ORDU ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İDEMPOTENT MATRİSLERİN LİNEER KOMBİNASYONLARI VE İZDÜŞÜMLER HAKKINDA BİR GENEL ÇALIŞMA

ABDURRAHMAN GÖZPINAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ORDU

İDEMPOTENT MATRİSLERİN LİNEER KOMBİNASYONLARI VE İZDÜŞÜMLER HAKKINDA BİR GENEL ÇALIŞMA

ABDURRAHMAN GÖZPINAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

T.C.
ORDU ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İDEMPOTENT MATRİSLERİN LİNEER KOMBİNASYONLARI VE İZDÜŞÜMLER HAKKINDA BİR GENEL ÇALIŞMA

ABDURRAHMAN GÖZPINAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

AKADEMİK DANIŞMAN
Yrd. Doç. Dr. Selahattin MADEN

Ordu-2011

T.C.

ORDU ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Bu çalışma jürimiz tarafından 10/02/2011 tarihinde yapılan sınav ile Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Yrd. Doç. Dr. Selahattin MADEN

Üye : Yrd. Doç. Dr. Süleyman ŞENYURT

Üye : Yrd. Doç. Dr. İmdat İŞCAN

ONAY :

Yukarıdaki imzaların adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

..../..../2011

Yrd. Doç. Dr. Beyhan TAŞ

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ÖZET

Çalışmamız üç bölüm halinde düzenlenmiştir. Giriş bölümünde çalışmanın amacı ve konunun ele alınma nedeni tartışıldı. İkinci bölümde matrisler ve matris operasyonları ile ilgili genel bilgiler verildi. Üçüncü bölümde ise idempotent matrisler ve izdüşümlerle ilgili olarak İdempotent matrisin Lineer kombinasyonlarının nonsingülerliği, iki idempotent matrisin toplam ve farkının nonsingülerliği, İdempotent matrislerin sıfırlılık dereceleri, İdempotent matrislerle ilgili birtakım rank eşitlikleri ele alınmıştır.

Anahtar Sözcükler: İdempotent Matris, Sıfır uzayı, İzdüşüm, Rank.

ABSTRACT

This study consist of three chapters.In the introduction part, the goal and the reason of the study is analysed. In the second part, general knowledge about the matrices and the matris operatıons are given.The last part of the study is about the nonsingularity of idempotent matrices and their sum and difference, the nullity of İdempotent Matrices and the rank equalities of İdempotent Matrices and projections.

Key Words: İdempotent Matrices, The nullity space, Projections, rank.

TEŞEKKÜR

Yoğun çalışma ortamında danışmanlığımı yapan ve çalışmalarım süresince sabırla hiçbir desteğini esirgemeyen saygıdeğer ve değerli büyüğüm Yrd. Doç. Dr. Selahattin MADEN hocama sonsuz teşekkürlerimi sunmayı borç biliyorum. Kendisinin yardım ve desteklerinin bu çalışmayı bitirmemde çok büyük bir itici güç olmuştur. Ayrıca çalışmalar boyunca desteklerini gördüğüm sayın dekanım Prof. Dr. Cemil YAPAR ve saygıdeğer hocam Yrd. Doç. Dr. Süleyman ŞENYURT'a teşekkürlerimi sunuyorum.

İÇİNDEKİLER

1. GİRİŞ

Günümüzde elementer matris cebiri, teorik matematik, istatistik, istatistik için olduğu kadar sosyoloji, kimya, fizik eğitimi ve elektrik mühendisliği gibi çeşitli teknik alanlar içinde gerekli matematiksel temel bilginin ayrılmaz bir kısmı haline gelmiştir. Matris hesabı,19.yüzyıl ortalarından beri bilinmektedir. İngiliz matematikçi Sylvester, 1950 yılında 'matris' kavramını kullanmıştır. 1853 yılında İngiliz bilgini Hamilton 'Lineer and Vectör Functions' isimli eserinde matrislerin bazı özelliklerden faydalanmış fakat matris ismini kullanmamıştır. Yine bir İngiliz matematikçisi olan Cavley, 1858 yılında çok meşhur olan 'Memorie On The Theory Of Matrices' isimli çalışmasında matris cebirinin modern esaslarını göstermiştir. Daha sonraları fransız Laguerre ve Alman Frobenius matrislerle ilgili yeni kavram ve teoremler üzerinde durmuşlardır.

Matrisler üzerine yapılan bu çalışmada J.J. Koliha, V. Rakoceviç ve I. Staskraba tarafından verilen çalışmalarda ele alınan İdempotent Matrislerin Lineer Kombinasyonları ve İzdüşüm Matrisleri detaylı bir biçimde ele alınmıştır. Ayrıca Nonsingüler Matrislerin toplamları ve farklarının nonsingülerliği üzerine bir dizi kriterler verilmiştir. Çalışmada kompleks alan üzerinde tanımlanan idempotent matrislerin sıfılılık derecesinin ne anlama geldiği verilmiş, A ve B gibi iki idempotent matris verildiğinde $cA + dB$ biçimindeki bir lineer kombinasyonun da hangi durumlarda idempotent olacağı verilmiştir.

2. GENEL BİLGİLER

2.1. Matrisler ve Matris Uzayları

Tanım 2.1.1: Bir K cismi üzerinde n bilinmeyenli m tane lineer denklemin sistemi, genel olarak,

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \, , 1 \leq i \leq m \qquad (2.1.1)$$

biçiminde tanımlanır, burada x_j, $1 \leq j \leq n$, ler bilinmeyenleri, a_{ij}, $1 \leq i \leq m$ ler $m.n$ tane katsayıları ve b_i ler de bilinen sayıları göstermektedir. (2.1.1) sistemi açık biçimde yazılırsa

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_n \end{aligned} \qquad (2.1.2)$$

elde edilir. Bu denklem matris formatında yazılınca

$$\begin{bmatrix} a_{12}, a_{12} \dots . a_{1n} \\ a_{21}, a_{22} \dots . a_{2n} \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{m1}, a_{m2} \dots . a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

şeklindedir. **[4]**

Tanım 2.1.2: K bir cisim olsun. $m, n \in \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ olmak üzere bütün (i, j) sıralı ikililerinin kümesini $B \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ olarak alalım. B kümesi üzerinde

$$f : B \to K$$

fonksiyonunu

$$(i, j) \to f(i, j) = a_{ij}$$

biçiminde tanımlayalım. $a_{ij} \in K$ elemanları

$$A = \begin{bmatrix} a_{12}, a_{12} \dots . a_{1n} \\ a_{21}, a_{22} \dots . a_{2n} \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{m1}, a_{m2} \dots . a_{mn} \end{bmatrix} \qquad (2.1.3)$$

şeklinde düzenlendiğinde mn tane eleman ile oluşturulan bu tabloya $m \times n$ tipinde bir **matris** denir. Her $(i, j), 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$ çiftine karşılık gelen a_{ij} elemanına ise bu matrisin (i, j) **−yinci bileşeni** denir. **[4]**

Tanım 2.1.3: $A = [a_{ij}]$, $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$ matrisi kısaca $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ şeklinde gösterilir ve A matrisine mertebesi $m \times n$ olan bir matris denir. Mertebesi $m \times n$ olan ve bileşenleri bir K cisminden seçilen bütün matrislerin cümlesi K_n^m ile gösterilir. **[4]**

Tanım 2.1.4: $A = [a_{ij}]$ ve $B = [b_{ij}]$ $m \times n$ tipindeki herhangi iki matris olmak üzere her (i, j) için

$$a_{ij} = b_{ij}, \ 1 \leq i \leq m, \text{ ve } \ 1 \leq j \leq n$$

ise bu iki matrise **eşit matrisler** denir ve $A = B$ şeklinde yazılır. $(=)$ işleminin K_n^m de bir denklik bağıntısı olduğu açıktır. **[4]**

Tanım 2.1.5: Eğer bir $A = [a_{ij}]$ matrisinde her bir a_{ij} elemanı sıfıra eşitse A matrisine **sıfır matrisi** denir. **[4]**

Tanım 2.1.6: İki $S = [s_{ij}]$ ve $T = [t_{ij}] \in K_n^m$ **matrislerinin toplamı**, (i, j) -yinci bileşeni $s_{ij} + t_{ij}$ olan bir matris olup

$$+: K_n^m \times K_n^m \to K_n^m$$

$$(S, T) \to S + T = [s_{ij}] + [t_{ij}]$$

$$S + T = \begin{bmatrix} s_{11} + t_{11} & s_{12} + t_{12} \ldots . s_{1n} + t_{1n} \\ s_{12} + t_{12} & s_{22} + t_{22} \ldots . s_{2n} + t_{2n} \\ \ldots & \ldots \\ s_{m1} + t_{m1} & s_{m2} + t_{m2} \ldots . s_{mn} + t_{mn} \end{bmatrix} \tag{2.1.4}$$

$c \in K$ herhangi bir skaler olmak üzere $cT \in K_n^m$ matrisi (i, j) -yinci bileşeni ct_{ij} olan bir matristir. Yani

$$. : K \times K_n^m \to K_n^m$$

$$(c, T) \longrightarrow cT = \begin{bmatrix} ct_{11} & ct_{12} \ldots ct_{1n} \\ ct_{21} & ct_{22} \ldots ct_{2n} \\ \ldots & \ldots \\ ct_{m1} & ct_{m2} \ldots ct_{mn} \end{bmatrix} \tag{2.1.5}$$

dir. O halde $\forall T \in K_n^m$ matrisi için $0 \in K$ olmak üzere $0T = 0 \in K_n^m$ $m \times n$ tipinde sıfır matristir. **[4]**

Matrislerin toplamının ve skaler ile çarpımının özellikleri aşağıdaki teoremde toplanabilir.

Teorem 2.1.1: Bir K cismi üzerinde tanımlanan $m \times n$ tipindeki tüm matrislerin kümesi K_n^m olsun. Herhangi $A, B, C \in K_n^m$ matrisleri ve herhangi $k_1, k_2 \in K$ skalerleri için

i) $(A + B) + C = A + (B + C)$

ii) $A + 0 = A$

iii) $A + (-A) = 0$

iv) $A + B = B + A$

v) $k_1(A + B) = k_1A + k_2B$

vi) $(k_1 + k_2)A = k_1A + k_2A$

vii) $(k_1k_2)A = k_1(k_2)A$

viii) $1.A = A$ ve $0.A = 0$

özellikleri sağlanır. **[4]**

Tanım 2.1.7: $S = [s_{ik}] \in K_n^m$ ve $T = [t_{kj}] \in K_p^n$ olmak üzere S ve T **matrislerinin çarpımı**

$$\bullet : K_n^m \times K_p^n \to K_p^m$$

$$(S, T) \to S \bullet T = [s_{ik}][t_{kj}] = \left[\sum_{k=1}^{n} s_{ik}t_{kj}\right], 1 \leq i \leq m, 1 \leq k \leq n, 1 \leq j \leq p$$

biçiminde, yani,

$$S \bullet T = \begin{bmatrix} (s_{11}t_{11} + \cdots . s_{1n}t_{n1}) \dots (s_{11}t_{1p} + \cdots + s_{1m}t_{mp}) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (s_{m1}t_{11} + \cdots . s_{mn}t_{n1}) \dots (s_{m1}t_{1p} + \cdots + s_{mn}t_{np}) \end{bmatrix} \tag{2.1.6}$$

şeklinde tanımlanır. O halde matris çarpımının tanımlı olabilmesi için birinci çarpanın sütun sayısı ikinci çarpanın satır sayısına eşit olmalıdır. **[4]**Çalışmamızda herhangi S ve T matris çarpımlarında $S \bullet T$ yerine ST şeklinde göstereceğiz.

Tanım 2.1.8: Köşegen üzerindeki bileşenleri 1 ve köşegen dışındaki bileşenleri 0 olan $n \times n$ mertebeden bir matrise **birim matris** denir ve I_n ile gösterilir. Yani

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

dir. Herhangi bir $A \in K_n^m$ matrisi için $I_mA = AI_n = A$ dir. **[4]**

Tanım 2.1.9: A ve B $\in K_n^n$ matrisleri $AB = BA = I_n$ bağıntılarını sağlayan birer $n \times n$ mertebeli matris iseler B matrisine ***A* nın tersi** denir. Bir kare matrisinin tersi varsa tektir. **[4]**

Tanım 2.1.10: $A \in K_n^m$ matrisinin **transpozu** A' veya A^t ile gösterilir ve (j, i) bileşeni A nın (i, j) bileşeni olan bir $n \times m$ matristir, yani $\alpha'_{ji} = \alpha_{ij}$. Diğer bir ifadeyle A' matrisi A matrisinin satır ve sütunlarının kendi aralarında yer değiştirilmesiyle elde edilir. O halde transpoz işlemi $K_n^m \to K_m^n$ şeklinde bir işlemdir. **[4]**

Teorem 2.1.2: $\forall A, B \in K_n^m$ matrisi için

i) $(A + B)^t = A^t + B^t$

iii) $(kA)^t = kA^t,\ k \in K$ bir skalar

iv) $(AB)^t = B^t A^t$

eşitlikleri sağlanır. **[4]**

Tanım 2.1.11: $A^2 = A$ koşulunu sağlayan kare matrislere **İdempotent Matris** denir. Örneğin,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ ve } \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olduğundan

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ ve } \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

matrisleri birer idempotent matristir. **[4]**

Tanım 2.1.12: $x_1, x_2, \dots, x_n$ vektörler kümesi verilmiş olsun. $\sum_{i=0}^{n} a_i x_i = 0$ eşitliği ancak $a_1, a_2, \dots, a_n$ skalerlerinin tümü birden sıfır olduğunda sağlanıyorsa bu durumda $x_1, x_2, \dots, x_n$ vektörlerine **lineer bağımsızdır** denir. Aksi halde yani, $a_1, a_2, \dots, a_n$ skalerlerinden en az biri sıfırdan farklı olmak üzere $\sum_{i=0}^{n} a_i x_i = 0$ eşitliği sağlanıyorsa bu durumda $x_1, x_2, \dots, x_n$ vektörlerine **lineer bağımlıdır** denir. **[4]**

Tanım 2.1.13: $A \in K_n^m$ K cismi üzerinde tanımlanan $m \times n$ tipinde bir matris olsun. A matrisinin lineer bağımsız sütun vektörlerinin maksimum sayısına A matrisinin **sütun rankı**, A matrisinin lineer bağımsız satır vektörlerinin maksimum sayısına ise A matrisinin **satır rankı** adı verilir. **[4]**

Teorem 2.1.3: K cismi üzerinde tanımlanan $m \times n$ tipindeki bir $A \in K_n^m$ matrisi için

i) Satır rankı ile sütun rankı aynı sayıya eşittir. Bu sayıya A matrisinin rankı denir ve $r(A)$ ile ifade edilir.

ii) A matrisine elementer satır ya da sütun işlemlerinin uygulanması ile A matrisinin rankı değişmez.

iii) A matrisinin rankı ile transpozunun rankı birbirine eşittir.**[4]**

Tanım 2.1.14: $n \times n$ tipindeki bir A kare matrisi için eğer $r(A) = n$ ise A matrisine **nonsingüler matris** denir. Aksi durumda, yani, $r(A) < n$ ise A matrisine **singüler matris** denir.**[4]**

Tanım 2.1.15: $A: V \to W$ lineer dönüşümünde W nın $A(\alpha)$ elemanına $\alpha \in V$ nın A lineer dönüşümü altındaki görüntüsü denir. S$\subset$ V için

$$A(S) = \{A(\alpha): \alpha \in S\} \subset W$$

alt kümesine ise S kümesinin A lineer dönüşümü altındaki görüntüsü denir. V vektör uzayının

$$A^{-1}(0) = \{\alpha \in V: A(\alpha) = 0\}$$

altkümesine A lineer dönüşümünün **sıfır uzayı (sıfırlığı) veya çekirdeği** denir. Öte yandan W vektör uzayının

$$A(V) = \{A(\alpha): \alpha \in V\}$$

alt kümesine A lineer dönüşümünün **değerler bölgesi** denir. **[4]**

Tanım 2.1.16: $A \in K_n^m$ $m \times n$ tipinde bir matris olsun.

$$\mathcal{N}(A) = \{x: Ax = 0\}$$

şeklinde tanımlanan kümeye A matrisinin **sıfır (null) uzayı** adı verilir. **[4]**

Tanım 2.1.17: $A \in K_n^m$ $m \times n$ tipinde bir matris olsun.

$$\mathcal{R}(A) = \{y: y = Ax\}$$

şeklinde tanımlanan kümeye A matrisinin **sütun (ranj) uzayı** adı verilir. **[4]**

Tanım 2.1.18: Eğer A matrisi $n \times n$ tipinde nonsingüler bir matris ise bu takdirde $AX = XA = I_n$ olacak şekilde bir X matrisi vardır. A^{-1} ile gösterilen X matrisi tektir ve bu matrise A matrisinin **tersi denir**. Bu durumda A ve B matrisleri tersleri olan aynı tipten matrisler ise

$$(A^{-1})' = (A')^{-1} \quad \text{ve} \quad (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

eşitlikleri vardır. **[4]**

Tanım 2.1.19: A $m \times n$ tipinde bir matris ve $r(A) = r \leq min\{m, n\}$ olsun. Bu durumda aşağıdaki dört koşulu sağlayan $n \times m$ tipindeki bir matris olan X matrisine A matrisinin **genelleştirilmiş tersi** (Moore- Penrose tersi) denir.

i) $AXA = A$

ii) $XAX = X$

iii) $(AX)^t = AX$

iv) $(XA)^t = XA$

Bir A matrisinin herhangi bir genelleştirilmiş tersini A^{-} ile gösterilir. [4]

Tanım 2.1.20: Tanım 2.1.19 daki koşullardan yalnız (i) koşulunu sağlayan bir genelleştirilmiş terse **koşullu genelleştirilmiş ters**; (i) ve (ii) koşullarını sağlayan bir genelleştirilmiş terse **iki koşullu genelleştirilmiş ters**; (i), (ii), (iii) ya da (i), (ii), (iv) koşullarını sağlayan bir genelleştirilmiş terse ise **üç koşullu genelleştirilmiş ters** denir.

Bir koşullu genelleştirilmiş terslerin kümesi $A^{\{1\}}$, iki koşullu genelleştirilmiş terslerin kümesi $A^{\{1,2\}}$ ve üç koşullu genelleştirilmiş terslerin kümesi ise $A^{\{1,2,3\}}$ veya $A^{\{1,2,4\}}$ ile gösterilir. Bu durumda bu tersler arasında

$$A^{-} \subset A^{\{1,2,3\}}, A^{\{1,2,4\}} \subset A^{\{1,2\}} \subset A^{\{1\}}$$

bağıntısının sağlandığı açıktır. **[4]**

3. İDEMPOTENT MATRİSLER VE İZDÜŞÜMLER

3.1. İdempotent Matrislerin Lineer Kombinasyonlarının Nonsingülerliği

$\mathbb{C}$ ve $\mathbb{C}_n^m$ sırasıyla kompleks sayılar kümesini ve m$\times n$ boyutlu kompleks matrislerin kümesini göstersin. Ayrıca $\mathcal{R}$(A) ve $\mathcal{N}$(A) A' nın ranj ve sıfır uzaylarını göstersin ve $\mathcal{P}$ ise nxn boyutlu kompleks idempotent matrislerin kümesi olsun, yani

$$\mathcal{P} = \{P \in \mathbb{C}_n^m : P = P^2\} \tag{3.1.1}$$

olsun. P_1, $P_2 \in \mathcal{P}$ herhangi iki matris olmak üzere

$$P(c_1, c_2) = c_1P_1 + c_2P_1, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \tag{3.1.2}$$

şeklinde verilen lineer kombinasyonlarını göz önüne alalım. P_1 ve P_2 matrislerinin toplam ve farklarının rankları göz önünde bulundurulduğunda, Grob ve Trenkler [3] $P(1,-1)$ ve $P(1,1)$ matrisleri için P_1+ P_2 ve P_1-P_2 nin nonsingülerliğinin kriterlerini vermişlerdir. Bu durum ya doğrudan P_1 ve P_2 nin ranj ve sıfır uzayları yardımıyla ya da onların fonksiyonları olan matrisler yardımıyla ifade edilir. Bunu Koliha [6]

$$A \in \mathbb{C}_n^n \text{ nonsingülerdir} \Leftrightarrow \mathcal{N}(A) = \{0\} \tag{3.1.3}$$

gerek ve yeter şartını kullanarak da ayrıca ispatlamıştır.

P_1+P_2 nin nonsingülerliği aslında herhangi bir lineer kombinasyon olan $P(c_1, c_2)$, $c_1+c_2 \neq 0$, nin nonsingülerliği durumuyla eşdeğerdir. Bu sonuç P_1ve P_2 nin toplamını konu edinen açıklamalar için doğal genellemelere yol açmaktadır. Burada ele alınan desteklenmiş ifadeler, P_1-P_2 nin P_1 ve P_2 nin diğer bütün lineer kombinasyonları arasındaki özel yerini işaret etmektedir. P_1 ve P_2 nin lineer kombinasyonlarıyla ilgili bazı nonsingülerlik bağıntıları da ortaya koyulmuştur.

$c_1+c_2 \neq 0$ olmak üzere (3.1.2) de verilen tüm $P(c_1, c_2)$ lineer kombinasyonları nonsingüler olsa bile P_1-P_2 nin de nonsingüler olması gerekir. Örneğin,

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ ve } P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ise, bu takdirde

$$P(c_1, c_2) = \begin{pmatrix} c_1+c_2 & c_2 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix}$$

matrisi $c_1+c_2 \neq 0$ koşulunu sağlayan her c_1, $c_2 \in \mathbb{C}$ için nonsingulerdir ancak P_1-P_2 nin singüler olduğu açıkça gözükmektedir. Yukarıdaki incelemenin ışığında $P(c_1, c_2)$ nin yalnızca bir türü olan alt dallarını indirgenmiş P nin tüm lineer kombinasyonlarının parçaları arasında bir bağıntı olup olmadığını sormak da gayet doğaldır. Aşağıda verilecek teorem gerçekten de böyle bir ilişkinin var olduğunu ve de bu ilişkinin oldukça güçlü olduğunu göstermektedir.

Teorem 3.1.1: $P_1, P_2 \in \mathcal{P}$ olsun. Eğer $\tilde{c_1} + \tilde{c_2} \neq 0$ koşulunu sağlayan sıfırdan farklı $\tilde{c_1}, \tilde{c_2} \in \mathbb{C}$ sabitleri için $\tilde{c_1}P_1 + \tilde{c_2}P_2$ lineer kombinasyonu nonsingüler ise, bu takdirde $c_1 + c_2 \neq 0$ koşulunu sağlayan tüm sıfırdan farklı $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ ler için $c_1P_1 + c_2P_2$ kombinasyonu da nonsingülerdir.

İspat: $c_1 + c_2 \neq 0$ koşulunu sağlayan keyfi $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ sayıları için, $x \in \mathcal{N} \in (c_1P_1 + c_2P_2)$ olsun. Bu takdirde

$$c_1P_1x = -c_2P_2x = -c_2P_1P_2x = c_1P_2P_1x \qquad (3.1.4)$$

elde edilir ki bu da

$$P_1x = P_2P_1x \text{ ve } P_2x = P_1P_2x \qquad (3.1.5)$$

olmasına denktir. Bunun sonucu olarak

$$(\tilde{c_1}P_1 + \tilde{c_2}P_2)(\tilde{c_1}P_1 + \tilde{c_2}P_2)x = \tilde{c_1}^2 P_1 + \tilde{c_1}\tilde{c_2}\, P_1P_2 + \tilde{c_1}\tilde{c_2}\, P_2P_1 + \tilde{c_2}^2\, P_2)x$$
$$= (\tilde{c_1}P_1 + \tilde{c_2}P_2)^2 x$$

eşitliği elde edilir. Böylece $\tilde{c_1}P_1 + \tilde{c_2}P_2$ liner kombinasyonunun nonsingülerliği koşulu altında

$$(\tilde{c_1}P_1 + \tilde{c_2}P_2)\mathrm{x} = (\tilde{c_1}P_1\mathrm{x} + \tilde{c_2}P_2\, x) \qquad (3.1.6)$$

eşitliği elde edilir. (3.1.6) eşitliğinin her iki yanını P_1 ile soldan çarparak

$$P_1x = P_1P_2x$$

eşitliğini sağlar. Bu eşitliği (3.1.4) ile birleştirdiğimizde

$$(c_1 + c_2)P_1x = 0$$

ve dolayısıyla $P_1x = P_2x = 0$ olduğu görülür. Bu takdirde (3.1.6) eşitliği $(\tilde{c_1} + \tilde{c_2}) \neq 0$ ve x=0 varsayımı altında $(\tilde{c_1} + \tilde{c_2})x = 0$ eşitliğini gerektirir. Bu da $\mathcal{N}(c_1P_1 + c_2P_2) = \{0\}$ anlamına gelir ve ispatı destekler.

Teorem 3.1.2: Herhangi $P_1, P_2 \in \mathcal{P}$ ve sıfırdan farklı $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ için, aşağıdaki ifade eşdeğerdir.

i) $P_1 - P_2$ nonsingülerdir.

ii) $c_1P_1 + c_2P_2$ ve $I - P_1P_2$ matrisleri nonsingülerdir.

İspat: Teorem 3.1.1 den $x \in \mathcal{N}(c_1P_1 + c_2P_2)$ olması durumunda x in (3.1.5) eşitliğini sağlayacağı bilinmektedir. Ayrıca, eğer $x \in \mathcal{N}(I - P_1P_2)$ ise bu takdirde

$x = P_1P_2x = P_1x$ ve bu nedenle de $P_2x = P_2P_1x$ olduğu açıkça görülmektedir. Sonuç olarak (i) koşulu altında her iki durumda da

$$x = (P_1 - P_2)^{-2}(P_1 - P_1P_2 - P_2P_1 + P_2)x = 0$$

olduğu görülür. Bu da $\mathcal{N}(c_1P_1 + P_2) = \{0\}$ ve $\mathcal{N}(I - P_1P_2) = \{0\}$ olması demektir ve böylelikle (i $\Longrightarrow$ ii) yönünün doğruluğunu kanıtlanmış olur.

Tersi durum benzer bir yolla sağlanmaktadır, Eğer $x \in \mathcal{N}(P_1 - P_2)$ ise bu takdirde

$$P_1x = P_2x = P_1P_2x = P_2P_1P_2x$$

olacaktır. Sonuç olarak, ii) koşulu altında

$$x = (I - P_1P_2x)^{-1}(c_1P_1 + c_2P_2)^{-1}(c_1P_1 - c_1P_1P_2 + c_2P_2 - c_2P_2P_1P_2)x = 0$$

olur ki bu da $\mathcal{N}(P_1 - P_2) = \{0\}$ anlamına gelir ve böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.1.1 in diğer bir sonucu da $c_1 + c_2 \neq 0$ koşuluyla herhangi bir lineer kombinasyonun nonsingülerliğinin tespiti aynı zamanda $P_1 + P_2$ nin nonsingülerliğinin tespit edilmesidir. Bu da gösteriyor ki $P_1 + P_2$ nin nonsingular olmasının gerek ve yeter şartı

$$\mathcal{R}(P_1) \cap \mathcal{R}[P_2(I - P_1)] = \{0\} \text{ ve } \mathcal{N}(P_1) \cap \mathcal{N}(P_2) = \{0\} \qquad (3.1.7)$$

olmasıdır. $P_1 + P_2$ ifadesinde P_1 ve P_2 nin rollerinin simetrik olmasına karşın, (3.1.7) nin ilk eşitliğinde böyle değildir. Bununla beraber, aşağıda verilen teorem bu çeşit bir simetrinin yapılabilir olduğunu göstermektedir.

Teorem 3.1.3: Herhangi iki $P_1, P_2 \in \mathcal{P}$ matrisi ve $c_1 + c_2 \neq 0$ olmak üzere herhangi iki $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ sayıları için aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.

i) $c_1P_1 + c_2P_2$ lineer kombinasyonu nonsingülerdir.

ii) $\mathcal{R}[P_1(I - P_2)] \cap \mathcal{R}[P_2(I - P_1)] = \{0\}$ ve $\mathcal{N}(P_1) \cap \mathcal{N}(P_2) = \{0\}$ dir.

İspat: İlk olarak (i $\Longrightarrow$ ii) olduğunu gösterelim.

Eğer $x \in \mathcal{R}[P_1(I - P_2)] \cap \mathcal{R}[P_2(I - P_1)]$ alınırsa bu takdirde $x \in \mathcal{R}(P_1) \cap \mathcal{R}(P_2)$, olduğu açıktır. Böylece en az bir $s \in \mathbb{C}_1^n$ için

$$x = P_1x = P_2x = P_1(I - P_2)s \qquad (3.1.8)$$

yazılabilir. Sonuç olarak

$$c_1(c_1P_1 + c_2P_2)x = c_1(c_1 + c_2)x = (c_1 + c_2)(c_1P_1 + c_2P_2)(I - P_2)s$$

olur ki bu ise (i) nin doğru olduğu varsayımı altında

$$c_1x = (c_1 + c_2)P_1(I - P_2)s \qquad (3.1.9)$$

olduğunu gösterir. (3.1.8) göz önünde bulundurulduğunda (3.1.9) eşitliğini P_1 ile soldan çarpmak suretiyle

$$c_1 x = (c_1 + c_2)P_1(I - P_2)s = c_1 x + c_2 x$$

elde edilir ki bu da $x = 0$ olduğunu gösterir. Ayrıca, eğer $x \in \mathcal{N}(P_1) \cap \mathcal{N}(P_2)$ ise yani $P_1 x = 0$ ve $P_2 x = 0$ ise bu takdirde

$$x = (c_1 P_1 + c_2 P_2)^{-1}(c_1 P_1 + c_2 P_2)x = 0$$

olur bu da (i $\Longrightarrow$ ii) olduğunun ispatıdır.

Tersi yönden ispat için eğer $x \in \mathcal{N}(c_1 P_1 + c_2 P_2)$ alınırsa, bu takdirde (3.1.4) ve (3.1.5) bağıntılarından

$$(c_1 + c_2)P_1 x = c_2 P_1(I - P_2)x = -c_2 P_2(I - P_1)x$$

yazılabilir. Bu ise

$$P_1 x \in \mathcal{R}[P_1(I - P_2)] \cap \mathcal{R}[P_2(I - P_1)]$$

olduğunu göstermektedir. Bu takdirde (ii) deki birinci eşitlik $P_1 x = 0$ olmasını gerektirir ki bu (3.1.4) in ışığı atında $P_2 x = 0$ anlamına gelir. Bu nedenle

$$x \in \mathcal{N}(c_1 P_1 \cap c_2 P_2),$$

olur. (ii) deki ikinci eşitlik ise $x = 0$ olduğunu gösterir. Böylece de $c_1 P_1 + c_2 P_2$ nin nonsingüler olduğu görülür.

Son sonuç göstermektedir ki $P(c_1, c_2)$ matrisinin nonsingülerliği ile $P_1 P_2$ ve $P_2 P_1$ çarpımlarının benzeri lineer kombinasyonlarının nonsingülerliği ilişkilidir.

Teorem 3.1.4: Herhangi iki P_1, $P_2 \in \mathcal{P}$ ve herhangi sıfırdan farklı $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ için aşağıdaki ifadeler eşdeğerdir:

i) $c_1 P_1 P_2 + c_2 P_2 P_1$ lineer kombinasyonu nonsingülerdir.

ii) $c_1 P_1 + c_2 P_2$ ve $I - P_1 - P_2$ matrisleri nonsingülerdir.

İspat: Teoremin ispatı

$$(c_1 P_1 + c_2 P_2)(I - P_1 - P_2) = -(c_1 P_1 P_2 + c_2 P_2 P_1)$$

eşitliğinin açık bir sonucudur.

3.2 Projektörlerin Toplam Ve Farkları

Lemma 3.2.1: $A, B \in \mathbb{C}_d^d$ olsun. Bu takdirde

$$\mathcal{R}(A^*) + \mathcal{R}(B^*) = \mathbb{C}_1^d \Leftrightarrow \mathcal{N}(A) \cap \mathcal{N}(A) = \{0\} \qquad (3.2.1)$$

$$\mathcal{R}(A^*) \cap \mathcal{R}(B^*) = \{0\} \Leftrightarrow \mathcal{N}(A) + \mathcal{N}(A) = \mathbb{C}_1^d \qquad (3.2.2)$$

İfadeleri geçerlidir.

İspat: $\mathbb{C}_1^d$ in alt kümesi olan M nin ortogonal komplementi olsun.

$$(M \cap N)^{\perp} = M^{\perp} \cap N^{\perp}, \quad (M+N)^{\perp} = M^{\perp} \cap N^{\perp}$$

$\mathbb{C}_1^d$ nin herhangi iki M, N alt uzayı için geçerli tanımlamadan ve $\mathcal{R}(A)^{\perp} = \mathcal{N}(A)$ bağıntısından hareketle yukarıdaki sonuç elde edilebilir. Burada $\mathcal{N}(A) = \{0\}$ olduğu gösterilerek $A \in \mathbb{C}_d^d$ matrisinin tersinirliği için basit ispat sunulabilir. Eğer $P^2 = P$ ise $P \in \mathbb{C}_d^d$ matrisi bir projektör, ayrıca bununla birlikte $P^* = P$ olması durumunda P matrisi bir ortogonal projektördür.

Teorem 3.2.1: $P, Q \in \mathbb{C}_d^d$ projektörler olsun. Bu takdirde aşağıdaki koşullar eşdeğerdir:

i) $\mathbb{C}_1^d = \mathcal{R}(\mathrm{P}) \oplus \mathcal{R}(\mathrm{Q})$ ve $\mathcal{R}(P^*) \oplus \mathcal{R}(Q^*) = \mathbb{C}_1^d$

ii) $\mathbb{C}_1^d = \mathcal{R}(\mathrm{P}) \oplus \mathcal{R}(\mathrm{Q})$ ve $\mathbb{C}_1^d = \mathcal{N}(P) \oplus \mathcal{N}(Q)$

iii) $\mathcal{R}(P) \cap \mathcal{R}(Q) = \{0\}$ ve $\mathcal{N}(P) \cap \mathcal{N}(Q) = \{0\}$

iv) $P - Q$ nonsingülerdir.

v) $I - PQ$ ve $P + Q - PQ$ matrisleri nonsingülerdir.

İspat: (i $\Rightarrow$ ii) Lemma 3.2.1 den sağlanabilir.

(ii $\Rightarrow$ iii) doğrudan toplam tanımından ispatlanabilir.

(iv $\Rightarrow$ v) $(P - Q)x = 0$ olsun. Bu takdirde $Px = Qx \in \mathcal{R}(P) \cap \mathcal{R}(Q) = \{0\}$ ve $x \in \mathcal{N}(P) \cap \mathcal{N}(Q) = \{0\}$ dir. Böylece $\mathcal{N}(P - Q) = \{0\}$ ve $P - Q$ nonsingülerdir.

(iv$\Rightarrow$ v) $\mathcal{N}(I - PQ) = \{0\}$ olduğu gösterilir. $(I - PQ)x = 0$ olsun. Bu takdirde $x = PQx = Px$ ve $(P - Q)^2 x = (I - PQ)x = 0$ yazılabilir. Öte yandan $(P - Q)^2$ nonsingüler oduğundan $x = 0$ olacaktır. Yani $I - PQ$ nonsingülerdir. Benzer şekilde $(I - P) - (I - Q) = Q - P$ olduğundan $I - (I - P)(I - Q) = P + Q - PQ$ nun nonsingüler olduğu elde edilir.

(v $\Rightarrow$ i) $P + Q - PQ$ matrisinin tersini W ile gösterelim. Bu durumda $W(P + Q - PQ) = I$ yazılabilir. Buradan $I = WP + W(I - P)Q$ olur ve dolayısıyla

$$\mathcal{N}(P) \cap \mathcal{N}(Q) = \{0\}$$

dır. Eğer $(P+Q-PQ)W=I$ ise $I=P(I-Q)W+QW$ olacaktır. $\mathbb{C}_1^d = \mathcal{R}(\mathrm{P}) + \mathcal{R}(\mathrm{Q})$ şeklindedir. Benzer şekilde $I-PQ=(I-P)+(I-Q)-(I-P)(I-Q)$ matrisinin nonsingüler olması

$$\mathcal{N}(I-P)\cap\mathcal{N}(I-Q)=\mathcal{R}(P)\cap\mathcal{R}(Q)=\{0\}$$

ve

$$\mathbb{C}_1^d=\mathcal{R}(I-P)\oplus\mathcal{R}(I-Q)=\mathcal{N}(P)+\mathcal{N}(Q)$$

olduğunu gösterir. Böylece

$$\mathbb{C}_1^d=\mathcal{R}(P)\oplus\mathcal{R}(Q)=\mathcal{N}(P)\oplus\mathcal{N}(Q)$$

elde edilir.

Sonuç 3.2.1: $P,Q\in\mathbb{C}_d^d$ projektörler olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler eşdeğerdir:

i) $\mathcal{R}(\mathrm{P})\oplus\mathcal{R}(\mathrm{Q})=\mathcal{N}(P)\oplus\mathcal{N}(Q)=\mathcal{N}(P)\oplus\mathcal{R}(Q)=\mathcal{R}(P)\oplus\mathcal{N}(Q)=\mathbb{C}_1^d$

ii) $P-Q$ ve $I-P-Q$ nonsingülerdir.

iii) $PQ-QP$ nonsingülerdir.

İspat: (i) ve (ii) denkliklerinin Teorem 3.2.1 önce P ve Q ve daha sonra da $(I-P)$ ve Q matrislerine uygulanarak (i) ve (ii) ifadelerinin denklikleri sağlanır. (ii) ve (iii) nin denkliği için ise

$$PQ-QP=(I-P-Q)(P-Q)$$

eşitliğini dikkate almak yeterlidir.

Teorem 3.2.2: $P,Q\in\mathbb{C}_d^d$ projektörler olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktir.

i) $P-Q$ nonsingülerdir.

ii) $P+Q$ ve $I-PQ$ nonsingülerdir.

İspat: (i ⇒ ii): Eğer $(P+Q)x=0$ ise bu takdirde

$$Px=-Qx\in\mathcal{R}(P)\cap\mathcal{R}(Q)=\{0\},\text{ ve } x\in\mathcal{N}(P)\cap\mathcal{N}(Q)=\{0\}$$

dır. Bu nedenle $\mathcal{N}(P+Q)=\{0\}$ olup $P+Q$ nonsingülerdir. $I-PQ$ nun nonsingülerliği ise benzer şekilde gösterilebilir.

(i⇒ ii): $(P-Q)x=0$ olsun. Bu takdirde $Px=Qx=QPx=PQPx$ yazılabilir. Bu durumda

$$Px=(I-PQ)^{-1}(I-PQ)Px=(I-PQ)^{-1}(Px-PQx)=0,$$
$$(I-P)x=(P+Q)^{-1}(P+Q)(I-P)x=(P+Q)^{-1}(Qx-QPx)=0$$

ve

$$x=Px+(I-P)x=0$$

elde edilir. Buradan da $\mathcal{N}(P-Q)=\{0\}$ olduğu görülür.

P ve Q projektörleri $P-Q$ nonsingüler olacak şekilde verilmiş olsun. Bu durumda $(P-Q)^{-1}$ ve $(P+Q)^{-1}$ ile ilgili açık formülleri elde etmek için

$$\mathbb{C}_1^d = \mathcal{R}(P) \oplus \mathcal{R}(Q) = \mathcal{N}(P) \oplus \mathcal{N}(Q)$$

ile ilgili izdüşümler kullanılabilir. Bu amaçla

$$F = P = (P-Q)^{-1}(I-Q), \tag{3.2.3}$$

$$G = (P-Q)^{-1}P = (I-Q)(P-Q)^{-1}; \tag{3.2.4}$$

matrisleri tanımlanabilir. Bu durumda F ve G matrisleri projektörlerdir. Örnek olarak $F^2 = F$ olduğu gösterilebilir. Gerçekten

$$\begin{aligned} F^2 &= (P-Q)^{-1}(I-Q)P(P-Q)^{-1} \\ &= (P-Q)^{-1}(I-Q)P(P-Q)(P-Q)^{-1} \\ &= (P-Q)^{-1}(I-Q) \\ &= F \end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda

$$\mathcal{R}(P) = \mathcal{R}(Q),$$

$$\mathcal{N}(F) = \mathcal{N}(I-Q) = \mathcal{R}(Q),$$

$$\mathcal{R}(G) = \mathcal{R}(I-Q) = \mathcal{R}(Q),$$

$$\mathcal{N}(F) = \mathcal{N}(Q)$$

dır. Şimdi iki projektörün toplam ve farklarının terslerinin açık formülleri verilebilir.

Teorem 3.2.3: $P, Q \in \mathbb{C}_d^d$ projektörleri $P-Q$ matrisi nonsingüler olacak şekilde verilmiş olsun. F ve G ise

$$F = P_{\mathcal{R}(P),\mathcal{R}(Q)} \text{ ve } \quad G = P_{\mathcal{N}(Q),\mathcal{N}(P)}$$

şeklinde tanımlansın. Bu takdirde

$$(P-Q)^{-1} = F - (I-G), \tag{3.2.5}$$

$$(P+Q)^{-1} = I - (I-G)F - (I-F), \tag{3.2.6}$$

$$(P-Q)^{-1} = (P+Q)^{-1}(P-Q)(P+Q)^{-1}, \tag{3.2.7}$$

$$(P+Q)^{-1} = (P-Q)^{-1}(P+Q)(P-Q)^{-1} \tag{3.2.8}$$

eşitlikleri sağlanır.

İspat: F ve G projektörleri yukarıda verilen projektörler olsun. Bu eşitliklerden aşağıdaki ifadeler elde edilir.

$$FP = P,\ PF = F,\ FQ = 0,\ \ QF = Q + F - I,$$

$$GP = G,\ \ PG = P,\ GQ = Q + G - I,\ \ QG = 0$$

Bu durumda basit hesaplamalar sonrasında

$$(P-Q)(F+G-I)=I$$
$$(P+Q)(I-F-G+2GF)=I$$

olduğu görülür. Buradan (3.2.5) ve (3.2.6) eşitlikleri elde edilir. (3.2.7) ve (3.2.8) eşitlikleri ise aşağıdaki eşitliklerden elde edilir:

$$(P-Q)(F+G-I)=I$$
$$(P-Q)(I-F-G+2GF)(P-Q)=(P-Q)$$

(3.2.5) ve (3.2.6) nın formülleri daha açık bir şekilde aşağıdaki gibi yeniden yazılabilir.

$$(P-Q)^{-1}=P_{\mathcal{R}(P),\mathcal{R}(Q)}-P_{\mathcal{N}(P),\mathcal{N}(Q)} \tag{3.2.9}$$
$$(P+Q)^{-1}=I-P_{\mathcal{N}(P),\mathcal{N}(Q)}P_{\mathcal{R}(P),\mathcal{R}(Q)}-P_{N(Q),\mathcal{N}(P)}P_{\mathcal{R}(Q),\mathcal{R}(P)} \tag{3.2.10}$$

$P,Q\in\mathbb{C}^{d\times d}$ projektörler olsun. $(P+Q)$ nun tersinirliği için aşağıdaki örnekte gösterildiği gibi $P-Q$ nun tersinirliği yeterlidir fakat gerekli değildir.

Örnek 3.2.1: P ve Q projektörleri aşağıdaki şekilde seçilsin.

$$P=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},\qquad Q=\begin{bmatrix}0&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

olsun. Bu takdirde

$$P+Q=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&2&0\\0&0&2\end{bmatrix},\qquad P-Q=\begin{bmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

olacaktır. Bu durumda $(P+Q)$ nonsingüler olduğu halde, $(P-Q)$ singülerdir. P$-Q$ nonsingüler olduğu durumda (3.2.6) eşitliğinden ve dolayısıyla da (3.2.10) den $P+Q$ nun tersi elde edilemez. Gerçekten de, (3.2.10) eşitliği

$$\mathbb{C}_1^d=\mathcal{R}(\mathrm{P})\oplus\mathcal{R}(\mathrm{Q})=\mathcal{N}(P)\oplus\mathcal{N}(Q)$$

direkt toplamlarının varlığını gerektirir ki bu da $P-Q$ nun tersinirliğini ortaya koyar.

Teorem 3.2.4: $P,Q\in\mathbb{C}_d^d$ projektörler olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:

i) $(P+Q)$ nonsingülerdir

ii) $\mathcal{R}(Q(I-P))\cap\mathcal{R}(P)=\{0\}$ ve $\mathcal{N}((I-P)Q)\cap\mathcal{N}(P)=\{0\}$

iii) $\mathcal{R}(Q(I-P))+\mathcal{R}(P)=\mathbb{C}_1^d$ ve $\mathcal{N}((I-P)Q)+\mathcal{N}(P)=\mathbb{C}_1^d$

İspat: (i $\Rightarrow$ ii) $x\in\mathcal{R}(Q(I-P))\cap\mathcal{R}(P)$ olsun. Bu takdirde herhangi bir $u\in\mathbb{C}_1^d$ için

$$x=Px=Qx=Q(I-P)u$$

ve

$$(P+Q)x=2x=2Q(I-P)u=(P+Q)(I-P)(2u)$$

yazılabilir. $(P+Q)$ matrisi nonsingüler olduğundan $x = (I-P)u$ yazılabilir ve buradan $x = Px = 0$ olduğu görülür. Bu ise $\mathcal{R}(Q(I-P)) \cap \mathcal{R}(P) = \{0\}$ olduğunu gösterir. Dahası $(I-P)Qx = 0$ ve $Px = 0$ olsun. $y = (P+Q)x$ tanımlayalım. Bu takdirde $Qy = y,\ Py = y$ ve $(P+Q)y = 2y = 2(P+Q)x$ yazılabilir. $P+Q$ nonsingüler olduğundan $x = \frac{1}{2}y$ olur ve bu nedenle

$$Qx = \frac{1}{2}Qy = \frac{1}{2}y = x;\ x = \frac{1}{2}y = \frac{1}{2}(P+Q)x$$

olup $x = 0$ olmak zorundadır. Bu ise $\mathcal{N}((I-P)Q) \cap \mathcal{N}(P) = \{0\}$ eşitliğini gerektirir. Böylece (ii) özelliği sağlanmış olur.

(ii ⇒ i): $(P+Q)x = 0$ olsun. Bu takdirde $Px = -Qx = QPx$ ve

$$Px = -QPx - Q(I-P)x = -Px - Q(I-P)x$$

yazılabilir. Buradan $Q(I-P)(-x) = 2Px \in \mathcal{R}(Q(I-P)) \cap \mathcal{R}(P) = \{0\}$ elde edilir. Bu nedenle $Px = 0 = Qx$ ve $x \in \mathcal{R}(P) = \{0\}$ olur ki bu da $x = 0$ olduğunu gösterir. Dolayısıyla $\mathcal{N}(P+Q) = \{0\}$ durumu ispatlanmış olur. i) ile iii) ifadelerinin denkliğinin gösterimi için

$$(P+Q) \text{ nonsingulardir} \Leftrightarrow P^* + Q^* \text{ nonsingülerdir}$$

olduğunu sonra ii) ve i) denkliklerini P ve Q yerine sırasıyla P^* ve Q^* alarak Lemma 3.2.1 e uygulayalım. $P+Q$ nun nonsingülerliği için gerek ve yeter şartın

$$\mathcal{R}(Q(I-P)) \cap \mathcal{R}(P) = \{0\} \text{ ve } \mathcal{N}(Q) \cap \mathcal{N}(P) = \{0\}$$

olduğunu Grob ve Trenkler [3] ispat etmişlerdir.

Teorem 3.2.5: $P, Q \in \mathbb{C}_d^d$ projektörler olsun. Bu takdirde eğer

$$\mathcal{N}((I-P)Q) \oplus \mathcal{N}(P) = \mathbb{C}_d^d \text{ ve } \mathcal{R}((I-P)Q) \oplus \mathcal{R}(P) = \mathbb{C}_1^d$$

ise $P+Q$ nonsigülerdir.[6]

Sonuç 3.2.2: P ve Q projektörleri için aşağıdaki ifadeler denktir.

i) $\mathbb{C}_1^d = \mathcal{N}(P) \oplus \mathcal{R}(Q) = \mathcal{R}(P) \oplus \mathcal{N}(Q)$ ve

$\mathcal{N}((I-P)Q) \cap \mathcal{N}(P) = \mathcal{R}((I-P)Q) \cap \mathcal{R}(P) = \{0\}$

ii) $P+Q$ ve $I-P-Q$ nonsingulardir.

iii) $PQ+QP$ nonsingülerdir.

İspat: $I-P$ ve Q ya uygulanan Teorem 3.2.1 den ve Teorem 3.2.5 den hareket ederek (i) ve (ii) nin denklikleri sağlanabilir. Bu eşitlik

$$(I-P-Q)((P+Q)^{-1}) = -(PQ+QP)$$

den gelir.

Şimdi de P, Q projektörleri için $P + Q$ nun nonsingüler fakat $P - Q$ nun singüler olduğu kabul edilsin. Bu formülde kullanılan projektörlerin çıkması zorunlu olmadığından $(\mathrm{P} + \mathrm{Q})^{-1}$ matrisini tanımlamak için herhangi bir eşitlik kullanılamaz. Ancak $P + Q$ tekil olmadığında $\mathbb{C}_1^d$ in başka bir birleşimi daha önce verilmişti.

Teorem 3.2.6: $P, Q \in \mathbb{C}_d^d$ projektörleri için $P + Q$ nonsingüler olsun. Bu takdirde

$$\mathbb{C}_1^d = \mathcal{R}(Q(I-P)) \oplus \mathcal{N}((\mathrm{I}-\mathrm{P})\mathrm{Q}), \tag{3.2.11}$$

yazılabilir. Ayrıca bu durumda

$$M = \mathcal{R}(Q(I-P)), \quad N = \mathcal{N}((I-P)Q),$$

$$U = \mathcal{R}(P) \cap \mathcal{R}(Q), \quad V = \mathcal{R}(Q(I-P)) \oplus \mathcal{N}(\mathrm{Q})$$

olmak üzere

$$(P+Q)^{-1} = \left(I - \tfrac{1}{2}P_{U,V}\right)\left(I - P_{\mathcal{N}(P),\mathcal{N}}P_{\mathcal{R}(P),M} - P_{\mathcal{N},\mathcal{N}(P)}P_{M,\mathcal{R}(P)}\right) \tag{3.2.12}$$

olduğu görülür.

İspat: $x \in \mathcal{R}(Q(I-P)) \cap \mathcal{N}((I-P)Q)$ olduğu kabul edilsin. Bu takdirde $x = Qx$ ve $x = Px + (I-P)Qx = Px$ olacaktır. Böylece (3.2.4) den dolayı

$$x \in \mathcal{R}(Q(I-P)) \cap \mathcal{R}(P) = \{0\}$$

elde edilir. Bu da

$$\mathcal{R}(Q(I-P)) \cap \mathcal{N}((I-P)Q) = \{0\} \tag{3.2.13}$$

olduğunu ispat eder. (3.2.13) eşitliği P, Q yerine P^*, Q^* kullanıldığında da geçerli olacaktır. Lemma 3.2.1 i (3.2.13) eşitliğine uygulandığında

$$\mathcal{R}(Q(I-P)) + \mathcal{N}((I-P)Q) = \mathbb{C}_1^d \tag{3.2.14}$$

elde edilecektir. (3.2.13) ve (3.2.14) iafdeleri birleştirildiğinde (3.2.1) bağıntısına ulaşılır. Şimdi de $S = P_{M,N}$ olsun. $P + Q$ nonsingüler olduğundan Teorem 3.2.5

$$\mathcal{N}(P) \cap \mathcal{N}(Q) = \{0\} \text{ ve } \mathcal{R}(P) \cap \mathcal{R}(Q) = \{0\}$$

olduğunu gösterir ve bu da

$$\mathcal{N}((I-P)Q) \cap \mathcal{N}(P) = \{0\} \text{ ve } \mathcal{R}(S) \cap \mathcal{R}(P) = \{0\},$$

olduğu anlamına gelir. Teorem 3.2.1 in (iii) $\Leftrightarrow$ (iv) parçasına göre $P - S$ nonsingülerdir. Bu durumda $P + S$ de nonsingülerdir. Buradan da

$$N = \mathcal{N}((I-P)Q) = \mathcal{N}(Q) \oplus (\mathcal{R}(P) \cap \mathcal{R}(Q)) = \mathcal{N}(Q) \oplus \mathrm{U}$$

yazılabilir. Bu eşitlikten gerekli işlemler yapılarak $\mathbb{C}^{d\times 1} = U \oplus \mathrm{V}$ elde edilir. $T = P_{U,V}$ tanımlanırsa $T + S = Q$ olduğu görülür. Öncelikle $U \subset \mathcal{N}$ olduğundan

$$ST = P_{M,N}P_{U,V} = 0$$

ve $M \subset V$ olduğundan

$$TS = P_{U,V}P_{M,N} = 0,$$

eşitliği yazılabilir. Bu durumda $\mathcal{N}(T+S) = \mathcal{N}(T) \cap \mathcal{N}(S)$ ve $\mathcal{R}(T) \oplus \mathcal{R}(S)$ eşitliklerinden haraketle $(T+S)^2 = T+S$ bir projektördür.

$$\mathbb{C}_1^d = \mathcal{N}(T+S) \oplus \mathcal{R}(T+S) = \mathcal{N}(Q) \oplus (U \oplus M)$$

$U \oplus M \subset \mathcal{R}(Q)$ olduğu için $\mathcal{R}(T+S) = \mathcal{R}(Q)$ ve dolayısıyla $T+S=Q$ olacaktır. Bu takdirde

$$P+S = P+S+T = (P+S)(I+(P+S)^{-1}T)$$

yazılabilir. Sonuç olarak $I+(P+S)^{-1}T$ nonsingüler olup

$$(P+Q)^{-1} = (I+(P+S)^{-1}T)^{-1}(P+S)^{-1}$$

dir. $P-S$ nonsingüler olduğundan $P+S$ nin tersinin formülünün

$$(P+S)^{-1} = I - P_{\mathcal{N}(P),\mathcal{N}(S)}P_{\mathcal{R}(P)\mathcal{R}(S)} - P_{\mathcal{N}(S),\mathcal{N}(P)}P_{\mathcal{R}(S),\mathcal{R}(P)} \tag{3.2.15}$$

şeklinde olduğu görülür. $(I+(P+S)^{-1}T)^{-1}$ ifadesini hesaplamak için

$$(P+S)T = PT + ST = PT = T$$

eşitliği kullanılır. Bu son eşitliğin ise ancak $\mathcal{R}(T) \subset \mathcal{R}(P)$ olduğunda geçerli olduğu görülür. Bu nedenle

$$(P+S)^{-1}T = T\,,$$

$$(I+(P+S)^{-1}T)^{-1} = (I+T)^{-1} = I - \tfrac{1}{2}T,$$

$$(P+Q)^{-1} = \left(I - \tfrac{1}{2}T\right)(P+S)^{-1}$$

eşitlikleri elde edilir.

Örnek 3.2.2: P ve Q projektörleri Örnek 3.2.1 deki gibi alınsın. Buradan

$$Q(I-P) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (I-P)Q = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

yazılabilir. (e_1, e_2, e_3) $\mathbb{C}^{d\times 1}$ nin standart bazı olmak üzere $\mathcal{R}\big(Q(I-P)\big) = span\,(e_2)$ ve $N\big((I-P)Q\big) = span(e_1 - e_2, e_3)$ olsun. Ayrıca $\mathcal{N}(P) = span\,(e_1)$ ve $\mathcal{R}(P) \cap \mathcal{R}(Q) = span\,(e_3)$ olsun. Buradan

$$P_{U,V} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad P_{\mathcal{N}(P),N} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, P_{\mathcal{R}(P),M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ve

$$P_{N,\mathcal{N}(P)} = I - P_{\mathcal{N}(P),N}, P_{M,\mathcal{R}(P)} = I - P_{\mathcal{R}(P),M}$$

elde edilir. Bu takdirde

$$\left(I - \frac{1}{2}U, V\right)\left(I - P_{\mathcal{N}(P),N}P_{\mathcal{R}(P),M} - P_{N,\mathcal{N}(P)P_{M,\mathcal{R}(P)}}\right) = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

olacaktır ki bu da $(P+Q)^{-1}$ ile uyuşur.

Lemma 3.2.2: $P_1, P_2 \in P$ olmak üzere

$$A: \mathcal{N}(P_1) \to [(I - P_1)P_2]\mathcal{N}(P_1)\mathcal{N}(P_1)\,, \;\mapsto Ax = (I - P_1)P_2\, x$$

İle tanımlanan A dönüşümünü göz önüne alalım. Bu takdirde

$$\mathcal{N}(A) = \mathcal{N}[(I - P_1)P_2]\mathcal{N}(P_1), \mathcal{R}(A) = \mathcal{R}[(I - P_1)P_2\,(I - P_1)] \tag{3.2.16}$$

eşitlikleri geçerlidir.[6]

Teorem 3.2.7: $P_1, P_2 \in P$, $c_1, c_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ve $c_1 + c_2 \neq 0$ olsun. Eğer Lemma 3.2.2 deki gibi bir A dönüşümü tanımlanırsa, bu takdirde $\mathcal{N}(c_1P_1 + c_2P_2)$ $\mathcal{N}(A)$ ile izomorfiktir.

İspat: Teoremin ispatında Lemma 3.2.2 kullanılacaktır. $\mathcal{N} = \mathcal{N}(c_1P_1 + c_2P_2)$ ve $c \neq 0$ olsun. Öncelikle

$$\mathcal{N} \cong (I - P_1)\mathcal{N} \text{ ve } \mathcal{N}(A) \cong (cI - P_2)\mathcal{N}(A) \tag{3.2.17}$$

olduğunu göstermek için $x \in N$ ve $(I - P_1)x = 0$ olsun. Bu takdirde

$$x = P_1x \;\text{ ve }\; (c_1 + c_2)P_2x = P_2(c_1P_1 + c_2P_2)x = 0$$

dir. Bu nedenle $P_2x = 0$ ve dolayısıyla $x = {c_1}^{-1}(c_1 + c_2)P_2x = 0$ yazılabilir. Bunun sonucu olarak $\mathcal{N}$ den $(I - P_1)\mathcal{N}$ ye uygulanan $I - P_1$ kısıtlaması bir izomorfizmdir. Eğer $x \in \mathcal{N}(A)$ ve $(cI - P_2)x = 0$ ise $P_1x = 0, P_2x = P_1P_2x = cx$ olacaktır. Sonuç olarak $P_2x = P_1cx = 0$, yani $x = 0$ olmalıdır. Bu nedenle $\mathcal{N}(A)$ den $(cI - P_2)\,\mathcal{N}(A)$ ye uygulanan $cI - P_2$ kısıtlaması bir izomorfizmdir. Şimdi $c \neq 0$ olmak üzere

$$(I - P_1)\mathcal{N} \subset \mathcal{N}(A) \text{ ve } \;(cI - P_2)\,\mathcal{N}(A) \subset \mathcal{N}, \tag{3.2.18}$$

olduğunu gösterelim. $x \in \mathcal{N}$ olduğunu varsayalım. Bu takdirde $P_1x = -\left(\frac{c_2}{c_1}\right)P_2x$ ve

$$\begin{aligned} A(I - P_1)x &= (I - P_1)P_2\,(I - P_1)x \\ &= (I - P_1)(P_2x - P_2\,P_1x) \\ &= (I - P_1)\left(P_2x + \left(\frac{c_2}{c_1}\right)P_2x\right) \\ &= \frac{c_1 + c_2}{c_1c_2}\,(I - P_1)(c_1P_1x + c_2P_2x) = 0 \end{aligned}$$

olacaktır. Yani $(I - P_1)x \in \mathcal{N}(A)$ yazılabilir. Bu da (3.2.18) eşitliğinin ilk kısmını ispat eder. Şimdi de $x \in \mathcal{N}(A)$ olduğunu kabul edelim ve $c = 1 + \frac{c_1}{c_2}$ olsun. Bu takdirde

$$P_1x = 0 \text{ ve } P_1P_2x = P_2x$$

olacağından

$$(c_1P_1 + c_2P_2)(cI - P_2)x = c_1\, cP_1x - c_1P_1P_2x - c_2P_2x + c_2\, cP_2x$$
$$= -(c_1 + c_2)P_2x + (c_1 + c_2)P_2x = 0$$

elde edilir. Yani $(cI - P_2)x \in \mathcal{N}$ olur ki bu da (3.2.18) eşitliğinin 2. kısmını ispat eder. Böylelikle (3.2.17) ve (3.2.18) eşitliklerinin birleştirilmesiyle ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.2.8: P_1, $P_2 \in P$ olsun. $c_1, c_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, c_1 + c_2 \neq 0,$ ve A da Lemma 3.2.2 deki gibi tanımlansın. Bu takdirde $c_1P_1 + c_2P_2$ nin sıfırlık derecesi sabittir ve

$$\mathcal{N}(c_1P_1 + c_2P_2) = \mathcal{N}(P_1 + P_2) = \mathcal{N}(A) = dim[\mathcal{N}[(I - P_1)P_2] \cap \mathcal{N}(P_1)]$$

eşitliği sağlanır. Özellikle $c_1P_1 + c_2P_2$ nonsingüler olması için gerek ve yeter şart $P_1 + P_2$ nin nonsingüler olmasıdır.

İspat: Teoremin ispatı Teorem 3.2.7 den ve $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ nın nonsingüler olması için gerek ve yeter şart $\mathcal{N}(A) = 0$ olmasıdır gerçeğinden elde edilir.

Teorem 3.2.9: P_1, $P_2 \in P$ olsun, $c_1, c_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, c_1 + c_2 \neq 0$ ve A matrisi de Lemma 3.2.2 deki gibi tanımlansın. Bu takdirde $c_1P_1 + c_2P_2$ nin rankı sabittir ve

$$\begin{aligned} r(c_1P_1 + c_2P_2) &= r(P_1 + P_2) \\ &= r(P_1) + r(A) \\ &= r(P_1) + r[(I - P_1)P_2(I - P_1)] \\ &= n - dim[\mathcal{N}[(I - P_1)P_2] \cap \mathcal{N}(P_1)] \end{aligned} \tag{3.2.19}$$

eşitliği sağlanır.

İspat: $r(c_1P_1 + c_2P_2) = n - \mathcal{N}(c_1P_1 + c_2P_2)$ olduğundan, $c_1P_1 + c_2P_2$ nin rankı sabittir ve bu rank Teorem 3.2.8 kullanılarak $P_1 + P_2$ nin rankına eşittir. Dolayısıyla Lemma 3.2.2 ve Teorem 3.2.7 ye göre

$$r(A) = \mathcal{N}(P_1) - \mathcal{N}(A) = n - r(P_1) - \mathcal{N}(A)$$

yazılabilir. Bu da

$$r(P_1 + P_2) = n - \mathcal{N}(P_1 + P_2) = n - \mathcal{N}(A) = r(P_1) + r(A)$$

olduğunu gösterir.

3.3 İki İdempotent matrisin Toplamları ve Farklarının Nonsingülerliği

$P^2 = P$ koşulunu sağlayan bir kompleks matrise idempotent matris yada projektör denir. $a, b \neq 0$ ve $a + b = c$ olduğunda $aP + bQ - cPQ$ matrisinin rankı sabit olup $P - Q$ nun rankıyla aynıdır ve $a, b \neq 0$ ve $a + b \neq c$ olduğunda ise $aP + bQ - cPQ$ nun rankı sabit olup bu da $P + Q$ matrisinin rankı ile aynıdır. Bu kısımda ise $a, b \neq 0$ olduğunda $aP + bQ - cPQ$ tersleri için açık formül verilecektir.

$\mathbb{C}, \mathbb{C}^n$ ve $\mathbb{C}_n^m$ sembolleri sırasıyla kompleks sayılar kümesini, n boyutlu kompleks sütun vektörlerinin kümesini ve $m \times n$ boyutlu kompleks matrislerin kümesini göstersin. Ayrıca $\mathcal{R}(A)$, $\mathcal{N}(A)$, A^* ve $r(A)$ ise sırasıyla, $A \in \mathbb{C}_n^n$ matrisinin ranj uzayı (sütun uzayı), sıfır uzayı, eşlenik transpozu ve rankını göstersin.

Lemma 3.3.1: $A, B \in \mathbb{C}_n^n$ olmak üzere

$$\mathcal{R}(A^*) + \mathcal{R}(B^*) = \mathbb{C}^n \Leftrightarrow \mathcal{N}(A) \cap \mathcal{N}(B) = \{0\} \tag{3.3.1}$$

$$\mathcal{R}(A^*) \cap \mathcal{R}(B^*) = \{0\} \Leftrightarrow \mathcal{N}(A) + \mathcal{N}(A) = \mathbb{C}^n \tag{3.3.2}$$

özellikleri sağlanır.

İspat: $M^\perp$ $\mathbb{C}^n$ nin alt kümesi olan M nin ortogonal komplementi (bütünleyeni) olsun.

$$(M \cap N)^\perp = M^\perp \cap N^\perp, \quad (M + N)^\perp = M^\perp \cap N^\perp$$

özdeşlikleri $\mathbb{C}^n$ nin herhangi iki M, N alt uzayı için sağlandığından ve

$$\mathcal{R}(A^*)^\perp = \mathcal{N}(A)$$

eşitliğinden istenilen sonuç elde edilmiş olur.

Lemma 3.3.2: $P, Q \in \mathbb{C}_n^n$ herhangi iki idempotent matris olsun. Bu takdirde

$$r(P - Q) = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} + r(P, Q) - r(P) - r(Q) \tag{3.3.3}$$

$$= r(P - PQ) + r(PQ - Q) \tag{3.3.4}$$

$$= r(P + Q) = r\begin{pmatrix} P & Q \\ Q & 0 \end{pmatrix} - r(Q) r\begin{pmatrix} Q & P \\ P & 0 \end{pmatrix} - r(P) \tag{3.3.5}$$

eşitliği sağlanır. [6]

Lemma 3.3.3: $P, Q \in \mathbb{C}_n^n$ herhangi iki idempotent matris olsun. Bu takdirde

i) $P - Q$ nonsingülerdir.

ii) $I - PQ$ ve $P + Q$ nonsingülerdir.

iii) $I - PQ \; ve \; P + Q - PQ$ nonsingülerdir.

iv) $\mathbb{C}^n = \mathcal{R}(\mathrm{P}) \oplus \mathcal{R}(\mathrm{Q}) = \mathcal{R}(P^*) \oplus \mathcal{N}(Q^*)$

v) $\mathbb{C}^n = \mathcal{R}(\mathrm{P}) \oplus \mathcal{R}(\mathrm{Q}) = \mathcal{N}(P) \oplus \mathcal{N}(Q)$

vi) $\mathcal{R}(P) \cap \mathcal{R}(Q) = \mathcal{N}(P) \oplus \mathcal{N}(Q) = \{0\}$

ifadeleri birbirine denktir.[6]

Lemma 3.3.4: $P, Q \in \mathbb{C}_n^n$ herhangi iki idempotent matris olsun. Bu takdirde

i) $P + Q$ nonsingülerdir.

ii) $\mathcal{N}\left((I - PQ)\right) \cap \mathcal{N}(P) = \{0\}$

iii) $\mathbb{C}^n = \mathcal{N}(Q(I - PQ)) \oplus \mathcal{N}(P)$

iv) $\mathcal{R}(P) \cap \mathcal{R}(Q) = \mathcal{R}(Q(I - P)) \oplus \mathcal{R}(P)$

ifadeleri birbirine denktir.[6]

Teorem 3.3.1: $a, b \in \mathbb{C} / \{0\}$ ve $c \in \mathbb{C}$ olmak üzere $P, Q \in \mathbb{C}_n^n$ herhangi iki idempotent matris olsun. Bu durumda aşağıdaki rank eşitlikleri doğrudur.

i) Eğer $c = a + b$ ise bu durumda

$$r(aP + bQ - cPQ) = r(P - Q) \tag{3.3.6}$$

ii) Eğer $c \neq a + b$ ise bu durumda

$$r(aP + bQ - cPQ) = r(P + Q) \tag{3.3.7}$$

İspat: Bir matrisin rankının bu matrise uygulanan elementer işlemlerle değişmeyen önemli bir sabit değer olduğunu yani elementer işlemlerin bir matrisin rankını değiştirmediğini hatırlayalım. Böylece basit elementer blok işlemlerle aşağıdaki sonucu elde edilebilir.

$$r\begin{pmatrix} -P & 0 & aP(I - Q) \\ 0 & -Q & Q \\ P & bQ - (c - a)PQ & 0 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} -P & 0 & 0 \\ 0 & -Q & 0 \\ 0 & 0 & aP + bQ - cPQ \end{pmatrix}$$

$$= r(P) + r(Q) + r(aP + bQ - cPQ) \tag{3.3.8}$$

Elementer blok matris işlemleriyle $P^2 = P$ ve $Q^2 = Q$ eşitliklerinden

$$r\begin{pmatrix} -P & 0 & aP(I-Q) \\ 0 & -Q & Q \\ P & bQ-(c-a)PQ & 0 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 0 & bQ-(c-a)PQ & aP(I-Q) \\ 0 & -Q & Q \\ P & bQ-(c-a)PQ & 0 \end{pmatrix}$$

$$= r\begin{pmatrix} 0 & bQ-(c-a)PQ & aP(I-Q) \\ 0 & 0 & Q \\ P & bQ-(c-a)PQ & 0 \end{pmatrix}$$

$$= r\begin{pmatrix} 0 & bQ-(c-a)PQ & aP \\ 0 & 0 & Q \\ P & bQ-(c-a)PQ & 0 \end{pmatrix}$$

$$= r\begin{pmatrix} 0 & bQ-(c-a)PQ & aP \\ 0 & 0 & Q \\ P & bQ & 0 \end{pmatrix}$$

$$= r\begin{pmatrix} 0 & bQ-(c-a)PQ & aP \\ 0 & 0 & Q \\ P & Q & 0 \end{pmatrix}$$

elde edilir.

i) Eğer $c = a + b$ ise yukarıdaki eşitlik

$$r\begin{pmatrix} -P & 0 & aP(I-Q) \\ 0 & -Q & Q \\ P & bQ-(c-a)PQ & 0 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 0 & b(I-P)Q & aP(I-Q) \\ 0 & -Q & Q \\ P & b(I-P)Q & 0 \end{pmatrix}$$

$$= r\begin{pmatrix} 0 & b(I-P)Q & aP(I-Q) \\ 0 & 0 & Q \\ P & b(I-P)Q & 0 \end{pmatrix}$$

$$= r\begin{pmatrix} 0 & b(I-P)Q & aP(I-Q) \\ 0 & 0 & Q \\ P & bQ & 0 \end{pmatrix}$$

$$= r\begin{pmatrix} 0 & b(I-P)Q & aP(I-Q) \\ 0 & 0 & Q \\ P & Q & 0 \end{pmatrix}$$

$$= r\begin{pmatrix} 0 & 0 & P \\ 0 & 0 & Q \\ P & Q & 0 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} + r(P, Q)$$

olur. Yukarıdaki eşitlik (3.3.8) bağıntısı ile birleştirilirse (3.3.3) eşitliğinden

$$r(aP + bQ - cPQ) = r(P - Q)$$

elde edilir.

ii) Eğer $c \neq a + b$ ise $P^2 = P$ olduğundan $bI - (c - a)P$ nonsingüler olup

$$[bI - (c - a)P]^{-1}P = (\mathrm{a} + \mathrm{b} - \mathrm{c})^{-1}P$$

eşitliği sağlanır. Dolayısıyla

$$r\begin{pmatrix} -P & 0 & aP(I-Q) \\ 0 & -Q & Q \\ P & bQ-(c-a)PQ & 0 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 0 & [bI-(c-a)P]Q & PQ \\ 0 & 0 & Q \\ P & Q & 0 \end{pmatrix},$$

$$r\begin{pmatrix} 0 & Q & (\mathrm{a}+\mathrm{b}-\mathrm{c})^{-1}\mathrm{P} \\ 0 & 0 & Q \\ P & Q & 0 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 0 & Q & P \\ 0 & 0 & Q \\ P & Q & 0 \end{pmatrix},$$

$$r\begin{pmatrix} 0 & Q & P \\ 0 & 0 & Q \\ P & 0 & 0 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} P & Q & 0 \\ Q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P \end{pmatrix}$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitlik (3.3.8) ile birleştirilirse (3.3.5) den

$$r(aP + bQ - cPQ) = r(P + Q)$$

olduğu görülür.

Sonuç 3.3.1: P ve Q $\mathbb{C}_n^n$ de iki idempotent matris ve $a, b \in \mathbb{C}/\{0\}, a + b \neq 0$ olsun. Bu takdirde $P + Q$ toplamı aşağıdaki rank eşitliklerini sağlar:

$$r(P + Q) = r(P + Q - PQ) \tag{3.3.9}$$

$$r(P + Q) = r(aP + bQ) \tag{3.3.10}$$

İspat: (3.3.7) bağıntısında $a = b = c = 1$ alındığında (3.3.9) eşitliği elde edilir. Benzer şekilde (3.3.7) bağıntısında $c = 0$ alındığında ise (3.3.10) eşitliği elde edilecektir.

Teorem (3.3.2): P ve Q $\mathbb{C}_n^n$ de herhangi iki idempotent matris $a, b \in \mathbb{C}/\{0\}$ ve $c \in \mathbb{C}$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki koşullar eşdeğerdir.

i) $P - Q$ nonsingülerdir. (3.3.11)

ii) Herhangi $a + b = c$ için $aP + bQ - cPQ$ nonsingülerdir. (3.3.12)

iii) $\mathbb{C}^n = \mathcal{R}(P(I-Q)) \oplus \mathcal{R}\big((I-P)Q\big)$ (3.3.13)

iv) $\mathbb{C}^n = \mathcal{N}(P(I-Q)) \oplus \mathcal{N}\big((I-P)Q\big)$ (3.3.14)

İspat: Teorem (3.3.1) den dolayı (i⇒ii) şeklindedir.

(ii ⇒ iii):Bu durumda

$$x = P(I-Q)(P-Q)^{-1}x + (I-P)Q(P-Q)^{-1}(-x)$$

eşitliğinden

$$\mathbb{C}^n = \mathcal{R}(P(I-Q)) + \mathcal{R}\big((I-P)Q\big)$$

elde edilir, fakat (3.3.4) bağıntısından

$$n = r(P-Q) = r(P-PQ) + r(PQ-Q)$$

yazılabilir. Bu durumda

$$\mathbb{C}^n = \mathcal{R}(P(I-Q)) \oplus \mathcal{R}\big((I-P)Q\big)$$

eşitliği elde edilebilir.

(iii ⇒ iv): $\mathbb{C}^n = \mathcal{R}(P(I-Q)) \oplus \mathcal{R}\big((I-P)Q\big)$ olduğundan (3.3.4) bağıntısına göre $r(P-Q) = n$ elde edilir.

(iv⇔i): $P-Q$ matrisinin nonsingüler olması için gerek ve yeter şart $Q^* - P^*$ matrisinin nonsingüler olmasıdır. Bu takdirde (a) ve (c) nin denkliğinde P ve Q matrislerinin yerine sırasıyla P^* ve Q^* matrisleri yazılır ve Lemma 3.3.1 de uygulandığında istenilen sonuç elde edilir.

Sonuç 3.3.2: P ve Q matrisleri $\mathbb{C}_n^n$ de iki idempotent matris olsun. Bu takdirde aşağıdaki koşullar denktir.

i) $PQ - QP$ nonsingülerdir.

ii) $P - Q$ ve $I - P - Q$ matrisleri nonsingülerdir.

iii) $\mathbb{C}^n = \mathcal{R}\big(P(I-Q)\big) \oplus \mathcal{R}\big((I-P)Q\big) = \mathcal{R}(I-P)(I-Q) \oplus \mathcal{R}(PQ)$

iv) $\mathbb{C}^n = \mathcal{N}(P(I-Q)) \oplus \mathcal{N}\big((I-P)Q\big) = \mathcal{N}\big((I-P)(I-Q)\big) \oplus \mathcal{N}(PQ)$

İspat: (i) ve (ii) ifadelerinin denkliği için $PQ - QP = (I - P - Q)(P - Q)$ olduğu göz önüne alınsın. (i) ile (iii) nin ve (i) ile (iv) nin denkliği Teorem 3.3.2 yi önce P ve Q ve ardından da $I - P$ ve Q matrislerine uygulamak suretiyle elde edilir.

Teorem 3.3.3: P ve Q $\mathbb{C}_n^n$ de herhangi iki idempotent matris $a, b \in \mathbb{C}\,/\{0\}$ ve $c \in \mathbb{C}$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki koşullar eşdeğerdir.

i) $P - Q$ nonsingülerdir. (3.3.14)

ii) Herhangi $a + b \neq c$ için $aP + bQ - cPQ$ nonsingülerdir. (3.3.15)

iii) $\mathbb{C}^n = \mathcal{R}\big(Q(I - P)\big) \oplus \mathcal{N}\big((I - P)Q\big)$ ve $\mathcal{N}(P) \cap \mathcal{N}(Q) = \{0\}$ (3.3.16)

iv) $\mathbb{C}^n = (\mathcal{R}(P) \cap \mathcal{R}(Q)) \oplus \mathcal{R}\big(Q(I - P)\big) \oplus \mathcal{N}(Q)$,
$\mathcal{N}(P) \cap \mathcal{N}(Q) = \{0\}$ (3.3.17)

İspat: Teorem (3.3.2) den (i⇒ii) olduğu görülür

(ii ⇒ iii): Eğer $x \in \mathcal{N}(P) \cap \mathcal{N}(Q)$ ise $Px = 0 = Qx, x = (P + Q)^{-1}(P +)x = 0$ dır. Dolayısıyla $\mathcal{N}(P) \cap \mathcal{N}(Q) = \{0\}$ olduğu elde edilir. $x \in \mathcal{R}\big(Q(I - P)\big) \cap \mathcal{N}\big((I - P)Q\big)$ olduğunu varsayalım. Bu takdirde $x = Qx = PQx$ olacaktır, dolayısıyla Lemma (3.3.4) ün (iv) eşitliğinden $x \in \mathcal{R}\big(Q(I - P)\big) \cap \mathcal{R}(P) = \{0\}$ elde edilir. Bu da

$$\mathcal{R}\,(Q(I - P)\,) \cap \mathcal{N}((I - P)Q) = \{0\} \tag{3.3.18}$$

olduğunun ispatıdır. (3.3.16) eşitliği P ve Q matrislerinin yerine sırasıyla P^* ve Q^* matrisleri alındığında da sağlanır. Buna Lemma 3.3.1 uygulandığında

$$\mathcal{R}\,(\mathrm{Q}(\mathrm{I} - P)\,) + \mathcal{N}((\mathrm{I} - P\,)\mathrm{Q}) = \{0\} \tag{3.3.19}$$

Eşitliği elde edilir. (3.3.16) ve (3.3.17) eşitlikleri birleştirilerek (c) sağlanır.

(iii ⇒ iv): Eğer $x \in \mathcal{N}(P + Q)$ ise bu takdirde $Px = -Qx = -PQx = QPx$ dir. Böylece

$$(I - P)QPx = 0 \text{ ve } 2Px = -Q(I - Px)$$

olacaktır. Bu nedenle

$$Px \in \mathcal{R}\big(Q(I - P)\big) \cap \mathcal{N}\big((I - P)Q\big) = \{0\}$$

bulunur. Buradan

$$Px = Qx = 0 \text{ ve } x \in \mathcal{N}(P) \cap \mathcal{N}(Q) = \{0\}$$

yazılabilir, bu da $\mathcal{N}(P+Q) = \{0\}$ olduğunu gösterir.

(iv⇒i) $\mathcal{N}\big((I-P)Q\big) = (\mathcal{R}(P) \cap \mathcal{R}(Q)) \oplus \mathcal{N}(Q)$ olduğunu belirtelim, bu durumda (iii) ve (iv) denkliğinin sağlandığı görülür.

Sonuç 3.3.3: P ve Q $\mathbb{C}_n^n$ de herhangi iki idempotent matris $a, b \in \mathbb{C}/\{0\}$ ve $c \in \mathbb{C}$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki koşullar eşdeğerdir.

i) $(P-Q)$ nonsingülerdir.

ii) $aP + bQ - cPQ$ ve $I - PQ$ nonsingülerdir.

İspat: Lemma 3.3.3(ii), Teorem 3.3.2 (ii) ve Teorem 3.3.3 (ii) den denklik görülür. Şimdi de $(I-PQ)^{-1}$ ve $(aP+bQ-cPQ)^{-1}$ için açık formüller verilebilir.

M ve N sırasıyla görüntü ve çekirdek olmak üzere $P_{M,N}$ yi projektörler için yazmak uygundur.

Teorem 3.3.4: $a, b \in \mathbb{C}/\{0\}$ ve $c \in \mathbb{C}$ olmak üzere P ve $Q \in \mathbb{C}_n^n$ matrisleri $P - Q$ nonsingüler olacak şekilde verilmiş olsun ve F ve G projektörleri

$$F = P_{\mathcal{R}(P),\mathcal{R}(Q)},\ G = P_{\mathcal{N}(Q),\mathcal{N}(P)}$$

şeklinde verilsin. Bu takdirde

$$(I-PQ)^{-1} = I - F + FG \tag{3.3.20}$$

dır. Eğer $c = a + b$ ise

$$(aP + bQ - cPQ)^{-1} = b^{-1}I - b^{-1}F + (ab)^{-1}(c-a)G \tag{3.3.21}$$

ve $c \neq a + b$ ise

$$(aP + bQ - cPQ)^{-1} = b^{-1}I - b^{-1}F + (ab)^{-1}(c-a)G$$
$$+(ab)^{-1}(a+b-c)GF \tag{3.3.22}$$

şeklindedir.

İspat: $P-Q$ nonsingüler olduğundan

$$F = P_{\mathcal{R}(P),\mathcal{R}(Q)} = P(P-Q)^{-1} = (P-Q)^{-1}(I-Q) \tag{3.3.23}$$

$$G = \mathcal{N}_{\mathcal{N}(Q),\mathcal{N}(P)} = (P-Q)^{-1}P = (I-Q)(P-Q)^{-1} \tag{3.3.24}$$

yazılabilir ki bu durum Lemma 3.3.3 den garantilenmiştir. Bu durumda F ve G nin her ikisininde idempotent matris olacağı yine lemma 3.3.3 den garanti altına alınmıştır. (3.3.22) ve (3.3.23) eşitliklerinden

$$FP = P, PF = F, FQ = 0, QF = Q + F - I;$$

$$GP = G, PG = P, GQ = Q + G - I, QG = 0$$

yazılabilir. Basit bir hesaplamanın ardından

$$(I - PQ)(I - F + FG) = I$$

eşitliği elde edilecektir. Eğer $c = a + b$ ise bu takdirde

$$(aP + bQ - cPQ)^{-1}[b^{-1}I - b^{-1}F + (ab)^{-1}(c-a)G] = I$$

yazılabilir. Eğer $c \neq a + b$ ise

$$(aP + bQ - cPQ)^{-1}[b^{-1}I - b^{-1}F + (ab)^{-1}(c-a)G + (ab)^{-1}(a+b-c)GF] = I$$

olacağı açıktır ki bundan (3.3.19), (3.3.20) ve (3.3.21) elde edilmiş olur.

Şimdi de P ve $Q \in \mathbb{C}_n^n$ idempotent matrisleri için $aP + bQ - cPQ$ matrisinin nonsingüler fakat $P - Q$ matrisinin singüler olduğunu varsayalım. Bu durumda (3.3.22) denklemi $(aP + bQ - cPQ)^{-1}$ nın formüle edilmesinde kullanılamaz. Çünkü (3.3.22) teki projektörlerin mevcut olması gerekmez.

Teorem 3.3.5: $aP + bQ - cPQ$ matrisi nonsingüler ve $P - Q$ matrisi singüler olacak şekilde $P,Q \in \mathbb{C}_n^n$ idempotent matrisleri verilmiş olsun. Bu takdirde

$$M = \mathcal{R}\big(Q(I-P)\big),\ \mathcal{N} = \mathcal{N}\big((I-P)Q\big),\ U = \mathcal{R}(P) \cap \mathcal{R}(Q),$$

$$V = \mathcal{R}(Q(I-P)) \oplus \mathcal{N}(Q)$$

olmak üzere

$$(aP + bQ - cPQ)^{-1} = \left[I(a+b-c)^{-1}(c-b)P_{U,V}\right]\left[b^{-1}I - b^{-1}P_{\mathcal{R}(P),M}\right]$$

$$+(ab)^{-1}(c-a)P_{\mathcal{N},\mathcal{N}(P)}$$

$$+(ab)^{-1}(a+b-c)P_{\mathcal{N},\mathcal{N}(P)}P_{\mathcal{R}(P),M} \tag{3.3.25}$$

yazılabilir.

İspat: $aP + bQ - cPQ$ nonsingüler ve $P - Q$ singüler olduğundan Teorem 3.3.2 den $a + b \neq c$ dir. Bu nedenle Teorem 3.3.3 den $P + Q$ nonsingülerdir. Yine Teorem 3.3.3 den dolayı $\mathbb{C}^n = M \oplus \mathcal{N} = U \oplus V$ eşitliği elde edilir. Şimdi $S = P_{M,\mathcal{N}}, T = P_{U,V}$ olsun. Bu durumda $U \subset \mathcal{N}$ olduğundan $ST = P_{M,\mathcal{N}}P_{U,V}=0$ ve $M \subset V$ olduğundan da $TS = P_{U,V}P_{M,\mathcal{N}}=0$ yazılabilir. Böylece

$\mathcal{N}(T+S) = \mathcal{N}(T) \cap \mathcal{N}(S) = V \cap \mathcal{N} = \mathcal{N}(Q)$ve $\mathcal{R}(T+S) = \mathcal{R}(T) \oplus \mathcal{R}(S) = U \oplus M$ olmak üzere $(T+S)^2 = T + S$ matrisi bir idempotent matristir. $\mathrm{T} + \mathrm{S}$ ve Q matrisleri idempotent olduğundan

$$\mathbb{C}^n = \mathcal{N}(T+S) \oplus \mathcal{R}(\mathrm{T}+\mathrm{S}) = \mathcal{N}(Q) \oplus (U \oplus M) = \mathcal{N}(Q) \oplus \mathcal{R}(Q)$$

yazılabilir. $U \oplus M \subset \mathcal{R}(Q)$ olduğundan $\mathcal{R}(\mathrm{T}+\mathrm{S}) = \mathcal{R}(Q)$ yani $\mathrm{T}+\mathrm{S} = \mathrm{Q}$ yazılabilir.

$S = P_{M,\mathcal{N}}$ ve $P + Q$ nonsingüler olduğundan

$$\mathcal{R}(Q(I-P)) \cap \mathcal{R}(P) = \{0\} = ((I-P)Q) \cap \mathcal{N}(Q)$$

olduğu, yani

$$\mathcal{R}(S) \cap \mathcal{R}(P) = \{0\} = \mathcal{N}(S) \cap \mathcal{N}(P)$$

olduğu görülür. Lemma 3.3.3 ün (i) $\Leftrightarrow$ (vi) bölümünden $P - S$ matrisi nonsingülerdir. Bu durumda lemma 3.3.3 e göre $P + S$ matrisi de nonsingülerdir. Sonuç olarak Teorem 3.3.3 den $aP + bS - cPS$ matrisi nonsingülerdir. Teorem 3.3.1 den

$$(aP + bQ - cPQ)^{-1} = b^{-1}I - b^{-1}P_{\mathcal{R}(P),\mathcal{R}(S)} + (ab)^{-1}(c-a)P_{\mathcal{N}(S),\mathcal{N}(P)}$$

$$+(ab)^{-1}(a+b-c)P_{\mathcal{N}(S),\mathcal{N}(P)}P_{\mathcal{R}(P),\mathcal{R}(S)}$$

$$= b^{-1}I - b^{-1}P_{\mathcal{R}(P),M} + (ab)^{-1}(c-a)P_{\mathrm{N},\mathcal{N}(P)}$$

$$+(ab)^{-1}(a+b-c)P_{\mathrm{N},\mathcal{N}(P)}P_{\mathcal{R}(P),M} \qquad (3.3.26)$$

eşitliği elde edilir. $Q = T + S$ ve $PT = T$ olduğundan

$$aP + bQ - cPQ = aP + bS - cPS + (b-c)T$$

$$= (aP + bS - cPS)[I + (b-c)(aP + bS - cPS)^{-1}T]$$

eşitliği yazılır. Sonuç olarak $I + (b-c)(aP + bS - cPS)^{-1}T$ matrisi nonsingüler olup

$$(aP + bQ - cPQ)^{-1}$$

$$= [I + (b-c)(aP + bS - cPS)^{-1}T]^{-1}(aP + bS - cPS)^{-1}$$

yazılabilir. $PT = T$ ve $ST = 0$ olduğu için $(aP + bQ - cPQ) = aT$ dir. Bu yüzden de $(aP + bS - cPS)^{-1}T = a^{-1}T$

olup

$$[I + (b-c)(aP + bS - cPS)^{-1}T]^{-1} = I + a^{-1}(b-c)T^{-1}$$

$$= I + (a+b-c)^{-1}(c-b)T \qquad (3.327)$$

elde edilir. Böylece (3.3.26) ve (3.3.27) birleştirilerek (3.3.25) eşitliği elde edilir.

3.4.1 İdempotent Matrisler İçin Rank Eşitlikleri

P ve Q iki idempotent matris olsun. Birçok durumda $P \pm Q$ nun nonsingülerlik, idempotentlik, tripotentlik, nilpotentlik gibi çeşitli özelliklerinin bilinmesi önemlidir. Bununla ilgili değişik kaynaklarda birçok çalışma mevcuttur. m boyutlu bir A kare matrisinin nonsingüler olması için gerek ve yeter koşulun $r(A) = m$ olduğunu hatırlayalım. Eğer $P \pm Q$ matrisi için bazı rank eşitsizlikleri ve eşitlikleri ortaya konulabilirse bu eşitsizliklerden $P \pm Q$ için değişik özellikler türetilebilir.

Teorem 3.4.1: P ve Q m mertebeli kompleks idempotent matrisler olsun. Bu durumda $P+Q$ matrisi aşağıdaki rank eşitliklerini sağlar:

$$r(P+Q) = r\begin{bmatrix} P & Q \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - r(Q) = r\begin{bmatrix} Q & P \\ P & 0 \end{bmatrix} - r(P), \tag{3.4.1}$$

$$r(P+Q) = r[P-PQ, Q] = r\begin{bmatrix} Q - PQ \\ P \end{bmatrix}, \tag{3.4.2}$$

$$r(P+Q) = r\begin{bmatrix} P - QP \\ Q \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} Q - PQ \\ P \end{bmatrix}, \tag{3.4.3}$$

$$r(P+Q) = r\big(P - PQ - QP + QPQ + r(Q)\big), \tag{3.4.4}$$

$$r(P+Q) = r(Q - PQ - QP + QPQ) + r(Q), \tag{3.4.5}$$

İspat: Bir matrisin rankının bu matrise elementer matris işlemleri uygulanmasıyla değişmeyen önemli bir sabit değer olduğunu, yani, bu işlemlerin matrisin rankını değiştirmediğini hatırlayalım. Böylece, öncelikle elementer blok matris işlemleriyle aşağıdaki basit sonucu bulunabilir.

$$r\begin{bmatrix} P & 0 & P \\ 0 & Q & Q \\ P & Q & 0 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} P & 0 & 0 \\ 0 & Q & 0 \\ 0 & 0 & -P-Q \end{bmatrix} = r(P) + r(Q) + r(P+Q)$$

Diğer yandan $P^2 = P$ ve $Q^2 = Q$ olduğunu belirtelim. Elementer blok matris işemleri yardımıyla aşağıdaki rank eşitliği elde edilir.

$$r\begin{bmatrix} P & 0 & P \\ 0 & Q & Q \\ P & 0 & 0 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} P & 0 & P \\ -QP & 0 & Q \\ P & Q & 0 \end{bmatrix}$$

$$= r\begin{bmatrix} 2P & 0 & P \\ 0 & 0 & Q \\ P & Q & 0 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} 2P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q \\ 0 & Q & \frac{1}{2}P \end{bmatrix}$$

$$= r\begin{bmatrix} P & Q \\ Q & 0 \end{bmatrix} + r(P)$$

Bu iki sonucun birleştirilmesiyle (3.4.1) deki ilk eşitlik elde edilir. Simetri yardımıyla da (3.4.1) deki ikinci eşitlik elde edilir. Tanım 2.1.20 deki Genelleştirilmiş ters tanımından hareketle herhangi bir idempotent matrisin kendisinin genelleştirilmiş tersi olacağı açıkça görülür.

Tian ve Styan[7] tarafından ortaya konulan

$$r[A,B] = r(A) + r(B - AA^{-}B) = r(B) + r(A - BB^{-}A) \tag{3.4.6}$$

$$r\begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} = r(A) + r(C - CA^{-}A) = r(C) + r(C - CA^{-}A) \tag{3.4.7}$$

$$r\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = r(B) + r(C) + r[(I_m - BB^{-})A(I_n - CC^{-})] \tag{3.4.8}$$

$$r\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} A & B - AA^{-}B \\ C - CA^{-}A & D - CA^{-}B \end{bmatrix}$$

$$= r(A) + r\begin{bmatrix} 0 & B - AA^{-}B \\ C - CA^{-}A & D - CA^{-}B \end{bmatrix} \tag{3.4.9}$$

rank eşitlikleri (3.4.1) deki iki blok matrise uygulandığında (3.4.2) -(3.4.5) eşitlikleri elde edilir.

Teorem 3.4.2: P ve Q m mertebeli kompleks idempotent matrisler ve α_1 ve α_2 sıfırdan farklı olmak üzere $\alpha_1 + \alpha_2 \neq 0$ koşulunu sağlayan sabitler olsun. Bu takdirde

$$r(\alpha_1 P + \alpha_2 Q) = r(P + Q) \tag{3.4.10}$$

dır, yani, $\alpha_1 P + \alpha_2 Q$ nun rankı α_1 ve α_2 sıfırdan farklı olmak üzere ve $\alpha_1 + \alpha_2 \neq 0$ koşulu altında sabit kalır.[7]

Bu eşitlik Tian tarafından bir problem olarak öne sürülmüş ve ispatlanmıştır. $\lambda P \neq 0$ ve $\mu \neq 0$ olmak üzere herhangi $P^2 = \lambda P$ ve $Q^2 = \lambda Q$ için Tian ve Styan tarafından ortaya konulan

$$r(\mu P+\lambda Q)= r\begin{bmatrix} P & Q \\ Q & 0\end{bmatrix} - r(Q) = r\begin{bmatrix} Q & P \\ P & 0\end{bmatrix} - r(P)$$

sonucundan yararlanarak bu eşitlik gösterilebilir. Bu sonuç iki idempotent matrisin lineer kombinasyonlarını içeren rank eşitliklerini sadeleştirmek için de kullanılabilir.

$r(\mu P+\lambda Q)$ yu içeren değişik rank eşitliklerini ortaya koymak için bu eşitlik kullanılmalıdır. P ve Q idempotent matrislerinin toplamına ilişkin diğer birtakım rank eşitlikleri aşağıda verilmiştir.

Teorem 3.4.3: P ve Q m mertebeli kompleks idempotent matrisler olsun. Bu takdirde

$$r(P+Q) = r\begin{bmatrix} P & Q & 0 \\ Q & 0 & P\end{bmatrix} - r[P,Q], \tag{3.4.11}$$

$$r(P+Q) = r\begin{bmatrix} P & Q \\ A & O \\ 0 & P\end{bmatrix} - r\begin{bmatrix} P \\ Q\end{bmatrix}, \tag{3.4.12}$$

$$r(P+Q) = r\begin{bmatrix} P-QP \\ Q-PQ\end{bmatrix} + r(P)+r(Q)-r[P,Q], \tag{3.4.13}$$

$$r(P+Q) = r[P-PQ, Q-QP] + r(P)+r(Q)-r\begin{bmatrix} P \\ Q\end{bmatrix}, \tag{3.4.14}$$

eşitlikleri geçerlidir.

İspat: (3.4.9) bağıntısı ve elementer blok matris işlemlerinden hareketle

$$\begin{aligned} r\begin{bmatrix} P & Q & 0 \\ Q & 0 & P\end{bmatrix} &= r\begin{bmatrix} P & Q-PQ & 0 \\ Q-QP & -Q & P\end{bmatrix} \\ &= r(P) + r\begin{bmatrix} 0 & Q-PQ & 0 \\ Q-QP & -PQ & P\end{bmatrix} \\ &= r(P) + r\begin{bmatrix} 0 & Q-PQ & 0 \\ Q-QP & 0 & P\end{bmatrix} \\ &= r(P) + r(Q-PQ) + r[Q-QP, P] \\ &= [P,Q] + r\begin{bmatrix} Q & P \\ P & 0\end{bmatrix} - r(P) \\ &= r[P,Q] + r(P+Q) \end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak (3.4.11) eşitliği sağlanır. Simetri özelliğinden dolayı aynı zamanda (3.4.12) eşitliği de sağlanır. (3.4.6) ve (3.4.7) eşitlikleri (3.4.11) ve (3.4.12) ye uygulanırsa (3.4.13) ve (3.4.14) eşitlikleri elde edilir.

Teorem 3.4.4: P ve Q m mertebeli idempotent matrisler olsun. Bu takdirde

$$r(P+Q) = r(P) + r(Q) - m + r\left(\begin{bmatrix} I_m - P \\ I_m - Q \end{bmatrix} [I_m - P \quad , I_m - Q]\right) \tag{3.4.15}$$

eşitliği geçerlidir.

İspat: Elementer blok matris işlemlerine göre

$$r\begin{bmatrix} P & 0 & I_m \\ 0 & Q & I_m \\ I_m & I_m & 0 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} 0 & 0 & I_m \\ 0 & P+Q & 0 \\ I_m & 0 & 0 \end{bmatrix} = 2m + r(P+Q)$$

elde edilir ve dolayısıyla elementer matris işlemleriyle

$$r\begin{bmatrix} P & 0 & I_m \\ 0 & Q & I_m \\ I_m & I_m & 0 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} P & 0 & I_m - P \\ 0 & Q & I_m - Q \\ I_m - P & I_m - Q & 0 \end{bmatrix}$$

$$= r(P) + r(Q) + r\begin{bmatrix} 0 & 0 & I_m - P \\ 0 & 0 & I_m - Q \\ I_m - P & I_m - Q & -2I_m \end{bmatrix}$$

$$= r(P) + r(Q) + r\begin{bmatrix} 0 & 0 & I_m - P \\ 0 & 0 & I_m - Q \\ I_m - P & I_m - Q & I_m \end{bmatrix}$$

$$= r(P) + r(Q) + \begin{bmatrix} I_m - P & (I_m - P)(I_m - Q) & 0 \\ (I_m - P)(I_m - Q) & I_m - Q & 0 \\ 0 & 0 & I_m \end{bmatrix}$$

$$= r(P+Q)$$

$$= r(P) + r(Q) + m + r\left(\begin{bmatrix} I_m - P \\ I_m - Q \end{bmatrix} [I_m - P \quad , I_m - Q]\right)$$

olduğu görülür. Böylelikle (3.4.15) elde edilmiş olur.

(3.4.11) - (3.4.15) in sağ yanındaki blok matrisler üzerinden, iki idempotent matrisin toplamı için bazı yeni özellikler türetilebilir. Özellikle,P ve Q kompleks sayılar cismi üzerinde ortogonal projektörler ise, bu takdirde (3.4.15) eşitliği

$$r[P+Q] = r(P) + r(Q) - m + r[I_m - P \quad , I_m - Q] \tag{3.4.16}$$

veya eşdeğer biçimde

$$r(P+Q) = r(P) + r(Q) - m + r(P^{\perp} + Q^{\perp}) \tag{3.4.17}$$

şeklinde olur.

Sonuç 3.4.1: P ve Q m mertebeli idempotent matrisler olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktir:

i) $P+Q$ nonsingulerdir.

ii) $r\begin{bmatrix} P & Q \\ Q & 0 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} P \\ Q \end{bmatrix} + r(Q)\ ve\ r\begin{bmatrix} P \\ Q \end{bmatrix} = m,$

iii) $r\begin{bmatrix} Q & P \\ P & 0 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} Q \\ P \end{bmatrix} + r(Q)\ ve\ r\begin{bmatrix} Q \\ P \end{bmatrix} = m,$

iv) $r\begin{bmatrix} P & Q \\ Q & 0 \end{bmatrix} = r[P, Q] + r(Q)\ ve\ r[P, Q] = m,$

v) $r\begin{bmatrix} Q & P \\ P & 0 \end{bmatrix} = r[Q, P] + r(P)\ ve\ r[Q, P] = m,$

vi) $r\begin{bmatrix} P & Q & 0 \\ Q & 0 & P \end{bmatrix} = r[P - PQ, Q - QP] + r[P, Q, 0]\ ve\ r[Q, P] = m,$

vii) $r\begin{bmatrix} P & Q \\ Q & O \\ 0 & P \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} P \\ Q \\ 0 \end{bmatrix} + r\begin{bmatrix} P \\ 0 \\ Q \end{bmatrix}\ ve\ r\begin{bmatrix} P \\ Q \end{bmatrix} = m,$

viii) $r\left(\begin{bmatrix} I_m - P \\ I_m - Q \end{bmatrix}[I_m - P \quad , I_m - Q]\right) = 2m - r(P) - r(Q),$

Bu durumda

$$r[A, B] = r(A) + r(B) - dim\,\mathcal{R}(A) \cap \mathcal{R}(B), \tag{3.4.18}$$

$$r[A, B] = r(A) + r(B) \Leftrightarrow \mathcal{R}(A) \cap \mathcal{R}(B) = \{0\}, \tag{3.4.19}$$

$$r\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = r(A) + r(B)\ dim\,\mathcal{R}(A^*) \cap \mathcal{R}(B^*), \tag{3.4.20}$$

$$r\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = r(A) + r(B) \Leftrightarrow \mathcal{R}(A^*) \cap \mathcal{R}(B^*) = \{0\}, \tag{3.4.21}$$

yazılabilir. Dolayısıyla Sonuç 3.4.1 deki bazı rank eşitlikleri matrislerin ranjları yoluyla da gösterilebilir. Tian ve Styan[7] aynı boyutta herhangi iki P ve Q idempotent matrisi için

$$r(P-Q) = r\begin{bmatrix} P \\ Q \end{bmatrix} + r[Q,P] - r(P) - r(Q) \tag{3.4.22}$$

eşitliğinin sağlandığını göstermişlerdir. Ayrıca hem $I_m - P$ ve hem de $I_m - Q$ matrisleri idempotenttir. Buradan haraketle

$$\begin{aligned} r(P-Q) &= r[(I_m - P) - (I_m - Q)] \\ &= r\begin{bmatrix} I_m - P \\ I_m - Q \end{bmatrix} + r[I_m - P \quad , I_m - Q] - r(I_m - P) - r(I_m - Q) \\ &= r\begin{bmatrix} I_m - P \\ I_m - Q \end{bmatrix} + r[I_m - P \quad , I_m - Q] + r(P) + r(Q) - 2m \end{aligned} \tag{3.4.23}$$

elde edilir. (3.4.22) ve (3.4.23) eşitliklerinin birleştirilmesi

$$\begin{aligned} & r\begin{bmatrix} I_m - P \\ I_m - Q \end{bmatrix} + r[I_m - P \quad , I_m - Q] \\ & \qquad = r\begin{bmatrix} P \\ Q \end{bmatrix} + r[Q,P] + 2m - 2r(P) - 2r(Q) \end{aligned} \tag{3.4.24}$$

olduğunu gösterir. Eğer P ve Q iki kompleks ortogonal projektör ise (3.4.24) ifadesi (3.4.17) ifadesine dönüşür.

Teorem 3.4.6: P ve Q m mertebeli idempotent matrisler olsun. Bu takdirde

$$r\begin{bmatrix} P & Q & & \\ & P & \ddots & \\ & & \ddots & Q \\ & & & P \end{bmatrix}_{k\times k} = (k-1)r(P+Q) + r(P), \tag{3.4.25}$$

$$r\begin{bmatrix} P & Q & & \\ & P & \ddots & \\ & & \ddots & Q \\ & & & P \end{bmatrix}_{k\times (k+1)} = (k-1)r(P+Q) + r[P,Q], \tag{3.4.26}$$

$$r\begin{bmatrix} P & Q & & \\ & P & \ddots & \\ & & \ddots & Q \\ & & & P \end{bmatrix}_{(k+1)\times k} = (k-1)r(P+Q) + r\begin{bmatrix} P \\ Q \end{bmatrix}, \tag{3.4.27}$$

eşitlikleri sağlanır. [7]

Teorem 3.4.7: P ve Q m mertebeli idempotent matrisler olsun. Bu takdirde

$$r\begin{bmatrix} (P+Q) & (P-Q) \\ (P-Q) & 0 \end{bmatrix} = r(P+Q) + r(P-Q), \tag{3.4.28}$$

$$r\begin{bmatrix} (P-Q) & (P+Q) \\ (P+Q) & 0 \end{bmatrix} = 2r(P+Q), \tag{3.4.29}$$

$$r\begin{bmatrix} P & Q & 0 \\ Q & P+Q & P \\ 0 & P & Q \end{bmatrix} = 2r(P+Q) + r(P-Q), \tag{3.4.30}$$

$$r\begin{bmatrix} P & Q & 0 \\ \pm Q & P & P \\ 0 & \pm Q & P \end{bmatrix} = 2r(P+Q) + r(P-Q), \tag{3.4.31}$$

eşitlikleri sağlanır.

İspat: $P^2 = P$ ve $Q^2 = Q$ olduğundan elementer blok matris işlemleriyle (3.4.28) de iddia edildiği gibi

$$r\begin{bmatrix} (P+Q) & (P-Q) \\ (P-Q) & 0 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} P & (P-Q) \\ (P-Q) & 0 \end{bmatrix}$$

$$= r\begin{bmatrix} P & -Q \\ -Q & 2Q-P \end{bmatrix}$$

$$= r(P) + r\begin{bmatrix} 0 & (I_m-P)Q \\ Q(I_m-P) & Q-P \end{bmatrix}$$

$$= r(P) + r\begin{bmatrix} (I_m-P)Q(I_m-P) & 0 \\ 0 & Q-P \end{bmatrix}$$

$$= r(P) + r[(I_m-P)Q(I_m-P)] + r(P-Q)$$

$$= r(P+Q) + r(P-Q)$$

elde edilir. Ayrıca $(P+Q)(P-Q)/2 + (P-Q)(P+Q)/2 = P-Q$ yazılabilir. Bu durumda elementer blok matris işlemlerinden hareketle (3.4.29) da iddia edildiği gibi

$$r\begin{bmatrix}(P-Q) & (P+Q)\\(P+Q) & 0\end{bmatrix}$$

$$= r\begin{bmatrix}P-Q-\frac{1}{2}(P+Q)(P-Q)-\frac{1}{2}(P-Q)(P+Q) & P+Q\\P+Q & 0\end{bmatrix}$$

$$= r\begin{bmatrix}0 & P+Q\\P+Q & 0\end{bmatrix} = 2r(P+Q)$$

yazılabilir. Bu ise

$$r\begin{bmatrix}P & Q & 0\\Q & P+Q & P\\0 & P & Q\end{bmatrix} = r\begin{bmatrix}P & Q-PQ & 0\\Q-QP & 0 & P-PQ\\0 & P-QP & Q\end{bmatrix}$$

$$= r(P)+r(Q)+r\begin{bmatrix}0 & Q-PQ & 0\\Q-QP & 0 & P-PQ\\0 & P-QP & 0\end{bmatrix}$$

$$= r(P)+r(Q)+r\begin{bmatrix}Q-PQ\\P-PQ\end{bmatrix}+r[Q-QP, P-PQ]$$

$$= 2r(P+Q)+r\begin{bmatrix}P\\Q\end{bmatrix}+r[P,Q]-r(P)-r(Q)$$

$$= 2r(P+Q)+r(P-Q)$$

olduğunu gösterir. (3.4.9) eşitliğinden ve elementer blok matris işlemlerinden yararlanarak (3.4.31) de iddia edildiği gibi

$$r\begin{bmatrix}P & Q & 0\\Q & P & Q\\0 & Q & P\end{bmatrix} = r\begin{bmatrix}P & Q-PQ & 0\\Q-QP & P-2Q & Q-QP\\0 & Q-PQ & P\end{bmatrix}$$

$$= 2r(P)+r\begin{bmatrix}0 & Q-PQ & 0\\Q-QP & P-2Q & Q-QP\\0 & Q-PQ & P\end{bmatrix}$$

$$= 2r(P)+r\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\0 & P-2Q & Q-QP\\0 & Q-PQ & 0\end{bmatrix}$$

$$= 2r(P) + r\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & P-2Q & Q-QP \\ 0 & Q-PQ & 0 \end{bmatrix}$$

$$= 2r(P) + r\begin{bmatrix} P-2Q & Q-QP \\ Q-PQ & 0 \end{bmatrix}$$

$$= 2r(P) + r\begin{bmatrix} P-2Q & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(I_m-P)Q(I_m-P) \end{bmatrix}$$

$$= 2r(P) + r(P-2Q) + r[(I_m-P)Q(I_m-P)]$$

$$= r(P) + 2r(P+Q)$$

ve

$$r\begin{bmatrix} P & Q & 0 \\ -Q & P & Q \\ 0 & -Q & P \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} P & Q-PQ & 0 \\ -Q+QP & P+2Q & Q-QP \\ 0 & -Q+PQ & P \end{bmatrix}$$

$$= 2r(P) + r\begin{bmatrix} 0 & Q-PQ & 0 \\ -Q+QP & P+2Q & Q-QP \\ 0 & -Q+PQ & 0 \end{bmatrix}$$

$$= 2r(P) + r\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & P+2Q & Q-QP \\ 0 & Q-PQ & 0 \end{bmatrix}$$

$$= 2r(P) + r\begin{bmatrix} P+2Q & Q-QP \\ Q-PQ & 0 \end{bmatrix}$$

$$= 2r(P) + r\begin{bmatrix} P+2Q & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(I_m-P)Q(I_m-P) \end{bmatrix}$$

$$= 2r(P) + r(P+2Q) + r[(I_m-P)Q(I_m-P)]$$

$$= r(P) + 2r(P+Q)$$

olduğu görülür. $P^2 = P$ ve $Q^2 = Q$ olsun. Bu durumda

$$r\begin{bmatrix} P \mp Q & P \\ Q & P \mp Q \end{bmatrix} = 2r(P+Q),$$

$$r\begin{bmatrix} P & \alpha P \\ Q & P \end{bmatrix} = 2r(P+Q), \qquad \alpha \neq 1,$$

$$r\begin{bmatrix} P & Q \\ Q & P \mp Q \end{bmatrix} = 2r(P+Q),$$

$$r\begin{bmatrix} P & Q & 0 \\ Q & P & 0 \\ Q & 0 & P \end{bmatrix} = 3r(P+Q),$$

$$r\begin{bmatrix} P & Q & Q \\ -Q & P & Q \\ -Q & -Q & P \end{bmatrix} = \; r(P) + 2r(P+Q),$$

$$r\begin{bmatrix} P+Q & P & Q \\ Q & P+Q & P \\ Q & P & P+Q \end{bmatrix} = \; r(P) + P + Q,$$

$$r\begin{bmatrix} P & Q & 0 & 0 \\ Q & P & Q & 0 \\ 0 & Q & P & Q \\ 0 & 0 & Q & P \end{bmatrix} = 4r(P+Q)$$

eşitliklerinin sağlandığı benzer biçimde gösterilebilir.

Teorem 3.4.8: P ve Q aynı boyutlu ortogonal projektörler olsun. Bu takdirde

$$r\begin{bmatrix} P+Q & PQ \\ QP & P+Q \end{bmatrix} = P+Q, \tag{3.4.32}$$

$$r\begin{bmatrix} P+Q & PQ & 0 \\ QP & P+Q & PQ \\ 0 & QP & P+Q \end{bmatrix} = 3r(P+Q) \tag{3.4.33}$$

eşitlikleri geçerlidir.

İspat: $P^2 = P = P^*$ ve $Q^2 = Q = Q^*$ olduğunu belirtelim. Böylece

$$\begin{bmatrix} P+Q & PQ \\ QP & P+Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P & Q & 0 \\ Q & 0 & P \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P & Q & 0 \\ Q & 0 & P \end{bmatrix}^*$$

yazılabilir. Diğer yandan $P+Q = [P,Q][P,Q]^*$ eşitliği göz önüne alınarak

$$\mathcal{R}(Q) \subseteq \mathcal{R}(P+Q) \quad \text{ve} \quad r(P+Q) = r[P,Q]$$

olur. Böylece

$$r\begin{bmatrix} P+Q & PQ \\ QP & P+Q \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} P & Q & 0 \\ Q & 0 & P \end{bmatrix}$$

$$= r\begin{bmatrix} P+Q & Q & 0 \\ P+Q & 0 & P \end{bmatrix}$$

$$= r\begin{bmatrix} P+Q & 0 & 0 \\ 0 & -Q & P \end{bmatrix}$$

$$= r(P+Q) - r[-Q, P] = 2r(P+Q)$$

olacaktır. Ayrıca

$$\begin{bmatrix} P+Q & PQ & 0 \\ QP & P+Q & PQ \\ 0 & QP & P+Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P & Q & 0 & 0 \\ 0 & P & Q & 0 \\ 0 & 0 & P & Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P & Q & 0 & 0 \\ 0 & P & Q & 0 \\ 0 & 0 & P & Q \end{bmatrix}^*$$

olduğundan

$$r\begin{bmatrix} P+Q & PQ & 0 \\ QP & P+Q & PQ \\ 0 & QP & P+Q \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} P & Q & 0 & 0 \\ 0 & P & Q & 0 \\ 0 & 0 & P & Q \end{bmatrix}$$

$$= r\begin{bmatrix} P+Q & Q & 0 & 0 \\ P+Q & P & Q & 0 \\ P+Q & 0 & P & Q \end{bmatrix}$$

$$= r\begin{bmatrix} P+Q & Q & 0 & 0 \\ 0 & P-Q & Q & 0 \\ 0 & -Q & P & Q \end{bmatrix}$$

$$= r(P+Q) + r\begin{bmatrix} P-Q & Q & 0 \\ 0 & P & Q \end{bmatrix}$$

$$= r(P+Q) + r\begin{bmatrix} P & Q & 0 \\ P & P & Q \end{bmatrix}$$

$$= r(P+Q) + r\begin{bmatrix} P & Q & 0 \\ 0 & P-Q & Q \end{bmatrix}$$

$$= r(P+Q) + r\begin{bmatrix} P & Q & 0 \\ 0 & P-Q & Q \end{bmatrix}$$

$$= r(P+Q) + r\begin{bmatrix} P & Q & 0 \\ 0 & P & Q \end{bmatrix}$$

$$= 3r(P+Q)$$

yazılabilir. Tümevarım yöntemiyle

$$r\begin{bmatrix} P+Q & PQ & & \\ QP & P+Q & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & PQ \\ & & QP & P+Q \end{bmatrix}_{(k+1)\times k} = n.r(P+Q) \tag{3.4.34}$$

olduğu gösterilebilir. P ve Q idempotent matrisleri için $P+Q$ nun rankı $P-Q$, $PQ \pm QP$ ve $I_m - P - Q$ matrislerinin ranklarıyla ilişkilidir. Aşağıdaki rank formülleri Tian ve Styan[7] tarafından gösterilmiştir.

$$r(P+Q) + r(PQ-QP) = r(P-Q) + r(PQ+QP), \tag{3.4.35}$$

$$r(P+Q) = r(P+Q-PQ), \tag{3.4.36}$$

$$r(P+Q) = r(PQ+QP) - (I_m - P - Q) + m, \tag{3.4.37}$$

Böylece $P \pm Q, PQ \pm QP$ ve $(I_m - P - Q)$ matrislerinin nonsingülerliği için gerek ve yeter koşullar ortaya konulabilir.

Teorem 3.4.9: P ve Q idempotent matrisler olmak üzere α_1 ve α_2 toplamları sıfırdan farklı skalerler olsun. Bu takdirde

$$r(PQ-QP) = r\begin{bmatrix} PQ \\ QP \end{bmatrix} + r[PQ, QP] - r(PQ) - r(QP), \tag{3.4.38}$$

$$r(PQ+QP) = r\begin{bmatrix} PQ & QP \\ QP & 0 \end{bmatrix} - r(QP) = r\begin{bmatrix} QP & PQ \\ PQ & 0 \end{bmatrix} - r(PQ), \tag{3.4.39}$$

$$r(\alpha_1 PQ + \alpha_2 QP) = r(PQ+QP), \tag{3.4.40}$$

dır ve dolayısıyla

i) $PQ = QP \Leftrightarrow \mathcal{R}(PQ) = \mathcal{R}(PQ)$ ve $[(PQ)]^* = [PQ]^*$

ii) $PQ + QP = 0 \Leftrightarrow PQ = QP = 0$

koşulları sağlanır.

İspat: (3.4.38) eşitliğinin ispatı Tian ve Styan[7] tarafından verilmiştir.

$$r\begin{bmatrix} PQ & 0 & \alpha_1 PQ \\ 0 & QP & \alpha_2 PQ \\ PQ & QP & 0 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} PQ & 0 & 0 \\ 0 & QP & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha_1 PQ - \alpha_2 PQ \end{bmatrix}$$

$$= r(PQ) + r(QP) + r(\alpha_1 PQ + \alpha_2 PQ) \tag{3.4.41}$$

olduğunu hatırlayalım. Diğer yandan $P^2 = P$ ve $Q^2 = Q$ dır. Ayrıca elementer blok matris işlemlerinden

$$r\begin{bmatrix} PQ & 0 & \alpha_1 PQ \\ 0 & QP & \alpha_2 PQ \\ PQ & QP & 0 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} PQ & 0 & \alpha_1 PQ \\ -QPQ & 0 & \alpha_2 PQ \\ PQ & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= r\begin{bmatrix} (1+\alpha_1 {\alpha_2}^{-1})PQ & 0 & \alpha_1 PQ \\ 0 & 0 & \alpha_2 PQ \\ PQ & QP & 0 \end{bmatrix}$$

$$= r\begin{bmatrix} PQ & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_2 QP \\ 0 & QP & \alpha_1(1+\alpha_1 {\alpha_2}^{-1})PQ \end{bmatrix}$$

$$= r\begin{bmatrix} \alpha_1(1+\alpha_1 {\alpha_2}^{-1})PQ & QP \\ QP & 0 \end{bmatrix} + r(PQ)$$

$$= r\begin{bmatrix} PQ & QP \\ QP & 0 \end{bmatrix} + r(PQ) \tag{3.4.42}$$

yazılabilir. Aşağıdaki sonuç benzer biçimde gösterilebilir.

$$r\begin{bmatrix} PQ & 0 & \alpha_1 PQ \\ 0 & QP & \alpha_2 PQ \\ PQ & QP & 0 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} PQ & QP \\ QP & 0 \end{bmatrix} + r(PQ) \tag{3.4.43}$$

(3.4.41), (3.4.42) ve (3.4.43) birleştirilerek (3.4.39) ve (3.4.40) eşitlikleri sağlanır.

$$(I_m - P) - (I_m - Q) - (I_m - P)(I_m - Q) = PQ - QP$$

olduğundan (3.4.8) eşitliğinden

$$r(PQ - QP) = r\begin{bmatrix} (I_m - P) & (I_m - Q) \\ (I_m - Q) & (I_m - P) \end{bmatrix}$$

$$+r[(I_m - P)(I_m - Q).(I_m - P)(I_m - Q)]$$

$$+2\,r(P) + 2r(Q) - 2m - r(PQ) - r(QP)$$

yazılabilir. (3.4.39) eşitliğinden $r(\alpha_1 PQ + QP) \geq max\{r(PQ), r(QP)\}$ olduğu görülür. Eğer P ve Q matrisleri $PQ = QP$ şartını sağlıyorsa, bu durumda bu matrislerle ilişkili birçok sonuç verilebilir. Geleneksel matris toplam ve çarpımlarına göre $a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{C}$ olmak üzere $a_0 I_m + a_1 P + a_2 Q + a_3 PQ$ şeklindeki tüm lineer kombinasyonlar $\mathbb{C}$ üzerinde bir 4 boyutlu cebir oluşturur. Bu cebir birçok ilginç özelliğe sahiptir. Örneğin,

$$L\,diag(M_1, M_2, M_3, M_4)L^{-1} = \begin{bmatrix} t_1 I_m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t_2 I_m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t_3 I_m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t_4 I_m \end{bmatrix}$$

eşitliği sağlanır. Burada

$$M_1 = a_0 I_m + a_1 P + a_2 Q + a_3 PQ,$$

$$M_2 = (a_0 + a_2) I_m + (a_1 + a_3)P - a_2 Q - a_3 PQ,$$

$$M_3 = (a_0 + a_1) I_m - a_1 P + (a_2 + a_3)Q - a_3 PQ\,,$$

$$M_4 = (a_0 + a_1 + a_2 + a_3)\, I_m - (a_1 + a_3)P - (a_2 + a_3)Q + a_3 PQ$$

ve $M = I_m - P - Q + PQ$ olmak üzere

$$L = L^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} M & Q - PQ & P - PQ & PQ \\ Q - PQ & M & -PQ & -(P - PQ) \\ P - PQ & -PQ & M & -(Q - PQ) \\ PQ & -(P - PQ) & -(Q - PQ) & M \end{bmatrix},$$

şeklindedir. Diğer yandan M_1 matrisi

$$M_1 = t_1(I_n - P - Q + PQ) + t_2(Q - PQ) + t_3(P - PQ) + t_4(PQ)$$

ve

$$M_1 = t_1{}^k(I_n - P - Q + PQ) + t_2{}^k(Q - PQ) + t_3{}^k(P - PQ) + t_4{}^k(PQ)$$

şeklinde parçalanabilir. Eğer $t_1, t_2, t_3, t_4 \neq 0$ ise, bu takdirde M_1 matrisi nonsingüler olup tersi

$$M_1^{-1} = \frac{1}{t_1}(I_n - P - Q + PQ) + \frac{1}{t_2}(Q - PQ) + \frac{1}{t_3}(P - PQ) + \frac{1}{t_2}(PQ)$$

şeklinde yazılabilir. Ayrıca aynı boyuttaki herhangi iki A ve B matrisi için

$$min_{A^-,B^-} r(A^- - B^-) = r(A - B) - r\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} - r[A, B] + r(A) + r(B)$$

eşitliğinin sağlandığı gösterilebilir. Böylece A ve B matrislerinin aynı genelleştirilmiş terse sahip olması için gerek ve yeter şart

$$r(A - B) = r\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} + r[A, B] - r(A) - r(B) \qquad (3.4.44)$$

olmasıdır. (3.4.44) ü (3.4.38) e uygulayarak, aynı mertebeye sahip herhangi iki P ve Q idempotent matrisi için PQ ve QP matris çarpımlarının aynı genelleştirilmiş terse sahip olduğu görülür.

Teorem 3.4.10: P ve Q m mertebeli idempotent matrisler, $A = PQP$ ve $B = QPQ$ ve sıfırdan farklı a_1, a_2 sabitleri için $a_1 + a_1 \neq 0$ olsun. Bu takdirde

$$r(A - B) = r\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} + r[A, B] - r(A) - r(B),$$

$$r(A + B) = r\begin{bmatrix} A & B \\ B & 0 \end{bmatrix} - r(B) = r\begin{bmatrix} B & A \\ A & 0 \end{bmatrix} - r(A),$$

$$r(a_1 A + a_2 B) = r(A + B),$$

$$r(A + B) \geq \max\{r(A), (B)\}$$

yazılabilir ve dolayısıyla

i) $A = B \Leftrightarrow \mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(B) ve\ \mathcal{R}(A^*) - \mathcal{R}(B^*)$,

ii) A+B=0 $\Leftrightarrow A = B = 0$

bağıntıları sağlanır. Eğer $P^2 = P$ ve $Q^2 = Q$ ise bu takdirde

$$(P-Q)^3 = (P-Q) = PQP - QPQ$$

olacağı kolayca ispatlanabilir. Böylece

$$r[(P-Q)^3 - (P-Q)] = r\begin{bmatrix} P & Q & P \\ Q & P & Q \end{bmatrix} + r[PQP, QPQ] - r(PQP) - r(QPQ)$$

olur. Özellikle

$$(P-Q)^3 = (P-Q) \iff \mathcal{R}(PQP) = \mathcal{R}(QPQ) \text{ ve } \mathcal{R}[(PQP)^*]$$

dır. Aynı mertebeli P ve Q idempotent matrisleri ve $k \geq 1$ için bazı genel sonuçlar aşağıda verilmiştir:

$$r[(PQ)^k - (QP)^k] = r\begin{bmatrix} (PQ)^k \\ (QP)^k \end{bmatrix} + r[(PQ)^k, (QP)^k] - r[(PQ)^k] - r[(QP)^k],$$

$$r[(PQ)^k + (QP)^k] = r\begin{bmatrix} (PQ)^k & (QP)^k \\ (QP)^k & 0 \end{bmatrix} - r[(QP)^k]$$

$$= r\begin{bmatrix} (QP)^k & (PQ)^k \\ (PQ)^k & 0 \end{bmatrix} - r[(PQ)^k],$$

$$r[(PQP)^k - (QPQ)^k] = r\begin{bmatrix} (PQP)^k \\ (QPQ)^k \end{bmatrix} + r[(PQP)^k, (QPQ)^k]$$

$$-r[(PQP)^k] - r[(QPQ)^k],$$

$$r[(PQP)^k + (QPQ)^k] = r\begin{bmatrix} (PQP)^k & (QPQ)^k \\ (QPQ)^k & 0 \end{bmatrix} - r[(QP)^k Q]$$

$$= r\begin{bmatrix} (QPQ)^k & (PQP)^k \\ (PQP)^k & 0 \end{bmatrix} - r[P(QP)^k]$$

Teorem 3.4.11: P ve Q m mertebeli idempotent matrisler olsun. Bu takdirde

$$r\begin{bmatrix} P \\ PQ \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} P \\ Q \end{bmatrix} + r(QP) - r(Q), \tag{3.4.45}$$

$$r[P, QP] = r[P, Q] + +r(PQ) - r(Q), \tag{3.4.46}$$

$$r\begin{bmatrix}PQ\\PQ\end{bmatrix}=r\begin{bmatrix}P\\Q\end{bmatrix}+r(PQ)+r(QP)-r(P)-r(Q), \tag{3.4.47}$$

$$r[PQ,QP]= r[P,Q]+ +r(PQ)+r(QP)-r(P)-r(Q) \tag{3.4.48}$$

eşitlikleri sağlanır.

İspat: Teoremin ispatında her ikisi de (3.4.18) den elde edilebilen

$$r[((I_m-Q)-P)(I_m-Q)]=m-r(P)-r(Q)+r(PQ) \tag{3.4.49}$$

$$r[(I_m-Q)(I_m-P)]=m-r(P)-r(Q)+r(QP) \tag{3.4.50}$$

eşitlikleri kullanılırsa elementer blok matris işlemlerinden

$$r\begin{bmatrix}Q & I_m\\ PQ & 0\\ 0 & P\end{bmatrix}=r\begin{bmatrix}Q & I_m\\ P & 0\\ -PQ & P\end{bmatrix}=r\begin{bmatrix}P\\Q\end{bmatrix}+m$$

ve

$$r\begin{bmatrix}Q & I_m\\ PQ & 0\\ 0 & P\end{bmatrix}=r\begin{bmatrix}Q & I_m\\ P & 0\\ -QP & 0\end{bmatrix}=r\begin{bmatrix}PQ\\QP\end{bmatrix}+m \tag{3.4.52}$$

eşitlikleri yazılabilir. Ayrıca $\mathcal{R}(P)\cap\mathcal{R}(I_m-P)=\{0\}$ ve $\mathcal{R}(Q)\cap\mathcal{R}(I_m-Q)=\{0\}$ olduğu bilinmelidir. Bu nedenle, elementer blok matris işlemlerinden (3.4.7), (3.4.49) ve (3.4.50) eşitlikleri kullanılarak,

$$\begin{aligned}r\begin{bmatrix}Q & I_m\\ P & 0\\ 0 & P\end{bmatrix}&=r\begin{bmatrix}Q & I_m-Q\\ P & -P\\ 0 & P\end{bmatrix}=r\begin{bmatrix}Q & (I_m-Q)(I_m-P)\\ P & 0\end{bmatrix}+r(P)\\ &=r\begin{bmatrix}P\\Q\end{bmatrix}+r[(I_m-Q)(I_m-P)]+r(P)\\ &=r\begin{bmatrix}P\\Q\end{bmatrix}+m-r(Q)+r(QP)\end{aligned} \tag{3.4.53}$$

ve

$$r\begin{bmatrix} P & I_m \\ PQ & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} P & I_m - P \\ PQ & PQ \\ 0 & Q \end{bmatrix}$$

$$= r\begin{bmatrix} P & (I_m - P)(I_m - Q) \\ PQ & 0 \end{bmatrix} + r(Q)$$

$$= r\begin{bmatrix} P \\ PQ \end{bmatrix} + m - r(P) + r(PQ) \qquad (3.4.54)$$

eşitlikleri elde edilir. (3.4.51) ve (3.4.53) eşitlikleri birleştirilirse (3.4.45) elde edilir. (3.4.52), (3.4.54) ve (3.4.45) eşitlikleri birleştirilerek ise (3.4.47) elde edilir. (3.4.46) ve (3.4.48) de verilen rank eşitlikleri

$$\begin{bmatrix} Q & P & 0 \\ I_m & 0 & P \end{bmatrix} \text{ ve } \begin{bmatrix} P & QP & 0 \\ I_m & 0 & Q \end{bmatrix}$$

blok matrislerinden benzer biçimde hesaplanabilir. (3.4.47) ve (3.4.48) ifadesi (3.4.38) de yerine yazılırsa

$$r(PQ - QP) = r\begin{bmatrix} P \\ PQ \end{bmatrix} + r[P, Q] + +r(PQ) + r(QP) - 2r(P) - 2r(Q)$$

sonucu elde edilir.

A nın herhangi bir genelleştirilmiş tersi için AA^- ve A^-A matrislerinin her ikisi de idempotenttir. Bununla beraber iki çarpımın aynı olması gerekmez. Öte yandan $AA^- + B^-B$ ve $AA^- \pm B^-B$ matrislerinin rankları A^- ve B^- matrislerinin seçimine bağlı olarak değişkenlik gösterir.

Lemma 3.4.1:

$A \in \mathbb{C}_k^m$ ve $B \in \mathbb{C}_m^l$ olsun. Bu takdirde

$$\max_{A^-B^-} r(AA^- + BB^-) = \min\{r(A), r(B)\},$$

$$\min_{A^-B^-} r(AA^- + BB^-) = r(A) + r(B) - r(BA),$$

$$\max_{A^-B^-} r(AA^- - BB^-) = \min\{2m - r(A) - r(B), r(A) + r(B)\}$$

$$\min_{A^-B^-} r(AA^- - BB^-) = r(A) + r(B) - 2r(BA)$$

olur. Böylece

i) $AA^- + B^-B$ nonsingülerdir $\Leftrightarrow$ $r(A) + r(B) \geq m$ olacak şekilde A^- ve B^- vardır.

ii) $AA^- + B^-B$ ifadesinin rankı A^- ve B^- ye göre sabittir

$\Leftrightarrow BA = 0$ veya $r(AB) = r(A) + r(B) - m$ eşitliği sağlamaktadır.

iii) $AA^- - B^-B$ nonsingülerdir $\Leftrightarrow$ $r(A) + r(B) = m$ olacak şekilde A^- ve B^- vardır.

iv) A^- ve B^- için $AA^- = B^-B$ $\Leftrightarrow r(A) + r(B) = 2r(BA)$ olacak şekilde A^- ve B^- vardır.

v) $AA^- - B^-B$ nin matrisinin rankı A^- ve B^- matrislerine bağlı olarak sabittir $\Leftrightarrow BA = 0$ veya $r(BA) = r(A) + r(B) - m$ dır.

Sonuç olarak

$$min_{A^-,(I_m-A)^-} r[AA^-, (I_m - A)^-(I_m - A)] = m,$$

$$min_{,(I_m+A)^-(I_m-A)^-} r[(I_m + A)^-(I_m + A) + (I_m - A)^-(I_m - A)] = m,$$

dır. Buradan herhangi A^- , $(I_m + A)^-$, $(I_m - A)^-$ matrisleri için

$$AA^- + (I_m - A)^-(I_m - A) \text{ ve } (I_m + A)\,(I_m + A)^- + (I_m - A)^-(I_m - A)$$

matrislerinin her ikisinin de nonsingüler olduğu görülür.

Lemma 3.4.2: $A \in \mathbb{C}_k^m$ ve $B \in \mathbb{C}_m^l$ olsun. Bu takdirde

$$\max_{A^-B^-} r(AA^- + BB^-) = r[A, B]$$

$$min_{A^-B^-} r(AA^- + BB^-) = max\,\{r(A), r(B)\}$$

$$max_{A^-B^-} r(AA^- - BB^-) = min\{r[A, B], r[A, B] + m - r(A) - r(B)\},$$

$$min_{A^-B^-}\, r(AA^- - BB^-) = max\{r[A,B] - r(A), r[A,B] - r(B)\},$$

dır. Böylelikle

i) $AA^- + BB^-$ nonsingülerdir $\Leftrightarrow$ $r[A,B] = m$ olacak şekilde A^- ve B^- vardır.

ii) $AA^- - BB^-$ nonsingülerdir $\Leftrightarrow$ $r[A,B] = m$ veya

$r[A,B] = r(A) + r(B)$ olacak şekilde A^- ve B^- vardır.

iii) $AA^- = BB^- \Leftrightarrow \mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(B)$ olacak şekilde A^- ve B^- vardır.

P_1 , P_2 ve P_3 üç idempotent matris olmak üzere $P_1 + P_2 + P_3$ için

$$r(P_1 + P_2 + P_3) = r\begin{bmatrix} \frac{1}{2}P_1 & P_2 & P_3 \\ P_2 & 0 & P_2P_3 \\ P_3 & P_3P_2 & 0 \end{bmatrix} - r(P_2) - r(P_3)$$

olduğunu göstermek kolaydır. Bu rank formülünden birçok çıkarımda bulunulabilir. Örneğin;

$P_1^2 = P_1$, $P_2^2 = P_2$ ve $P_3^2 = P_3$ ve $P_1 + P_2 + P_3 = 0$ ise bu takdirde $P_1 = P_2 = P_3 = 0$ dır. $P_1, P_2 \ldots P_k$ idempotent ve $k > 3$ olmak üzere $P_1 + P_{2+} \ldots + P_k$ toplamı için rank formülleri zaten açıktır.

Teorem 3.4.14: P ve Q aynı büyüklükte ortogonal projektörler olsun. Bu takdirde

$$\mathcal{R}\begin{bmatrix} P+Q & PQ & & \\ QP & P+Q & \ddots & \\ & \ddots & & PQ \\ & & QP & P+Q \end{bmatrix}_{n\times n} = \mathcal{R}\begin{bmatrix} P+Q & & & \\ & P+Q & & \\ & & \ddots & \\ & & & P+Q \end{bmatrix}_{n\times n}$$

eşitliği vardır.**[7]**

4. SONUÇ VE ÖNERİLER

Üç bölümden oluşan bu tez çalışmasının birinci Bölümünde Matris Cebirinin gelişimi ve kullanım alanından söz edilmiştir.İkinci Bölümü Matris ve Matris Uzayları ile ilgili genel bilgilerden oluşmaktadır ve bu bölümdeki teoremler ispat edilmeden genel olarak verilmiştir. Üçüncü Bölümde İdempotent Matrislerin Lineer Kombinasyonlarının Nonsingülerliği, Projektörlerin toplam ve farkları ve İdempotent Matrisler için Rank eşitlikleri verilmiştir.

Yapılan çalışmalara ilave olarak A kompleks idempotent bir matris, B kompleks t-potent bir matris olmak üzere $c_1A + c_2B$ lineer kombinasyonları idempotent bir matris olacak şekildeki tüm sıfırdan farklı (c_1, c_2) kompleks sayı çiftlerini belirleme problemi de ele alınabilir. Benzer biçimde üç İdempotent Matrisin de Lineer Kombinasyonlarının İdempotentlikleri de araştırma konusu olabilir.

5. KAYNAKLAR

[1] **Baksalary, J.K. and Baksalary, O.M. 2004,** Nonsigularity of Linear combinations of idempotent matrices, Linear Algebra and its applications, 388, 25-29.

[2] **Deniz, A, 2006.** İdempotent Matrisler ve İdempotent Matrislerin Lineer kombinasyonlarının Nonsingülerliği, Yüksek Lisans Tezi, Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 37 syf.

[3] **Grob, J., Trenkler, G, 1999.** Nonsingularity of the Difference of two Oblique Projektors, SIAM J.Matrix Anal. Appl. 21, 390-395.

[4] **Hacısalihoğlu, H.H, 1982.** Lineer Cebir, Gazi Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi Yayın No: 19,4. 765 syf.

[5] **Koliha, J.J. and Rakocevic, V. 2006,** The nullity and rank of Linear combinations of idempotent matrices, Linear Algebra and its applications, 418,11-14.

[6] **Koliha, J.J., Rakocevic, V. and Staskraba, I. 2004,** The difference and sum of projectors, Linear Algebra and its applications, 388, 279-288.

[7] **Tian, Y. And Styan, G.P.H. 2006.** Rank equalities for idempotent matrices with applications, Journal of computational and applied mathematics, 191, 77-97.

[8] **Zuo, Kezheng, 2010.** Nonsingularity of the Difference and sum of two idempotent matrices, Linear Algebra and its applications 433, 476-482.

6. ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	: Abdurrahman GÖZPINAR
Doğum Yeri	: Ulubey- Ordu
Doğum Tarihi	: 01/03/1979
Medeni Hali	: Evli
Bildiği Yabancı Dil	: İngilizce

Eğitim Durumu:

Lise:	: Ordu Lisesi	(1992-1995)
Lisans	: Dokuz Eylül Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi,	(1996-2001)
Yüksek Lisans	: Ordu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü,	(2010-2011)

Çalıştığı Kurumlar ve Yıl:

Ordu M.E.M. Çandır Ş.C.Ç.İ.Ö	(2001-2003)
ORDU Milli Eğitim Müdürlüğü Perşembe Atatürk İlköğretim Okulu	(2003-2007)
ORDU Milli Eğitim Müdürlüğü Anadolu Güzel Sanatlar Lisesi	(2007-2008)
ORDU Milli Eğitim Müdürlüğü Anadolu Öğretmen Lisesi	(2008-)

İletişim Bilgileri:

Bahçelievler Mah.291 sok. no:18 d-3 Merkez-Ordu.

e-mail: apo452@hotmail.com