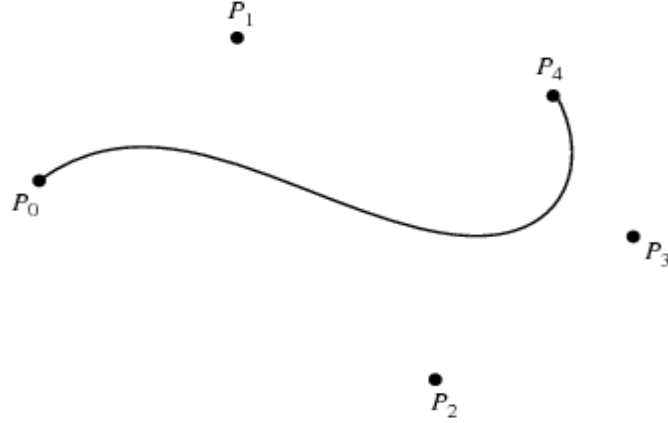
2.1.5 3D Enterpolasyonu

Shepard'ın Metodu için 3D denklemler, mesafelerin aşağıdakilerle hesaplaması haricinde 2D denklemlerle aynıdır.

$$h_i = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2}$$

(x, y, z) , enterpolasyon konumunun koordinatlarıdır ve (x_i, y_i, z_i) her noktanın koordinatlarıdır.

2.1.6 Bezier Eğrisi



Şekil 2.4 Eğriye ait kontrol noktaları

Bir $n + 1$ kontrol noktası Şekil 2.4'deki P_0, P_1, \dots, P_n seti göz önüne alındığında, karşılık gelen Bezier eğrisi (veya Bernstein-Bezier eğrisi)

$$\mathbf{C}(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{P}_i B_{i,n}(t),$$

şeklindedir ve burada $B_{i,n}(t)$ Bernstein polinomu ve $t \in [0,1]$. Bezier splineleri Wolfram Dilinde Bezier eğrileri olarak uygulanmaktadır.

Bir Bezier eğrisini rasyonel olarak tanımlarsak

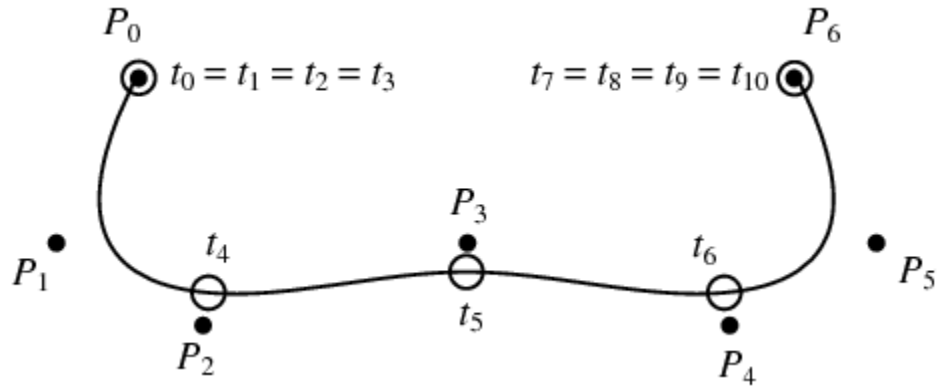
$$\mathbf{C}(t) = \frac{\sum_{i=0}^n B_{i,p}(t) w_i \mathbf{P}_i}{\sum_{i=0}^n B_{i,p}(t) w_i},$$

şeklindedir ve burada p sırası, $B_{i,p}$ Bernstein polinomları, P_i kontrol noktalarıdır ve P_i 'nin w_i ağırlığı, homojen nokta P_i^w 'nin son koordinatıdır. Bu eğriler perspektif dönüşümler altında kapanır ve tam olarak konik bölümleri temsil edebilir.

Bezier eğrisi her zaman ilk ve son kontrol noktalarından geçer ve kontrol noktalarının dışbükey gövdesi içinde uzanır. Eğri, bitiş noktalarında P_1-P_0 ve P_n-P_{n-1} ile teğettir. Bu eğrilerin değişkenlik azaltma özelliği, hiçbir çizginin, Bezier eğrisi ile ardışık noktaların düz çizgi segmentleri ile birleştirilmesiyle elde edilen eğriye göre daha fazla kesişme yapamamasıdır. Bu eğrilerin istenen bir özelliği, bu işlemler kontrol noktalarında gerçekleştirilerek eğrinin çevrilip döndürülebilmesidir.

Bezier eğrilerinin istenmeyen özellikleri, çok sayıda kontrol noktası için sayısal olarak dengeli değildir ve tek bir kontrol noktasını hareket ettirmenin eğrinin genel şeklini değiştirmektedir. Birincisi, bazen düşük dereceli Bezier eğrilerinin birlikte düzgün şekilde eklenmesiyle önlenir. Bezier eğrisinin genellemesi B-spline'dır.

2.1.7 B-spline



Şekil 2.5 B-spline eğrisi

Şekil 2.5'deki B-spline, Bezier eğrisinin genellemesidir. Düğüm vektörü olarak bilinen bir vektör olarak

$$\mathbf{T} = \{t_0, t_1, \dots, t_m\},$$

tanımlanır. Buradaki T , $t_i \in [0,1]$ azalan olmayan olacak şekilde sıralanmış ve P_0, \dots, P_n kontrol noktaları tanımlanmıştır. Dereceyi tanımlarsak

$$p = m - n - 1$$

$t_{p+1}, \dots, t_{m-n-1}$ düğümleri iç düğüm olarak adlandırılır.

Esas fonksiyonu

$$N_{i,0}(t) = \begin{cases} 1 & t_i \leq t < t_{i+1} \\ 0 & t_i < t_{i+1} \end{cases}$$

$$N_{i,j}(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+j} - t_i} N_{i,j-1}(t) + \frac{t_{i+j+1} - t}{t_{i+j+1} - t_{i+1}} N_{i+1,j-1}(t),$$

şeklinde tanımlayalım. Burada $j = 1, 2, \dots, p$ 'dir.

$$\mathbf{C}(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{P}_i N_{i,p}(t)$$

tanımı B-spline tanımıdır.

Özel tipler arasında periyodik olmayan B-spline ilk olarak yukarıda gösterilen $p + 1$ düğümleri 0'a eşit ve son olarak gösterilen $p + 1$ düğümleri 1'e eşit ve bu eşitlik tek tip B-spline'nin iç düğümleri eşit aralıklarla yerleştirilmiştir. İç düğümsüz B-spline, Bezier eğrisidir.

2.2 İki Değişkenli Açıklama

Rasyonel kübik fonksiyonu (2), rasyonel bikübik fonksiyonu $D = [x_0, x_m] \times [y_0, y_n]$ dikdörtgen kafesinin üzerinde tanımlanarak uzatılır. $\pi: a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = b$, $[a, b]$ 'nin bir ayrımı ve $\hat{\pi}: c = y_0 < y_1 < \dots < y_n = d$, $[c, d]$ 'nin bir ayrımı olsun. Rasyonel bikübik fonksiyon her bir $[x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$, $i = 0, 1, \dots, m - 1$; $j = 0, 1, \dots, n - 1$ dikdörtgen yamanın üzerinde tanımlanır ve aşağıdaki gibidir:

$$S(x, y) = S_{i,j}(x, y) = A_i(\theta) F(i, j) \hat{A}_j^T(\phi), \quad (3)$$

burada

$$\theta = \frac{x - x_i}{h_i}, \quad \phi = \frac{y - y_j}{\hat{h}_j},$$

$$F(i, j) = \begin{bmatrix} F_{i,j} & F_{i,j+1} & F_{i,j}^y & F_{i,j+1}^y \\ F_{i+1,j} & F_{i+1,j+1} & F_{i+1,j}^y & F_{i+1,j+1}^y \\ F_{i,j}^x & F_{i,j+1}^x & F_{i,j}^{xy} & F_{i,j+1}^{xy} \\ F_{i+1,j}^x & F_{i+1,j+1}^x & F_{i+1,j}^{xy} & F_{i+1,j+1}^{xy} \end{bmatrix}, \quad (4)$$

$$A_i(\theta) = [a_0(\theta) \quad a_1(\theta) \quad a_2(\theta) \quad a_3(\theta)], \quad (5)$$

$$\hat{A}_j(\phi) = [\hat{a}_0(\phi) \quad \hat{a}_1(\phi) \quad \hat{a}_2(\phi) \quad \hat{a}_3(\phi)], \quad (6)$$

ve

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{r_{i,j}(1-\theta)^3 + u_{i,j}\theta(1-\theta)^2}{q_i(\theta)}, \quad a_1 = \frac{w_{i,j}\theta^3 + v_{i,j}\theta^2(1-\theta)}{q_i(\theta)}, \\
a_2 &= \frac{h_i r_{i,j}\theta(1-\theta)^2}{q_i(\theta)}, \quad a_3 = \frac{-h_i w_{i,j}\theta^2(1-\theta)}{q_i(\theta)}, \\
q_i(\theta) &= r_{i,j}(1-\theta)^3 + u_{i,j}(1-\theta)^2\theta + v_{i,j}(1-\theta)\theta^2 + w_{i,j}\theta^3, \\
\hat{a}_0 &= \frac{\hat{r}_{i,j}(1-\phi)^3 + \hat{u}_{i,j}\phi(1-\phi)^2}{q_j(\phi)}, \quad \hat{a}_1 = \frac{\hat{w}_{i,j}\phi^3 + \hat{v}_{i,j}\phi^2(1-\phi)}{q_j(\hat{\theta})}, \\
\hat{a}_2 &= \frac{\hat{h}_j \hat{r}_{i,j}\phi(1-\phi)^2}{q_j(\phi)}, \quad \hat{a}_3 = \frac{-\hat{h}_j \hat{w}_{i,j}\phi^2(1-\phi)}{q_j(\phi)}, \\
q_j(\phi) &= \hat{r}_{i,j}(1-\phi)^3 + \hat{u}_{i,j}(1-\phi)^2\phi + \hat{v}_{i,j}(1-\phi)\phi^2 + \hat{w}_{i,j}\phi^3
\end{aligned}$$

dir.

$F(i, j)$ kübik yamanın dört köşe pozisyonunda birinci ve karışık ilk kısmı türev olarak girişleri olan 4x4 kare matrisidir.

(7) denkleminde A, F ve \hat{A} nın değerlerini değiştirmek rasyonel bikübitik fonksiyonu $S(x, y)$ olarak ifade edilebilir:

$$S(x, y) = \frac{(1-\theta)^3 \alpha_{i,j} + (1-\theta)^2 \theta \beta_{i,j} + (1-\theta)\theta^2 \gamma_{i,j} + \theta^3 \delta_{i,j}}{(1-\theta)^3 r_{i,j} + (1-\theta)^2 \theta u_{i,j} + (1-\theta)\theta^2 v_{i,j} + \theta^3 w_{i,j}}, \quad (7)$$

burada

$$\alpha_{i,j} = \frac{\left[(1-\phi)^3 r_{i,j} \hat{r}_{i,j} F_{i,j} + (1-\phi)^2 \phi r_{i,j} (\hat{u}_{i,j} F_{i,j} + \hat{h}_j \hat{r}_{i,j} F_{i,j}^y) + (1-\phi)\phi^2 r_{i,j} (\hat{v}_{i,j} F_{i,j+1} - \hat{h}_j \hat{w}_{i,j} F_{i,j+1}^y) \right] + \phi^3 r_{i,j} \hat{w}_{i,j} F_{i,j+1}}{q_j(\phi)}, \quad (8)$$

$$\beta_{i,j} = \frac{\left[(1-\phi)^3 \hat{r}_{i,j} (u_{i,j} F_{i,j} - h_j r_{i,j} F_{i,j}^x) + (1-\phi)^2 \phi \left\{ \hat{u}_{i,j} (u_{i,j} F_{i,j} - h_i r_{i,j} F_{i,j}^x) + \hat{h}_j \hat{r}_{i,j} (u_{i,j} F_{i,j}^y - h_i r_{i,j} F_{i,j}^{xy}) \right\} + (1-\phi)\phi^2 \left\{ \hat{v}_{i,j} (u_{i,j} F_{i,j+1} - h_i r_{i,j} F_{i,j+1}^x) - \hat{h}_j \hat{w}_{i,j} (u_{i,j} F_{i,j+1}^y - h_i r_{i,j} F_{i,j+1}^{xy}) \right\} + \phi^3 \hat{w}_{i,j} (u_{i,j} F_{i,j+1} - h_j r_{i,j} F_{i,j+1}^x) \right]}{q_j(\phi)}, \quad (9)$$

$$\gamma_{i,j} = \frac{\left[(1-\phi)^3 \hat{r}_{i,j} (v_{i,j} F_{i+1,j} - h_j w_{i,j} F_{i+1,j}^x) + (1-\phi)^2 \phi \left\{ \hat{u}_{i,j} (v_{i,j} F_{i+1,j} - h_j w_{i,j} F_{i+1,j}^x) + \hat{h}_j \hat{r}_{i,j} (v_{i,j} F_{i+1,j}^y - h_j w_{i,j} F_{i+1,j}^{xy}) \right\} + (1-\phi) \phi^2 \left\{ \hat{v}_{i,j} (v_{i,j} F_{i+1,j+1} - h_j w_{i,j} F_{i+1,j+1}^x) - \hat{h}_j \hat{w}_{i,j} (v_{i,j} F_{i+1,j+1}^y - h_j w_{i,j} F_{i+1,j+1}^{xy}) \right\} + \phi^3 \hat{w}_{i,j} (v_{i,j} F_{i+1,j+1} - h_j w_{i,j} F_{i+1,j+1}^x) \right]}{q_j(\phi)}, \quad (10)$$

$$\delta_{i,j} = \frac{\left[(1-\phi)^3 \hat{r}_{i,j} w_{i,j} F_{i+1,j} + (1-\phi)^2 \phi w_{i,j} \left(\hat{u}_{i,j} F_{i+1,j} + \hat{h}_j \hat{r}_{i,j} F_{i+1,j}^y \right) + (1-\phi) \phi^2 w_{i,j} \left(\hat{v}_{i,j} F_{i+1,j+1} - \hat{h}_j \hat{w}_{i,j} F_{i+1,j+1}^y \right) + \phi^3 \hat{w}_{i,j} w_{i,j} F_{i+1,j+1} \right]}{q_i(\phi)} \quad (11)$$

dir.

2.3 2D Sınırlandırılmış Verilerin Görselleştirilmesi

Butt ve Brodlie (1993), pozitiflik sorununu daha genel bir duruma genişleterek pozitifliği $x = 0$ düz çizgisinin üzerinde yatan bir enterpolasyon olarak kabul etti ve ardından verilen verinin de bu düz çizginin üzerinde olması koşuluyla, $f = mx+c$ 'nin herhangi bir düz çizginin üzerinde kalan bir enterpolasyon olduğunu belirtti.

$i = 0, 1, \dots, n$ değerleri için $f_i = mx + c$

olmak üzere

$$S_i(x) = \frac{p_i(\theta)}{q_i(\theta)} > mx + c, \quad \forall x \in [x_i, x_{i+1}]$$

dir. Kabul edelim ki $m > 0$ olsun. $m < 0$ olması durumunu benzer yoldan ele alalım.

Her bir aralığı $mx + c$ gibi ifade edersek

$$a_i(1 - \theta) + b_i\theta,$$

burada

$$a_i = mx_i + c,$$

$$b_i = mx_{i+1} + c$$

dir. Böylece

$$S_i(x) = \frac{p_i(\theta)}{q_i(\theta)} > a_i(1-\theta) + b_i\theta, \quad i = 0, 1, \dots, n-1$$

elde edilir.

Her $r_i, u_i, v_i, w_i > 0$ için $q_i(\theta) > 0$ için, burada

$$U_i(x) = p_i(\theta) - \{a_i(1-\theta) + b_i\theta\} q_i(\theta) > 0,$$

olmak üzere $U_i(x)$ 4. Dereceden bir polinomdur.

Bunu şöyle ifade edebiliriz:

$$U_i(x) = \lambda_i\theta^4 + \mu_i\theta^3(1-\theta) + \nu_i\theta^2(1-\theta)^2 + \sigma_i\theta(1-\theta)^3 + \chi_i(1-\theta)^4,$$

burada

$$\begin{aligned} \lambda_i &= w_i(f_{i+1} - b_i), \\ \mu_i &= v_i(f_{i+1} - b_i) + w_i(f_{i+1} - a_i) - h_i w_i d_{i+1}, \\ \nu_i &= v_i(f_{i+1} - a_i) + u_i(f_i - b_i) - h_i(r_i d_i - w_i d_{i+1}), \\ \sigma_i &= u_i(f_i - a_i) + r_i(f_i - b_i) + h_i r_i d_i, \\ \chi_i &= r_i(f_i - a_i) \end{aligned}$$

$\lambda_i > 0$, $\chi_i > 0$ için, böylece $U_i > 0$ için gerek ve yeter şart $\mu_i > 0$, $\nu_i > 0$ ve $\sigma_i > 0$ dir. Burada

$$u_i > \text{Max} \left\{ 0, \frac{-h_i r_i d_i - r_i(f_i - b_i)}{f_i - a_i} \right\}, \quad (12)$$

$$v_i > \text{Max} \left\{ 0, \frac{h_i w_i d_{i+1} - w_i(f_{i+1} - a_i)}{f_{i+1} - b_i}, \frac{h_i(r_i d_i - w_i d_{i+1}) - u_i(f_i - b_i)}{f_{i+1} - a_i} \right\} \quad (13)$$

dir.

Teorem 2.3

Rasyonel kübik (2), eğer sırasıyla (12) ve (13) denklemlerini sağlarsa verilen düz çizginin üzerinde yer alır.

Bir kez daha hem r_i hem de w_i nin serbest parametreler olduğunu ve dolayısıyla varsayılan eğrinin daha da iyileştirilmesi için kullandık.

2.3.1 3D Sınırlandırılmış Verilerin Görselleştirilmesi

$(x_i, y_i, F_{\{i,j\}}), i = 0,1,2, \dots, m; j = 0,1,2, \dots, n$ düzlem üzerindeki veri noktaları dizisi verilmiş olsun.

$$F_{\{i,j\}} > Z_{\{i,j\}}, \forall i, j, \quad (14)$$

olmak üzere

$$Z = C \left[1 - \frac{x}{A} - \frac{y}{B} \right]$$

dir.

Rasyonel bikübik fonksiyonun (11) ürettiği yüzeyin, düzlemin veri tarafında aynı tarafında durması gerekir. Bu durum matematiksel olarak ifade edilir:

$$S(x, y) > C \left[1 - \frac{x}{A} - \frac{y}{B} \right] \quad (15)$$

şeklinde ifade edilir. Düzlemin parametrik denklemi

$$Z = Z_{i,j} + \theta(Z_{i+1,j} - Z_{i,j}) + \phi(Z_{i,j+1} - Z_{i,j}), \quad (16)$$

burada

$$Z_{i,j} = C \left[1 - \frac{x_i}{A} - \frac{y_j}{B} \right] \quad (17)$$

dir. A, B ve C sırasıyla x, y ve z ile kesişmektedir. (15)'de (7) ve (16)'deki değerleri değiştirerek koşul (17) olarak ifade edilebilir.

$$\frac{(1-\theta)^3 \alpha_{i,j} + (1-\theta)^2 \theta \beta_{i,j} + (1-\theta) \theta^2 \gamma_{i,j} + \theta^3 \delta_{i,j}}{(1-\theta)^3 r_{i,j} + (1-\theta)^2 \theta u_{i,j} + (1-\theta) \theta^2 v_{i,j} + \theta^3 w_{i,j}} > Z_{i,j} + \theta(Z_{i+1,j} - Z_{i,j}) + \phi(Z_{i,j+1} - Z_{i,j}),$$

veya

$$U_{i,j}(\theta, \phi) = (1-\theta)^3 \alpha_{i,j} + (1-\theta)^2 \theta \beta_{i,j} + (1-\theta) \theta^2 \gamma_{i,j} + \theta^3 \delta_{i,j} - \left\{ (1-\theta)^3 r_{i,j} + (1-\theta)^2 \theta u_{i,j} + (1-\theta) \theta^2 v_{i,j} + \theta^3 w_{i,j} \right\} \left\{ Z_{i,j} + \theta(Z_{i+1,j} - Z_{i,j}) + \phi(Z_{i,j+1} - Z_{i,j}) \right\} \quad (18)$$

olur. Bazı düzenlemelerden sonra yukarıdaki ilişki

$$U_{i,j}(\theta, \phi) = \sum_{i=0}^4 (1-\theta)^{4-i} \theta^i A_i, \quad (19)$$

olarak ifade edilir.

$$A_0 = \frac{\sum_{j=0}^4 (1-\phi)^{4-i} \phi^i A_{0,j}}{q_j(\phi)}, \quad (20)$$

burada

$$\begin{aligned} A_{0,0} &= r_{i,j} \hat{r}_{i,j} (F_{i,j} - Z_{i,j}), \\ A_{0,1} &= r_{i,j} \left\{ \hat{u}_{i,j} (F_{i,j} - Z_{i,j}) + \hat{r}_{i,j} (F_{i,j} + \hat{h}_j F_{i,j}^y - Z_{i,j+1}) \right\}, \\ A_{0,2} &= r_{i,j} \left\{ \hat{u}_{i,j} (F_{i,j} - Z_{i,j}) + \hat{v}_{i,j} (F_{i,j+1} - Z_{i,j+1}) + (\hat{u}_{i,j} - \hat{v}_{i,j}) (Z_{i,j} - Z_{i,j+1}) + \hat{h}_j \hat{r}_{i,j} F_{i,j}^y \right. \\ &\quad \left. - \hat{h}_j \hat{w}_{i,j} F_{i,j+1}^y \right\}, \\ A_{0,3} &= r_{i,j} \left\{ \hat{v}_{i,j} (F_{i,j+1} - Z_{i,j+1}) + \hat{w}_{i,j} (F_{i,j+1} - \hat{h}_j F_{i,j+1}^y - Z_{i,j}) \right\}, \\ A_{0,4} &= r_{i,j} \hat{w}_{i,j} (F_{i,j+1} - Z_{i,j+1}), \end{aligned}$$

dir.

$$A_1 = \frac{\sum_{j=0}^4 (1-\phi)^{4-i} \phi^i A_{1,j}}{q_j(\phi)}, \quad (21)$$

burada

$$\begin{aligned}
A_{1,0} &= \hat{r}_{i,j} \left\{ u_{i,j} (F_{i,j} - Z_{i,j}) + r_{i,j} (F_{i,j} - Z_{i+1,j} - h_i F_{i,j}^x) \right\}, \\
A_{1,1} &= (\hat{r}_{i,j} + \hat{u}_{i,j}) \left\{ r_{i,j} F_{i,j} + u_{i,j} F_{i,j} - h_i r_{i,j} F_{i,j}^x - (u_{i,j} Z_{i,j} + r_{i,j} Z_{i+1,j}) \right\} \\
&\quad + \hat{r}_{i,j} \left\{ r_{i,j} \hat{h}_j F_{i,j}^y + \hat{h}_j (u_{i,j} F_{i,j}^y - h_i r_{i,j} F_{i,j}^{xy}) - (r_{i,j} + u_{i,j}) (Z_{i,j+1} - Z_{i,j}) \right\}, \\
A_{1,2} &= \hat{u}_{i,j} \left\{ u_{i,j} (F_{i,j} - Z_{i,j}) + r_{i,j} (F_{i,j} - Z_{i+1,j} - h_i F_{i,j}^x) \right\} + \hat{v}_{i,j} \left\{ u_{i,j} (F_{i,j+1} - Z_{i,j+1}) + r_{i,j} (F_{i,j+1} \right. \\
&\quad \left. - h_i F_{i,j+1}^x - Z_{i+1,j} - Z_{i,j+1} + Z_{i,j}) \right\} + (\hat{v}_{i,j} - \hat{u}_{i,j}) (r_{i,j} + u_{i,j}) (Z_{i,j+1} - Z_{i,j}) \\
&\quad + \hat{r}_{i,j} \hat{h}_j \left\{ r_{i,j} F_{i,j}^y + u_{i,j} F_{i,j}^y - h_i r_{i,j} F_{i,j}^{xy} \right\} + \hat{h}_j \hat{w}_{i,j} \left\{ -r_{i,j} F_{i,j+1}^y - u_{i,j} F_{i,j+1}^y + h_i r_{i,j} F_{i,j+1}^{xy} \right\}, \\
A_{1,3} &= (\hat{v}_{i,j} + \hat{w}_{i,j}) \left\{ r_{i,j} F_{i,j+1} + u_{i,j} F_{i,j+1} - h_i r_{i,j} F_{i,j+1}^x - (u_{i,j} Z_{i,j} + r_{i,j} Z_{i+1,j}) - (r_{i,j} + u_{i,j}) (Z_{i,j+1} \right. \\
&\quad \left. - Z_{i,j}) \right\} + \hat{w}_{i,j} \left\{ (r_{i,j} + u_{i,j}) (Z_{i,j+1} - Z_{i,j}) - \hat{h}_j r_{i,j} F_{i,j+1}^y - \hat{h}_j (u_{i,j} F_{i,j+1}^y - h_i r_{i,j} F_{i,j+1}^{xy}) \right\}, \\
A_{1,4} &= \hat{w}_{i,j} \left\{ u_{i,j} (F_{i,j+1} - Z_{i,j+1}) + r_{i,j} (F_{i,j+1} - h_i F_{i,j+1}^x - Z_{i+1,j} - Z_{i,j+1} + Z_{i,j}) \right\},
\end{aligned}$$

dir.

$$A_2 = \frac{\sum_{j=0}^4 (1-\phi)^{4-i} \phi^j A_{2,j}}{q_j(\phi)}, \tag{22}$$

burada

$$\begin{aligned}
A_{2,1} &= (\hat{r}_{i,j} + \hat{u}_{i,j}) \left\{ (u_{i,j} F_{i,j} - h_i r_{i,j} F_{i,j}^x) + (v_{i,j} F_{i+1,j} - h_i w_{i,j} F_{i+1,j}^x) - (v_{i,j} Z_{i,j} + u_{i,j} Z_{i+1,j}) \right\} \\
&\quad + \hat{r}_{i,j} \left\{ \hat{h}_j (u_{i,j} F_{i,j}^y - h_i r_{i,j} F_{i,j}^{xy}) + \hat{h}_j (v_{i,j} F_{i+1,j}^y - h_i w_{i,j} F_{i+1,j}^{xy}) - (v_{i,j} + u_{i,j}) (Z_{i,j+1} - Z_{i,j}) \right\}, \\
A_{2,2} &= \hat{u}_{i,j} \left\{ u_{i,j} (F_{i,j} - Z_{i,j}) + F_{i,j} - r_{i,j} Z_{i+1,j} - h_i r_{i,j} F_{i,j}^x \right\} + \hat{v}_{i,j} \left\{ u_{i,j} (F_{i,j+1} - Z_{i,j+1}) + F_{i,j+1} \right. \\
&\quad \left. - r_{i,j} (h_i F_{i,j+1}^x + Z_{i+1,j} + Z_{i,j+1} - Z_{i,j}) \right\} + (\hat{v}_{i,j} - \hat{u}_{i,j}) (v_{i,j} + u_{i,j}) (Z_{i,j+1} - Z_{i,j}) \\
&\quad + \hat{r}_{i,j} \hat{h}_j \left\{ u_{i,j} F_{i,j}^y - h_i r_{i,j} F_{i,j}^{xy} + v_{i,j} F_{i+1,j}^y - h_i w_{i,j} F_{i+1,j}^{xy} \right\} - \hat{h}_j \hat{w}_{i,j} \left\{ u_{i,j} F_{i,j+1}^y - h_i r_{i,j} F_{i,j+1}^{xy} \right. \\
&\quad \left. - v_{i,j} F_{i+1,j+1}^y + h_i w_{i,j} F_{i+1,j+1}^{xy} \right\}, \\
A_{2,3} &= (\hat{v}_{i,j} + \hat{w}_{i,j}) \left\{ (u_{i,j} F_{i,j+1} - h_i r_{i,j} F_{i,j+1}^x) + (v_{i,j} F_{i+1,j+1} - h_i w_{i,j} F_{i+1,j+1}^x) - (u_{i,j} Z_{i+1,j} + v_{i,j} Z_{i,j}) \right. \\
&\quad \left. - (v_{i,j} + u_{i,j}) (Z_{i,j+1} - Z_{i,j}) \right\} + \hat{w}_{i,j} \left\{ -\hat{h}_j (u_{i,j} F_{i,j+1}^y - h_i r_{i,j} F_{i,j+1}^{xy}) + (v_{i,j} + u_{i,j}) (Z_{i,j+1} - Z_{i,j}) \right. \\
&\quad \left. - \hat{h}_j (v_{i,j} F_{i+1,j+1}^y - h_i w_{i,j} F_{i+1,j+1}^{xy}) \right\}, \\
A_{2,4} &= \hat{w}_{i,j} \left\{ u_{i,j} (F_{i,j+1} - Z_{i,j+1}) + v_{i,j} (F_{i+1,j+1} - Z_{i+1,j} - Z_{i,j+1} + Z_{i,j}) + (u_{i,j} - v_{i,j}) (Z_{i,j} - Z_{i+1,j}) \right. \\
&\quad \left. - h_i r_{i,j} F_{i,j+1}^x - h_i w_{i,j} F_{i+1,j+1}^x \right\}, \\
A_{2,0} &= \hat{r}_{i,j} \left\{ u_{i,j} (F_{i,j} - Z_{i,j}) + v_{i,j} (F_{i+1,j} - Z_{i+1,j}) + (u_{i,j} - v_{i,j}) (Z_{i,j} - Z_{i+1,j}) - h_i r_{i,j} F_{i,j}^x \right. \\
&\quad \left. - h_i w_{i,j} F_{i+1,j}^x \right\},
\end{aligned}$$

dir.

$$A_3 = \frac{\sum_{j=0}^4 (1-\phi)^{4-i} \phi^j A_{3,j}}{q_j(\phi)}, \tag{23}$$

burada

$$\begin{aligned}
A_{3,0} &= \hat{r}_{i,j} \left\{ v_{i,j} (F_{i+1,j} - Z_{i+1,j}) + w_{i,j} (F_{i+1,j} - Z_{i,j} - h_i F_{i+1,j}^x) \right\}, \\
A_{3,1} &= (\hat{r}_{i,j} + \hat{u}_{i,j}) \left\{ w_{i,j} F_{i+1,j} + v_{i,j} F_{i+1,j} - h_i w_{i,j} F_{i+1,j}^x - (v_{i,j} Z_{i+1,j} + w_{i,j} Z_{i,j}) \right\} \\
&\quad + \hat{r}_{i,j} \left\{ w_{i,j} \hat{h}_j F_{i+1,j}^y + \hat{h}_j (v_{i,j} F_{i+1,j}^y - h_i w_{i,j} F_{i+1,j}^{xy}) - (v_{i,j} + w_{i,j}) (Z_{i,j+1} - Z_{i,j}) \right\}, \\
A_{3,2} &= \hat{u}_{i,j} \left\{ v_{i,j} (F_{i+1,j} - Z_{i+1,j}) + w_{i,j} (F_{i+1,j} + Z_{i,j} - h_i F_{i+1,j}^x) \right\} + \hat{v}_{i,j} \left\{ v_{i,j} (F_{i+1,j+1} - Z_{i,j+1} - Z_{i+1,j} \right. \\
&\quad \left. + Z_{i,j}) + w_{i,j} (F_{i+1,j+1} - h_i F_{i+1,j+1}^x - Z_{i,j+1}) \right\} + (\hat{v}_{i,j} - \hat{u}_{i,j}) (v_{i,j} + w_{i,j}) (Z_{i,j+1} - Z_{i,j}) \\
&\quad + \hat{r}_{i,j} \hat{h}_j (w_{i,j} F_{i+1,j}^y + v_{i,j} F_{i+1,j}^y - h_i w_{i,j} F_{i+1,j}^{xy}) + \hat{h}_j \hat{w}_{i,j} (-w_{i,j} F_{i+1,j+1}^y - v_{i,j} F_{i+1,j+1}^y \\
&\quad + h_i w_{i,j} F_{i+1,j+1}^{xy}), \\
A_{3,3} &= (\hat{v}_{i,j} + \hat{w}_{i,j}) \left\{ w_{i,j} F_{i+1,j+1} + v_{i,j} F_{i+1,j+1} - h_i w_{i,j} F_{i+1,j+1}^x - (v_{i,j} Z_{i+1,j} + w_{i,j} Z_{i,j}) \right. \\
&\quad \left. - (w_{i,j} + v_{i,j}) (Z_{i,j+1} - Z_{i,j}) \right\} + \hat{w}_{i,j} \left\{ -\hat{h}_j w_{i,j} F_{i+1,j+1}^y - \hat{h}_j (v_{i,j} F_{i+1,j+1}^y - h_i w_{i,j} F_{i+1,j+1}^{xy}) \right. \\
&\quad \left. + (v_{i,j} + w_{i,j}) (Z_{i,j+1} - Z_{i,j}) \right\}, \\
A_{3,4} &= \hat{w}_{i,j} \left\{ v_{i,j} (F_{i+1,j+1} - Z_{i,j+1} - Z_{i+1,j} + Z_{i,j}) + w_{i,j} (F_{i+1,j+1} - h_i F_{i+1,j+1}^x - Z_{i,j+1}) \right\},
\end{aligned}$$

dir.

$$A_4 = \frac{\sum_{j=0}^4 (1-\phi)^{4-i} \phi^i A_{4,j}}{q_j(\phi)}, \tag{24}$$

burada

$$\begin{aligned}
A_{4,0} &= w_{i,j} \hat{r}_{i,j} (F_{i+1,j} - Z_{i+1,j}), \\
A_{4,1} &= w_{i,j} \left\{ (\hat{r}_{i,j} + \hat{u}_{i,j}) (F_{i+1,j} - Z_{i+1,j}) + r_{i,j} \hat{r}_{i,j} (\hat{h}_j F_{i+1,j}^y - Z_{i,j+1} + Z_{i,j}) \right\}, \\
A_{4,2} &= w_{i,j} \left\{ \hat{u}_{i,j} (F_{i+1,j} - Z_{i+1,j}) + \hat{v}_{i,j} (F_{i,j+1} - Z_{i+1,j} - Z_{i,j+1} + Z_{i,j}) + (\hat{u}_{i,j} - \hat{v}_{i,j}) (Z_{i,j} - Z_{i,j+1}) \right\} \\
&\quad \left\{ + \hat{h}_j \hat{r}_{i,j} F_{i+1,j}^y - \hat{h}_j \hat{w}_{i,j} F_{i+1,j+1}^y \right\}, \\
A_{4,3} &= w_{i,j} \left\{ \hat{v}_{i,j} (F_{i+1,j+1} - Z_{i+1,j} - Z_{i,j+1} + Z_{i,j}) + \hat{w}_{i,j} (F_{i+1,j+1} - \hat{h}_j F_{i+1,j+1}^y - Z_{i+1,j}) \right\},
\end{aligned}$$

dir. Buradan da

$$\begin{aligned}
U_{i,j}(\theta, \phi) &> 0 \\
A_i, \quad i &= 0, 1, 2, 3, 4. \\
A_0 &> 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=0}^4 (1-\phi)^{4-i} \phi^i A_{0,j} > 0 \quad q_j(\phi) > 0. \\
& q_j(\phi) > 0 \\
& \hat{r}_{i,j} > 0, \hat{u}_{i,j} > 0, \hat{v}_{i,j} > 0 \quad \hat{w}_{i,j} > 0.
\end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=0}^4 (1-\phi)^{4-i} \phi^i A_{0,j} > 0 \\
& \hat{u}_{i,j} = \hat{v}_{i,j},
\end{aligned} \tag{26}$$

$$\hat{u}_{i,j} > \text{Max} \left\{ \frac{-\hat{h}_j \hat{r}_{i,j} F_{i,j}^y}{F_{i,j} - Z_{i,j}}, \frac{-\hat{r}_{i,j} (F_{i,j} + \hat{h}_j F_{i,j}^y - Z_{i,j+1})}{F_{i,j} - Z_{i,j}} \right\}, \tag{27}$$

$$\hat{v}_{i,j} > \text{Max} \left\{ \frac{\hat{h}_j \hat{w}_{i,j} F_{i,j}^y}{F_{i,j+1} - Z_{i,j+1}}, \frac{-\hat{w}_{i,j} (F_{i,j+1} - \hat{h}_j F_{i,j+1}^y - Z_{i,j})}{F_{i,j+1} - Z_{i,j+1}} \right\}. \tag{28}$$

elde edilir.

$$A_1 > 0$$

durumunda

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=0}^4 (1-\phi)^{4-i} \phi^i A_{1,j} > 0 \quad q_j(\phi) > 0. \\
& q_j(\phi) > 0 \\
& \hat{r}_{i,j} > 0, \hat{u}_{i,j} > 0, \hat{v}_{i,j} > 0 \quad \hat{w}_{i,j} > 0.
\end{aligned} \tag{29}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=0}^4 (1-\phi)^{4-i} \phi^i A_{1,j} > 0 \\
& \hat{u}_{i,j} = \hat{v}_{i,j},
\end{aligned} \tag{30}$$

$$u_{i,j} > \text{Max} \{C_i, i = 1, 2, \dots, 6\}, \tag{31}$$

elde edilir ve burada

$$\begin{aligned}
C_1 &= \frac{h_i r_{i,j} F_{i,j}^{xy}}{F_{i,j}^y}, & C_2 &= \frac{h_i r_{i,j} F_{i,j+1}^{xy}}{F_{i,j+1}^y}, \\
C_3 &= \frac{r_{i,j} (h_i F_{i,j}^x + Z_{i+1,j} - Z_{i,j})}{F_{i,j} - Z_{i,j}}, & C_4 &= \frac{r_{i,j} (h_i F_{i,j+1}^x + Z_{i+1,j} - Z_{i,j})}{F_{i,j+1} - Z_{i,j+1}}, \\
C_5 &= \frac{r_{i,j} h_i \hat{h}_j F_{i,j}^{xy}}{\hat{h}_j F_{i,j}^y - Z_{i,j+1} + Z_{i,j}}, & C_6 &= \frac{-r_{i,j} h_i \hat{h}_j F_{i,j+1}^{xy}}{Z_{i,j+1} - Z_{i,j} - \hat{h}_j F_{i,j+1}^y}.
\end{aligned}$$

dir.

$$A_2 > 0$$

durumunda

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^4 (1-\phi)^{4-i} \phi^i A_{2,j} &> 0 & q_j(\phi) &> 0. \\
q_j(\phi) &> 0
\end{aligned}$$

$$\hat{r}_{i,j} > 0, \hat{u}_{i,j} > 0, \hat{v}_{i,j} > 0 \quad \hat{w}_{i,j} > 0. \quad (32)$$

$$\sum_{j=0}^4 (1-\phi)^{4-i} \phi^i A_{2,j} > 0$$

$$\hat{u}_{i,j} = \hat{v}_{i,j}, \quad (33)$$

$$u_{i,j} > \text{Max}\{C_i, i = 7, 8, \dots, 12\}, \quad (34)$$

$$v_{i,j} > \text{Max}\{C_i, i = 13, 14, \dots, 18\}, \quad (35)$$

elde edilir ve burada

$$\begin{aligned}
C_7 &= \frac{h_i r_{i,j} F_{i,j}^x}{F_{i,j} - Z_{i,j}}, & C_8 &= \frac{h_i r_{i,j} F_{i,j+1}^x}{F_{i,j+1} - Z_{i,j+1}}, \\
C_9 &= \frac{r_{i,j} h_i \hat{h}_j F_{i,j}^{xy}}{\hat{h}_j F_{i,j}^y - Z_{i,j+1} + Z_{i,j}}, & C_{10} &= \frac{-r_{i,j} h_i \hat{h}_j F_{i,j+1}^{xy}}{Z_{i,j+1} - Z_{i,j} - \hat{h}_j F_{i,j+1}^y},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{11} &= \frac{h_i r_{i,j} F_{i,j}^{xy}}{F_{i,j}^y}, & C_{12} &= \frac{h_i r_{i,j} F_{i,j+1}^{xy}}{F_{i,j+1}^y}, \\
C_{13} &= \frac{h_i w_{i,j} F_{i+1,j}^x}{F_{i+1,j} - Z_{i+1,j}}, & C_{14} &= \frac{h_i w_{i,j} F_{i+1,j+1}^x}{F_{i+1,j+1} - Z_{i,j+1} - Z_{i+1,j} + Z_{i,j}}, \\
C_{15} &= \frac{w_{i,j} h_i \hat{h}_j F_{i+1,j}^{xy}}{\hat{h}_j F_{i+1,j}^y - Z_{i,j+1} + Z_{i,j}}, & C_{16} &= \frac{-w_{i,j} h_i \hat{h}_j F_{i+1,j+1}^{xy}}{Z_{i,j+1} - Z_{i,j} - \hat{h}_j F_{i+1,j+1}^y}, \\
C_{17} &= \frac{h_i w_{i,j} F_{i+1,j}^{xy}}{F_{i+1,j}^y}, & C_{18} &= \frac{h_i w_{i,j} F_{i+1,j+1}^{xy}}{F_{i+1,j+1}^y}.
\end{aligned}$$

dir.

$$A_3 > 0$$

durumunda

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^4 (1-\phi)^{4-i} \phi^i A_{3,j} &> 0 & q_j(\phi) &> 0. \\
q_j(\phi) &> 0
\end{aligned}$$

$$\hat{r}_{i,j} > 0, \hat{u}_{i,j} > 0, \hat{v}_{i,j} > 0 \quad \hat{w}_{i,j} > 0. \quad (36)$$

$$\sum_{j=0}^4 (1-\phi)^{4-i} \phi^i A_{3,j} > 0$$

$$\hat{u}_{i,j} = \hat{v}_{i,j}, \quad (37)$$

$$v_{i,j} > \text{Max}\{C_i, i = 19, 20, \dots, 24\}, \quad (38)$$

elde edilir ve burada

$$\begin{aligned}
C_{19} &= \frac{h_i w_{i,j} F_{i+1,j}^{xy}}{F_{i+1,j}^y}, & C_{20} &= \frac{h_i w_{i,j} F_{i+1,j+1}^{xy}}{F_{i+1,j+1}^y}, \\
C_{21} &= \frac{-w_{i,j} (-h_i F_{i+1,j}^x + F_{i+1,j} - Z_{i,j})}{F_{i+1,j} - Z_{i+1,j}}, & C_{22} &= \frac{-w_{i,j} (-h_i F_{i+1,j+1}^x + F_{i+1,j+1} - Z_{i,j+1})}{F_{i+1,j+1} - Z_{i,j+1} - Z_{i+1,j} + Z_{i,j}}, \\
C_{23} &= \frac{w_{i,j} h_i \hat{h}_j F_{i+1,j}^{xy}}{\hat{h}_j F_{i+1,j}^y - Z_{i,j+1} + Z_{i,j}}, & C_{24} &= \frac{-w_{i,j} h_i \hat{h}_j F_{i+1,j+1}^{xy}}{Z_{i,j+1} - Z_{i,j} - \hat{h}_j F_{i+1,j+1}^y}.
\end{aligned}$$

dir.

$$A_4 > 0$$

durumunda

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^4 (1-\phi)^{4-i} \phi^i A_{4,j} &> 0 & q_j(\phi) &> 0. \\ q_j(\phi) &> 0 \\ \hat{r}_{i,j} &> 0, \hat{u}_{i,j} > 0, \hat{v}_{i,j} > 0 & \hat{w}_{i,j} &> 0. \end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^4 (1-\phi)^{4-i} \phi^i A_{4,j} &> 0 \\ \hat{u}_{i,j} &= \hat{v}_{i,j}, \end{aligned} \quad (40)$$

$$\hat{u}_{i,j} > \text{Max} \left\{ \frac{-\hat{h}_j \hat{r}_{i,j} F_{i+1,j}^y}{F_{i+1,j} - Z_{i+1,j}}, \frac{-\hat{r}_{i,j} (h_j F_{i+1,j}^y - Z_{i,j+1} + Z_{i,j})}{F_{i+1,j} - Z_{i+1,j}} \right\}, \quad (41)$$

$$\hat{v}_{i,j} > \text{Max} \left\{ \frac{\hat{h}_j \hat{w}_{i,j} F_{i+1,j+1}^y}{F_{i+1,j+1} - Z_{i,j+1} - Z_{i+1,j} + Z_{i,j}}, \frac{-\hat{w}_{i,j} (-\hat{h}_j F_{i+1,j+1}^y + F_{i+1,j+1} - Z_{i+1,j})}{F_{i+1,j+1} - Z_{i,j+1} - Z_{i+1,j} + Z_{i,j}} \right\}. \quad (42)$$

elde edilir.

Teorem 2.3.1

Rasyonel bikübik fonksiyon (7), eğer serbest parametreler $\hat{u}_{i,j}, \hat{v}_{i,j}, u_{i,j}$ ve $v_{i,j}$ aşağıdaki koşullara uyuyorsa düzlemin verileriyle aynı tarafta kalan yüzeyi oluşturur:

$$\begin{aligned} \hat{u}_{i,j} &> \text{Max} \left\{ 0, \frac{-\hat{h}_j \hat{r}_{i,j} F_{i,j}^y}{F_{i,j} - Z_{i,j}}, \frac{-\hat{h}_j \hat{r}_{i,j} F_{i+1,j}^y}{F_{i+1,j} - Z_{i+1,j}}, \frac{-\hat{r}_{i,j} (F_{i,j} + \hat{h}_j F_{i,j}^y - Z_{i,j+1})}{F_{i,j} - Z_{i,j}}, \frac{-\hat{r}_{i,j} (h_j F_{i+1,j}^y - Z_{i,j+1} + Z_{i,j})}{F_{i+1,j} - Z_{i+1,j}} \right\}. \\ \hat{v}_{i,j} &> \text{Max} \left\{ 0, \frac{\hat{h}_j \hat{w}_{i,j} F_{i,j+1}^y}{F_{i,j+1} - Z_{i,j+1}}, \frac{\hat{h}_j \hat{w}_{i,j} F_{i+1,j+1}^y}{F_{i+1,j+1} - Z_{i,j+1} - Z_{i+1,j} + Z_{i,j}}, \frac{-\hat{w}_{i,j} (F_{i,j+1} - \hat{h}_j F_{i,j+1}^y - Z_{i,j})}{F_{i,j+1} - Z_{i,j+1}}, \right. \\ &\quad \left. \frac{-\hat{w}_{i,j} (-\hat{h}_j F_{i+1,j+1}^y + F_{i+1,j+1} - Z_{i+1,j})}{F_{i+1,j+1} - Z_{i,j+1} - Z_{i+1,j} + Z_{i,j}} \right\}. \end{aligned}$$

$$u_{i,j} > \text{Max}\{0, \text{Con}_i, i = 1, 2, \dots, 8\},$$

$$v_{i,j} > \text{Max}\{0, \text{Con}_i, i = 9, 10, \dots, 16\},$$

burada

$$\text{Con}_1 = \frac{h_i r_{i,j} F_{i,j}^{xy}}{F_{i,j}^y}, \quad \text{Con}_2 = \frac{h_i r_{i,j} F_{i,j+1}^{xy}}{F_{i,j+1}^y},$$

$$\text{Con}_3 = \frac{h_i r_{i,j} F_{i,j}^x}{F_{i,j} - Z_{i,j}}, \quad \text{Con}_4 = \frac{h_i r_{i,j} F_{i,j+1}^x}{F_{i,j+1} - Z_{i,j+1}},$$

$$\text{Con}_5 = \frac{r_{i,j} (h_i F_{i,j}^x + Z_{i+1,j} - Z_{i,j})}{F_{i,j} - Z_{i,j}}, \quad \text{Con}_6 = \frac{r_{i,j} (h_i F_{i,j+1}^x + Z_{i+1,j} - Z_{i,j})}{F_{i,j+1} - Z_{i,j+1}},$$

$$\text{Con}_7 = \frac{r_{i,j} h_i \hat{h}_j F_{i,j}^{xy}}{\hat{h}_j F_{i,j}^y - Z_{i,j+1} + Z_{i,j}}, \quad \text{Con}_8 = \frac{-r_{i,j} h_i \hat{h}_j F_{i,j+1}^{xy}}{Z_{i,j+1} - Z_{i,j} - \hat{h}_j F_{i,j+1}^y},$$

$$\text{Con}_9 = \frac{h_i w_{i,j} F_{i+1,j}^{xy}}{F_{i+1,j}^y}, \quad \text{Con}_{10} = \frac{h_i w_{i,j} F_{i+1,j+1}^{xy}}{F_{i+1,j+1}^y},$$

$$\text{Con}_{11} = \frac{-w_{i,j} (-h_i F_{i+1,j}^x + F_{i+1,j} - Z_{i,j})}{F_{i+1,j} - Z_{i+1,j}}, \quad \text{Con}_{12} = \frac{-w_{i,j} (-h_i F_{i+1,j+1}^x + F_{i+1,j+1} - Z_{i,j+1})}{F_{i+1,j+1} - Z_{i,j+1} - Z_{i+1,j} + Z_{i,j}},$$

$$\text{Con}_{13} = \frac{w_{i,j} h_i \hat{h}_j F_{i+1,j}^{xy}}{\hat{h}_j F_{i+1,j}^y - Z_{i,j+1} + Z_{i,j}}, \quad \text{Con}_{14} = \frac{-w_{i,j} h_i \hat{h}_j F_{i+1,j+1}^{xy}}{Z_{i,j+1} - Z_{i,j} - \hat{h}_j F_{i+1,j+1}^y},$$

$$\text{Con}_{15} = \frac{h_i w_{i,j} F_{i+1,j}^x}{F_{i+1,j} - Z_{i+1,j}}, \quad \text{Con}_{16} = \frac{h_i w_{i,j} F_{i+1,j+1}^x}{F_{i+1,j+1} - Z_{i,j+1} - Z_{i+1,j} + Z_{i,j}}.$$

dir.

2.4 Pozitif Eğri Enterpolasyonu

Pozitif enterpolasyon sorunu aşağıdaki gibi tanımlanabilir. Verilen veri noktaları için $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ ve $f_0 > 0, f_1 > 0, \dots, f_n > 0$, tüm aralık boyunca $[x_0, x_n]$ pozitif olan bir enterpolasyon $S(x) \in C^1[x_0, x_n]$ oluşturur ki bu

$$S(x) > 0, \quad x_0 \leq x \leq x_n$$

olacak şekildedir. Anahtar fikir, pozitifliği garanti eden r_i, u_i, v_i, w_i için koşulları belirlemektir. $r_i, u_i, v_i, w_i > 0$ 'ın kesinlikle pozitif payda $q_i(\theta)$ 'yı garanti ettiği belirtilebilir. Bu nedenle koşullar

$$r_i > 0, u_i > 0, v_i > 0, w_i > 0 \quad (42)$$

olacak şekildedir ve $q_i(\theta) > 0$ için yeterlidir. Bu nedenle, $S_i(x) = p_i(\theta)/q_i(\theta)$ 'nin pozitifliği, kübik polinom $p_i(\theta)$ 'nin pozitifliğine bağlıdır ve problem polinom $p_i(\theta) > 0$ olan r_i, u_i, v_i, w_i değerlerinin uygun değerlerinin belirlenmesi ile azalır. $p_i(\theta)$ olarak

$$p_i(\theta) = \alpha_i \theta^3 + \beta_i \theta^2 + \gamma_i \theta + \delta_i, \quad (43)$$

yeniden yazılabilir ki burada

$$\begin{aligned} \alpha_i &= (w_i - v_i) f_{i+1} - (r_i - u_i) f_i + (w_i d_{i+1} + r_i d_i) h_i, \\ \beta_i &= v_i f_{i+1} + (3r_i - 2u_i) f_i - (w_i d_{i+1} + 2r_i d_i) h_i, \\ \gamma_i &= r_i d_i h_i - (3r_i - u_i) f_i, \\ \delta_i &= r_i f_i. \end{aligned}$$

(43) Schmidt ve Hess (1988)'deki katı eşitsizlik için (pozitif veriler için), $p_i(\theta) > 0$ ise

$$(p'_i(0), p'_i(1)) \in R_1 \cup R_2, \quad (44)$$

dir ki burada

$$\begin{aligned} R_1 &= \left\{ (a, b) : a > \frac{-3f_i}{h_i}, b < \frac{3f_{i+1}}{h_i} \right\}, \\ R_2 &= \left\{ (a, b) : 36f_i f_{i+1} (a^2 + b^2 + ab - 3\Delta_i(a+b) + 3\Delta_i^2) + 3(f_{i+1}a - f_i b)(2h_i ab - 3f_{i+1}a) \right. \\ &\quad \left. + 3f_i b + 4h_i(f_{i+1}a^3 - f_i b^3) - h_i^2 a^2 b^2 > 0. \right\} \end{aligned}$$

dir ve burada

$$p'_i(0) = \frac{-3r_i f_i}{h_i} + \frac{u_i f_i}{h_i} + r_i d_i,$$

$$p'_i(1) = \frac{3w_i f_{i+1}}{h_i} + \frac{-v_i f_{i+1}}{h_i} + w_i d_{i+1}$$

dir.

Denklem (44) doğru olduğunda

$$(p'_i(0), p'_i(1)) \in R_1 \quad (45)$$

veya

$$p'_i(0) > \frac{-3f_i}{h_i}, \quad p'_i(1) < \frac{3f_{i+1}}{h_i}$$

dir.

Bu aşağıdaki kısıtlamalara yol açar

$$u_i > \frac{-h_i r_i d_i}{f_i}, \quad v_i > \frac{h_i w_i d_{i+1}}{f_{i+1}}. \quad (46)$$

Ayrıca eğer $(p'_i(0), p'_i(1)) \in R_2$ için

$$\begin{aligned} & \phi(r_i, u_i, v_i, w_i) \\ &= 36 f_i f_{i+1} [\phi_1^2(r_i, u_i) + \phi_2^2(v_i, w_i) + \phi_1(r_i, u_i) \phi_2(v_i, w_i) - 3\Delta_i (\phi_1(r_i, u_i) + \phi_2(v_i, w_i)) + 3\Delta_i^2] \\ &+ 3[f_{i+1} \phi_1(r_i, u_i) - f_i \phi_2(v_i, w_i)] [2h_i \phi_1(r_i, u_i) \phi_2(v_i, w_i) - 3f_{i+1} \phi_1(r_i, u_i) + 3f_i \phi_2(v_i, w_i)] \\ &+ 4h_i [f_{i+1} \phi_1^3(r_i, u_i) - f_i \phi_2^3(v_i, w_i)] - h_i^2 \phi_1^2(r_i, u_i) \phi_2^2(v_i, w_i) \geq 0, \end{aligned} \quad (47)$$

olduğunda

$$\phi_1(r_i, u_i) = p'_i(0), \quad \phi_2(v_i, w_i) = p'_i(1)$$

dir.

Ayrıca kullanıcı arabirimi ve v_i üzerindeki kısıtlamalar denklem (10)'dan belirlebilir fakat çok fazla hesaplama gerektiriyor. Dolayısıyla etkili ve makul bir şekilde kabul edilebilir bir seçenek (9)'da verilen koşulları kullanmaktır. Bu, aşağıdaki teoreme yol açar.

Teorem 2.4 Rasyonel kübik polinom (2) eğer pozitifliği koruyorsa

$$u_i > \text{Max} \left\{ 0, \frac{-h_i r_i d_i}{f_i} \right\}, \quad v_i > \text{Max} \left\{ 0, \frac{h_i w_i d_{i+1}}{f_{i+1}} \right\} \quad (48)$$

dir.

Uyarı 2.4.1 Çoğu uygulamada $\{d_i\}$ türev parametreleri verilmez ve bu nedenle verilen veriler başka bir yöntemle belirlenmelidir. Burada verilen verilerden enterpolasyon C^1 pürüzsüzlüğünü koruyacak şekilde hesaplama yapılır. Bu yöntemler çeşitli matematiksel teorilere dayanan yaklaşımlardır. Bu tür yaklaşımların aritmetik, geometrik ve harmonik ortalama açıklamaları güncel literatürde bulunabilir. Burada önerilen şemada aritmetik ortalama seçimi benimsenmiştir.

Uyarı 2.4.2 u_i ve v_i parametreleri, pozitif verilerin şeklini korumak için sınırlandırılmıştır. Bununla birlikte, kullanıcı istenen bir pozitif eğri elde etmek için r_i ve w_i parametrelerinin değerlerini serbestçe seçebilir. Bu seçim, sayısal uygulamalar ve gösterim bölümünde eğrilerin üretilmesinde kullanılır. Bu parametrelerin uygunluğu hakkında daha ayrıntılı bilgi araştırma bulgularında gösterilmiştir.

2.4.1 Pozitif Yüzey Enterpolasyonu

$\pi: a = x_0 < x_1 < \dots < x_m$, $[a, b]$ 'nin bir parçası olsun ve $\hat{\pi}: c = y_0 < y_1 < \dots < y_n$, $[c, d]$ 'nin bir parçası olsun. $F_{i,j} > 0, \forall i = 0, 1, 2, \dots, m; j = 0, 1, 2, \dots, n$ gibi $\{F_{i,j} : i = 0, 1, 2, \dots, m; j = 0, 1, 2, \dots, n, (m+1) \times (n+1)$ veri değerlerinin bir kümesidir. Amaç, $D = [a, b] \times [c, d]$ 'ye bir parçalı rasyonel bikübik fonksiyon $S(x, y)$ inşa etmektir.

$$S(x_i, y_j) = F_{i,j}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, m; \quad j = 0, 1, 2, \dots, n,$$

ve $S(x, y) > 0$ için $(x, y) \in D$ ve (12)'de verilen denklemdeki gibi ifade edebiliriz:

$$S(x, y) = \frac{\alpha_{i,j}(1-\theta)^3 + \beta_{i,j}(1-\theta)^2\theta + \gamma_{i,j}(1-\theta)\theta^2 + \delta_{i,j}\theta^3}{r_{i,j}(1-\theta)^3 + u_{i,j}(1-\theta)^2\theta + v_{i,j}(1-\theta)\theta^2 + w_{i,j}\theta^3}, \quad (49)$$

burada

$$\alpha_{i,j} = r_{i,j}F_{i,j}\hat{a}_0 + r_{i,j}F_{i,j+1}\hat{a}_1 + r_{i,j}F_{i,j}^y\hat{a}_2 + r_{i,j}F_{i,j+1}^y\hat{a}_3,$$

$$\beta_{i,j} = (u_{i,j}F_{i,j} + h_i r_{i,j}F_{i,j}^x)\hat{a}_0 + (u_{i,j}F_{i,j+1} + h_i r_{i,j}F_{i,j+1}^x)\hat{a}_1 + (u_{i,j}F_{i,j}^y + h_i r_{i,j}F_{i,j}^{xy})\hat{a}_2 + (u_{i,j}F_{i,j+1}^y + h_i r_{i,j}F_{i,j+1}^{xy})\hat{a}_3,$$

$$\gamma_{i,j} = (v_{i,j}F_{i+1,j} - h_i w_{i,j}F_{i+1,j}^x)\hat{a}_0 + (v_{i,j}F_{i+1,j+1} - h_i w_{i,j}F_{i+1,j+1}^x)\hat{a}_1 + (v_{i,j}F_{i+1,j}^y - h_i w_{i,j}F_{i+1,j}^{xy})\hat{a}_2 + (v_{i,j}F_{i+1,j+1}^y - h_i w_{i,j}F_{i+1,j+1}^{xy})\hat{a}_3,$$

$$\delta_{i,j} = w_{i,j}F_{i+1,j}\hat{a}_0 + w_{i,j}F_{i+1,j+1}\hat{a}_1 + w_{i,j}F_{i+1,j}^y\hat{a}_2 + w_{i,j}F_{i+1,j+1}^y\hat{a}_3$$

dir.

Yani $S(x, y)$ pozitifse

$$\alpha_{i,j}(1 - \theta)^3 + \beta_{i,j}\theta(1 - \theta)^2 + \gamma_{i,j}\theta^2(1 - \theta) + \delta_{i,j}\theta^3 > 0, \quad (50)$$

$$r_{i,j} > 0, u_{i,j} > 0, v_{i,j} > 0, w_{i,j} > 0, \quad (51)$$

$$\hat{r}_{i,j} > 0, \hat{u}_{i,j} > 0, \hat{v}_{i,j} > 0, \hat{w}_{i,j} > 0 \quad (52)$$

dir.

Yazının geri kalanı boyunca (51) ve (52)'deki kısıtlamaların her zaman var olduğu varsayımına sahip olacağız. Dolayısıyla (50) aşağıdaki kısıtlamaların geçerli olması durumunu sağlar:

$$\alpha_{i,j} > 0, \beta_{i,j} > 0, \gamma_{i,j} > 0, \delta_{i,j} > 0.$$

Düzenledikten sonra elde ettiğimiz $\alpha_{i,j}$ 'yi düşünün:

$$\alpha_{i,j} = \frac{\left\{ \begin{array}{l} r_{i,j}\hat{r}_{i,j}F_{i,j}(1 - \hat{\theta})^3 + (r_{i,j}\hat{u}_{i,j}F_{i,j} + \hat{h}_j r_{i,j}\hat{r}_{i,j}F_{i,j}^y)(1 - \hat{\theta})^2\hat{\theta} \\ + (r_{i,j}\hat{v}_{i,j}F_{i,j+1} - \hat{h}_j r_{i,j}\hat{w}_{i,j}F_{i,j+1}^y)(1 - \hat{\theta})\hat{\theta}^2 + r_{i,j}\hat{w}_{i,j}F_{i,j+1}\hat{\theta}^3 \end{array} \right\}}{\hat{r}_{i,j}(1 - \hat{\theta})^3 + \hat{u}_{i,j}(1 - \hat{\theta})^2\hat{\theta} + \hat{v}_{i,j}(1 - \hat{\theta})\hat{\theta}^2 + \hat{w}_{i,j}\hat{\theta}^3}. \quad (53)$$

Burada

$$\alpha_{i,j} > 0 \text{ ise}$$

$$\hat{u}_{i,j} > \frac{-\hat{h}_j \hat{r}_{i,j} F_{i,j}^y}{F_{i,j}}, \quad \hat{v}_{i,j} > \frac{\hat{h}_j \hat{w}_{i,j} F_{i,j+1}^y}{F_{i,j+1}} \quad (54)$$

dir. $\beta_{i,j} > 0$ olduğunu benzer şekilde göstermek istersek

$$\hat{u}_{i,j} > \frac{-\hat{h}_j \hat{r}_{i,j} F_{i,j}^y}{F_{i,j}}, \quad \hat{v}_{i,j} > \frac{\hat{h}_j \hat{w}_{i,j} F_{i,j+1}^y}{F_{i,j+1}}, \quad (55)$$

dir. Sonuç olarak

$$\left\{ \frac{-h_i r_{i,j} F_{i,j}^x}{F_{i,j}}, \frac{-h_i r_{i,j} F_{i,j+1}^x}{F_{i,j+1}}, \frac{-h_i r_{i,j} (\hat{u}_{i,j} F_{i,j}^x + \hat{h}_j \hat{r}_{i,j} F_{i,j}^{xy})}{\hat{u}_{i,j} F_{i,j} + \hat{h}_j \hat{r}_{i,j} F_{i,j}^y}, \frac{-h_i r_{i,j} (\hat{v}_{i,j} F_{i,j+1}^x - \hat{h}_j \hat{w}_{i,j} F_{i,j+1}^{xy})}{\hat{v}_{i,j} F_{i,j+1} - \hat{h}_j \hat{w}_{i,j} F_{i,j+1}^y} \right\} \quad (56)$$

elde edilir.

$\gamma_{i,j} > 0$ ise benzer şekilde gösterilebilir:

$$\hat{u}_{i,j} > \frac{-\hat{h}_j \hat{r}_{i,j} F_{i+1,j}^y}{F_{i+1,j}}, \quad \hat{v}_{i,j} > \frac{\hat{h}_j \hat{w}_{i,j} F_{i+1,j+1}^y}{F_{i+1,j+1}}, \quad (57)$$

ve

$$v_{i,j} > \text{Max} \left\{ \frac{h_i w_{i,j} F_{i+1,j}^x}{F_{i+1,j}}, \frac{h_i w_{i,j} F_{i+1,j+1}^x}{F_{i+1,j+1}}, \frac{h_i w_{i,j} (\hat{u}_{i,j} F_{i+1,j}^x + \hat{h}_j \hat{r}_{i,j} F_{i+1,j}^{xy})}{\hat{u}_{i,j} F_{i+1,j} + \hat{h}_j \hat{r}_{i,j} F_{i+1,j}^y}, \frac{h_i w_{i,j} (\hat{v}_{i,j} F_{i+1,j+1}^x - \hat{h}_j \hat{w}_{i,j} F_{i+1,j+1}^{xy})}{\hat{v}_{i,j} F_{i+1,j+1} - \hat{h}_j \hat{w}_{i,j} F_{i+1,j+1}^y} \right\}, \quad (58)$$

elde edilir ve sonuçta $\delta_{i,j} > 0$ ise

$$\hat{u}_{i,j} > \frac{-\hat{h}_j \hat{r}_{i,j} F_{i+1,j}^y}{F_{i+1,j}}, \quad \hat{v}_{i,j} > \frac{\hat{h}_j \hat{w}_{i,j} F_{i+1,j+1}^y}{F_{i+1,j+1}} \quad (59)$$

olur.

Yukarıdakiler şöyle özetlenebilir:

Teorem 2.4.1 Dikdörtgen örgü $D = [x_0, x_m] \times [y_0, y_n]$, (3) denklemi içinde tanımlanan parçalı rasyonel bikübik enterpolasyon $S(x, y)$, aşağıdaki koşullar yeterli olursa pozitif olur:

$$S(x_i, y_j) = F_{i,j} > 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots, m; \quad j = 0, 1, 2, \dots, n, \quad (60)$$

$$r_{i,j} > 0, \hat{r}_{i,j} > 0, w_{i,j} > 0, \hat{w}_{i,j} > 0, \quad (61)$$

$$\hat{u}_{i,j} > \text{Max} \left\{ 0, \frac{-\hat{h}_j \hat{r}_{i,j} F_{i,j}^y}{F_{i,j}}, \frac{-\hat{h}_j \hat{r}_{i,j} F_{i+1,j}^y}{F_{i+1,j}} \right\}, \quad (62)$$

$$\hat{v}_{i,j} > \text{Max} \left\{ 0, \frac{\hat{h}_j \hat{w}_{i,j} F_{i,j+1}^y}{F_{i,j+1}}, \frac{\hat{h}_j \hat{w}_{i,j} F_{i+1,j+1}^y}{F_{i+1,j+1}} \right\}, \quad (63)$$

$$u_{i,j} > \text{Max} \left\{ 0, \frac{-h_i r_{i,j} F_{i,j}^x}{F_{i,j}}, \frac{-h_i r_{i,j} F_{i,j+1}^x}{F_{i,j+1}}, \frac{-h_i r_{i,j} (\hat{u}_{i,j} F_{i,j}^x + \hat{h}_j \hat{r}_{i,j} F_{i,j}^{xy})}{\hat{u}_{i,j} F_{i,j} + \hat{h}_j \hat{r}_{i,j} F_{i,j}^y}, \frac{-h_i r_{i,j} (\hat{v}_{i,j} F_{i,j+1}^x - \hat{h}_j \hat{w}_{i,j} F_{i,j+1}^{xy})}{\hat{v}_{i,j} F_{i,j+1} - \hat{h}_j \hat{w}_{i,j} F_{i,j+1}^y} \right\}, \quad (64)$$

$$v_{i,j} > \text{Max} \left\{ 0, \frac{h_i w_{i,j} F_{i+1,j}^x}{F_{i+1,j}}, \frac{h_i w_{i,j} F_{i+1,j+1}^x}{F_{i+1,j+1}}, \frac{h_i w_{i,j} (\hat{u}_{i,j} F_{i+1,j}^x + \hat{h}_j \hat{w}_{i,j} F_{i+1,j}^{xy})}{\hat{u}_{i,j} F_{i+1,j} + \hat{h}_j \hat{w}_{i,j} F_{i+1,j}^y}, \frac{h_i w_{i,j} (\hat{v}_{i,j} F_{i+1,j+1}^x - \hat{h}_j \hat{w}_{i,j} F_{i+1,j+1}^{xy})}{\hat{v}_{i,j} F_{i+1,j+1} - \hat{h}_j \hat{w}_{i,j} F_{i+1,j+1}^y} \right\} \quad (65)$$

dir.

Kanıt. (62) ve (63) denklemleri (52), (54), (55), (57) ve (59) denklemlerden türetilmiştir. Buna ilave olarak (64) denklemi, (51) ve (56) denklemlerinden türetilmiştir. Son olarak denklem (65) denklemi de (51) ve (58) denklemlerinden türetilmiştir.

3. ARAŞTIRMA BULGULARI

3.1 Sınırlı Verilerin Görselleştirilmesinde Sayısal Uygulamalar

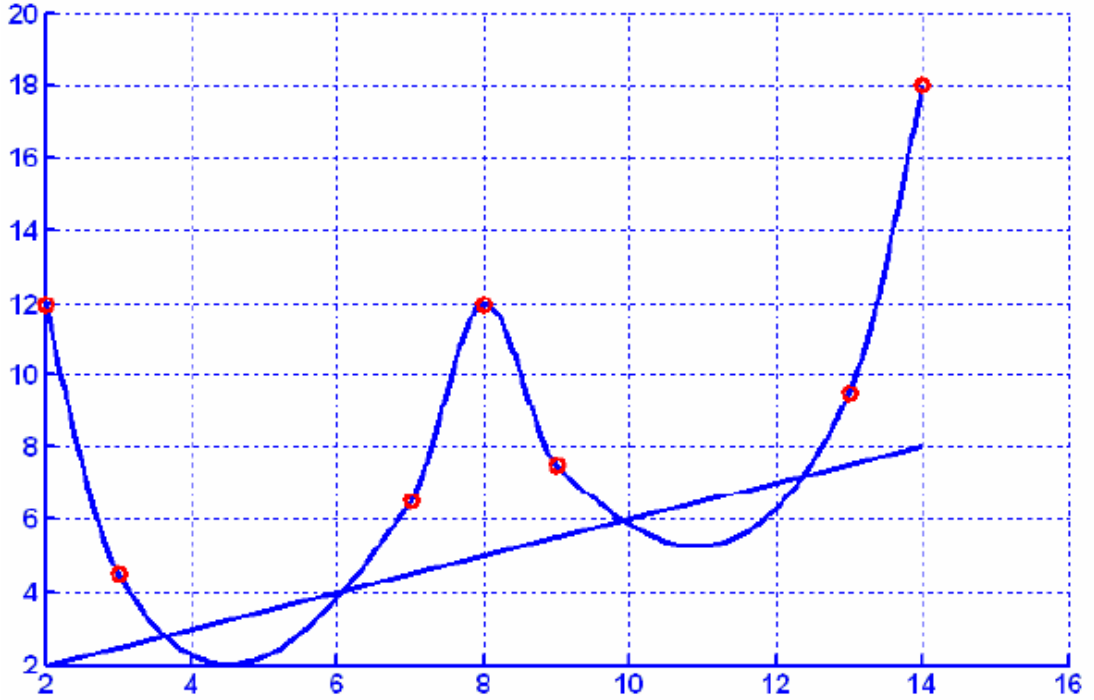
Bu sayısal uygulamalar 2.3 ve 2.3.1 kısımlarda geliştirilen şeklin korunması sayısal olarak örneklendirilmiştir.

Çizelge 3.1 Şekil korunmasında verilerin değerleri

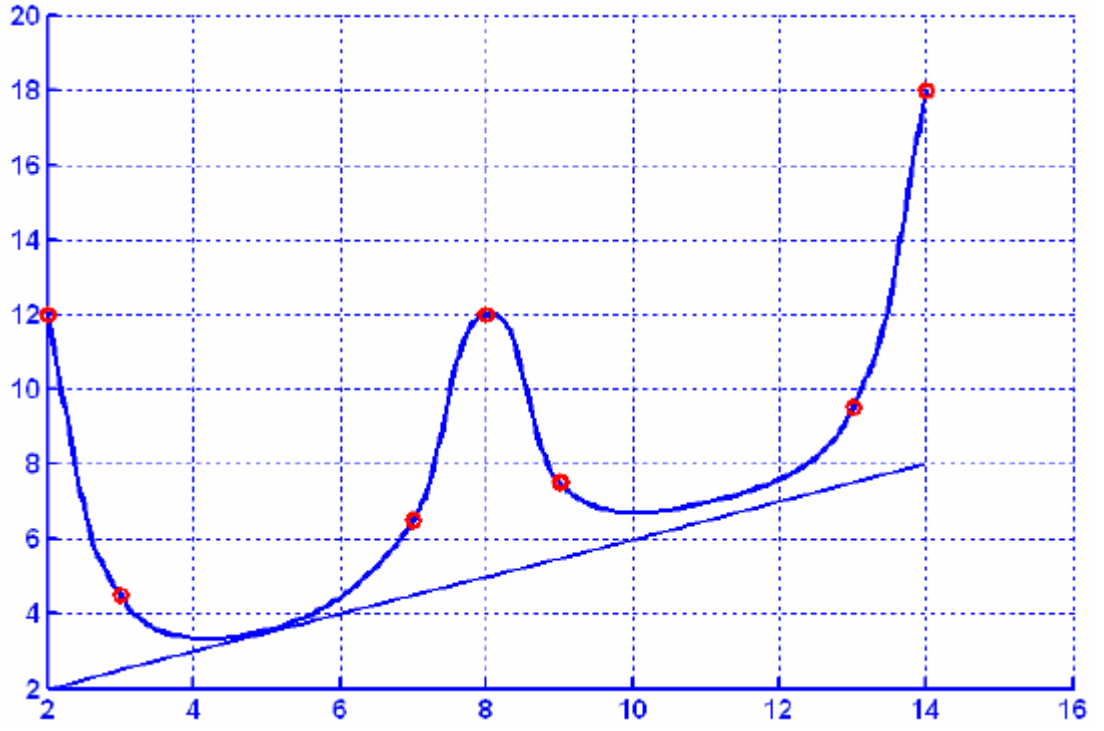
x	2	3	7	8	9	13	14
y	12	4.5	6.5	12	7.5	9.5	18

Çizelge 3.1'deki veriler $y = \frac{x}{2} + 1$ doğrusu üzerinde konumlanır.

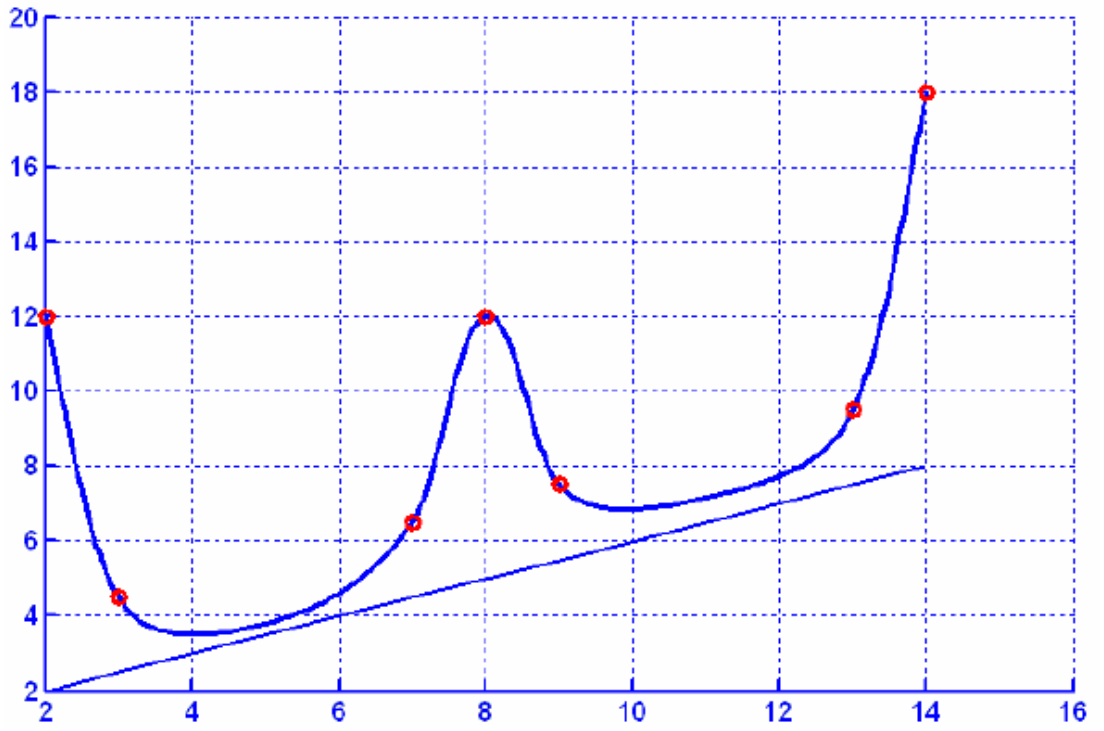
Şekil 3.1, kullanılan kübik hermite splinedan üretilmiştir. Kübik Hermite spline $r_i = w_i = 1$ ve $u_i = v_i = 3$ için rasyonel kübik fonksiyonunun özel durumudur. Şekil 3.1'de açıkça belli ki eğri aykırı doğrunun altında konumlandırılmış. Şekil 3.2 Bölüm 2.3'deki $r_i = w_i = 0.5$ ile geliştirilen şekil kullanılarak üretilmiştir. Bu şekilden görünüyor ki eğri sadece doğrunun üzerinde konumlanmış fakat yakınladığımızda eğri doğrunun üzerinde olduğu netleşir. Bu hata Bölüm 2.3'de geliştirilen şekil ve $r_i = w_i = 0.25$ ayarı kullanılarak Şekil 3.3'de güzelce düzeltildi. Şekil 3.3 sadece korunmuş şekil bilgileri değil ayrıca eğri görsel olarak memnun edici. Şekil 3.4'deki bağımsız parametrelerin değerleri $r_i = w_i = 0.1$ değiştiğinde şekil verileri korunur fakat eğri sıkışır. Bundan dolayı en uygun eğri Şekil 3.3'de elde edilir.



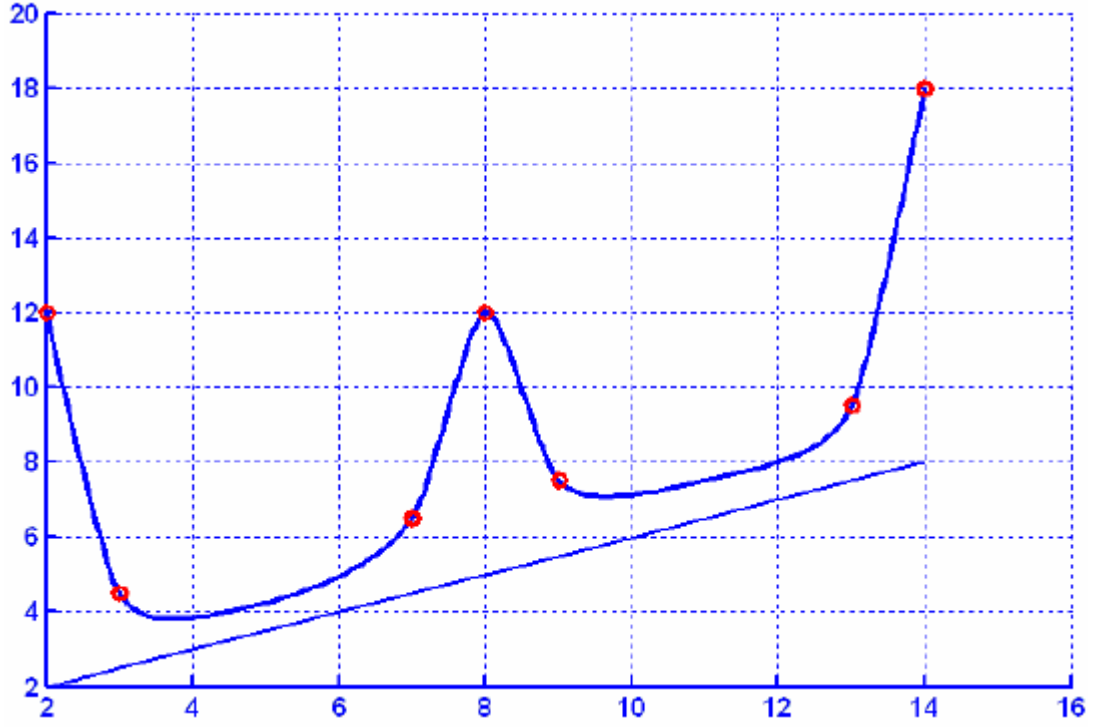
Şekil 3.1 Kübik Hermite Spline



Şekil 3.2 $r_i = w_i = 0.5$ iken rasyonel kübik fonksiyon



Şekil 3.3 $r_i = w_i = 0.25$ iken rasyonel kübik fonksiyon



Şekil 3.4 $r_i = w_i = 0.1$ iken rasyonel kübik fonksiyon

Çizelge 3.2'deki veri dizisi aşağıdaki fonksiyonlardan oluşur:

$$F(x, y) = \sin(|x| + |y|) + 1.2, 1 \leq x, y \leq 6$$

Çizelge 3.2 Fonksiyondan oluşturulan bilgiler $F(x, y) = \sin(|x| + |y|) + 1.2, 1 \leq x, y \leq 6$

y/x	1	2	3	4	5	6
1	2.1093	1.3411	0.4432	0.2411	0.9206	1.8570
2	1.3411	0.4432	0.2411	0.9206	1.8570	2.1894
3	0.4433	0.2411	0.9206	1.8570	2.1894	1.6121
4	0.2411	0.9206	1.8570	2.1894	1.6121	0.6560
5	0.9206	1.8570	2.1894	1.6121	0.6560	0.2000
6	1.8570	2.1894	1.6121	0.6560	0.2000	0.6634

Bu bilgi düzlem üzerinde konumlanmıştır.

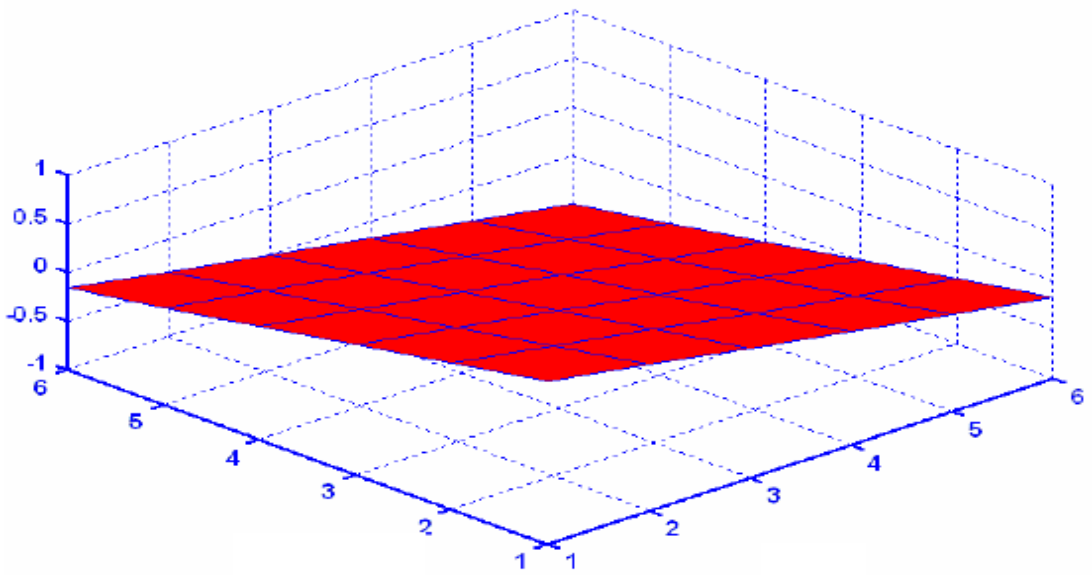
$$Z = \left(1 - \frac{x}{6} - \frac{y}{6}\right), 1 \leq x, y \leq 6.$$

Çizelge 3.3, Z düzlemi tarafından oluşturulan verileri içerir.

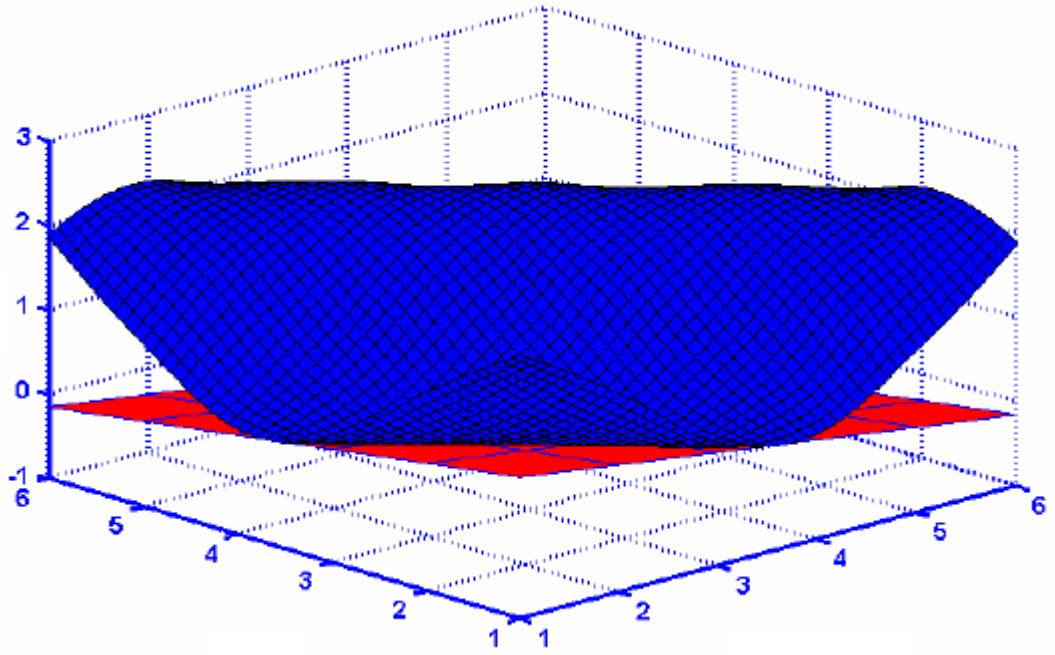
Çizelge 3.3 Z düzlemi tarafından oluşturulan veriler:

y/x	1	2	3	4	5	6
1	0.6667	0.5000	0.3333	0.1667	0.0000	-0.1667
2	0.5000	0.3333	0.1667	0.0000	-0.1667	-0.3333
3	0.3333	0.1667	0.0000	-0.1667	-0.3333	-0.5000
4	0.1667	0.0000	-0.1667	-0.3333	-0.5000	-0.6667
5	0.0000	-0.1667	-0.3333	-0.5000	-0.6667	-0.8333
6	-0.1667	-0.3333	-0.5000	-0.6667	-0.8333	-1.0000

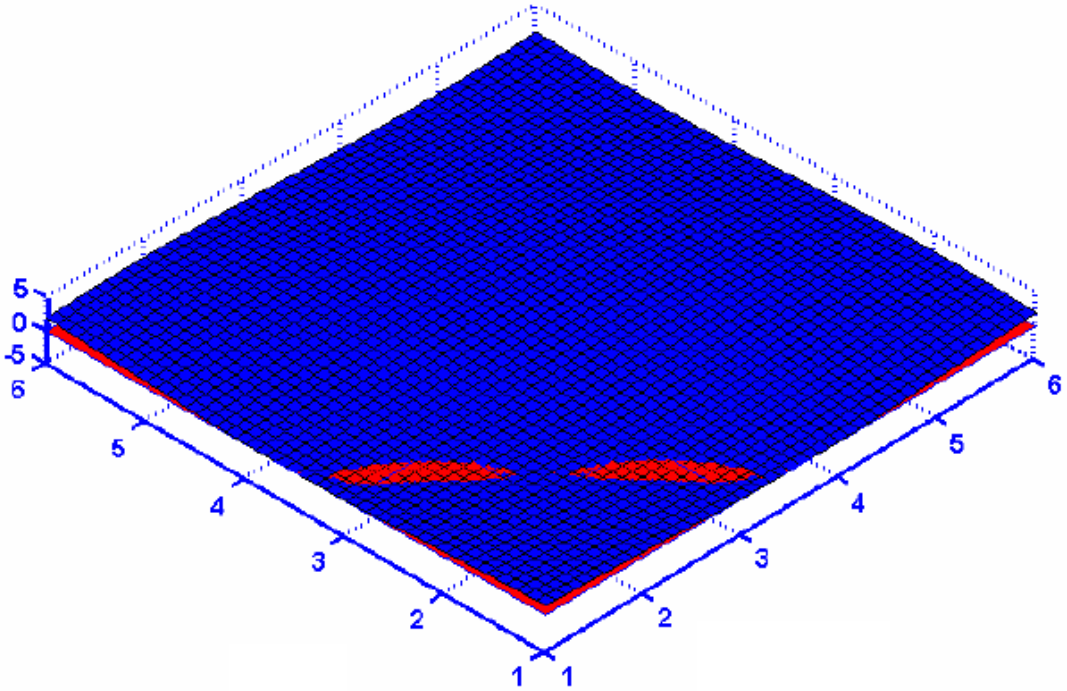
Şekil 3.5, Z düzlemidir. Şekil 3.6, biküçük fonksiyon oluşturur. Biküçük fonksiyon $r_{i,j} = w_{i,j} = \hat{r}_{i,j} = \hat{w}_{i,j} = 1$ ve $u_{i,j} = v_{i,j} = \hat{u}_{i,j} = \hat{v}_{i,j} = 3$ için rasyonel biküçük fonksiyonun özel durumudur. Yüzey mavi renk ve düzlem kırmızı renktir. Şekil 3.7, Şekil 3.6'nın rotasyonundan sonra elde edilir. Kırmızı renkteki düzlem mavi yüzeyin altındadır. Fakat kırmızı renkteki düzlemin bazı kısımları düzlemin üstünde konumlanan yüzey gibi aykırı yüzeylerin üstündedir.



Şekil 3.5 Z tarafından oluşturulan yüzey

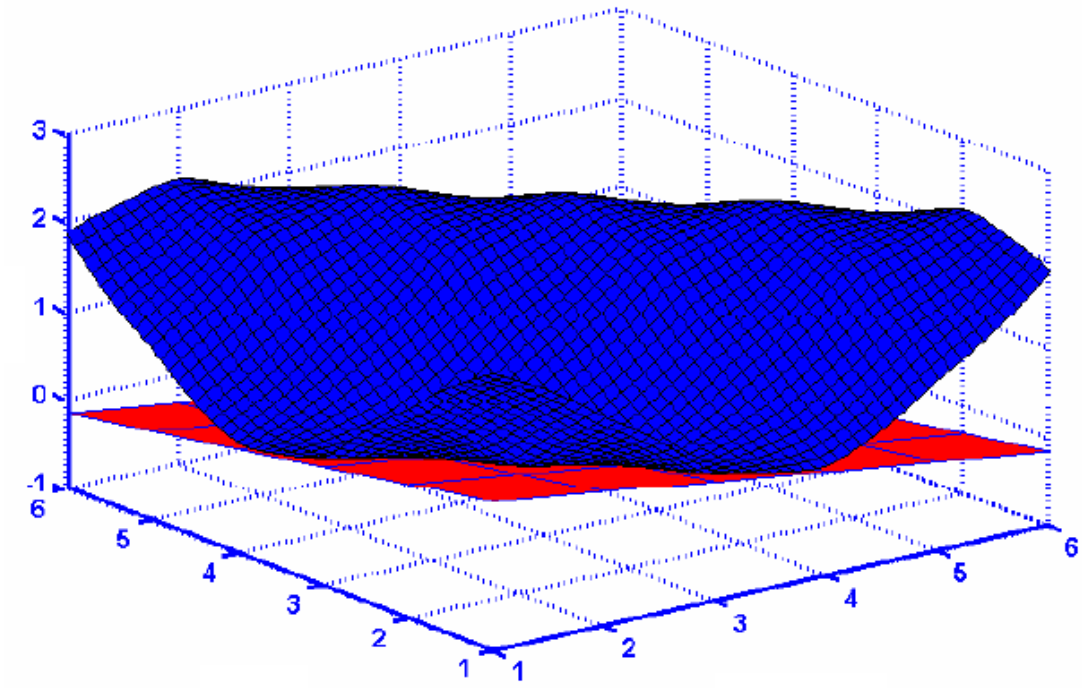


Şekil 3.6 7. Eşitlikteki $r_{i,j} = w_{i,j} = \hat{r}_{i,j} = \hat{w}_{i,j} = 1$ ve $u_{i,j} = v_{i,j} = \hat{u}_{i,j} = \hat{v}_{i,j} = 3$ için biküçük fonksiyon tarafından oluşturulan yüzey

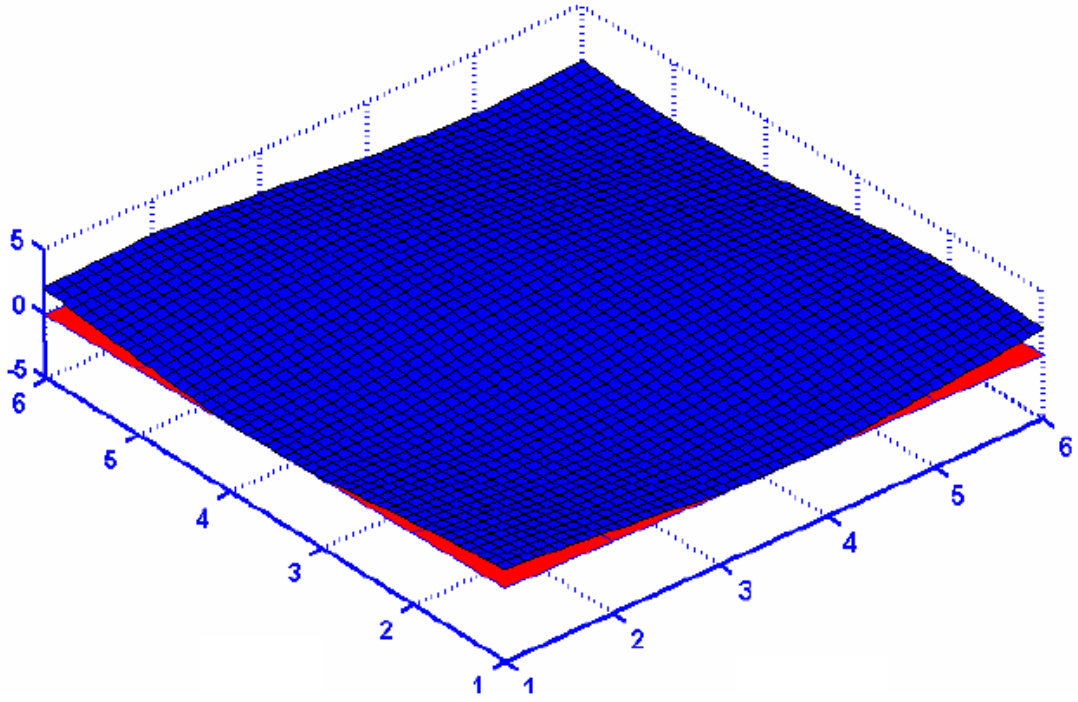


Şekil 3.7 Şekil 3.6'nın rotasyonundan sonraki durum

Bu hata $r_{i,j} = w_{i,j} = \hat{r}_{i,j} = \hat{w}_{i,j} = 0.8$ için 2.3.1 Bölümde geliştirilmiş şekil kullanılarak Şekil 3.8’de güzelce düzeltilmiştir. Şekilde açıkça nettir ki F yüzeyi düzlemin altında konumlanmıştır. Daha net olması için Şekil 3.8, Şekil 3.9’da döndürülmüştür. Şekilde açıkça nettir ki kırmızı renkli düzlem mavi renki F yüzeyinin altındadır. Bunun sonucu olarak rasyonel kübik fonksiyonu 2.3.1 Bölümde şekil tarafından geliştirilmiş olan korunmuş şeklin verileri iledir.



Şekil 3.8 $r_{i,j} = w_{i,j} = \hat{r}_{i,j} = \hat{w}_{i,j} = 0.8$ için Bölüm 2.3.1’de geliştirilen şekil tarafından oluşturulan yüzey



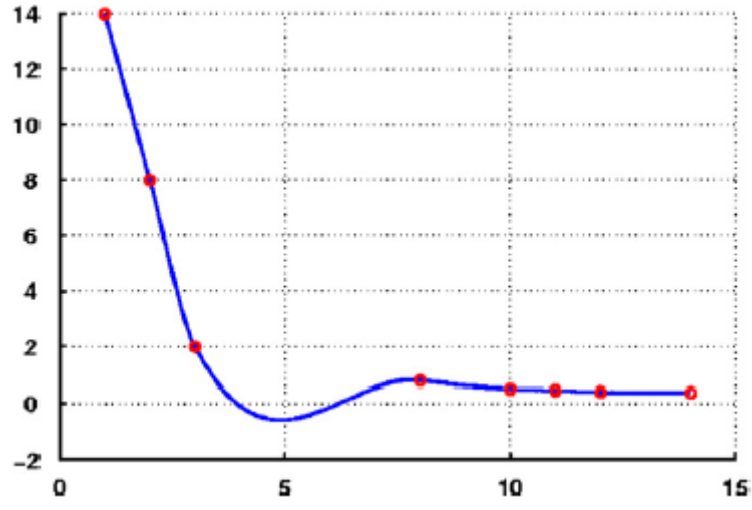
Şekil 3.9 Şekil 3.8'in rotasyonundan sonra oluşan düzlem yüzeyin altındadır

3.2 Pozitif Verilerin Korunmasının Gösterimi

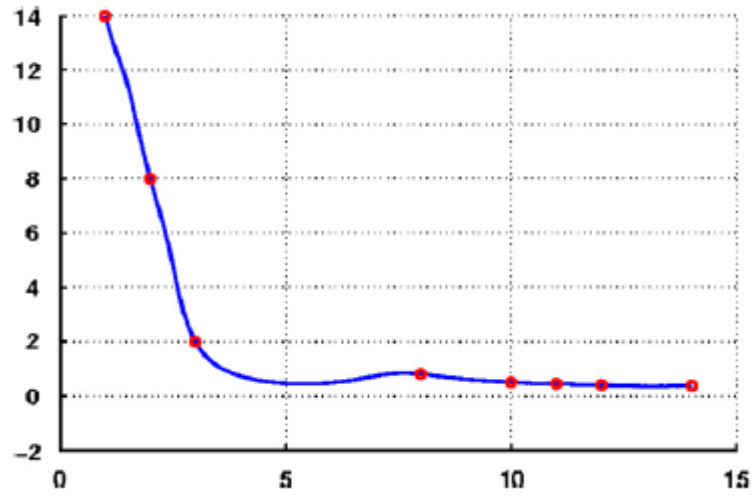
Şimdi ise pozitifliğin gösterimi için eğri ve yüzey şemalarının pratik gösterimini inceleyeceğiz. Öncelikle, Çizelge 3.4'deki pozitif veri örneğini ele alalım. Bölüm 2.1'de belirtildiği gibi varsayılan değerleri $r_i = w_i = 1$ ve $u_i = v_i = 3$, Şekil 3.10'deki eğriyi göstermektedir. Bunun standart Hermite kübik spline olduğu belirtilmelidir. Aynı zamanda Sarfraz ve ark. (1994), yaptığı çalışma rasyonel kübik fonksiyonun özel bir durumudur. Görsel gösterimi çok açık bir şekilde tasarlanmış eğri açıklamasındaki pozitiflik kaybını yansıtır. Önerilen eğri şemasını uyguladıktan sonra, Şekil 3.11, serbest parametrelerin $r_i = w_i = 2$ olarak ayarlandığı Bölüm 2.4.1'deki pozitif rasyonel fonksiyonu kullanarak pozitif veriler aracılığıyla pozitif eğriyi göstermektedir. Bu u_i ve v_i 'nin Bölüm 2.4.1'deki gibi sınırlandırıldığından bahsetmek önemlidir. Şekil 3.1.2, Bölüm 2.4.1'in pozitif rasyonel fonksiyonunu kullanarak Çizelge 3.4'deki pozitif verilerde pozitif eğriyi gösterir, burada parametrelerin seçimi $r_i = w_i = 1.6$ olarak yapılmıştır. Ayrıca

Çizelge 3.4 Pozitif veriler

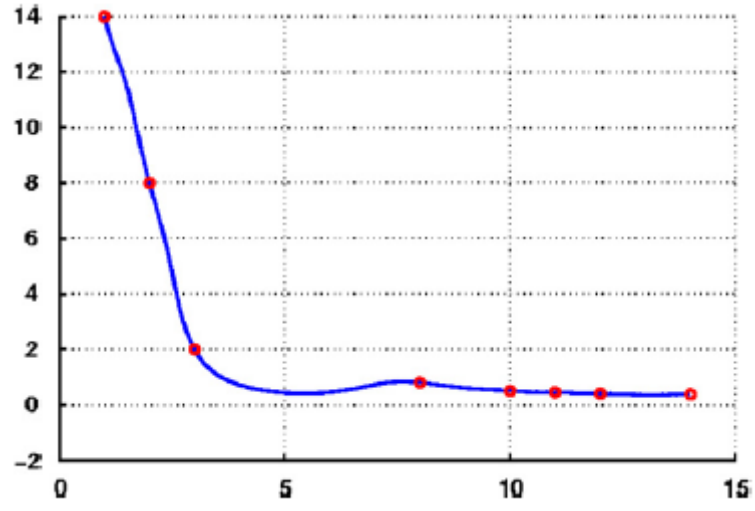
x	1	2	3	8	10	11	12	14
f	14	8	2	0.8	0.5	0.25	0.40	0.37



Şekil 3.10 Kübik Hermite Fonksiyonu



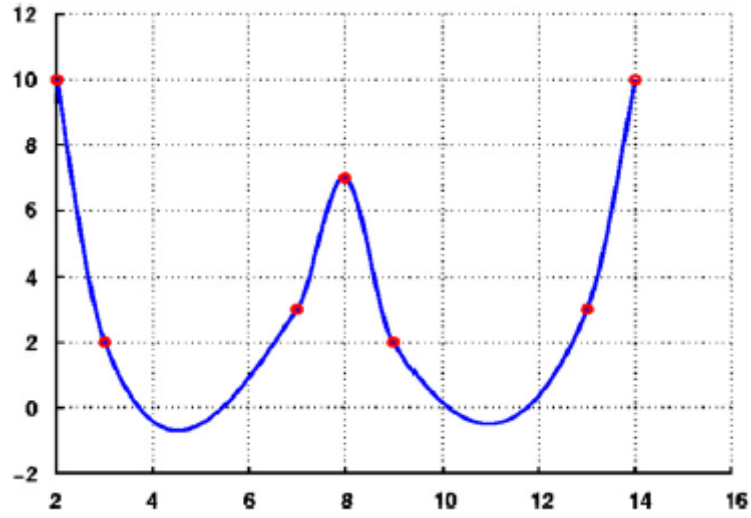
Şekil 3.11 $r_i = w_i = 2$ olan pozitif rasyonel kübik spline



Şekil 3.12 $r_i = w_i = 1.6$ olan pozitif rasyonel kübik spline

Çizelge 3.5 Bilinen NaOH hacminin pozitif verileri

x	2	3	7	8	9	13	14
f	10	2	3	7	2	3	10



Şekil 3.13 Kübik Hermite fonksiyon

şekillerde yapılan değişiklikler 3.11 ve 3.12’de mümkündür. Bu uygun değerleri $r_i > 0$ ve $w_i > 0$ ’a atamakla başarılabilir.

Uyarı 6.1 Bu $r_i > 0$ ve $w_i > 0$ ’ın uygun değerleri nelerdir? Bu ilginç bir soru. Bu yazıda onları varsayılan değerler olarak kabul ettik ve bu değerler $r_i = w_i = 1$ olarak aldık. Varsayılan önerilen pozitif eğri düzgün veri için bu sunum yeterlidir. Bununla birlikte, r_i ve w_i ’nin varlığı kullanıcının istediği yerde değişiklik yapması için ekstra serbestlik derecesi sağlar. Bu tür değişikliklerin yapılması, önerilen şemaya, ihtiyaç duyulduğunda eğri sunumunu daha istenen bir şekilde (olabilir) görselleştirmeye yardımcı olabilecek kullanışlı bir özelliktir. Bu değerleri manuel olarak sağlamamanın uygun olmadığı doğrudur. İstersek bu değerleri problemin ihtiyacına göre otomatikleştirebiliriz. Bazı deterministik veya deterministik olmayan optimizasyon teknikleri bu amaç için kullanılabilir, bu yine bir araştırma problemidir ve gelecekteki çalışmalara bırakılmıştır.

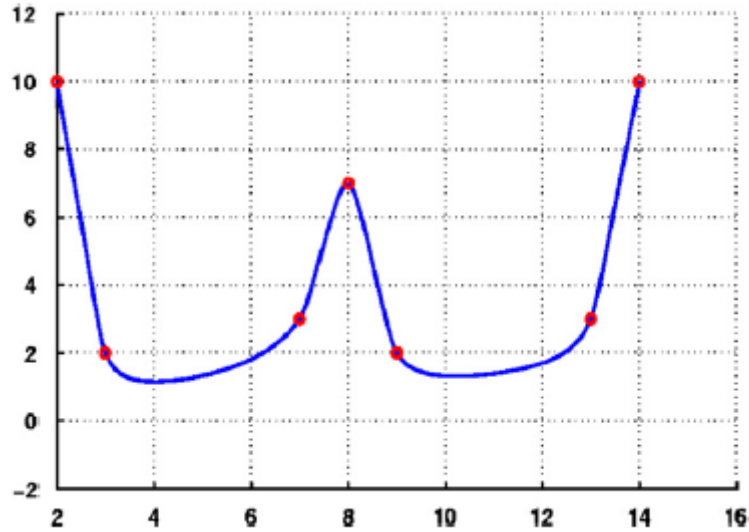
İkinci örnek, bir beherde alınan ve iletkenliğinin belirlendiği bilinen NaOH hacminin bir gösterimidir. Damla damla adımlarla büretten HCl çözeltisi ilave edilir ve her ilaveden sonra HCl (x) hacmi hafifçe çalkanarak karıştırılır ve iletkenlik (f), Çizelge 3.5’de gösterildiği gibi belirlenir. Varsayılan kübik Hermite spline yöntemi, Şekil 3.13’deki eğriyi üretiyor. Bu eğri, iletkenliğin negatif değerini gösterir. Bu saçmalık. Bu kusur, bu yazının rasyonel kübik düzenini koruyan pozitifliği kullanarak Şekil 3.14’de güzel bir şekilde düzelmiştir, serbest parametrelere $r_i = w_i = 0.1$ olarak

değerler atanmıştır. Şekil 3.15, $r_i = 0.5$ ve $w_i = 0.5$ olarak serbest parametrelerin seçimi ile pozitifliği koruma kısıtlamaları kullanılarak üretilir.

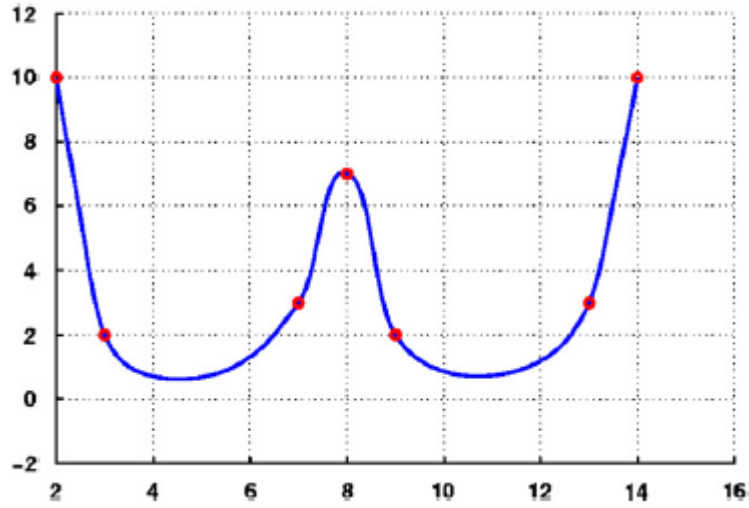
Yüzey şemasının uygulanması için, 3D veri setlerini göz önüne alalım. Gösterim amacıyla Çizelge 3.6 ve 3.7'deki iki adet 3D pozitif veri örneği seçilmiştir. Çizelge 3.6'daki veriler aşağıdaki düzgün fonksiyonunda üretilir:

$$F(x, y) = e^{-x-y} + 0.01, \quad 0.01 \leq x, y \leq 300. \quad (66)$$

Bu veriler virgülden sonra 4 basamak olacak şekilde verilmiştir. Şekil 3.16, varsayılan rasyonel spline yüzey kasası kullanılarak bu veri setinden üretilmiştir. Bu (eğri uydurma gibi) aslında ekranındaki pozitifliği yitiren bir bikübik Hermite'dir. Şekil 3.17, bir dönme yapıldıktan sonra elde edilen Şekil 3.16'nin farklı bir görünüşüdür, yüzeyin pozitiflik özelliğini korumadığını açıkça göstermektedir. Şekil 3.18, Bölüm 2.4.1'de geliştirilen yüzey şeması ile belirlenen aynı verilerden üretilmektedir.



Şekil 3.14 $r_i = w_i = 0.1$ olan pozitif rasyonel kübik spline



Şekil 3.15 $r_i = w_i = 0.5$ olan pozitif rasyonel fonksiyon

Çizelge 3.6 Denklemdede (66) pozitif bir fonksiyondan alınan bir 3D veri seti

y/x	0.01	100	200	300
0.01	0.9902	0.0100	0.0100	0.0100
100	0.0100	0.0100	0.0100	0.0100
200	0.0100	0.0100	0.0100	0.0100
300	0.0100	0.0100	0.0100	0.0100

r 's ve w 's seçimlerinde serbest olduğumuz için yüzeyi $r_{i,j} = \hat{r}_i = w_{i,j} = \hat{w}_{i,j} = 0.001$ ile hesapladık. Verilerin şeklinin olumlu bir şekilde korunduğu görülebilir.

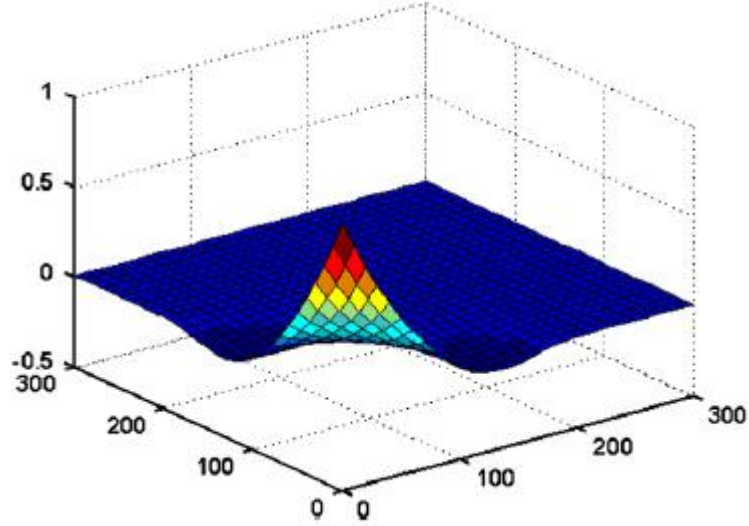
Başka bir yüzey örneği Çizelge 3.7'deki veriler içindir. Bu veriler yaklaşık olarak aşağıdaki fonksiyondan türetilmiştir:

$$F(x, y) = \frac{4}{((x^2 + y^2)^2 - 1)}, \quad -3 \leq x, y \leq 3, x, y \neq 0. \quad (67)$$

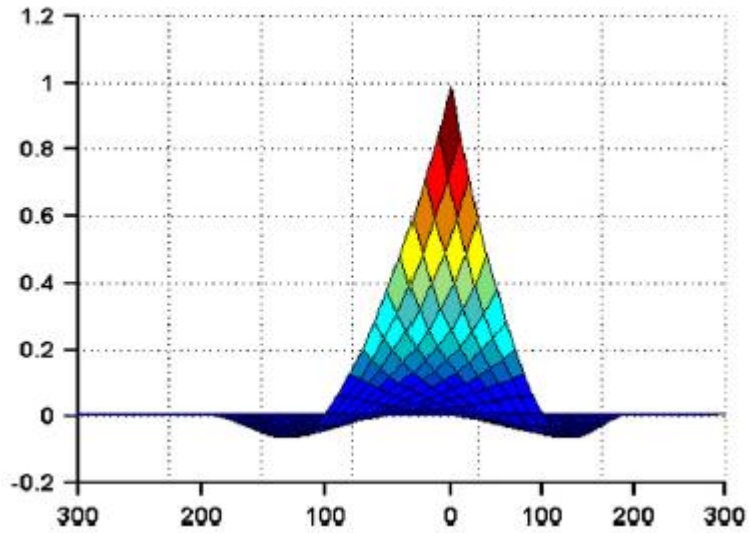
Bu veriler Çizelge 3.6'daki gibi alınır. Şekil 3.19, pozitifliği yitiren bikübik Hermite kullanılarak, Çizelge 3.7'de ayarlanan verilerden üretilmektedir. Şekil 3.20, $r_{i,j} = \hat{r}_i = w_{i,j} = \hat{w}_{i,j} = 0.005$ gibi serbest parametrelerin seçimi ile Bölüm 2.4.1'de geliştirilen pozitif yüzey şeması ile belirlenen aynı verilerden üretilmiştir. Verilerin şeklinin yüzey gösterimi ile korunduğu açıktır.

Çizelge 3.7 Denklemde (67) pozitif bir fonksiyondan alınan bir 3D veri seti

y/x	-3	-2	-1	1	2	3
-3	0.0124	0.0238	0.0404	0.0404	0.0238	0.0124
-2	0.0238	0.0635	0.1667	0.1667	0.0635	0.0238
-1	0.0404	0.1667	1.3333	1.3333	0.1667	0.0404
1	0.0404	0.1667	1.3333	1.3333	0.1667	0.0404
2	0.0238	0.0635	0.1667	0.1667	0.0635	0.0238
3	0.0124	0.0238	0.0404	0.0404	0.0238	0.0124

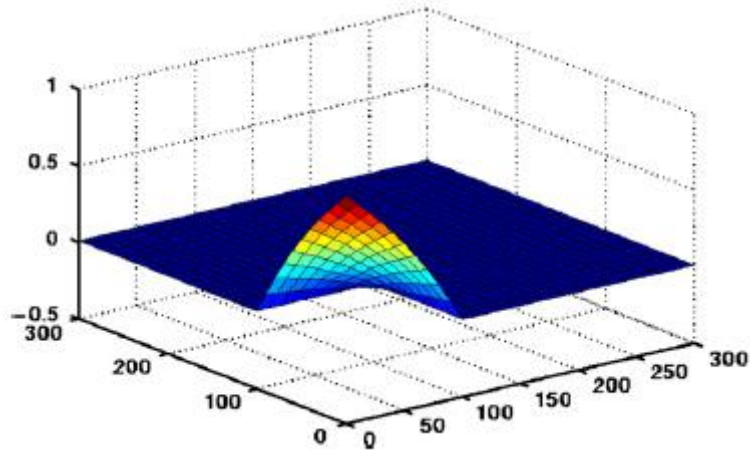


Şekil 3.16 Bikübik Hermite,denklemdeki (66) pozitif fonksiyondan alınan 3D veri kümesine yüzey oluşturur.

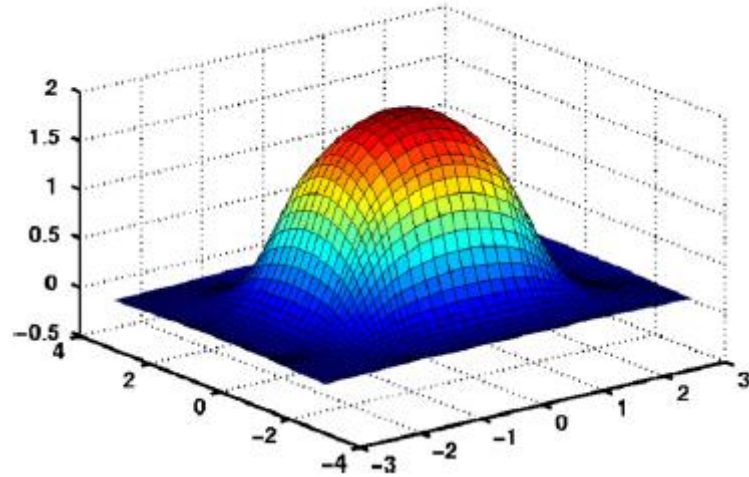


Şekil 3.17 Döndürmeden sonra Şekil 3.7'deki bikübik Hermit yüzeyinin farklı bir görüntüsü

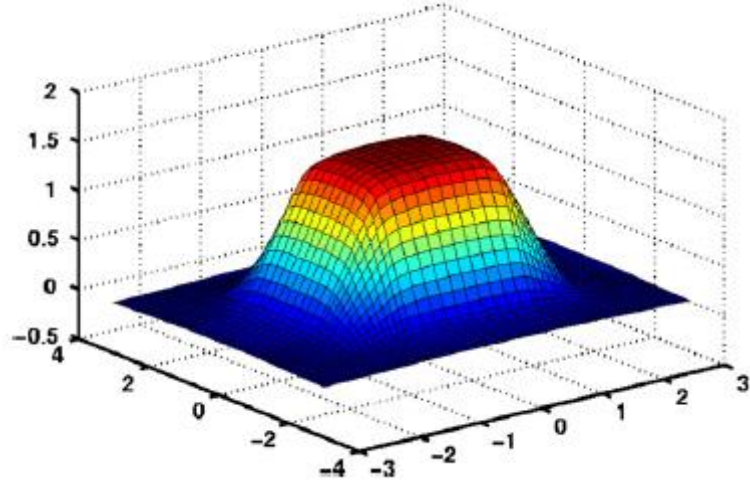
Uyarı 6.2 Eğri tanımında türevsel hesaplama ve yüzey yöntemler aritmetik ortalama seçimiyle yapılmıştır (Sarfraz ve Hussain, 2006). Bununla birlikte geometrik ve harmonik ortalama seçimleri gibi diğer sayısal türev şemaları da kullanılabilir. Kullanıcının türevlerini tanımlamak için bu kadar özgürlüğü olması da bir dezavantaj olabilir. Türevlerin ciddi problemleri olan aritmetik, geometrik veya harmonik ortalama gibi yöntemlerle tahmin edilmesi iyi bir strateji olmayabilir. Büyük veri kümeleri için bu yöntemin türevlerinin otomatik olarak nasıl tahmin edildiğinin temel sorunu açıktır. Bu sorun yazarların tartışıldığı ve bazı gelecek bulgarında bildirilmiş olabilir.



Şekil 3.18 $r_{i,j} = \hat{r}_i = w_{i,j} = \widehat{w}_{i,j} = 0.001$ olan pozitif rasyonel biküvik yüzey



Şekil 3.19 Biküvik Hermite, denklemdeki (67) pozitif fonksiyondan alınan 3D veri kümesine yüzey oluşturur.



Şekil 3.20 $r_{i,j} = \hat{r}_i = w_{i,j} = \hat{w}_{i,j} = 0.005$ olan pozitif rasyonel bikübik yüzey

4. TARTIŞMA VE SONUÇ

C^1 parçalı rasyonel kübik fonksiyonu en genel formda sınırlı veriyi görselleştirmek için kullanılmıştır. Bu parçalı rasyonel kübik fonksiyonu her bir alt aralıkta dört şekil parametreleri içerir. Veri bağımlı şekil sınırlandırmaları ile sınırlanan verinin şeklini korumak için iki şekil parametresinde türetilmiştir. Diğer ikisi ise kullanıcının seçimine bırakılır. Üstelik rasyonel kübik fonksiyonu sınırlı verilerin görselleştirilmesi dikdörtgen ızgara üzerinde düzenlenmesi için rasyonel bikübik fonksiyona türetilmiştir. Bu rasyonel bikübik fonksiyon her koordinat doğrultusu boyunca dört, her bir dikdörtgen parçada sekiz şekil parametresi içerir. Şekil etkileyici bazı sınırlamaların rasyonel bikübik fonksiyonların tanımlamalarındaki ortadaki parametreler üzerine türetilmiştir, oysaki kalan parametreler kullanıcıların istekleri doğrultusunda serbest bırakılmıştır. Önerilen eğri ve yüzey şekilleri farklı sayısal örneklerle gösterilmiştir ve görsel olarak güzel sonuçlar elde edilmiştir. Türev hesaplama için aritmetik ortalama benimsenmiştir fakat geliştirilmiş şekiller türevlerin seçiminden bağımsızdır. Ayrıca aritmetik ortalama seçim türevleri en uygun seçim değildir. Enterpolasyon problemlerinde şeklin korunması için türevin en uygun seçimleri nedir? Bu açık bir sorudur. Yazarlar cevabını gelecekte bulmayı ümit ediyorlar.

A, C^1 parçalı rasyonel kübik Hermite enterpolasyonu, dört şekil parametrelerin açıklamasıyla en genel formunda, bazı bilimsel deneylerden ortaya çıkan pozitif verileri görselleştirmek için kullanılmıştır. Kullanıcının seçimine bırakılan diğer ikisi verilerin pozitif şekil korunmasını sağlamak için veri bağımlı şekil kısıtlamalar iki şekil parametresinde elde edilir. Türev hesapmaları için aritmetik ortalama seçimi kabul edilmiştir. Fakat genel olarak türev parametrelerinin seçimi de kullanıcının isteği üzerine bırakılır. Herhangi bir sayısal türev; aritmetik, geometrik ve harmonik ortalama seçenekleri kullanılabilir. Yöntem skaler değerli eğriler için uygulandı buna karşın parametrik eğrilerin durumu gelecekteki çalışmalar için bırakıldı. Ayrıca önerilen fikri pozitif C^1 rasyonel kübik eğriden pozitif rasyonel bikübik yüzeye genişlettik. Varsayalım ki veri dikdörtgen ızgaraya düzenlenilmiş olsun. Şema, rasyonel bikübik eğrilerin tanımında orta parametrelere göre bazı kısıtlamalar getirerek türetilmiş, oysa kalan parametreler kullanıcıların yok ettiğinde serbest bırakılmıştır. Ancak, serbest parametrelerin varsayılan seçimi, her iki eğride hem de

gerekli olan değiştirilen yzeye durumlarda kullanılır. Önerilen eğri ve yzeye şemaları pratik veri kümeleri üzerinde gösterilmiştir ve görsel olarak iyi sonuç verildikleri görüldü. Önerilen pozitif eğriler veya yzeyeiler pozitif veriler için ne kadar iyi olmalıdır? Kısmen de olsa Bölüm 2.3.1’de gözlenmiş sınırlanmış ve serbest parametrelere göre bağımsız olmasına rağmen ancak belirli bir uygulamaya göre dayanan memnun edici bir seğime ulaşılır. Bu ilginç bir problemdir ve řu anda yazarların tartişmaları altındadır ve geleceğe bırakılan çalışmalardır. Benzer şekilde en uygun türev hesaplamaya sahip olmak bazı düşüncelere ihtiyacı olan problem ayrıca araştırılmıştır. Bu çalışma aynı zamanda gelecektekilere görev olarak bırakılmıştır.

5. KAYNAKLAR

- Asim, R. (2000). Visualization of data subject to positive constraint, Ph.D. Thesis, School of Computer Studies, University of Leeds, Leeds, UK.
- Asim, M.R. & Brodlie, K.W. (2003). Curve drawing subject to positivity and more general constraints, *Computers and Graphics*, 27, 469-485.
- Brodlie, K.W., Mashwama, P., & Butt, S. (1995). Visualization of surface data to preserve positivity and other simple constraints, *Comput. Graphics* 19, 585–594.
- Brodlie, K.W., Asim, M.R. & Unsworth, K. (2005). Constrained visualization using Shepard interpolation family, *Computers and Graphics forum*, 24, 809-820.
- Butt, S., & Brodlie, K. W. (1993). Preserving positivity using piecewise cubic interpolation, *Comput. Graphics* 17, (1), 55–64.
- Chan, E.S., & Ong, B.H. (2001). Range restricted scattered data interpolation using convex combination of cubic Bézier triangles, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 136, 135-147.
- Chang, G., & Sederberg, T.W. (1994). Non-negative quadratic Bézier triangular patches, *Comput. Aided Geom. Design* 11, 113–116.
- Hussain, M.Z., & Hussain, M. (2006). Visualization of data subject to positive constraints, *J. Inform. Comput. Sci.* 1, 149–160.
- Sarfraz, M., Butt, S., & Hussain, M.Z. (1994). Interpolation for the positivity using rational cubics, *Proceedings of the ISOSS-IV*, Lahore, Pakistan, August 27–31, pp. 251–261.
- Sarfraz, M., & Hussain, M.Z. (2006). Data visualization using rational spline interpolation, *J. Comput. Appl. Math.* 189, 513–525.
- Schmidt, J.W., & Hess, W. (1988). Positivity of cubic polynomial on intervals and positive spline interpolation, *BIT* 28, 340–352.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler	
Adı Soyadı	Kürşat ÇAKMAK
Doğum Yeri	Ordu
Doğum Tarihi	20.12.1990
Uyruğu	☐T.C.
Telefon	05393159689
E-Posta Adresi	carizard_52@hotmail.com

Eğitim Bilgileri	
Lisans	
Üniversite	Gazi Üniversitesi
Fakülte	Gazi Eğitim Fakültesi
Bölümü	Matematik Öğretmenliği
Mezuniyet Yılı	19.01.2015
Yüksek Lisans	
Üniversite	Gazi Üniversitesi
Enstitü Adı	Gazi Eğitim Fakültesi
Anabilim Dalı	Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanları Eğitimi
Program Adı	Matematik Öğretmenliği Tezsiz Yüksek Lisans
Mezuniyet Tarihi	19.01.2015