T. C.

ORDU ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

PARÇALI LİNEER MODELLERDE ALIŞILMIŞ EN KÜÇÜK KARELER VE EN İYİ LİNEER YANSIZ TAHMİN EDİCİLERİNİN BAZI AYRIŞIMLARI

MEHTAP AKÇİÇEK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ORDU 2020

TEZ BİLDİRİMİ

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan ve kullanılan intihal tespit programının sonuçlarına göre; bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

MEHTAP AKÇİÇEK

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

PARÇALI LİNEER MODELLERDE ALIŞILMIŞ EN KÜÇÜK KARELER VE EN İYİ LİNEER YANSIZ TAHMİN EDİCİLERİNİN BAZI AYRIŞIMLARI

MEHTAP AKÇİÇEK

ORDU ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ, 102 SAYFA

TEZ DANIŞMANI: PROF. DR. SELAHATTİN MADEN

Bu tez çalışması beş bölüm halinde düzenlenmiştir. Birinci bölümde çalışmanın amacından bahsedilerek bir giriş verilmiştir. İkinci bölümde çalışmamızda gerekli olacak temel tanımlar, teoremler ve genel bilgiler ifade edilmiştir. Üçüncü bölümde parçalı lineer modellerde tahmin edicilerin bazı ayrışımlarından söz edilmiştir. Alışılmış en küçük kareler tahmin edicisi(OLSE) ve en iyi lineer yansız tahmin ediciler(BLUE) incelenerek bunlar arasındaki ilişkiler detaylıca incelenmiştir. Parçalı lineer modelerde modeldeki tahmin ediciler ile daha küçük modellerdeki tahmin ediciler arasındaki ilişkiler ele alınmıştır. Ayrıca genel lineer model ve kısıtlamalı lineer model altındaki OLSE ve BLUE tahmin edicileri arasındaki ilişkiler incelenmiştir. Dördüncü bölümde sonuç ve öneriler verilmiş ve beşinci bölümde ise tezde yararlanılan kaynaklar listelenmiştir.

Anahtar Sözcükler: Matris, Kare Matris, Nonsingüler Matris, Rank, Lineer Model, Alışılmış En Küçük Kareler Tahmin Edicisi, En Iyi Lineer Yansız Tahmin Edici, Parçalı Lineer Model.

ABSTRACT

SOME DECOMPOSITIONS OF ORDINARY LEAST SQUARES AND BEST LINEAR UNBIASED ESTIMATORS UNDER PARTITIONED LINEAR MODELS

MEHTAP AKÇİÇEK

ORDU UNIVERSITY INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

MATHEMATICS

MASTER THESIS, 102 PAGES

SUPERVISOR: PROF. DR. SELAHATTİN MADEN

This thesis consists of five chapters. In the first chapter, it is given an introduction and the aim of the thesis. In the second chapter, basic definitions, theorems and general informations are expressed. In the third chapter, it is talked about some decompositions of estimators under a Partitioned Linear Model. Ordinary least squares estimators (OLSE) and best linear unbiased estimators (BLUE) and relations between them are considered with detailed. The equalities of estimations under a general partitioned linear model and its stochastically restricted model. Also, some relationships of OLSE and BLUE estimators of parametric functions under a general linear model and its restricted models are considered in this chapter. In the fourth chapter, it is given some results and propositions and references that used in this thesis are listed in fifth chapter.

Keywords: Matrix, Square Matrix, Singular Matrix, Rank, Linear Model, Ordinary Least Squares Estimation, Best Linear Unbiased Estimation, Partitioned Linear Model.

TEŞEKKÜR

Tez konusunun belirlenmesi ve çalışmalarım boyunca her zaman engin bilgi ve deneyimleriyle yolumu aydınlatan danışman hocam Sayın Prof. Dr. Selahattin MADEN' e içten teşekkür eder, saygılarımı sunarım.

Hem bu zorlu ve uzun süreçte hem de hayatım boyunca yanımda olan ve ideallerimi gerçekleştirmemi sağlayan değerli aileme yürekten teşekkürü bir borç bilirim.

Ayrıca Lisansüstü eğitimim sırasında kendilerinden ders aldığım ve engin tecrübelerinden yararlandığım Ordu Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümündeki tüm değerli hocalarıma teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER ve KISALTMALAR LİSTESİ

$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{K}$	: K cismi
$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{K}_{\boldsymbol{n}}^{\boldsymbol{m}}$	: $\mathbb{K}$ cismi üzerinde tanımlı $m \times n$ tipindeki tüm matrislerin kümesi
$\mathbb{C}_{\boldsymbol{n}}^{\boldsymbol{m}}$ **veya** $\mathbb{C}_{\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}}$	: $\mathbb{C}$ üzerinde tanımlı $m \times n$ tipindeki tüm matrislerin kümesi
$\boldsymbol{I_n}$	: $n \times n$ tipindeki birim matris
$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ **veya** $\boldsymbol{A}'$	: A matrisinin transpozu
$\overline{\boldsymbol{A}}$	: A matrisinin eşlenik matrisi (eş matrisi)
$\boldsymbol{A}^*$	: A matrisinin eşlenik transpoz matrisi (Hermitian matrisi)
$\lvert\boldsymbol{A}\rvert$	: A matrisinin determinantı
Ek$(\boldsymbol{A})$	: A matrisinin ek matrisi
$\boldsymbol{A_{ij}}$	: A matrisinin bir a_{ij} elemanının kofaktörü
$\boldsymbol{A^{-1}}$	: A matrisinin inversi
$\boldsymbol{r}(\boldsymbol{A})$	: A matrisinin rankı
$\boldsymbol{\mathcal{N}}(\boldsymbol{A})$	: A matrisinin null (sıfır) uzayı
$\boldsymbol{\Re}(\boldsymbol{A})$	: A matrisinin ranj (sütun) uzayı
$\boldsymbol{A}^-$ **veya** $\boldsymbol{A}^{(1)}$	: A matrisinin genelleştirilmiş inversi (iç inversi)
$\boldsymbol{A}^{(2)}$	: A matrisinin dış inversi
$\boldsymbol{A_0}$ **veya** $\boldsymbol{A}^{(1,2)}$	: A matrisinin yansımalı genelleştirilmiş inversi
$\boldsymbol{A}^{\dagger}$ **veya** $\boldsymbol{A}^{+}$	: A matrisinin Moore–Penrose tipi genelleştirilmiş inversi
BLUE	: En iyi lineer yansız tahmin edici
OLSE	: Alışılmış en küçük kareler tahmin edicisi
$\widehat{\boldsymbol{\beta}}$	: β parametresinin alışılmış en küçük kareler tahmin edicisi
Cov(*A*,*B*)	: A ve B değişkenleri arasındaki kovaryans
E(*X*)	: X değişkeninin beklenen değeri
Köş*A*	: A matrisinin köşegen elemanları

1. GİRİŞ

Günümüzde matris teorisi, teorik matematik, istatistik, sosyoloji, kimya, fizik eğitimi ve elektrik mühendisliği gibi çeşitli teknik alanlar içinde gerekli matematiksel temel bilginin ayrılmaz bir parçası haline gelmiştir. Matris hesabı, 19. yüzyıl ortalarından beri bilinmektedir. İngiliz matematikçi Sylvester, 1850 yılında 'matris' kavramını kullanmıştır. 1853 yılında İngiliz bilgini Hamilton '*Lineer and Vector Functions*' isimli eserinde matrislerin bazı özelliklerinden faydalanmış fakat matris ismini henüz kullanmamıştır. Yine bir İngiliz matematikçisi olan Cavley, 1858 yılında zamanında çok meşhur olan '*Memorie on the Theory of Matrices*' isimli çalışmasında matris cebirinin temel esaslarını ortaya koymuştur. Daha sonraları Fransız Laguerre ve Alman Frobenius matrislerle ilgili yeni kavram ve teoremler üzerinde çalışmışlardır.

Bir singüler matrisin inversi fikri ilk defa 1920 yılında Moore(1920, 1935) tarafından ortaya atılmıştır. Ancak, daha sonra 1955 yılına kadar bu konuda herhangi bir sistematik çalışmaya rastlanamamaktadır. 1955 yılında, önceki çalışmalardan habersiz olarak, Penrose(1955, 1956) biraz farklı bir yoldan Moore tarafından verilen invers kavramını tekrar tanımlamıştır. Penrose ile aynı zamanlarda yaşayan bilim adamlarından birisi olan Rao(1965) tarafından geliştirilen Pseuda invers, Moore ve Penrose tarafından ortaya konulan kısıtların tümünü sağlamamaktadır. Bu nedenle bu invers, Moore–Penrose inversten farklıdır. Rao, daha sonraki çalışmalarında, lineer denklemlerle ilgili problemlerinin çözümünde yeterli olacak ve Moore ve Penrose' un vermiş olduğu tanımdan daha zayıf bir tanım ortaya koymuştur. Böyle bir invers, bir genelleştirilmiş invers (g–invers) olarak adlandırılmış ve bunun uygulamaları Rao(1965)' nun birçok çalışmasında yer almıştır. Genelleştirilmiş inverslerle ilgili sistematik gelişmeler ve onların çeşitli uygulamaları *Generalized Inverse of Matrices and Its Applications* (Wiley, 1971) adlı kitapta verilmiştir.

Matris rankı hakkında iyi bilinen bir gerçek şudur: Aynı mertebeden iki A ve B matrisinin benzer, yani $UAV = B$ olacak şekilde iki tersinir U ve V matrisinin mevcut olması için gerek ve yeter şart $r(A) = r(B)$ olmasıdır. Bir matrisin sütunlarının veya satırlarının doğrusal bağımsızlığını belirlemek için en basit yöntem, matrisin elementer matris işlemleri ile satır veya sütun eşelon formlarına indirgenmesidir.

Teorik olarak, idempotent matrislerden oluşan herhangi bir matris ifadesi için, bu ifade ile ilişkili bazı rank eşitlikleri kurulabilir. Bu rank eşitliklerinden, bu ifadenin bazı temel özellikler elde edilebilir. Rank formülleri, çeşitli blok matrisler ve elementer blok matris işlemleri ile oluşturulabilir. Bazı sonuçlar aşağıda verilmiştir:

$$r\begin{bmatrix} I_m & A \\ B & I_n \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} I_m & 0 \\ 0 & I_n - BA \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} I_m - AB & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix},$$

$$r\begin{bmatrix} I_m & I_m - AB \\ B & 0 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} I_m & 0 \\ 0 & B - BAB \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} 0 & I_m - AB \\ B & 0 \end{bmatrix},$$

$$r\begin{bmatrix} A & AB \\ BA & B \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B - BAB \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} A - ABA & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}.$$

Son yıllarda, bu yöntemle birçok yeni ve önemli rank eşitlikleri elde edilmiş ve bu rank eşitliklerinden birçok sonuç çıkarılmıştır.

Y gözlemlerin $nx1$ mertebeli vektörü (rasgele vektör), X: nxp ($n< p$) mertebeli bilinen sayıların matrisi, β $px1$ mertebeli bilinmeyen parametrelerin vektörü, ε ise $nx1$, rasgele değişkenlerin gözlenebilir olmayan bir vektörü öyle ki $E(\varepsilon)=0$, $Cov(\varepsilon)=\Sigma$, olmak üzere bunlar arasında,

$$Y = X\beta + \varepsilon$$

biçiminde varsayılan bağıntıya bir lineer model veya lineer regresyon modeli denir.

Bu model pek çok özel durumlara sahiptir. Bu durumlar, ε rasgele vektörünün dağılımına ve kovaryans matrisine; X katsayı matrisinin yapısına ve rankına bağlıdır.

Aksi belirtilmedikçe, $r(X)=p$ olduğunu kabul edeceğiz, yani modelimizdeki X matrisi tam sütun ranklı bir matris olacaktır. ε hata vektörünün dağılımı hakkında aşağıdaki üç durumu göz önüne alacağız:

1. Durum: $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2 I)$
2. Durum: ε bilinmeyen bir dağılıma sahiptir ve $E(\varepsilon)=0$ $Cov(\varepsilon)=\sigma^2 I$ dır.
3. Durum: Cov(ε) = $\sigma^2 V$, V bilinen pozitif definit bir matristir.

Birinci durumda her bir ε_i , 0 ortalamalı bilinmeyen σ^2 varyanslı normal dağılıma sahiptir ve ε_i, $i = 1,2,...,N$ ler bağımsızdır. İkinci durumda, her bir ε_i nin beklenen değeri sıfır ise, ε_i ler ilişkisiz ve ε_i ler bilinmeyen ortak σ^2 varyansına sahiptirler.

Birinci ve ikinci durumdaki varsayımlar altındaki modellere Gauss - Markov modeli denir. İkinci durumdaki modellere ise bazen en küçük kareler modelleri denir. Hata terimi normal dağılımlı olduğunda modellere hipotez modelleri de denir.

$Y = X\beta + \varepsilon$ lineer modelinde $X\beta$ çarpımına modelin deterministik kısmı, Y ve ε vektörlerine ise modelin stokastik kısmı denir. Y vektörü bağımlı değişken, tepki değişkeni, açıklanan değişken denen bir rastgele değişken ile ilgili gözlemlerin vektörüdür. X matrisine tasarım matrisi, açıklayıcı değişkenlerin matrisi, bağımlı değişkenlerin gözlem matrisi gibi isimler verilmektedir. ε vektörüne ise hata vektörü denmektedir. Gerçek dünyadaki olayların lineer model olarak modellenmesi sırasında Y, X, β ve ε çok değişik şekilde anlamlandırılmaktadır. Bazı modellerde Y üretim miktarı, bazılarında boy uzunluğu, bazılarında bir ekonomik değişken olabilir.

Doğrusal hareket eden, β_0 hızı ile hareketine başlayan ve ivmesi β_1 olan bir cismin zamana (*t* ye) bağlı olarak aldığı yol miktarı S, $S = \beta_0 + \beta_1 t$ formülü ile verilir. Böyle bir hareket yapan bir cismin hareket hızını ve ivmesini "belirlemek" istediğimizi ve daha sonra belli bir zamanda aldığı yol miktarını bilmek istediğimizi düşünelim. Bizim seçtiğimiz belli t_i, $i = 1,2,...,N$ zamanlarında yol uzunluklarını gözlemlemeye kalkıştığımızda ölçümlerdeki hatalardan dolayı S_i, $i = 1,2,...,N$ gözlemleri için $S_i = \beta_0 + \beta_1 t_i + \varepsilon_i$, $i = 1,2,...,N$ gibi bir model düşünmemiz uygun görünmektedir.

$$Y = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ \cdots \\ S_N \end{bmatrix}_{Nx1}, \quad X = \begin{bmatrix} 1 & t_1 \\ 1 & t_2 \\ \cdots & \cdots \\ 1 & t_N \end{bmatrix}_{Nx2}, \quad \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \cdots \\ \varepsilon_N \end{bmatrix}_{Nx1}, \quad \beta = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix}_{2x1}$$

gösterimleri altında yukarıda söylenenler,

$$Y = X\beta + \varepsilon$$

lineer modeli olarak ifade edilmektedir. Bu modelde Y gözlem vektöründeki gözlemleri veren açıklayıcı(bağımlı) değişkeni Y harfi, X matrisinin ikinci sütunundaki gözlemler (bunların hatasız olarak gözlendiğini kabul ettik) ile ilgili bağımsız değişkeni X harfi ve hatayı da ε harfi ile gösterirsek aralarındaki bağıntı,

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X + \varepsilon$$

biçimindedir.

İkinci bir örnek olarak, belli bir tür elmadaki meyve suyu miktarını elmanın ağırlığına bağlı olarak incelemeyi düşünelim. Gerçekte bir elmadaki meyve suyu miktarı sadece elmanın ağırlığına bağlı değildir, ama ağırlık ile meyve suyu arasında bir fonksiyonel bağıntının (bilinmeyen parametrelere göre lineer bir ifade olabilir) varlığını kabul edip gözlemlerin bunu doğrulayıp doğrulamadığını, gözlemlerden çıkıp bir bağıntının bulunmasını ve bunların neticesinde ağırlığa bağlı olarak meyve suyu miktarını "belirlemeyi" (tahmin etmeyi) düşünebiliriz. Bu örnekteki açıklayıcı değişken olan elmanın ağırlığı ile açıklanan (bağımlı) değişken olan elmadaki meyve suyu miktarı birer rasgele değişkendir. Ağırlığı X, meyve suyu miktarını Y ile gösterirsek X ile Y değişkeninin bir ortak dağılımı söz konusu olacaktır.

$$E(Y \mid X = x) = g(x)$$

ifadesine Y nin X üzerindeki regresyon denklemi dendiğini ve X ile Y değişkeninin ortak dağılımı normal olduğunda bunun,

$$E(Y \mid X = x) = \beta_0 + \beta_1 x$$

biçiminde olduğunu hatırlatalım. Bu takdirde (X, Y) iki boyutlu rasgele değişkeninin dağılımından N birimlik örneklem, (X_i, Y_i) $i = 1,2,\ldots,N$ olmak üzere,

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i \, , \; i = 1,2,\ldots,N \qquad \varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2 I)$$

veya

$$Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \ldots \\ Y_N \end{bmatrix}_{Nx1} , \; X = \begin{bmatrix} 1 & X_1 \\ 1 & X_2 \\ \ldots & \ldots \\ 1 & X_N \end{bmatrix}_{Nx2} , \; \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \ldots \\ \varepsilon_N \end{bmatrix}_{Nx1} , \; \beta = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix}_{2x1}$$

gösterimi altında,

$$Y = X\beta + \varepsilon \, , \; \varepsilon \sim N(0, \sigma^2 I),$$

modeline bir basit lineer regresyon modeli denir.

Lineer regresyon modelleri de Lineer Modeller çerçevesinde düşünülebilir. X ile Y rasgele değişkenleri arasında bir ortak dağılım düşünmeden sadece Y bağımlı değişken ile ilgili gözlemlere dayalı olarak,

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i \, , \; i = 1,2,\ldots,N$$

biçiminde bir ifade söz konusu olduğunda modele basit lineer model denir.

Elmanın ağırlığı X değişkeni ile elmadaki meyve suyu miktarı Y değişkeninin ortak dağılımı normal olmayabilir. Amacımız X değişkeninin gözlenen değerine bağlı olarak Y değişkeninin gözlenen değerini ön görmek olduğunda,

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i \ , \ i = 1,2,...,N$$

biçiminde bir lineer model söz konusudur. Bu durumda e hata terimi, birinci örnekteki yol uzunluğunun ölçülmesi sırasındaki hataya benzer bir hatayı içermekle birlikte, X değişkeninin belli bir değeri için Y değişkenindeki rastgeleliği ve ayrıca model belirlemesindeki hatayı da içermektedir.

Bir lineer modelde açıklayıcı değişken sayısı birden çok olduğunda bu modele çoklu lineer model (multiple linear model) denir. Bir modelde bağımlı değişken birden çok olduğunda modele çok değişkenli model (multivariate model) denir.

Sıcaklık ile basıncın, sertlik üzerindeki etkisinin fonksiyon biçiminde bir bağıntı ile ifade edilip edilemeyeceği, bu bağıntının biçiminin ne olacağı veya sıcaklık ile basınç değişkenlerinin sertliği ne derece etkileyip etkilemediği gibi sorunlar ilk olarak metalürji biliminin sorunlarıdır. Metalürji biliminin kanunlarına göre sıcaklık ile basıncın sertlik üzerindeki etkisi tam olarak belirlenmiş olabilir, bağıntı biçimsel olarak belirlenmiş ancak içinde bilinmeyen katsayılar vardır veya aralarında bir bağıntı var ama ne olduğu belirlenmemiş olabilir. İlk durumda istatistikçinin yapacağı fazla bir şey kalmamıştır. Belki belirlenmiş olan modelin geçerliliğinin sınanmasında yardımcı olabilir. İkinci ve üçüncü durumlarda istatistikçiye önemli görevler düşmektedir. Amaç belirlendikten sonra (Örneğin bu amaç hangi sıcaklık ve basınçta malzemenin sertliği maksimum olmaktadır olabilir) gözlemlerin alınacağı en iyi deney tasarımının ve ardından istatistiksel sonuç çıkarımı yapılması istatistik biliminin sorunudur.

İkinci bir örnek olarak belli bir m ısır türünün verimini incelemeyi düşünelim. Verim, toprak ve hava ile ilgili birçok tabiat şartı yanında sulama, gübreleme, toprağı işleme gibi bazı etkenlere bağlıdır. Modelleme sırasında, çok karma şık olan gerçek dünyadaki ilişkilerden bazılarını ihmal ederek, verim (Y) için toplam yağış miktarı (X_1), sıcaklık ortalaması (bitkinin yetişmesi boyunca her gün bir defa ölçüleri sıcaklıkların ortalaması (X_2), gübre miktarı (X_3), bir metrekaredeki bitki sayısına (X_4) bağlı olarak,

$$y = \beta_0 + X_1\beta_1 + X_2\beta_2 + X_3\beta_3 + X_4\beta_4 + \varepsilon$$

gibi bir modelin geçerli olduğunu varsayalım. Gerek modelin geçerliliğinin sınanması, gerekse geçerli olacak bir modelde aç ıklayıcı değişkenlerin etkilerinin, yani parametrelerin tahmin edilmesi amacıyla yapılacak araştırmada veri toplama safhası uygulamada pek kolay olmayacaktır. Modeldeki yağış miktarı ve sıcaklık ortalaması ile ilgili açıklayıcı değişkenler birer rasgele değişkendir, gübre miktarı ile ilgili açıklayıcı değişken bir deterministik değişken olarak görülebilir. Açıklayıcı değişkenlerin birer rasgele değişken olup olmamasına bakmaksızın, bundan sonra aç ıklayıcı değişkenler ile ilgili X matrisini, gözlem değerlerinin bir matrisi, yani sabitlerin bir matrisi olarak düşüneceğiz.

2. GENEL BİLGİLER

2.1 Temel Kavramlar

Tanım 2.1.1 Bir K cismi üzerinde n bilinmeyenli m tane lineer denklemden oluşan bir denklem sistemi, genel olarak,

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \, , 1 \leq i \leq m$$

biçiminde tanımlanır, burada x_j, $1 \leq j \leq n$, ler bilinmeyenleri, a_{ij}, $1 \leq i \leq m$ ler $m.n$ tane katsayıları ve b_i ler de bilinen sayıları göstermektedir. Bu denklem sistemi açık biçimde yazılırsa

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_n$$

elde edilir. Bu denklem sisteminin matris formunda gösterimi ise

$$\begin{bmatrix} a_{12}, a_{12} \;\ldots.\, a_{1n} \\ a_{21}, a_{22} \;\ldots.\, a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}, a_{m2} \;\ldots.\, a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

şeklindedir (Hacısalihoğlu, 1977).

Tanım 2.1.2 i) $\mathbb{K}$ bir cisim olsun. $m, n \in \mathbb{N}$ ve $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ olmak üzere bütün (i, j) sıralı ikililerinin kümesi $A = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ olsun. $f\colon A \longrightarrow \mathbb{K}$ fonksiyonu

$$(i, j) \longrightarrow f(i, j) = a_{ij}$$

olarak tanımlansın. $a_{ij} \in \mathbb{K}$ olacak şekilde seçilen $m.n$ tane elemanın oluşturduğu sayı tablosuna $\mathbb{K}$ cismi üzerinde tanımlı $m \times n$ tipinde bir matris denir.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad (2.1)$$

matrisi kısaca $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ şeklinde gösterilir. Her bir (i, j), $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ ikilisine karşılık gelen a_{ij} elemanına A matrisinin (i, j)–yinci bileşeni denir.

ii) $m \times n$ tipinde olan ve bileşenleri bir $\mathbb{K}$ cismi üzerinden seçilen bütün $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ matrislerinin kümesi $\mathbb{K}_n^m$ veya $\mathbb{K}^{m\times n}$ ile gösterilir.

iii) $A = [a_{ij}]$ ve $B = [b_{ij}]$ $m \times n$ tipinde iki matris olmak üzere, eğer her (i,j) için $a_{ij} = b_{ij}$, $1 \leq i \leq m$ ve $1 \leq j \leq n$ ise A ve B matrislerine eşit matrisler denir.

iv) $A = [a_{ij}]$ $m \times n$ tipinde bir matris olmak üzere, her bir a_{ij} elemanı sıfıra eşitse A matrisine sıfır matris denir.

v) $A = [a_{ij}]$ ve $B = [b_{ij}]$ matrisleri $m \times n$ tipinde olmak üzere, A ve B matrislerinin toplamı, (i,j)–yinci bileşeni $a_{ij} + b_{ij}$ olan bir matris olup

$$+: \mathbb{K}_n^m \times \mathbb{K}_n^m \longrightarrow \mathbb{K}_n^m$$

$$(A,B) \longrightarrow A + B = [a_{ij}] + [b_{ij}]$$

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + +b_{12} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlanır.

vi) $c \in \mathbb{K}$ bir skaler olmak üzere $cA \in \mathbb{K}_n^m$ matrisi (i,j)–yinci bileşeni ca_{ij} olan bir matristir. Başka bir deyişle

$$.: \mathbb{K} \times \mathbb{K}_n^m \longrightarrow \mathbb{K}_n^m$$

$$(c,A) \longrightarrow cA = \begin{bmatrix} ca_{11} & ca_{12} & \dots & ca_{1n} \\ ca_{21} & ca_{22} & \dots & ca_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ ca_{m1} & ca_{m2} & \dots & ca_{mn} \end{bmatrix}$$

olur.

vii) $A = [a_{ij}] \in \mathbb{K}_p^m$ ve $B = [b_{ij}] \in \mathbb{K}_n^p$ olmak üzere, A ve B matrislerinin çarpımı $C = [c_{ij}] \in \mathbb{K}_n^m$ şeklinde bir matris olup

$$.: \mathbb{K}_p^m \times \mathbb{K}_n^p \longrightarrow \mathbb{K}_n^m$$

$$(A,B) \longrightarrow A.B = C$$

$$[a_{ij}].[b_{ij}] = [c_{ij}] = \left[\textstyle\sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}\right], \ 1 \leq i \leq m, \ \ 1 \leq j \leq n$$

şeklinde, yani

$$A.B = \begin{bmatrix} (a_{11}b_{11} + \cdots + a_{1p}b_{p1}) & \dots & (a_{11}b_{1n} + \cdots + a_{1p}b_{pn}) \\ \dots & \dots & \dots \\ (a_{m1}b_{11} + \cdots + a_{mp}b_{p1}) & \dots & (a_{m1}b_{1n} + \cdots + a_{mp}b_{pn}) \end{bmatrix}$$

olarak tanımlanır. Bu durumda matris çarpımının tanımlı olabilmesi için birinci matrisin sütun sayısı, ikinci matrisin satır sayısına eşit olmalıdır. Uygun A ve B matrislerinin çarpımı $A.B$ veya AB ile gösterilir (Hacısalihoğlu H.H., 1977).

Tanım 2.1.3 Eğer $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, reel sayılar kümesi olarak alınırsa, $\mathbb{K}$ cismi üzerinde tanımlı $m \times n$ tipindeki A matrisine bir reel matris ve $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, kompleks sayılar kümesi olarak alınırsa, A matrisine bir kompleks matris denir (Branson R., 1999).

Tanım 2.1.4 i) Bir $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ matrisinde $m = n$ ise, yani satır sayısı sütun sayısına eşitse, A matrisine kare matris denir. Bu durumda

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

kare matrisinde $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$elemanlarına köşegen (esas köşegen) elemanları denir.

ii) Bir $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ kare matrisinin köşegen elemanları dışındaki tüm elemanları sıfır ise bu matrise köşegen matris denir ve $A = \text{Köş}\{a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}\}$ ile gösterilir.

iii) Bir köşegen matriste $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn} = \mathrm{k}$, $\mathrm{k} \in \mathbb{K}$ ise matrise skaler matris denir.

iv) Köşegen elemanları 1 ve diğer elemanları 0 olan $n \times n$ tipindeki bir matrise birim matris denir ve

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

şeklinde gösterilir. Herhangi bir $A \in \mathbb{K}_n^m$ matrisi için, $I_m A = AI_n = A$ olur.

v) $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ matrisinden aynı numaralı satırlar ve sütunlar kendi aralarında yer değiştirilerek elde edilen $A^T = [a_{ij}]_{n\times m}$ matrisine A matrisinin transpozu denir.

Buna göre A ve B uygun matrisler olmak üzere

$$(A+B)^T = A^T + B^T \quad \text{ve} \quad (AB)^T = B^T A^T$$

eşitlikleri sağlanır.

vi) A bir reel kare matris olmak üzere $A^T = A$ ise, A matrisine simetrik matris denir.

vii) A ve B kare matrisleri arasında $AB = BA$ bağıntısı varsa, bu matrislere değişmeli matrisler denir (Hacısalihoğlu H.H., 1977).

Teorem 2.1.1 Bir K cismi üzerinde tanımlanan $m \times n$ tipindeki tüm matrislerin kümesi K_n^m olsun. Herhangi $A, B, C \in K_n^m$ matrisleri ve herhangi $k_1, k_2 \in K$ skalerleri için

i) $(A+B)+C = A+(B+C)$

ii) $A+0 = A$

iii) $A+(-A) = 0$

iv) $A+B = B+A$

v) $k_1(A+B) = k_1A + k_2B$

vi) $(k_1+k_2)A = k_1A + k_2A$

vii) $(k_1k_2)A = k_1(k_2)A$

viii) $1.A = A$ ve $0.A = 0$

özellikleri sağlanır (Hacısalihoğlu H.H., 1977).

Tanım 2.1.5 i) $\{1,2,\ldots n\}$ kümesinin kendisi üzerine bir birebir ve örten bağıntısı veya eş değer olarak $1,2,\ldots n$ sayılarının yeniden bir sıralanmasına $\{1,2,\ldots n\}$ kümesinin bir σ permütasyonu denir. Böyle bir permütasyon,

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ j_1 & j_2 & \ldots & j_n \end{pmatrix}$$

veya

$$\sigma = j_1, j_2, \ldots, j_n \quad , \; j_i = \sigma(i)$$

ile gösterilir. Bu permütasyonların tümünün kümesi S_n ile gösterilir. S_n de gelişigüzel bir σ permütasyonu, örneğin $\sigma = j_1, j_2, \ldots, j_n$ düşünüldüğünde σ da çift veya tek sayıda permütasyonlar olmasına göre σ ya çift veya tek permütasyon denir. O halde bir σ nın işareti

$$sgn\sigma = \begin{cases} 1, & \text{eğer } \sigma \text{ çift ise} \\ -1, & \text{eğer } \sigma \text{ tek ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır ve $sgn\sigma$ ile gösterilir.

ii) $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ bir $\mathbb{K}$ cismi üzerinde tanımlı kare matris olsun.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

matrisinin her satırından ve her sütunundan yalnız ve yalnız bir eleman alınmak üzere n elemanın bir çarpımı düşünülsün. Böyle bir çarpım $a_{1j_1}.a_{2j_2}.\dots.a_{nj_n}$ şeklinde yazılır. Burada çarpanlar ardışık satırlardan gelir ve bu yüzden alt indisler $1,2,\dots,n$ doğal sayı sırasındadır. Çarpanlar farklı sütunlardan geldiğinden, ikinci alt indislerin dizisi S_n de bir $\sigma = j_1, j_2, \dots, j_n$ permütasyonunu oluşturur. Tersine, S_n deki her permütasyon yukarıdaki şekilde bir çarpım tanımlar. Böylece A matrisi böyle $n!$ çarpım kapsar.

$A = [a_{ij}]_{n\times n}$ kare matrisinin determinantı $\det(A)$ veya $|A|$ şeklinde gösterilir ve yukarıdaki her çarpanı $sgn\sigma$ ile çarpılan veya $n!$ tane çarpımların toplamıdır. Yani,

$$|A| = \sum_\sigma (sgn\sigma)\, a_{1j_1}, a_{2j_2}, \dots, a_{nj_n}$$

veya

$$|A| = \sum_{\sigma\in S_n} (sgn\sigma)\, a_{1\sigma(1)}, a_{2\sigma(2)}, \dots, a_{n\sigma(n)}$$

şeklinde n mertebedendir.

$A = [a_{ij}]_{n\times n}$ matrisinin determinantı aşağıdaki şekilde de tanımlanmaktadır.

iii) 1×1 tipinde bir A matrisinin determinantı kendisidir. Başka bir deyişle $A = [a]$ ise, bu durumda $\det(A) = |a| = a$ olur.

iv) 2×2 tipindeki bir A matrisi için

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

olur.

v) Bir $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ matrisinin bir a_{ij} elemanının $|M_{ij}|$ şeklinde tanımlanan minörü, A matrisinden i–yinci satırın ve j–yinci sütunun atılması ile oluşan $(n-1)\times(n-1)$ tipindeki kare matrisin determinantıdır.

vi) Bir $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ matrisinin bir a_{ij} elemanının minörü $|M_{ij}|$ olsun. A matrisinin bir a_{ij} elemanının A_{ij} şeklinde gösterilen kofaktörü (işaretli minörü veya eş çarpanı),

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}.\,|M_{ij}|$$

şeklinde tanımlanır.

vii) Bir $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ matrisinin determinantı her hangi bir satır(sütun) elemanlarının kendi kofaktörleriyle çarpılıp bu çarpanların toplanmasıyla bulunur. Yani herhangi i ve j $(i,j = 1,2,3,\dots,n)$ için

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}.A_{ik} = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{i+k}a_{ik}|M_{ik}| \tag{2.3}$$

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}.A_{kj} = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+j}a_{kj}|M_{ik}| \tag{2.4}$$

şeklinde tanımlanır.

Her bir i için, (2.3) açılımına, A matrisinin determinantının i–yinci satıra göre açılımı, her bir j için, (2.4) açılımına ise A matrisinin determinantının j–yinci sütuna göre açılımı denir.

viii) Bir $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ matrisi için $|A| = 0$ ise, A matrisine singüler matris, $|A| \neq 0$ ise, A matrisine nonsingüler (veya regüler) matris denir (Branson R., 1999).

Tanım 2.1.6 i) Bir $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ matrisinde bir a_{ij} elemanının kofaktörü A_{ij} olsun. Bu takdirde $\mathrm{Ek}(A) = [A_{ij}]^T = [A_{ji}]$ matrisine A matrisinin ek matrisi denir.

$$Ek(A) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

ii) Bir $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ matrisi için $A.B = B.A = I_n$ olacak şekilde bir $B = [b_{ij}]_{n\times n}$ matrisi varsa, B matrisine A matrisinin inversi denir ve $A^{-1} = B$ ile gösterilir (Hacısalihoğlu H.H., 1977).

Teorem 2.1.2 Bir $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ matrisi ile bu matrisin ek matrisinin çarpımı bir skaler matris olup,

$$A.\mathrm{Ek}(A) = \mathrm{Ek}(A).A = |A| \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = |A| I_n \tag{2.5}$$

ile verilir (Hacısalihoğlu H.H., 1977).

Teorem 2.1.3 Bir $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ nonsingüler matrisinin inversi,

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}.\mathrm{Ek}(A) \tag{2.6}$$

dır. (Hacısalihoğlu H.H., 1977)

Teorem 2.1.4 i) Bir $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ nonsingüler matrisi için A^{-1} invers matrisi tektir.

ii) A nonsingüler matris ise A^{-1} matrisi de nonsingüler olup $(A^{-1})^{-1} = A$ dır.

iii) A ve B çarpmaya uygun nonsingüler matrisler ise AB çarpımı da nonsingüler olup $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ dir.

iv) A nonsingüler matris ise A^T matrisi de nonsingüler olup $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ dir (Branson R., 1999).

İspat: i) B ve C matrisleri bir A matrisinin herhangi iki inversi olsun. Bu takdirde $AB = BA = I$ ve $AC = CA = I$ olup buradan $C = CI = C(AB) = (CA)B = IB = B$ olduğu görülür.

ii) $(A^{-1})^{-1}$ matrisi A^{-1} matrisinin inversi ve aynı zamanda A matrisi de A^{-1} matrisinin inversidir. Nonsingüler bir matrisin inversinin tekliğinden bu inversler birbirine eşittir.

iii) $(AB)^{-1}$ matrisi AB matrisinin inversidir. Ayrıca

$$B^{-1}A^{-1}(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I\,,$$

$$(AB)B^{-1}A^{-1} = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$$

olduğundan $B^{-1}A^{-1}$ matrisi de AB matrisinin inversi olur. Nonsingüler bir matrisin inversinin tekliğinden bu inversler birbirine eşittir.

iv) Öncelikle $(A^T)^{-1}$ matrisinin A^T matrisinin bir inversi olduğunu belirtelim. Ayrıca $I^T = I$ olduğundan $I = I^T = (AA^{-1})^T = (A^{-1})^T(A)^T$ olup bu $(A^{-1})^T$ matrisinin A^T matrisinin bir inversi olduğunu gösterir. Nonsingüler bir matrisin inversinin tekliğinden $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ dir.

Tanım 2.1.7 i) Bir $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ kare matrisi için eğer $A^2 = A$ ise, bu takdirde A matrisine idempotent matris denir.

ii) $\mathbb{C}$ kompleks sayılar cismi üzerinde tanımlı A matrisinin elemanlarının yerlerine bunların eşlenikleri yazılarak elde edilen matrise A matrisinin eşleniği (eş matrisi) denir ve $\overline{A}$ ile gösterilir (Branson R., 1999).

iii) $\mathbb{C}$ kompleks sayılar cismi üzerinde tanımlı bir A matrisi için eğer $(\overline{A})^T = A$ ise A matrisine hermitian matris denir ve $A^* = (\overline{A})^T$ ile gösterilir.

iv) Bir A matrisi için $AA^* = A^*A$ ise A matrisine normal matris denir.

v) $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ nonsingüler bir matris olmak üzere, $A^{-1} = A^*$ (veya buna denk olarak $AA^* = A^*A = I$) ise A matrisine birimsel(unitary) matris denir.

vi) $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ bir kare matris olmak üzere, eğer $A^{-1} = A^T$ ise A matrisine ortogonal matris denir (Branson R., 1999).

Teorem 2.1.5 A ve B uygun matrisler olmak üzere,

i) $(\overline{A})^T = \overline{(A^T)}$.

ii) $(A^*)^* = A$.

iii) $(A + B)^* = A^* + B^*$.

iv) $(AB)^* = B^*A^*$.

eşitlikleri sağlanır (Branson R., 1999).

İspat: i) $A = [a_{ij}]$ $m \times n$ tipinde bir matris ise $\overline{A} = [\overline{a_{ij}}]$ ve $(\overline{A})^T = [\overline{a_{ji}}]$ olur. Diğer taraftan $A^T = [a_{ji}]$ ve $\overline{(A^T)} = [\overline{a_{ji}}]$ olduğundan $\overline{(A^T)} = (\overline{A})^T$ olduğu görülür.

ii) $A^* = \left(\overline{A}\right)^T$ olduğundan $(A^*)^* = \left(\overline{\left(\overline{A}\right)^T}\right)^T = (A^T)^T = A$ dir.

iii) Hermitian matris tanımına ve bir matrisin transpozu tanımına göre,

$$(A+B)^* = \left(\overline{A+B}\right)^T = \left(\overline{A}+\overline{B}\right)^T = \left(\overline{A}\right)^T + \left(\overline{B}\right)^T = A^* + B^*$$

olduğu görülür.

iv) Hermitian matris tanımına ve bir matrisin transpozu tanımına göre,

$$(AB)^* = \left(\overline{AB}\right)^T = \left(\overline{A}\,\overline{B}\right)^T = \left(\overline{B}\right)^T \left(\overline{A}\right)^T = B^* A^*$$

yazılabilir.

Tanım 2.1.8 i) $x_1, x_2, \dots x_n$ vektörler kümesi verilmiş olsun. $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$ eşitliği ancak $a_1, a_2, \dots, a_n$ skalerlerinin tümü birden sıfır olduğunda sağlanıyorsa bu durumda $x_1, x_2, \dots x_n$ vektörlerine lineer bağımsızdır denir. Aksi durumda yani, $a_1, a_2, \dots, a_n$ skalerlerinden en az biri sıfırdan farklı olmak üzere $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$ eşitliği sağlanıyorsa bu durumda $x_1, x_2, \dots x_n$ vektörlerine lineer bağımlıdır denir.

ii) A matrisi $m \times n$ tipinde herhangi bir matris olsun. A matrisinin sütun vektörlerini $A_{*1}, A_{*2}, \dots, A_{*n}$ ile, ve satır vektörlerini $A_{1*}, A_{2*}, \dots, A_{m*}$ ile gösterelim. Bu durumda A_{i*}, $i = 1, 2, \dots, m$ vektörleri arasından oluşturulan en büyük lineer bağımsız vektörler kümesinin eleman sayısına A matrisinin satır rankı ve A_{*j}, $j = 1, 2, \dots, n$ vektörleri arasından oluşturulan en büyük lineer bağımsız vektörler kümesinin eleman sayısına ise A matrisinin sütun rankı denir.

Teorem 2.1.6 Bir matrisin iki satırının kendi aralarında yer değiştirmesi o matrisin satır rankını değiştirmez (Branson R., 1999).

İspat: A matrisinin herhangi iki satırı yer değiştirdiğinde satır vektörlerinin kümesi değişmeyeceğinden bu durum matrisin satırları arasındaki lineer bağımsızlığı da değiştirmez. Yani satır rankını değiştirmez.

Teorem 2.1.7 i) Elemanter işlemler herhangi bir matrisin sütun rankını değiştirmez.
ii) Herhangi bir A matrisi için satır rankı sütun rankına eşittir (Branson R., 1999).

Tanım 2.1.9 Herhangi bir A matrisinin rankı, satır ve sütun rankı olarak tanımlanır ve $\text{rank}(A)$ veya $r(A)$ şeklinde gösterilir (Branson R., 1999).

Teorem 2.1.8 Bir A matrisi verildiğinde $r(A) = r(A^T)$ dir, yani bir matrisinin rank ile transpozunun rankı eşittir. (Hacısalihoğlu H.H., 1977).

Tanım 2.1.10 $n \times n$ tipindeki bir A kare matrisi için eğer $r(A) = n$ ise A matrisine nonsingüler matris denir. Aksi durumda yani, $r(A) < n$ ise A matrisine singüler matris denir (Hacısalihoğlu H.H., 1977).

Tanım 2.1.11 Eğer A matrisi $n \times n$ tipinde nonsingüler bir matris ise $AX = XA = I_n$ olacak şekilde bir X matrisi vardır. A^{-1} ile gösterilen X matrisi tektir ve bu matrise A matrisinin tersi(inversi) denir. Bu durumda A ve B matrisleri tersleri olan aynı tipten matrisler ise

$$(A^{-1})' = (A')^{-1} \quad \text{v e} \quad (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

eşitlikleri vardır (Hacısalihoğlu H.H., 1977).

Tanım 2.1.12 i) $A \in \mathbb{K}_n^m$, $m \times n$ tipinde bir matris olsun. $\mathcal{N}(A) = \{x: Ax = 0\}$ kümesine A marisinin null (sıfır) uzayı veya sıfırlığı denir.

ii) $A \in \mathbb{K}_n^m$, $m \times n$ tipinde bir matris olsun. $\mathcal{R}(A) = \{y: Ax = y\}$ kümesine A matrisinin ranj (sütun) uzayı denir (Hacısalihoğlu H.H., 1977).

Teorem 2.1.9 Eğer A, r ranklı $m \times n$ tipinde bir matris ise, bu durumda aşağıdaki şartları sağlayan nonsingüler P ve Q matrisleri vardır. I, $r \times r$ boyutlu birim matris olmak üzere,

i) $m = n = r \Longrightarrow PAQ = I$

ii) $m = r < n \Longrightarrow PAQ = [I\ ,0]$

iii) $m > r,\ n > r \Longrightarrow PAQ = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

dir (Lancaster, P., 1969).

Teorem 2.1.10 Çarpıma uygun A ve B matrisleri için AB çarpımının rankı A ve B matrislerinin rankını geçemez. Yani,

$$r(AB) \leq \min\ \{r(A)\ ,\ r(B)\} \tag{2.7}$$

dir (Lancaster, P., 1969)

2.2 Genelleştirilmiş İnversler

A matrisinin kare matris olmadığı durumlarda ya da A matrisinin kare matris fakat singüler olduğu durumlarda Tanım 2.11 de verilen bilinen anlamda inversi yoktur.

Tanım 2.2.1 $\mathbb{C}_n^m$, kompleks sayılar cismi üzerinde tanımlı $m \times n$ tipindeki tüm matrislerin kümesini göstersin. Bir $A \in \mathbb{C}_n^m$ matrisi için aşağıdaki dört şartı (Moore–Penrose şartları) sağlayan bir G matrisine A matrisinin Moore–Penrose inversi denir ve A^+ veya $A^\dagger$ ile gösterilir(Ben-Israel and Charnes, 1963).

(i) $AGA = A$,

(ii) $GAG = G$,

(iii) $(AG)^* = AG$,

(iv) $(GA)^* = GA$. (2.8)

Bu durumda eğer G matrisi sadece (i) şartını sağlıyorsa, bu G matrisine, A matrisinin bir genelleştirilmiş inversi (iç inversi) denir ve A^- veya $A^{(1)}$ ile gösterilir. Sadece (ii) şartını sağlayan G matrisine, A matrisinin bir dış inversi denir ve $A^{(2)}$ ile gösterilir. Hem (i) hem de (ii) şartını sağlayan G matrisine ise, A matrisinin bir yansımalı genelleştirilmiş inversi denir ve $A^{(1,2)}$ veya A_0 ile gösterilir.

Bir A nonsingüler matrisinin inversi olan A^{-1} matrisinin Moore–Penrose şartlarını sağlayacağı açıktır. Yani $A^{-1} = A^+$ olur. Bununla birlikte, eğer A bir singüler matris veya kare olmayan bir matris ise, bu durumda Moore–Penrose şartlarını sağlayan bir A^+ matrisinin mevcut olup olmadığı ile ilgili bir soru ortaya çıkar. Bu kısımda her A matrisi için bir A^+ matrisinin var ve tek olduğu gösterilecektir. Ayrıca bu şekilde tanımlanan Moore–Penrose inversin birtakım özellikleri verilecektir.

Teorem 2.2.1 Eğer A matrisi $m \times n$ tipinde bir sıfır matris ise, bu takdire A^+ matrisi de $n \times m$ tipinde bir sıfır matristir(Ben-Israel and Charnes, 1963).

Teorem 2.2.2 Her A matrisi için Moore–Penrose şartlarını sağlayan bir ve yalnız bir tek A^+ matrisi vardır(Ben-Israel and Charnes, 1963).

Teorem 2.2.3 $m \times n$ tipindeki herhangi bir A matrisinin Moore–Penrose inversi $n \times m$ tipindedir(Ben-Israel and Charnes, 1963).

Teorem 2.2.4 i) $m \times n$ tipinde bir A matrisinin tüm elemanları 1 ise, bu takdirde $A^+ = \frac{1}{m.n} A^*$ dir.

ii) a, $n \times 1$ tipinde bir sütun vektörü ise, bu durumda $a^+ = (a^* a)^{-1} a^*$ şeklindedir.

iii) a, $1 \times n$ tipinde bir satır vektörü ise, bu durumda $a^+ = a^* (aa^*)^{-1}$ şeklindedir.

Teorem 2.2.5 Eğer A herhangi bir matris ise bu takdirde

$$(A^*)^+ = (A^+)^* \tag{2.9}$$

eşitliği geçerlidir(Ben-Israel and Charnes, 1963).

Teorem 2.2.6 Harhangi bir matrisin Moore–Penrose inversinin Moore–Penrose inversi matrisin kendisine eşittir. Yani, herhangi bir A matrisi için, $(A^+)^+ = A$ olur(Ben-Israel and Charnes, 1963).

Teorem 2.2.7 herhangi bir matrisin Moore–Penrose inversinin rankı kendi rankına eşittir. Yani, $r(A) = r(A^+)$ dır(Ben-Israel and Charnes, 1963).

Bu teoremin sonucu olarak eğer herhangi bir A matrisinin rankı r ise, bu takdirde $A^+, AA^+, A^+A, AA^+A, A^+AA^+$ matrislerinin her birinin rankının da r olduğu görülür(Ben-Israel and Charnes, 1963).

Teorem 2.2.8 Eğer A simetrik ve idempotent bir matris ise, bu takdirde $A^+ = A$ dir(Ben-Israel and Charnes, 1963).

Teorem 2.2.9 $B = \text{Köş}\{\mathrm{b}_{11}, \mathrm{b}_{22}, \dots, \mathrm{b}_{nn}\}$ ise, B matrisinin Moore–Penrose inversi B^+, i–yinci satırı ve i–yinci sütununda yer alan köşegen elemanı $\mathrm{b}_{ii} \neq 0$ ise b_{ii}^{-1} ve $\mathrm{b}_{ii} = 0$ ise “0” olan bir köşegen matristir(Ben-Israel and Charnes, 1963).

Teorem 2.2.10 i) A, $m \times n$ matrisi tam satır ranklı ise, $A^+ = A^*(AA^*)^{-1}$ ve $AA^+ = I_m$,

ii) A, $m \times n$ matrisi tam sütun ranklı ise, $A^+ = (A^*A)^{-1}A^*$ ve $A^+A = I_n$ olur.

İspat: Her iki durum için verilen A^+ matrislerinin Moore–Penrose şartlarını sağladığını göstermek yeterlidir. Buna göre,

i) (i) $AA^+A = AA^*(AA^*)^{-1}A = (AA^*)(AA^*)^{-1}A = A$,

(ii) $A^+AA^+ = A^*(AA^*)^{-1}AA^*(AA^*)^{-1}$

$$= A^*(AA^*)^{-1}(AA^*)(AA^*)^{-1} = A^*(AA^*)^{-1} = A^{+\dagger},$$

(iii) $(AA^+)^* = (AA^*(AA^*)^{-1})^* = ((AA^*)(AA^*)^{-1})^* = I^* = I$

$$= (AA^*)(AA^*)^{-1} = AA^*(AA^*)^{-1} = AA^+,$$

(iv) $(A^+A)^* = (A^*(AA^*)^{-1}A)^* = A^*(AA^*)^{-1}A = A^+A$

olur.

ii) (i) $AA^+A = A(A^*A)^{-1}A^*A = A(A^*A)^{-1}(A^*A) = A,$

(ii) $A^+AA^+ = (A^*A)^{-1}A^*A(A^*A)^{-1}A^*$

$$= (A^*A)^{-1}(A^*A)(A^*A)^{-1}A^* = (A^*A)^{-1}A^* = A^+,$$

(iii) $(AA^+)^* = (A(A^*A)^{-1}A^*)^* = A(A^*A)^{-1}A^* = AA^+,$

(iv) $(A^+A)^* = ((A^*A)^{-1}A^*A)^* = ((A^*A)^{-1}(A^*A))^* = I^* = I$

$$= (A^*A)^{-1}(A^*A) = (A^*A)^{-1}A^*A = A^+A$$

dir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

2.3 Lineer Regresyon Modeli

Regresyon, kelime anlamıyla, bir şeyi başka bir şeye bağlama işi ya da biçimidir. İstatistiksel anlamda ise, bir değişken ile başka bir ya da birden çok değişken arasında ilişki kurma işi ve biçimi olarak algılanır. Pek çok durumlarda değişkenler arası ilişkinin miktarına ek olarak ilişkinin biçimi ve durumu bilinen değişkenlerden yararlanarak bilinmeyenler hakkında fikir yürütmek istenir. Bu nedenle bu bölümde öncelikle bir değişken hakkında verilen bilgilerden yararlanarak başka bir değişken hakkında kestirimde bulunma işi ve bu işlemde yararlanılabilecek yöntem üzerinde durulacaktır (Maden ve Korkmaz, 2018).

İstatistiksel olarak iki değişken arasındaki ilişki, bunların değerlerinin karşılıklı değişmeleri arasında bir bağlılık şeklinde anlaşılır. Yani, bir X değişkeninin değerleri değişiyorken, buna bağlı olarak Y değişkenin değerleri de değişiyorsa, bu iki değişken arasında bir ilişki olduğu söylenebilir. Örneğin, petrol tüketimi ile araç sayısı, değişik öğretim yöntemlerinin öğrencilerin başarısı üzerindeki etkisi, kişilerin gelir düzeyi ile siyasi görüşleri, bir malın üretim miktarı ile fiyatı, insanların boy uzunluğu ile ağırlığı vs. arasındaki ilişkiler incelenmek istenebilir. Esas itibariye değişkenler arasındaki bu ilişki bir neden sonuç ilişkisidir. Görüldüğü gibi, örnek problemlerin hepsinde değişkenlerden birinin değişik seviyeleri için diğer değişken üzerindeki değişimle ilgilenilmektedir.

Değişkenler arasındaki ilişkinin incelenmesi konusu özellikle iktisat, maliye, tıp, mühendislik ve matematiksel istatistik biliminin temel uğraşlarından birisidir. Örneğin davranışları fonksiyonel ilişkiler şeklinde incelemek ve "ne neye bağlıdır" sorusunu cevaplandırmaya çalışmak iktisatçıların temel görevlerindendir. Bir ürüne karşı talebin; o ürünün fiyatının, tüketici gelirinin ve ilgili (rakip veya tamamlayıcı) ürünlerinin fiyatının bir fonksiyonu olacağı düşünülebilir. İşte bir bağımlı ve bir ya da birden çok bağımsız değişken arasındaki fonksiyonel ilişkiye en uygun modelin seçimi, bu modelin parametrelerinin tahminleri ve standart hatalarının hesaplanması bizi regresyon analizine götürecektir.

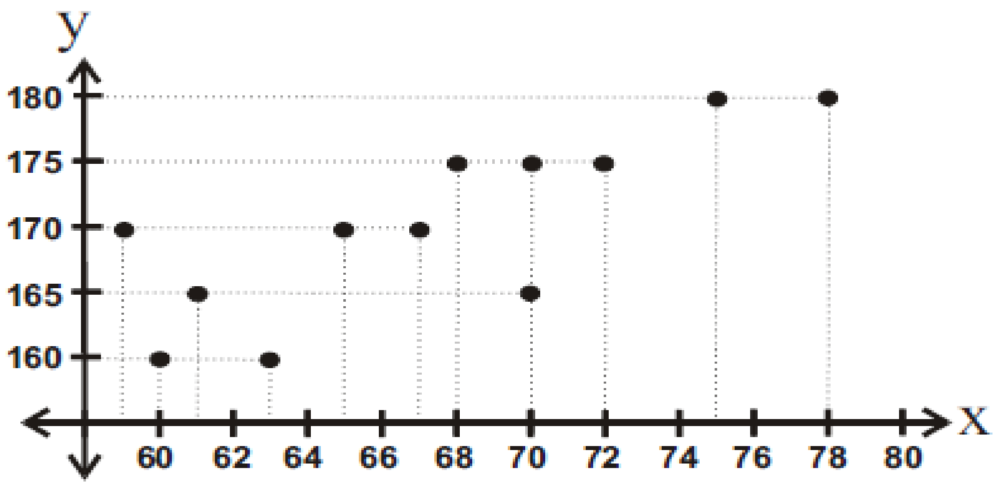
Değişkenler arasındaki ilişkileri başlıca iki kısma ayırabiliriz. Deterministik ilişkiler ve stokastik ilişkiler. Deterministik ilişkilerde değişkenlerden birisi bağımlı diğeri bağımsız yani açıklayıcı değişken olmak üzere açıklayıcı değişkenin bağımlı değişkendeki değişimi tam anlamıyla izah edebildiği düşünülür. Örneğin bir dairenin alanının $A = \pi . r^2$ olarak verilmesi bir deterministik ilişkidir. Zira dairenin A alanı r yarıçapı ile tam olarak izah edilmektedir. Stokastik ilişkilerde ise çeşitli nedenlerden dolayı açıklayıcı değişkenlerin bağımlı değişkenin değişmesini tam olarak izah edemediği ve böylece bir hata terimininde fonksiyonel ilişkide yer alması gerektiği kabul edilir. Örneğin belirli bir ürüne olan talep miktarı ile ürünün fiyatı arasında bir ilişki vardır, ancak ürünün fiyatı bu ürünün talebini tamamıyla etkileyen bir faktör olmayacaktır. Dolayısıyla stokastik ilişkilerde, deterministik ilişkilerde olduğu gibi $Y = f(X_1, X_2, ..., X_k)$ gibi bir fonksiyonel ilişki almak yerine, ε hata terimi olmak üzere, $Y = f(X_1, X_2, ..., X_k, \varepsilon)$ şeklinde bir fonksiyonel ilişki söz konusu olabilir.

Regresyon analizi aslında bir tahmin işlemidir. Regresyon analizinde temel amaç, aralarında deterministik bir ilişki bulunmayan değişkenlerden, birinin diğerine (veya diğerlerine) olan bağımlılığının matematiksel biçimini ortaya koymak ve bu biçimi analiz etmektir. Analiz iki aşamada yapılabilir. Birinci aşamada, ilgilenilen değişkenlere ilişkin gözlem değerlerinin oluşturduğu verilere dayanarak, ilişkinin matematiksel biçimi (regresyon eğrisi) belirlenir. Bu aşamada herhangi bir istatistiksel kavram ya da varsayıma ihtiyaç duyulmayıp sadece grafiklere ve matematiksel kriterlere başvurulur. İkinci aşamada ise verilerden elde edilen regresyon eğrisine ilişkin istatistiksel çıkarsamalar yapılır. Burada önce basit doğrusal model üzerinde durulacaktır.

İki değişken arasındaki ilişkinin ne tür bir fonksiyon tipine uyduğu, yaklaşık olarak serpilme diyagramı adı verilen bir gösterim yardımıyla belirlenebilir. X ve Y gözlem ilişkileri arasındaki ilişki bir grafik üzerinde birer nokta halinde gösterilsin. İşaretlenen bu noktaların oluşturduğu şekle serpilme diyagramı adı verilir. Serpilme diyagramında noktaların durumu ve genel seyri, iki değişken arasında ilişki olup olmadığına ve varsa ilişkinin ne tür bir fonksiyon tipine uyduğunun belirlenmesine yardımcı olacaktır. Bir grup üniversite öğrencisinin boy ve ağırlık ölçüleri aşağıdaki şekilde ölçülmüş olsun.

Ağırlık(kg) x	60	67	70	70	61	59	75	72	63	68	78	65
Boy(cm) y	160	170	175	165	165	170	180	175	160	175	180	170

Bu durumda serpilme diyagramı aşağıdaki grafikte verilmiştir.



Serpilme diyagramı, yalnız ilişkinin olup olmadığını ve varsa ilişkinin fonksiyonel şeklini göstermekle kalmaz, ilişkinin derecesi hakkında da bilgi verir. Bunun için noktaların en dışta kalanları birleştirilerek, bir şekil elde edilir. Söz konusu şeklin durumuna göre ilişkinin derecesi hakkında tahminde bulunulur. Eğer şekil oldukça dar bir elipse benziyorsa, ilişki kuvvetlidir. Elips genişledikçe ilişki zayıflayacaktır.

İki değişken arasında olabilecek en basit ilişki bir doğru ile açıklanabilen ilişkidir. Regresyon analizinde, biri bağımlı değişken olmak üzere, bağımsız değişken sayısı bir olduğunda basit regresyon modelinden, iki ya da daha fazla olduğunda ise çoklu regresyon modelinden söz edilir. Örneğin, enflasyon oranıyla para arzı arasındaki regresyon basit regresyon; enflasyon oranıyla hem para arzı hem de kamu harcamaları arasındaki regresyon çoklu regresyondur. Regresyon analizinde değişkenler arasındaki ilişkinin doğrusal olup-olmadığı da oldukça önemlidir. Değişkenler arasındaki ilişki doğrusal olduğunda doğrusal regresyon modeli, aksi halde doğrusal olmayan regresyon modeli söz konusu olacaktır. Basit doğrusal regresyon modeli en genel şekliyle

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i \ , \ i = 1,2,...,N \tag{2.10}$$

şeklinde verilir, burada X_i açıklayıcı değişken, Y_i bağımlı değişken, ε_i hata terimi, β_0 ve β_1 ise bilinmeyen regresyon katsayılarıdır. Bu durumda X bağımsız ve Y bağımlı değişkenlerinin ana kütlelerini oluşturan ve bu değişkenler için akla gelebilecek bütün değerlere sahip olunması uygulamada imkansız olduğundan, söz konusu değişkenler için bir örnekleme yapmaya ihtiyaç duyulur. Böylece β_0 ve β_1 parametrelerinin tahminleri olan $\hat{\beta}_0$ ve $\hat{\beta}_1$ bulunabilir. β_0 doğrusal modelin sabit terimidir ve $X = 0$ olduğunda regresyon doğrusunun Y dikey ekseninin kestiği noktayı göstermektedir. β_1 ise doğrusal modelin eğimini vermektedir. Bu durumda

$$\hat{Y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X \tag{2.11}$$

şeklinde regresyon doğrusu tahmin edilmiş olur. Bu durum bizi en küçük kareler yöntemi olarak adlandırılan ve kısaca EKKY şeklinde gösterilen yönteme götürür. Bu yöntemin esası

$$\sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^{N} (Y_i - \beta_0 - \beta_1 X_i)^2 \tag{2.12}$$

ifadesini en küçük yapan $\hat{\beta}_0$ ve $\hat{\beta}_1$ değerlerini β_0 ve β_1 parametrelerin tahminleri olarak bulmak gerçeğine dayanır. Bunun için, (2.12) eşitliğinden β_0 ve β_1 parametrelerine göre kısmi türevler alınmak suretiyle

$$\frac{\partial \sum \varepsilon_i^2}{\partial \beta_0} = -2\sum_{i=1}^{N}(Y_i - \beta_0 - \beta_1 X_i) = 0$$

$$\frac{\partial \sum \varepsilon_i^2}{\partial \beta_1} = -2\sum_{i=1}^{N}(Y_i - \beta_0 - \beta_1 X_i)\, X_i = 0$$

denklemleri elde edilir. Bu iki denklemi sağlayacak şekilde bulunacak olan β_0 ve β_1 özel değerlerini sırasıyla $\hat{\beta}_0$ ve $\hat{\beta}_1$ ile gösterirsek bu değerler denklemlerde yerlerine yazılarak

$$\sum_{i=1}^{N} Y_i = \hat{\beta}_0 N + \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^{N} X_i \qquad (2.13)$$

$$\sum_{i=1}^{N} X_i Y_i = \hat{\beta}_0 \sum_{i=1}^{N} X_i + \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^{N} X_i^2 \qquad (2.14)$$

elde edilir. Bu şekilde (2.13) ve (2.14) denklemlerine modelin normal denklemleri adı verilir. Bu sistem Cramer yöntemi ile çözülerek

$$\hat{\beta}_0 = \frac{\begin{vmatrix} \sum Y_i & \sum X_i \\ \sum X_i Y_i & \sum X_i^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} N & \sum X_i \\ \sum X_i & \sum X_i^2 \end{vmatrix}} = \frac{\sum Y_i \sum X_i^2 - \sum X_i \sum X_i Y_i}{N\sum X_i^2 - (\sum X_i)^2},$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\begin{vmatrix} N & \sum Y_i \\ \sum X_i & \sum X_i Y_i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} N & \sum X_i \\ \sum X_i & \sum X_i^2 \end{vmatrix}} = \frac{N\sum X_i Y_i - \sum X_i \sum Y_i}{N\sum X_i^2 - (\sum X_i)^2}$$

veya buna denk olarak

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum X_i Y_i - N\bar{X}\bar{Y}}{\sum X_i^2 - N\bar{X}^2}$$

ya da

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum (X_i - \bar{X})^2}$$

bulunmuş olur(Maden ve Korkmaz, 2018).

Normal denklemlerde X_i ve Y_i değerleri yerine aritmetik ortalamalarından sapmaları olan $x_i = X_i - \bar{X}$ ve $y_i = Y_i - \bar{Y}$ değerlerinin konulmasıyla

$$\sum y_i = \hat{\beta}_0 N + \hat{\beta}_1 \sum x_i$$

$$\sum x_i y_i = \hat{\beta}_0 \sum x_i + \hat{\beta}_1 \sum x_i^2$$

denklemleri elde edilir. Öte yandan aritmetik ortalamanın özellikleri ve $x_i = X_i - \bar{X}$ ve $y_i = Y_i - \bar{Y}$ olduğu dikkate alınırsa $\sum x_i = 0$ ve $\sum y_i = 0$ bulunur. Böylece son iki eşitlikten

$$\hat{\beta}_0 = 0 \quad \text{ve} \quad \hat{\beta}_1 = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2}$$

elde edilir. $\hat{\beta}_0$ nın sıfır olması, ortalamalar orijinine göre, $\hat{\beta}_0$ regresyon doğrusunun değişkenlerin ortalamalarıyla tanımlanan bir noktadan geçtiğini gösterir. Bu durumda regresyon denklemi $\hat{y}_i = \hat{\beta}_1 x_i$ veya kısaca $\hat{y} = \hat{\beta}_1 x$ olacaktır. Bir regresyon doğrusu ister sıfır orijinine, isterse ortalamalar orijinine göre yazılsın eğimi değişmez. Bu nedenle her iki orijinine göre hesaplanan $\hat{\beta}_1$ katsayısı aynıdır. Buna karşılık $\hat{\beta}_0$ ise,

$$\sum Y_i = \hat{\beta}_0 N + \hat{\beta}_1 \sum X_i$$

eşitliğinden hareketle elde edilir. Bu eşitliğin her iki tarafını N ye bölersek

$$\frac{1}{N}\sum Y_i = \hat{\beta}_0 + \frac{1}{N}\hat{\beta}_1 \sum X_i$$

veya buna denk olarak

$$\bar{Y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \bar{X} \Rightarrow \hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X} \tag{2.15}$$

elde edilir. $\hat{\beta}_0$ için bulunan bu değer (2.11) ile verilen regresyon denkleminde yerine yazılırsa

$$\hat{Y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X} + \hat{\beta}_1 X = \bar{Y} + \hat{\beta}_1 (X - \bar{X}) \tag{2.16}$$

şeklinde de ifade edilebilir.

Bir değişkenin başka bir değişken üzerindeki regresyonu verilirken regresyon değerleriyle gözlenen değerler arasında bazı farklılıkların olabileceği, ancak, genellikle, gelişigüzel yapılacak bir tahminden de daha az hata taşıyacağı açıktır. Dolayısıyla bir değişkenin başka bir değişken üzerindeki regresyonunu verdiğimizde yapılan hatanın miktarının da bir ölçüsü olması gerekir. Başka bir deyişle, regresyon denklemi tahmin edildikten sonra, bu denklemin değişkenler arasındaki ilişkiyi ne derece açıkladığı ve bu denklem kullanılarak yapılan tahminlerin ne derece hassas olacağının araştırılması da gerekir. Bunun için gözlenen değerler ile bunların regresyon doğrusu kullanılarak yapılan tahminleri arasındaki farka bakmak gerekir. Zira yapılan hatanın miktarı $Y-\hat{Y}$ farkının miktarına bağlı olacaktır. Bu durumda

$$Y-\hat{Y}=(Y-\bar{Y})-(\hat{Y}-\bar{Y})$$

ifadesinden her iki tarafın karelerini alıp bütün gözlemler üzerinden toplam alınırsa

$$\sum(Y-\hat{Y})^2=\sum(Y-\bar{Y})^2+\sum(\hat{Y}-\bar{Y})^2-2\sum(Y-\bar{Y})(\hat{Y}-\bar{Y})$$

elde edilir. Bu eşitliğin son toplamında $\hat{Y}-\bar{Y}$ yerine (2.16) eşitliğinden $\hat{\beta}_1(X-\bar{X})$ yazılabilir. Böylece

$$\begin{aligned}-2\sum(Y-\bar{Y})(\hat{Y}-\bar{Y}) &= -2\sum(Y-\bar{Y})\hat{\beta}_1(X-\bar{X})\\ &= -2\hat{\beta}_1\sum(Y-\bar{Y})(X-\bar{X})\\ &= -2\hat{\beta}_1\hat{\beta}_1\sum(X-\bar{X})^2 = -2\sum(\hat{Y}-\bar{Y})^2\end{aligned}$$

olduğu görülür. Buradan

$$\sum(Y-\hat{Y})^2=\sum(Y-\bar{Y})^2-\sum(\hat{Y}-\bar{Y})^2$$

ve dolayısıyla

$$\sum(Y-\bar{Y})^2=\sum(Y-\hat{Y})^2+\sum(\hat{Y}-\bar{Y})^2 \tag{2.17}$$

eşitliği elde edilir. Bazı kaynaklarda bu eşitliğe regresyonun temel eşitliği de denir. Bu eşitliğin solundaki toplam Y' lerin ortalamadan sapmalarının kareleri toplamıdır ve SST ile gösterilir. Sağ taraftaki birinci toplam regresyondan elde edilen değerlerden sapmalar toplamı (SSE), ikinci toplam ise regresyon değerlerinin ortalamadan sapmalarının kareler toplamı (SSR) dır. Böylece

$$SST=SSE+SSR \tag{2.18}$$

yazılabilir. Bu durumda eğer gözlenen değerlerin tümü tahmin edilen regresyon doğrusu üzerinde olsaydı regresyondan sapmalar toplamı $SSE=0$ olurdu ve dolayısıyla uyumun son derece iyi olduğu söylenebilirdi. Başka bir deyişle regresyon değerlerinin ortalamadan sapmalarının kareler toplamı, SST, içindeki payı ne kadar yüksek olursa regresyon denklemi o kadar iyi bir tahmin olacaktır. O halde denklemin doğruluğunu sayısal olarak ölçmede SSR/SST oranına bakılır. Bu orana belirlilik veya belirleme katsayısı adı verilir ve genellikle

$$R^2 = \frac{SSR}{SST} = 1 - \frac{SSE}{SST}$$

olarak gösterilir. R^2 nin tanımına bakılırsa $0 \leq R^2 \leq 1$ olacağı kolayca görülmektedir. Buradan da R^2 nin 1' e yaklaşan değerleri bize uyumun iyi olduğunu göstermektedir. (2.18) bağıntısındaki toplamları daha kolay bir şekilde hesaplayabilmek için

$$\sum (Y - \bar{Y})^2 = \sum Y^2 - \frac{1}{N}(\sum Y)^2 = \sum Y^2 - N\bar{Y}^2 ,$$

$$\sum (\hat{Y} - \bar{Y})^2 = \hat{\beta}_1^2 \sum (X - \bar{X})^2 = \hat{\beta}_1^2 \left[\sum X^2 - N\bar{X}^2 \right]$$

yazılabileceği dikkate alınarak

$$\sum (Y - \hat{Y})^2 = \sum (Y - \bar{Y})^2 - \sum (\hat{Y} - \bar{Y})^2 = \sum Y^2 - N\bar{Y}^2 - \hat{\beta}_1^2 \left[\sum X^2 - N\bar{X}^2 \right]$$

eşitlikleri de kullanılabilir. Diğer taraftan bu son eşitlikte

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum XY - N\bar{X}\bar{Y}}{\sum X^2 - N\bar{X}^2}$$

değeri yerine yazılırsa ve gerekli düzenleme yapılırsa

$$\sum (Y - \hat{Y})^2 = \frac{1}{N} \left[N \sum Y^2 - (\sum Y)^2 - \frac{\left[N \sum XY - (\sum X)(\sum Y) \right]^2}{N \sum X^2 - (\sum X)^2} \right]$$

olduğu kolayca gösterilebilir.

Yukarıda kareler toplamları için verilen değerler bir tablo haline getirilerek aşağıdaki Varyans Analizi tablosu elde edilir.

Varyasyon Kaynağı	Serbestlik Derecesi	Kareler Toplamı	Kareler Ortalaması
SSR	1	$\sum (\hat{Y} - \bar{Y})^2$	RKO
SSE	$N - 2$	$\sum (Y - \hat{Y})^2$	HKO
SST	$N - 1$	$\sum (Y - \bar{Y})^2$	

Yukarıdaki tabloda verilen serbestlik dereceleri ilgili kareler toplamlarının hesaplanmasında kaç tane birbirinden bağımsız Y' lerin gerektiğini göstermektedir. Kareler ortalamaları ise kareler toplamlarının serbestlik derecelerine bölünmesiyle elde edilir. Başka bir deyişle,

$$RKO = \frac{\sum(\hat{Y}-\bar{Y})^2}{1} = \hat{\beta}_1^2[\sum X^2 - N\bar{X}^2]$$

$$HKO = \frac{\sum(Y-\hat{Y})^2}{N-2} = \frac{\sum(Y-\bar{Y})^2 - \sum(\hat{Y}-\bar{Y})^2}{N-2}$$

$$= \frac{\sum Y^2 - N\bar{Y}^2 - \hat{\beta}_1^2\left[\sum X^2 - N\bar{X}^2\right]}{N-2}$$

yazılabilir. Böylece hata kareleri ortalaması gerçek Y değerlerinin tahmin edilen $\hat{Y}$ değerlerinden varyasyonunun ölçüsüdür. Bu HKO değerinin karekökünü alırsak, yapılan hatanın standart sapma cinsinden bir ölçüsünü bulmuş oluruz. Bu standart sapmaya tahminin standart hatası adı verilmektedir. Bu standart sapmayı S ile gösterirsek

$$S = \sqrt{HKO} = \sqrt{\frac{\sum(Y-\hat{Y})^2}{N-2}}$$

olacaktır. S nin karesi

$$S^2 = \hat{\sigma}^2 = \frac{SSE}{N-2} = \frac{\sum(Y-\hat{Y})^2}{N-2}$$

X üzerinde Y' nin regresyon doğrusunun varyansının yansız tahmin edicisi olacaktır.

2.4 Lineer Regresyonda Matris Gösterimi

$Y = \beta_0 + \beta_1 X + \varepsilon$ şeklindeki bir doğrusal regresyon modelinde daha önce verilen yöntemlerle çalışmak yerine pek çok durumda modeli matris notasyonunda yazarak çalışmak daha da uygundur. Zira bu durumda formüller daha kısa ve kolay anlaşılabilir forma getirilmiş olmaktadır. Ayrıca bu yapıldığında modele ilişkin kavramlar matris terimleriyle daha açık ve daha kolay bir şekilde açıklanabilir. Yöntemi açıklamak amacıyla bu kısmın başlangıcında verilen

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, 3, \ldots, N$$

basit doğrusal regresyon modelinin genel şekline dönelim. Bu modelden

$$Y_1 = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \varepsilon_1$$

$$Y_2 = \beta_0 + \beta_1 X_2 + \varepsilon_2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$Y_N = \beta_0 + \beta_1 X_N + \varepsilon_N$$

denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sistemi ise matris notasyonunda

$$Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \cdots \\ Y_N \end{bmatrix}_{Nx1} , \quad X = \begin{bmatrix} 1 & X_1 \\ 1 & X_2 \\ \cdots & \cdots \\ 1 & X_N \end{bmatrix}_{Nx2} , \quad \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \cdots \\ \varepsilon_N \end{bmatrix}_{Nx1} , \quad \beta = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix}_{2x1}$$

olmak üzere

$$Y = X\beta + \varepsilon$$

şeklinde yazabiliriz. Bilindiği gibi en küçük kareler yönteminde amacımız hataların kareleri toplamının minimum yapılması idi. O halde bir vektörün elemanlarının kareleri toplamının vektörün transpozesi ile çarpımı olduğu hatırlanırsa, bir u vektörünün elemanlarının kareleri toplamı $u^T u$ olacaktır. Yani, $u = (u_1, u_2, \ldots u_n)^T$ vektörü için

$$\sum_{i=1}^{n} u_i^2 = u^T u = (u_1, u_2, \ldots u_n).(u_1, u_2, \ldots u_n)^T$$

olacaktır. Buna göre, hata vektörü ε olduğundan ve hataların kareleri toplamını aradığımıza göre

$$\varepsilon^T \varepsilon = (Y - X\beta)^T (Y - X\beta)$$

olacaktır. Bu durumda

$$\varepsilon^T \varepsilon = (Y^T - \beta^T X^T)(Y - X\beta) = Y^T Y - Y^T X\beta - \beta^T X^T Y + \beta^T X^T X\beta$$

yazılabilir. $(Y^T X\beta)^T = \beta^T X^T Y$ olup bunların her ikisi de skaler olduğundan

$$\varepsilon^T \varepsilon = Y^T Y - 2\beta^T X^T Y + \beta^T X^T X\beta$$

alınabilir. Matris diferansiyelini kullanılarak

$$\frac{\partial(\varepsilon^T \varepsilon)}{\partial \beta} = -2X^T Y + 2X^T X\beta = 0$$

eşitliğini sağlayan β nın $\varepsilon^T\varepsilon$ değerini minimum yapacak değer olabileceği dikkate alınırsa, eğer bu değer $\hat{\beta}$ ile gösterilirse

$$X^T Y = (X^T X)\hat{\beta} \tag{2.19}$$

normal denklemi elde edilir. Buradan eşitliğin her iki tarafı $(X^T X)^{-1}$ ile çarpılmak suretiyle $\hat{\beta}$ tahmininin

$$\hat{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T Y \tag{2.20}$$

olduğu elde edilir. Böylece

$$\hat{\beta} = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ X_1 & X_2 & \dots & X_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & X_1 \\ 1 & X_2 \\ \dots & \dots \\ 1 & X_N \end{bmatrix} \right\}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ X_1 & X_2 & \dots & X_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \dots \\ Y_N \end{bmatrix}$$

elde edilmiş olur. Ayrıca $\hat{Y} = X\hat{\beta}$ denklemi kullanılır ve bu eşitliğin her iki tarafı önce X^T ve daha sonra da $(X^T X)^{-1}$ ile çarpılırsa (2.20) denkleminin oldukça kolay elde edildiği görülür.

2.5 Çoklu Lineer Regresyon

İstatistiksel uygulamaların birçoğunda bağımlı değişken bir tek bağımsız değişken tarafından önemli ölçüde açıklanabilir olmasına rağmen bazı durumlarda bağımlı değişkenin birden çok bağımsız değişken tarafından açıklanması da gerekebilir. Örneğin, bir seçim bölgesinde siyasi partilerin oylarının dağılımı, seçmenlerin eğitim düzeyine ve maddi imkânlarına bağlı olabilir veya bir araziden elde edilecek ürün, kullanılacak gübre miktarına ve araziye düşen yağış miktarına bağlı olabilir. Birden fazla bağımsız değişkenin yer aldığı bir çoklu doğrusal regresyon modeli genelde

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \dots + \beta_n X_n + \varepsilon$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu durumda tek bağımsız değişkenli regresyon modelinde yapılan tüm varsayımlar çoklu doğrusal regresyon modeline de uyarlanabilir. Dolayısıyla böyle bir çoklu regresyon modelinde amaç

$$\hat{Y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_1 + \hat{\beta}_2 X_2 + \dots + \hat{\beta}_n X_n$$

şeklinde bir tahmin elde ederek β_0, β_1, β_2,..., β_n parametreleri ile $\hat{\beta}_0$, $\hat{\beta}_1$, $\hat{\beta}_2$,…, $\hat{\beta}_n$ tahmin parametreleri arasındaki ilişkileri ortaya koymaktır. $n = 2$ olması durumunda

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \varepsilon$$

regresyon modelinde en küçük kareler yöntemiyle regresyon tahmin denklemini

$$\hat{Y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_1 + \hat{\beta}_2 X_2$$

şeklinde belirlemek için, tek bağımsız değişken durumuna paralel olarak

$$\sum [Y - (\beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \varepsilon)]^2$$

toplamını minimum yapacak şekilde katsayıların bulunması gerekmektedir. Bu durumda normal denklemleri elde etmek ve tahminlerin formüllerini vermek için yukarıdaki toplamdan $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ lere göre kısmi türevler alınıp sıfıra eşitlenirse

$$\sum_{i=1}^{N} Y_i = \hat{\beta}_0 N + \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^{N} X_{1i} + \hat{\beta}_2 \sum_{i=1}^{N} X_{2i}$$

$$\sum_{i=1}^{N} X_{1i} Y_i = \hat{\beta}_0 \sum_{i=1}^{N} X_{1i} + \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^{N} X_{1i}^{\,2} + \hat{\beta}_2 \sum_{i=1}^{N} X_{1i} X_{2i}$$

$$\sum_{i=1}^{N} X_{2i} Y_i = \hat{\beta}_0 \sum_{i=1}^{N} X_{2i} + \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^{N} X_{1i} X_{2i} + \hat{\beta}_2 \sum_{i=1}^{N} X_{2i}^{\,2}$$

elde edilir. Bu sistemden $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2$ tahmin değerleri hesaplanarak

$$\hat{Y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_1 + \hat{\beta}_2 X_2$$

bulunmuş olur. Buradan da görüldüğü gibi değişken sayısı arttıkça tahminlerin bulunması zorlaşacaktır. Bu durumda bilgisayar programları ve matris gösterimleri daha yaralıdır. Bu anlamda regresyon modelinin matris notasyonunda gösterim,

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \cdots \\ Y_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & X_{11} & X_{21} & \cdots & X_{n1} \\ 1 & X_{12} & X_{22} & \cdots & X_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & X_{1N} & X_{2N} & \cdots & X_{nN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \cdots \\ \beta_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \cdots \\ \varepsilon_N \end{bmatrix}$$

veya bunun yerine

$$Y = X\beta + \varepsilon$$

şeklinde verilebilir. Burada Y $Nx1$; X $Nx(n+1)$; β $(n+1)x1$ ve ε $Nx1$ boyutlu matrislerdir. Böylece tek bağımsız değişken durumunda verilen $\hat{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T Y$ tahmin eşitliği çoklu regresyon için de geçerlidir.

3. TAHMİN EDİCİLERİN AYRIŞIMLARI

3.1 Parçalı Lineer Model Altında OLSE ve BLUE Ayrışımı

Bu kısımda $\{y, X_1\beta_1 + X_2\beta_2, \sigma^2\Sigma\}$ paçalı tam lineer modeli ile bu modelden türetilen iki küçük $\{y, X_1\beta_1, \sigma^2\Sigma\}$ ve $\{y, X_2\beta_2, \sigma^2\Sigma\}$ modelleri ele alınarak,

(i) Tam model altında alışılmış en küçük kareler tahmin edicisinin iki küçük model altındaki alışılmış en küçük kareler tahmin edicilerinin toplamına eşit;

(ii) Tam model altında en iyi lineer yansız tahmin edicisinin iki küçük model altındaki en iyi lineer yansız tahmin edicilerinin toplamına eşit;

(iii) Tam model altında en iyi lineer yansız tahmin edicisinin iki küçük model altındaki alışılmış en küçük kareler tahmin edicilerinin toplamına eşit

olmaları için gerek ve yeter şartlar verilmiştir. Temel sonuçların ispatları genel lineer modeller altında değişik tahmin edicilerin karakterize edilmesinde matris rank metodunun nasıl kullanıldığını da açıklamaktadır.

$$y = X_1\beta_1 + X_2\beta_2 + \varepsilon \quad E(\varepsilon)=0\ , Cov(\varepsilon) = \sigma^2\Sigma, \tag{3.1}$$

parçalı lineer modelinin verildiğini varsayalım, burada $X_1 \in \mathbb{R}^{n\times p_1}$ ve $X_2 \in \mathbb{R}^{n\times p_2}$ keyfi ranklı iki bilinenler matrisi, $y \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ gözlenebilir bir rasgele vektör, $\beta_1 \in \mathbb{R}^{p_1\times 1}$ ve $\beta_2 \in \mathbb{R}^{p_2\times 1}$ iki bilinmeyen parametreler vektörü, $\Sigma \in \mathbb{R}^{n\times n}$ bilinen keyfi ranklı non-negatif definit matris ve σ^2 bilinmeyen bir pozitif parametredir. Eğer Σ matrisi singüler bir matris ise (3.1) modeline singüler lineer model de denir. (3.1) modeli genellikle $X = [X_1, X_2]$ ve $\beta = [\beta_1, \beta_2]$ olmak üzere

$$M = \{y, X\beta, \sigma^2\Sigma\} = \{y, X_1\beta_1 + X_2\beta_2, \sigma^2\Sigma\} \tag{3.2}$$

şeklinde gösterilir. M tam modeli ile ilgili olarak iki küçük modeli de

$$M_1 = \{y, X_1\beta_1, \sigma^2\Sigma\} \quad \text{ve} \quad M_2 = \{y, X_2\beta_2, \sigma^2\Sigma\} \tag{3.3}$$

ile gösterelim. Bu kısımdaki amacımız (3.2) ve (3.3) modelleri altında tahmin ediciler arasındaki ilişkileri ortaya koymak olacaktır. Özellikle, M modeli altında $X\beta$ nın alışılmış en küçük kareler tahmin edicisi(OLSE) ve en iyi lineer yansız tahmin edicisi(BLUE) nin M_1 ve M_2 modelleri altında sırasıyla $X_1\beta_1$ ve $X_2\beta_2$ nın alışılmış en küçük kareler tahmin edicisi(OLSE) ve en iyi lineer yansız tahmin edicisi(BLUE) nin toplamına eşit olması için gerek ve yeter şartlar türetilecektir. Bu konudaki bazı önemli araştırmalar Bhimasankaram & Saharay(1997), Chu ve Ark.(2004), Grob & Puntanen(2000), Nurhonen & Puntanen(1992), Werner & Yapar(1995,1996), Zhang ve Ark.(2004) tarafından yapılmıştır.

Bu kısım boyunca, $\mathbb{R}^{m\times n}$ m×n boyutlu tüm reel matrislerin uzayını, A', $r(A)$ ve $\Re(A)$ ise bir $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ matrisinin sırasıyla transpozu, rankı ve ranj uzayını göstermektedir. $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ matrisinin Moore-Penrose inversi A^+ ile gösterilir ve $AGA = A$, $GAG = G$, $(AG)'$=AG ve $(GA)'$= GA matris denklemlerini sağlayan tek G çözümü olarak tanımlanmaktadır. Ayrıca, P_A, E_A ve F_A ortogonal izdüşümleri sırasıyla $P_A = AA^+$, $E_A = I - P_A = I - AA^+$ ve F_A = $I - P_{A'} = I - A^+A$ ile gösterielecektir.

β ve $X\beta$ nın (3.2) deki genel lineer model altındaki OLSE ve BLUE tahmin edicileri aşağıdaki gibi verilebilir:

(i) β parametresinin (3.2) deki genel lineer model altındaki OLSE tahmin edicisi

$$\hat{\beta}=\text{argmin}(\text{y} - \text{X}\beta)'(\text{y} - \text{X}\beta) \tag{3.4}$$

dir. Bu durumda $X\beta$ nın (3.2) deki genel linner model altındaki OLSE tahmin edicisi $OLSE_M(X\beta) = X.OLSE_M(\beta)$ dir.

(ii) $X\beta$ nın (3.2) altındaki BLUE tahmin edicisi, $BLUE_M(X\beta)$ ile gösterilir, bir Gy lineer tahmin edicisi olarak tanımlanır öyle ki E(Gy) = β ve $X\beta$ nin (3.2) altındaki diğer herhangi bir yansız lineer tahmin edicisi Ly ise $Cov(Ly)$– $Cov(Gy)$ farkı non-negatif definittir.

(3.4) bağıntısı ile ilgili normal denklem $X'X\beta$=$X'y$ şeklinde olup bu denklemin çözümü aşağıdaki iyi bilinen sonuçtur.

Lemma 3.1.1 (3.2) modeli altında β nın OLSE tahmin edicisi $v \in \mathbb{R}^{p_1\times 1}$ keyfi bir vektör olmak üzere

$$OLSE_M(\beta) = (X'X)^+X'y + (I - X^+XX)v = X^+y + F_Xv \tag{3.5}$$

$$OLSE_M(X\beta) = XOLSE_M(\beta) = XX^+y = P_X\, y, \tag{3.6}$$

şeklindedir.

(3.2) modeli altında $X\beta$ nın BLUE tahmin edicisi aşağıdaki lemma da verilmiştir (bakınız, e.g., Rao , 1973 , p.282).

Lemma 3.1.2 Bir Gy tahmin edicisinin (3.2) altında $X\beta$ nın bir BLUE tahmin edicisi olması için gerek ve yeter şart G matrisinin

$$G[X, \sum E_X] = [X, 0] \tag{3.7}$$

lineer matris denklemini sağlamasıdır. Bu denklem tutarlıdır, başka bir deyişle, $R([X, 0]) \subseteq R([X, \sum E_X])$, veya buna denk olarak,

$$[X, 0]\,[X, \sum E_X]^{+}\,[X, \sum E_X] = [X, 0]$$

eşitliği gerçeklenir. Bu durumda (3.7) genel çözümü, $P_{X\|\Sigma}$ ile gösterilir, $U \in \mathbb{R}^{nxn}$ keyfi olmak üzere

$$P_{X\|\Sigma} = [X, 0][X, \sum E_X]^{+} U E_{[X, \sum E_X]}, \tag{3.8}$$

ve $X\beta$ nın BLUE tahmin edicisi

$$BLUE_M(X\beta) = P_{X\|\Sigma}\, y \tag{3.9}$$

şeklindedir.

Ayrıca $\{P_{X\|\Sigma}\}$ ve $\{BLUE_M(X\beta)\}$ ile sırasıyla tüm $P_{X\|\Sigma}$ ve $BLUE_M(X\beta)$ lerin ailesini gösterelim.

Lineer modeller teorisinde (3.2) modelindeki X matrisinin tam sütun ranklı ve $\sum$ kovaryans matrisinin de pozitif definit olduğu durum en sık rastlanılan durumdur. Bu durumda, (3.2) modeli altında, β ve $X\beta$ nın OLSE ve BLUE tahmin edicileri aşağıdaki standart formlarda tek türlü olarak yazılabilir:

$$OLSE_M(\beta) = (X'X)^{-1}X'y\,, \quad OLSE_M(X\beta) = X(X'X)^{-1}X'y, \tag{3.10}$$

$$BLUE_M(\beta) = (X'\Sigma^{-1}X)X'\Sigma^{-1}y\,, \; BLUE_M(X\beta) = X(X'\Sigma^{-1}X)X'\Sigma^{-1}y \tag{3.11}$$

(3.2) altında β ve $X\beta$ için verilen bu tahmin edicilerin dördü de yansızdır. Ayrıca eğer $X = [X_1, X_2]$ matrisindeki

X_1 ve X_2 alt matrisleri ortogonal ise, yani $X_1'X_2 = 0$ ise bu takdirde, (3.10) ifadesindeki $(X'X)^{-1}X'$ ve $X(X'X)^{-1}X'$ matrisleri sırasıyla

$$(X'X)^{-1}X' = \begin{bmatrix}(X_1'X_1)^{-1}X_1' \\ (X_2'X_2)^{-1}X_2'\end{bmatrix}$$

ve

$$X(X'X)^{-1}X' = X_1(X'_1X_1)^{-1}X'_1 + X_2(X'_2X_2)^{-1}X'_2 \qquad (3.12)$$

olarak yazılabilir. Buna uygun olarak (3.10) daki $OLSE_M(\beta)$ ve $OLSE_M(X\beta)$ tahmin edicileri de sırasıyla

$$OLSE_M(\beta) = \begin{bmatrix}(X_1'X_1)^{-1}X_1'y \\ (X_2'X_2)^{-1}X_2'y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} OLSE_M(\beta) \\ OLSE_M(\beta)\end{bmatrix} \qquad (3.13)$$

ve

$$OLSE_M(X\beta) = X_1(X_1'X_1)^{-1}X_1'y + X_2(X_2'X_2)^{-1}X_2'y \qquad (3.14)$$

olarak yazılabilir.

Eğer $X = [X_1, X_2]$ matrisindeki X_1 ve X_2 alt matrisleri $\sum^{-1}$ −orthogonal, yani $X_1'\sum^{-1}X_2$=0 ise, bu takdirde (3.11) deki $(X'\sum^{-1}X)^{-1}\, X'\sum^{-1}$ ve $X(X'\sum^{-1}X)^{-1}\, X'\sum^{-1}$ matrisleri sıraıyla

$$(X'\Sigma^{-1}X)^{-1}\, X'\Sigma^{-1} = \begin{bmatrix}(X_1'\Sigma^{-1}X_1)^{-1}X_1'\Sigma^{-1} \\ (X_2'\Sigma^{-1}X_2)^{-1}X_2'\Sigma^{-1}\end{bmatrix} \qquad (3.15)$$

ve

$$X(X'\Sigma^{-1}X)^{-1}\, X'\Sigma^{-1} = X_1(X_1'\Sigma^{-1}X_1)^{-1}X_1'\Sigma^{-1} + X_2(X_2'\Sigma^{-1}X_2)^{-1}X_2'\Sigma^{-1} \qquad (3.16)$$

olarak yazılabilir. Buna uygun olarak (3.11) deki $BLUE_M(\beta)$ ve $BLUE_M(X\beta)$ tahmin edicileri

$$BLUE_M(\beta) = \begin{bmatrix}(X_1'\Sigma^{-1}X_1)^{-1}X_1'\Sigma^{-1}y \\ (X_2'\Sigma^{-1}X_2)^{-1}X_2'\Sigma^{-1}y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}BLUE_{M_1}(\beta_1) \\ BLUE_{M_2}(\beta_2)\end{bmatrix}, \qquad (3.17)$$

$$\begin{aligned} BLUE_M(X\beta) &= X_1\,(X_1'\Sigma^{-1}X_1)^{-1}X_1'\Sigma^{-1}y + X_2\,(X_2'\Sigma^{-1}X_2)^{-1}X_2'\Sigma^{-1}y \\ &= BLUE_{M_1}(X_1\beta_1) + BLUE_{M_2}(X_2\beta_2) \qquad (3.18)\end{aligned}$$

olarak ayrıştırılabilir.

(3.17) ve (3.18) ifadelerinin sağ taraflarındaki gösterim $(X_i'\Sigma^{-1}X_i)^{-1}X_i'\Sigma^{-1}y$ ve $X_i(X_i'\Sigma^{-1}X_i)^{-1}X_i'\Sigma^{-1}y$ tahmin edicilerinin (3.3) modeli altında β_i ve $X_i\beta_i$, i =1,2 nin BLUE tahmin edicilerinin sembolik gösterimi anlamındadır, bununla birlikte bu tahmin ediciler (3.1) modeli altında β_i ve $X_i\beta_i$, i =1,2 nin BLUE tahmin edicileri değillerdir.

Açıkça gösterilebilir ki (3.13), (3.14), (3.17) ve (3.18) deki ayrışımlar ortogonallik varsayımları altında $OLSE_M(\beta)$, $OLSE_M(X\beta)$, $BLUE_M(\beta)$ ve $BLUE_M(X\beta)$ tahmin edicilerinin hesaplanmasına dönüştürülebilir. Ayrıca bunlar tahmin edicilerin çeşitli istatistiksel özelliklerinin türetilmesinde de kullanılabilir. Örneğin, (3.13), (3.14), (3.17) ve (3.18) deki $OLSE_{M_i}(\beta)$, $OLSE_{M_i}(X_i\beta_i)$, $BLUE_{M_i}(\beta_i)$ ve $BLUE_{M_i}(X_i\beta_i)$ tahmin edicileri $X_1'X_2 = 0$ veya $X_1'\Sigma^{-1}X_2 = 0$, i =1,2 varsayımları altında β_i ve $X_i\beta_i$ için yansız tahmin edicilerdir. OLSE ve BLUE tahmin edicilerinin bu ayrışımına motive olarak, (3.2) de verilen M genel lineer modelinde de OLSE ve BLUE tahmin edicilerinin muhtemel ifadelerini gözönüne almak oldukça ilginç olacaktır.

(3.6) ve (3.9) da verilen Moore-Penrose inversler ve keyfi matrisler içeren $OLSE_M(X\beta)$ ve $BLUE_M(X\beta)$ tahmin edicilerini gözönüne alalım. (3.13) (3.14) (3.17) ve (3.18) ifadelerinin (3.6) ve (3.9) daki tahmin ediciler için kullanılması bazı kritik matris işlemleri içerecektir. Moore-Penrose inversler ve keyfi matrisler içeren değişik matris ifadelerini sadeleştirmek için Moore-Penrose inversler ve keyfi matrisler içeren bir dizi değişik rank formüllerine ihtiyaç duyulmaktadır. Parçalı matrisler için aşağıdaki rank formülleri Marsaglia & Styan (1974) tarafından verilmiştir.

Lemma 3.1.3 $A \in R^{mxn}$, $B \in R^{lxn}$ ve $D \in R^{lxk}$ matrisleri verilmiş olsun. Bu durumda

$$r[A, B] = r(A) + r(E_A B) = r(B) + r(E_B A) \tag{3.19}$$

$$r\begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} = r(A) + r(CF_A) = r(C) + r(AF_C) \tag{3.20}$$

$$r\begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} = r(B) + r(C) + r(E_B A F_C), \tag{3.21}$$

ve

$$r\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = r(A) + r\begin{bmatrix} 0 & E_A B \\ C F_A & D - CA^{+}B \end{bmatrix} \tag{3.22}$$

rank eşitlikleri sağlanır. Eğer $\Re(B) \subseteq \Re(A)$ ve $\Re(C') \subseteq \Re(A')$ ise bu takdirde

$$r\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = r(A) + r(DCA^{+}B) \tag{3.23}$$

eşitlikliği sağlanır.

Bir çok yararlı rank formülü (3.19)-(3.23) eşitliklerinden türetilebilir. Örneğin, eğer $r(PNQ) \geq r(PN) + r(NQ) - r(N)$ Frobenius eşitsizliğini $E_B A F_C$ çarpımına uygularsak $r(E_B A F_C) \geq r(E_B A) + r(AF_C) - r(A)$ elde edilir. Bunu (3.21) de yerine yazarsak aşağıdaki rank eşitsizliği elde edilir.

$$r\begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} \geq r\begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} + r[A, B] - r(A) \tag{3.24}$$

Lemma 3.1.4 $A \in R^{mxn}$, $B \in R^{mxk}$ ve $C \in R^{mxl}$ matrisleri verilmiş olsun. Bu durumda

$$r[A, B, C] \leq r[A, B] + r[A, C] - \mathrm{r}(\mathrm{A}), \tag{3.25}$$

$$r\begin{bmatrix} AA' & B \\ B' & 0 \end{bmatrix} = r[A, B] + \mathrm{r}(\mathrm{B}), \tag{3.26}$$

$$r\begin{bmatrix} AA' & B & C \\ B' & 0 & 0 \end{bmatrix} = r[A, B, C] + \mathrm{r}(\mathrm{B}) \tag{3.27}$$

ifadeleri sağlanır. Genel olarak $D - CA^{+}B$ Schur bileşeninin rankı

$$r(D - CA^{+}B) = r\begin{bmatrix} A'AA' & A'B \\ CA' & D \end{bmatrix} - r(A), \tag{3.28}$$

ile hesaplanır (bkz. Tian (2004)).

İspat: (3.19) ifadesinden (3.25) için istenildiği gibi

$$r[A, B, C] = r(A) + r[E_A B, E_A C\ ] \leq r(A) + r(E_A B\ ) + r\ (E_A C\ )$$

$$= r[A, B] + r[A, C] - r(A)$$

yazılabilir. Herhangi bir M matrisi için $r(MM') = r(M)$ eşitliğinin sağlandığını hatırlayalım. Bu durumda (3.19) ve (3.21) ifadelerinden

$$r\begin{bmatrix} AA' & B \\ B' & 0 \end{bmatrix} = 2r(B) + \mathrm{r}\ (E_B AA' E_B\ ) = = 2r(B) + \mathrm{r}(E_B A) = r(B) + r[A, B]$$

elde edilir ki bu da (3.26) yı sağlar. Ayrıca $r[AA', B] = r[A, B]$ dir. Böylece yukarıdaki rank eşitliği $\Re\begin{bmatrix} AA' \\ B' \end{bmatrix} \cap \Re\begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} = \{0\}$ eşitliğine denktir. Bu nedenle $\Re\begin{bmatrix} AA' \\ B' \\ 0 \end{bmatrix} = \{0\}$ olur ki bu da (3.27) ifadesine denktir.

Lemma 3.1.5 $A \in R^{mxn}$, $B \in R^{mxk}$ ve $C \in R^{mxl}$ matrisleri verilmiş olsun. Bu durumda

$$r\begin{bmatrix} AA' & B \\ C' & 0 \end{bmatrix} \geq r[A,B,C] + \mathrm{r}(B) + \mathrm{r(C)} - r[B,C] \geq r[A,B,C]\,, \tag{3.29}$$

$$r\begin{bmatrix} AA' & B \\ C' & 0 \end{bmatrix} \geq r[A,B] - \mathrm{r}(A) + r[A,C] \geq r[A,B,C] \tag{3.30}$$

eşitsizlikleri gerçeklenir.

İspat: (3.26) dan öncelikle

$$r\begin{bmatrix} AA' & B & C \\ B' & 0 & 0 \\ C' & 0 & 0 \end{bmatrix} = r[AA',B,C] + r[B,C] = r[A,B,C] + r[B,C]$$

yazılabilir. Öte yandan (3.24) ve (3.27) eşitliklerinden

$$r\begin{bmatrix} AA' & B & C \\ B' & 0 & 0 \\ C' & 0 & 0 \end{bmatrix} \geq r\begin{bmatrix} AA' & B & C \\ C' & 0 & 0 \\ B' & 0 & 0 \end{bmatrix} + r\begin{bmatrix} AA' & B & C \\ C' & 0 & 0 \end{bmatrix} - r\begin{bmatrix} AA' & B \\ C' & 0 \end{bmatrix}$$

$$= 2\, r[A,B,C] + r(B) + r(C) - r\begin{bmatrix} AA' & B \\ C' & 0 \end{bmatrix}$$

yazılabilir. Bu iki ifade birleştirilerek (3.29) daki iki eşitsizlik elde edilir. (3.30) daki iki eşitsizlik ise (3.24) ve (3.25) ifadelerinden kolaylıkla türetilebilir.

Lemma 3.1.6 $\Re(A) \subseteq \Re(B_1)$, $\Re(C_2) \subseteq \Re(C_1)$, $\Re(A') \subseteq \Re(C_1')$ ve $\Re(B_2') \subseteq \Re(B_1')$ olsun. Bu takdirde

$$r\begin{bmatrix} A & B_1 & 0 \\ C_1 & 0 & C_2 \\ 0 & B_2 & 0 \end{bmatrix} = r(B_1) + r(C_1) + r(B_2 B_1^{+} \mathrm{A} C_1^{+} C_2)$$

dir.

İspat: Matrislerde Moore-penrose invers kavramı dikkate alınırsa, $\Re(A) \subseteq \Re(B_1)$, $\Re(C_2) \subseteq \Re(C_1)$, $\Re(A' \subseteq \Re(C_1')$ ve $\Re(B_2') \subseteq \Re(B_1')$ şartları

$$B_1 {B_1}^{+} \mathrm{A} = \mathrm{A}\,,\ C_1 {C_1}^{+} C_2 = C_2\,,\quad \mathrm{A} {C_1}^{+} C_1 = \mathrm{A}\,,\ B_2 {B_1}^{+} B_1 = B_2$$

şartlarına denktir. Elementer işlemlerle bir matrisin rankı değişmeyeceği gerçeği dikkate alınırsa

$$r\begin{bmatrix} A & B_1 & 0 \\ C_1 & 0 & C_2 \\ 0 & B_2 & 0 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} 0 & B_1 & 0 \\ C_1 & 0 & C_2 \\ -\ B_2{B_1}^{+}A & 0 & 0 \end{bmatrix} = \ r\begin{bmatrix} 0 & B_1 & 0 \\ C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_2{B_1}^{+}A{C_1}^{+}C_2 \end{bmatrix}$$

$$= r\,(B_1) + r\,(C_1) + r\,(B_2{B_1}^{+}A{C_1}^{+}C_2\ )$$

yazılabilir ki bu da istenilen eşitliğin sağlandığını gösterir.

Lemma3.1.7 $A \in R^{mxn}$ ve $B \in R^{mxk}$ matrisleri verilsin. Bu takdirde

$$\min_{X \in R^{kxn}} r(A - BX) = r[A, B] - r(B)$$

dir. Bu durumda özel olarak, $BX = A$ denkleminin tutarlı olması için gerek ve yeter şart $r[A, B] = r(B)$ olmasıdır.

(3.2) modelinin bir doğru model olması varsayımı altında $[X, \sum][X, \sum]'[X, \sum]= [X, \sum]$ eşitliğinden

$$E([X, \sum][\,X, \sum]^{+}y\ - y\,) = [X, \sum][\,X, \sum]^{+}X\beta - X\beta = 0$$

$$Cov([X, \sum][\,X, \sum]^{+}y\ - y\ \ ) = \sigma^2\ ([X, \sum][\,X, \sum]^{+} - \mathrm{I}\,) \sum\ ([X, \sum][\,X, \sum]^{+} - \mathrm{I})' = 0$$

eşitlikleri kolaylıkla gösterilebilir. Bu iki eşitlik $[X, \sum][\,X, \sum]^{+}y = y$ eşitliğinin 1 olasılıkla sağlandığını veya buna denk olarak,

$$P\{y \in \mathrm{R}[X, \sum]\}=1 \qquad (3.31)$$

dir. Rao (1971,1973) tarafından eğer (3.31) eşitliği sağlanırsa bu takdirde (3.2) deki M lineer modelinin tutarlı olduğu ifade edilmiştir.

(3.31) den kolayca görülür ki (3.2) deki modelin tutarlılığı (3.2) nin doğruluğunu sağlamaz. Gerçekten, eğer $r[X, \sum] = n$ ise bu takdirde (3.2) in tutarlı olduğu açıktır ancak doğru olup olmadığı söylenemez.

Tanım 3.1.1 (3.2) deki M lineer modelinin doğru(tutarlı) olduğunu varsayalım ve L_1y ve L_2y M altında iki lineer tahmin edici olsunlar. Bu takdirde eğer (L_1-L_2)[X, $\sum$] $= 0$ eşitliği sağlanırsa L_1y ve L_2y tahmin edicileri 1 olasılıkla eşittir, yani her $y \in \mathrm{R}[X, \sum]$ için (L_1-L_2)$y = 0$ eşitliği sağlanır.

Tanım 3.1.1 den kolayca görülebilir ki (L_1-L_2)[X, $\sum$] =0 eşitliği r[X, $\sum$] = n olmadıkça L_1=L_2 denkliğini gerektirmez. Bu nedenle $L_1y = L_2y$ eşitliğinin 1 olasılıkla sağlanması için gerek ve yeter şart (L_1-L_2) [X, ∑] matris ifadesinin durumlarına göre değerlendirilir. Bu durum X model matrisinde içerilen L_1 ve L_2 matrislerinin, ∑ kovaryans matrisinin ve bunların genelleştirilmiş inverslerinin durumlarına göre değişebilir.

(3.6) eşitliğine göre, (3.3) de verilen M_1 ve M_2 küçük modelleri altında $X_1\beta_1$ ve $X_2\beta_2$ nin OLSE tahmin edicileri

$$OLSE_{M1}(X_1\beta_1) = P_{X_1}y \quad \text{ve} \quad OLSE_{M2}(X_2\beta_2) = P_{X_2}y \tag{3.32}$$

olarak yazılabilir.

Aşağıdaki lemma (3.32) de verilen iki tahmin edicinin bazı istatistiksel özelliklerini vermektedir.

Lemma 3.1.8 $OLSE_{M_1}(X_1\beta_1)$ ve $OLSE_{M_2}(X_2\beta_2)$ tahmin edicileri (3.32) de verildikleri gibi olsunlar. Bu takdirde,

(a) $OLSE_{M_1}(X_1\beta_1)$, $OLSE_{M_2}(X_2\beta_2)$ ve toplamlarının beklenen değerleri

$$\text{E}[(X_1\beta_1)]=OLSE_{M_1}(X_1\beta_1)+P_{X_1}X_2\beta_2,\ \text{E}[OLSE_{M_2}(X_2\beta_2)]=P_{X_2}X_1\beta_1+X_2\beta_2 \tag{3.33}$$

$$\text{E}[OLSE_{M_1}(X_1\beta_1)+ OLSE_{M_2}(X_2\beta_2)]= X\beta +[P_{X_2}X_1, P_{X_1}X_2]\beta \tag{3.34}$$

ile verilir.

(b) $OLSE_{Mi}(X_i\beta_i)$ tahmin edicilerinin kovaryans matrisi

$$\text{Cov}[OLSE_{M_i}(X_i\beta_i)]=\sigma^2 P_{X_i}\Sigma P_{X_i},\ \text{i}=1,2\ldots \tag{3.35}$$

$OLSE_{M_1}(X_1\beta_1)$ ve $OLSE_{M_2}((X_2\beta_2)$ arasındaki kovaryans matrisi

$$Cov\{OLSE_{M_1}(X_1\beta_1), OLSE_{M_2}(X_2\beta_2)\}=\sigma^2 P_{X_1}\Sigma P_{X_2} \tag{3.36}$$

dir.

(3.33) ve (3.34) ifadelerindeki beklenen değerler (3.32) deki tahmin ediciler ve toplamlarının (3.2) ve (3.3) altında $X_1\beta_1$, $X_2\beta_2$ ve onların toplamı olan $X\beta$ için yansızlığı gerektirmediğini gösterir.

(3.14) eşitliği $X_1'X_2 = 0$ ve $r(X) = p$ kısıtlamaları altında (3.2) deki genel lineer modelde $X\beta$ nın OLSE tahmin edicisinin bir ayrışımını vermektedir. Öte yandan (3.2) deki genel lineer modelde $X\beta$ nın OLSE tahmin edicisinin diğer ayrışımlarını türetebilmek için (3.6) ve (3.32) deki P_X , P_{X_1} ve P_{X_2} ortogonal izdüşümleri ile ilgili aşağıdaki iki sonuca ihtiyaç vardır:

$$P_X = P_{X_1} + P_{X_2} \Leftrightarrow X_1'X_2 = 0, \quad (3.37)$$

$$P_X = P_{X_1} + P_{X_2} - P_{X_1}P_{X_2} \Leftrightarrow P_{X_1}P_{X_2} = P_{X_2}P_{X_1} \quad (3.38)$$

Teorem 3.1.1 $OLSE_M$(Xβ), $OLSE_{M_1}(X_1\beta_1)$ ve $OLSE_{M_2}(X_2\beta_2)$ tahmin edicileri (3.6) ve (3.32) verildikleri gibi olsunlar. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktir:

(a) 1 olasılıkla $OLSE_M(X\beta)$ = $OLSE_{M_1}(X_1\beta_1)$ + $OLSE_{M_2}(X_2\beta_2)$ dir.

(b) $P_X = P_{X_1} + P_{X_2}$

(c) $X_1{}'X_2$ = 0

Bu durumda, $OLSE_{M_1}(X_1\beta_1)$ ve $OLSE_{M_2}(X_2\beta_2)$ tahmin edicilerinin her ikisi de (3.2) modeli altında $X_1\beta_1$ ve $X_2\beta_2$ için yansız tahmin edicilerdir.

İspat: (3.6) ve (3.32) den kolayca görülebilir ki (a) daki eşitliğin 1 olasılıkla sağlanabilmesi için gerek ve yeter şart her $y \in \Re[X, \Sigma]$ için

$$OLSE_M(X\beta) - OLSE_{M_1}(X_1\beta_1) + E_{X_1}OLSE_{M_2}(X_2\beta_2)$$

$$= (P_X - P_{X_1} - P_{X_2})y = 0$$

olmasıdır. Tanım 3.1.1 e göre bu ise

$$(P_X - P_{X_1} - P_{X_2})[X, \Sigma] = 0$$

ifadesine denktir. Bu ifadeyi açarak ve $P_XP_{X_i} = P_{X_i}$ $i = 1,2$ eşitliğini kullanarak

$$[- P_{X_2}X_1, - P_{X_1}X_2, (P_X - P_{X_1} - P_{X_2})\Sigma] = 0$$

eşitliği elde edilir. Buradaki ilk iki eşitlik $X_1'X_2 = 0$ olduğunu gösterir. Bu nedenle bu eşitlik (c) ye denktir. Bu ve (3.37) eşitliği dikkate alınırsa (a), (b) ve (c) nin denkliği elde edilmiş olur.

Teorem 3.1.2 $OLSE_M(X\beta)$, $OLSE_{M_1}(X_1\beta_1)$ and $OLSE_{M_2}(X_2\beta_2)$ tahmin edicileri (3.6) ve (3.32) verildikleri gibi olsunlar. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktir:

(a) 1 olasılıkla $OLSE_M(X\beta)$ = $OLSE_{M_1}(X_1\beta_1)$+ $E_{X_1}OLSE_{M_2}(X_2\beta_2)$ dir.

(b) $P_X = P_{X_1} + P_{X_2} - P_{X_1}P_{X_2}$

(c) $P_{X_1}P_{X_2} = P_{X_2}P_{X_1}$

Özel olarak eğer $\sum$ = I ise bu takdirde aşağıdaki sonuç verilebilir.

İspat: (3.38) den (b) ve (c) nin denkliğikolayca görülebilir. (3.6) ve (3.32) den (a) daki eşitliğin 1 olasılıkla sağlanabilmesi için gerek ve yeter şart her $y \in \Re[X, \sum]$ için

$$OLSE_M(X\beta) - OLSE_{M_1}(X_1\beta_1) + OLSE_{M_2}(X_2\beta_2)$$

$$= (P_X - P_{X_1} - P_{X_2} + P_{X_1}P_{X_2})y = 0$$

olmasıdır. Tanım 3.1.1 e göre bu ise

$$(P_X - P_{X_1} - P_{X_2} + P_{X_1}P_{X_2})[X, \textstyle\sum]$$

$$= [\, - P_{X_2}X_1 + P_{X_1}P_{X_2}P_{X_1},\ 0\ ,\ (P_X - P_{X_1} - P_{X_2} + P_{X_1}P_{X_2})\textstyle\sum] = 0$$

eşitliğine, yani

$$P_{X_2}P_{X_1} = P_{X_1}P_{X_2}P_{X_1} \quad \text{ve} \quad (P_X - P_{X_1} - P_{X_2} + P_{X_1}P_{X_2})\textstyle\sum = 0$$

ifadelerine denktir. $P_{X_1}P_{X_2}P_{X_1}$ simetrik olduğundan, buradaki ilk eşitlik (c) ye denktir. Böyle bir durumda (3.38) e göre ikinci eşitlik otomatik olarak sağlanır.

Sonuç 3.1.1 Farz edelim ki (3.2) de $\sum$ = I olsun ve $OLSE_M(X\beta)$, $OLSE_{M_1}(X_1\beta_1)$ ve $OLSE_{M_2}(X_2\beta_2)$ tahmin edicileri (3.6) ve (3.32) verildikleri gibi olsunlar. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktir:

(a) $OLSE_M(X\beta) = OLSE_{M_1}(X_1\beta_1) + OLSE_{M_2}(X_2\beta_2)$

(b) $P_X = P_{X_1} + P_{X_2}$

(c) $X_1{}'X_2 = 0$

(d) E[$OLSE_{M_i}$ $(X_i\beta_i)$] = $(X_i\beta_i)$, i=1,2,…

(e) E[$OLSE_{M_1}(X_1\beta_1)$+ $OLSE_{M_2}(X_2\beta_2]$ = E[$OLSE_M(X\beta)$]

(f) $Cov\{OLSE_{M_1}(X_1\beta_1)\ ,\ OLSE_{M_2}(X_2\beta_2)\} = 0$

(g) Cov [$OLSE_M$ $(X\beta)$] = $Cov[OLSE_{M_1}(X_1\beta_1)] + Cov[OLSE_{M_2}(X_2\beta_2)]$

İspat: (a), (b) ve (c) ifadeleri Teorem 3.1.1 den direkt olarak görülür. (c), (d) ve (e) nin denkliği (3.33) ve (3.34) den görülebilir. (c), (f) ve (g) nin denkliği ise (3.35) ve (3.36) den kolayca görülebilir.

Lemma 3.1.2 den kolayca görülebilir ki (3.3) deki iki küçük model altında $X_1\beta_1$ ve $X_2\beta_2$ nin BLUE tahmin edicileri

$$BLUE_{M_1}(X_1\beta_1) = P_{X_1\|\Sigma}y,\ BLUE_{M_2}(X_2\beta_2) = P_{X_2\|\Sigma}y, \tag{3.39}$$

şeklindedir, burada

$$P_{X_i\|\Sigma}=[X_i, 0\ ][\ X_i, \Sigma E_{X_i}]^{+}+U_i E_{[X_i, E_{X_i}]}\ ,\ \ i=1,2\ldots \tag{3.40}$$

dir. (3.2) nin bir doğru model olduğu varsayımı altında (3.39) daki tahmin ediciler gerçekte (3.3) deki modeller altında $X_1\beta_1$ ve $X_2\beta_2$ nın BLUE tahmin edicileri değillerdir, yani onlar (3.3) altında ne $X_1\beta_1$ ve $X_2\beta_2$ için yansızdırlar ne de minimum kovaryans matrislerine sahiptirler. Bununla beraber, (3.18) de gösterildiği gibi onların toplamı aynı şartlar altında (3.2) modelinde $X\beta$ için BLUE tahmin edicidir.

Bu kısımda (3.17) ve (3.18) deki ayrışımları (3.9) ve (3.39) da verilen BLUE tahmin edicilere genişleteceğiz. İlk olarak (3.9) ve (3.39) da verilen tahmin edicilerin bazı temel özelliklerini vereceğiz ve daha sonra da aşağıdaki iki ifade için gerek ve yeter şartlar ortaya koyacağız:

(I) $BLUE_M(X\beta) = BLUE_{M_1}(X_1\beta_1)+BLUE_{M_2}(X_2\beta_2)$ olacak şekilde $BLUE_{M_1}(X_1\beta_1)$ ve $BLUE_{M_2}(X_2\beta_2)$ tahmin edicileri mevcuttur.

(II) Her $BLUE_{M_1}(X_1\beta_1)$ve $BLUE_{M_2}(X_2\beta_2)$tahmin edicisi için

$$BLUE_M(X\beta) = BLUE_{M_1}(X_1\beta_1) + BLUE_{M_2}(X_2\beta_2)$$

eşitliği gerçeklenir. Son olarak (3.17) ve (3.18) ifadelerinin sağlanması için bir dizi denklik vereceğiz. (3.8) ve (3.9) daki $P_{X\|\Sigma}$ ve $BLUE_M(X\beta)$ nın bazı basit özellikleri aşağıda verilmiştir.

Lemma 3.1.9 $P_{X\|\Sigma}$ ve $BLUE_M(X\beta)$ ifadeleri (3.8) ve (3.9) daki gibi verilmiş olsunlar. Bu takdirde,

(a) $P_{X\|\Sigma}X = X$, $P_{X\|\Sigma}\Sigma\, E_x = 0$, ve $P_{X\|\Sigma}\Sigma$ çarpımı

$$P_{X\|\Sigma}\Sigma=[X, 0][X, \Sigma E_x]^{+}\Sigma \tag{3.41}$$

olarak tek türlü yazılabilir.

(b) $P_{X\|\Sigma}$ tektir ancak ve ancak $r[X, \Sigma] = n$ dir.

(c) $BLUE_M(X\beta)$ tahmin edicisi 1 olasılıkla yektir eğer M tutarlı ise.

(d) E[$BLUE_M(X\beta)$] = $X\beta$ ve

$$Cov[BLUE_M(X\beta)] = [X, 0][X, \sum E_x]^+ \sum([X, 0][X, \sum E_x]^+)',$$

$$r(Cov[BLUE_M(X\beta)] = r(X) + r(\Sigma) - r[X, \Sigma] = \dim[R(X) \cap R(\Sigma)]$$

dir. (3.9) un yanında, $BLUE_M(X\beta)$ tahmin edicisi bazı alternatif formlarda da yazılabilir, örneğin,

$$BLUE_M(X\beta) = P_X y - P_X \Sigma E_X (E_X \Sigma E_X)^- E_X y ,$$

$$BLUE_M(X\beta) = y - \Sigma E_X (E_X \Sigma E_X)^- E_X y$$

$$BLUE_M(X\beta) = X[X'(\Sigma + XTX')^- X]^- X'(\Sigma + XTX')^- y,$$

burada T matrisi R(Σ+XTX') = R[Σ,X] olacak şekilde bir simetrik matristir (bkz. Albert (1973) ve Rao (1973)).

(3.38) ve (2.39) da içerilen değişik $P_{X\|\Sigma}$, $P_{X1\|\Sigma}$ ve $P_{X2\|\Sigma}$ matris ifadeleri için aşağıdaki sonuçlara ihtiyaç duyulacaktır ki bunlar 3.1.1, 3.1.5 ve 3.1.9 nolu lemmalardan kolayca türetilebilir:

$$\Re([X_i, 0]') \subseteq \Re([X_i, \Sigma X_i]'), \quad i=1,2 \tag{3.42}$$

$$E_{X_i} E_X = E_X \ , \quad i=1,2 \tag{3.43}$$

$$\Re[X, \Sigma E_X] = \Re[X, \Sigma] \ , \Re[X_i, \Sigma E_{X_i}] = \Re[X_i, \Sigma], \ i=1,2 \tag{3.44}$$

$$r\begin{bmatrix} \Sigma & X_1 \\ X_2' & 0 \end{bmatrix} = r[\Sigma E_{X_1}, X_2] + r(X_1) = r[\Sigma E X_2, X_1] + r(X_2), \tag{3.45}$$

$$r\begin{bmatrix} \Sigma & X_1 \\ X_2' & 0 \end{bmatrix} \geq r\,[X, \Sigma] + r(X_1) + r\,(X_2) - r(X) \geq r\,[X, \Sigma], \tag{3.46}$$

$$r\begin{bmatrix} \Sigma & X_1 \\ X_2' & 0 \end{bmatrix} \geq r[X, \Sigma] + r[X_2, \Sigma] - r(\Sigma) \geq \mathrm{r}\,[X, \Sigma]. \tag{3.47}$$

Aşağıdaki Lemma (3.39) da verilen iki tahmin edicinin özelliklerini vermektedir.

Lemma 3.1.10 $BLUE_{M_1}(X_1\beta_1)$ ve $BLUE_{M_2}(X_2\beta_2)$ (3.39) verildikleri gibi olsunlar. Bu takdirde,

(a) $[X_i, 0]$ ve $[X_i, \sum E_{X_i}]$ matrisleri için

$$[X_i, 0\,][X_i, \sum E_{X_i}\,]^{+}[X_i, \sum E_{X_i}] = [X_i, 0]\text{ , i=1,2,} \tag{3.48}$$

ve (3.39) da verilen iki $P_{X_1\|\Sigma}$ ve $P_{X_2\|\Sigma}$ matrisi için

$$P_{X_i\|\Sigma}X_i = X_i \text{ ve } \quad P_{X_i\|\Sigma}\Sigma = [\,X_i, 0\,][X_i, \sum E_{X_i}\,]^{+}\Sigma\text{ , i=1,2} \tag{3.49}$$

eşitlikleri sağlanır.

(b) $P_{X_i\|\Sigma}$ matrisi tektir ancak ve ancak $r[X_i, \Sigma]$ =n , i = 1,2… dir.

(c) $BLUE_{M_i}(X_i\beta_i)$ 1 olasılıkla tektir ancak ve ancak $\Re[X_i, \Sigma] = \Re[X, \Sigma\,]$, i=1,2..

(d) $BLUE_{M_1}(X_1\beta_1)$ ve $BLUE_{M_2}(X_2\beta_2)$tahin edicileri ve bunların toplamının beklenen değerleri

$$\text{E}[BLUE_{M1}(X_1\beta_1)] = X_1\beta_1 + P_{X_1\|\Sigma}X_2\beta_2\text{ ,} \tag{3.50}$$

$$\text{E}[BLUE_{M_2}(X_2\beta_2)] = P_{X_1\|\Sigma}X_1\beta_1 + X_2\beta_2\text{ ,} \tag{3.51}$$

$$\text{E}[BLUE_{M_1}(X_1\beta_1)] + \text{E}[BLUE_{M_2}(X_2\beta_2)] = X\beta + [\,P_{X_2\|\Sigma}\,X_1 + P_{X_1\|\Sigma}X_2\,]\beta \tag{3.52}$$

şeklindedir.

(e) Aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:

(i) $P_{X_1\|\Sigma}X_2 = 0$ olacak şekilde bir $P_{X_1\|\Sigma}$ matrisi mevcuttur.

(ii) $P_{X_2\|\Sigma}\ X_1 = 0$ olacak şekilde bir $P_{X_2\|\Sigma}$matrisi mevcuttur.

(iii) $r\begin{bmatrix} \Sigma & X_1 \\ X_2{}' & 0 \end{bmatrix} = r\,[\,X, \Sigma]$ dir.

Bu durumda, $BLUE_{M_1}(X_1\beta_1)$,$BLUE_{M_2}(X_2\beta_2)$ ve $BLUE_{M_1}(X_1\beta_1)$+ $BLUE_{M_2}(X_2\beta_2)$ tahmin edicileri (3.2) de verilen $X_1\beta_1$, $X_2\beta_2$ ve $X\beta$ için sırasıyla yansız olacak şekilde $BLUE_{M_1}(X_1\beta_1)$ ve $BLUE_{M_2}(X_2\beta_2)$ mevcuttur.

(f) $BLUE_{M_i}(X_i\beta_i)$ nin kovaryans matrisi

$$Cov[BLUE_{M_i}(X_i\beta_i)] = \sigma^2[\,X_i, 0\,][\,X_i, E_{X_i}]^{+}\Sigma([\,X_i, 0\,]\left[\,X_i, E_{X_i}\right]^{+})' \tag{3.53}$$

şeklindedir, burada $r(Cov[BLUE_{M_i}(X_i\beta_i)] = r(X_i) + r\,(\Sigma\,) - r\,[X_i\ \ \Sigma\,]$, i=1,2.. dir.

(g) $BLUE_{M_1}(X_1\beta_1)$ ve $BLUE_{M_2}(X_2\beta_2)$ arasındaki kovaryans matrisi

$$Cov[BLUE_{M_1}(X_1\beta_1), BLUE_{M_2}(X_2\beta_2)$$

$$=\sigma^2[X_i, 0][X_i, E_{X_i}]^{+}\sum([X_2, 0]\left[X_2, E_{X_2}\right]^{+})' \qquad (3.54)$$

şeklindedir, burada

$$r(BLUE_{M_1}(X_1\beta_1), BLUE_{M_2}(X_2\beta_2)$$

$$=r\begin{bmatrix} \sum & X_1 \\ X_2' & 0 \end{bmatrix} + r(\sum) - r[X_1,\sum] - r[X_2, \sum] \qquad (3.55)$$

dir.

(h) Herhangi iki $BLUE_{M_1}(X_1\beta_1)$, ve $BLUE_{M_2}(X_2\beta_2)$ tahmin edicisi ilişkisizdir ancak ve ancak

$$R\begin{bmatrix} \sum & X_1 \\ X_2' & 0 \end{bmatrix} = r[\sum, X_1] + r[\sum, X_2] - r(\sum), \qquad (3.56)$$

veya buna denk olarak, $r(E_{X_1}\sum E_{X_2}) = r(E_{X_1}\sum) + r(\sum E_{X_2}) - r(\sum)$ dir.

(i) Eğer

$$r\begin{bmatrix} \sum & X_1 \\ X_2' & 0 \end{bmatrix} = r[X,\sum] \qquad (3.57)$$

ise bu takdirde $BLUE_{M_1}(X_1\beta_1)$ ve $BLUE_{M_2}(X_2\beta_2)$ tahmin edicileri mevcut olup hem ilişkisizdirler hem de (3.2) altında $X_1\beta_1$ ve $X_2\beta_2$ için yansızdırlar.

İspat: (a) da $P_{X_1\|\sum}$ ve $P_{X_2\|\sum}$ hakkındaki sonuçlar Lemma 3.1.9(a) dan kolaylıkla görülebilir. (b) deki sonuçlar ise $E_{[X_i, \sum E_{X_i}]} = 0$, i= 1,2 katsayılar matrisinden türetilebilir. (3.39) un sonucu olarak $BLUE_{M_i}(X_i\beta_i)$ tahmin edicisinin 1 olasılıkla tek türlü olması, yani her $y \in [X,\sum]$ için $P_{X_1\|\sum}\, y$ nin tek olması için gerek ve yeter şart

$$E_{[X_i, \sum E_{X_i}]}[X, \sum] = 0, \ i = 1,2,$$

eşitliğinin sağlanmasıdır. Bu ise (3.19) a göre

$$r[X_i, \sum] = r[X, \sum], \ i = 1,$$

olması demektir. Ayrıca $\Re[X_i, \Sigma\,] \subseteq \Re[X\,,\Sigma]$, i = 1,2 olduğundan bu eşitlik (c) de istenildiği gibi $\Re[X_i, \Sigma\,] = \Re[X\,,\Sigma]$, i = 1,2 eşitliğine denktir. (a) varsayımı altında

$$\mathrm{E}[BLUE_{M_1}(X_1\beta_1)] = P_{X_1\|\Sigma}\,[X_1, X_2]\,\beta = X_1\beta_1 + P_{X_1\|\Sigma}\,X_2\beta_2,$$

$$\mathrm{E}[BLUE_{M_2}(X_2\beta_2)\,] = P_{X_2\|\Sigma}[X_1, X_2]\,\beta = P_{X_2\|\Sigma}\;X_1\beta_1 + X_2\beta_2,$$

yazılabilir ki bunlar (3.40), (3.41) ve (3.42) nin sağlandığını gösterir. Öte yandan

$$P_{X_1\|\Sigma}\,X_2 = [\,X_1, 0][\,X_1\,,\Sigma E_{X_1}]^{+}X_2 + U_1\;E_{[X_i,\Sigma E_{X_i}]}\,X_2$$

$$P_{X_2\|\Sigma}\,X_1 = [X_2, 0][X_2\,,\Sigma E_{X_2}\,]^{+}\,X_1 + U_2 E_{[X_2,\Sigma E_{X_2}]}\,X_1$$

olduğundan (3.32) kullanarak elementer satır işlemleriyle,

$$\min_{P_{X_1\|\Sigma}} r(P_{X_1\|\Sigma}X_2)$$

$$= \min_{U_1} r([\;X_1, 0\,]\,[\,X_1\,,\Sigma E_{X_i}] + X_2 + U_1 E_{[X_i,\Sigma E_{X_i}]}\,X_2)$$

$$= r\begin{bmatrix} [X_1, 0\,]\,[\,X_1\,,\Sigma E X_i] \; + X_2 \\ E_{[X_i,\Sigma E_{X_i}]}\,X_2 \end{bmatrix} - r\,(E_{[X_i,\Sigma E_{X_i}]}\,X_2\,)$$

$$= r\begin{bmatrix} [X_1, 0\,]\,[\,X_1\,,\Sigma E_{X_i}] \; + X_2 & 0 \\ X_2 & [\,X_1\,,\Sigma E_{X_i}] \end{bmatrix} - r\,[\,X_1\,,\Sigma E_{X_i},\;X_2]$$

$$= r\begin{bmatrix} 0 & -\,[X_1, 0\,] \\ X_2 & [\,X_1\,,\Sigma E_{X_i}] \end{bmatrix} - r\,[\,X, \Sigma\,]$$

$$= r\,(\,X_1\,) + r\,[X_2, E_{X_i}\,] - r\,[\,X,\Sigma\,]$$

$$= r\begin{bmatrix} \Sigma & X_1 \\ X_2' & 0 \end{bmatrix} - r\,[\,X, \Sigma\,]$$

olduğu görülür. Simetriklikten dolayı

$$\min_{P_{X_2\|\Sigma}} r(P_{X_2\|\Sigma}X_1) = \mathrm{r}\begin{bmatrix} \Sigma & X_1 \\ X_2' & 0 \end{bmatrix} - \mathrm{r}\,[\,X,\Sigma\,]$$

yazılabilir. (e) de verilen üç ifadenin denkliği bu eşitliklerden görülebilir. (f) deki sonuçlar ise Lemma 3.1.9(d) den elde edilir. Ayrıca (3.41) ve (3.49) eşitliklerinden (3.44) de istenildiği gibi

$Cov\{[BLUE_{M_1}(X_1\beta_1)\ , BLUE_{M_2}(X_2\beta_2)\ \}$

$= \sigma^2 P_{X_1\|\Sigma}\ \Sigma$

$= \ \sigma^2\ [X_1, 0\ ][\ X_1\ , \Sigma E_{X_i}] + \Sigma([X_2, 0]\ [X_2\ , \Sigma E_{X_i}\ ]^{+})'$

olduğu görülür. Öte yandan $\Re([X_i, \Sigma E_{X_i}]')$ ve $\Re(\Sigma) \subseteq \Re[X_i, \Sigma E_{X_i}]$, i = 1,2 olduğunu belirtelim. (3.44) ve (3.31) dikkate alınarak elementer işlemler kullanılırsa

$r[(\ X_1, 0\ ][\ X_1\ , \Sigma E_{X_i}]+)\ \Sigma([X_2, 0][X_2\ , \Sigma E_{X_2}]^{+})'$

$$= r\begin{bmatrix} \Sigma & X_1 & \Sigma E_{X_i} & 0 \\ X_2' & 0 & 0 & X_2' \\ E_{X_2}\Sigma & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - r[\ X_1\ , \Sigma E_{X_i}] - r[X_2\ , \Sigma E_{X_2}]$$

$$= r\begin{bmatrix} \Sigma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & X_2' \\ 0 & 0 - E_{X_2}\Sigma E_{X_i} & 0 \end{bmatrix} - r[\ X_1\ , \Sigma] - r[X_2\ , \Sigma\ ]$$

$$= r(E_{X_2}\Sigma E_{X_i}\ ) + r\ (\ X_1\ ) + r\ (\ X_2\ ) + r\ (\Sigma\ ) - r\ [\ X_1\ , \Sigma] - r\ [X_2\ , \Sigma\ ]$$

$$= r\begin{bmatrix} \Sigma & X_1 \\ X_2' & 0 \end{bmatrix} + r\ (\Sigma\ ) - r\ [\ X_1\ , \Sigma] - r\ [X_2\ , \Sigma\ ]$$

elde dilir ki bu da (3.45) in sağlandığını gösterir. (h) daki tartışma (g) nin bir direkt sonucudur. Böylece eğer (3.47) sağlanırsa, bu takdirde $BLUE_{M_1}(X_1\beta_1)$ ve $BLUE_{M_2}(X_2\beta_2)$ tahminleri mevcut olup sırasıyla $X_1\beta_1$ ve $X_2\beta_2$ için yansızdırlar. Ayrıca eğer (3.47) sağlanırsa, bu takdirde (3.46) da sağlanır ve dolayısıyla (i) de istenildiği gibi $BLUE_{M_1}(X_1\beta_1)$ve $BLUE_{M_2}(X_2\beta_2)$ tahmin edicileri ilişkisizdirler.

Teorem 3.1.3 $BLUE_M(X\beta)$, $BLUE_{M_1}(X_1\beta_1)$ ve $BLUE_{M_2}(X_2\beta_2)$ ifadeleri (3.9) ve (3.39) da verildikleri gibi olsunlar. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktir:

(a) Öyle $BLUE_{M_1}(X_1\beta_1)$ ve $BLUE_{M_2}(X_2\beta_2)$ tahmin edicileri mevcuttur ki

$$BLUE_M(X\beta) = BLUE_{M_1}(X_1\beta_1) + BLUE_{M_2}(X_2\beta_2) \tag{3.58}$$

eşitliği 1 olasılıkla sağlanır.

(b) $P_{X\|\Sigma} = P_{X_1\|\Sigma} + P_{X_2\|\Sigma}$ olacak şekilde $P_{X\|\Sigma}$, $P_{X_1\|\Sigma}$ ve $P_{X_2\|\Sigma}$ mevcuttur.

(c) $r\begin{bmatrix} \Sigma & X_1 \\ X_2' & 0 \end{bmatrix} = r\,[X, \Sigma\,]$ ve $r(X) = r\,(X_1) + r\,(X_2)$ dir.

Bu durumda, $BLUE_{M_1}(X_1\beta_1)$ ve $BLUE_{M_2}(X_2\beta_2)$ tahmin edicileri

$$\mathrm{E}[BLUE_{M_i}(X_i\beta_i)]=X_i\beta_i,\ \mathrm{i}=1,2 \tag{3.59}$$

$$Cov\{BLUE_{M_1}(X_1\beta_1), BLUE_{M_2}(X_2\beta_2)\}=0\ , \tag{3.60}$$

$$Cov[BLUE_M(X\beta)]=Cov[BLUE_{M_1}(X_1\beta_1)]+Cov[BLUE_{M_2}(X_2\beta_2)] \tag{3.61}$$

eşitliklerini sağlar.

İspat: İlk olarak (b) ve (c) nin denkliğini gösterelim. Lemma 3.1.2 den kolayca görülür ki (b) deki eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter

$$(P_{X_1\|\Sigma} + P_{X_2\|\Sigma})[X, \Sigma E_X] = [X, 0]$$

olacak şekilde $P_{X_1\|\Sigma}$ ve $P_{X_2\|\Sigma}$ nun mevcut olmasıdır. $P_{X_1\|\Sigma}$ ve $P_{X_2\|\Sigma}$ değerlerini bu eşitlikte yerlerine yazarsak

$$[U_1, U_2]\begin{bmatrix} E_{[X_1, \Sigma E_{X_i}]} & [X, \Sigma E_X] \\ E_{[X_2, \Sigma E_{X_2}]} & [X, \Sigma E_X] \end{bmatrix} = \mathrm{G}$$

matris denklemi elde edilir, burada

$$\mathrm{G} = [X, 0] - [X_1, 0][X_1, \Sigma E_{X_i}]^{+}[X_1, \Sigma E_X] - [X_2, 0]\,[X_2, \Sigma E_{X_2}]^{+}[X, \Sigma E_X]$$

dir. Lemma 3.1.7 ye göre böyle U_1 ve U_2 nin mevcut olması için gerek ve yeter şart

$$r\begin{bmatrix} G \\ E_{[X_1, \Sigma E_{X_i}]}[X, \Sigma E_X] \\ E_{[X_2, \Sigma E_{X_2}]}[X, \Sigma E_X] \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} E_{[X_1, \Sigma E_{X_i}]} & [X, \Sigma E_X] \\ E_{[X_2, \Sigma E_{X_2}]} & [X, \Sigma E_X] \end{bmatrix}$$

olmasıdır. Buradan gerekli düzenleme yapılırsa

$$r\begin{bmatrix} G \\ E_{[X_1, \Sigma E_{X_i}]}[X, \Sigma E_X] \\ E_{[X_2, \Sigma E_{X_2}]}[X, \Sigma E_X] \end{bmatrix}$$

$$= r\begin{bmatrix} G & 0 & 0 \\ [\mathrm{X}, \sum E_X] & [X_1, \sum E_{X_i}] & 0 \\ [\mathrm{X}, \sum E_X] & 0 & [X_2, \sum E_{X_2}] \end{bmatrix} - r\,[X_1, \sum E_{X_i}] - r\,[X_2, \sum E_{X_2}]$$

$$= r\begin{bmatrix} [X, 0] & [X_1, 0] & [X_2, 0] \\ [\mathrm{X}, \sum E_X] & [X_1, \sum E_{X_i}] & 0 \\ [\mathrm{X}, \sum E_X] & 0 & [X_2, \sum E_{X_2}] \end{bmatrix} - r\,[X_1, \sum] - r\,[X_2, \sum]$$

$$= r\begin{bmatrix} X & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_{X_2} & -X_2 & 0 \\ 0 & 0 & -X_1 & 0 & 0 & \sum E_{X_2} \end{bmatrix} - \boldsymbol{r}[X_1, \sum] - r[X_2, \sum]$$

$$= r\,(X) + r\,[\sum E_{X_i}\ ,\ X_2] + r\,[\sum E_{X_2},\ X_1] - r\,[X_1, \sum] - r\,[X_2, \sum]$$

$$= 2r\begin{bmatrix} \sum & X_1 \\ X_2' & 0 \end{bmatrix} + r\,(X) - r\,[X_1, \sum] - r\,[X_2, \sum] - r\,(X_1) - r(X_2)$$

ve

$$r\begin{bmatrix} E_{[X_1, \sum E_{X_i}]} & [\mathrm{X}, \sum E_X] \\ E_{[X_2, \sum E_{X_2}]} & [\mathrm{X}, \sum E_X] \end{bmatrix}$$

$$= r\begin{bmatrix} [\mathrm{X}, \sum E_X] & [X_1, \sum E_{X_i}] & 0 \\ [\mathrm{X}, \sum E_X] & 0 & E_{[X_2, \sum E_{X_2}]} \end{bmatrix} - r\,[X_1, \sum E_{X_i}] - r\,[X_2, \sum E_{X_2}]$$

$$= r\begin{bmatrix} X & \sum & X_1 & \sum & 0 & 0 \\ X & \sum & 0 & 0 & X_2 & \sum \end{bmatrix} - r\,[X_1, \sum] - r\,[X_2, \sum]$$

$$= 2r\,[X, \sum] - r\,[X_1, \sum] - r\,[X_2, \sum]$$

elde edilir. Bu iki rank eşitliği yukarıda yerlerine yazılırsa

$$2r\begin{bmatrix} \sum & X_1 \\ X_2' & 0 \end{bmatrix} = 2r\,[X, \sum] + r\,(X_1) + r\,(X_2) - r\,(X),$$

olduğu görülür ki bu eşitlik alternatif olarak

$$\left(r\begin{bmatrix} \sum & X_1 \\ X_2' & 0 \end{bmatrix} - \mathrm{r}[\mathrm{X}, \sum]\right) + \left(r\begin{bmatrix} \sum & X_1 \\ X_2' & 0 \end{bmatrix} - \mathrm{r}[\mathrm{X}, \sum] - \mathrm{r}(X_1) - \mathrm{r}(X_2) + \mathrm{r}(\mathrm{X})\right) = 0$$

şeklinde de yazılabilir. Bu durumda bu eşitliğin sol tarafındaki iki terimin non–negatif olduğu kolayca görülebilir. Dolayısıyla (c) deki rank eşitliği elde edilmiş olur.

(3.9) ve (3.39) dan kolayca görülür ki (3.58) in sağlanması için gerek ve yeter şart her $y \in \Re[X, \Sigma]$ için

$$\mathrm{BLUE}_M(X\beta) - BLUE_{M_1}(X_1\beta_1) - BLUE_{M_2}(X_2\beta_2) = (P_{X\|\Sigma} - P_{X_1\|\Sigma} - P_{X_2\|\Sigma})y = 0$$

olmasıdır. Bu ise Tanım 3.1.1 e göre

$$(P_{X\|\Sigma} - P_{X_1\|\Sigma} - P_{X_2\|\Sigma})[\mathrm{X}, \Sigma] = (P_{X\|\Sigma} - P_{X_1\|\Sigma} - P_{X_2\|\Sigma})[X_1, X_2, \Sigma] = 0 \qquad (*)$$

olmasına denktir. Buradan

$$P_{X\|\Sigma}\, X_1 = P_{X_1\|\Sigma}\, X_1 = X_1 \text{ ve } P_{X\|\Sigma}\, X_2 = P_{X_2\|\Sigma} = X_2.$$

yazılabilir. Bu nedenle (*) eşitliğinin sağlanması için gerek ve yeter şart

$$P_{X_2\|\Sigma}\, X_1 = 0,\; P_{X_1\|\Sigma}\, X_2 = 0 \text{ ve } P_{X\|\Sigma}\,\Sigma - P_{X_1\|\Sigma}\Sigma - P_{X_2\|\Sigma}\Sigma = 0 \qquad (**)$$

olacak şekilde $P_{X\|\Sigma}$, $P_{X_1\|\Sigma}$ve $P_{X_2\|\Sigma}$ nin mevcut olmasıdır. Buradaki ilk iki eşitlik (c) deki ilk rank eşitliğine denktir. Benzer şekilde

$$(P_{X\|\Sigma} - P_{X_1\|\Sigma} - P_{X_2\|\Sigma})\,\Sigma$$

$$= [X, 0][\mathrm{X}, \Sigma E_X]^+ \Sigma - [X_1, 0][X_1, \Sigma E_{X_1}]^+ \Sigma - [X_2, 0][X_2, \Sigma E_{X_2}]^+ \Sigma$$

$$= [\,[X, 0], [X_1, 0], [X_2, 0]\,] \begin{bmatrix} \mathrm{X}, \Sigma E_X & 0 & 0 \\ 0 & -[X_1, \Sigma E_X] & 0 \\ 0 & 0 & -[X_2, \Sigma E_{X_2}] \end{bmatrix}^+ \begin{bmatrix} \Sigma \\ \Sigma \\ \Sigma \end{bmatrix}$$

olduğu gösterilebilir.

$$t = r \begin{bmatrix} [\mathrm{X}, \Sigma E_X] & 0 & 0 \\ 0 & -[X_1, \Sigma E_X] & 0 \\ 0 & 0 & -[X_2, \Sigma E_{X_2}] \end{bmatrix} = r\,[\mathrm{X}, \Sigma] + r\,[X_1, \Sigma] + r\,[X_2, \Sigma]$$

alalım. Bu durumda gerekli hesaplamalar yapılarak

$$r(P_{X\|\Sigma}\Sigma - P_{X_1\|\Sigma}\Sigma - P_{X_2\|\Sigma}\,\Sigma)$$

$$= r \begin{bmatrix} -[\mathrm{X}, \Sigma E_X] & 0 & 0 & \Sigma \\ 0 & [X_1, \Sigma E_X] & 0 & \Sigma \\ 0 & 0 & [X_2, \Sigma E_{X_2}] & \Sigma \end{bmatrix} - t$$

$$= r\begin{bmatrix} 0 & -\sum E_x & X_1 & 0 & X_2 & 0 & \sum \\ 0 & 0 & X_1 & \sum E_x & 0 & 0 & \sum \\ 0 & 0 & 0 & 0 & X_2 & \sum E_{X_2} & \sum \end{bmatrix} - t$$

$$= r\,[\sum E_{X_2}, X_1] + r\,[EX_1, X_2] + r(\sum) + r(X) - t$$

$$= 2r\begin{bmatrix} \sum & X_1 \\ X_2' & 0 \end{bmatrix} + r(\sum) + r(X) - r(X_1) - r(X_2) - t$$

olduğu görülebilir. Bu rank formülü gösterir ki (**) daki üçüncü eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter

$$2r\begin{bmatrix} \sum & X_1 \\ X_2' & 0 \end{bmatrix} = r[X, \sum] + r[X_1, \sum] + r[X_2, \sum] + r(X_1) + r(X_2) - r(\sum) - r(X)$$

olmasıdır. Bu eşitliği (c) deki ilk renk eşitliğiyle birleştirirsek

$$(r[X, \sum] + r[X_1, \sum] + r[X_2, \sum] - r(\sum)) + (r(X_1) + r(X_2) - r(X)) = 0$$

elde edilir ki bu

$$r[X_1, \sum] + r[X_2, \sum] - r(\sum) \text{ ve } r(X) = r(X_1) + r(X_2)$$

olmasına denktir. Bunları (c) deki birinci eşitlikle birleştirirsek (a) ve (c) nin denk olduğu elde edilir.

Teorem 3.1.4 $BLUE_M(X\beta)$, $BLUE_{M_1}(X_1\beta_1)$ ve $BLUE_{M_2}(X_2\beta_2)$ ifadeleri (3.9) ve (3.39) da verildikleri gibi olsunlar. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktir:

(a) Herhangi bir $BLUE_{M_1}(X_1\beta_1) + BLUE_{M_2}(X_2\beta_2)$ toplamı 1 olasılıkla M modeli altında $X\beta$ nın BLUE tahmin edicisidir.

(b) $BLUE_{M_1}(X_1\beta_1)$ ve $BLUE_{M_2}(X_2\beta_2)$ tahmin edicileri 1 olasılıkla tektirler ve bunların toplamı da 1 olasılıkla M altında $X\beta$ nın BLUE tahmin edicisidir.

(c) $\{P_{X_1\|\sum} + P_{X_2\|\sum}\} \subseteq \{P_{X\|\sum}\}$ dir.

(d) $r\begin{bmatrix} \sum & X_1 \\ X_2' & 0 \end{bmatrix} = r(\sum)$ ve $r(X) = r(X_1) + r(X_2)$ dir.

(e) $\Re(X) \subseteq \Re(\sum)$, $X_1' \sum^+ X_2 = 0$ ve $\Re(X_1) \cap \Re(X_2) = \{0\}$ dir.

İspat: Öncelikle (c) ve (d) nin denkliğini gösterelim. Bu durumda (c) deki içerme bağıntısının sağlanması için gerek ve yeter şart

$$[U_1, U_2]\begin{bmatrix} E_{[X_1,\sum E_{X_i}]} & [X,\sum E_X] \\ E_{[X_2,\sum E_{X_2}]} & [X,\sum E_X] \end{bmatrix} = G$$

eşitliğinin herhangi U_1 ve U_2 için sağlanmasıdır ki bu da aşağıdaki üç eşitliğe denktir:

$$E_{[X_1,\sum E_{X_1}]}[X,\sum E_X] = 0,\ E_{[X_2,\sum E_{X_2}]}[X,\sum E_X] = 0,\ G = 0$$

Buradan gerekli düzenlemeler yapılırsa

$r(G)$

$$= r([X,0],[X_1,0][X_1,\sum E_{X_1}]^{+}[X,\sum E_X] - [X_2,0][X_2,\sum \sum E_{X_2}]^{+}[X,\sum E_X])$$

$$= r\begin{bmatrix} [X_1,\sum E_{X_1}] & 0 & [X,\sum E_X] \\ 0 & [X_2,\sum E_{X_2}] & [X,\sum E_X] \\ [X_1,0] & [X_2,0] & [X,0] \end{bmatrix} - r[X_1,\sum] - r[X_2,\sum]$$

$$= r\begin{bmatrix} 0 & E_{X_1} & -X_2 & 0 & 0 & 0 \\ -X_1 & 0 & 0 & E_{X_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & X & 0 \end{bmatrix} - r[X_1,\sum] - r[X_2,\sum]$$

$$= r[\sum E_{X_1}, X_2] + r[\sum E_{X_2}, X_1] + r(X) - r[X_1,\sum] - r[X_2,\sum]$$

$$= 2r\begin{bmatrix} \sum & X_1 \\ X_2' & 0 \end{bmatrix} + r(X) - r[X_1,\sum] - r[X_2,\sum] - r(X_1) - r(X_2)$$

$$=2r\begin{bmatrix} \sum & X_1 \\ X_2' & 0 \end{bmatrix} - 2r[X,\sum] - r(X_1) - r(X_2) + r(X)$$

$$=\left(r\begin{bmatrix} \sum & X_1 \\ X_2' & 0 \end{bmatrix} - r[X,\sum]\right)+\left(r\begin{bmatrix} \sum & X_1 \\ X_2' & 0 \end{bmatrix} - r[X,\sum] - r(X_1) - r(X_2) + r(X)\right)$$

elde edilir. Bu son ifadedeki iki ifade de non-negatiftir. Bu nedenle

$$r\begin{bmatrix} \sum & X_1 \\ X_2' & 0 \end{bmatrix} = r[X,\sum] \quad \text{ve} \quad r(X)=r(X_1)+r(X_2)$$

eşitlikleri yazılabilir. Bu ifadeler (3.57) ile birleştirilirse $r[X,\sum] = r(\sum)$ eşitliği elde edilir. Bu nedenle (d) sağlanmış olur. (d) ve (e) nin denkliği ise (3.22) den türetilebilir. Tanım 3.1 den ve $P_{X\|\sum}\sum$, $P_{X_1\|\sum}\sum$ ve $P_{X_2\|\sum}\sum$ ifadelerinin tekliğinden (a) daki durumun sağlanması için gerek ve yeter şart

$$\max_{P_{X_1\|\sum}} \min_{P_{X\|\sum}} r\{P_{X\|\sum} P_{X_1\|\sum} - P_{X_2\|\sum}\}$$

$$= \underset{P_{X_1\|\Sigma}\, P_{X_2\|\Sigma}}{max}\ r\,[P_{X_2\|\Sigma}X_1,\ -P_{X_1\|\Sigma}X_2,\ P_{X\|\Sigma}\Sigma\ ,\ P_{X_1\|\Sigma}, P_{X_2\|\Sigma}\ ]$$

$$= 0$$

olmasıdır. Bu ise aşağıdaki üç eşitliğe denktir:

$$\underset{P_{X_2\|\Sigma}}{max}\ r(P_{P_{X_2\|\Sigma}}\ X_1) = 0,\quad \underset{P_{P_{X_1\|\Sigma}}}{max}\ r(P_{X_1\|\Sigma}X_2\ ) = 0,\quad P_{X\|\Sigma}\Sigma - P_{X_1\|\Sigma}\Sigma\ - P_{X_2\|\Sigma}\ \Sigma = 0$$

Bu durumda buradaki ilk iki eşitlik

$$[X_2,0]\ [X_2\ , \Sigma E_{X_2}] + X_1 = 0, \quad [X_1,0]\ [X_1\ , \Sigma E_{X_1}] + X_2 = 0$$

$$E_{[X_2\ ,\Sigma E_{X_2}]}X_1 = 0, \quad E_{\ [X_1\ ,\Sigma E_{X_1}]}X_2 = 0$$

eşitliklerine denktir.

Farz edelim ki Σ pozitif definit olsun. Bu takdirde aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.1.2 Farz edelim ki Σ pozitif definit olsun. Bu takdirde (3.9) ve (3.39) da verilen $BLUE_M(X\beta)$, $BLUE_{M_1}(X_1\beta_1)$ ve $BLUE_{M_2}(X_2\beta_2)$ tahmin edicileri tek türlü olup aşağıdaki ifadeler denktir:

(a) $BLUE_M(X\beta) = BLUE_{M_1}(X_1\beta_1) + BLUE_{M_2}(X_2\beta_2)$

(b) $P_{X\|\Sigma} = P_{X_1\|\Sigma} + P_{X_2\|\Sigma}$

(c) $X_1'\Sigma^{-1}X_2 = 0$

(d) E$[BLUE_{M_i}(X_i\beta_i)] = X_i\beta_i$, i = 1,2…

(e) $Cov\{BLUE_{M_1}(X_1\beta_1) + BLUE_{M_2}(X_2\beta_2) = 0$

(f) $Cov[BLUE_M(X\beta)\ ] = Cov[BLUE_{M_1}(X_1\beta_1)\ ] + Cov[BLUE_{M_2}(X_2\beta_2)\ ]$

Eğer (3.2) de Σ positif definit ve $r(X) = p$ alınırsa, bu takdirde (3.2) modeli altında β ve $X\beta$ nın BLUE tahmin edicileri için aşağıdaki sonuç verilebilir.

Lemma 3.1.11 (3.2) modelinde Σ positif definit ve $r(X) = p$ olduğunu varsayalım ve $T_1 = [I_{p_1}, 0]$ ve $T_2 = [0, I_{p_2}]$ olsun. Bu takdirde,

(a) M altında β ve $X\beta$ nın tek BLUE tahmin edicisi (3.11) deki gibidir, burada

$$Cov[BLUE_M(\beta)] = \sigma^2(X'\Sigma^{-1}X)^{-1}\ ,\ Cov[BLUE_M(X\beta)] = \sigma^2 X(\ X'\Sigma^{-1}X)^{-1}X'$$

dir.

(b) M altında β_1 ve β_2 nin tek BLUE tahmin edicisi

$$BLUE_M(\beta_i) = T_i(X\Sigma^{-1}X)^{-1}X'\Sigma^{-1}y, \text{ i=1,2.} \tag{3.62}$$

dir, burada

$$BLUE_M(\beta)=\begin{bmatrix} BLUE_M(\beta_1) \\ BLUE_M(\beta_2) \end{bmatrix}, \tag{3.63}$$

$$E[BLUE_M(\beta_i)] = \beta_i, \quad \text{İ=1,2..} \tag{3.64}$$

$$Cov[BLUE_M(\beta_i)] = \sigma^2 T_i(X'\Sigma^{-1}X)^{-1}T_i', \qquad \text{i=1,2} \tag{3.65}$$

$$Cov\{BLUE_M(\beta_1),BLUE_M(\beta_2)\}=\sigma^2 T_1(X'\Sigma^{-1}X)^{-1}T_2', \tag{3.66}$$

$$r(Cov\{BLUE_M(\beta_1),BLUE_M(\beta_2)\})=r(X_1'\Sigma^{-1}X_2) \tag{3.67}$$

şeklindedir.

(c) M altında $X_1\beta_1$ ve $X_2\beta_2$ nın BLUE tahmin edicisi

$$BLUE_M(X_i\beta_i)=X_iT_i(X'\Sigma^{-1}X)^{-1}X'\Sigma^{-1}y, \text{ i=1,2} \tag{3.68}$$

şeklindedir, burada

$$BLUE_M(X_1\beta_1)+BLUE_M(X_2\beta_2)=\text{BLUE}_M(X\beta), \tag{3.69}$$

$$\text{E}[BLUE_M(X_i\beta_i)]=X_i\beta_i, \quad \text{i=1,2} \tag{3.70}$$

$$Cov[BLUE_M(X_i\beta_i)]=\sigma^2(X_iT_i)(X'\Sigma^{-1}X)^{-1}(X_iT_i)', \qquad \text{i =1,2} \tag{3.71}$$

$$Cov\{BLUE_M(X_1\beta_1),BLUE_M(X_2\beta_2)\} = \sigma^2(X_1T_1)(X'\Sigma^{-1}X)^{-1}(X_2T_2)' \tag{3.72}$$

$$r(Cov\{BLUE_M(X_1\beta_1),BLUE_M(X_2\beta_2)\})=r(X_1'\Sigma^{-1}X_2) \tag{3.73}$$

dir.

Sonuç 3.1.3 BLUE$_M(\beta)$, BLUE$_M(X\beta)$, $BLUE_M(X_i)$ ve $BLUE_M(X_i\beta_i)$, i=1,2.. tahmin edicileri Lemma 3.1.6 da verildikleri gibi olsunlar. $BLUE_{M_i}(\beta_i)$ ve $BLUE_{M_i}(X_i\beta_i)$

$$BLUE_{M_i}(\beta_i)=(X_i'\Sigma^{-1}X_i)^{-1}X_i'\Sigma^{-1}y, \quad \text{i=1,2..} \tag{3.74}$$

$$BLUE_{M_i}(X_i\beta_i)=X_i(X_i'\Sigma^{-1}X_i)^{-1}X_i'\Sigma^{-1}y, \text{ i=1,2..} \tag{3.75}$$

olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktir:

(a) BLUE$_M(\beta)$ = $\begin{bmatrix} BLUE_{M_1}(\beta_1) \\ BLUE_{M_2}(\beta_2) \end{bmatrix}$, yani, $BLUE_M(\beta_i) = BLUE_{M_i}(X_i\beta_i)$, i=1,2..

(b) BLUE$_M(X\beta)$ = $BLUE_{M_1}(X_1\beta_1) + BLUE_{M_2}(X_2\beta_2)$.

(c) $BLUE_M(X_i\beta_i) = BLUE_{M_i}(X_i\beta_i)$ i_1,2..

(d) $E[BLUE_{M_i}(\beta_i)] = \beta_i$, i=1,2…

(e) $E[BLUE_{M_i}(X_i\beta_i)] = X_i\beta_i$, i=1,2…

(f) $Cov\{BLUE_M(\beta_1), BLUE_M(\beta_2)\} = 0$

(g) $Cov\{BLUE_M(X_1\beta_1), BLUE_M(X_2\beta_2)\}$

(h) $Cov\{BLUE_{M_1}(\beta_1), BLUE_{M_2}(\beta_2)\} = 0$

(i) $Cov\{BLUE_{M_1}(X_1\beta_1), BLUE_{M_2}(X_2\beta_2)\} = 0$

(j) $Cov[\mathrm{BLUE}_M(X\beta)] = Cov[BLUE_{M_1}(X_1\beta_1)] + Cov[BLUE_{M_2}(X_2\beta_2)]$.

(k) $P_{X\|\Sigma} = P_{X_1\|\Sigma} + P_{X_2\|\Sigma}$.

(l) $X_1'\Sigma^{-1}X_2 = 0$.

İspat: (b), (e) , (i) , (j) , (k) ve (l) şıklarının denkliği direkt olarak görülebilir. Ayrıca

$$BLUE_M(X\beta) = X\,BLUE_M(\beta\,),$$

$$BLUE_M(X_i\beta_i) = X_i BLUE_M(\beta_i),\;\; BLUE_{M_i}(X_i\beta_i) = X_i BLUE_{M_i}(\beta_i),\;\; \mathrm{i} = 1,2..$$

$$X\begin{bmatrix} BLUE_{M_1}(\beta_1) \\ BLUE_{M_2}(\beta_2) \end{bmatrix} = BLUE_{M_1}(X_1\beta_1) + BLUE_{M_2}(X_2\beta_2)$$

$$Cov\{BLUE_M(X_1\beta_1), BLUE_M(X_2\beta_2)\} = X_1 Cov\{BLUE_M(\beta_1), BLUE_M(\beta_2)\}X_2',$$

$$Cov\{BLUE_{M_1}(X_1\beta_1), BLUE_{M_2}(X_2\beta_2)\} = X_1 Cov\{BLUE_{M_1}(\beta_1), BLUE_{M_2}(\beta_2)\}X_2',$$

eşitlikleri yazılabilir. Bu eşitlikler altında (a) daki eşitliğin her iki tarafı X ile soldan çarpılarak

$$BLUE_M(X\beta) = X\,BLUE_M(\beta\,) = X\begin{bmatrix} BLUE_{M_1}(\beta_1) \\ BLUE_{M_2}(\beta_2) \end{bmatrix}$$

$$= BLUE_{M_1}(X_1\beta_1) + BLUE_{M_2}(X_2\beta_2)$$

elde edilir ki bu da (b) dir. Ayrıca $X^+ = (\,X'X\,)^{-1}X'$ olduğunu belirtelim. (b) deki eşitliğin her iki tarafı X^+ ile soldan çarpılarak (a) elde edilir. (a) ve (c) nin denkliği direkt olarak görülebilir. Benzer şekilde (d) ve (e) yukarıdaki eşitliklerden elde edilir. (f) , (g), (h), ve (i) nin denkliği (3.47) ve (3.55) ve yukarıdaki eşitliklerden elde edilir.

Teorem 3.1.5 BLUE $_M(X\beta)$, $OLSE_{M_1}(X_1\beta_1)$ and $OLSE_{M_2}(X_2\beta_2)$ tahmin edicileri daha önce verildikleri gibi olsunlar. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktir:

(a) $\mathrm{BLUE}_M(X\beta) = OLSE_{M_1}(X_1\beta_1) + OLSE_{M_2}(X_2\beta_2)$ eşitliği 1 olasılıkla sağlanır.

(b) $P_{X\|\Sigma} = P_{X_1} + P_{X_2}$ olacak şekilde bir $P_{X\|\Sigma}$ mevcuttur.

$X_1'X_2 = 0$ ve $\Re(\Sigma X) \subseteq \Re(X)$.

Bu durumda $OLSE_{M_1}(X_1\beta_1)$ ve $OLSE_{M_2}(X_2\beta_2)$ tahmin edicileri (3.2) modeli altında $X_1\beta_1$ ve $X_2\beta_2$ için yansızdırlar.

İspat: (3.6) ve (3.9) dan kolayca görülebilir ki (a) nın sağlanması için gerek ve yeter şart her y ∈ $\Re[X, \Sigma]$ için

$$BLUE_M(X\beta) - OLSE_{M_1}(X_1\beta_1) - OLSE_{M_2}(X_2\beta_2) = (P_{\chi\|\Sigma} - P_{X_1} - P_{X_2})y=0$$

olmasıdır ki bu Tanım 3.1.1 e göre

$$(P_{\chi\|\Sigma} - P_{X_1} - P_{X_2})[X, \Sigma] = [-P_{X_2}X_1, -P_{X_1}X_2, P_{\chi\|\Sigma}\Sigma - P_{X_1}\Sigma - P_{X_2}\Sigma] = 0$$

eşitliğinin yani

$$P_{X_2}X_1 = 0, P_{X_1}X_2 = 0, P_{\chi\|\Sigma}\Sigma - P_{X_1}\Sigma - P_{X_2}\Sigma = 0$$

eşitliklerinin sağlanmasına denktir. Buradaki ilk iki eşitlik $X_1'X_2 = 0$ eşitliğine denktir. Bu durumda, $P_{X_1} + P_{X_2} = P_\chi$ yazılabilir dolayısıyla üçüncü eşitlik

$$(P_{\chi\|\Sigma} - P_\chi)\Sigma=[X,0][X,\Sigma E_x]^+\Sigma-P_\chi\Sigma=0$$

eşitliğine denktir. Böylece gerekli düzenleme yapılarak

$$r(P_{\chi\|\Sigma}\Sigma - P_\chi\Sigma) = r([X,0][X,\Sigma E_x]^+\Sigma - P_\chi\Sigma)$$

$$=r\begin{bmatrix} -[X,\Sigma E_x] & 0 & \Sigma \\ 0 & X'X & X'\Sigma \\ [X,0] & X & 0 \end{bmatrix} - r[X,\Sigma E_x] - r(X)$$

$$= r\begin{bmatrix} 0 & -\Sigma E_x & X & \Sigma \\ 0 & 0 & X'X & X'\Sigma \\ X & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - r[X,\Sigma] - r(X)$$

$$= r\begin{bmatrix} 0 & 0 & X & \Sigma \\ 0 & X'\Sigma E_x & 0 & 0 \\ X & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - r[X,\Sigma] - r(X)$$

$$= r(E_x\Sigma X)$$

$$= r[X, \Sigma X] - r(X) \tag{3.76}$$

yazılabilir. Bu gösterimler $\Re(\Sigma X) \subseteq \Re(X)$ ifadesine denktir. Böylece (c) elde edilir. Buradan (b) deki içermenin sağlanması için gerek ve yeter şart

$$(P_{X_1} + P_{X_2})[X, \Sigma E_x] = [X,0] \tag{3.77}$$

yani,

$$P_{X_2} X_1 = 0, P_{X_1} X_2 = 0, \quad (P_{X_1} + P_{X_2}) \sum E_x = 0$$

olmasıdır. Buradaki ilk eşitlik $X_1' X_2 = 0$ eşitliğine denktir. Bu durumda, $P_{X_1} + P_{X_2} = P_\chi$, olup buradaki üçüncü eşitlik $P_X \sum E_x = 0$ eşitliğine yani, $P_X \sum P_\chi = \sum P_\chi$ eşitliğine denktir ki bu da $\Re(\sum X) \subseteq \Re(X)$ ifadesine denktir.

Teorem 3.1.6 BLUE $_M(X\beta)$, $OLSE_{M_1}(X_1\beta_1)$ and $OLSE_{M_2}(X_2\beta_2)$ tahmin edicileri daha önce verildikleri gibi olsunlar. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktir:

(a) BLUE$_M(X\beta)$=$OLSE_{M_1}(X_1\beta_1)$ + $E_{X_1} OLSE_{M_2}(X_2\beta_2)$ eşitliği 1 olasılıkla sağlanır.

(b) $P_{X\|\Sigma} = P_{X_1} + P_{X_2} - P_{X_1} P_{X_2}$ olacak şekilde bir $P_{X\|\Sigma}$ mevcuttur.

(c) $P_{X_1} P_{X_2} = P_{X_2} P_{X_1}$ ve $\Re(\sum X) \subseteq \Re(X)$ dir.

İspat: (3.6) ve (3.9) dan kolayca görülür ki (a) nın sağlanması için gerek ve yeter şart her $y \in \Re[\mathrm{X}, \sum]$ için

$$BLUE_M(X\beta) - OLSE_{M_1}(X_1\beta_1) - E_{X_1} OLSE_{M_2}(X_2\beta_2)$$

$$= (P_{\chi\|\Sigma} - P_{X_1} - P_{X_2} + P_{X_1} X_2)\, y = 0$$

olmasıdır ki bu Tanım 3.1.1 e göre

$$(P_{\chi\|\Sigma} - P_{X_1} - P_{X_2} + P_{X_1} X_2)[X, \sum]$$

$$= [-P_{X_2} X_1 + P_{X_1} X_2 X_1, 0, P_{\chi\|\Sigma}\Sigma - P_{X_1}\Sigma - P_{X_2}\Sigma + P_{X_1} X_2 \Sigma] = 0, \qquad (3.78)$$

eşitliğine yani,

$$P_{X_2} X_1 = P_{X_1} X_2 X_1 \text{ ve } P_{\chi\|\Sigma}\Sigma - P_{X_1}\Sigma - P_{X_2}\Sigma + P_{X_1} X_2 \Sigma = 0$$

eşitliklerinin sağlanmasına denktir. (3.57) deki birinci eşitlik $P_{X_1} X_2 = P_{X_2} X_1$ eşitliğine denktir. Bu durumda, $P_{X_1} + P_{X_2} - P_{X_1} X_2 = P_\chi$ dır. Dolayısıyla yukarıdaki ikinci eşitlik $(P_{\chi\|\Sigma} - P_X)\Sigma = 0$ eşitliğine denktir ki bu da $\Re(\sum X) \subseteq \Re(X)$ içermesine denktir. Böylece (c) sağlanmış olur. (a) ve (b) nin denkliği ise benzer şekilde gösterilebilir.

Eğer (3.2) de $\sum$ pozitif definit ve $r(X) = p$ alınırsa bu takdirde yukarıdaki son iki teoremden aşağıdaki iki sonuç türetilebilir:

Sonuç 3.1.4 $\text{BLUE}_M(\beta)$, $OLSE_{M_1}(\beta_1)$ ve $OLSE_{M_2}(\beta_2)$ tahmin edicileri (3.11) ve (3.13) de verildikleri gibi olsunlar. Bu takdirde

$$\text{BLUE}_M(\beta) = \begin{bmatrix} OLSE_{M_1}(\beta_1) \\ OLSE_{M_2}(\beta_2) \end{bmatrix} \tag{3.79}$$

eşitliğinin sağlanması için gerek ve yeter şart $X_1'X_2$=0 ve $\Re(\sum X) \subseteq \Re(X)$ olmasıdır.

Sonuç 3.1.5 $\text{BLUE}_M(\beta)$, $OLSE_{M_1}(\beta_1)$ ve $OLSE_{M_2}(\beta_2)$ tahmin edicileri (3.11) ve (3.13) de verildikleri gibi olsunlar. Bu takdirde

$$\text{BLUE}_M(\beta) = \begin{bmatrix} OLSE_{M_1}(\beta_1) - (X_1X_1)^{-1}X_1'X_2OLSE_{M_2}(\beta_2) \\ OLSE_{M_2}(\beta_2) \end{bmatrix} \tag{3.80}$$

eşitliğinin sağlanması için gerek ve yeter şart $P_{X_1}\ P_{X_2} = P_{X_2}P_{X_1}$ ve $\Re(\sum X) \subseteq \Re(X)$ olmasıdır.

3.2 Genel ve Kısıtlamalı Modeller Altında Tahminlerin Ayrışımı

Bu kısımda bazı karmaşık matris işlemleri ve genelleştirilmiş inversler içeren bir genel lineer model ve onun kısıtlamalı modelleri altında parametrik fonksiyonların tahminleri ele alınacaktır. Bununla ilgili olarak genel lineer model ve kısıtlamalı lineer model altında OLSE ve BLUE tahmin edicilerinin eşitliği için bazı gerek ve yeter şartlar verilecektir.

X nxp tipinde keyfi ranklı bilinenler matrisi y nx1 tipinde gözlenebilir rasgele vektör, β px1 tahmin edilecek parametre vektörü, ε rasgele hata vektörü, E(ε) = 0, Cov (ε) $= \sigma^2\sum$, σ^2 bilinmeyen pozitif parametre ve $\sum$ ise n x n keyfi ranklı bilinen veya bilinmeyen nonnegatif definit bir matris olmak üzere

$$y = X\beta + \varepsilon \,, \tag{3.81}$$

genel lineer modelini göz önüne alalım. Ayrıca A mxp tipinde bilinen bir matrisi ve b de mx1 tipinde bilinen bir vektör olmak üzere bilinmeyen β parametresi hakkında

$$A\beta = b \,, \tag{3.82}$$

matris denkleminin tutarlı olduğu ek bilgisinin verildiğini varsayalım. Bu tip kısıtlamalar genellikle (3.81) modelindeki parametre vektörü ile ilgili hipotez testlerinde kullanılmaktadır. (3.82) ile birlikte (3.81) modeline kısıtlamalı lineer model adı verilir. Basitlik olması bakımından (3.81) modelini ve buna karşılık gelen kısıtlamalı modeli sırasıyla

$$\mathcal{M} = \{y, X\beta, \sigma^2\Sigma\} \tag{3.83}$$

ve

$$\mathcal{M}_r = \{y, X\beta \mid A\beta = b, \sigma^2\Sigma\}. \tag{3.84}$$

ile gösterelim. Kısıtlamalı lineer modeller istatistikte geniş bir kullanıma sahiptirler bkz. Amemiya (1985), Chipman ve Rao (1964), Dent (1980), Haupt ve Oberhofer (2002), Ravikumar (2000). (3.82) deki lineer kısıtlamadan dolayı β parametre vektörünün (3.84) deki tahmini (3.83) teki tahmininden daha karmaşıktır. Genel lineer modellerin (3.84) deki kısıtlamalı lineer modele dönüştürülmesi de mümkündür. Model dönüştürme hakkındaki en popüler dönüşümler Lagrange çarpanları ve (3.82) deki denklemin genel çözümüne paralel bir yeniden parametreleştirme işlemidir. $r(X) = p$ and $r(A) = m$ olmak üzere (3.84) odeli altında β parametresinin OLSE tahmin edicisi

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'y - (X'X)^{-1}A'[A(X'X)^{-1}A']^{-1}[A(X'X)^{-1}X'y - b];$$

şeklinde olacaktır, bkz. Amemiya (1985, p.21), ve Fomby ve Ark. (1984, p.83).

Bu kısımda (3.83) ve (3.84) modelleri altında $K\beta$ tahmin edilebilir parametre vektörü fonksiyonlarının tahmin edicilerinin eşitliği araştırılacaktır. $r(X) < p$ ise, (3.83) ve (3.84) modelleri altında β ve $K\beta$ nın OLSE tahmin edicileri için genel ifadeler matrislerin genelleştirilmiş inversleri yardımıyla aşağıdaki Lemma 3.2.1 de verildiği gibi; (3.83) ve (3.84) modelleri altında $K\beta$ nın BLUE tahmin edicileri ise Lemma 3.2.2 Lemma 3.2.3 de verildiği gibi olacaktır.

Moore – Penrose inversin bir temel özelliği

$$M^+ = (M'M)^+M' = M'(MM')^+ \tag{3.85}$$

dir, bkz. see Penrose (1955).

Lemma 3.2.1 $AX = B$ matris denkleminin tutarlı olması için gerek ve yeter şart $AA^+B = B$ olmasıdır. Bu durumda genel çözümü V keyfi bir vektör olmak üzere $X = A^+B + F_AV$ formunda yazılabilir. Özel olarak, $AX = 0$ ın genel nonnegatif definit çözümü $X = F_AVV'F_A$ formunda olacaktır.

Lemma 3.2.2 $BU_1 + U_2C = A$ matris denkleminin U_1 ve U_2 için çözülebilir olması için gerek ve yeter şart

$$r\begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} = r(B) + r(C)$$

olmasıdır.

Bu kısımda (3.83) deki modelin tutarlı olduğunu yani, 1 olasılıkla

$$y \in \Re[X,\Sigma] \tag{3.86}$$

durumunun sağlandığını kabul edeceğiz, bkz. Rao (1971,1973).

K matrisi lxp tipinde bilinen bir matris olsun. $K\beta$ ya (3.83) ve (3.84) deki β parametre vektörünün bir dönüşümü adı verilir. Özel olarak eğer $K = I_p$ veya $K = X$ ise bu takdirde, $K\beta$ sırasıyla β parametre vektörünün ve $X\beta$ ortalama vektörünün dönüşümdür. (3.83) modeli altında $K\beta$ için iki yansız tahmin edicinin eşitliğini vermek için Groβ ve Trenkler (1998) tarafından verilen aşağıdaki sonuca ihtiyaç vardır.

Lemma 3.2.3 (3.83) deki $\mathcal{M}$ modeli tutarlı olsun ve $L_1y + c_1$ ve $L_2y + c_2$ $K\beta$ için iki yansız tahmin edici olsunlar, yani, E($L_1y + c_1$) = E($L_2y + c_2$) = Kβ olsun.bu takdirde $L_1y + c_1 = L_2y + c_2$ eşitliğinin 1 olasılıkla sağlanması için gerek ve yeter şart $L_1\Sigma = L_2\Sigma$ eşitliğinin sağlanmasıdır.

Bu kısımda önce (3.83) ve (3.84) modelleri altında tahmin edilebilir parametre fonksiyonlarının OLSE ve BLUE tahmin edicileri için genel ifadeler elde edilecek ve daha sonra (3.83) ve (3.84) modelleri altında $K\beta$ nın OLSE ve BLUE tahmin edicilerinin aşağıdaki altı eşitliği sağlaması için gerek ve yeter şartlar türetilecektir:

(i) $OLSE_{\mathcal{M}}(K\beta) = BLUE_{\mathcal{M}}(K\beta)$,
(ii) $OLSE_{\mathcal{M}}(K\beta) = OLSE_{\mathcal{M}r}(K\beta)$,
(iii) $OLSE_{\mathcal{M}}(K\beta) = BLUE_{\mathcal{M}r}(K\beta)$,
(iv) $OLSE_{\mathcal{M}r}(K\beta) = BLUE_{\mathcal{M}}(K\beta)$,
(v) $OLSE_{\mathcal{M}r}(K\beta) = BLUE_{\mathcal{M}r}(K\beta)$,
(vi) $BLUE_{\mathcal{M}}(K\beta) = BLUE_{\mathcal{M}r}(K\beta)$,

Son olarak bu altı eşitlik (3.83) ve (3.84) modellerinde $X\beta$ ve β için verilecektir.

Verilen $K \in \mathbb{R}^{lxp}$ matrisi için $K\beta$ vektörü (3.83) veya (3.84) altında tahmin edilebilir denir, eğer, E (L_y+c) = $K\beta$ sağlanacak şekilde bir $L \in \mathbb{R}^{lxn}$ matrisi ve bir c vektörü bulunabilirse. Bu durumda

(i) $K\beta$ nın (3.83) modeli altında tahmin edilebilir olması için gerek ve yeter şart

$$\Re(K') \subseteq \Re(X') \tag{3.87}$$

olmasıdır.

(ii) $K\beta$ nın (3.84) modeli altında tahmin edilebilir olması için gerek ve yeter şart

$$\Re(K') \subseteq \Re[X', A'] \tag{3.88}$$

olmasıdır, bkz. Alalouf and Styan (1979). (3.87) ve (3.88) den kolayca görülebilir ki eğer $K\beta$ (3.83) modeli altında tahmin edilebilir ise bu takdirde $K\beta$ (3.84) modeli altında da tahmin edilebilirdir.

(3.83) ve (3.84) deki lineer modeller için, $K\beta$ nın OLSE ve BLUE tahmin edicilerinin aşağıdaki gibi olduğu bilinmektedir:

(i) (3.83) modeli altında β nın OLSE tahmin edicisi, $(y - X\beta)'(y - X\beta)$ ifadesini minimum yapan β vektörü olarak tanımlanır ve $OLSE_{\mathcal{M}}(\beta)$ ile gösterilir. Bu durumda (3.83) modeli altında $K\beta$ nın OLSE tahmin edicisi $OLSE_{\mathcal{M}}(K\beta\ ) = KOLSE_{\mathcal{M}}(\beta)$ dir.

(ii) (3.84) modeli altında β nın OLSE tahmin edicisi, $A\beta = b$ ya göre $(y - X\beta)'(y - X\beta)$ ifadesini minimum yapan β vektörü olarak tanımlanır ve $OLSE_{\mathcal{M}r}(\beta)$ ile gösterilir. (3.84) modeli altında $K\beta$ nın OLSE tahmin edicisi $OLSE_{\mathcal{M}r}(K\beta) = K.OLSE_{\mathcal{M}r}(\beta)$ dir.

(iii) (3.83) modeli altında $K\beta$ nın BLUE tahmin edicisi $E\ (G_y) = K\beta$ ve $K\beta$ nın herhangi bir yansız $G_1y\ + c_1$ tahmin edicisi için $Cov(G_1y)$ – $Cov(Gy)$ non-negatif definit olacak şekildeki Gy lineer yansız tahmin edicisidir ve $BLUE_{\mathcal{M}}(K\beta)$ ile gösterilir.

(3.83) ve (3.84) modelleri altında $K\beta$ nın OLSE ve BLUE tahmin edicileri farklı krıterlere göre tanımlandığından onların aynı olması gerekmez. Bu $K\beta$ nın OLSE ve BLUE tahmin edicilerinin karşılaştırılması ve özellikle bunların eşit olmaları için gerek ve yeter şartların verilmesi uygundur.

Lemma 3.2.2 den kolayca görülür ki (3.82) deki tutarlı matris denkleminin genel çözümü γ keyfi bir vektör olmak üzere

$$\beta = A^{+}b + F_A\gamma \,, \tag{3.89}$$

şeklindedir. (3.89) ifadesi (3.81) deki modelde yerine yazılırsa $z = y - XA^{+}b$ olmak üzere aşağıdaki yeniden parametreleştirilmiş model elde edilir

$$z = X_A\,\gamma + \varepsilon, \tag{3.90}$$

Bu nedenle (3.84) altında tahminler (3.90) dan türetilebilir. $K\beta$ nın (3.83) ve (3.84) modelleri altındaki OLSE tahmin edicileri aşağıdaki lemmada verilmiştir.

Lemma 3.2.4 (a) $\mathcal{M}$ modeli (3.83) deki gibi verilmiş olsun ve $K\beta$ nın $\mathcal{M}$ altında tahmin edilebilir olduğunu varsayalım. Bu takdirde $K\beta$ nın $\mathcal{M}$ altında OLSE tahmin edicisi

$$OLSE_{\mathcal{M}}(K\beta) = KX^{+}y \tag{3.91}$$

dir.

(b) $\mathcal{M}_r$ modeli (3.84) deki gibi verilmiş olsun ve $K\beta$ nın $\mathcal{M}_r$ altında tahmin edilebilir olduğunu varsayalım. Bu takdirde $K\beta$ nın $\mathcal{M}_r$ altında OLSE tahmin edicisi $K_A = KF_A$ ve $X_A = XF_A$ olmak üzere

$$OLSE_{\mathcal{M}_r}(K\beta) = (KA^{+} - K_A X_A{}^{+}XA^{+})b + K_A X_A{}^{+}y, \tag{3.92}$$

dir.

İspat: (a) durumu kolayca görülebilir, bkz. Puntanen and Styan (1989). Lemma 3.2.2 den (3.90) modelinde γ nın OLSE tahmin edicisinin u keyfi bir vektör olmak üzere $\widehat{\gamma} = X_A{}^{+}z + F_{X_A}u$, şeklinde yazılabileceği kolayca görülür. Bunu (9) da yerine yazarak

$$OLSE_{\mathcal{M}_r}(\beta) = A^{+}b + F_AX_A{}^{+}z + F_AF_{X_A}u$$

$$= (A^{+} - F_AX_A{}^{+}XA^{+})b + F_AX_A{}^{+}y + F_AF_{X_A}u.$$

elde edilir. Bu nedenle (3.92) eşitliği sağlanır.

Aşağıdaki lemmada verilen eşitliklerin sağlandığı kolayca gösterilebilir, bkz. Drygas (1970, p.50) ve Rao (1973, p.282).

Lemma 3.2.5 $\mathcal{M}$ modeli (3.83) deki gibi verilmiş olsun ve $K\beta$ nın $\mathcal{M}$ altında tahmin edilebilir olduğunu varsayalım. Bu takdirde $K\beta$ nın $\mathcal{M}$ altında BLUE tahmin edicisi

$$BLUE_{\mathcal{M}}(K\beta) = P_{K;X;\Sigma}y, \qquad . \tag{3.93}$$

şeklindedir, burada $P_{K;X;\Sigma}$ ifadesi

$$G[X, VE_X] = [K, 0] \tag{3.94}$$

dir. Bu durumda (3.94) ün genel çözümü $U \in \mathbb{R}^{lxn}$ keyfi olmak üzere

$$P_{K;X;\Sigma} = [K,0]\,[X, \Sigma E_X]^+ + UE_{[X,\Sigma E_X]}, \tag{3.95}$$

olacaktır. Ayrıca,

(a) $r[X, \Sigma E_X] = r[X, \Sigma]$ ve $\Re[X, , \Sigma E_X] = \Re[X, \Sigma]$.

(b) $P_{K;X;\Sigma}\Sigma$ çarpımı $P_{K;X;\Sigma}\Sigma = [K,0][X, \Sigma E_X]^+\Sigma$ olarak tek türlü yazılabilir.

(3.93) ifadesine ilaveten $BLUE_{\mathcal{M}}(K\beta)$ nın bilinen bir gösterimi

$$BLUE_{\mathcal{M}}(K\beta) = K(X'T^+X)^+X'T^+y,$$

ile verilir, burada $T = \Sigma + XUX'$, olup U simetrik matrisi $r(T)=r[\Sigma,X]$ olacak şekilde seçilmiştir, bkz. Rao (1973).

Lemma 3.2.6 $\mathcal{M}_r$ modeli (3.84) deki gibi verilmiş olsun ve $K\beta$ nın $\mathcal{M}_r$ altında tahmin edilebilir olduğunu varsayalım. Bu takdirde $K\beta$ nın $\mathcal{M}_r$ altında BLUE tahmin edicisi

$$BLUE_{\mathcal{M}_r}(K\beta) = (I_l - P_{KA;XA;\Sigma})\,XA^+b + P_{KA;XA;\Sigma}y, \tag{3.96}$$

olarak yazılabilir, burada $K_A = KF_A$, $X_A = XF_A$ ve $U_1 \in \mathbb{R}^{lxn}$ keyfi olmak üzere

$$P_{KA;XA;\Sigma} = [K_A, 0][\,X_A\,, \Sigma XF_A]^+ + U_1E_{[\,X_A\,,\Sigma EX_A]}, \tag{3.97}$$

dir. Ayrıca,

(a) $r[X_A\,, \Sigma EX_A] = r[X_A\,, \Sigma]$ ve $\Re\,[X_A\,, \Sigma EX_A] = \Re[X_A, \Sigma\,]$

(b) $P_{KA;XA;\Sigma}\Sigma$ çarpımı $P_{KA;XA;\Sigma}\Sigma = [K_A, 0][\,X_A\,, \Sigma EX_A]^+\Sigma$ şeklinde tek türlü olarak yazılabilir.

İspat: Lemma 3.2.2 den (3.90) altında $K_A\gamma$ nin BLUE tahmin edicisinin

$$BLUE_{\mathcal{M}}(K_A\gamma) = P_{K_A;X_A;\Sigma}z$$

şeklinde yazılabileceği kolayca görülür. Bunu (3.89) ifadesinde yerine yazarak (3.96) da iddia edildiği gibi

$BLUE_{\mathcal{M}_r}(K\beta)$ = $KA^{+}b$ + $BLUE_{\mathcal{M}_r}(K_A\gamma)$

= $KA^{+}b$ + $P_{K_A;X_A;\Sigma}(y\text{-}XA^{+}b)$

elde edilir.

Teorem 3.2.1 $OLSE_{\mathcal{M}}(K\beta\,)$ ve $BLUE_{\mathcal{M}}(K\beta\,)$ (3.91) ve (3.93) de verildikleri gibi olsunlar ve $K\beta$ nın (3.83) modeli altında tahmin edilebilir olduğunu varsayalım. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktir:

(a) $OLSE_{\mathcal{M}}(K\beta)$ = $BLUE_{\mathcal{M}}(K\beta\,)$ eşitliği 1 olasılıkla sağlanır.

(b) K, X ve Σ matrisleri $KX^{+}\Sigma E_X$ = matris denklemini sağlar.

(c) $\Re[(KX^{+}\Sigma)'] \subseteq \Re(X)$,

(d) $\Re\begin{bmatrix} X'\Sigma E_X \\ 0 \end{bmatrix} \subseteq \Re\begin{bmatrix} X'X \\ K \end{bmatrix}$

(e) $r\begin{bmatrix} X'\Sigma & X'X \\ X' & 0 \\ 0 & K \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} X'\Sigma & X'X \\ X' & 0 \end{bmatrix} = 2r(X)$

(f) $\Re\begin{bmatrix} K' \\ 0 \end{bmatrix} \subseteq \Re\begin{bmatrix} X'X & 0 \\ \Sigma X & X \end{bmatrix}.$

(g) $E_X[\Sigma X, 0]F_{[X'X,K']} = 0$.

(h) $XU_1 + U_2(X'X, K') = [\Sigma X, 0]$ denklemi U_1 ve U_2 için çözülebilir.

(i) Σ matrisi V matrisi için $\Sigma = (I_n - J^{+}J)VV'(I_n - J^{+}J)$ şeklinde ayrıştırılabilir, burada, $J = KX^{+} - [X, 0][X, \Sigma E_X]^{+}$ dir.

İspat: (3.83) modeli altında $OLSE_{\mathcal{M}}(K\beta)$ ve $BLUE_{\mathcal{M}}(K\beta)$ nın her ikisinin de $K\beta$ için yansız tahmin ediciler olduğunu hatırlayalım. Bu nedenle Lemma 3.2.4 den kolayca görülebilir ki $OLSE_{\mathcal{M}}(K\beta)$ = $BLUE_{\mathcal{M}}(K\beta)$ eşitliğinin 1 olasılıkla sağlanması için gerek ve yeter şart

$$KX^{+}\Sigma = [K,0][X, \Sigma E_X]^{+}\Sigma \qquad (3.98)$$

eşitliğinin sağlanmasıdır. Bu durumda eğer (3.85) eşitliği (3.98) eşitliğine uygulanıp gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$r(KX^{+}\Sigma - [K,0][X, \Sigma E_X]^{+}\Sigma$$

$$= r(K(X'X)^{+}X'\Sigma - [K,0][X, \Sigma E_X]^{+}\Sigma$$

$$= r\left([K, [K,0]]\begin{bmatrix} X'X & 0 \\ 0 & -[X, \Sigma E_X] \end{bmatrix}^{+}\begin{bmatrix} X'\Sigma \\ \Sigma \end{bmatrix}\right)$$

$$= r\begin{bmatrix} X'X & 0 & X'\Sigma \\ 0 & -[X, \Sigma E_X] & \Sigma \\ K & 0 & 0 \end{bmatrix} - r(X) - r[X, \Sigma E_X]$$

$$= r\begin{bmatrix} X'X & -X'X & 0 & X'\Sigma \\ 0 & -X & -\Sigma E_X & \Sigma \\ K & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - r(X) - r[X, \Sigma]$$

$$= r\begin{bmatrix} X'X & 0 & X'\Sigma E_X & 0 \\ 0 & -X & 0 & \Sigma \\ K & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - r(X) - r[X, \Sigma]$$

$$= r\begin{bmatrix} X'X & X'\Sigma E_X \\ K & 0 \end{bmatrix} - r(X)$$

$$= r\begin{bmatrix} \Sigma X & 0 & X \\ X'X & K' & 0 \end{bmatrix} - 2r(X)$$

$$= r(E_X[\Sigma X, 0]F_{[X'X, K']})$$

elde edilir. Eşitliğin her iki tarafı sıfıra eşitlenerek (d) , (e), (f) ve (g) nin denkliği elde edilmiş olur. (g) ve (h) şıklarının denkliği ise Lemma 3.2.3 den kolaylıkla görülebilir.

(3.91) deki KX^+ katsayı matrisini (3.94) de yerine yazar ve $KX^+X = K$ olduğu dikkate alınırsa (b) deki $KX^+\Sigma E_X = 0$ matris denklemi veya buna denk olarak (c) de istenildiği gibi $\Re[(KX^+\Sigma)'] \subseteq \Re(X)$ elde edilir. (3.98) deki denklem çözülerek (i) de verilen çözüme ulaşılabilir.

Teorem 3.2.2 $OLSE_{\mathcal{M}}(K\beta)$ ve $BLUE_{\mathcal{M}}(K\beta)$ tahmin edicileri (3.91) ve (3.93) de verildikleri gibi olsunlar ve $K\beta$ nın (3.83) modeli altında tahmin edilebilir olduğunu varsayalım. Bu takdirde

(a) Aşağıdaki ifadeler denktir:

(i) $OLSE_{\mathcal{M}}(K\beta) = OLSE_{\mathcal{M}_r}(K\beta)$ eşitliği 1 olasılıkla sağlanır

(ii) $r\begin{bmatrix} X'X & X'XF_A & X'\Sigma \\ F_AX'X & 0 & 0 \\ K & 0 & 0 \end{bmatrix} = r(X) + r(XF_A)$

(iii) $\Re\begin{bmatrix} X'\Sigma \\ 0 \end{bmatrix} \subseteq \Re(N)$, $\Re\begin{bmatrix} K' \\ 0 \end{bmatrix} \subseteq \Re(N)$ ve $[K,0]N^+\begin{bmatrix} X'\Sigma \\ 0 \end{bmatrix} = 0$, dir, burada N matrisi $N = \begin{bmatrix} X'X & X'XF_A \\ F_AX'X & 0 \end{bmatrix}$ şeklindedir.

(iv) $\sum$ matrisi bir V matrisi için $\sum = F_J VV' F_J$ şeklinde ayrıştırılabilir, burada $J = KX^{+}\text{-}K_A X_A^{+}$ dir.

(b) $\sum$ matrisinin pozitif definit olması şartı $OLSE_{\mathcal{M}}(K\beta)$= $OLSE_{\mathcal{M}_r}(K\beta)$ eşitliğinin sağlanması için gerek ve yeter şart $\Re(K') \subseteq \Re(X'XF_A)$ olmasıdır.

İspat: $OLSE_{\mathcal{M}}(K\beta)$ ve $BLUE_{\mathcal{M}}(K\beta)$ nın her ikisinin de $K\beta$ için yansız tahmin ediciler olduğundan Lemma 3.2.4 den kolayca $OLSE_{\mathcal{M}}(K\beta) = OLSE_{\mathcal{M}_r}(K\beta)$ eşitliğinin 1 olasılıkla sağlanması için gerek ve yeter şartın

$$KX^{+}\sum = K_A X_A{}^{+}\sum. \tag{3.99}$$

eşitliğinin sağlanması olduğu görülebilir. Bu durumda eğer (3.85) eşitliği (3.98) eşitliğine uygulanıp gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$r(KX^{+}\sum \ - K_A X_A{}^{+}\sum) = r[\ K(X'X)^{+}X'\sum - KF_A(F_A X'XF_A)^{+}(XF_A)'\sum]$$

$$= r\left([K, KF_A]\begin{bmatrix} X'X & 0 \\ 0 & -F_A X'XF_A \end{bmatrix}^{+}\begin{bmatrix} X'\sum \\ (XF_A)'\sum \end{bmatrix}\right)$$

$$= r\begin{bmatrix} X'X & 0 & X'\sum \\ 0 & -(XF_A)'(XF_A) & (XF_A)'\sum \\ K & KF_A & 0 \end{bmatrix} - \mathrm{r}\,(X - r(X, F_A\,)$$

$$= r\begin{bmatrix} X'X & X'XF_A & X'\sum \\ F_A X'X & 0 & 0 \\ K & 0 & 0 \end{bmatrix} - \mathrm{r}\,(X) - r(X, F_A\,)$$

olduğu görülür. Bu eşitliklerin her iki tarafı sıfıra eşitlenerek (a) daki (i) ve (ii) nin denk olduğu görülür. (ii) ve (iii) iün denkliği ise rank özelliklerinden kolayca görülebilir. (3.99) denkleminin çözülmesiyle (iv) deki çözüme ulaşılır. (b) durumu ise (a) dan kolaylıkla elde edilir.

Teorem 3.2.3 $OLSE_{\mathcal{M}}(K\beta\,)$ ve $BLUE_{\mathcal{M}_r}(K\beta\,)$ (3.91) ve (3.96) de verildikleri gibi olsunlar ve $K\beta$ nın (3.83) modeli altında tahmin edilebilir olduğunu varsayalım. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktir:

(a) $OLSE_{\mathcal{M}}(K\beta) = BLUE_{\mathcal{M}_r}(K\beta)$ eşitliği 1 olasılıkla sağlanır.

(b) $r\begin{bmatrix} \sum X & 0 & X \\ 0 & 0 & A \\ X'X & K' & 0 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} X \\ A \end{bmatrix} + r(X).$

(c) $\quad F_{[X,A]'}\begin{bmatrix}\Sigma X & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}E_{[X'X,K']} = 0.$

(d) $\quad \begin{bmatrix}X\\ A\end{bmatrix}U_1 + U_2[X'X, K'] = \begin{bmatrix}\Sigma X & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ matris denklemi U_1 ve U_2 için çözülebilir.

İspat: (3.91) ve (3.96) da verilen $OLSE_{\mathcal{M}}(K\beta)$ ve $BLUE_{\mathcal{M}_r}(K\beta)$ itahmin edicilerinin her ikisi de $K\beta$ için yansızdır. Bu nedenle Lemma 3.2.4 den kolayca görülebilir ki $OLSE_{\mathcal{M}}(K\beta) = BLUE_{\mathcal{M}_r}(K\beta)$ eşitliğinin 1 olasılıkla sağlanması için gerek ve yeter şart $KX^{+}\Sigma = P_{F_A;XF_A;\Sigma}\Sigma$ olmasıdır. (3.855) eşitliği kullanılarak gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$r(KX^{+}\Sigma - P_{F_A;XF_A;\Sigma}\Sigma)$$

$$= r\,(K(X'X)^{+}X'\Sigma - [KF_A, 0][XF_A, \Sigma E_{XF_A}]^{+}\Sigma)$$

$$= r\left([K, [KF_A, 0]]\begin{bmatrix}X'X & 0\\ 0 & -[XF_A, \Sigma E_{XF_A}\end{bmatrix}^{+}\begin{bmatrix}X'\Sigma\\ \Sigma\end{bmatrix}\right)$$

$$= r\begin{bmatrix}X'X & 0 & X'\Sigma\\ 0 & -[XF_A, XF_A] & \Sigma\\ K & [KF_A, 0] & 0\end{bmatrix} - r(X) - r[XF_A, \Sigma E_{XF_A}]$$

$$= r\begin{bmatrix}X'X & -X'XF_A & 0 & X'\Sigma\\ 0 & -XF_A & 0 & 0\\ K & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} - r(X) - r[XF_A, \Sigma]$$

$$= r\begin{bmatrix}X'X & 0 & X'\Sigma E_{XF_A} & 0\\ 0 & XF_A & 0 & \Sigma\\ K & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} - r(X) - r\,[XF_A, \Sigma]$$

$$= r\begin{bmatrix}X'X & X'\Sigma E_{XF_A}\\ K & 0\end{bmatrix} - r(X)$$

$$= r\begin{bmatrix}X'X & K' & 0\\ \Sigma X & 0 & XF_A\end{bmatrix} - r(XF_A) - r(X)$$

$$= r\begin{bmatrix}\Sigma X & 0 & X\\ 0 & 0 & A\\ X'X & K' & 0\end{bmatrix} - r\begin{bmatrix}X\\ A\end{bmatrix} - r(X)$$

elde edilir. Eşitliğin sağ tarafları sıfıra eşitlenerek (a) ve (b) nin denkliği elde edilir. (b) ve (c) nin ve (b) ve (d) nin denkliği ise matris rank özelliklerinden kolayca görülebilir.

Teorem 3.2.4 $OLSE_{\mathcal{M}_r}(K\beta)$ ve $BLUE_{\mathcal{M}}(K\beta)$ tahmin edicileri (3.92) ve (3.93) de verildikleri gibi olsunlar ve $K\beta$ nın (3.83) altında tahmin edilebilir olduğunu varsayalım. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktir:

(a) $OLSE_{\mathcal{M}_r}(K\beta) = BLUE_{\mathcal{M}}(K\beta)$ eşitliği 1 olasılıkla sağlanır.

(b) $r\begin{bmatrix} X'X & 0 & X'\Sigma & 0 & A' \\ X & X & 0 & \Sigma & 0 \\ K & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & X' & 0 & 0 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} X \\ A \end{bmatrix} + r[X,\Sigma] + r(X) + r(A)$ dir.

İspat: (3.92) ve (3.93) deki $OLSE_{\mathcal{M}_r}(K\beta)$ ve $BLUE_{\mathcal{M}}(K\beta)$ tahmin edicilerinin her ikisinin de $K\beta$ için yansız olduğunu belirtelim. Bu nedenle Lemma 3.2.4 e göre $OLSE_{\mathcal{M}_r}(K\beta)= BLUE_{\mathcal{M}}(K\beta)$ eşitliğinin 1 olasılıkla sağlanması için gerek ve yeter şart $K_A X_A{}^{+}\Sigma = P_{K;X;\Sigma}\Sigma$ olmasıdır. (3.85) uygulayarak gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$r(K_A X_A{}^{+}\Sigma - P_{K;X;\Sigma}\Sigma)$$

$$= r(KF_A(F_A X'XF_A)^{+}(XF_A)'\Sigma - [K,0][X,\Sigma E_X]^{+}\Sigma$$

$$= r\left([KF_A, [K,0]] \begin{bmatrix} (XF_A)'XF_A & 0 \\ 0 & -[X,\Sigma E_X] \end{bmatrix}^{+} \begin{bmatrix} (XF_A)' \\ \Sigma \end{bmatrix}\right)$$

$$= r\begin{bmatrix} (XF_A)'XF_A & 0 & (XF_A)'\Sigma \\ 0 & -[X,\Sigma E_X] & \Sigma \\ KF_A & [K,0] & 0 \end{bmatrix} - r(XF_A) - r[X,\Sigma E_X]$$

$$= r\begin{bmatrix} (XF_A)'XF_A & 0 & 0 & 0 \\ XF_A & -X & -\Sigma E_X & \Sigma \\ 0 & K & 0 & 0 \end{bmatrix} - r(XF_A) - r[X,\Sigma]$$

$$= r\begin{bmatrix} 0 & X'X & X'\Sigma & 0 & A' \\ X & X & 0 & \Sigma & 0 \\ 0 & K & 0 & 0 & 0 \\ A & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & X' & 0 & 0 \end{bmatrix} - r\begin{bmatrix} X \\ A \end{bmatrix} - r[X,\Sigma] - r(X) - r(A)$$

elde edilir. Eşitliğin sağ tarafları sıfıra eşitlenirse (a) ve (b) nin denk olduğu görülür.

Teorem 3.2.5 $BLUE_{\mathcal{M}}(K\beta)$ ve $BLUE_{\mathcal{M}_r}(K\beta)$ tahmin edicileri (3.93) ve (3.96) da verildikleri gibi olsunlar ve $K\beta$ nın (3.83) altında tahmin edilebilir olduğunu varsayalım. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktir:

(a) $BLUE_{\mathcal{M}}(K\beta) = BLUE_{\mathcal{M}_r}(K\beta)$ eşitliği 1 olasılıkla sağlanır.

(b) $r\begin{bmatrix} \Sigma & 0 & X \\ 0 & 0 & A \\ X' & K' & 0 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} X \\ A \end{bmatrix} + r\,[X, \Sigma]$.

(c) $\Re\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ K' \end{bmatrix} \subseteq \Re\begin{bmatrix} \Sigma & X \\ 0 & A \\ X' & 0 \end{bmatrix}$.

İspat: (3.93) ve (3.96) verilen $BLUE_{\mathcal{M}}(K\beta)$ ve $BLUE_{\mathcal{M}_r}(K\beta)$ tahmin edicilerinin her ikisi de $K\beta$ için yansızdırlar. Bu nedenle $BLUE_{\mathcal{M}}(K\beta) = BLUE_{\mathcal{M}_r}(K\beta)$ eşitliğinin 1 olasılıkla sağlanması için gerek ve yeter şart $P_{K;X;\Sigma}\Sigma = P_{K_A;X;\Sigma}\Sigma$ olmasıdır. (3.85) eşitliği kullanılarak gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$r(P_{K;X;\Sigma}\Sigma - P_{KA;X;\Sigma}\Sigma)$$

$$= r(\,[K,0]\,[X, \Sigma E_X]^{+}\Sigma - [KF_A,0][XF_A, \Sigma E_X F_A]^{+}\Sigma)$$

$$= r\left([[K.0],[KF_A,0]]\begin{bmatrix} [X, \Sigma E_X] & 0 \\ 0 & -[XF_A, \Sigma E_{XF_A}] \end{bmatrix}^{+}\begin{bmatrix} \Sigma \\ \Sigma \end{bmatrix}\right)$$

$$= r\begin{bmatrix} [X, \Sigma E_X] & 0 & \Sigma \\ 0 & -[XF_A, \Sigma E_{XF_A}] & \Sigma \\ [K.0] & [KF_A, 0] & 0 \end{bmatrix} - r[X, \Sigma E_X] - r[XF_A, \Sigma E_{XF_A}]$$

$$= r\begin{bmatrix} X & \Sigma E_X & -XF_A & 0 & \Sigma \\ 0 & 0 & -XF_A & -\Sigma E_{XF_A} & \Sigma \\ K & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - r[X, \Sigma\,] - r[XF_A, \Sigma]$$

$$= r\begin{bmatrix} X & \Sigma E_X & 0 & \Sigma E_{XF_A} & 0 \\ 0 & 0 & -XF_A & 0 & \Sigma \\ K & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - r\,[X, \Sigma\,] - r[XF_A, \Sigma]$$

$$= r\begin{bmatrix} X & \Sigma E_{XF_A} \\ K & 0 \end{bmatrix} - r\,[X, \Sigma\,]$$

$$= r\begin{bmatrix} X' & K' & 0 \\ \Sigma & 0 & XF_A \end{bmatrix} - r\,(XF_A) - r\,[X, \Sigma\,]$$

$$= r\begin{bmatrix} 0 & X' & K' \\ X & \Sigma & 0 \\ A & 0 & 0 \end{bmatrix} - r\begin{bmatrix} X \\ A \end{bmatrix} - r[X, \Sigma\ ]$$

elde edilir. Eşitliklerin sağ tarafları sıfıra eşitlenirse (a) ve (b) nin denk olacağı kolayca görülmüş olur.

Teorem 3.2.6 $OLSE_{\mathcal{M}_r}(K\beta)$ ve $BLUE_{\mathcal{M}_r}(K\beta)$tahmin edicileri (3.92) ve (3.96) da verildikleri gibi olsun ve $K\beta$ nın (3.84) altında tahmin edilebilir olduğunu varsayalım. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktir

(a) $OLSE_{\mathcal{M}_r}(K\beta) = BLUE_{\mathcal{M}_r}(K\beta)$ eşitliği 1 olasılıkla sağlanır.

(b) $r\begin{bmatrix} \Sigma X F_A & 0 & X\,F_A \\ F_A X' X F_A & F_A K' & 0 \end{bmatrix} = 2r(XF_A)$

(c) $r\begin{bmatrix} X'X & 0 & K' & A' \\ \Sigma X & X & 0 & 0 \\ A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 & 0 \end{bmatrix} = 2r\begin{bmatrix} X \\ A \end{bmatrix} + r(A).$

(d) $XF_A U_1 + U_2[F_A X' X F_A, F_A K'] = [\Sigma X F_A, 0]$ matris denklemi U_1 ve U_2 için çözülebilir.

İspat: $OLSE_{\mathcal{M}_r}(K\beta)$ ve $BLUE_{\mathcal{M}_r}(K\beta)$ tahmin edicileri $K\beta$ için yansız olduğundan, Lemma 3.2.4 den kolayca görülür ki $OLSE_{\mathcal{M}_r}(K\beta) = BLUE_{\mathcal{M}_r}(K\beta)$ eşitliğinin 1 olasılıkla sağlanması için gerek ve yeter şart $K_A X_A{}^{+}\Sigma = [K_A, 0][\,X_A, \Sigma E_{X_A}]^{+}\Sigma$ olmasıdır. (3.85) uygulanarak gerekli işlemler yapılırsa

$$r(K_A X_A{}^{+}\Sigma - [K_A, 0][\,X_A, \Sigma E_{X_A}]^{+}\Sigma)$$

$$= r(KF_A(F_A X' X F_A)^{+}(XF_A)'\Sigma - [KF_A, 0][\,XF_A, \Sigma E_{X_A}]^{+}\Sigma)$$

$$= r\left([\,KF_A, [\,KF_A, 0]]\begin{bmatrix} F_A X' X F_A & 0 \\ 0 & -[\,XF_A, \Sigma E_{X_A}] \end{bmatrix}^{+}\begin{bmatrix} (XF_A)'\Sigma \\ \Sigma \end{bmatrix}\right)$$

$$= r\begin{bmatrix} F_A X' X F_A & 0 & F_A X'\Sigma \\ 0 & -[\,XF_A, \Sigma E_{X_A}] & \Sigma \\ KF_A & [\,KF_A, 0] & 0 \end{bmatrix} - r\,(XF_A) - r\,[\,XF_A, \Sigma E_{X_A}]$$

$$= r\begin{bmatrix} \Sigma X F_A & XF_A & 0 \\ F_A X' X F_A & 0 & F_A K \end{bmatrix} - 2r\,(XF_A)$$

$$= r\begin{bmatrix} \sum X & X & 0 & 0 \\ X'X & 0 & K' & A \\ A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 & 0 \end{bmatrix} - 2r\begin{bmatrix} X \\ A \end{bmatrix} - r\,(\mathrm{A})$$

elde edilir. Eşitliklerin sağ tarafları sıfıra eşitlenirse (a), (b) ve (c) nin denkliği elde edilir. (b) ve (d) nin denkliği ise Lemma 3.2.3 den kolayca görülebilir.

Lemma 3.2.4-Lemma 3.2.6 dikkate alınırsa (3.83) ve (3.84) deki $X\beta$ ortalama vektörünün OLSE ve BLUE tahin edicilerinin

$$OLSE_{\mathcal{M}}(X\beta) = P_X y, \tag{3.100}$$

$$OLSE_{\mathcal{M}_r}(X\beta) = E_{XF_A}{}^{+}\,\mathrm{b} + P_{XF_A}y, \tag{3.101}$$

$$BLUE_{\mathcal{M}}(X\beta) = P_{X;\Sigma}y, \tag{3.102}$$

$$BLUE_{\mathcal{M}_r}(X\beta) = (I_n - P_{XF_A;\Sigma})XA^{+}b + P_{XF_A;\Sigma}y, \tag{3.103}$$

şeklinde olacağı görülmektedir. Burada U_1 ve $U_2 \in \mathbb{R}^{nxn}$ keyfi olmak üzere

$$P_{X;\Sigma} = [X,0][X,\Sigma E_X]^{+} + U_1 E_{[X,\Sigma]}$$

ve

$$P_{XF_A;\Sigma} = [XF_A,0][XF_A,\Sigma E_X F_A]^{+} + U_2 E_{[XF_A\Sigma]},$$

dir. Bu durumda, (3.100) - (3.103) de verilen OLSE ve BLUE tahmin edicilerinin denkliği için gerek ve yeter şartlar verilebilir.

Teorem 3.2.7 $OLSE_{\mathcal{M}}(X\beta)$ ve $BLUE_{\mathcal{M}}(X\beta)$ tahmin edicileri (3.100) ve (3.102) de verildikleri gibi olsunlar. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktir:

(a) $OLSE_{\mathcal{M}}(X\beta) = BLUE_{\mathcal{M}}(X\beta)$ eşitliği 1 olasılıkla sağlanır. $\mathcal{R}(\sum X) \subseteq \mathcal{R}(X)$

(b) $P_X\Sigma = \Sigma P_X$,

(c) Σ kovaryans matrisi $\Sigma = XU_1U_1'X' + E_X U_2 U_2' E_X$, şeklinde ayrıştırılabilir, burada $U_1 \in \mathcal{R}^{pxp_1}$ ve $U_2 \in \mathcal{R}^{nxn_1}$ dir.

$OLSE_{\mathcal{M}}(X\beta)$ ve $BLUE_{\mathcal{M}}(X\beta)$ arasındaki ilişkiler özellikle $OLSE_{\mathcal{M}}(X\beta) = BLUE_{\mathcal{M}}(X\beta)$ eşitliği etraflıca incelenmiştir. Eşitliğin sağlanması için pek çok gerek ve yeter şart literatürde verilmiştir, bkz. Amemiya (1985, p.182), Isotalo ve Puntanen (2009), Kruskal (1968), Kurata (1998), Puntanen ve Styan (1989), Zyskind (1967) ve diğerleri. Kovaryans matrisinin $\Sigma = XU_1U_1'X' + E_X U_2 U_2' E_X$ formunda olduğu durumda genel lineer model altında OLSE ve BLUE tahmin edicilerin denkliği literatürde Rao kovaryans inşaası olarak adlandırılır.

Ayrıca aşağıdaki sonuçlar Teorem 3.2.2 - Teorem 3.2.6 dan türetilebilir.

Teorem 3.2.8 $OLSE_{\mathcal{M}}(X\beta)$ ve $OLSE_{\mathcal{M}_r}(X\beta)$ tahmin edicileri (3.100) ve (3.101) de verildikleri gibi olsunlar. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktir

(a) $OLSE_{\mathcal{M}}(X\beta)$ = $OLSE_{\mathcal{M}_r}(X\beta)$ eşitliği 1 olasılıkla sağlanır.

(b) $\Re\begin{bmatrix} X'\Sigma \\ 0 \end{bmatrix} \subseteq \Re\begin{bmatrix} X'X \\ A \end{bmatrix}$.

(c) $\Re(X'\Sigma) \subseteq \Re(X'XF_A)$.

(d) $E_{X'XF_A}X'\Sigma = 0$.

(e) Σ kovaryans matrisi $\Sigma = F_G VV'F_G$ şeklinde ayrıştırılabilir, burada $G = E_{X'XF_A}X'$ ve $V \in \mathcal{R}^{nxn_1}$ dir.

Teorem 3.2.9 $OLSE_{\mathcal{M}}(X\beta)$ ve $BLUE_{\mathcal{M}_r}(X\beta)$ tahmin edicileri (100) ve (103) de verildikleri gibi olsunlar. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktir:

(a) $OLSE_{\mathcal{M}}(X\beta) = BLUE_{\mathcal{M}_r}(X\beta)$ eşitliği 1 olasılıkla sağlanır.

(b) $\Re\begin{bmatrix} X\Sigma \\ 0 \end{bmatrix} \subseteq \Re\begin{bmatrix} X \\ A \end{bmatrix}$.

(c) $\Re(X\Sigma) \subseteq \Re(XF_A)$.

(d) $E_{XF_A}\Sigma X = 0$.

Teorem 3.2.10 $OLSE_{\mathcal{M}_r}(X\beta)$ ve $BLUE_{\mathcal{M}}(X\beta)$ tahmin edicileri (3.101) ve (3.102) de verildikleri gibi olsunlar. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktir:

(a) $OLSE_{\mathcal{M}_r}(X\beta) = BLUE_{\mathcal{M}}(X\beta)$ eşitliği 1 olasılıkla sağlanır.

(b) $r\begin{bmatrix} X & \Sigma \\ A & 0 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} X \\ A \end{bmatrix} + r\,[\,X, \Sigma] - r\,(X)$ ve $r\begin{bmatrix} \Sigma X & X \\ A & 0 \end{bmatrix} = r\,(X) + r\,(A)$.

(c) $r(E_{XF_A}\Sigma) = r\,(E_X\Sigma)$ ve $E_X\Sigma\, XF_A = 0$.

Teorem 3.2.11 $OLSE_{\mathcal{M}_r}(X\beta)$ ve $BLUE_{\mathcal{M}_r}(X\beta)$ tahmin edicileri (3.101) ve (3.103) de verildikleri gibi olsunlar. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktir:

(a) $OLSE_{\mathcal{M}_r}(X\beta) = BLUE_{\mathcal{M}_r}(X\beta)$ eşitliği 1 olasılıkla sağlanır.

(b) $\Re(\Sigma XF_A) \subseteq \Re(XF_A)$.

(c) $r\begin{bmatrix} \Sigma X & X \\ 0 & A \\ A & 0 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} X \\ A \end{bmatrix} + r(A)$.

(d) $\Sigma XF_A = XF_A\Sigma$.

(e) $\sum$ kovaryans matrisi $\sum = XF_A U_1 U_1{}' F_A X' + E_{XF_A} U_2 U_2{}' E_{XF_A}$, şeklinde ayrıştırılabilir, burada $U_1 \in \mathcal{R}^{pxp_1}$ ve $U_2 \in \mathcal{R}^{nxn_1}$ dir.

Teorem 3.2.12 $BLUE_{\mathcal{M}}(X\beta)$ ve $BLUE_{\mathcal{M}_r}(X\beta)$ tahmin edicileri (3.102) ve (3.103) de verildikleri gibi olsunlar bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktir:

(a) $BLUE_{\mathcal{M}}(X\beta) = BLUE_{\mathcal{M}_r}(X\beta)$ eşitliği 1 olasılıkla sağlanır.

(b) $r\begin{bmatrix} X & \sum \\ A & 0 \end{bmatrix}$ = r $\begin{bmatrix} X \\ A \end{bmatrix}$ + r $[X, \sum]$ – r(X).

(c) r($E_{XF_A}\sum$) = r ($E_X\sum$).

$BLUE_{\mathcal{M}}(X\beta)$ ve $BLUE_{\mathcal{M}_r}(X\beta)$ tahmin edicileri arasındaki ilişkiler bazı araştırmacılar tarafından çalışılmıştır, bkz. Baksalary ve Kala(1979), Hallum ve Ark.(1973), Mathew (1983), Yang ve Ark.(1987). Mathew(1983) çalışmasında $BLUE_{\mathcal{M}}(X\beta)$= $BLUE_{\mathcal{M}_r}(X\beta)$ eşitliğinin 1 olasılıkla sağlanması için gerek ve yeter şartın $\Re(\sum) \cap \Re(X) \subseteq \Re[X(I_n - A^+A)]$ olduğunu göstermiştir.

Sonuç 3.2.1 $OLSE_{\mathcal{M}}(X\beta)$, $OLSE_{\mathcal{M}_r}(X\beta)$, $BLUE_{\mathcal{M}}(X\beta)$ ve $BLUE_{\mathcal{M}_r}(X\beta)$ tahmin edicileri (3.100) - (3.103) de verildikleri gibi olsunlar ve $\Re(X') \cap \Re(A') = 0$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler gerçeklenir:

(a) $OLSE_{\mathcal{M}}(X\beta) = OLSE_{\mathcal{M}_r}(X\beta)$ eşitliği sağlanır.,

(b) $BLUE_{\mathcal{M}}(X\beta) = BLUE_{\mathcal{M}_r}(X\beta)$ eşitliği sağlanır.

Sonuç 3.2.2 $OLSE_{\mathcal{M}}(X\beta)$, $OLSE_{\mathcal{M}_r}(X\beta)$, $BLUE_{\mathcal{M}}(X\beta)$ ve $BLUE_{\mathcal{M}_r}(X\beta)$ tahmin edicileri (3.100) - (3.103) de verildikleri gibi olsunlar ve $\Re(X) \subseteq \Re(\sum)$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler gerçeklenir:

(a) $OLSE_{\mathcal{M}}(X\beta)$=$OLSE_{\mathcal{M}_r}(X\beta)$ eşitliği 1 olasılıkla sağlanır $\Leftrightarrow$ $BLUE_{\mathcal{M}}(X\beta)$= $BLUE_{\mathcal{M}_r}(X\beta)$ eşitliği 1 olasılıkla sağlanır $\Leftrightarrow$ $\Re(X') \cap \Re(A') = \{0\}$,

(b) $OLSE_{\mathcal{M}_r}(X\beta)$= $BLUE_{\mathcal{M}}(X\beta)$ eşitliği 1 olasılıkla sağlanır $\Leftrightarrow$ $\Re(X') \cap \Re(A') = \{0\}$ ve $\Re(\sum X) \subseteq \Re(X)$.

Sonuç 3.2.3 $OLSE_{\mathcal{M}}(X\beta)$, $OLSE_{\mathcal{M}_r}(X\beta)$, $BLUE_{\mathcal{M}}(X\beta)$ ve $BLUE_{\mathcal{M}_r}(X\beta)$ tahmin edicileri (3.100) - (3.103) de verildikleri gibi olsunlar ve r(X) = p olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler gerçeklenir:

(a) $OLSE_{\mathcal{M}}(X\beta)$ = $OLSE_{\mathcal{M}_r}(X\beta)$ eşitliği 1 olasılıkla sağlanır⇔ $AX^+\sum$ = 0

(b) $OLSE_{\mathcal{M}}(X\beta)$ = $BLUE_{\mathcal{M}_r}(X\beta)$ eşitliği 1 olasılıkla sağlanır ⇔ $AX^+\sum$ = 0 and $\Re(\sum X) \subseteq \Re(X)$.

(c) $BLUE_{\mathcal{M}}(X\beta)$ = $BLUE_{\mathcal{M}_r}(X\beta)$ eşitliği 1 olasılıkla sağlanır ⇔ $\Re([A, 0]') \subseteq \Re([X, \sum]')$.

Şimdi de r(X) = p ve K = I_p olduğunu varsayalım. Bu takdirde (3.83) ve (3.84) modelleri altında β vektörünün OLSE ve BLUE tahmin edicileri

$$OLSE_{\mathcal{M}}(\beta) = X^+y, \tag{3.104}$$

$$OLSE_{\mathcal{M}_r}(\beta) = [A^+ - F_A(XF_A)^+XA^+]b + F_A(XF_A)^+y, \tag{3.105}$$

$$BLUE_{\mathcal{M}}(\beta) = P_{I_p;X;\sum}y, \tag{3.106}$$

$$BLUE_{\mathcal{M}_r}(\beta) = (I_p - P_{F_A;XF_A;\sum})XA^+b + P_{F_A;XF_A;\sum}y, \tag{3.107}$$

ile verilir, burada U_1 ve $U_2 \in \mathbb{R}^{pxn}$ keyfi olmak üzere

$$P_{I_p;X;\sum} = [I_p,0][X, \sum E_X]^+ + U_1E_{[X,\sum]},$$

$$P_{F_A;XF_A;\sum} = [F_A,0][XF_A, \sum E_{XF_A}]^+ + U_2E_{[XF_A,\sum]},$$

dir. Ayrıca r(X) = p ve r($\sum$) = n ise yukarıda verilen teoremlerden aşağıdaki sonuçlar türetilebilir.

Teorem 3.2.13 Let $OLSE_{\mathcal{M}}(\beta)$, $BLUE_{\mathcal{M}}(\beta)$, $OLSE_{\mathcal{M}_r}(\beta)$ ve $BLUE_{\mathcal{M}_r}(\beta)$ tahmin edicileri (3.104 – (3.107) de verildikleri gibi olsunlar. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler gerçeklenir:

(a) $OLSE_{\mathcal{M}}(\beta) = BLUE_{\mathcal{M}}(\beta) \Leftrightarrow \Re(\sum X) \subseteq \Re(X)$.

(b) $OLSE_{\mathcal{M}}(\beta) = OLSE_{\mathcal{M}_r}(\beta) \Leftrightarrow \Re(X') \cap \Re(A') = \{0\}$

(c) $OLSE_{\mathcal{M}}(\beta) = BLUE_{\mathcal{M}_r}(\beta) \Leftrightarrow \Re(\sum XF_A) \subseteq \Re(XF_A)$.

(d) $OLSE_{\mathcal{M}_r}(\beta) = BLUE_{\mathcal{M}}(\beta) \Leftrightarrow \Re(\sum XF_A) \subseteq \Re(XF_A)$.

(e) $BLUE_{\mathcal{M}}(\beta) = BLUE_{\mathcal{M}_r}(\beta) \Leftrightarrow A = 0$.

(f) $OLSE_{\mathcal{M}_r}(\beta) = BLUE_{\mathcal{M}_r}(\beta) \Leftrightarrow \Re(\sum XF_A) \subseteq \Re(XF_A)$.

3.3 Parçalı Lineer Model ve Kısıtlamalı Model altında Tahminlerin Ayrışımı

Bu kısımda $\mathcal{M} = \{y, X\beta, \sigma^2 V\} = \{y, X_1\beta_1 + X_2\beta_2, \sigma^2 V\}$ şeklindeki bir parçalı lineer model ve herhangi bir rank varsayımı olmaksızın kısıtlamalı model altındaki tahmin ediciler incelenerek bu iki modele göre $X_1\beta_1$ ve $X\beta$ parametrelerinin OLSE ve BLUE tahmin edicilerinin eşitliği için gerek ve yeter şartlar elde edilecektir. Bununla ilgili olarak

$$y = X\beta + \varepsilon = X_1\beta_1 + X_2\beta_2 + \varepsilon, \tag{3.108}$$

burada y $n \times 1$ tipinde gözlemlenebilir rasgele vektör, $X = (X_1, X_2)$ $n \times (p_1 + p_2)$, $p = p_1 + p_2$ bilinenler matrisi, $\beta = [\beta_1' \beta_2']'$ bilinmeyen parametre vektörü β_1 ve β_2 sırasıyla $p \times 1$ ve $q \times 1$ tipinde vektörler, ε $n \times 1$ rtipinde rasgele hata vektörüdür.

İstatistiksel uygulamada, (3.3.1) modelinin örneklem bilgisine ilaveten, β parametre vektörü üzerine

$$r = A\beta + e, \tag{3109}$$

şeklinde ilave bir kısıtlama konulmuş olsun, burada A $m \times p$ tipinde bilinen matris, e $m \times 1$ tipinde rasgele hata vektörü, r ise $m \times 1$ tipinde rasgele vektördür. $(y', r')'$ rasgele değişkenini beklene değeri ve kovaryans matrisi sırasıyla

$$E\begin{pmatrix} y \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ A \end{pmatrix}\beta \text{ ve } Cov\begin{pmatrix} y \\ r \end{pmatrix} = \sigma^2\begin{pmatrix} V & 0 \\ 0 & W \end{pmatrix} = \sigma^2\Sigma, \tag{3.110}$$

şeklinde olsun, burada $\sigma^2 > 0$ bilinmeyen bir parametre ve Σ ise bilinen non-negatif bir matristir. (3.3.1) deki genel lineer modeli

$$\mathcal{M} = \{y, X\beta, \sigma^2 V\} = \{y, X_1\beta_1 + X_2\beta_2, \sigma^2 V\}, \tag{3.111}$$

ile ve (3.109) kısıtlaması altındaki modeli de

$$\mathcal{M}_{s=} \left\{\begin{pmatrix} y \\ r \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X\beta \\ A\beta \end{pmatrix}, \sigma^2 \begin{matrix} V & 0 \\ 0 & W \end{matrix}\right\} \tag{3.112}$$

ile gösterelim.

Bu kısımda amacımız $\mathcal{M}$ ve $\mathcal{M}_s$ modelleri altında $X_1\beta_1$ nın OLSE ve BLUE tahmin edicileri ile $X\beta$ nın OLSE ve BLUE tahmin edicilerinin eşit olup olmaması durumları incelenecektir. Eğer özel olarak $W = 0$ alınırsa (3.108) den $r = A\beta$ kısıtlaması elde edilir. Bu nedenle burada biz sadece $W = 0$ özel durumu ile ilgileneceğiz.

Lemma 3.3.1 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{m\times k}$, $C \in \mathbb{R}^{l\times n}$ ve $D \in \mathbb{R}^{l\times k}$ olsun. Bu takdirde,

$$r(A, B) = r(A) + r(E_A B) = r(B) + r(E_B A).$$

$$r\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} = r(A) + r(CF_A) = r(C) + r(AF_C).$$

$$\mathrm{r}\begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix} = r(B) + r(C) + r(E_B A F_C).$$

$$r\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = r(A) + r(D - CA^{+}B), \text{eğer } \Re(B) \subseteq \Re(A) \text{ ve } \Re(C') \subseteq \Re(A').$$

ve özellikle,

$$r(A, B) = r(A) \Leftrightarrow \Re(B) \subseteq \Re(A), r\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} = r(A) \Leftrightarrow \Re(C') \subseteq \Re(A').$$

rank eşitlikleri sağlanır. $K \in \mathbb{R}^{l\times p}$ matrisi verilmiş olsun. Bu takdirde $K\beta$ nın

(i) (3.111) altında tahmin edilebilir olması için gerek ve yeter şart

$$\Re(K') \subseteq \Re(X'), \tag{3.113}$$

(ii) (3.112) altında tahmin edilebilir olması için gerek ve yeter şart

$$\Re(K') \subseteq \Re(X', A'), \tag{3.114}$$

olmasıdır. Bu durumda (3.113) ve (3.114) den kolayca görülür ki eğer $K\beta$ (3.111) altında tahmin edilebilirse (3.112) altında da tahmin edilebilir olacaktır. Öte yandan $X_1\beta_1 = (X_1, 0)\beta$ ve $X_2\beta_2 = (0, X_2)\beta$ olduğuna dikkat edelim. Bu nedenle

$$\begin{aligned} X_1\beta_1 \text{ tahmin edilebilir} \Leftrightarrow\ & X_2\beta_2 \text{ tahmin edilebilir} \\ & \Leftrightarrow \Re[(X_1, 0)'] \subseteq \Re(X'), \\ & \Leftrightarrow \Re[(0, X_2)'] \subseteq \Re(X'), \\ & \Leftrightarrow \Re[(X_1)] \cap \Re(X_2) = \{0\} \end{aligned}$$

olacaktır. Uygunluk olması bakımından

$$\hat{X}_1 = (X_1, 0),\ \hat{X}_2 = (0, X_2), \hat{X} = (X', A')',$$

$$\hat{y} = (y', r')',\ \hat{V} = \text{köş}(V, W) = (\hat{V}_1', \hat{W}')'.$$

yazalım.

Lemma 3.3.2 $K\beta$ parametresi $\mathcal{M}$ modeli altında tahmin edilebilir olsun. Bu takdirde

$$OLSE_{\mathcal{M}}(K\beta) = KX^{+}y. \tag{3.115}$$

ve

$$BLUE_{\mathcal{M}}(K\beta) = P_{K;X;V}y, \tag{3.116}$$

yazılabilir, burada $P_{K;X;V}$

$$P_{K;X;V}(X, VE_X) = (K, 0),$$

matris denkelmini çözümü olup $U \in \mathbb{R}^{l\times n}$ keyfi olmak üzere

$$P_{K;X;V} = (K, 0)(X, VE_X)^{+} + UE_{(X,VE_X)},$$

şeklindedir. Özel olarak eğer $X_1\beta_1$ ve $X_2\beta_2$ parametreleri $\mathcal{M}$ modeli altında tahmin edilebilir ise yani $\Re(X_1)\cap\Re(X_1) = \{0\}$ ise bu takdirde

$$OLSE_{\mathcal{M}}(X_i\beta_i) = \widehat{X}_\iota X^{+}y, \qquad i = 1,2, \tag{3.117}$$

$$BLUE_{\mathcal{M}}(X_i\beta_i) = P_{\widehat{X}_\iota;X;V}y, \qquad i = 1,2, \tag{3.118}$$

olacaktır, burada $P_{\widehat{X}_\iota;X;V} = (\widehat{X}_\iota, 0)(X, VE_X)^{+} + U_iE_{(X,VE_X)}$, olup $U_i \in \mathbb{R}^{l\times n}$,$i = 1,2$ keyfi verilmektedir.

$BLUE_{\mathcal{M}}(K\beta)$ için alışılmış iki gösterimin

$$BLUE_{\mathcal{M}}(K\beta) = KX^{+}y - KX^{+}VE_X(E_XVE_X)^{-}E_Xy,$$

$$BLUE_{\mathcal{M}}(K\beta) = K(X'T^{+}X)^{+}X'T^{+}y,$$

olduğunu hatırlayalım, burada T

$$T = V + XUX', \quad r(T) = r(V, X),$$

olacak şekilde keyfi bir matris ve U $p\times p$ tipinde keyfi bir matristir.

Lemma 3.3.3. $K\beta$ parametresi $\mathcal{M}_s$ modeli altında tahmin edilebilir olsun. Bu takdirde

(a) $K\beta$ nın $\mathcal{M}_s$ modeli altında OLSE ve BLUE tahmin edicileri sırasıyla,

$$OLSE_{\mathcal{M}_s}(K\beta) = K\hat{X}^{+}\hat{y}, \tag{3.119}$$

$$BLUE_{\mathcal{M}_s}(K\beta) = P_{K;\hat{X};\hat{V}}\hat{y}, \tag{3.120}$$

şeklinde olacaktır, burada $P_{K;\hat{X};\hat{V}} = (K, 0)\left(\hat{X}, \hat{V}E_{\hat{X}}\right)^{+} + FE_{(\hat{X},\hat{V}E_{\hat{X}})}$ olup $F \in \mathbb{R}^{l\times(n+m)}$ keyfi verilmiştir.

(b) Özel olarak eğer $X_1\beta_1$ ve $X_2\beta_2$ parametreleri $\mathcal{M}_s$ modeli altında tahmin edilebilir ise bu takdirde

$$OLSE_{\mathcal{M}_s}(X_i\beta_i) = \widehat{X}_\iota\hat{X}^{+}\hat{y}, \quad i = 1,2 \tag{3.121}$$

$$BLUE_{\mathcal{M}_s}(X_i\beta_i) = P_{\widehat{X}_\iota;\hat{X};\hat{V}}\hat{y}, \qquad i = 1,2 \tag{3.122}$$

şeklinde olacaktır, burada $P_{\widehat{X_i};\hat{X};\hat{V}} = (\widehat{X_i}, 0)(\hat{X}, \hat{V}E_{\hat{X}})^{+} + F_i E_{(\hat{X},\hat{V}E_{\hat{X}})}$ olup $F_i \in \mathbb{R}^{l\times(n+m)}$, $i = 1,2$ keyfi verilmiştir.

Bazı varsayımlar altında $\mathcal{M}_s$ modeli altında OLSE tahmin edicileri için çeşitli ifadelerin veridiğini daha önce ifade etmiştik. Örneğin $\mathfrak{R}(A') \subseteq \mathfrak{R}(X')$ varsayımı altında Sengupta ve Jammalamadaka (2003, p.280)

$$BLUE_{\mathcal{M}_s}(X\beta) = \hat{\beta} - Cov(\hat{\beta})(AX^{+})'[Cov\left(AX^{+}\hat{\beta}\right) + W]^{-}(AX^{+}\hat{\beta} - r),$$

burada

$$\hat{\beta} = BLUE_{\mathcal{M}}(X\beta) = [I_n - VE_X(E_XVE_X)^{-}E_X]y,$$

olduğunu ve Rao et Ark. (2008, p.253) ise V ve W nın pozitif definit ve X model matrisinin tam satır ranklı olması durumunda ,

$$BLUE_{\mathcal{M}_s}(\beta) = S^{-1}X'V^{-1}y + S^{-1}A'(W + AS^{-1}A')^{-1}\,(r - AS^{-1}X'V^{-1}y)$$

ve

$$Cov\left(BLUE_{\mathcal{M}_s}(\beta)\right) = (S + A'W^{-1}A)^{-1},$$

olduğunu ifade etmiştir, burada $S = X'V^{-1}X$ dir.

Şimdi $\mathcal{M}_s$ modelinin tutarlı olduğunu yani 1 olasılıkla

$$\hat{y} \in \ell(\hat{X}, \hat{V})$$

olduğunu varsayalım. Bu durumda aşağıda verilen eşitliklerin sağlanması için bazı gerek ve yeter şartlar türetilebilir:

(i) $BLUE_{\mathcal{M}}(X_1\beta_1) = BLUE_{\mathcal{M}_s}(X_1\beta_1)$.

(ii) $OLSE_{\mathcal{M}_s}(X_1\beta_1) = BLUE_{\mathcal{M}_s}(X_1\beta_1)$.

(iii) $OLSE_{\mathcal{M}}(X_1\beta_1) = BLUE_{\mathcal{M}_s}(X_1\beta_1)$.

(iv) $OLSE_{\mathcal{M}}(X_1\beta_1) = OLSE_{\mathcal{M}_s}(X_1\beta_1)$.

(v) $BLUE_{\mathcal{M}}(X_1\beta_1) = OLSE_{\mathcal{M}_s}(X_1\beta_1)$.

(vi) $BLUE_{\mathcal{M}}(X_1\beta_1) = OLSE_{\mathcal{M}}(X_1\beta_1)$

Teorem 3.3.1 $BLUE_{\mathcal{M}}(X_1\beta_1)$ ve $BLUE_{\mathcal{M}_s}(X_1\beta_1)$ tahmin edicileri (3.118) ve (3.122) de verildikleri gibi olsunlar ve $\mathfrak{R}(X_1) \cap \mathfrak{R}(X_2) = \{0\}$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktir:

(a) $BLUE_{\mathcal{M}}(X_1\beta_1) = BLUE_{\mathcal{M}_s}(X_1\beta_1)$ eşitliği 1 olasılıkla sağlanır.

(b) $r(\widehat{V_1}E_{\hat{X}}, X_2, VE_X) = r(X_2, VE_X)$ dir,

(c) $\ell(\widehat{V_1}E_{\hat{X}}) \subseteq \ell(X_2, VE_X)$ dir,

(d) $r\begin{pmatrix} \widehat{V_1} & X_2 \\ \hat{X}' & 0 \end{pmatrix} = r(X, V) + r(\hat{X}) - r(X_1)$ dir.

İspat: $BLUE_{\mathcal{M}}(X_1\beta_1)$ ve $BLUE_{\mathcal{M}_s}(X_1\beta_1)$ tahmin edicilerinin her ikisi de $\mathcal{M}_s$modeli altında $X_1\beta_1$ için yansız olduklarından $BLUE_{\mathcal{M}}(X_1\beta_1) = BLUE_{\mathcal{M}_s}(X_1\beta_1)$ eşitliğinin 1 olasılıkla sağlanması için gerek ve yeter şart

$$P_{\hat{X}_1;\widehat{X};\hat{V}}\hat{V} - (P_{\hat{X}_1;X;\hat{V}}, 0)\hat{V} = 0$$

yani

$$(\hat{X}_1, 0)(\hat{X}, \hat{V}E_{\hat{X}})^{+}\hat{V} - (\hat{X}_1, 0)(X, VE_X)^{+}\hat{V}_1 = 0$$

olmasıdır. Buradan gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$r\left[(\hat{X}_1, 0)(\hat{X}, \hat{V}E_{\hat{X}})^{+}\hat{V} - (\hat{X}_1, 0)(X, VE_X)^{+}\hat{V}_1\right]$$

$$= r\left[\left(\widehat{(X_1, 0)} - \widehat{(X_1, 0)}\right)\begin{pmatrix} \hat{X} & \hat{V}E_{\hat{X}} & 0 & 0 \\ 0 & X & 0 & VE_X \end{pmatrix}^{+}\begin{pmatrix} \hat{V} \\ \hat{V}_1 \end{pmatrix}\right]$$

$$= r\begin{pmatrix} \hat{X} & \hat{V}E_{\hat{X}} & 0 & 0 & \hat{V} \\ 0 & 0 & X & VE_X & \hat{V}_1 \\ \hat{X}_1 & 0 - \hat{X}_1 & 0 & 0 & \end{pmatrix} - r(\hat{X}, \hat{V}) - r(X, VE_X)$$

$$= r\begin{pmatrix} \hat{X} & \hat{V}E_{\hat{X}} & \hat{X} & 0 & \hat{V} \\ 0 & 0 & X & VE_X & \hat{V}_1 \\ \hat{X}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - r(\hat{X}, \hat{V}) - r(X, VE_X)$$

$$= r\begin{pmatrix} \hat{X} & 0 & \hat{X} & 0 & \hat{V} \\ X & \hat{V}_1E_{\hat{X}} & 0 & VE_X & 0 \\ \hat{X}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - r(\hat{X}, \hat{V}) - r(X, VE_X)$$

$$= r(X_2, \hat{V}_1E_{\hat{X}}, VE_X) - r(X, VE_X) + r(X_1)$$

$$= r(\hat{V}_1E_{\hat{X}}, X_2, VE_X) - r(X_2, VE_X) \quad (by\ \ell(X_1) \cap \ell(X_2) = \{0\})$$

$$= r\begin{pmatrix} \hat{V}_1 & X_2 & V \\ \hat{X}' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & X' \end{pmatrix} - r(X, VE_X) - r(\hat{X}) - r(X_2)$$

$$= r\begin{pmatrix} \hat{V}_1 & X_2 & 0 \\ \hat{X}' & 0 & -X' \\ 0 & 0 & X' \end{pmatrix} - r(X, VE_X) - r(\hat{X}) - r(X_2)$$

$$= r\begin{pmatrix} \hat{V}_1 & X_2 \\ \hat{X}' & 0 \end{pmatrix} - r(X, V) - r(\hat{X}) + r(X_1)$$

olduğu görülür. Eşitliklerin sağ tarafları sıfıra eşitlenerek (a), (b), (c) ve (d) nni denk olduğu görülür.

Teorem 3.3.2 $OLSE_{\mathcal{M}}(X_1\beta_1)$ ve $BLUE_{\mathcal{M}_s}(X_1\beta_1)$ tahmin edicileri (3.117) ve (3.122) de verildikleri gibi olsunlar ve $\Re(X_1) \cap \Re(X_2) = \{0\}$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktir:

(a) $OLSE_{\mathcal{M}}(X_1\beta_1) = BLUE_{\mathcal{M}_s}(X_1\beta_1)$ eşitliği 1 olasılıkla sağlanır.

(b) $\hat{X}_1 X^+ \hat{V}_1 E_{\hat{X}} = 0$ dir.

İspat: $OLSE_{\mathcal{M}}(X_1\beta_1)$ ve $BLUE_{\mathcal{M}_S}(X_1\beta_1)$ tahmin edicilerinin her ikisi de $\mathcal{M}_s$modeli altında $X_1\beta_1$ için yansız olduklarından $BLUE_{\mathcal{M}_S}(X_1\beta_1) = OLSE_{\mathcal{M}}(X_1\beta_1)$ eşitliğinin 1 olasılıkla sağlanması için gerek ve yeter şart

$$P_{\hat{X}_1;\hat{X};\hat{V}}\hat{V} - (\hat{X}_1 X^+, 0)\hat{V} = 0,$$

yani

$$(\hat{X}_1, 0)(\hat{X}, \hat{V}E_{\hat{X}})^+\hat{V} - \hat{X}_1 X^+ \hat{V}_1 = 0$$

olmasıdır. Buradan gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$r\left[(\hat{X}_1, 0)(\hat{X}, \hat{V}E_{\hat{X}})^+\hat{V} - \hat{X}_1 X^+ \hat{V}_1\right]$$

$$= r\left[(\hat{X}_1, 0)(\hat{X}, \hat{V}E_{\hat{X}})^+\hat{V} - \hat{X}_1 (X'X)^+ X'\hat{V}_1\right]$$

$$= r\left[\left((\hat{X}_1, 0), -\hat{X}_1\right)\begin{pmatrix} \hat{X} & \hat{V}E_{\hat{X}} & 0 \\ 0 & 0 & X'X \end{pmatrix}^+ \begin{pmatrix} \hat{V} \\ X'\hat{V}_1 \end{pmatrix}\right]$$

$$= r\begin{pmatrix} \hat{X} & \hat{V}E_{\hat{X}} & 0 & \hat{V} \\ 0 & 0 & X'X & X'\hat{V}_1 \\ \hat{X}_1 & 0 & -\hat{X}_1 & 0 \end{pmatrix} - r(\hat{X}, \hat{V}) - r(X)$$

$$= r\begin{pmatrix} \hat{X} & \hat{V}E_{\hat{X}} & \hat{X} & \hat{V} \\ 0 & 0 & X'X & X'\hat{V}_1 \\ \hat{X}_1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - r(\hat{X}, \hat{V}) - r(X)$$

$$= r\begin{pmatrix} \hat{X} & \hat{V}E_{\hat{X}} & \hat{X} & \hat{V} \\ X'X & X'\hat{V}_1 & 0 & 0 \\ \hat{X}_1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - r(\hat{X}, \hat{V}) - r(X)$$

$$= r\begin{pmatrix} X'X & X'\hat{V}_1 E_{\hat{X}} \\ \hat{X}_1 & 0 \end{pmatrix} - r(X)$$

$$= r\begin{pmatrix} X'X & 0 \\ \hat{X}_1 & \hat{X}_1 X^+ \hat{V}_1 E_{\hat{X}} \end{pmatrix} - r(X)$$

$$= r\left(\hat{X}_1 X^+ \hat{V}_1 E_{\hat{X}}\right).$$

olduğu görülür. Eşitliklerin sağ tarafları sıfıra eşitlenerek (a) ve (b) nin denk olduğu görülür.

W matrisi (3.112) de içerildiğinden, Teorem 3.3.1 (a) ve Teorem 3.3.2 (a) daki gerek ve yeter şartların sadece X model matrisine bağlı olmayıp A katsayı matrisine, V kovaryans matrisine ve onların Moore-Penrose inverslerine de bağlı olduğuna dikkat edelim. Eğer $W = 0$, alınırsa bu takdirde (3.109) kısıtlaması bir tayin edilmiş kısıtlama olur. Bu durumda, farz edelim ki $BLUE_{\mathcal{M}_r}(X_1\beta_1)$ $X_1\beta_1$ parametresinin $r = A\beta$ kısıtlamasına göre $\mathcal{M}$ altındaki BLUE tahmin edicisi olsun. Bu takdirde yukarıdaki iki teoreme uygun olarak,

$$BLUE_{\mathcal{M}}(X_1\beta_1) = BLUE_{\mathcal{M}_s}(X_1\beta_1) \Leftrightarrow BLUE_{\mathcal{M}}(X_1\beta_1) = BLUE_{\mathcal{M}_r}(X_1\beta_1)$$

ve

$$OLSE_{\mathcal{M}}(X_1\beta_1) = BLUE_{\mathcal{M}_s}(X_1\beta_1) \Leftrightarrow OLSE_{\mathcal{M}}(X_1\beta_1) = BLUE_{\mathcal{M}_r}(X_1\beta_1)$$

yazılabilir.

Teorem 3.3.3 $OLSE_{\mathcal{M}_s}(X_1\beta_1)$ ve $BLUE_{\mathcal{M}_s}(X_1\beta_1)$ tahmin edicileri (3.117) ve (3.122) de verildikleri gibi olsunlar ve $\mathfrak{R}(X_1)\cap\mathfrak{R}(X_2) =\{0\}$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktir:

(a) $OLSE_{\mathcal{M}_s}(X_1\beta_1) = BLUE_{\mathcal{M}_s}(X_1\beta_1)$ eşitliği 1 olasılıkla sağlanır.

(b) $\hat{X}_1\hat{X}^+\hat{V}E_{\hat{X}} = 0$ dir.

İspat: $OLSE_{\mathcal{M}_s}(X_1\beta_1)$ ve $BLUE_{\mathcal{M}_s}(X_1\beta_1)$ tahmin edicilerinin her ikisi de $\mathcal{M}_s$modeli altında $X_1\beta_1$ için yansız olduklarından $OLSE_{\mathcal{M}_s}(X_1\beta_1) = BLUE_{\mathcal{M}_s}(X_1\beta_1)$ eşitliğinin 1 olasılıkla sağlanması için gerek ve yeter şart

$$(P_{\hat{X}_1;\hat{X};\hat{V}} - \hat{X}_1\hat{X}^+)\hat{V} = 0$$

olmasıdır. Buradan gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$r\left(P_{\hat{X}_1;\hat{X};\hat{V}}\hat{V} - \hat{X}_1\hat{X}^+\hat{V}\right) = r\left[\left(\hat{X}_1, 0\right)\left(\hat{X}, \hat{V}E_{\hat{X}}\right)^+\hat{V} - \hat{X}_1(\hat{X}'\hat{X})^+\hat{X}'\hat{V}\right]$$

$$= r\left[\left(\left(\hat{X}_1, 0\right) - \hat{X}_1\right)\begin{pmatrix} \hat{X} & \hat{V}E_{\hat{X}} & 0 \\ 0 & 0 & \hat{X}'\hat{X} \end{pmatrix}^+ \begin{pmatrix} \hat{V} \\ \hat{X}'\hat{V} \end{pmatrix}\right]$$

$$= r\begin{pmatrix} \hat{X} & \hat{V}E_{\hat{X}} & 0 & \hat{V} \\ 0 & 0 & \hat{X}'\hat{X} & \hat{X}'\hat{V} \\ \hat{X}_1 & 0 & -\hat{X}_1 & 0 \end{pmatrix} - r\left(\hat{X}, \hat{V}\right) - r(X)$$

$$= r\begin{pmatrix} \hat{X} & \hat{V}E_{\hat{X}} & \hat{X} & \hat{V} \\ 0 & 0 & \hat{X}'\hat{X} & \hat{X}'\hat{V} \\ \hat{X}_1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - r\left(\hat{X}, \hat{V}\right) - r(X)$$

$$= r\begin{pmatrix} \hat{X} & \hat{V}E_{\hat{X}} & \hat{X} & \hat{V} \\ \hat{X}'\hat{X} & \hat{X}'\hat{V}E_{\hat{X}} & 0 & 0 \\ \hat{X}_1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - r\left(\hat{X}, \hat{V}\right) - r(X)$$

$$= r\begin{pmatrix} \hat{X}'\hat{X} & \hat{X}'\hat{V}E_{\hat{X}} \\ \hat{X}_1 & 0 \end{pmatrix} - r\left(\hat{X}\right)$$

$$= r\begin{pmatrix} \hat{X}'\hat{X} & 0 \\ \hat{X}_1 & \hat{X}_1\hat{X}^+\hat{V}E_{\hat{X}} \end{pmatrix} - r\left(\hat{X}\right)$$

$$= r\left(\hat{X}_1\hat{X}^+\hat{V}E_{\hat{X}}\right).$$

olduğu görülür. Eşitliklerin sağ tarafları sıfıra eşitlenerek (a) ve (b) nin denk olduğu görülür.

Teorem 3.3.4 $OLSE_{\mathcal{M}}(X_1\beta_1)$ ve $OLSE_{\mathcal{M}_s}(X_1\beta_1)$ tahmin edicileri (3.117) ve (3.121) de verildikleri gibi olsunlar ve $\Re(X_1) \cap \Re(X_2) = \{0\}$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktir:

(a) $OLSE_{\mathcal{M}}(X_1\beta_1) = OLSE_{\mathcal{M}_s}(X_1\beta_1)$ eşitliği 1 olasılıkla sağlanır.

(b) $r\begin{pmatrix} \hat{X}'X & \hat{X}'\hat{V} & 0 \\ X'X & X'\hat{V} & X'X_2 \end{pmatrix}$.

(c) $r\,(\hat{V}_1 - X\hat{X}^+\hat{V}, X'X_2) = r(X_2)$.

(c) $\Re\left(\hat{V}_1 - X\hat{X}^+\hat{V}\right) \subseteq \Re(X_2, VE_X)$.

İspat: $OLSE_{\mathcal{M}}(X_1\beta_1)$ and $OLSE_{\mathcal{M}_s}(X_1\beta_1)$ tahmin edicilerinin her ikisi de $\mathcal{M}_s$modeli altında $X_1\beta_1$ için yansız olduklarından $OLSE_{\mathcal{M}_s}(X_1\beta_1) = OLSE_{\mathcal{M}}(X_1\beta_1)$ eşitliğinin 1 olasılıkla sağlanması için gerek ve yeter şart

$$\hat{X}_1\hat{X}^+\hat{V} - \left(\hat{X}_1\hat{X}^+, 0\right)\hat{V} = 0$$

yani

$$\hat{X}_1\hat{X}^+\hat{V} - \hat{X}_1\hat{X}^+\hat{V}_1 = 0$$

olmasıdır. Buradan gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$r\left(\hat{X}_1\hat{X}^+\hat{V} - \hat{X}_1\hat{X}^+\hat{V}_1\right) = r\left[\hat{X}_1(\hat{X}'\hat{X})^+\hat{X}'\hat{V} - \hat{X}_1(X'X)^+X'\hat{V}_1\right]$$

$$= r\left[(\hat{X}_1, -\hat{X}_1)\begin{pmatrix}\hat{X}'\hat{X} & 0\\ 0 & X'X\end{pmatrix}^+\begin{pmatrix}\hat{X}'\hat{V}\\ X'\hat{V}_1\end{pmatrix}\right]$$

$$= r\begin{pmatrix}\hat{X}'\hat{X} & 0 & \hat{X}'\hat{V}\\ 0 & X'X & X'\hat{V}_1\\ \hat{X}_1 & -\hat{X}_1 & 0\end{pmatrix} - r\left(\hat{X}\right) - r(X)$$

$$= r\begin{pmatrix}\hat{X}'\hat{X} & 0 & \hat{X}'\hat{V}\\ X'X & X'X & X'\hat{V}_1\\ 0 & -\hat{X}_1 & 0\end{pmatrix} - r\left(\hat{X}\right) - r(X)$$

$$= r\begin{pmatrix}\hat{X}'\hat{X} & \hat{X}'\hat{V} & 0\\ X'X & X'\hat{V}_1 & X'X_2\end{pmatrix} - r\left(\hat{X}\right) - r(X_2)$$

$$= r\begin{pmatrix}\hat{X}'\hat{X} & 0 & 0\\ 0 & X'\hat{V}_1 - X'X\hat{X}^+\hat{V} & X'X_2\end{pmatrix} - r\left(\hat{X}\right) - r(X_2)$$

$$= r(\ X'\hat{V}_1 - X'X\hat{X}^+\hat{V}, X'X_2)\ - \mathrm{r}(X_2)$$

$$= r(\ X'\hat{V}_1 - X'X\hat{X}^+\hat{V}, X'X_2)\ - r(X'X_2)$$

olduğu görülür. Eşitliklerin sağ tarafları sıfıra eşitlenerek (a), (b), (c) ve (d) nin denk olduğu görülür.

Teorem 3.3.5 $BLUE_{\mathcal{M}}(X_1\beta_1)$ ve $OLSE_{\mathcal{M}_s}(X_1\beta_1)$ tahmin edicileri (3.118) ve (3.121) de verildikleri gibi olsunlar ve $\Re(X_1)\cap\Re(X_2) =\{0\}$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktir:

(a) $BLUE_{\mathcal{M}}(X_1\beta_1) = OLSE_{\mathcal{M}_s}(X_1\beta_1)$ eşitliği 1 olasılıkla sağlanır.

(b) $r\begin{pmatrix} & \hat{X}'X & \hat{X}'\hat{V} & \\ & 0 & 0 & \\ X & \hat{V}_1 & X_2 & VE_X\end{pmatrix} = r(X,V) + r\left(\hat{X}\right) - r(X_1).$

(c) $r\left(\hat{V}_1 - X\hat{X}^+\hat{V}, X_2,\ VE_X\right) = r\ (X_2, VE_X).$

(d) $\ell(\hat{V}_1 - X\hat{X}^+\hat{V}) \subseteq \ell(X_2, VE_X)$.

İspat: $BLUE_{\mathcal{M}}(X_1\beta_1)$ ve $OLSE_{\mathcal{M}_s}(X_1\beta_1)$ tahmin edicilerinin her ikisi de $\mathcal{M}_s$ modeli altında $X_1\beta_1$ için yansız olduklarından $OLSE_{\mathcal{M}_s}(X_1\beta_1) = BLUE_{\mathcal{M}}(X_1\beta_1)$ eşitliğinin 1 olasılıkla sağlanması için gerek ve yeter

$$\hat{X}_1\hat{X}^+\hat{V} - (P_{\hat{X}_1;X;V}, 0)\hat{V} = 0$$

veya

$$\hat{X}_1\hat{X}^+\hat{V} - (\hat{X}_1, 0)(X, VE_X)^+\hat{V}_1 = 0$$

olmasıdır. Buradan gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$r[\hat{X}_1\hat{X}^+\hat{V} - (\hat{X}_1, 0)(X, VE_X)^+\hat{V}_1] = r\left[\hat{X}_1(\hat{X}'\hat{X})^+\hat{X}'\hat{V} - (\hat{X}_1, 0)(X, VE_X)^+\hat{V}_1\right]$$

$$= r\left[\left(\hat{X}_1, -(\hat{X}_1, 0)\right)\begin{pmatrix} \hat{X}'\hat{X} & 0 \\ 0 & X, VE_X \end{pmatrix}^+ \begin{pmatrix} \hat{X}'\hat{V} \\ \hat{V}_1 \end{pmatrix}\right]$$

$$= r\begin{pmatrix} \hat{X}'\hat{X} & 0 & 0 & \hat{X}'\hat{V} \\ 0 & X & VE_X & \hat{V}_1 \\ \hat{X}_1 & -\hat{X}_1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - r(X,\ VE_X) - r(\hat{X})$$

$$= r\begin{pmatrix} \hat{X}'\hat{X} & 0 & 0 & \hat{X}'\hat{V} \\ X & X & VE_X & \hat{V}_1 \\ 0 & -\hat{X}_1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - r(X, VE_X) - r(\hat{X})$$

$$= r\begin{pmatrix} \hat{X}'\hat{X} & \hat{X}'\hat{V} & 0 & 0 \\ X & \hat{V}_1 & X_2 & VE_X \end{pmatrix} - r(X, VE_X) - r(\hat{X}) + r(X_1)$$

$$= r\begin{pmatrix} \hat{X}'\hat{X} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \hat{V}_1 - X\hat{X}^+\hat{V} & X_2 & VE_X \end{pmatrix} - r(X, VE_X) - r(\hat{X}) + r(X_1)$$

$$= r(\hat{V}_1 - X\hat{X}^+\hat{V}, X_2, VE_X) - r(X, VE_X) + r(X_1)$$

$$= r(\hat{V}_1 - X\hat{X}^+\hat{V}, X_2, VE_X) - r(X_2, VE_X).$$

olduğu görülür. Eşitliklerin sağ tarafları sıfıra eşitlenerek (a), (b), (c) ve (d) nin denk olduğu görülür.

Teorem 3.3.6 $BLUE_{\mathcal{M}}(X_1\beta_1)$ ve $OLSE_{\mathcal{M}}(X_1\beta_1)$ tahmin edicileri (3.118) ve (3.117) de verildikleri gibi olsunlar ve $\Re(X_1) \cap \Re(X_2) = \{0\}$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktir:

(a) $BLUE_{\mathcal{M}}(X_1\beta_1) = OLSE_{\mathcal{M}}(X_1\beta_1)$ eşitliği 1 olasılıkla sağlanır.

(b) $r(X'X_2, X'VE_X) = r(X'X_2)$.

(c) $\ell(X'VE_X) \subseteq \ell(X'X_2)$.

İspat: $BLUE_{\mathcal{M}}(X_1\beta_1)$ ve $OLSE_{\mathcal{M}}(X_1\beta_1)$ tahmin edicilerinin her ikisi de $\mathcal{M}_s$ modeli altında $X_1\beta_1$ için yansız olduklarından $BLUE_{\mathcal{M}}(X_1\beta_1) = OLSE_{\mathcal{M}}(X_1\beta_1)$ eşitliğinin 1 olasılıkla sağlanması için gerek ve yeter

$$\left(P_{\hat{X}_1;X;V}, 0\right)\hat{V} - \left(\hat{X}_1X^+, 0\right)\hat{V} = 0,$$

yani

$$\left(\hat{X}_1, 0\right)(X, VE_X)^+V - \hat{X}_1X^+V = 0$$

olmasıdır. Buradan gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned}
&r\left[\left(\hat{X}_1, 0\right)(X, VE_X)^+V - \hat{X}_1\hat{X}^+V\right] \\
&= r\left[\left(\hat{X}_1, 0\right)(X, VE_X)^+V - \hat{X}_1(X'X)^+X'V\right] \\
&= r\left[\left(\left(\hat{X}_1, 0\right), \hat{X}_1\right)\begin{pmatrix}(X, VE_X) & 0 \\ 0 & -X'X\end{pmatrix}^+\begin{pmatrix}V \\ X'V\end{pmatrix}\right] \\
&= r\begin{pmatrix} X & VE_X & 0 & V \\ 0 & 0 & -X'X & X'V \\ \hat{X}_1 & 0 & \hat{X}_1 & 0 \end{pmatrix} - r(X, VE_X) - r(X) \\
&= r\begin{pmatrix} 0 & X_2 & VE_X & -X & V \\ 0 & 0 & 0 & -X'X & X'V \\ X_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - r(X, V) - r(X) \\
&= r\begin{pmatrix} X_2 & VE_X & -X & V \\ -X'X_2 & -X'VE_X & 0 & 0 \end{pmatrix} - r(X, V) - r(X) \\
&= r(X'X_2, X'VE_X) - r(X_2) \\
&= r(X'X_2, X'VE_X) - r(X'X_2) \left(by\; r(X'X_2) = r(X_2)\right)
\end{aligned}$$

olduğu görülür. Eşitliklerin sağ tarafları sıfıra eşitlenerek (a), (b) ve (c) nin denk olduğu görülür.

$BLUE_{\mathcal{M}}(X_1\beta_1) = OLSE_{\mathcal{M}}(X_1\beta_1)$ eşitliği değişik araştırmacılar tarafından da incelenmiştir, bkz. Chu ve Ark.(2004) ve Tian ve Zhang(2011). $X_1\beta_1 = (X_1, 0)\beta$ olduğunu belirtelim. Böylece, $X_1\beta_1$ gerçekte $K\beta$ parametrik fonksiyonlarının bir özel durumudur. $BLUE_{\mathcal{M}}(K\beta) = OLSE_{\mathcal{M}}(K\beta)$ eşitliği $Gro\beta$ ve Ark.(2001), Isotalo ve Puntanen(2009) ve Tian (2010) tarafından incelenmiştir.

Lemma 2.2-2.3 den kolayca görülebilir ki $\mathcal{M}$ ve $\mathcal{M}_s$ modelleri altında $X\beta$ nın OLSE ve BLUE tahmin edicileri

$$OLSE_{\mathcal{M}}(X\beta) = P_X y, \tag{3.123}$$

$$BLUE_{\mathcal{M}}(X\beta) = P_{X;V} y, \tag{3.124}$$

$$OLSE_{\mathcal{M}_s}(X\beta) = X\hat{X}^{+}\hat{y}, \tag{3.125}$$

$$BLUE_{\mathcal{M}_s}(X\beta) = P_{X;\hat{X};\hat{V}}\hat{y}, \tag{3.126}$$

olarak yazılabilir, burada $U_1 \in \mathbb{R}^{l\times n}, U_2 \in \mathbb{R}^{l\times(n+m)}$ keyfi olmak üzere

$$P_{X;V} = (X,0)(X,VE_X)^{+} + U_1 E_{(X,VE_X)},$$

$$P_{X;\hat{X};\hat{V}} = (X,0)\left(\hat{X},\hat{V}E_{\hat{X}}\right)^{+} + U_2 E_{(\hat{X},\hat{V}E_{\hat{X}})},$$

dir. Şimdi de (3.123) – (3.126) ifadelerinde verilen OLSE ve BLUE tahmin edicilerinin eşitliği için gerek ve yeter şartlar vereceğiz. Aşağıdaki teoremlerin ispatları Teorem 3.3.1-3.3.6 nın ispatlarına benzer şekilde yapılabilir.

Teorem 3.3.7 $OLSE_{\mathcal{M}}(X\beta)$ ve $BLUE_{\mathcal{M}}(X\beta)$ tahmin edicileri (3.123) ve (3.124) de verildikleri gibi olsunlar. Bu takdirde aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

(a) $OLSE_{\mathcal{M}}(X\beta) = BLUE_{\mathcal{M}}(X\beta)$ eşitliği 1 olasılıkla sağlanır.
(b) $\Re(VX) \subseteq \Re(X)$ dir.

$OLSE_{\mathcal{M}}(X\beta)$ ve $BLUE_{\mathcal{M}}(X\beta)$ arasındaki ilişkiler özellikle $OLSE_{\mathcal{M}}(X\beta) = BLUE_{\mathcal{M}}(X\beta)$ eşitliği detaylı bir şekilde incelenmiştir. Literatürde bu eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter şartlar Zyskind (1967), Puntanen ve Styan (1989) ve Tian (2010) tarafından verilmiştir.

Teorem 3.3.8 $OLSE_{\mathcal{M}}(X\beta)$ ve $OLSE_{\mathcal{M}_s}(X\beta)$ tahmin edicileri (3.123) ve (3.125) de verildikleri gibi olsunlar. Bu takdirde aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

(a) $OLSE_{\mathcal{M}}(X\beta) = OLSE_{\mathcal{M}_s}(X\beta)$ eşitliği 1 olasılıkla sağlanır.
(b) $r\begin{pmatrix} \hat{X}'\hat{X} & \hat{X}'\hat{V} \\ X'X & X'\hat{V}_1 \end{pmatrix} = r(\hat{X}')$.
(c) $X'\hat{V}_1 = X'X\hat{X}^{+}\hat{V}$.

Teorem 3.3.9 $OLSE_{\mathcal{M}}(X\beta)$ ve $BLUE_{\mathcal{M}_s}(X\beta)$ tahmin edicileri (3.123) ve (3.126) de verildikleri gibi olsunlar. Bu takdirde aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

(a) $OLSE_{\mathcal{M}}(X\beta) = BLUE_{\mathcal{M}_s}(X\beta)$ eşitliği 1 olasılıkla sağlanır.

(b) $r(\hat{V}_1 X, \hat{X}) = r(\hat{X})$

(c) $X'\hat{V}_1 E_{\hat{X}}$ =0

Teorem 3.3.10 $OLSE_{\mathcal{M}_s}(X\beta)$ ve $BLUE_{\mathcal{M}}(X\beta)$ tahmin edicileri (3.125) ve (3.124) de verildikleri gibi olsunlar. Bu takdirde aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

(a) $OLSE_{\mathcal{M}_s}(X\beta) = BLUE_{\mathcal{M}}(X\beta)$ eşitliği 1 olasılıkla sağlanır.

(b) $r\begin{pmatrix} \hat{X}'\hat{X} & \hat{X}'\hat{V} & 0 \\ X & \hat{V}_1 & \hat{V}E_X \end{pmatrix} = r(X, V) + r(\hat{X}) - r(X)$.

(c) $\Re(\hat{V}_1 - X\hat{X}^{+}\hat{V}) \subseteq \Re(VE_X)$.

Teorem 3.3.11 $OLSE_{\mathcal{M}_s}(X\beta)$ ve $BLUE_{\mathcal{M}_s}(X\beta)$ tahmin edicileri (3.125) ve (3.126) de verildikleri gibi olsunlar. Bu takdirde aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

(a) $OLSE_{\mathcal{M}_s}(X\beta) = BLUE_{\mathcal{M}_s}(X\beta)$ eşitliği 1 olasılıkla sağlanır.

(b) $r\begin{pmatrix} \hat{X}'\hat{X} & X' & 0 \\ \hat{V}\hat{X} & 0 & \hat{X} \end{pmatrix} = 2r(\hat{X})$

(c) $X\hat{X}^{+}\hat{V}E_{\hat{X}} = 0$.

Teorem 3.3.12 $BLUE_{\mathcal{M}}(X\beta)$ ve $BLUE_{\mathcal{M}_s}(X\beta)$ tahmin edicileri (3.124) ve (3.126) de verildikleri gibi olsunlar. Bu takdirde aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

(a) $BLUE_{\mathcal{M}}(X\beta) = BLUE_{\mathcal{M}_s}(X\beta)$ eşitliği 1 olasılıkla sağlanır.

(b) $r(\hat{X}\hat{V}_1) = r(X, V) + r(\hat{X}) - r(X)$.

(c) $\ell(\hat{V}_1 E_{\hat{X}}) = \ell(VE_X)$.

Sengupta ve Jammalamadaka (2003, p.375) çalışmalarında $r(\hat{X}, \hat{V}) = r(X, V) + r(\hat{X}) - r(X)$ eşitliğinin sağlanması halinde $BLUE_{\mathcal{M}}(X\beta) = BLUE_{\mathcal{M}_s}(X\beta)$ eşitliğinin 1 olasılıkla sağlandığını göstermişlerdir.

A, B ve C matrisleri verildiğinde aşağıdaki rank eşitsizliği daima sağlanır:

$$r\begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix} \geq r\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} + r(A, B) - r(A).$$

Bunun sonucu olarak

$$\begin{aligned} r(\hat{X}) + r(X, V) - r(X) &= r(\hat{X}, \hat{V}) \\ &\geq r(\hat{X}, \hat{V}_1') \geq r(\hat{X}) + r(X, V) - r(X), \end{aligned} \tag{4.7}$$

elde edilir ki bu da Teorem 3.3.12(b) nin sağlanması demektir. Böylece $r(\widehat{X},\widehat{V}) = r(X,V) + r(\widehat{X}) - r(X)$ rank şartı oldukça kuvvetli bir şarttır.

Benzer şekilde $\mathcal{M}$ ve $\mathcal{M}_s$ modelleri altında $X_2\beta_2$ parametrelerinin OLSE ve BLUE tahmin edicilerinin eşitliği için denk şartlar geliştirilebilir. Ayrıca aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 3.3.1 $OLSE_{\mathcal{M}}(X_i\beta_i)$, $BLUE_{\mathcal{M}}(X_i\beta_i)$, $OLSE_{\mathcal{M}_s}(X_i\beta_i)$ ve $BLUE_{\mathcal{M}_s}(X_i\beta_i)$ tahmin edicileri sırasıyla (3.117), (3.118), (3.121) ve (3.122) de verildikleri gibi ve $OLSE_{\mathcal{M}}(X\beta)$, $OLSE_{\mathcal{M}_s}(X\beta)$, $BLUE_{\mathcal{M}}(X\beta)$ ve $BLUE_{\mathcal{M}_s}(X\beta)$ tahmin edicileri ise sırasıyla (3.123)-(3.126) da verildikleri gibi olsunlar. Ayrıca $\mathfrak{R}(X_1) \cap \mathfrak{R}(X_2) = \{0\}$ olduğunu varsayalım. Bu takdirde:

(a) $OLSE_{\mathcal{M}}(X\beta) = BLUE_{\mathcal{M}}(X\beta) \Leftrightarrow OLSE_{\mathcal{M}}(X_i\beta_i) = BLUE_{\mathcal{M}}(X_i\beta_i),\ i = 1,2$

(b) $OLSE_{\mathcal{M}}(X\beta) = OLSE_{\mathcal{M}_s}(X\beta) \Leftrightarrow OLSE_{\mathcal{M}}(X_i\beta_i) = OLSE_{\mathcal{M}_s}(X_i\beta_i),\ i = 1,2$

(c) $OLSE_{\mathcal{M}}(X\beta) = BLUE_{\mathcal{M}_s}(X\beta) \Leftrightarrow OLSE_{\mathcal{M}}(X_i\beta_i) = BLUE_{\mathcal{M}_s}(X_i\beta_i),\ i = 1,2$

(d) $BLUE_{\mathcal{M}}(X\beta) = OLSE_{\mathcal{M}_s}(X\beta) \Leftrightarrow BLUE_{\mathcal{M}}(X_i\beta_i) = OLSE_{\mathcal{M}_s}(X_i\beta_i),\ i = 1,2$

(e) $OLSE_{\mathcal{M}_s}(X\beta) = BLUE_{\mathcal{M}_s}(X\beta) \Leftrightarrow OLSE_{\mathcal{M}_s}(X_i\beta_i) = BLUE_{\mathcal{M}_s}(X_i\beta_i),\ i = 1,2$

(f) $BLUE_{\mathcal{M}}(X\beta) = BLUE_{\mathcal{M}_s}(X\beta) \Leftrightarrow BLUE_{\mathcal{M}}(X_i\beta_i) = BLUE_{\mathcal{M}_s}(X_i\beta_i),\ i = 1,2$

ifadeleri gerçeklenir.

Örnek 3.3.1 Genel lineer model ve kısıtlamalı model altında $X\beta$ parametresinin BLUE tahmin edicilerinin eşitliği ile ilgili bir örnek olarak

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + e_{ij},\ \ i = 1, \ldots\ldots, a \quad j = 1, \ldots\ldots, n_i,$$

modelini göz önüne alalım, burada e_{ij} ler 0 ortalamalı ve $d_{ij}\sigma^2$ kovaryanslı ilişkisiz rasgele değişkenler olsun. Bu örnek için, $a = 2$, $n_1 = 2$, $n_2 = 2$ ve $d_{ij} = \sigma^2 = 1$ olduğunu varsayalım. Bu durumda verilen model

$$\mathcal{M} = \{y, X\beta, V\},$$

Gauss-Markov model olacaktır, burada $y = (y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22})'$, $Cov(y) = V = \mathrm{I}_4$, $\beta = (\mu, \alpha_1, \alpha_2)'$ ve

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}'$$

olacaktır. Bu modelde

$$r = A\beta + e,$$

kısıtlamasını gözönüne alalım, burada r 2×1 tipinde gözlemlenmiş değerler vektörü, β modeldeki ile aynı vektör, e ise 2×1 tipinde bir vektör olmak üzere

$$E(e) = 0, \quad Cov(e) = \mathrm{I}_2 = W \quad \text{ve} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

olsun. Bu durumda kolayca görülebilir ki

$$r(\hat{X}, \hat{V}_1') = 5 = r(\hat{X}) + r(X,V) - r(X)$$

ve

$$r(\hat{X}, \hat{V}) = 6 \neq 5 = r(\hat{X}) + r(X,V) - r(X).$$

olacaktır. Ayrıca $X^{\perp}$ ve $\hat{X}^{\perp}$ matrislerini

$$X^{\perp} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}' \text{ ve } \hat{X}^{\perp} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}'$$

olarak seçebiliriz. Farz edelim ki $X\beta$ nın $\mathcal{M}$ altındaki BLUE tahmin edicisi $G_1 y$ ve $X\beta$ nın $\mathcal{M}$ altındaki verilen kısıtlamalı BLUE tahmin edicisi ise $G_1 \hat{y}$ olsun. Bu durumda

$$G_1(X, VX^{\perp}) = (X, 0) \quad \text{ve} \quad G_2(\hat{X}, \hat{V}\hat{X}^{\perp}) = (X, 0)$$

olacaktır. Dolayısıyla

$$(G_1, 0)(\hat{X}, \hat{V}\hat{X}^{\perp}) = (X, 0)$$

ve buradan da

$$G_2(\hat{X}, \hat{V}\hat{X}^{\perp}) = (G_1, 0)(\hat{X}, \hat{V}\hat{X}^{\perp}),$$

yani

$$G_2(\hat{X}, \hat{V}) = (G_1, 0)(\hat{X}, \hat{V}),$$

yazılabilir ki buda

$$G_2 \hat{y} = (G_1, 0)\hat{y} = G_1 y$$

olduğunu gösterir.

4. SONUÇ ve ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında birinci bölümde önce Matris Cebirinin tarihsel gelişimi ve kullanım alanının yanında basit lineer regresyon modelinden kısaca söz edilmiştir. İkinci bölümde Matrisler ve Matris Uzayları ile ilgili temel bilgiler verilerek lineer regresyon modellerinin matris gösterimi üzerinde durulmuş olup kovaryans ve korelasyon kavramlarından kısaca söz edilmiştir. Tezin amacından fazla uzaklaşmamak adına bu bölümdeki teoremlerin ispatlarına fazla girilmemiştir. Üçüncü bölümde ise parçalı lineer regresyon modelleri ele alınarak bu modellerde alışılmış en küçük kareler tahmin edicileri(OLSE) ve en iyi lineer yansız tahmin ediciler(BLUE) etraflıca incelenmiştir. Parçalı lineer modellerde OLSE ve BLUE tahmin edicilerin çeşitli ayrışımları ve hangi şartlarda bu tahmin edicilerin denk olduğu konusu etraflıca tartışılmıştır. Ayrıca genel lineer model ve bu modelden elde edilen kısıtlamalı modeller altında OLSE ve BLUE tahmin edicilerin nasıl belirlenebileceği ve hangi şartlarda bunların denk olabilecekleri tartışılmıştır.

Yapılan çalışmalara ilaveten ağırlıklı en küçük kareler gibi daha değişik tahmin ediciler de incelenebilir. Regresyon modelinde varyans-kovaryan matrisinin singüler veya non-singüler olması durumlarına ve model matrisinin rank durumlarına göre bu tahmin ediciler için açık veya kapalı form gösterimler elde edilebileceği gibi bu tahmin edicilerin denklik şartları da incelenebilir. Lineer modellerin özellikle ekonometri, istatistik ve mühendislik alanlarına uygulanabilirliği araştırılabilir. Ayrıca genelleştirilmiş invers kavramları kullanılarak istatistikte parametrik fonksiyonların tahmin edilebilirliği ve tahmin edilebilir olması durumunda tahmin edicilerin yansızlığı, eşitliği, tekliği, ilave ayrışımları, ilişkisizliği, bağımsızlığı ve paralelliği gibi çeşitli konular da araştırılabilir.

Bu çalışmada parametreler üzerindeki kısıtlamanın sadece bir eşitlik kısıtlaması şeklinde olduğu durum ele alınmıştır. Oysa bazı durumlarda bu kısıtlamaların eşitsizlikler şeklinde düşünülmesi daha uygun olabilir.

5. KAYNAKLAR

Albert, A., 1973, The Gauss–Markov theorem for regression models with possibly singular covariances. SIAM J. Appl. Math., **24**, 182–187 s.

Baksalary, J.K., 1984, Comparing stochastically restricted estimators in a linear regression model. *Biom. J.* 26:555–557 s.

Baksalary, J.K. and Kala, R., 1979, Best linear unbiased estimation in the restricted general linear model. Math Operationsforsch Stat Ser Stat 10:27–35 s.

Baksalary, J.K. and Baksalary, O.M. 2004, Nonsigularity of Linear combinations of idempotent matrices, Linear Algebra and its applications, 388, 25-29 s.

Baksalary, O.M. Bernstein, D.S. and Trenkler, G., 2010, On the equality between rank and trace of an idempotent matrix, Applied Mathematics and Computation, 217, 4076-4080 s.

Ben-Israel, A., Charnes, A., 1963, Contributions to the theory of generalized inverses. SIAM J. Appl. Math., Vol. 11, 667-699 s.

Bhimasankaram, P. & Saharay, R., 1997, On a partitioned linear model and some associated reduced models. Linear Algebra Appl., **264**, 329–339 s.

Bjerhammer, A., 1958, A generalized matrix algebra, Kungl. Tekn. Hogsk. Handl. Stockholm. No. 124, 1-32 s.

Bott, R., Duffin, R. J., 1953, On the algebra of Networks. Trans. Amer. Math. Soc.. Vol. 74, 99-109 s.

Branson, R., 1999, Matris İşlemleri, Schaum Serisi. (Editor: H. Hilmi Hacısalihoğlu) Nobel Yayın Dağıtım, Ankara, 212 s.

Chu, K.L., Isotalo, J., Puntanen, S. & Styan, G.P.H., 2004, On decomposing the Watson efficiency of ordinary least squares in a partitioned weakly singular linear model. Sankhya Ser. A, **66**, 634–651 s.

Groß, J. & Puntanen, S., 2000, Estimations under a general partitioned linear model. Linear Algebra Appl., **321**, 131–144 s.

Groß, J. and Trenkler, G., 1998, On the equality linear statistics in General Markov model. In: Mukherjee SP, Basu SK, Sinha BK (eds) Frontiers of Statistics. Narosa Publishing House, New Delhi, pp 189–194.

Grob, J., Trenkler, G, 1999. Nonsingularity of the Difference of two Oblique Projektors, SIAM J.Matrix Anal. Appl. 21, 390-395 s.

Groß, J., Trenkler, G. and Werner, H.J., 2001, The equality of linear transformations of the ordinary least squares estimator and the best linear unbiased estimator. Sankhy¯a Ser A 63:118–127 s.

Hacısalihoğlu H.H., 1977. *Lineer Cebir*. Matbaa Teknisyenleri Koll. Şti., İstanbul, 716 s.

Hallum, C.R, Lewis, T.O. and Boullion, T.L., 1973, Estimation in the restricted general linear model with a positive semidefinite covariance matrix. Comm. Stat. 1:157–166 s.

Haslett, S., Puntanen, S., 2010, Equality of BLUEs or BLUPs under two linear models using stochastic restrictions. *Stat. Pap.* 51:465–475 s.

Isotalo, J. and Puntanen, S., 2009, A note on the equality of the OLSE and the BLUE of the parametric functions in the general Gauss-Markov model. Stat Papers 50:185–193 s.

Koliha, J.J. and Rakocevic, V. 2002. Invertibility of the sum of idempotents, Linear and Multilinear Algebra 50, 285–292 s.

Koliha, J.J. and Rakocevic, V., 2003. Invertibility of the difference of idempotents, Linear and Multilinear Algebra 51, 97–110 s.

Koliha, J.J., Rakocevic, V. and Staskraba, I., 2004. The difference and sum of projectors, Linear Algebra and its applications, 388, 279-288 s.

Lancaster, P., 1969. Theory of matrices, Academic Pres, New York, 570 s.

Maden, S. ve Korkmaz, M., 2018, Temel bilimler için İstatistik, Seçkin Yayıncılık, Ankara 512 s.

Marsaglia, G. and Styan, G.P.H., 1974. Equalities and inequalities for ranks of matrices, Linear and Multilinear Algebra 2, 269–292 s.

Mathew, T., 1983, A note on best linear unbiased estimation in the restricted general linear model. Statistics 14:3–6 s.

Mitra, S. K., Rao, C. R., 1968. A note on a previous lemma in the theory of least squares and some further results. Sankhya Ser. A. Vol. 30, 245-252 s.

Moore, E. H., 1920, On the reciprocal of the general algebraic matrix (abstract), Bull. Amer. Math. Soc., Vol. 26, 394-395 s.

Nurhonen, M.&Puntanen, S., 1992, Aproperty of partitioned generalized regression. Comm. Statist. Theory Methods, **21**, 1579–1583 s.

Penrose, R., 1955, A generalized inverse for matrices, Proc. Cambridge Philos. Soc., Vol. 51, 406-413 s.

Penrose, R., 1956. On best approximate solutions of linear matrix equations, Proc. Cambridge Philos. Soc., Vol. 52, 17-19 s.

Puntanen. S. and Styan, G.P.H., 1989, The equality of the ordinary least squares estimator and the best linear unbiased estimator.With comments by Kempthorne O, Searle SR, and a reply by the authors. Am. Stat. 43:153–164 s.

Puntanen, S., Styan, G.P.H. & Tian, Y., 2005, Three rank formulas associated with the covariance matrices of the BLUE and the OLSE in the general linear model. Econ. Theory, **21**, 659–664 s.

Rao, R. C., 1965, Linear Statistical Inference and its Applications, New York, Wiley.

Rao, C.R., 1971, Unified theory of linear estimation. Sankhya Ser. A, **33**, 371–394 s.

Rao, C.R., 1973. Representations of best linear unbiased estimators in the Gauss–Markoff model with a singular dispersion matrix. J. Multivariate Anal., **3**, 276–292 s.

Rao, C.R. & Yanai, H., 1979, General definition and decomposition of projectors and some applications to statistical problems. J. Statist. Plann. Inference, **3**, 1–17 s.

Seber, G.A.F., 2008, A matrix handbook for statisticians. Wiley, New York.

Sengupta, D., Jammalamadaka, S.R., 2003, *Linear Models: An Integrated Approach*. Singapore: World Scientific Publishing Company.

Shalabh, T. H., 2005, Estimation of linear regression models with missing data: the role of stochastic linear constraints. *Commun. Stat. Theor. Meth.* 34:375–378 s.

Tian, Y., 2007, Some decompositions of OLSEs and BLUEs under a partitioned linear model. *Inter. Stat. Rev.* 75:224–248 s.

Tian, Y., Beisiegel, M., Dagenais, E. and Haines, C., 2008, On the natural restrictions in the singular Gauss-Markov model. *Stat. Pap.* 49:553–564 s.

Tian, Y. and Styan, G.P.H. 2001. Some rank equalities for idempotent and involutory matrices, Linear Algebra Appl. 335, 101–117 s.

Tian, Y. and Styan, G.P.H. 2002. A new rank formula for idempotent matrices with applications, Comment. Math. Univ. Carolin. 43, 379–384 s.

Tian, Y., 2004, More on maximal and minimal ranks of Schur complements with applications. Appl. Math. Comput., **152**, 675–692 s.

Tian, Y., 2010, On equalities of estimations of parametric functions under a general linear model and its restricted models. *Metrika* 72:313–330 s.

Tian, Y.& Styan, G.P.H., 2005, Cochran's statistical theorem for outer inverses of matrices and matrix quadratic forms. Linear and Multilinear Algebra, **53**, 387–392 s.

Tian, Y. & Styan, G.P.H., 2006, Cochran's statistical theorem revisited. J. Statist. Plann. Inference, **136**, 2659–2667 s.

Tian, Y. & Wiens, D.P., 2006, On equality and proportionality of ordinary least squares, weighted least squares and best linear unbiased estimators in the general linear model. Statist. Probab. Lett., **76**, 1265–1272 s.

Tian, Y. and Zhang, J.P., 2011, Some equalities for estimations of partial coefficients under a general linear regression model. *Stat. Pap.* 52:911–920 s.

Trenkler, G., 1993, A note on comparing stochastically restricted linear estimators in a regression model. *Biom. J.* 35:125–128 s.

Xu, J. andYang, H., 2007, Estimation in singular linearmodelswith stochastic linear restrictions.*Commun. Stat. Theor. Meth.* 36:1945–1951 s.

Werner, H.J. and Yapar, C. (1995). More on partitioned possibly restricted linear regression. *New Trends in Probability and Statistics*, Vol. 3: Multivariate Statistics and Matrices in Statistics. Proceedings of the 5th conference, Tartu, Estonia, May 23–28, 1994. Utrecht: VSP, pp. 57–66 s.

Werner, H.J. and Yapar, C. (1996). A BLUE decomposition in the general linear regression model. *Linear Algebra Appl.*, **237/238**, 395–404 s.

Yang, W.L., Cui, H.J. and Sun, G.W., 1987, On best linear unbiased estimation in the restricted general linear model. Statistics 18:17–20 s.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler	
Adı Soyadı	Mehtap AKÇİÇEK
Doğum Yeri	Diyarbakır
Doğum Tarihi	10.11.1996
Uyruğu	■ T.C. ❐ Diğer:
Telefon	0552 753 10 14
E-Posta Adresi	mehtapmakuloglu@gmail.com_

Eğitim Bilgileri	
Lisans	
Üniversite	Kafkas Üniversitesi
Fakülte	Fen Edebiyat Fakültesi
Bölümü	Matematik Bölümü
Mezuniyet Yılı	01.01.2015
Yüksek Lisans	
Üniversite	Ordu Üniversitesi
Enstitü Adı	Fen Bilimleri Enstitüsü
Anabilim Dalı	Matematik Anabilim Dalı
Programı	Program Adı
Mezuniyet Tarihi	
Doktora	
Üniversite	
Enstitü Adı	
Anabilim Dalı	
Programı	
Mezuniyet Tarihi	Tarih girmek için tıklayın veya dokunun.
Yayınlar	
…..	