T.C.

ORDU ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÇEŞİTLİ GÜÇLÜ KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ

AYŞE KÜBRA DEMİREL

DOKTORA TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ORDU 2019

T.C.

ORDU ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ÇEŞİTLİ GÜÇLÜ KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ

AYŞE KÜBRA DEMİREL

DOKTORA TEZİ

ORDU 2019

TEZ ONAY

Ayşe Kübra DEMİREL tarafından hazırlanan **"ÇEŞİTLİ GÜÇLÜ KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ"** adlı tez çalışmasının savunma sınavı 04/10/2019 tarihinde yapılmış ve jüri tarafından oy birliği / ~~oy çokluğu~~ ile Ordu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü MATEMATİK ANABİLİM DALI DOKTORA TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman
Prof. Dr. Selahattin MADEN

İkinci Danışman
Dr. Öğr. Üyesi Nihat ALTINIŞIK

Jüri Üyeleri	İmza
Üye Prof. Dr. Selahattin MADEN	
Üye Doç. Dr. Erhan SET	
Üye Doç. Dr. İmdat İŞCAN	
Üye Dr. Öğr. Üyesi Erdal ÜNLÜYOL	
Üye Dr. Öğr. Üyesi Sercan TURHAN	

21 / 03/ 2019 tarihinde enstitüye teslim edilen bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulu'nun 21 / 03 / 2019 tarih ve 2019 / 165 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

Enstitü Müdürü
Dr. Öğr. Üyesi Mehmet Sami GÜLER

TEZ BİLDİRİMİ

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan ve kullanılan intihal tespit programının sonuçlarına göre; bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

K Demirel

AYŞE KÜBRA DEMİREL

ÖZET

ÇEŞİTLİ GÜÇLÜ KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ

AYŞE KÜBRA DEMİREL

ORDU ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DOKTORA TEZİ 109 SAYFA

(TEZ DANIŞMANI: Prof. Dr. SELAHATTİN MADEN)

(İKİNCİ TEZ DANIŞMANI: Dr. Öğr. Üyesi. Nihat ALTINIŞIK)

Eşitsizlik teorisi, matematiksel analizin merkezi alanlarından biri olarak kabul edilmiş ve birçok bilimsel alanda giderek artan uygulamalarla hızla büyüyen bir disiplin haline gelmiştir. Son yıllarda bu konu birçok matematikçiden büyük ilgi görmüş ve literatürde çok sayıda yeni sonuç araştırılmıştır. Bu tez çalışmasında da, konveks fonksiyonların önemli bir sınıfı olan farklı türden güçlü konveks fonksiyonlar için bazı integral eşitsizlikleri verildi. Çalışmanın ilk bölümü giriş niteliğinde olup, konveks fonksiyonlar ile eşitsizlikler teorisinin tarihi gelişimine ve literatürde yer alan çalışmalara değinildi. İkinci bölümde, literatürde yer alan bazı konveks ve güçlü konveks fonksiyon tanımları verilip, literatürde yer alan ortalamalara ve özel fonksiyonlara değinildi. Üçüncü bölümde, farklı türden konveks ve güçlü konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard tipli ve Ostrowski tipli integral eşitsizlikleri ve tezin bulgular kısmında yararlanılacak lemmalar verildi. Dördüncü bölümde ise, güçlü $M_{\varphi}A$ konveks, güçlü geometrik-aritmetik (GA) konveks, güçlü harmonik ve güçlü p-konveks fonksiyonlar için yeni lemmalar ve bu lemmalar kullanılarak Hermite-Hadamard tipli ve Ostrowski tipli integral eşisizlikleri ile bazı sonuçlar verildi. Çalışmanın beşinci bölümünde tartışma ve sonuç, altıncı bölümünde ise tezde kullanılan kaynaklar verildi.

Anahtar Kelimeler: Hermite-Hadamard Tipli İntegral Eşitsizliği, Ostrowski Tipli İntegral Eşitsizliği, Konveks Fonksiyon, Güçlü $M_{\varphi}A$-Konveks Fonksiyon, Güçlü Geometrik-Aritmetik Konveks Fonksiyon, Güçlü p-Konveks Fonksiyon, Güçlü Harmonik Konveks Fonksiyon.

ABSTRACT

INTEGRAL INEQUALITIES FOR SEVERAL STRONGLY CONVEX FUNCTIONS

AYŞE KÜBRA DEMİREL

ORDU UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

MATHEMATICS

PHD THESIS, 109.

(SUPERVISOR: Prof. Dr. SELAHATTİN MADEN)

(CO-SUPERVISOR: Assist. Prof. Dr. Nihat ALTINIŞIK)

The theory of inequality has been recognized as one of the central areas of mathematical analysis and has become a rapidly growing discipline with increasing applications in many scientific fields. In recent years, this topic has attracted great attention from many mathematicians and many new results have been researched in the literature. In this thesis, some integral inequalities for the different types of strongly convex functions, which are an important class of convex functions, are given. The first part of the thesis is an introduction that includes the historical development of the theory of inequalities and convex functions and the studies in the literature are mentioned. In the second part, some convex and strongly convex function definitions placed in the literature are given and some averages and some special functions placed in the literature are mentioned. In the third part, Hermite-Hadamard type and Ostrowski type integral inequalities are given for different kind of convex and strongly convex functions. In the fourth part, the new lemmas for strongly $M_\varphi A$-convex, strongly geometric-arithmetic (GA)-convex, strongly p-convex and strongly harmonic convex functions are given. Furthermore using these lemmas, Hermite-Hadamard type and Ostrowski type integral inequalities and some results are given. In the fifth part of the thesis, the discussion and conclusion and in sixth part, it is given references which are used in the thesis.

Keywords: Hermite-Hadamard Type Integral Inequality, Ostrowski Type Integral Inequality, Convex Function, Strongly $M_\varphi A$-Convex Function, Strongly Geometric-Arithmetic Convex Function, Strongly p-Convex Function, Strongly Harmonic Convex Function.

TEŞEKKÜR

Tüm çalışmalarım süresince bilgi ve deneyimleri ile bana yol gösteren değerli hocam, danışmanım Sayın Prof. Dr. Selahattin MADEN'e ve Ordu Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü öğretim üyelerine en içten duygularımla teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca, tezimin tamamlanmasında önemli katkıları bulunan Giresun Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü öğretim üyeleri Sayın Dr. Öğr. Üyesi Sercan TURHAN ve Sayın Doç. Dr. İmdat İŞCAN'a yürekten teşekkürü bir borç bilirim.

Bu tez çalışmamı, hayat mücadelesine 1982 yılında Atatürk Üniversitesi Matematik Bölümünde başlayan, verdiği mücadeleden hiç vazgeçmeyen canım anneme ve çok istediği halde çalışmamın bittiğini görmeye ömrü vefa etmeyen sevgili babama ithaf ediyorum.

İÇİNDEKİLER

Sayfa
TEZ BİLDİRİMİ I
ÖZET II
ABSTRACT III
TEŞEKKÜR IV
İÇİNDEKİLER V
ŞEKİL LİSTESİ VI
SİMGELER ve KISALTMALAR LİSTESİ VII
1. GİRİŞ 1
2. TEMEL KAVRAMLAR 5
2.1 Konveks Fonksiyonlar ile İlgili Temel Tanım ve Teoremler 5
2.2 Bazı Konveks Fonksiyon Sınıfları ve Temel Tanımlar 10
2.3 Bazı Güçlü Konveks Fonksiyon Sınıfları ve Temel Tanımlar 23
3. MATERYAL VE YÖNTEM 26
3.1 Bazı Önemli Eşitsizlikler 26
3.2 Konveks Fonksiyonlar İle İlgili Önemli Eşitsizlikler 28
3.2.1 Hermite-Hadamard İntegral Eşitsizliği 28
3.2.2 Ostrowski İntegral Eşitsizliği 32
4. ARAŞTIRMA BULGULARI 36
4.1 Güçlü $M\varphi A$-Konveks Fonksiyonlar için Hermite-Hadamard Tipli İntegral Eşitsizlikleri 36
4.2 Güçlü GA-Konveks (Geometrik-Aritmetik Konveks) Fonksiyonlar için Hermite-Hadamard Tipli İntegral Eşitsizlikleri 44
4.3 Güçlü p-Konveks Fonksiyonlar için Hermite-Hadamard Tipli İntegral Eşitsizlikleri 51
4.4 Güçlü (GA)-Konveks (Geometrik-Aritmetik Konveks) Fonksiyonlar için Ostrowski Tipli İntegral Eşitsizlikleri 59
4.5 Güçlü Harmonik Konveks Fonksiyonlar için Ostrowski Tipli İntegral Eşitsizlikleri 80
5. TARTIŞMA VE SONUÇ 93
6. KAYNAKLAR 94
ÖZGEÇMİŞ 99

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil 2.1 Konveks Küme 6
Şekil 2.2 Konveks Olmayan (Konkav) Küme 6
Şekil 2.3 Konveks Fonksiyon 7

SİMGELER ve KISALTMALAR LİSTESİ

$C(I)$	:	Konveks Fonksiyonlar Sınıfı
f'	:	f Fonksiyonunun Birinci Mertebeden Türevi
f''	:	f Fonksiyonunun İkinci Mertebeden Türevi
K_s^1	:	Birinci Anlamda s-Konveks Fonksiyonlar Sınıfı
K_s^2	:	İkinci Anlamda s-Konveks Fonksiyonlar Sınıfı
$K_m(b)$	:	m-Konveks Fonksiyonlar Sınıfı
$L[a,b]$	:	$[a,b]$ Aralığında İntegrallenebilir Fonksiyonlar Kümesi
$P(I)$	:	P Fonksiyonlar Sınıfı
$SX(h,I)$	:	h-Konveks Fonksiyonlar Sınıfı
$SV(h,I)$	:	h-Konkav Fonksiyonlar Sınıfı
$Q(I)$	:	Godunova-Levin Fonksiyonlar Sınıfı
I	:	$\mathbb{R}$ ' de Herhangi Bir Aralık
I^0	:	I 'nın İçi
$\mathbb{R}$	:	Reel Sayılar
$\mathbb{R}_+$	:	$(0,\infty)$ Aralığı
$\mathfrak{R}$	:	$\mathbb{R}_+$ Aralığındaki İki Sayının Tüm Ortalama Değerlerinin Ailesi
$\mathbb{C}$	:	Kompleks Sayılar
Γ	:	Gama Fonksiyonu
$\beta(x,y)$	:	x,y Pozitif Reel Sayılarının Beta Fonksiyonu
${}_2F_1(a,b;c;z)$	:	Hipergeometrik Fonksiyon

1. GİRİŞ

Konvekslik M.Ö. 250 yılında Arşimetin ünlü π değerini hesaplamasına (sınırlı düzgün çokgenler kullanarak) dayanan bir kavramdır. Arşimet bir konveks şeklin çevresinin, onu çevreleyen diğer konveks şeklin çevresinden daha küçük olduğu gerçeğini fark etmiştir (Niculescu ve Persson, 2006). Konvekslik son yıllarda, uygulamalı matematiğin birçok alanında extremum problemlerinin çalışmalarında giderek artan bir öneme sahiptir (Rockafellar, 1972). Minimize edilecek bir fonksiyonun grafiği konveks olduğunda, uç problemlerini incelemek için konvekslik yararlı bir özellik olur (Kurdila ve Zabarankin, 2005). Ayrıca, konvekslik endüstride, iş dünyasında, tıpta ve sanatta çok sayıda uygulama ile günlük hayatımızda büyük bir etkiye sahiptir (Niculescu ve Persson, 2006).

Konveks bir fonksiyonun görüntü kümesi konveks olduğu için, konveks fonksiyonlar teorisi genel bir konvekslik konusudur. Bununla birlikte, hemen hemen matematiğin tüm dallarına dokunan önemli bir teoridir. Grafik analizi, matematikte konvekslik kavramını gerektiren ilk konulardan biridir. Konveksliği tanımak için ikinci türev testi güçlü bir araçtır (Niculescu ve Persson, 2006).

Tarihsel, mantıksal ve pedagojik olarak konveks fonksiyon çalışmaları reel bir değişkenin reel değerli fonksiyonları bağlamında başlar (Roberts ve Varberg, 1973). Teorik ve uygulamalı matematikte çok yaygın olarak kullanılan konveks fonksiyonların iki temel özelliği vardır: Kesin konveks bir fonksiyon en fazla bir minimuma sahiptir ve herhangi bir yerel minimum aynı zamanda globaldir. Konveks fonksiyonlar teorisinin yoğun bir araştırma faaliyeti vardır ve geometrik fonksiyonel analiz, matematiksel ekonomi, konveks analiz ve lineer olmayan optimizasyonda önemli sonuçlar elde edilmiştir (Niculescu ve Persson, 2006). Konveks analiz, matematiksel ekonomide, özellikle optimum ve denge kavramları konusunda önemli bir rol oynar (Beckmann ve Künzi, 1978).

1905 ve 1906 yıllarında, ünlü Danimarkalı mühendis ve matematikçi J. L. W. V. Jensen tarafından yayınlanan iki makaleden sonra, konveks fonksiyonlar teorisi hızlı bir gelişme göstermiştir. Bu hızlı gelişmenin nedenleri şu şekilde sıralanabilir: Birincisi, modern analizde birçok alan doğrudan veya dolaylı olarak konveks fonksiyonların uygulamalarını içerir; ikinci olarak ise konveks fonksiyonlar eşitsizlik teorisi ile yakından ilişkilidir ve birçok önemli eşitsizlikler konveks fonksiyonların uygulamalarının sonuçlarıdır (Pecaric ve ark., 1992).

Eşitsizlikler, matematiğin hemen hemen tüm dallarında ve diğer bilim alanlarında önemli bir rol oynamaktadır (Pachpatte, 2005). Her matematikçinin eşitsizliği sevdiği söylenir. Richard Bellman'ın zarif bir şekilde söylediği gibi, eşitsizlikleri incelemek için pratik, teorik ve estetik olmak üzere üç neden vardır. Birçok pratik araştırmada, bir niceliği diğeri ile sınırlandırmak gerekir. Klasik eşitsizlikler bu amaç için çok faydalıdır. Teorik açıdan bakıldığında, çok basit sorular tüm teorileri oluşturur. Örneğin, bir negatif olmayan bir niceliğin diğerini ne zaman kapsadığı sorulabilir. Bu basit soru, pozitif operatörler teorisini ve diferansiyel eşitsizlikler teorisini oluşturur. Son olarak, estetik açıdan bakılırsa müzik, sanat ya da matematiğin bazı parçalarının güzel olduğu konusunda genel bir fikir birliği vardır. Onları çekici kılan ise eşitsizliklerin zarafetidir (Mitrinovic ve ark., 1991).

Eşitsizlikler teorisi, sürekli bir gelişim sürecindedir ve eşitsizlikler, matematiğin çeşitli dallarında çok çeşitli problemleri incelemek için çok etkili ve güçlü araçlar haline gelmiştir. Eşitsizlikler teorisi, son yüzyılda matematiksel analizin merkezi alanlarından biri olarak kabul edilmiş ve birçok bilimsel alanda giderek artan uygulamalarla hızla büyüyen bir disiplin haline gelmiştir. Bu büyüme, eşitsizlikler teorisinin matematiksel analizin bağımsız bir alanı olarak ortaya çıkmasına neden olmuştur. Geçtiğimiz on yılda, eşitsizlikler teorisindeki hızlı gelişme beklenmedik sonuçlar doğurmuş ve mevcut sonuçlara yönelik yeni ve basit kanıtlar ortaya çıkarmıştır. Genel olarak bazı özel eşitsizliklerin, farklı matematik dallarının gelişiminde yararlı ve önemli bir araç olduğu kabul edilmektedir. Son yıllarda bu konu birçok matematikçiden büyük ilgi görmüş ve literatürde çok sayıda yeni sonuçlar elde edilmiştir (Pachpatte, 2005).

Eşitsizlikler konusunda ilk kapsamlı çalışma Hardy, Littlewood ve Polya tarafından 1934'de yapılan çalışmadır. Hardy ve arkadaşları elde ettikleri birçok yeni eşitsizliği "Inequalities" isimli kitapta toplamışlardır (Hardy ve ark., 1934). Daha sonra 1961 yılında Beckenbach ve Bellman'da eşitsizlikler ile ilgili yeni sonuçların yer aldığı "An Introduction to Inequalities" isimli bir kitap yazmışlardır (Beckenbach ve

Bellman, 1961). 1970 de Mitrinovic tarafından yayınlanan “Analytic Inequalities” isimli kitap, eşitsizlikler ile ilgili yeni konular içermektedir (Mitrinovic, 1970).

Eşitsizlik teorisi konveks fonksiyonlarla doğrudan ilgilidir. Literatürde tanımlı olan birçok eşitsizliğin yanı sıra sadece konveks fonksiyonlar için tanımlanan bazı integral eşitsizlikleri de vardır. Bu eşitsizliklerin en önemlisi olan Hermite-Hadamard eşitsizliği ile ilgili önemli bir kaynak Dragomir ve Pearce tarafından 1991 yılında yazılan “Selected Topics on Hermite-Hadamard Inequalities and Applications” isimli kitaptır (Dragomir ve Pearce, 1991). Konveks fonksiyonlar için tanımlanan bir diğer önemli eşitsizlik Ostrowski eşitsizliğidir. Dragomir ve Themistocles tarafından 2002 yılında yazılan “Ostrowski Type Inequalities and Applications in Numerical Integration” isimli kitap bu eşitsizlik ile ilgili yazılmış temel kaynaklardandır (Dragomir ve Themistocles, 2002).

Konveks fonksiyonların önemli bir sınıfı olan güçlü konveks fonksiyonlar ve bunlarla ilgili eşitsizlikler için literatürde var olan diğer çalışmalardan bazıları şu şekilde sıralanabilir:

M. A. Noor, K. I. Noor ve S. Iftikhar, güçlü harmonik konveks fonksiyonlar ile ilgili çalışmalar yapmış, güçlü log-konveks ve güçlü harmonik konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliğini elde etmişlerdir (Noor ve ark., 2016). K. Nikodem, J. L. Sanchez ve L. Sanches 2014 yılında yaptıkları bir çalışmada güçlü konveks küme için Hermite-Hadamard eşitsizliğini ve ayrık Jensen eşitsizliğini elde etmişlerdir (Nikodem ve ark., 2014). M. V. Cortez yaptığı bir çalışmada güçlü h-konveks fonksiyon sınıflarını incelemiş ve Hermite-Hadamard-Fejer tip eşitsizliklerini göstermiştir (Cortez, 2016). Y. Erdem, H. Öğünmez ve H. Budak 2016 yılında yaptıkları bir çalışmada türevleri ikinci anlamda güçlü s-konveks olan fonksiyon sınıfları için Hermite-Hadamard eşitsizliği ile ilgili yeni genelleştirilmiş sonuçlar elde etmişlerdir (Erdem ve ark., 2016). H. Angulo, J. Gimenez, A. M. Moros ve K. Nikodem çalışmalarında güçlü h-konveks fonksiyonu ve bazı özelliklerini incelemiş ve güçlü h-konveks fonksiyon için Hermite-Hadamard tip eşitsizlikleri elde etmişlerdir (Angulo ve ark., 2011). A. Azocar, J. Gimenez, K. Nikodem ve J. L. Sanchez 2011 yılında yaptıkları çalışmada güçlü midconvex fonksiyonları incelemiş ve bazı özelliklerini ele almışlardır (Azocar ve ark., 2011). M. Bracamonte, J.

Gimenez ve M. V. Cortez 2016 yılında yaptıkları bir çalışmada ikinci anlamda güçlü *(s,m)*-konveks fonksiyon sınıflarını incelemiş ve Hermite-Hadamard-Fejer tip eşitsizliğini ispatlamışlardır (Bracamonte ve ark., 2016). S. Turhan, N. Okur ve S. Maden yaptıkları bir çalışmada güçlü konveks fonksiyonu temel alınarak Sugeno integralleri için Hermite-Hadamard tipli eşitsizliği incelemişlerdir (Turhan ve ark., 2016).

Konveks fonksiyonlar için tanımlanan eşitsizlikler üzerine çalışan diğer matematikçiler B. G. Pachpatte, C. P. Niculescu, L. E. Persson, J. E. Pecaric, F. Proschan, R. T. Rockafellar, S. Varosanec, A. W. Roberts, D. E. Varberg, M. Alomari, K. Nikodem, J. L. Sanchez, T. Y. Zhang, M. E. Özdemir, U. S. Kırmacı, M. Z. Sarıkaya, H. Kavurmacı, E. Set ve İ. İşcan olarak sıralanabilir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, tezde kullanılacak olan bazı temel tanım, teorem ve örneklere yer verilmiştir.

2.1 Konveks Fonksiyonlar ile İlgili Temel Tanım ve Teoremler

Bu bölümde konveks fonksiyon tanımına yer verilmeden once bazı temel tanımlara değinilmiş, daha sonra farklı türden konveks fonksiyon sınıfları tanımlanmıştır.

Tanım 2.1.1 (Vektör Uzay): X boş olmayan bir küme ve K, bu vektör uzayı üzerinde bir cisim olsun. $+: X \times X \to X$ ve $\times: K \times X \to X$ işlemleri tanımlansın. Aşağıdaki şartlar sağlanırsa, X 'e K üzerinde bir vektör uzayı (lineer uzay) denir.

A) X , $+$ işlemine göre değişmeli gruptur.

i. $\forall x, y \in X$ için $x + y \in X$ 'dir.

ii. $\forall x, y, z \in X$ için $x + (y + z) = (x + y) + z$ 'dir.

iii. $\forall x \in X$ için $x + \theta = \theta + x$ olacak şekilde bir $\theta \in X$ vardır.

iv. $\forall x \in X$ için $x + (-x) = (-x) + x = \theta$ olacak iekilde bir $-x \in X$ vardır.

v. $\forall x, y \in X$ için $x + y = y + x$ 'dir.

B) $\forall x, y \in L$ ve $\alpha, \beta \in F$ olmak üzere aşağıdaki şartlar sağlanır.

i. $\alpha x \in X$ 'dir.

ii. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ 'dir.

iii. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ 'dir.

iv. $1x = x$ 'dir. (Burada 1, F 'in birim elemanıdır).

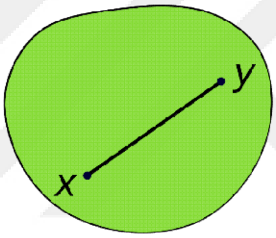
$F = \mathbb{R}$ ise X 'e reel vektör uzay ve $F = \mathbb{C}$ ise X 'e kompleks vektör uzay adı verilir (Anton, 1994).

Tanım 2.1.2 (Konveks Küme): X bir vektör uzayı, $A \subseteq X$ ve $x, y \in A$ olmak üzere,

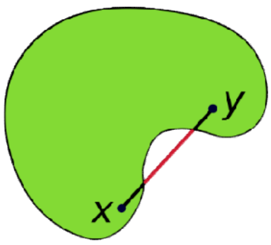
$$M = \left\{ z \in X : z = \alpha x + (1-\alpha) y \ , 0 \le \alpha \le 1 \right\} \subset A$$

ise A kümesine konveks küme denir (Kreyszig, 1989).

Eğer $z \in M$ ise $z = \alpha x + (1-\alpha) y$'deki x ve y'nin katsayıları için $\alpha + (1-\alpha) = 1$ bağıntısı daima doğrudur. Bu nedenle konveks küme tanımındaki α ve $(1-\alpha)$ yerine $\alpha + \beta = 1$ şartını sağlayan α, β pozitif reel sayıları alınabilir. Burada geometrik olarak M'nin uç noktaları x ve y olan (kapalı) bir doğru parçası olduğu açıktır (Bayraktar, 1987).



Şekil 2.1 Konveks Küme



Şekil 2.2 Konveks Olmayan (Konkav) Küme

Tanım 2.1.3 (J-Konveks Fonksiyon): I, $\mathbb{R}$'de bir aralık olmak üzere $\forall x, y \in I$ için

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \le \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

şartını sağlayan f fonksiyonuna I üzerinde Jensen anlamında konveks veya J-konveks fonksiyon denir (Mitrinovic, 1970).

Tanım 2.1.4 (Kesin J-Konveks Fonksiyon): $\forall x, y \in I$ ve $x \neq y$ için

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) < \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

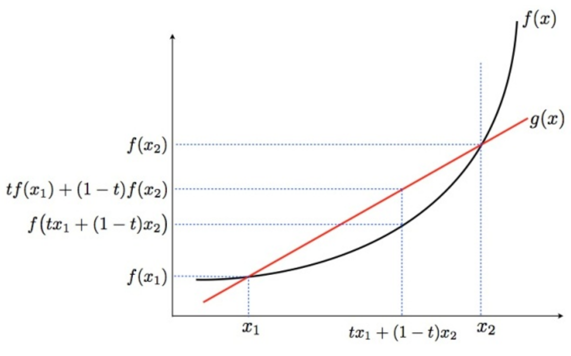
eşitsizliği sağlanırsa f fonksiyonuna I üzerinde kesin J-konveks fonksiyon denir (Pecaric ve ark., 1992).

Tanım 2.1.5 (Konveks Fonksiyon): I, $\mathbb{R}$'de bir aralık ve $f : I \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere $\forall x, y \in I$ ve $\alpha \in [0,1]$ için,

$$f\big((1-\alpha)x+\alpha y\big) \leq (1-\alpha)x+\alpha y$$

eşitsizliğini sağlayan f fonksiyonuna konveks fonksiyon denir veya $C(I)$ sınıfına aittir denir. Eğer bu eşitsizlik $x \neq y$ ve $\alpha \in (0,1)$ için kesin ise bu durumda f fonksiyonuna kesin konveks fonksiyon denir (Niculescu ve Persson, 2006).

Eğer $-f$ fonksiyonu konveks (kesin konveks) fonksiyon ise f fonksiyonuna konkav (kesin konkav) fonksiyon denir (Niculescu ve Persson, 2006).



Şekil 2.3 Konveks Fonksiyon

Sonuç 2.1.1 Her konveks fonksiyon aynı zamanda bir J-konveks fonksiyondur.

Sonuç 2.1.2 Bir f fonksiyonunun $I \subset \mathbb{R}$'de konveks olması için gerek ve yeter şart, $\forall x, y \in I$ ve $\forall p, q > 0$ reel sayıları için

$$f\left(\frac{px+qy}{p+q}\right) \leq \frac{pf(x)+qf(y)}{p+q}$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır (Mitrinovic, 1970).

Teorem 2.1.1 f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında tanımlı, bu aralıkta konveks (konkav) ve x_0 noktasında diferansiyellenebilen bir fonksiyon olsun. Bu durumda, $x \in (a,b)$ için $f(x) - f(x_0) \leq (\geq) f'(x_0)(x - x_0)$ eşitsizliği vardır (Roberts ve Varberg, 1973).

Tanım 2.1.6 Eğer f fonksiyonu hem konveks hem konkav fonksiyon ise f'e lineerdir (afindir) denir (Greenberg ve Pierskalla, 1970).

Tanım 2.1.7 (Eşlenik Konveks Fonksiyon): $g:[0,\infty) \to [0,\infty)$ fonksiyonu kesin artan ve sürekli, ayrıca $g(0) = 0$ ve $x \to \infty$ iken $g(x) \to \infty$ şartlarını sağlayan bir fonksiyon olsun. Bu takdirde g^{-1} fonksiyonu vardır ve g fonksiyonu ile aynı şartları sağlar. Ayrıca, f ve f^* fonksiyonları aşağıdaki gibi tanımlanırsa bu iki fonksiyona konveks fonksiyon denir.

$$f(x) = \int_0^x g(s)\,ds \text{ ve } f^*(y) = \int_0^y g^{-1}(t)\,dt$$

Burada f ve f^* fonksiyonları birbirlerinin konveks eşleniğidir (Roberts ve Varberg, 1973).

Tanım 2.1.8 (Süreklilik): $f: S \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu, $x_0 \in S$ ve $\varepsilon > 0$ verilsin. $x \in S$ ve $|x - x_0| < \delta$ için $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa f fonksiyonu x_0'da süreklidir denir (Kolmogorov ve Fomin, 1975).

Tanım 2.1.9 (Düzgün Süreklilik): $f: S \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu ve $\varepsilon > 0$ verilsin. $|x_1 - x_2| < \delta$ şartını sağlayan her $x_1, x_2 \in S$ için $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ olacak şekilde bir

$\delta > 0$ sayısı varsa f fonksiyonu S'de düzgün süreklidir denir (Kolmogorov ve Fomin, 1975).

Tanım 2.1.10 (Lipschitz Şartı): $f : S \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu ve her $x, y \in \mathbb{R}$ için $\left|f(x) - f(y)\right| \leq k\left|x - y\right|$ şartını sağlayan $k > 0$ sabiti varsa f fonksiyonu S'de Lipschitz şartını sağlar (Rockafellar, 1972).

Tanım 2.1.11 (Artan ve Azalan Fonksiyonlar): f, I aralığında bir fonksiyon olsun. Her $x_1, x_2 \in I$ ve $x_1 < x_2$ için

i. $f(x_1) < f(x_2)$ ise f fonksiyonu I üzerinde artandır.

ii. $f(x_1) > f(x_2)$ ise f fonksiyonu I üzerinde azalandır.

iii. $f(x_1) \leq f(x_2)$ ise f fonksiyonu I üzerinde azalmayandır.

iv. $f(x_1) \geq f(x_2)$ ise f fonksiyonu I üzerinde artmayandır.

Eğer f fonksiyonu artmayan ve azalmayan bir fonksiyon ise monotonik fonksiyondur (Kolmogorov ve Fomin, 1975).

Teorem 2.1.2 f fonksiyonu (a, b) aralığında diferansiyellenebilir bir fonksiyon olmak üzere; f fonksiyonunun konveks (kesin konveks) olması için gerek-yeter şart f''nün artan (kesin artan) olmasıdır (Pecaric ve ark., 1992).

Tanım 2.1.12 (Beta Fonksiyonu): $\mathrm{Re}(x), \mathrm{Re}(y) > 0$ için

$$\beta(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\, dt$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona beta fonksiyonu denir. Bu integral, $x > 0$ ve $y > 0$ için yakınsantır (Jeffrey ve Dai, 2008).

Beta fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlar.

i. $\beta(x+1, y) = \dfrac{x}{x+y}\beta(x, y), \qquad x, y \in (0, \infty)$

ii. $\beta(1,y)=\dfrac{1}{y}$

iii. $\beta(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt=\int_0^\infty \dfrac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}}, \qquad x,y>0$

iv. $\beta(x,y)=\dfrac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}, \qquad x,y>0$

v. $\beta(x,y)=\beta(y,x)$

Tanım 2.1.13 (Hipergeometrik Fonksiyon): $c>b>0$ ve $|z|<1$ için

$$ {}_2F_1(a,b;c;z)=\frac{1}{\beta(b,c-b)}\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-zt)^{-a}\,dt $$

şeklinde tanımlanan fonksiyona hipergeometrik fonksiyon denir (Jeffrey ve Dai, 2008).

2.2 Bazı Konveks Fonksiyon Sınıfları ve Temel Tanımlar

Tanım 2.2.1 (Quasi-Konveks Fonksiyon): $I\subset\mathbb{R}$ boştan farklı bir konveks küme ve $f:I\to\mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. $\forall x,y\in I$ ve $\lambda\in[0,1]$ için,

$$ f(\lambda x+(1-\lambda)y)\le \max\{f(x),f(y)\} $$

eşitsizliği sağlanırsa f fonksiyonuna quasi-konveks fonksiyon denir (Roberts ve Varberg, 1973).

Eğer f fonksiyonu,

$$ f(\lambda x+(1-\lambda)y)< \max\{f(x),f(y)\} $$

eşitsizliğini sağlarsa f ’e kesin quasi-konveks fonksiyon denir. Ve aynı şartlar altında,

$$ f(\lambda x+(1-\lambda)y)\ge \max\{f(x),f(y)\} $$

ise f ’e quasi-konkav fonksiyon ve eğer

$$ f(\lambda x+(1-\lambda)y)> \max\{f(x),f(y)\} $$

eşitsizliğini sağlarsa f 'ye kesin quasi-konkav fonksiyon denir (Dragomir ve Pearce, 1998).

Tanım 2.2.2 f fonksiyonu hem quasi-konveks fonksiyon hem de quasi-konkav fonksiyon ise f 'ye quasi-monotonik fonksiyon denir (Greenberg ve Pierskalla, 1970).

Sonuç 2.2.1 Herhangi konveks fonksiyon aynı zamanda bir quasi-konveks fonksiyondur. Ancak bunun tersi her zaman doğru değildir, yani quasi-konveks fonksiyon olup konveks olmayan fonksiyonlar vardır. Örneğin,

$$g(t)=\begin{cases}1\ , & t\in[-2,-1]\\ t^2, & t\in(-1,2]\end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $g:[-2,2]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $[-2,2]$ aralığında konveks değildir fakat bu aralıkta quasi-konvekstir (Ion, 2007).

Tanım 2.2.3 (J-Quasi-Konveks Fonksiyon): $f:I\to\mathbb{R}$ fonksiyonu her $x,y\in I$ için,

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)\leq\max\{f(x),f(y)\}$$

eşitsizliğini sağlarsa f 'ye Jensen-quasi-konveks veya J-quasi-konveks fonksiyon denir (Dragomir ve Pearce, 1998).

Tanım 2.2.4 (Wright-Konveks Fonksiyon): $f:I\to\mathbb{R}$ fonksiyonu her $y>x$, $\delta>0$ ve $y+\delta,x\in I$ için

$$f(x+\delta)-f(x)\leq f(y+\delta)-f(y)$$

eşitsizliğini sağlarsa f fonksiyonuna $I\subseteq\mathbb{R}$ 'de wright-konveks fonksiyon denir (Dragomir ve Pearce, 1998).

Tanım 2.2.5 (Wright-Quasi-Konveks Fonksiyon): $f:I\to\mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. $y>x$ ve $\delta>0$ şartları altında her $x,y,y+\delta\in I$ ve $t\in[0,1]$ için

$$\frac{1}{2}\left[f(tx+(1-t)y)+f((1-t)x+ty)\right]\leq\max\{f(x),f(y)\}$$

veya

$$\frac{1}{2}\left[f(y)+f(x+\delta)\right]\leq \max\left\{f(x),f(y+\delta)\right\}$$

eşitsizliklerinden biri sağlanırsa f fonksiyonuna $I\subseteq\mathbb{R}$'de wright-quasi-konveks fonksiyon denir (Dragomir ve Pearce, 1998).

Tanım 2.2.6 (Log-Konveks Fonksiyon): $I=[a,b]$, $\mathbb{R}$'de bir aralık ve $f:I\to\mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Her $x,y\in[a,b]$ ve $\lambda\in[0,1]$ için

$$f\left(\lambda x+(1-\lambda)y\right)\leq f^{\lambda}(x)f^{1-\lambda}(y)$$

eşitsizliği sağlanırsa f fonksiyonuna log-konveks fonksiyon denir (Alomari ve Darus, 2009).

Tanım 2.2.7 (Godunova-Levin Fonksiyonu): $f:I\to\mathbb{R}$ pozitif bir fonksiyonu her $x,y\in I$ ve $\lambda\in(0,1)$ için

$$f\left(\lambda x+(1-\lambda)y\right)\leq \frac{f(x)}{\lambda}+\frac{f(y)}{1-\lambda}$$

eşitsizliğini sağlarsa f fonksiyonuna Godunova-Levin fonksiyonu veya $Q(I)$ sınıfına aittir denir (Dragomir ve Pearce, 1998).

Tanım 2.2.8 (P-Fonksiyonu): $f:I\to\mathbb{R}$ negatif olmayan bir fonksiyon olsun. $\forall x,y\in I$ ve $\alpha\in[0,1]$ olmak üzere

$$f\left(\alpha x+(1-\alpha)y\right)\leq f(x)+f(y)$$

eşitsizliğini sağlayan f fonksiyonuna *P*-fonksiyonu veya $P(I)$ sınıfına aittir denir (Dragomir ve ark., 1995).

Tanım 2.2.9 (r-Konveks Fonksiyon): Her $x,y\in[a,b]$ ve $\lambda\in[0,1]$ için f pozitif fonksiyonu

$$f\left(\lambda x+(1-\lambda)y\right)\leq M_r\left(f(x),f(y);\lambda\right)$$

eşitsizliğini sağlarsa f fonksiyonuna r-konveks fonksiyon denir (Gill ve ark., 1997).

Burada, x, y pozitif sayılarının r. kuvvetlerine göre kuvvet ortalaması $M_r(x, y; \lambda)$ şu şekilde tanımlanır:

$$M_r(x, y; \lambda) = \begin{cases} \left(\lambda x^r + (1-\lambda) y^r\right)^{\frac{1}{r}}, & r \neq 0 \\ x^\lambda y^{1-\lambda}, & r = 0 \end{cases}.$$

Tanım 2.2.10 (Birinci Anlamda s-Konveks Fonksiyon): $f : \mathbb{R}_+ = [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $0 < s \leq 1$ ve $\alpha^s + \beta^s = 1$ olsun. $\forall \alpha, \beta \geq 0$ ve $\forall u, v \in \mathbb{R}_+$ için

$$f(\alpha u + \beta v) \leq \alpha^s f(u) + \beta^s f(v)$$

eşitsizliğini sağlarsa f fonksiyonuna birinci anlamda s-konveks fonksiyon denir. Birinci anlamda s-konveks fonksiyonların sınıfı K_s^1 ile gösterilir (Hudzik ve Maligranda, 1994).

Tanım 2.2.11 (İkinci Anlamda s-Konveks Fonksiyon): $f : \mathbb{R}_+ = [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $0 < s \leq 1$ ve $\alpha + \beta = 1$ olsun. $\forall \alpha, \beta \geq 0$ ve $\forall u, v \in \mathbb{R}_+$ için

$$f(\alpha u + \beta v) \leq \alpha^s f(u) + \beta^s f(v)$$

eşitsizliğini sağlarsa f fonksiyonuna ikinci anlamda s-konveks fonksiyon denir. İkinci anlamda s-konveks fonksiyonların sınıfı K_s^2 ile gösterilir (Hudzik ve Maligranda, 1994).

Sonuç 2.2.2 Birinci anlamda s-konveks fonksiyon ve ikinci anlamda s-konveks fonksiyon tanımlarında $s = 1$ alınırsa, bilinen konvekslik tanımına indirgenir (Hudzik ve Maligranda, 1994).

Tanım 2.2.12 (h-Konveks Fonksiyon): $h \neq 0$ ve $h : J \to \mathbb{R}$ negatif olmayan bir fonksiyon olsun. Her $x, y \in I$ ve $\alpha \in (0,1)$ için

$$f(\alpha x + (1-\alpha) y) \leq h(\alpha) f(x) + h(1-\alpha) f(y)$$

eşitsizliğini sağlayan negatif olmayan $f: I \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna h-konveks fonksiyon veya $SX(h,I)$ sınıfına aittir denir. Burada, I ve J, $\mathbb{R}$'de iki aralık ve $(0,1) \subseteq J$'dir (Varosanec, 2007).

Yukarıdaki eşitsizliğin tersini sağlayan f fonksiyonuna h-konkav fonksiyon veya $SV(h,I)$ sınıfına aittir denir (Varosanec, 2007).

Tanım 2.2.10'dan açıkça görülmektedir ki;

i. $h(\alpha)=\alpha$ seçilirse, tüm negatif olmayan konveks fonksiyonlar $SX(h,I)$ sınıfına ve tüm negatif olmayan konkav fonksiyonlar $SV(h,I)$ sınıfına aittir.

ii. $h(\alpha)=\frac{1}{\alpha}$ seçilirse, $SX(h,I)=Q(I)$'dır.

iii. $h(\alpha)=1$ seçilirse, $SX(h,I) \supseteq P(I)$'dır.

iv. $h(\alpha)=\alpha^s$ seçilirse, $SX(h,I) \supseteq K_s^2$'dır. Burada, $s \in (0,1)$'dir.

Tanım 2.2.13 (m-Konveks Fonksiyon): $f:[0,b] \to \mathbb{R}$ ve $b>0$ olsun. Her $x, y \in [0,b]$ ve $t, m \in [0,1]$ için

$$f(tx+m(1-t)y) \le tf(x)+m(1-t)f(y)$$

eşitsizliğini sağlayan f fonksiyonuna m-konveks fonksiyon denir. $-f$ fonksiyonu m-konveks fonksiyon ise f fonksiyonu m-konkav fonksiyondur. $f(0) \le 0$ şartını sağlayan $[0,b]$ aralığında tanımlı tüm m-konveks fonksiyonlar sınıfı $K_m(b)$ ile gösterilir (Toader, 1984).

Konveks fonksiyonlar kendi bölgelerinin iç kısmında süreklidir. Ancak, m-konveks fonksiyonlar sürekli değildir. Örneğin; f fonksiyonu

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}x\ , & 0 \le x<1 \\ \frac{3}{2}x-\frac{1}{2}, & 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

şeklinde verilsin. f fonksiyonu her $m \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$ için m-konvekstir fakat $x=1$ noktasında sürekli değildir (Avcı Ardıç ve Pavic, 2017).

Tanım 2.2.11'de $m=1$ seçilirse, $[0,b]$ aralığında m-konveks fonksiyon bilinen konveks fonksiyona indirgenir (Klaricic Bakula ve ark., 2008).

Tanım 2.2.14 ((α,m)-Konveks Fonksiyon): $f:[0,b]\to\mathbb{R}$ ve $b>0$ olsun. Her $x,y\in[0,b]$ ve $t\in[0,1]$ için

$$f\left(tx+m(1-t)y\right)\leq t^{\alpha}f(x)+m\left(1-t^{\alpha}\right)f(y)$$

eşitsizliğini sağlayan f fonksiyonuna (α,m)-konveks fonksiyon denir. Burada, $(\alpha,m)\in[0,1]^2$ 'dir (Miheşan, 1993).

Tanım 2.2.15 ((h,m)-Konveks Fonksiyon): $h:J\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ negatif olmayan bir fonksiyon olsun. Her $x,y\in[0,b]$, $m\in[0,1]$ ve $\alpha\in[0,1]$ olacak şekilde $f:[0,b]\to\mathbb{R}$ negatif fonksiyonu

$$f\left(\alpha x+m(1-\alpha)y\right)\leq h(\alpha)f(x)+mh(1-\alpha)f(y)$$

eşitsizliğini sağlayan f fonksiyonuna (h,m)-konveks fonksiyon denir (Özdemir ve ark., 2011).

Tanım 2.2.16 (Geometrik Konveks Fonksiyon): $f:I\subset\mathbb{R}_+=(0,\infty)\to\mathbb{R}_+$ bir fonksiyon olsun. Her $x,y\in I$ ve $\lambda\in[0,1]$ için

$$f\left(x^{\lambda}y^{1-\lambda}\right)\leq\left[f(x)\right]^{\lambda}\left[f(y)\right]^{1-\lambda}$$

eşitsizliği sağlanırsa f fonksiyonuna geometrik konveks fonksiyon denir (Zhang ve ark., 2012).

Tanım 2.2.17 (Quasi-Geometrik Konveks Fonksiyon): $f:I\subseteq(0,\infty)\to\mathbb{R}$ fonksiyonu her $x,y\in I$ ve $t\in[0,1]$ için

$$f\left(x^t y^{1-t}\right) \le \sup\left\{f(x), f(y)\right\}$$

eşitsizliğini sağlarsa f fonksiyonuna I ’da quasi-geometrik konveks fonksiyon denir (İşcan, 2013).

Tanım 2.2.18 (s-Geometrik Konveks Fonksiyon): $f : I \subset \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ fonksiyonu her $x, y \in I$, $\lambda \in [0,1]$ ve $s \in (0,1]$ için

$$f\left(x^{\lambda} y^{1-\lambda}\right) \le \left[f(x)\right]^{\lambda^s} \left[f(y)\right]^{(1-\lambda)^s}$$

eşitsizliğini sağlarsa f fonksiyonuna s-geometrik fonksiyon denir (Zhang ve ark., 2012).

Tanım 2.2.19 (Geometrik-Aritmetik Fonksiyon): $f : I \subseteq \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ fonksiyonu her $x, y \in I$ ve $\lambda \in [0,1]$ için

$$f\left(x^{1-\lambda} y^{\lambda}\right) \le (1-\lambda) f(x) + \lambda f(y)$$

eşitsizliğini sağlarsa f fonksiyonuna geometrik-aritmetik konveks (GA-konveks) fonksiyon denir (Niculescu, 2000).

Burada $x^{1-\lambda} y^{\lambda}$ ifadesi x ve y pozitif sayılarının ağırlıklı geometrik ortalaması ve $(1-\lambda) f(x) + \lambda f(y)$ ifadesi ise $f(x)$ ve $f(y)$ fonksiyonlarının ağırlıklı aritmetik ortalamasıdır (Niculescu, 2000).

İkinci dereceden diferansiyellenebilir $f : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun GA-konveksliği $x^2 f'' + xf' \ge 0$ eşitsizliğini sağladığı anlamına gelir. Bu nedenle, tüm ikinci dereceden diferansiyellenebilir, azalmayan konveks fonsiyonlar GA-konveks fonksiyondur (Niculescu, 2003).

Tanım 2.2.20 (Birinci Anlamda Geometrik-Aritmetik-s (GA-s) Konveks Fonksiyon): $f : I \subseteq [0,\infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu her $x, y \in I$, $\lambda \in [0,1]$ ve $s \in (0,1]$ için

$$f\left(x^{\lambda} y^{1-\lambda}\right) \le (\ge) \lambda^s f(x) + \left(1-\lambda^s\right) f(y)$$

eşitsizliğini sağlarsa f fonksiyonuna birinci anlamda geometrik-aritmetik-s konveks (konkav) fonksiyon denir (İşcan, 2014).

Tanım 2.2.21 (İkinci Anlamda Geometrik-Aritmetik-s (GA-s) Konveks Fonksiyon): $f : I \subseteq \mathbb{R}_+ = [0,\infty) \to \mathbb{R}_+$ fonksiyonu her $x, y \in I$, $\lambda \in (0,1]$ ve $s \in (0,1]$ için

$$f\left(x^{\lambda} y^{1-\lambda}\right) \leq (\geq) \lambda^{s} f(x) + (1-\lambda)^{s} f(y)$$

eşitsizliğini sağlarsa f fonksiyonuna ikinci anlamda geometrik-aritmetik-s konveks (konkav) fonksiyon denir (Shuang ve ark., 2013).

Tanım 2.2.18 ve tanım 2.2.19'da $s = 1$ alınırsa, GA-konveks fonksiyon tanımı elde edilir (Shuang ve ark., 2013).

Tanım 2.2.22 (Geometrik Simetrik Fonksiyon): $g : I \subseteq \mathbb{R}_+ = (0,\infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu her $x \in [a,b]$ için $g\left(\frac{ab}{x}\right) = g(x)$ eşitliğini sağlarsa g fonksiyonu $\sqrt{ab}$ 'ye göre geometrik simetrik fonksiyondur (İşcan ve Turhan, 2016).

Tanım 2.2.23 (Harmonik Simetrik Fonksiyon): $g : [a,b] \subseteq \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ fonksiyonu her $x \in [a,b]$ için

$$g(x) = g\left(\frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{x}}\right)$$

eşitliğini sağlarsa g fonksiyonu $\frac{2ab}{a+b}$'ye göre harmonik simetrik fonksiyondur (Latif ve ark., 2015a).

Tanım 2.2.24 (Harmonik Konveks Fonksiyon): $I \subset \mathbb{R}_+$ reel bir aralık olsun. $f : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $x, y \in I$ ve $t \in [0,1]$ için

$$f\left(\frac{xy}{tx + (1-t)y}\right) \leq tf(y) + (1-t) f(x)$$

eşitsizliğini sağlarsa f fonksiyonuna harmonik konveks fonksiyon denir. Eğer bu eşitsizliğin tersi alınırsa harmonik konkav fonksiyon elde edilir (İşcan, 2014).

Önerme 2.2.1 $I \subset \mathbb{R}_+$ reel bir aralık ve $f : I \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda,

i. Eğer $I \subset (0,\infty)$ ve f konveks ve azalmayan bir fonksiyon ise f fonksiyonuna harmonik konveks fonksiyon denir.

ii. Eğer $I \subset (0,\infty)$ ve f harmonik konveks ve artmayan bir fonksiyon ise f fonksiyonuna konveks fonksiyon denir.

iii. Eğer $I \subset (-\infty,0)$ ve f harmonik konveks ve azalmayan bir fonksiyon ise f fonksiyonuna konveks fonksiyon denir.

iv. Eğer $I \subset (-\infty,0)$ ve f konveks ve artmayan bir fonksiyon ise f fonksiyonuna harmonik konveks fonksiyon denir (İşcan, 2014).

Tanım 2.2.25 (Harmonik s-Konveks Fonksiyon): $I \subset \mathbb{R}_+$ reel bir aralık olsun. $f : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu her $x, y \in I$, $t \in [0,1]$ ve sabit $s \in (0,1]$ için

$$f\left(\frac{xy}{tx+(1-t)y}\right) \leq (\geq) t^s f(y) + (1-t)^s f(x)$$

eşitsizliğini sağlarsa f fonksiyonuna harmonik s-konveks (konkav) fonksiyon denir (İşcan, 2015).

Önerme 2.2.2 $I \subset \mathbb{R}_+$ reel bir aralık ve $f : I \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda,

i. Eğer f fonksiyonu s-konveks ve azalmayan bir fonksiyon ise harmonik s-konveks fonksiyondur.

ii. Eğer f fonksiyonu harmonik s-konveks ve artmayan bir fonksiyon ise s-konveks fonksiyondur (İşcan, 2015).

Tanım 2.2.26 (Harmonik Quasi-Konveks Fonksiyon): $f : I \subseteq (0,\infty) \to [0,\infty)$ fonksiyonu her $x, y \in I$ ve $t \in [0,1]$ için

$$f\left(\frac{xy}{tx+(1-t)y}\right)\leq \max\{f(x),f(y)\}$$

eşitsizliğini sağlarsa f fonksiyonuna harmonik quasi-konveks fonksiyon denir (Zhang ve ark., 2014).

$I\subseteq(0,\infty)$ aralığında herhangi bir harmonik konveks fonksiyon aynı zamanda bir harmonik quasi-konveks fonksiyondur, fakat tersi doğru değildir (Kadakal ve ark., 2017).

Tanım 2.2.27 (p-Konveks Fonksiyon): $I\subset\mathbb{R}_+$ reel bir aralık ve $p\in\mathbb{R}_+$ olsun. $f:I\to\mathbb{R}$ fonksiyonu her $x,y\in I$ ve $\alpha\in[0,1]$ için

$$f\left(\left[\alpha x^p+(1-\alpha)y^p\right]^{\frac{1}{p}}\right)\leq \alpha f(x)+(1-\alpha)f(y)$$

eşitsizliğini sağlarsa f fonksiyonuna p-konveks fonksiyon denir. Eğer bu eşitsizliğin tersi alınırsa p-konkav fonksiyon elde edilir (İşcan ve ark., 2017).

Sonuç 2.2.3 p-konveks fonksiyon tanımında $p=1$ ve $p=-1$ alınırsa, $I\subseteq(0,\infty)$ aralığında p-konvekslik sırasıyla bilinen konveksliğe ve harmonik konveksliğe indirgenir (İşcan ve ark., 2017).

Tanım 2.2.28 (p-Quasi-Konveks Fonksiyon): $I\subset\mathbb{R}_+$ reel bir aralık ve $p\in\mathbb{R}_+$ olsun. $f:I\to\mathbb{R}$ fonksiyonu her $x,y\in I$ ve $\alpha\in[0,1]$ için

$$f\left(\left[\alpha x^p+(1-\alpha)y^p\right]^{\frac{1}{p}}\right)\leq \max\{f(x),f(y)\}$$

eşitsizliğini sağlarsa f fonksiyonuna p-quasi-konveks fonksiyon denir. Eğer bu eşitsizliğin tersi alınırsa p-quasi-konkav fonksiyon elde edilir (İşcan ve ark., 2017).

Önerme 2.2.3 $I\subset\mathbb{R}_+$ reel bir aralık, $p\in\mathbb{R}_+$ ve $f:I\to\mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda,

i. Eğer $p\leq 1$ ve f fonksiyonu quasi-konveks ve azalmayan bir fonksiyon ise p-quasi-konveks fonksiyondur.

ii. Eğer $p \geq 1$ ve f fonksiyonu p-quasi-konveks ve azalmayan bir fonksiyon ise quasi-konveks fonksiyondur.

iii. Eğer $p \leq 1$ ve f fonksiyonu p-quasi-konkav ve azalmayan bir fonksiyon ise quasi-konkav fonksiyondur.

iv. Eğer $p \geq 1$ ve f fonksiyonu quasi-konkav ve azalmayan bir fonksiyon ise p-quasi-konkav fonksiyondur.

v. Eğer $p \geq 1$ ve f fonksiyonu quasi-konveks ve artmayan bir fonksiyon ise p-quasi-konveks fonksiyondur.

vi. Eğer $p \leq 1$ ve f fonksiyonu p-quasi-konveks ve artmayan bir fonksiyon ise quasi-konveks fonksiyondur.

vii. Eğer $p \geq 1$ ve f fonksiyonu p-quasi-konkav ve artmayan bir fonksiyon ise quasi-konkav fonksiyondur.

viii. Eğer $p \leq 1$ ve f fonksiyonu quasi-konkav ve artmayan bir fonksiyon ise p-quasi-konkav fonksiyondur (İşcan ve ark., 2017).

Tanım 2.2.29 ((M,N)-Konveks Fonksiyon): $\mathbb{R}_+ = (0,\infty)$ daki iki sayının tüm ortalama değerlerinin ailesi $\mathfrak{R}$ olsun. $(M,N) \in \mathfrak{R}$ verilsin. $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ fonksiyonu her $x, y \in \mathbb{R}_+$ için

$$f\left(M(x,y)\right) \leq N\left(f(x), f(y)\right)$$

eşitsizliğini sağlayan f fonksiyonuna (M,N)-konveks fonksiyon denir (Turhan ve ark., 2017).

Tanım 2.2.30 ($M_\varphi A$-Konveks Fonksiyon): I bir aralık ve $\varphi : I \to \varphi(I) \subset \mathbb{R}$ sürekli ve kesin monotonik bir fonksiyon olsun. $f : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu her $x, y \in I$ ve $t \in [0,1]$ için

$$f\left(\varphi^{-1}\left(t\varphi(x) + (1-t)\varphi(y)\right)\right) \leq tf(x) + (1-t) f(y)$$

eşitsizliğini sağlayan f fonksiyonuna $M_\varphi A$-konveks fonksiyon denir. Eğer bu eşitsizliğin tersi alınırsa $M_\varphi A$-konkav fonksiyon elde edilir (Turhan ve ark., 2017).

Önerme 2.2.4 I bir aralık, $\varphi : I \to \varphi(I) \subset \mathbb{R}$ sürekli ve kesin monotonik bir fonksiyon ve $f : I \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun.

i. $\varphi : I \to \mathbb{R}$, $\varphi(x) = mx + n$, $m \in \mathbb{R} - \{0\}$ ve $n \in \mathbb{R}$ için $M_\varphi A$-konvekslik I 'da bilinen konveksliğe indirgenir.

ii. $\varphi : I \to (0, \infty)$ ve $\varphi(x) = \ln x$ için $M_\varphi A$-konvekslik I 'da bilinen GA-konveksliğe indirgenir.

iii. $\varphi : I \to (0, \infty)$ ve $\varphi(x) = x^{-1}$ için $M_\varphi A$-konvekslik I 'da bilinen harmonik konveksliğe indirgenir.

iv. $\varphi : I \to (0, \infty)$, $\varphi(x) = x^p$ ve $p \in \mathbb{R} - \{0\}$ için $M_\varphi A$-konvekslik I 'da bilinen p-konveksliğe indirgenir (Turhan ve ark., 2017).

Tanım 2.2.31 ($M_\varphi A - p$-Fonksiyon): I bir aralık ve $\varphi : I \to \mathbb{R}$ sürekli ve kesin monotonik bir fonksiyon olsun. $f : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu her $x, y \in I$ ve $t \in [0,1]$ için

$$f\left(\varphi^{-1}\left(t\varphi(x) + (1-t)\varphi(y)\right)\right) \leq f(a) + f(b)$$

eşitsizliğini sağlayan f fonksiyonuna $M_\varphi A - p$ fonksiyon denir (Maden ve ark., 2017).

Tanım 2.2.32 ($M_\varphi A$-Quasi-Konveks Fonksiyon): I bir aralık ve $\varphi : I \to \mathbb{R}$ sürekli ve kesin monotonik bir fonksiyon olsun. $f : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu her $x, y \in I$ ve $t \in [0,1]$ için

$$f\left(\varphi^{-1}\left(t\varphi(x) + (1-t)\varphi(y)\right)\right) \leq \sup\{f(a), f(b)\}$$

eşitsizliğini sağlayan f fonksiyonuna $M_\varphi A$-quasi-konveks fonksiyon denir. Eğer bu eşitsizliğin tersi alınırsa $M_\varphi A$-quasi-konkav fonksiyon elde edilir (Turhan ve ark., 2017).

Önerme 2.2.5 I bir aralık, $\varphi : I \to \mathbb{R}$ sürekli ve kesin monotonik bir fonksiyon ve $f : I \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda,

i. $\varphi : I \to \mathbb{R}$, $\varphi(x) = mx + n$, $m \in \mathbb{R} - \{0\}$ ve $n \in \mathbb{R}$ için $M_{\varphi}A$-quasi-konvekslik I ’da bilinen quasi-konveksliğe indirgenir.

ii. $\varphi : I \to (0,\infty)$ ve $\varphi(x) = \ln x$ için $M_{\varphi}A$-quasi-konvekslik I ’da bilinen geometrik-quasi-konveksliğe indirgenir.

iii. $\varphi : I \to (0,\infty)$ ve $\varphi(x) = x^{-1}$ için $M_{\varphi}A$-quasi-konvekslik I ’da bilinen harmonik-quasi-konveksliğe indirgenir.

iv. $\varphi : I \to (0,\infty)$, $\varphi(x) = x^{p}$ ve $p \in \mathbb{R} - \{0\}$ için $M_{\varphi}A$-quasi-konvekslik I ’da bilinen p-quasi-konveksliğe indirgenir (Turhan ve ark., 2017).

Tanım 2.2.33 (Bazı Özel Ortalamalar): Bu tanım içinde a ve b gibi iki pozitif reel sayı için bilinen bazı ortalamalar verilmiştir (Bullen ve ark., 1998; Pachpatte, 2012).

1. Aritmetik Ortalama: $A = A(a,b) = \dfrac{a+b}{2}$
2. Geometrik Ortalama: $G = G(a,b) = \sqrt{ab}$
3. Harmonik Ortalama: $H = H(a,b) = \dfrac{2ab}{a+b}$
4. Logaritmik Ortalama: $L = L(a,b) = \begin{cases} a & , \ a = b \\ \dfrac{b-a}{\ln b - \ln a}, & a \neq b \end{cases}$
5. Identrik Ortalama: $I = I(a,b) = \begin{cases} a & , \ a = b \\ \dfrac{1}{e}\left(\dfrac{b^{b}}{a^{a}}\right)^{\frac{1}{b-a}} & , \ a \neq b \end{cases}$
6. p-Logaritmik Ortalama:

$$L_p = L_p(a,b) = \begin{cases} a & , \quad a = b \\ \left[\dfrac{b^{p+1} - a^{p+1}}{(p+1)(b-a)}\right]^{\frac{1}{p}} & , \quad a \neq b \end{cases} \quad , \quad p \in \mathbb{R} - \{-1,0\}$$

7. Ağırlıklı Aritmetik Ortalama: $x_i \in [a,b]$, $p_i > 0$ ve $P_n = \sum_{i=1}^{n} p_i > 0$, $(i = 1,2,...,n)$ olmak üzere $A_n(x,p) = \frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i x_i$ ifadesine x_i sayılarının p_i ağırlıklı aritmetik ortalaması denir.

8. Ağırlıklı Geometrik Ortalama: $x_i \in [a,b]$, $p_i > 0$, $(i = 1,2,...,n)$ olmak üzere $G_n(x,p) = \prod_{i=1}^{n} x_i^{p_i}$ ifadesine x_i sayılarının p_i ağırlıklı geometrik ortalaması denir.

9. Ağırlıklı Harmonik Ortalama: $x_i \in [a,b]$, $p_i > 0$, $(i = 1,2,...,n)$ olmak üzere $H_n(x,p) = \dfrac{1}{\sum_{i=1}^{n} \frac{p_i}{x_i}}$ ifadesine x_i sayılarının p_i ağırlıklı geometrik ortalaması denir.

Ortalamalar arasındaki basit ilişki literatürde şu şekilde bilinir: $H \le G \le L \le I \le A$. Ayrıca, $p \in \mathbb{R}$ için L_p monoton artandır ve $L_0 = I$, $L_{-1} = L$ ile gösterilir (Pachpatte, 2012).

2.3 Bazı Güçlü Konveks Fonksiyon Sınıfları ve Temel Tanımlar

Tanım 2.3.1 (Güçlü Konveks Fonksiyon): $(X, \|\,.\,\|)$ bir reel normlu uzay ve I, X 'in konveks alt kümesi ve $c > 0$ olsun. $f : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu her $x, y \in I$ ve $t \in [0,1]$ için

$$f(tx + (1-t)y) \le tf(x) + (1-t)f(y) - ct(1-t)\|x-y\|^2$$

eşitsizliğini sağlarsa f fonksiyonuna güçlü konveks fonksiyon denir (Polyak, 1966).

Lemma 2.3.1 $(X, \|\,.\,\|)$ bir reel iç çarpım uzayı, I, X 'in konveks alt kümesi ve $c > 0$ olsun. $f : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun güçlü konveks fonksiyon olması için gerek ve yeter şart, $g = f - c\|\,.\,\|^2$ fonksiyonun konveks fonksiyon olmasıdır (Nikodem ve Pales, 2011).

Önerme 2.3.1 Diferansiyellenebilen bir f fonksiyonu için aşağıdaki durumlar sağlanır (Lara ve ark., 2014).

i. f fonksiyonunun $c>0$ modülüne göre güçlü konveks fonksiyon olması için gerek ve yeter şart f''nün güçlü artan olmasıdır, yani f''nün $\left(f'(x)-f'(y)\right)(x-y)\geq 2c(x-y)^2$ eşitsizliğini sağlamasıdır.

ii. f fonksiyonunun $c>0$ modülüne göre güçlü konveks fonksiyon olması için gerek ve yeter şart $f''(x)\geq 2c$ eşitsizliğinin sağlanmasıdır.

Tanım 2.3.2 (Güçlü Harmonik Konveks Fonksiyon): $f:I\subseteq\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ fonksiyonu her $x,y\in I$, $t\in[0,1]$ ve $c>0$ için

$$f\left(\frac{xy}{tx+(1-t)y}\right)\leq(1-t)f(x)+tf(y)-ct(1-t)\left(\frac{x-y}{xy}\right)^2$$

eşitsizliğini sağlarsa f fonksiyonuna $c>0$ modülüne göre güçlü harmonik konveks fonksiyon denir (Noor ve ark., 2016).

Önerme 2.3.2 $I\subset\mathbb{R}_+$ bir aralık ve $f:I\to\mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun.

i. Eğer $I\subseteq(0,+\infty)$ ve f fonksiyonu güçlü harmonik konveks fonksiyon ise aynı zamanda harmonik konveks fonksiyondur.

ii. Eğer $I\subseteq(0,+\infty)$ ve f fonksiyonu güçlü harmonik konveks ve artmayan bir fonksiyon ise, $c>0$ modülüne göre güçlü konveks fonksiyondur.

iii. Eğer $I\subseteq(0,+\infty)$ ve f fonksiyonu, $c>0$ modülüne göre güçlü konveks ve azalmayan bir fonksiyon ise güçlü harmonik konveks fonksiyondur (Bracamonte ve ark., 2016).

Tanım 2.3.3 (Güçlü h-Konveks Fonksiyon): $(X,\|\,.\,\|)$ bir reel iç çarpım uzayı, I, X'in konveks alt kümesi ve $c>0$ olsun. $h:(0,1)\to(0,\infty)$ fonksiyonu verilsin. $f:I\to\mathbb{R}$ fonksiyonu her $x,y\in I$ ve $t\in[0,1]$ için

$$f\left(tx+\left(1-t\right)y\right)\leq h\left(t\right)f\left(x\right)+h\left(1-t\right)f\left(y\right)-ct\left(1-t\right)\left\|x-y\right\|^2$$

eşitsizliğini sağlayan f fonksiyonuna güçlü h-konveks fonksiyon denir. Özel olarak; bu eşitsizlikte $h\left(t\right)=t$ alınırsa güçlü konveks fonksiyon, $s\in\left(0,1\right)$ için $h\left(t\right)=t^s$ alınırsa güçlü s-konveks fonksiyon, $h\left(t\right)=\frac{1}{t}$ alınırsa güçlü Godunova-Levin fonksiyonu ve $h\left(t\right)=1$ alınırsa güçlü P-fonksiyon elde edilir (Angulo ve ark., 2011).

Tanım 2.3.4 (Güçlü Quasi-Konveks Fonksiyon): $I\subset\mathbb{R}$ boştan farklı bir konveks küme ve $f:I\to\mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. $\forall x,y\in I$ ve $t\in\left[0,1\right]$ için,

$$f\left(tx+\left(1-t\right)y\right)\leq \sup\left\{f\left(x\right),f\left(y\right)\right\}-ct\left(1-t\right)\left\|x-y\right\|^2$$

eşitsizliğini sağlayan f fonksiyonuna $c>0$ modülüne göre güçlü quasi-konveks fonksiyon denir (Sun ve ark., 2016).

Tanım 2.3.5 (Güçlü s-Konveks Fonksiyon): $f:I\to\mathbb{R}$ fonksiyonu

$$f\left(tx+\left(1-t\right)y\right)\leq t^s f\left(x\right)+\left(1-t\right)^s f\left(y\right)-ct\left(1-t\right)\left(b-a\right)^2$$

eşitsizliğini sağlayan f fonksiyonuna $c>0$ modülüne göre güçlü s-konveks fonksiyon denir (Erdem ve ark., 2016).

Tanım 2.3.6 (Güçlü Geometrik Aritmetik (GA) Konveks Fonksiyon): $f:I\subset\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ fonksiyonu her $x,y\in I$ ve $t\in\left[0,1\right]$ için

$$f\left(x^{1-t}y^t\right)\leq\left(1-t\right)f\left(x\right)+tf\left(y\right)-ct\left(1-t\right)\left\|\ln y-\ln x\right\|^2$$

eşitsizliğini sağlayan f fonksiyonuna $c>0$ modülüne göre güçlü GA-konveks fonksiyon denir (Bekar ve ark., 2014).

3. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölümde ilk olarak literatürde yeralan bazı önemli eşitsizliklere değinilecektir. Daha sonra Hermite-Hadamard integral eşitsizlikleri, Ostrowski integral eşitsizlikleri ve ilgili temel teoremler verilecektir.

3.1 Bazı Önemli Eşitsizlikler

Teorem 3.1.1 (Hölder Eşitsizliği): $k=1,...,n$ için $a_k \geq 0$, $b_k \geq 0$ ve $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ olsun. Bu durumda,

i. Eğer p ve q pozitif ise $\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right)^{\frac{1}{q}}$ eşitsizliği sağlanır.

ii. Eğer $p<0$ veya $q<0$ ise yukarıdaki eşitsizliğin tersi sağlanır.

Bu iki eşitsizlik Hölder eşitsizliği olarak adlandırılır (Mitrinovic, 1970).

Teorem 3.1.2 (İntegrallenebilir Fonksiyonlar İçin Hölder Eşitsizliği): f ve g fonksiyonları $[a,b]$ aralığında tanımlı reel fonksiyonlar ve $p>1$ için $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ olsun. Eğer $|f|^p$ ve $|g|^q$ fonksiyonları $[a,b]$ aralığında integrallenebilir fonksiyonlar ise

$$\int_a^b |f(x)g(x)|dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizlik literatürde integrallenebilir fonksiyonlar için Hölder eşitsizliği olarak adlandırılır (Mitrinovic ve ark., 1993).

Teorem 3.1.3 (Power Mean Eşitsizliği): f ve g fonksiyonları $[a,b]$ aralığında tanımlı ve integrallenebilen iki fonksiyon ve $q \geq 1$ olsun. Eğer $|f|$ ve $|g|^q$ fonksiyonları $[a,b]$ aralığında integrallenebilir fonksiyonlar ise

$$\int_a^b |f(x)g(x)|dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|dx\right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_a^b |f(x)||g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizlik literatürde power mean eşitsizliği olarak adlandırılır (Mitrinovic ve ark., 1993).

Teorem 3.1.4 (Üçgen Eşitsizliği): Her x, y reel sayıları için

i. $|x+y| \le |x| + |y|$

ii. $\left||x|-|y|\right| \le |x-y|$

iii. $\left||x|-|y|\right| \le |x+y|$

iv. $|x_1 + ... + x_n| \le |x_1| + ... + |x_n|$

eşitsizlikleri sağlanır. *i* ve *ii*'deki eşitsizlikler ancak ve ancak $x = 0$ veya $y = 0$ veya x ve y aynı işarete sahip olduğunda sağlanır. *iii*'deki eşitsizlik ancak ve ancak $x = 0$ veya $y = 0$ veya x ve y zıt işarete sahip olduğunda sağlanır. *iv*'deki eşitsizlik ise ancak ve ancak tüm $x_1, ..., x_n$ sayıları sıfırdan farklı ve aynı işarete sahip olduklarında sağlanır (Mitrinovic ve ark., 1993).

Teorem 3.1.5 (İntegraller için Üçgen Eşitsizliği): f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında reel değerli ve sürekli bir fonksiyon ve $a < b$ olmak üzere

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$$

eşitsizliği sağlanır (Mitrinovic ve ark., 1993).

Teorem 3.1.6 (Young Eşitsizliği): $c > 0$ olmak üzere, f fonksiyonu $[0,c]$ üzerinde reel değerli, sürekli ve kesin artan bir fonksiyon olsun. Eğer $f(0) = 0$, $a \in [0,c]$ ve $b \in [0, f(c)]$ ise

$$\int_0^a f(x)\,dx + \int_0^b f^{-1}(x)\,dx \ge ab$$

eşitsizliği sağlanır. Burada f^{-1}, f fonksiyonunun tersidir (Mitrinovic, 1970).

3.2 Konveks Fonksiyonlar İle İlgili Önemli Eşitsizlikler

Teorem 3.2.1 (Jensen Eşitsizliği): Eğer f fonksiyonu $I \subset \mathbb{R}$ de tanımlı konveks fonksiyon, $n \geq 2$ için $x = (x_1, ..., x_n) \in I^n$ ve p, $P_k = \sum_{i=1}^{k} p_i$ ile tanımlanan pozitif n 'liler ise bu durumda

$$f\left(\frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right) \leq \frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i)$$

eşitsizliği sağlanır (Mitrinovic ve ark., 1993).

3.2.1 Hermite-Hadamard İntegral Eşitsizliği

Simetriye sahip olan eşitsizliklerin araştırılması analiz için çok ilginç ve önemlidir. Bunun en iyi bilinen örneği Hadamard (1893) tarafından yayınlanan ünlü Hermite-Hadamard eşitsizliğidir. Bu eşitsizlik analizde çok iyi çalışan konveks fonksiyonların ortalama değerinin tahminini verir (Gao, 2010). Aslında "konveks" terimi aynı zamanda 1881'de Hermite tarafından elde edilen bir sonuçtan ileri gelmiş ve 1883'de temel matematik dergisi "Mathesis" de kısa bir not olarak yayınlanmıştır. Ancak Hermite'in bu kısa notu matematiksel literatürde hiçbir yerde bahsedilmemekte ve bu eşitsizlik Hermite'in sonucu olarak bilinmemektedir (Dragomir ve Pearce, 1991). Hermite-Hadamard çift yönlü eşitsizliği, doğal geometrik bir yorumu olan ve belirli eşitsizlikler için çok sayıda uygulama içeren reel sayı aralıklarında tanımlanan konveks fonksiyonların ilk temel sonucudur (Dragomir ve Pearce, 1991).

Klasik Hermite-Hadamard eşitsizliği, nümerik analizden iyi bilindiği gibi, tanım kümesinin orta noktası ve uç noktaları dâhil olmak üzere, kompakt bir aralıkta tanımlanan herhangi bir konveks fonksiyonun integral ortalaması için alt ve üst tahminler sağlar. Aslında, Hermite ve Hadamard'ın eşitsizliği sadece konveksliğin bir sonucu değildir, aynı zamanda onu karakterize eder: eğer sürekli bir fonksiyon tanım kümesinin herhangi bir kompakt alt aralığında sol veya sağ tarafını sağlarsa, o zaman fonksiyon mutlaka konvekstir (Bessenyei, 2010).

Teorem 3.2.2 (Hermite-Hadamard İntegral Eşitsizliği): $I = [a,b]$ ve $f : I \to \mathbb{R}$ konveks bir fonksiyon olsun. Bu durumda,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leq\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\leq\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitlik literatürde konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliği olarak adlandırılır (Pachpatte, 2005).

İspat. $x=a(1-t)+bt$ ve $0\leq t\leq 1$ olsun. Bu durumda,

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx=\int_0^1 f\left(a(1-t)+bt\right)dt$$

$$\leq f(a)\int_0^1(1-t)\,dt+f(b)\int_0^1 t\,dt=\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

elde edilir. Şimdi eşitsizliğin sol tarafını ispatlayalım.

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx=\frac{1}{b-a}\left[\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)\,dx+\int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)\,dx\right]$$

Yukarıdaki son parantezin ilk teriminde $x=a+\frac{t(b-a)}{2}$ için,

$$\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)\,dx=\frac{b-a}{2}\int_0^1 f\left(a+\frac{t(b-a)}{2}\right)dt$$

elde edilir ve ikinci teriminde $x=b-\frac{t(b-a)}{2}$ için

$$\int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)\,dx=-\frac{b-a}{2}\int_1^0 f\left(b-\frac{t(b-a)}{2}\right)dt=\frac{b-a}{2}\int_0^1 f\left(b-\frac{t(b-a)}{2}\right)dt$$

elde edilir. Bu sonuçlar yerine yazılır ve konvekslik tanımı uygulanırsa,

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx=\frac{1}{2}\int_0^1\left[f\left(a+\frac{t(b-a)}{2}\right)+f\left(b-\frac{t(b-a)}{2}\right)\right]dt$$

$$\geq\int_0^1 f\left(\frac{a}{2}+\frac{b}{2}\right)dt=f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

elde edilir ve ispat tamamlanır (Azpeitia, 1994).

Teorem 3.2.3 Eğer $p,q>0$, f fonksiyonu $I\supset[a,b]$ de konveks bir fonksiyon ve $v=\dfrac{pa+qb}{p+q}$ ise bu durumda $0<y\leq\left[\dfrac{b-a}{p+q}\right]\min(p,q)$ için

$$f\left(\frac{pa+qb}{p+q}\right)\leq\frac{1}{2y}\int_{v-y}^{v+y}f(t)\,dt\leq\frac{pf(a)+qf(b)}{p+q}$$

eşitsizliği sağlanır. $p=q=1$ ve $y=\dfrac{b-a}{2}$ durumunda bu eşitsizlik Hermite-Hadamard eşitsizliğine indirgenir (Lupaş, 1976).

Teorem 3.2.2 de konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard integral eşitsizliği verildi. Şimdi ise bazı farklı türden konveks fonksiyon sınıfları için Hermite-Hadamard tipli integral eşitsizlikleri verilecektir.

Teorem 3.2.4 $f:I\subset\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ fonksiyonu harmonik konveks fonksiyon ve $a,b\in I$, $a<b$ olsun. Eğer $f\in L[a,b]$ ise

$$f\left(\frac{2ab}{a+b}\right)\leq\frac{ab}{b-a}\int_a^b\frac{f(x)}{x^2}dx\leq\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizlik harmonik konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard tip integral eşitsizliği olarak adlandırılır (İşcan, 2014).

Teorem 3.2.5 $f:I\subseteq\mathbb{R}_+=(0,\infty)\to\mathbb{R}$ fonksiyonu bir GA-konveks fonksiyon ve $a,b\in I$, $a<b$ olsun. Eğer $f\in L[a,b]$ ise aşağıdaki eşitsizlik sağlanır (İşcan ve Turhan, 2016).

$$f\left(\sqrt{ab}\right)\leq\frac{1}{\ln b-\ln a}\int_a^b f(x)\frac{1}{x}dx\leq\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

Bu eşitsizlik GA-konveks fonksiyon için Hermite-Hadamard eşitsizliği olarak bilinir.

Teorem 3.2.6 $f:I\subseteq\mathbb{R}_+=(0,\infty)\to\mathbb{R}$ fonksiyonu GA-konveks fonksiyon ve $a,b\in I$, $a<b$ olsun. $g:[a,b]\to[0,\infty)$ fonksiyonu ise sürekli pozitif ve $\sqrt{ab}$ 'ye göre geometrik simetrik bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$f\left(\sqrt{ab}\right)\int_a^b \frac{g(x)}{x}dx \le \int_a^b \frac{f(x)g(x)}{x}dx \le \frac{f(a)+f(b)}{2}\int_a^b \frac{g(x)}{x}dx$$

eşitsizliği sağlanır (Latif ve ark., 2015b).

Teorem 3.2.7 $f : I \subset \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ fonksiyonu bir p-konveks fonksiyon, $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ve $a,b \in I$, $a < b$ olsun. Eğer $f \in L[a,b]$ ise,

$$f\left[\left(\frac{a^p+b^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}}\right] \le \frac{p}{b^p-a^p}\int_a^b f(x)x^{p-1}dx \le \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizlik p-konveks fonksiyon için Hermite-Hadamard eşitsizliği olarak adlandırılır (Fang ve Shi, 2014; İşcan ve ark., 2017).

Teorem 3.2.8 $f : I \subset \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $M_\varphi A$-konveks fonksiyon $\varphi : I \to \mathbb{R}$ sürekli ve kesin monotonik fonksiyon ve $a,b \in I$, $a < b$ olsun. Eğer $f, \varphi' \in L[a,b]$ ise aşağıdaki eşitsizlik sağlanır.

$$f\left(\varphi^{-1}\left(\frac{\varphi(a)+\varphi(b)}{2}\right)\right) \le \frac{1}{\varphi(b)-\varphi(a)}\int_a^b f(x)\varphi'(x)dx \le \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

Bu eşitsizlik $M_\varphi A$-konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliği olarak adlandırılır (Turhan ve ark., 2017).

Teorem 3.2.9 $f : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $c > 0$ modülüne göre güçlü konveks fonksiyon olsun. Her $a,b \in I$ ve $a < b$ için

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{c}{12}\|a-b\|^2 \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le \frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{c}{6}\|a-b\|^2$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizlik güçlü konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliği olarak bilinir (Merentes and Nikodem, 2010).

Teorem 3.2.10 $f : I = [a,b] \subset \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $c > 0$ modülüne göre güçlü harmonik konveks fonksiyon olsun. Eğer $f \in L[a,b]$ ise,

$$f\left(\frac{2ab}{a+b}\right)+\frac{c}{12}\left\|\frac{a-b}{ab}\right\|^2 \le \frac{ab}{b-a}\int_a^b \frac{f(x)}{x^2}dx \le \frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{c}{6}\left\|\frac{a-b}{ab}\right\|^2$$

eşitsizliği sağlanır ve bu eşitsizliğe güçlü harmonik konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliği denir (Noor ve ark., 2016).

3.2.2 Ostrowski İntegral Eşitsizliği

Literatürde iyi bilinen bir diğer eşitsizlik, Ostrowski integral eşitsizliğidir. 1938'de, Alexander Markovich Ostrowski bir integral eşitsizliği kanıtlamıştır. Ostrowski, bir fonksiyonun integral ortalamasından sapma tahmini problemini ele almıştır (Bracamonte ve ark., 2017). Ostrowski'nin 1938'de bu eşitsizliği ispatlamasından bu yana, eşitsizlik tiplerinin araştırılması ve bunların uygulamaları üzerine yoğunlaşılmıştır. Son yirmi yılda, kökenleri Ostrowski'nin eşitsizliğine dayanan çeşitli genellemeler, genişlemeler ve uygulamalar elde etmeye yönelik çalışmalar literatürde yer almıştır (Pachpatte, 2012).

Teorem 3.2.12 (Ostrowski İntegral Eşitsizliği): $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu I^0'da diferansiyellenebilen bir fonksiyon ve $a,b \in I$, $a<b$ olsun. Eğer her $x \in [a,b]$ için $|f'(x)| \le M$ ise aşağıdaki eşitsizlik vardır.

$$\left|f(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt\right| \le M(b-a)\left[\frac{1}{4}+\frac{\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2}{(b-a)^2}\right]$$

Burada, $\frac{1}{4}$ sabiti en iyi katsayıdır ve daha küçük bir katsayı ile yer değiştiremez (Ostrowski, 1938). Bu eşitsizlik literatürde, $x \in [a,b]$ noktasında $f(x)$ değeri ile $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt$ integral ortalaması yaklaşımı için bir üst sınır veren Ostrowski integral eşitsizliği olarak bilinir (Baloch ve İşcan, 2015).

Ostrowski integral eşitsizliği aşağıdaki formda da yazılabilir (İşcan, 2013b; Alomari ve ark., 2010).

$$\left| f(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt \right| \leq \frac{M}{(b-a)}\left[\frac{(x-a)^2 + (b-x)^2}{2} \right]$$

Ostrowski integral eşitsizliği verildikten sonra, literatürde yer alan bazı lemmalar ve bu lemmalar kullanılarak konveks ve güçlü konveks fonksiyonlar için Ostrowski tipli integral eşitsizlikleri verilecektir.

Lemma 3.2.1 $f : I \subset \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ fonksiyonu I^0'da diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $a,b \in I$, $a<b$ olsun. Eğer $f' \in L[a,b]$ ise, o zaman her $x \in [a,b]$ için

$$f(x) - \frac{ab}{b-a}\int_a^b \frac{f(u)}{u^2}\,du = \frac{ab}{b-a}\left\{ (x-a)^2 \int_0^1 \frac{t}{\left(ta+(1-t)x\right)^2} f'\left(\frac{ax}{ta+(1-t)x} \right) dt \right.$$

$$\left. -(b-x)^2 \int_0^1 \frac{t}{\left(tb+(1-t)x\right)^2} f'\left(\frac{bx}{tb+(1-t)x} \right) dt \right\}$$

eşitliği sağlanır (İşcan, 2013c).

Teorem 3.2.13 $I \subset \mathbb{R}_+$ reel bir aralık ve $f : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu I^0'da diferansiyellenebilir bir fonksiyon, $a,b \in I^0$, $a<b$ ve $f' \in L[a,b]$ olsun. Eğer $|f'|^q$, $q \geq 1$ için harmonik s-konveks fonksiyon ise, her $x \in [a,b]$ için

$$\left| f(x) - \frac{ab}{b-a}\int_a^b \frac{f(u)}{u^2}\,du \right| \leq \frac{ab}{b-a}\left\{ (x-a)^2 \left(\lambda_1(a,x,s,q,q)\left|f'(x)\right|^q \right. \right.$$

$$\left. +\lambda_2(a,x,s,q,q)\left|f'(a)\right|^q \right)^{\frac{1}{q}} + (b-x)^2$$

$$\left. \left(\lambda_3(b,x,s,q,q)\left|f'(x)\right|^q + \lambda_4(b,x,s,q,q)\left|f'(b)\right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada,

$$\lambda_1(a,x,s,v,\rho) = \frac{\beta(\rho+s+1,2)}{x^{2v}}\ {}_2F_1\left(2v, \rho+s+1; \rho+s+2; 1-\frac{a}{x} \right),$$

$$\lambda_2(a,x,s,v,\rho)=\frac{\beta(\rho+1,1)}{x^{2v}}\,{}_2F_1\left(2v,\rho+1;\rho+s+2;1-\frac{a}{x}\right),$$

$$\lambda_3(b,x,s,v,\rho)=\frac{\beta(1,\rho+s+1)}{b^{2v}}\,{}_2F_1\left(2v,1;\rho+s+2;1-\frac{x}{b}\right),$$

$$\lambda_4(b,x,s,v,\rho)=\frac{\beta(s+1,\rho+1)}{b^{2v}}\,{}_2F_1\left(2v,s+1;\rho+s+2;1-\frac{x}{b}\right)$$

dir (İşcan, 2013c).

Lemma 3.2.2 $f:I\subset\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ fonksiyonu I^0 da diferansiyellenebilir fonksiyon, $a,b\in I$, $a<b$ olsun. Eğer $f'\in L[a,b]$ ise, o zaman

$$f(x)-\frac{1}{\ln b-\ln a}\int_a^b\frac{f(u)}{u}du=(\ln a-\ln b)\int_0^1 p(t)\left(a^tb^{1-t}\right)f'\left(a^tb^{1-t}\right)dt$$

eşitliği vardır (Çoban ve ark., 2016). Burada, $x\in[a,b]$ için

$$p(t)=\begin{cases} t\ , & t\in\left[0,\dfrac{\ln b-\ln x}{\ln b-\ln a}\right] \\ t-1, & t\in\left(\dfrac{\ln b-\ln x}{\ln b-\ln a},1\right] \end{cases}$$

dir.

Teorem 3.2.14 $I\subset\mathbb{R}_+$ reel bir aralık ve $f:I\to\mathbb{R}$ fonksiyonu I^0'da diferansiyellenebilir bir fonksiyon, $a,b\in I^0$, $a<b$ ve $f'\in L[a,b]$ olsun. Eğer $|f'|$, geometrik-aritmetik (GA)-konveks fonksiyon ise, her $x\in[a,b]$ için

$$\left|f(x)-\frac{1}{\ln b-\ln a}\int_a^b\frac{f(u)}{u}du\right|$$

$$\leq(\ln b-\ln a)\left[\left|f'(a)\right|\left(H_1(a,b,x)+H_3(a,b,x)\right)+\left|f'(b)\right|\left(H_2(a,b,x)+H_4(a,b,x)\right)\right]$$

eşitsizliği sağlanır. Burada,

$$H_1(a,b,x)=-\frac{1}{(\ln b-\ln a)^3}\left[(\ln b-\ln x)^2x+2(\ln b-\ln x+1)x-2b\right],$$

$$H_2(a,b,x)=\frac{1}{(\ln b-\ln a)^3}\Big[(\ln b-\ln x)^2 x+(\ln a-\ln b+2)(\ln b-\ln x)x$$

$$+(\ln a-\ln b+2)x+b\ln b-b\ln a-2b\Big],$$

$$H_3(a,b,x)=\frac{1}{(\ln b-\ln a)^3}\Big[-(\ln b-\ln x)^2 x+(\ln b-\ln a-2)(\ln b-\ln x)x$$

$$+(\ln b-\ln a-2)x+a\ln b-a\ln a+2a\Big],$$

$$H_4(a,b,x)=\frac{1}{(\ln b-\ln a)^3}\Big[(\ln a-\ln x)^2 x-2a+2(\ln a-\ln x+1)x\Big]$$

dir (Çoban ve ark., 2016).

Lemma 3.2.3 $f:I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu I^0 da diferansiyellenebilir fonksiyon ve $a,b\in I$, $a<b$ olsun. Eğer $f'\in L[a,b]$ ise, o zaman her $x\in[a,b]$ için,

$$f(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)\,du=\frac{(x-a)^2}{b-a}\int_0^1 tf'(tx+(1-t)a)\,dt-\frac{(b-x)^2}{b-a}\int_0^1 tf'(tx+(1-t)b)\,dt$$

eşitliği vardır (Alomari ve ark., 2010).

Teorem 3.2.15 $f:I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu I^0 da diferansiyellenebilir fonksiyon ve $a,b\in I$, $a<b$ olsun. Eğer $|f'|$, $[a,b]$ de $c>0$ modülüne göre güçlü konveks fonksiyon, $|f'|\leq M$ ve $M\geq\max\left\{\frac{c(x-a)^2}{6},\frac{c(b-x)^2}{6}\right\}$ ise, o zaman her $x,y\in[a,b]$ ve $t\in(0,1)$ için

$$\left|f(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)\,du\right|\leq\frac{(x-a)^2}{2(b-a)}\left(M-\frac{c(x-a)^2}{6}\right)+\frac{(b-x)^2}{2(b-a)}\left(M-\frac{c(b-x)^2}{6}\right)$$

eşitsizliği sağlanır (Set ve ark., 2012).

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölümde ilk olarak güçlü $M_{\varphi}A$-konveks, güçlü geometrik-aritmetik (GA) konveks, güçlü p-konveks fonksiyon tanmları ve bu fonksiyonlar için Hermite-Hadamard tipli integral eşitsizliği için yeni lemma ve teoremler elde edildi. Daha sonra ise literatürde geometrik aritmetik (GA) konveks ve harmonik s-konveks fonksiyonlar için yer alan lemmaları güçlü geometrik-aritmetik (GA) konveks, güçlü harmonik konveks fonksiyonlar için uygulayarak bu fonksiyonlar için Ostrowski tipli integral eşitsizlikleri için yeni teorem ve sonuçlar elde edildi.

4.1 Güçlü $M_{\varphi}A$-Konveks Fonksiyonlar için Hermite-Hadamard Tipli İntegral Eşitsizlikleri

Bu bölümde güçlü $M_{\varphi}A$-konveks fonksiyon tanımı verildi ve bu fonksiyonlar için yeni Hermite-Hadamard tipli integral eşitsizlikleri elde edildi. Bunun için bir lemma ve bu lemmadan yararlanarak bazı teorem ve sonuçlar verildi.

Bu bölümde I bir açık aralık ve $\varphi : I \to \mathbb{R}$ sürekli ve kesin (tam) monotonik bir fonksiyondur.

Tanım 4.1.1 I bir aralık, $\varphi : I \to \mathbb{R}$ sürekli ve kesin monotonik bir fonksiyon olsun. $f : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $x, y \in I$ ve $t \in [0,1]$ için $c > 0$ modülüne göre,

$$f\left(\varphi^{-1}\left(t\varphi(y)+(1-t)\varphi(x)\right)\right) \le (1-t)f(x)+tf(y)-ct(1-t)\left(\varphi(y)-\varphi(x)\right)^2$$

eşitsizliğini sağlayan bu f fonksiyonuna güçlü $M_{\varphi}A$-konveks fonksiyon denir.

Önerme 4.1.1

i. $\varphi : I \to \mathbb{R}$ ve $\varphi(x) = x$ için güçlü $M_{\varphi}A$-konvekslik, I 'da sıradan güçlü konveksliğe indirgenir.

ii. $\varphi : I \to \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{R}_+$, $n \in \mathbb{R}$ ve $\varphi(x) = x^{-1}$ için güçlü $M_{\varphi}A$-konvekslik, I 'da güçlü harmonik konveksliğe indirgenir.

iii. $\varphi : I \to (0,\infty)$ ve $\varphi(x) = \ln x$ için güçlü $M_{\varphi}A$-konvekslik, I 'da güçlü GA-konveksliğe indirgenir.

Lemma 4.1.1 Eğer, $g(x)=f(x)-c(\varphi(x))^2$ fonksiyonu $M_\varphi A$-konveks fonksiyon ise o zaman, $f:I=[a,b]\subset\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $c>0$ modülüne göre güçlü $M_\varphi A$-konveks fonksiyondur.

İspat. f fonksiyonunun $c>0$ modülüne göre güçlü $M_\varphi A$-konveks fonksiyon olduğunu varsayalım. İç çarpım özelliği kullanılarak,

$$g\left(\varphi^{-1}\left(t\varphi(y)+(1-t)\varphi(x)\right)\right)=f\left(\varphi^{-1}\left(t\varphi(y)+(1-t)\varphi(x)\right)\right)$$

$$-c\left(\varphi\left(\varphi^{-1}\left(t\varphi(y)+(1-t)\varphi(x)\right)\right)\right)^2$$

$$\leq(1-t)f(x)+tf(y)-ct(1-t)\left(\varphi(y)-\varphi(x)\right)^2-c\left(t\varphi(y)-(1-t)\varphi(x)\right)^2$$

$$\leq(1-t)f(x)+tf(y)-c\Big(t(1-t)\left(\varphi(y)\right)^2-2t(1-t)\varphi(y)\varphi(x)+t(1-t)\left(\varphi(x)\right)^2$$

$$+t^2\left(\varphi(y)\right)^2+2t(1-t)\varphi(y)\varphi(x)+(1-t)^2\left(\varphi(x)\right)^2\Big)$$

$$\leq(1-t)f(x)+tf(y)-c\left(t\left(\varphi(y)\right)^2+(1-t)\left(\varphi(x)\right)^2\right)$$

$$\leq(1-t)f(x)-c(1-t)\left(\varphi(x)\right)^2+tf(y)-ct\left(\varphi(y)\right)^2$$

$$=(1-t)g(x)+tg(y)$$

elde edilir ve buradan g fonksiyonunun $M_\varphi A$-konveks fonksiyon olduğu görülür.

Tersine şimdi, g fonksiyonunun $M_\varphi A$-konveks fonksiyon olduğunu varsayalım.

$$f\left(\varphi^{-1}\left(t\varphi(y)+(1-t)\varphi(x)\right)\right)=g\left(\varphi^{-1}\left(t\varphi(y)+(1-t)\varphi(x)\right)\right)$$

$$+c\left(\varphi\left(\varphi^{-1}\left(t\varphi(y)+(1-t)\varphi(x)\right)\right)\right)^2$$

$$\leq tg(y)+(1-t)g(x)+c\left(t\varphi(y)+(1-t)\varphi(x)\right)^2$$

$$\leq tg(y)+ct\left(\varphi(y)\right)^2+(1-t)g(x)+c(1-t)\left(\varphi(x)\right)^2+ct(1-t)\left(\varphi(y)\right)^2$$

$$-ct(1-t)(\varphi(x))^2+2ct(1-t)\varphi(y)\varphi(x)$$

$$=tf(y)+(1-t)f(x)-ct(1-t)(\varphi(y)-\varphi(x))^2$$

elde edilir. Buradan, f fonksiyonunun $c>0$ modülüne göre güçlü $M_{\varphi}A$-konveks fonksiyon olduğu görülür. Böylece ispat tamamlanır.

Şimdi Lemma 4.1.1'i kullanarak elde ettiğimiz teorem ve sonuçları verelim.

Teorem 4.1.1 $f:I=[a,b]\subset\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $c>0$ modülüne göre güçlü $M_{\varphi}A$-konveks fonksiyon ve $\varphi^{-1}:\varphi(I^0)\to I^0$ sürekli diferansiyellenebilir fonksiyon olacak şekilde $\varphi:I\to\mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli ve kesin monotonik fonksiyon ve $\forall a,b\in I$, $a<b$ olsun. Eğer $f\in L[a,b]$ ise, o zaman aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir.

$$f\left(\varphi^{-1}\left(\frac{\varphi(a)+\varphi(b)}{2}\right)\right)+\frac{c}{12}(\varphi(b)-\varphi(a))^2\le\frac{1}{\varphi(b)-\varphi(a)}\int_a^b f(x)\varphi'(x)dx$$

$$\le\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{c}{6}(\varphi(b)-\varphi(a))^2. \tag{4.1.1}$$

İspat. $f:I=[a,b]\subset\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ fonksiyonu güçlü $M_{\varphi}A$-konveks fonksiyon, $\forall x,y\in I$ olsun. Güçlü $M_{\varphi}A$-konveks fonksiyon tanımında $t=\frac{1}{2}$ alınırsa,

$$f\left(\varphi^{-1}\left(\frac{\varphi(x)+\varphi(y)}{2}\right)\right)\le\frac{f(x)+f(y)}{2}-\frac{c}{4}(\varphi(y)-\varphi(x))^2$$

elde edilir. Burada, $x=\varphi^{-1}(t\varphi(b)+(1-t)\varphi(a))$, $y=\varphi^{-1}(t\varphi(a)+(1-t)\varphi(b))$ seçilirse,

$$f\left(\varphi^{-1}\left(\frac{\varphi(a)+\varphi(b)}{2}\right)\right)\le\frac{f\left(\varphi^{-1}(t\varphi(b)+(1-t)\varphi(a))\right)+f\left(\varphi^{-1}(t\varphi(a)+(1-t)\varphi(b))\right)}{2}$$

$$-\frac{c}{4}\left[\varphi\left(\varphi^{-1}(t\varphi(a)+(1-t)\varphi(b))\right)-\varphi\left(\varphi^{-1}(t\varphi(b)+(1-t)\varphi(a))\right)\right]^2$$

elde edilir. Bu eşitsizlik, $[0,1]$ aralığında t'ye göre integer edilirse,

$$f\left(\varphi^{-1}\left(\frac{\varphi(a)+\varphi(b)}{2}\right)\right)\leq\frac{1}{2}\left[\int_0^1 f\left(\varphi^{-1}\left(t\varphi(b)+(1-t)\varphi(a)\right)\right)dt\right.$$

$$\left.+\int_0^1 f\left(\varphi^{-1}\left(t\varphi(a)+(1-t)\varphi(b)\right)\right)dt\right]-\frac{c}{4}\left(\varphi(b)-\varphi(a)\right)^2\int_0^1(1-2t)^2\,dt$$

$$f\left(\varphi^{-1}\left(\frac{\varphi(a)+\varphi(b)}{2}\right)\right)+\frac{c}{12}\left(\varphi(b)-\varphi(a)\right)^2\leq\frac{1}{\varphi(b)-\varphi(a)}\int_a^b f(x)\varphi'(x)\,dx$$

elde edilir. Böylece, (4.1.1) eşitsizliğinin sol tarafı tamamlanır. Ayrıca, $\forall t\in[0,1]$ için

$$f\left(\varphi^{-1}\left(t\varphi(b)+(1-t)\varphi(a)\right)\right)\leq(1-t)f(a)+tf(b)-ct(1-t)\left(\varphi(b)-\varphi(a)\right)^2$$

olduğu görülür. Bu eşitsizlikte $[0,1]$ aralığında t'ye göre integrallenirse (4.1.1) eşitsizliğinin sağ tarafıda elde edilir.

$$\int_0^1 f\left(\varphi^{-1}\left(t\varphi(b)+(1-t)\varphi(a)\right)\right)dt$$

$$\leq\int_0^1\left((1-t)f(a)+tf(b)\right)dt-c\left(\varphi(b)-\varphi(a)\right)^2\int_0^1 t(1-t)\,dt$$

$$=\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{c}{6}\left(\varphi(b)-\varphi(a)\right)^2$$

ve böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.1.2 $f:I=[a,b]\subset\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $c>0$ modülüne göre güçlü $M_\varphi A$-konveks fonksiyon ve $\varphi^{-1}:\varphi(I^0)\to I^0$ sürekli diferansiyellenebilir fonksiyon olacak şekilde $\varphi:I\to\mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli ve kesin monotonik fonksiyon ve $\forall a,b\in I$, $a<b$ olsun. O zaman,

$$f\left(\varphi^{-1}\left(\frac{\varphi(a)+\varphi(b)}{2}\right)\right)+\frac{c}{12}\left(\varphi(b)-\varphi(a)\right)^2\leq\phi_c(a;b)$$

$$\leq \frac{1}{\varphi(b)-\varphi(a)}\int_a^b f(x)\varphi'(x)\,dx$$

$$\leq \psi_c(a;b) \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{c}{6}\left(\varphi(b)-\varphi(a)\right)^2. \tag{4.1.2}$$

Burada,

$$\phi_c(a;b) = \frac{1}{2}\left[f\left(\varphi^{-1}\left(\frac{3\varphi(a)+\varphi(b)}{4}\right)\right) + f\left(\varphi^{-1}\left(\frac{\varphi(a)+3\varphi(b)}{4}\right)\right)\right] + \frac{c}{48}\left(\varphi(b)-\varphi(a)\right)^2,$$

$$\psi_c(a;b) = \frac{1}{2}\left[f\left(\varphi^{-1}\left(\frac{\varphi(a)+\varphi(b)}{2}\right)\right) + \frac{f(a)+f(b)}{2}\right] - \frac{c}{24}\left(\varphi(b)-\varphi(a)\right)^2$$

şeklindedir.

İspat. $\left[a,\varphi^{-1}\left(\frac{\varphi(a)+\varphi(b)}{2}\right)\right]$ ve $\left[\varphi^{-1}\left(\frac{\varphi(a)+\varphi(b)}{2}\right),b\right]$ aralığının her birinde (4.1.1) eşitsizliğini uygularsak,

$$f\left(\varphi^{-1}\left(\frac{3\varphi(a)+\varphi(b)}{4}\right)\right) + \frac{c}{48}\left(\varphi(b)-\varphi(a)\right)^2 \leq \frac{2}{\varphi(b)-\varphi(a)} \int_0^{\varphi^{-1}\left(\frac{\varphi(a)+\varphi(b)}{2}\right)} f(x)\varphi'(x)\,dx$$

$$\leq \frac{1}{2}\left[f(a) + f\left(\varphi^{-1}\left(\frac{\varphi(a)+\varphi(b)}{2}\right)\right)\right] - \frac{c}{24}\left(\varphi(b)-\varphi(a)\right)^2 \tag{4.1.3}$$

ve

$$f\left(\varphi^{-1}\left(\frac{\varphi(a)+3\varphi(b)}{4}\right)\right) + \frac{c}{48}\left(\varphi(b)-\varphi(a)\right)^2 \leq \frac{2}{\varphi(b)-\varphi(a)} \int_{\varphi^{-1}\left(\frac{\varphi(a)+\varphi(b)}{2}\right)}^{b} f(x)\varphi'(x)\,dx$$

$$\leq \frac{1}{2}\left[f\left(\varphi^{-1}\left(\frac{\varphi(a)+\varphi(b)}{2}\right)\right) + f(b)\right] - \frac{c}{24}\left(\varphi(b)-\varphi(a)\right)^2 \tag{4.1.4}$$

elde edilir. (4.1.3) ve (4.1.4)'ü taraf tarafa toplarsak;

$$\phi_c(a;b)=\frac{1}{2}\left[f\left(\varphi^{-1}\left(\frac{3\varphi(a)+\varphi(b)}{4}\right)\right)+f\left(\varphi^{-1}\left(\frac{\varphi(a)+3\varphi(b)}{4}\right)\right)\right]+\frac{c}{48}\left(\varphi(b)-\varphi(a)\right)^2$$

$$\leq\frac{1}{\varphi(b)-\varphi(a)}\int_a^b f(x)\varphi'(x)dx\leq\frac{1}{2}\left[f\left(\varphi^{-1}\left(\frac{\varphi(a)+\varphi(b)}{2}\right)\right)\right.$$

$$\left.+\frac{f(a)+f(b)}{2}\right]-\frac{c}{24}\left(\varphi(b)-\varphi(a)\right)^2$$

$$\leq\frac{1}{2}\left[\frac{f(a)+f(b)}{2}+\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{c}{4}\left(\varphi(b)-\varphi(a)\right)^2\right]-\frac{c}{24}\left(\varphi(b)-\varphi(a)\right)^2$$

$$\leq\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{c}{6}\left(\varphi(b)-\varphi(a)\right)^2 \qquad (4.1.5)$$

elde edilir ve böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.1.3 $f:I=[a,b]\subset\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $c>0$ modülüne göre güçlü $M_\varphi A$-konveks fonksiyon ve $\varphi^{-1}:\varphi(I^0)\to I^0$ sürekli diferansiyellenebilir fonksiyon olacak şekilde $\varphi:I\to\mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli ve kesin monotonik fonksiyon ve $\forall a,b\in I$, $a<b$ olsun. Eğer $fg\in L[a,b]$ ise, o zaman

$$\frac{1}{\varphi(b)-\varphi(a)}\int_a^b f(x)g\left(\varphi^{-1}\left(\varphi(a)+\varphi(b)-\varphi(x)\right)\right)\varphi'(x)dx$$

$$\leq\frac{1}{6}M(a,b)+\frac{1}{3}N(a,b)-\frac{c}{12}\left(\varphi(b)-\varphi(a)\right)^2 S(a,b)-\frac{c^2}{30}\left(\varphi(b)-\varphi(a)\right)^4$$

Burada,

$$M(a,b)=f(a)g(a)+f(b)g(b) \qquad (4.1.6)$$

$$N(a,b)=f(a)g(b)+f(b)g(a) \qquad (4.1.7)$$

$$S(a,b)=f(a)+f(b)+g(a)+g(b) \qquad (4.1.8)$$

dir.

İspat. f,g fonksiyonları $c>0$ modülüne göre güçlü $M_\varphi A$-konveks fonksiyon olsun. O zaman,

$$\frac{1}{\varphi(b)-\varphi(a)}\int_a^b f(x)g\left(\varphi^{-1}\left(\varphi(a)+\varphi(b)-\varphi(x)\right)\right)\varphi'(x)dx$$

$$\leq \int_0^1 f\left(\varphi^{-1}\left(t\varphi(b)+(1-t)\varphi(a)\right)\right)g\left(\varphi^{-1}\left(t\varphi(a)+(1-t)\varphi(b)\right)\right)dt$$

$$\leq \int_0^1 \left[(1-t)f(a)+tf(b)-ct(1-t)\left(\varphi(b)-\varphi(a)\right)^2\right]\left[tg(a)+(1-t)g(b)\right.$$

$$\left.-ct(1-t)\left(\varphi(b)-\varphi(a)\right)^2\right]dt$$

$$=f(a)g(b)\int_0^1(1-t)^2\,dt+f(b)g(a)\int_0^1 t^2dt+\left[f(a)g(a)+f(b)g(b)\right]\int_0^1 t(1-t)dt$$

$$-c\left(\varphi(b)-\varphi(a)\right)^2\left[f(a)+g(b)\right]\int_0^1 t(1-t)^2\,dt-c\left(\varphi(b)-\varphi(a)\right)^2\left[f(b)+g(a)\right]$$

$$\int_0^1 t^2(1-t)dt-c^2\left(\varphi(b)-\varphi(a)\right)^4\int_0^1 t^2(1-t)^2\,dt$$

$$=\frac{f(a)g(b)+f(b)g(a)}{3}+\frac{f(a)g(a)+f(b)g(b)}{6}-\frac{c}{12}\left(\varphi(b)-\varphi(a)\right)^2$$

$$\left[f(a)+f(b)+g(a)+g(b)\right]-\frac{c^2}{30}\left(\varphi(b)-\varphi(a)\right)^4$$

$$=\frac{1}{6}M(a,b)+\frac{1}{3}N(a,b)-\frac{c}{12}\left(\varphi(b)-\varphi(a)\right)^2S(a,b)-\frac{c^2}{30}\left(\varphi(b)-\varphi(a)\right)^4$$

eşitsizliği elde edilir ve ispat tamamlanır.

Eğer Teorem 4.1.3'de $f=g$ alınırsa, aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.1.1 $f:I=[a,b]\subset\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $c>0$ modülüne göre güçlü $M_\varphi A$-konveks fonksiyon, $\varphi:I\to\mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli ve kesin monotonik fonksiyon ve $\forall a,b\in I$, $a<b$ olsun. Eğer $f\in L[a,b]$ ise, o zaman aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir.

$$\frac{1}{\varphi(b)-\varphi(a)}\int_a^b f(x)f\left(\varphi^{-1}\left(\varphi(a)+\varphi(b)-\varphi(x)\right)\right)\varphi'(x)\,dx$$

$$\leq\frac{2\left[f(a)f(b)\right]}{3}+\frac{f^2(a)+f^2(b)}{6}$$

$$-\frac{c}{6}\left(\varphi(b)-\varphi(a)\right)^2\left[f(a)+f(b)\right]-\frac{c^2}{30}\left(\varphi(b)-\varphi(a)\right)^4.$$

Teorem 4.1.4 $f:I=[a,b]\subset\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $c>0$ modülüne göre güçlü $M_\varphi A$-konveks fonksiyon ve $\varphi^{-1}:\varphi\left(I^0\right)\to I^0$ sürekli diferansiyellenebilir fonksiyon olacak şekilde $\varphi:I\to\mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli ve kesin monotonik fonksiyon ve $\forall a,b\in I$, $a<b$ olsun. Eğer $fg\in L[a,b]$ ise, o zaman

$$\frac{1}{\varphi(b)-\varphi(a)}\int_a^b f(x)g(x)\varphi'(x)\,dx\leq\frac{1}{3}M(a,b)+\frac{1}{6}N(a,b)$$

$$-\frac{c}{12}\left(\varphi(b)-\varphi(a)\right)^2S(a,b)-\frac{c^2}{30}\left(\varphi(b)-\varphi(a)\right)^4.$$

Burada, $M(a,b)$, $N(a,b)$ ve $S(a,b)$ sırasıyla (4.1.6), (4.1.7) ve (4.1.8)'de verildiği gibidir.

İspat. f,g fonksiyonları $c>0$ modülüne göre güçlü $M_\varphi A$-konveks fonksiyon olsun. O zaman,

$$\frac{1}{\varphi(b)-\varphi(a)}\int_a^b f(x)g(x)\varphi'(x)\,dx=\int_0^1 f\left(\varphi^{-1}\left(t\varphi(b)+(1-t)\varphi(a)\right)\right)$$

$$g\left(\varphi^{-1}\left(t\varphi(b)+(1-t)\varphi(a)\right)\right)dt$$

$$\leq\int_0^1\left[(1-t)f(a)+tf(b)-ct(1-t)\left(\varphi(b)-\varphi(a)\right)^2\right]$$

$$\left[(1-t)g(a)+tg(b)-ct(1-t)\left(\varphi(b)-\varphi(a)\right)^2\right]dt$$

$$=f(a)g(a)\int_0^1(1-t)^2\,dt+f(b)g(b)\int_0^1 t^2dt+\left[f(a)g(b)+f(b)g(a)\right]\int_0^1 t(1-t)\,dt$$

$$-c\left(\varphi(b)-\varphi(a)\right)^2\left[f(a)+g(a)\right]\int_0^1 t(1-t)^2\,dt-c\left(\varphi(b)-\varphi(a)\right)^2$$

$$\left[f(b)+g(b)\right]\int_0^1 t^2(1-t)\,dt-c^2\left(\varphi(b)-\varphi(a)\right)^4\int_0^1 t^2(1-t)^2\,dt$$

$$=\frac{f(a)g(a)+f(b)g(b)}{3}+\frac{f(a)g(b)+f(b)g(a)}{6}-\frac{c}{12}\left(\varphi(b)-\varphi(a)\right)^2$$

$$\left[f(a)+f(b)+g(a)+g(b)\right]-\frac{c^2}{30}\left(\varphi(b)-\varphi(a)\right)^4$$

$$=\frac{1}{3}M(a,b)+\frac{1}{6}N(a,b)-\frac{c}{12}\left(\varphi(b)-\varphi(a)\right)^2 S(a,b)-\frac{c^2}{30}\left(\varphi(b)-\varphi(a)\right)^4$$

eşitsizliği elde edilir ve ispat tamamlanır.

Eğer Teorem 4.1.4'de $f=g$ alınırsa, aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.1.2 $f:I=[a,b]\subset\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $c>0$ modülüne göre güçlü $M_\varphi A$-konveks fonksiyon, $\varphi:I\to\mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli ve kesin monotonik fonksiyon ve $\forall a,b\in I$, $a<b$ olsun. Eğer $f\in L[a,b]$ ise, o zaman

$$\frac{1}{\varphi(b)-\varphi(a)}\int_a^b f^2(x)\varphi'(x)\,dx\le\frac{\left[f(a)f(b)\right]}{3}+\frac{\left[f^2(a)+f^2(b)\right]}{3}$$

$$-\frac{c}{6}\left(\varphi(b)-\varphi(a)\right)^2\left[f(a)+f(b)\right]-\frac{c^2}{30}\left(\varphi(b)-\varphi(a)\right)^4$$

elde edilir.

4.2 Güçlü GA-Konveks (Geometrik-Aritmetik Konveks) Fonksiyonlar için Hermite-Hadamard Tipli İntegral Eşitsizlikleri

Bu bölümde güçlü GA-konveks (geometrik-aritmetik konveks) fonksiyonlar için yeni Hermite-Hadamard tipli integral eşitsizlikleri elde edildi. Öncelikle bir lemma ve bu lemmadan yararlanarak bazı teorem ve sonuçlar verildi.

Lemma 4.2.1 I bir açık aralık olsun. Eğer, $g(x)=f(x)-c(\ln x)^2$ fonksiyonu GA-konveks fonksiyon ise o zaman, $f:I\subset\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $c>0$ modülüne göre güçlü GA-konveks fonksiyondur.

İspat. f fonksiyonunun $c>0$ modülüne göre güçlü GA-konveks fonksiyon olduğunu varsayalım. İç çarpım özelliğini kullanarak,

$$g\left(x^t y^{1-t}\right)=f\left(x^t y^{1-t}\right)-c\left(\ln x^t y^{1-t}\right)^2$$

$$\leq tf\left(x\right)+\left(1-t\right)f\left(y\right)-ct\left(1-t\right)\left(\ln y-\ln x\right)^2-c\left(\ln x^t-\ln y^{1-t}\right)^2$$

$$\leq tf\left(x\right)+\left(1-t\right)f\left(y\right)-c\left(t\left(1-t\right)\left(\ln y\right)^2-2t\left(1-t\right)\ln y\ln x\right.$$

$$\left.+t\left(1-t\right)\left(\ln x\right)^2+\left(\ln x^t\right)^2+2\ln x^t\ln y^{1-t}+\left(\ln y^{1-t}\right)^2\right)$$

$$\leq tf\left(x\right)+\left(1-t\right)f\left(y\right)-c\left(t\left(\ln x\right)^2+\left(1-t\right)\left(\ln y\right)^2\right)$$

$$\leq tf\left(x\right)-ct\left(\ln x\right)^2+\left(1-t\right)f\left(y\right)-c\left(1-t\right)\left(\ln y\right)^2$$

$$=tg\left(x\right)+\left(1-t\right)g\left(y\right)$$

elde edilir ve buradan g fonksiyonunun GA-konveks fonksiyon olduğu görülür.

Tersine şimdi, g fonksiyonunun GA-konveks fonksiyon olduğunu varsayalım.

$$f\left(x^t y^{1-t}\right)=g\left(x^t y^{1-t}\right)+c\left(\ln x^t y^{1-t}\right)^2$$

$$\leq tg\left(x\right)+\left(1-t\right)g\left(y\right)+c\left(\ln x^t+\ln y^{1-t}\right)^2$$

$$\leq tg\left(x\right)+\left(1-t\right)g\left(y\right)+c\left(1-t\right)\left(\ln y\right)^2-ct\left(1-t\right)\left(\ln y\right)^2$$

$$+2ct\left(1-t\right)\ln y\ln x+ct\left(\ln x\right)^2-ct\left(1-t\right)\left(\ln x\right)^2$$

$$=tg\left(x\right)+ct\left(\ln x\right)^2+\left(1-t\right)g\left(y\right)+c\left(1-t\right)\left(\ln y\right)^2-ct\left(1-t\right)\left(\ln y-\ln x\right)^2$$

$$=tf\left(x\right)+\left(1-t\right)f\left(y\right)-ct\left(1-t\right)\left(\ln y-\ln x\right)^2$$

elde edilir. Buradan, f fonksiyonunun $c>0$ modülüne göre güçlü GA-konveks fonksiyon olduğu görülür. Böylece ispat tamamlanır.

Şimdi Lemma 4.2.1'i kullanarak elde ettiğimiz teorem ve sonuçları verelim.

Teorem 4.2.1 $f: I \subset \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $c > 0$ modülüne göre güçlü GA-konveks fonksiyon ve $\forall a, b \in I$, $a < b$ olsun. Eğer $f \in L[a,b]$ ise, o zaman

$$f\left(\sqrt{ab}\right) + \frac{c}{12}(\ln b - \ln a)^2 \leq \frac{1}{\ln b - \ln a}\int_a^b f(x)\frac{1}{x}dx$$

$$\leq \frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{c}{6}(\ln b - \ln a)^2. \tag{4.2.1}$$

İspat. $f: I \subset \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ fonksiyonu güçlü GA-konveks fonksiyon, $\forall x, y \in I$ olsun. Güçlü GA-konveks fonksiyon tanımında $t = \frac{1}{2}$ alınırsa,

$$f\left(\sqrt{xy}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2} - \frac{c}{4}(\ln y - \ln x)^2$$

elde edilir. Burada, $x = a^{1-t}b^t$ ve $y = a^t b^{1-t}$ seçilirse,

$$f\left(\sqrt{ab}\right) \leq \frac{f\left(a^{1-t}b^t\right) + f\left(a^t b^{1-t}\right)}{2} - \frac{c}{4}\left(\ln a^t b^{1-t} - \ln a^{1-t}b^t\right)^2$$

elde edilir. Bu eşitsizlik, $[0,1]$ aralığında t'ye göre integrallenirse,

$$f\left(\sqrt{ab}\right) \leq \frac{1}{2}\left[\int_0^1 f\left(a^{1-t}b^t\right)dt + \int_0^1 f\left(a^t b^{1-t}\right)dt\right] - \frac{c}{4}(\ln b - \ln a)^2 \int_0^1 (1-2t)^2\, dt$$

$$f\left(\sqrt{ab}\right) + \frac{c}{12}(\ln b - \ln a)^2 \leq \frac{1}{\ln b - \ln a}\int_a^b f(x)\frac{1}{x}dx$$

elde edilir. Böylece, (4.2.1) eşitsizliğinin sol tarafı tamamlanır. Ayrıca, $\forall t \in [0,1]$ için

$$f\left(a^{1-t}b^t\right) \leq (1-t)f(a) + tf(b) - ct(1-t)(\ln b - \ln a)^2$$

olduğu görülür. Bu eşitsizlik de $[0,1]$ aralığında t'ye göre integrallenirse (4.2.1) eşitsizliğinin sağ tarafıda

$$\int_0^1 f\left(a^{1-t}b^t\right)dt \leq \int_0^1 \left((1-t)f(a) + tf(b)\right)dt - c(\ln b - \ln a)^2 \int_0^1 t(1-t)\,dt$$

$$=\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{c}{6}(\ln b-\ln a)^2$$

şeklinde elde edilir ve böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.2.2 $f: I\subset\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $c>0$ modülüne göre güçlü GA-konveks fonksiyon ve $\forall a,b\in I$, $a<b$ olsun. O zaman,

$$f\left(\sqrt{ab}\right)+\frac{c}{12}(\ln b-\ln a)^2\leq\phi_c(a;b)\leq\frac{1}{\ln b-\ln a}\int_a^b f(x)\frac{1}{x}dx$$

$$\leq\psi_c(a;b)\leq\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{c}{6}(\ln b-\ln a)^2 \tag{4.2.2}$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada,

$$\phi_c(a;b)=\frac{1}{2}\left[f\left(a^{\frac{3}{4}}b^{\frac{1}{4}}\right)+f\left(a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{3}{4}}\right)\right]+\frac{c}{48}(\ln b-\ln a)^2,$$

$$\psi_c(a;b)=\frac{1}{2}\left[f\left(\sqrt{ab}\right)+\frac{f(a)+f(b)}{2}\right]-\frac{c}{24}(\ln b-\ln a)^2$$

dir.

İspat. $\left[a,\sqrt{ab}\right]$ve$\left[\sqrt{ab},b\right]$ aralığının her birinde (4.2.1) eşitsizliğini uygularsak,

$$f\left(\sqrt{a\sqrt{ab}}\right)+\frac{c}{12}\left(\ln\sqrt{ab}-\ln a\right)^2\leq\frac{1}{\ln\sqrt{ab}-\ln a}\int_a^{\sqrt{ab}} f(x)\frac{1}{x}dx$$

$$\leq\frac{f(a)+f\left(\sqrt{ab}\right)}{2}-\frac{c}{6}\left(\ln\sqrt{ab}-\ln a\right)^2$$

$$f\left(a^{\frac{3}{4}}b^{\frac{1}{4}}\right)+\frac{c}{48}(\ln b-\ln a)^2\leq\frac{2}{\ln b-\ln a}\int_a^{\sqrt{ab}} f(x)\frac{1}{x}dx$$

$$\leq\frac{1}{2}\left[f(a)+f\left(\sqrt{ab}\right)\right]-\frac{c}{24}(\ln b-\ln a)^2 \tag{4.2.3}$$

ve benzer şekilde,

$$f\left(a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{3}{4}}\right)+\frac{c}{48}(\ln b-\ln a)^2\le\frac{2}{\ln b-\ln a}\int_{\sqrt{ab}}^{b}f(x)\frac{1}{x}dx$$

$$\le\frac{1}{2}\left[f\left(\sqrt{ab}\right)+f(b)\right]-\frac{c}{24}(\ln b-\ln a)^2. \tag{4.2.4}$$

elde edilir. (4.2.3) ve (4.2.4) eşitsizliklerini taraf tarafa toplanırsa,

$$\phi_c(a;b)=\frac{1}{2}\left[f\left(a^{\frac{3}{4}}b^{\frac{1}{4}}\right)+f\left(a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{3}{4}}\right)\right]+\frac{c}{48}(\ln b-\ln a)^2$$

$$\le\frac{1}{\ln b-\ln a}\int_a^b f(x)\frac{1}{x}dx\le\frac{1}{2}\left[f\left(\sqrt{ab}\right)+\frac{f(a)+f(b)}{2}\right]-\frac{c}{24}(\ln b-\ln a)^2$$

$$\le\frac{1}{2}\left[\frac{f(a)+f(b)}{2}+\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{c}{4}(\ln b-\ln a)^2\right]-\frac{c}{24}(\ln b-\ln a)^2$$

$$\le\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{c}{6}(\ln b-\ln a)^2 \tag{4.2.5}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

Teorem 4.2.3 $f,g:I\subset\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $c>0$ modülüne göre güçlü $M_\varphi A$-konveks fonksiyon olsun. Eğer $fg\in L[a,b]$ ise, o zaman

$$\frac{1}{\ln b-\ln a}\int_a^b f(x)g\left(\frac{ab}{x}\right)\frac{1}{x}dx$$

$$\le\frac{1}{6}M(a,b)+\frac{1}{3}N(a,b)-\frac{c}{12}(\ln b-\ln a)^2\,S(a,b)-\frac{c^2}{30}(\ln b-\ln a)^4$$

Burada,

$$M(a,b)=f(a)g(a)+f(b)g(b), \tag{4.2.6}$$

$$N(a,b)=f(a)g(b)+f(b)g(a), \tag{4.2.7}$$

$$S(a,b)=f(a)+f(b)+g(a)+g(b). \tag{4.2.8}$$

dir.

İspat. f,g fonksiyonları $c>0$ modülüne göre güçlü GA-konveks fonksiyon olsun. O zaman,

$$\frac{1}{\ln b-\ln a}\int_a^b f(x)g\left(\frac{ab}{x}\right)\frac{1}{x}dx=\int_0^1 f\left(a^{1-t}b^t\right)g\left(a^tb^{1-t}\right)dt$$

$$\leq\int_0^1\left[(1-t)f(a)+tf(b)-ct(1-t)(\ln b-\ln a)^2\right]$$

$$\left[tg(a)+(1-t)g(b)-ct(1-t)(\ln b-\ln a)^2\right]dt$$

$$=f(a)g(b)\int_0^1(1-t)^2\,dt+f(b)g(a)\int_0^1 t^2dt+\left[f(a)g(a)+f(b)g(b)\right]\int_0^1 t(1-t)\,dt$$

$$-c(\ln b-\ln a)^2\left[f(a)+g(b)\right]\int_0^1 t(1-t)^2\,dt-c(\ln b-\ln a)^2\left[f(b)+g(a)\right]$$

$$\int_0^1 t^2(1-t)\,dt-c^2(\ln b-\ln a)^4\int_0^1 t^2(1-t)^2\,dt$$

$$=\frac{f(a)g(b)+f(b)g(a)}{3}+\frac{f(a)g(a)+f(b)g(b)}{6}$$

$$-\frac{c}{12}(\ln b-\ln a)^2\left[f(a)+f(b)+g(a)+g(b)\right]-\frac{c^2}{30}(\ln b-\ln a)^4$$

$$=\frac{1}{6}M(a,b)+\frac{1}{3}N(a,b)-\frac{c}{12}(\ln b-\ln a)^2\,S(a,b)-\frac{c^2}{30}(\ln b-\ln a)^4$$

eşitsizliği elde edilir ve ispat tamamlanır.

Eğer Teorem 4.2.3'de $f=g$ alınırsa, aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.2.1 $f:I\subset\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $c>0$ modülüne göre güçlü GA-konveks fonksiyon olsun. Eğer $f\in L[a,b]$ ise, o zaman

$$\frac{1}{\ln b-\ln a}\int_a^b f(x)f\left(\frac{ab}{x}\right)\frac{1}{x}dx\leq\frac{2\left[f(a)f(b)\right]}{3}+\frac{f^2(a)+f^2(b)}{6}$$

$$-\frac{c}{6}(\ln b-\ln a)^2\left[f(a)+f(b)\right]-\frac{c^2}{30}(\ln b-\ln a)^4$$

Teorem 4.2.4 $f,g:I\subset\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $c>0$ modülüne göre güçlü GA-konveks fonksiyon olsun. Eğer $fg\in L[a,b]$ ise, o zaman

$$\frac{1}{\ln b-\ln a}\int_a^b f(x)g(x)\frac{1}{x}dx$$

$$\le\frac{1}{3}M(a,b)+\frac{1}{6}N(a,b)-\frac{c}{12}(\ln b-\ln a)^2 S(a,b)-\frac{c^2}{30}(\ln b-\ln a)^4$$

dir. Burada, $M(a,b),N(a,b)$ ve $S(a,b)$ sırasıyla (4.2.6), (4.2.7) ve (4.2.8)'de verildiği gibidir.

İspat. f,g fonksiyonları $c>0$ modülüne göre güçlü GA-konveks fonksiyon olsun. O zaman,

$$\frac{1}{\ln b-\ln a}\int_a^b f(x)g(x)\frac{1}{x}dx=\int_0^1 f\left(a^{1-t}b^t\right)g\left(a^{1-t}b^t\right)dt$$

$$\le\int_0^1\left[(1-t)f(a)+tf(b)-ct(1-t)(\ln b-\ln a)^2\right]$$

$$\left[(1-t)g(a)+tg(b)-ct(1-t)(\ln b-\ln a)^2\right]dt$$

$$=f(a)g(a)\int_0^1(1-t)^2\,dt+f(b)g(b)\int_0^1 t^2dt+\left[f(a)g(b)+f(b)g(a)\right]\int_0^1 t(1-t)\,dt$$

$$-c(\ln b-\ln a)^2\left[f(a)+g(a)\right]\int_0^1 t(1-t)^2\,dt-c(\ln b-\ln a)^2\left[f(b)+g(b)\right]$$

$$\int_0^1 t^2(1-t)\,dt-c^2(\ln b-\ln a)^4\int_0^1 t^2(1-t)^2\,dt$$

$$=\frac{f(a)g(a)+f(b)g(b)}{3}+\frac{f(a)g(b)+f(b)g(a)}{6}$$

$$-\frac{c}{12}(\ln b-\ln a)^2\left[f(a)+f(b)+g(a)+g(b)\right]-\frac{c^2}{30}(\ln b-\ln a)^4$$

$$=\frac{1}{3}M(a,b)+\frac{1}{6}N(a,b)-\frac{c}{12}(\ln b-\ln a)^2 S(a,b)-\frac{c^2}{30}(\ln b-\ln a)^4$$

eşitsizliği elde edilir ve böylece ispat tamamlanır.

Eğer Teorem 4.2.4'de $f=g$ alınırsa, aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.2.2 $f: I\subset\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $c>0$ modülüne göre güçlü GA-konveks fonksiyon olsun. Eğer $f\in L[a,b]$ ise, o zaman

$$\frac{1}{\ln b-\ln a}\int_a^b f^2(x)\frac{1}{x}dx\le\frac{[f(a)f(b)]}{3}+\frac{f^2(a)+f^2(b)}{3}$$

$$-\frac{c}{6}(\ln b-\ln a)^2[f(a)+f(b)]-\frac{c^2}{30}(\ln b-\ln a)^4$$

4.3 Güçlü p-Konveks Fonksiyonlar için Hermite-Hadamard Tipli İntegral Eşitsizlikleri

Bu bölümde güçlü p-konveks fonksiyon tanımı ve bu fonksiyon için yeni Hermite-Hadamard tipli integral eşitsizlikleri elde edildi. Bunun için bir lemma ve bu lemmadan yararlanarak bazı teorem ve sonuçlar verildi.

Tanım 4.3.1 $I\subset\mathbb{R}_+$ bir aralık olsun. $f: I\to\mathbb{R}$ fonksiyonu, $x,y\in I$ ve $t\in[0,1]$ için

$$f\left(\left[(1-t)x^p+ty^p\right]^{\frac{1}{p}}\right)\le(1-t)f(x)+tf(y)-ct(1-t)\left(y^p-x^p\right)^2$$

eşitsizliğini sağlarsa f fonksiyonuna $c>0$ modülüne göre güçlü p-konveks fonksiyon denir.

Lemma 4.3.1 I bir açık aralık olsun. Eğer, $g(x)=f(x)-c\left(x^p\right)^2$ fonksiyonu p-konveks fonksiyon ise o zaman, $f: I\subset\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $c>0$ modülüne göre güçlü p-konveks fonksiyondur.

İspat. f fonksiyonunun $c>0$ modülüne göre güçlü p-konveks fonksiyon olduğunu varsayalım. İç çarpım özelliğini kullanarak,

$$g\left(\left[tx^p+(1-t)y^p\right]^{\frac{1}{p}}\right)=f\left(\left[tx^p+(1-t)y^p\right]^{\frac{1}{p}}\right)-c\left(tx^p+(1-t)y^p\right)^2$$

$$\leq tf(x)+(1-t)f(y)-ct(1-t)\left(y^p-x^p\right)^2$$

$$-c\left(t^2\left(x^p\right)^2+2t(1-t)x^py^p+(1-t)^2\left(y^p\right)^2\right)$$

$$\leq tf(x)+(1-t)f(y)-c\left(t(1-t)\left(y^p\right)^2-2t(1-t)x^py^p+t(1-t)\left(x^p\right)^2\right.$$

$$\left.+t^2\left(x^p\right)^2+2t(1-t)x^py^p+(1-t)^2\left(y^p\right)^2\right)$$

$$\leq tf(x)+(1-t)f(y)-c\left((1-t)\left(y^p\right)^2+t\left(x^p\right)^2\right)$$

$$\leq tf(x)-ct\left(x^p\right)^2+(1-t)f(y)-c(1-t)\left(y^p\right)^2$$

$$=tg(x)+(1-t)g(y)$$

elde edilir ve buradan g fonksiyonunun p-konveks fonksiyon olduğu görülür.

Tersine şimdi, g fonksiyonunun p-konveks fonksiyon olduğunu varsayalım.

$$f\left(\left[tx^p+(1-t)y^p\right]^{\frac{1}{p}}\right)=g\left(\left[tx^p+(1-t)y^p\right]^{\frac{1}{p}}\right)+c\left(tx^p+(1-t)y^p\right)^2$$

$$\leq tg(x)+(1-t)g(y)+c\left(t^2\left(x^p\right)^2+2t(1-t)x^py^p+(1-t)^2\left(y^p\right)^2\right)$$

$$\leq tg(x)+(1-t)g(y)+c(1-t)\left(y^p\right)^2-ct(1-t)\left(y^p\right)^2$$

$$+2ct(1-t)x^py^p+ct\left(x^p\right)^2-ct(1-t)\left(x^p\right)^2$$

$$=tg(x)+ct\left(x^p\right)^2+(1-t)g(y)+c(1-t)\left(y^p\right)^2$$

$$-ct(1-t)\left(y^p\right)^2+2ct(1-t)x^py^p-ct(1-t)\left(x^p\right)^2$$

$$=tf(x)+(1-t)f(y)-ct(1-t)\left(y^p-x^p\right)^2$$

elde edilir. Buradan, f fonksiyonunun $c>0$ modülüne göre güçlü p-konveks fonksiyon olduğu görülür. Böylece ispat tamamlanır.

Şimdi Lemma 4.3.1'i kullanarak elde ettiğimiz teorem ve sonuçları verelim.

Teorem 4.3.1 $f: I\subset\mathbb{R}_{+}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $c>0$ modülüne göre güçlü p-konveks fonksiyon ve $\forall a,b\in I$, $a<b$ olsun. Eğer $f\in L[a,b]$ ise, o zaman

$$f\left(\left[\frac{a^p+b^p}{2}\right]^{\frac{1}{p}}\right)+\frac{c}{12}\left(b^p-a^p\right)^2$$

$$\leq\frac{p}{b^p-a^p}\int_a^b f(x)x^{p-1}dx\leq\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{c}{6}\left(b^p-a^p\right)^2. \tag{4.3.1}$$

dir.

İspat. $f: I\subset\mathbb{R}_{+}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu güçlü p-konveks fonksiyon, $\forall x,y\in I$ olsun. Güçlü p-konveks fonksiyon tanımında $t=\frac{1}{2}$ alınırsa,

$$f\left(\left[\frac{x^p}{2}+\frac{y^p}{2}\right]^{\frac{1}{p}}\right)\leq\frac{f(x)+f(y)}{2}-\frac{c}{4}\left(y^p-x^p\right)^2$$

elde edilir. Burada, $x=\left[(1-t)a^p+tb^p\right]^{\frac{1}{p}}$ ve $y=\left[ta^p+(1-t)b^p\right]^{\frac{1}{p}}$ seçilirse,

$$f\left(\left[\frac{a^p+b^p}{2}\right]^{\frac{1}{p}}\right)\leq\frac{f\left(\left[(1-t)a^p+tb^p\right]^{\frac{1}{p}}\right)+f\left(\left[ta^p+(1-t)b^p\right]^{\frac{1}{p}}\right)}{2}$$

$$-\frac{c}{4}\left(ta^p+(1-t)b^p-(1-t)a^p-tb^p\right)^2$$

elde edilir. Bu eşitsizlik, $[0,1]$ aralığında t'ye göre integrallenirse,

$$f\left(\left[\frac{a^p+b^p}{2}\right]^{\frac{1}{p}}\right)\leq\frac{1}{2}\left[\int_0^1 f\left(\left[(1-t)a^p+tb^p\right]^{\frac{1}{p}}\right)dt+\int_0^1 f\left(\left[ta^p+(1-t)b^p\right]^{\frac{1}{p}}\right)dt\right]$$

$$-\frac{c}{4}\left(b^p-a^p\right)^2\int_0^1(1-2t)^2\,dt$$

$$f\left(\left[\frac{a^p+b^p}{2}\right]^{\frac{1}{p}}\right)+\frac{c}{12}\left(b^p-a^p\right)^2\leq\frac{p}{b^p-a^p}\int_a^b f(x)\,x^{p-1}dx$$

elde edilir. Böylece, (4.3.1) eşitsizliğinin sol tarafı tamamlanır. Ayrıca, $\forall t\in[0,1]$ için

$$f\left(\left[(1-t)a^p+tb^p\right]^{\frac{1}{p}}\right)\leq(1-t)f(a)+tf(b)-ct(1-t)\left(b^p-a^p\right)^2$$

olduğu görülür. Bu eşitsizlik de $[0,1]$ aralığında t'ye göre integrallenirse (4.3.1) eşitsizliğinin sağ tarafıda

$$\int_0^1 f\left(\left[(1-t)a^p+tb^p\right]^{\frac{1}{p}}\right)dt$$

$$\leq\int_0^1\left((1-t)f(a)+tf(b)\right)dt-c\left(b^p-a^p\right)^2\int_0^1 t(1-t)\,dt$$

$$=\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{c}{6}\left(b^p-a^p\right)^2$$

şeklinde elde edilir ve böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.3.2 $f:I\subset\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $c>0$ modülüne göre güçlü p-konveks fonksiyon olsun. O zaman,

$$f\left(\left[\frac{a^p+b^p}{2}\right]^{\frac{1}{p}}\right)+\frac{c}{12}\left(b^p-a^p\right)^2\leq\phi_c(a;b)\leq\frac{p}{b^p-a^p}\int_a^b f(x)\,x^{p-1}dx$$

$$\leq\psi_c(a;b)\leq\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{c}{6}\left(b^p-a^p\right)^2 \tag{4.3.2}$$

dir ve burada,

$$\phi_c(a;b)=\frac{1}{2}\left[f\left(\left[\frac{3a^p+b^p}{4}\right]^{\frac{1}{p}}\right)+f\left(\left[\frac{a^p+3b^p}{4}\right]^{\frac{1}{p}}\right)\right]+\frac{c}{48}\left(b^p-a^p\right)^2,$$

$$\psi_c(a;b)=\frac{1}{2}\left[f\left(\left[\frac{a^p+b^p}{2}\right]^{\frac{1}{p}}\right)+\frac{f(a)+f(b)}{2}\right]-\frac{c}{24}\left(b^p-a^p\right)^2$$

şeklindedir.

İspat. $\left[a,\left(\frac{a^p+b^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}}\right]$ ve $\left[\left(\frac{a^p+b^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}},b\right]$ aralığının her birinde (4.3.1) eşitsizliğini uygularsak,

$$f\left(\left[\frac{a^p+\frac{a^p+b^p}{2}}{2}\right]^{\frac{1}{p}}\right)+\frac{c}{12}\left(\frac{a^p+b^p}{2}-a^p\right)^2\le\frac{p}{\frac{a^p+b^p}{2}-a^p}\int_a^{\frac{a^p+b^p}{2}}f(x)x^{p-1}dx$$

$$\le\frac{f(a)+f\left(\left[\frac{a^p+b^p}{2}\right]^{\frac{1}{p}}\right)}{2}-\frac{c}{6}\left(\frac{a^p+b^p}{2}-a^p\right)^2$$

$$f\left(\left[\frac{3a^p+b^p}{4}\right]^{\frac{1}{p}}\right)+\frac{c}{48}\left(b^p-a^p\right)^2\le\frac{2p}{b^p-a^p}\int_a^{\frac{a^p+b^p}{2}}f(x)x^{p-1}dx$$

$$\le\frac{1}{2}\left[f(a)+f\left(\left[\frac{a^p+b^p}{2}\right]^{\frac{1}{p}}\right)\right]-\frac{c}{24}\left(b^p-a^p\right)^2 \qquad (4.3.3)$$

elde edilir ve benzer şekilde,

$$f\left(\left[\frac{a^p+3b^p}{4}\right]^{\frac{1}{p}}\right)+\frac{c}{48}\left(b^p-a^p\right)^2\le\frac{2p}{b^p-a^p}\int_{\frac{a^p+b^p}{2}}^{b}f(x)x^{p-1}dx$$

$$\leq \frac{1}{2}\left[f\left(\left[\frac{a^p+b^p}{2} \right]^{\frac{1}{p}} \right) + f(b) \right] - \frac{c}{24}\left(b^p-a^p\right)^2 \tag{4.3.4}$$

bulunur. (4.3.3) ve (4.3.4) eşitsizliklerini taraf tarafa toplanırsa,

$$\phi_c(a;b) = \frac{1}{2}\left[f\left(\left[\frac{3a^p+b^p}{4} \right]^{\frac{1}{p}} \right) + f\left(\left[\frac{a^p+3b^p}{4} \right]^{\frac{1}{p}} \right) \right] + \frac{c}{48}\left(b^p-a^p\right)^2$$

$$\leq \frac{p}{b^p-a^p}\int_a^b f(x)x^{p-1}dx \leq \frac{1}{2}\left[f\left(\left[\frac{a^p+b^p}{2} \right]^{\frac{1}{p}} \right) + \frac{f(a)+f(b)}{2} \right] - \frac{c}{24}\left(b^p-a^p\right)^2$$

$$\leq \frac{1}{2}\left[\frac{f(a)+f(b)}{2} + \frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{c}{4}\left(b^p-a^p\right)^2 \right] - \frac{c}{24}\left(b^p-a^p\right)^2$$

$$\leq \frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{c}{6}\left(b^p-a^p\right)^2 \tag{4.3.5}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

Teorem 4.3.3 $f,g : I \subset \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $c>0$ modülüne göre güçlü p-konveks fonksiyon olsun. Eğer $fg \in L[a,b]$ ise, o zaman aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir.

$$\frac{p}{b^p-a^p}\int_a^b f(x)\, g\left(\left[a^p+b^p-x^p \right]^{\frac{1}{p}} \right) x^{p-1}dx$$

$$\leq \frac{1}{6}M(a,b) + \frac{1}{3}N(a,b) - \frac{c}{12}\left(b^p-a^p\right)^2 S(a,b) - \frac{c^2}{30}\left(b^p-a^p\right)^4.$$

Burada,

$$M(a,b) = f(a)g(a) + f(b)g(b), \tag{4.3.6}$$

$$N(a,b) = f(a)g(b) + f(b)g(a), \tag{4.3.7}$$

$$S(a,b) = f(a)+f(b)+g(a)+g(b). \tag{4.3.8}$$

şeklindedir.

İspat. f,g fonksiyonları $c>0$ modülüne göre güçlü p-konveks fonksiyon olsun. O zaman,

$$\frac{p}{b^p-a^p}\int_a^b f(x)\,g\left(\left[a^p+b^p-x^p\right]^{\frac{1}{p}}\right)x^{p-1}dx$$

$$=\int_0^1 f\left(\left[(1-t)a^p+tb^p\right]^{\frac{1}{p}}\right)g\left(\left[ta^p+(1-t)b^p\right]^{\frac{1}{p}}\right)dt$$

$$\leq\int_0^1\left[(1-t)f(a)+tf(b)-ct(1-t)\left(b^p-a^p\right)^2\right]$$

$$\left[tg(a)+(1-t)g(b)-ct(1-t)\left(b^p-a^p\right)^2\right]dt$$

$$=f(a)g(b)\int_0^1(1-t)^2\,dt+f(b)g(a)\int_0^1 t^2dt+\left[f(a)g(a)+f(b)g(b)\right]\int_0^1 t(1-t)\,dt$$

$$-c\left(b^p-a^p\right)^2\left[f(a)+g(b)\right]\int_0^1 t(1-t)^2\,dt-c\left(b^p-a^p\right)^2$$

$$\left[f(b)+g(a)\right]\int_0^1 t^2(1-t)\,dt-c^2\left(b^p-a^p\right)^4\int_0^1 t^2(1-t)^2\,dt$$

$$=\frac{f(a)g(a)+f(b)g(b)}{6}+\frac{f(a)g(b)+f(b)g(a)}{3}$$

$$-\frac{c}{12}\left(b^p-a^p\right)^2\left[f(a)+f(b)+g(a)+g(b)\right]-\frac{c^2}{30}\left(b^p-a^p\right)^4$$

$$=\frac{1}{6}M(a,b)+\frac{1}{3}N(a,b)-\frac{c}{12}\left(b^p-a^p\right)^2S(a,b)-\frac{c^2}{30}\left(b^p-a^p\right)^4$$

eşitsizliği elde edilir ve böylece ispat tamamlanır.

Eğer Teorem 4.3.3'de $f=g$ alınırsa, aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.3.1 $f,g:I\subset\mathbb{R}_+\rightarrow\mathbb{R}$ fonksiyonu $c>0$ modülüne göre güçlü p-konveks fonksiyon olsun. Eğer $f\in L[a,b]$ ise, o zaman aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir.

$$\frac{p}{b^p-a^p}\int_a^b f(x)f\left(\left[a^p+b^p-x^p\right]\right)x^{p-1}dx$$

$$\leq \frac{f^2(a)+f^2(b)}{6}+\frac{2\left[f(a)f(b)\right]}{3}-\frac{c}{6}\left(b^p-a^p\right)^2\left[f(a)+f(b)\right]-\frac{c^2}{30}\left(b^p-a^p\right)^4.$$

Teorem 4.3.4 $f,g:I\subset\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $c>0$ modülüne göre güçlü p-konveks fonksiyon olsun. Eğer $fg\in L[a,b]$ ise, o zaman

$$\frac{p}{b^p-a^p}\int_a^b f(x)g(x)x^{p-1}dx$$

$$\leq \frac{1}{3}M(a,b)+\frac{1}{6}N(a,b)-\frac{c}{12}\left(b^p-a^p\right)^2 S(a,b)-\frac{c^2}{30}\left(b^p-a^p\right)^4.$$

dir. Burada, $M(a,b),N(a,b)$ ve $S(a,b)$ sırasıyla (4.3.6), (4.3.7) ve (4.3.8)'de verildiği gibidir.

İspat. f,g fonksiyonları $c>0$ modülüne göre güçlü p-konveks fonksiyon olsun. O zaman,

$$\frac{p}{b^p-a^p}\int_a^b f(x)g(x)x^{p-1}dx=\int_0^1 f\left(\left[(1-t)a^p+tb^p\right]^{\frac{1}{p}}\right)g\left(\left[(1-t)a^p+tb^p\right]^{\frac{1}{p}}\right)dt$$

$$\leq\int_0^1\left[(1-t)f(a)+tf(b)-ct(1-t)\left(b^p-a^p\right)^2\right]$$

$$\left[(1-t)g(a)+tg(b)-ct(1-t)\left(b^p-a^p\right)^2\right]dt$$

$$=f(a)g(a)\int_0^1(1-t)^2dt+f(b)g(b)\int_0^1 t^2dt+\left[f(a)g(b)+f(b)g(a)\right]$$

$$\int_0^1 t^2(1-t)^2dt-c\left(b^p-a^p\right)^2\left[f(a)+g(a)\right]\int_0^1 t(1-t)^2dt-c\left(b^p-a^p\right)^2$$

$$\left[f(b)+g(b)\right]\int_0^1 t^2(1-t)dt-c^2\left(b^p-a^p\right)^4\int_0^1 t^2(1-t)^2dt$$

$$=\frac{f(a)g(a)+f(b)g(b)}{3}+\frac{f(a)g(b)+f(b)g(a)}{6}$$

$$-\frac{c}{12}\left(b^{p}-a^{p}\right)^{2}\left[f(a)+f(b)+g(a)+g(b)\right]-\frac{c^{2}}{30}\left(b^{p}-a^{p}\right)^{4}$$

$$=\frac{1}{3}M(a,b)+\frac{1}{6}N(a,b)-\frac{c}{12}\left(b^{p}-a^{p}\right)^{2}S(a,b)-\frac{c^{2}}{30}\left(b^{p}-a^{p}\right)^{4}$$

eşitsizliği elde edilir ve böylece ispat tamamlanır.

Eğer Teorem 4.3.4'de $f=g$ alınırsa, aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.3.2 $f:I\subset\mathbb{R}_{+}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $c>0$ modülüne göre güçlü p-konveks fonksiyon olsun. Eğer $f\in L[a,b]$ ise, o zaman

$$\frac{p}{b^{p}-a^{p}}\int_{a}^{b}f^{2}(x)x^{p-1}dx$$

$$\leq\frac{f(a)f(b)}{3}+\frac{f^{2}(a)+f^{2}(b)}{3}-\frac{c}{6}\left(b^{p}-a^{p}\right)^{2}\left[f(a)+f(b)\right]-\frac{c^{2}}{30}\left(b^{p}-a^{p}\right)^{4}.$$

4.4 Güçlü (GA)-Konveks (Geometrik-Aritmetik Konveks) Fonksiyonlar için Ostrowski Tipli İntegral Eşitsizlikleri

Bu bölümde güçlü GA-konveks fonksiyonlar için yeni Ostrowski tipli integral eşitsizlikleri elde edildi. Bunun için üçüncü bölümde verilen lemmadan yararlanarak bazı teorem ve sonuçlar verildi.

Teorem 4.4.1 $f:I\subset\mathbb{R}_{+}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu I^{0} da diferansiyellenebilir fonksiyon, $a,b\in I$, $a<b$ ve $f'\in L[a,b]$ olsun. Eğer $|f'|$, $[a,b]$ de $c>0$ modülüne göre güçlü GA-konveks fonksiyon ise, tüm $x\in[a,b]$ için

$$\left|f(x)-\frac{1}{\ln b-\ln a}\int_{a}^{b}\frac{f(u)}{u}du\right|\leq(\ln b-\ln a)\Big[\left|f'(a)\right|\left(K_{1}(a,b,x)+K_{4}(a,b,x)\right)$$

$$+\left|f'(b)\right|\left(K_{2}(a,b,x)+K_{5}(a,b,x)\right)-c(\ln b-\ln a)^{2}\left(K_{3}(a,b,x)+K_{6}(a,b,x)\right)\Big]$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada,

$$K_1(a,b,x) = -\frac{1}{(\ln b - \ln a)^3}\left[(\ln b - \ln x)^2 x + 2(\ln b - \ln x)x + 2x - 2b\right],$$

$$K_2(a,b,x) = \frac{1}{(\ln b - \ln a)^3}\left[(\ln b - \ln x)^2 x - (\ln b - \ln a - 2)(\ln b - \ln x)x\right.$$

$$\left. -(\ln b - \ln a - 2)x + b\ln b - b\ln a - 2b\right],$$

$$K_3(a,b,x) = -\frac{1}{(\ln b - \ln a)^4}\left[-(\ln b - \ln x)^3 x + (\ln b - \ln x)^2 x(\ln b - \ln a - 3)\right.$$

$$\left. +2(\ln b - \ln x)(\ln b - \ln a - 3)x + 2(\ln b - \ln a)x - 2(\ln b - \ln a) - 6x + 6b\right],$$

$$K_4(a,b,x) = \frac{1}{(\ln b - \ln a)^3}\left[-(\ln b - \ln x)^2 x + (\ln b - \ln x)(\ln b - \ln a - 2)x\right.$$

$$\left. +(\ln b - \ln a - 2)x + a\ln b - a\ln a + 2a\right],$$

$$K_5(a,b,x) = \frac{1}{(\ln b - \ln a)^3}\left[(\ln x - \ln a)^2 x - 2a - 2(\ln x - \ln a + 1)x\right],$$

$$K_6(a,b,x) = \frac{1}{(\ln b - \ln a)^4}\left[(\ln b - \ln a)(\ln x - \ln a - 4)x + (\ln b - \ln x)\right.$$

$$\left.\left(6 - (\ln x - \ln a)^2\right)x - 2a\ln b + 2a\ln a + 6x - 6b\right]$$

şeklindedir.

İspat. Lemma 3.2.2'de $|f'|$'nün $c > 0$ modülüne göre güçlü GA-konveksliğini kullanarak,

$$\left| f(x) - \frac{1}{\ln b - \ln a}\int_a^b \frac{f(u)}{u}\,du \right| \tag{4.4.1}$$

$$\leq \left| (\ln b - \ln a)\left[\int_0^{\frac{\ln b - \ln x}{\ln b - \ln a}} t\left(a^t b^{1-t}\right) f'\left(a^t b^{1-t}\right) dt + \int_{\frac{\ln b - \ln x}{\ln b - \ln a}}^{1} (1-t)\left(a^t b^{1-t}\right) f'\left(a^t b^{1-t}\right) dt\right]\right|$$

$$\leq\left(\ln b-\ln a\right)\left[\int_{0}^{\frac{\ln b-\ln x}{\ln b-\ln a}} t\left(a^{t}b^{1-t}\right)\left|f'\left(a^{t}b^{1-t}\right)\right|dt+\int_{\frac{\ln b-\ln x}{\ln b-\ln a}}^{1}\left(1-t\right)\left(a^{t}b^{1-t}\right)\left|f'\left(a^{t}b^{1-t}\right)\right|dt\right]$$

$$\leq\left(\ln b-\ln a\right)\left[\int_{0}^{\frac{\ln b-\ln x}{\ln b-\ln a}} t\left(a^{t}b^{1-t}\right)\left[t\left|f'\left(a\right)\right|+\left(1-t\right)\left|f'\left(b\right)\right|-ct\left(1-t\right)\left(\ln b-\ln a\right)^{2}\right]dt\right.$$

$$\left.+\int_{\frac{\ln b-\ln x}{\ln b-\ln a}}^{1}\left(1-t\right)\left(a^{t}b^{1-t}\right)\left[t\left|f'\left(a\right)\right|+\left(1-t\right)\left|f'\left(b\right)\right|-ct\left(1-t\right)\left(\ln b-\ln a\right)^{2}\right]dt\right]$$

$$\leq\left(\ln b-\ln a\right)\left[\left|f'\left(a\right)\right|\int_{0}^{\frac{\ln b-\ln x}{\ln b-\ln a}} t^{2}\left(a^{t}b^{1-t}\right)dt+\left|f'\left(b\right)\right|\int_{0}^{\frac{\ln b-\ln x}{\ln b-\ln a}} t\left(1-t\right)\left(a^{t}b^{1-t}\right)dt\right.$$

$$-c\left(\ln b-\ln a\right)^{2}\int_{0}^{\frac{\ln b-\ln x}{\ln b-\ln a}} t^{2}\left(1-t\right)\left(a^{t}b^{1-t}\right)dt+\left|f'\left(a\right)\right|\int_{\frac{\ln b-\ln x}{\ln b-\ln a}}^{1} t\left(1-t\right)\left(a^{t}b^{1-t}\right)dt$$

$$\left.+\left|f'\left(b\right)\right|\int_{\frac{\ln b-\ln x}{\ln b-\ln a}}^{1}\left(1-t\right)^{2}\left(a^{t}b^{1-t}\right)dt-c\left(\ln b-\ln a\right)^{2}\int_{\frac{\ln b-\ln x}{\ln b-\ln a}}^{1} t\left(1-t\right)^{2}\left(a^{t}b^{1-t}\right)dt\right]$$

elde edilir. Mevcut integraller hesaplanırsa,

$$\int_{0}^{\frac{\ln b-\ln x}{\ln b-\ln a}} t^{2}\left(a^{t}b^{1-t}\right)dt=b\int_{0}^{\frac{\ln b-\ln x}{\ln b-\ln a}} t^{2}\left(\frac{a}{b}\right)^{t}dt \tag{4.4.2}$$

$$=-\frac{1}{\left(\ln b-\ln a\right)^{3}}\left[\left(\ln b-\ln x\right)^{2}x+2\left(\ln b-\ln x\right)x+2x-2b\right]=K_{1}\left(a,b,x\right),$$

$$\int_{0}^{\frac{\ln b-\ln x}{\ln b-\ln a}} t\left(1-t\right)\left(a^{t}b^{1-t}\right)dt=b\int_{0}^{\frac{\ln b-\ln x}{\ln b-\ln a}}\left(t-t^{2}\right)\left(\frac{a}{b}\right)^{t}dt \tag{4.4.3}$$

$$=\frac{1}{\left(\ln b-\ln a\right)^{3}}\left[\left(\ln b-\ln x\right)^{2}x-\left(\ln b-\ln a-2\right)\left(\ln b-\ln x\right)x\right.$$

$$-\left(\ln b-\ln a-2\right)x+b\ln b-b\ln a-2b\Big]=K_2\left(a,b,x\right),$$

$$\int_0^{\frac{\ln b-\ln x}{\ln b-\ln a}} t^2\left(1-t\right)\left(a^t b^{1-t}\right)dt=b\int_0^{\frac{\ln b-\ln x}{\ln b-\ln a}}\left(t^2-t^3\right)\left(\frac{a}{b}\right)^t dt \tag{4.4.4}$$

$$=-\frac{1}{\left(\ln b-\ln a\right)^4}\Big[-\left(\ln b-\ln x\right)^3 x+\left(\ln b-\ln x\right)^2 x\left(\ln b-\ln a-3\right)$$

$$+2\left(\ln b-\ln x\right)\left(\ln b-\ln a-3\right)x+2\left(\ln b-\ln a\right)x-2\left(\ln b-\ln a\right)-6x+6b\Big]=K_3\left(a,b,x\right)$$

$$\int_{\frac{\ln b-\ln x}{\ln b-\ln a}}^{1}\left(t-t^2\right)\left(a^t b^{1-t}\right)dt=b\int_{\frac{\ln b-\ln x}{\ln b-\ln a}}^{1}\left(t-t^2\right)\left(\frac{a}{b}\right)^t dt \tag{4.4.5}$$

$$=\frac{1}{\left(\ln b-\ln a\right)^3}\Big[-\left(\ln b-\ln x\right)^2 x+\left(\ln b-\ln x\right)\left(\ln b-\ln a-2\right)$$

$$+\left(\ln b-\ln a-2\right)x+a\ln b-a\ln a+2a\Big]=K_4\left(a,b,x\right),$$

$$\int_{\frac{\ln b-\ln x}{\ln b-\ln a}}^{1}\left(1-t\right)^2\left(a^t b^{1-t}\right)dt=b\int_{\frac{\ln b-\ln x}{\ln b-\ln a}}^{1}\left(1-t\right)^2\left(\frac{a}{b}\right)^t dt \tag{4.4.6}$$

$$=\frac{1}{\left(\ln b-\ln a\right)^3}\Big[\left(\ln x-\ln a\right)^2 x-2a-2\left(\ln x-\ln a+1\right)x\Big]=K_5\left(a,b,x\right),$$

$$\int_{\frac{\ln b-\ln x}{\ln b-\ln a}}^{1} t\left(1-t\right)^2\left(a^t b^{1-t}\right)dt=b\int_{\frac{\ln b-\ln x}{\ln b-\ln a}}^{1} t\left(1-t\right)^2\left(\frac{a}{b}\right)^t dt \tag{4.4.7}$$

$$=\frac{1}{\left(\ln b-\ln a\right)^4}\Big[\left(\ln b-\ln a\right)\left(\ln x-\ln a-4\right)x+\left(\ln b-\ln x\right)\left(6-\left(\ln x-\ln a\right)^2\right)x$$

$$-2a\ln b+2a\ln a+6x-6b\Big]=K_6\left(a,b,x\right)$$

elde edilir. (4.4.1) – (4.4.7)’nin kombinasyonu sonucunda ispat tamamlanır.

Sonuç 4.4.1 Teorem 4.4.1’in şartlarına ek olarak,

i. Eğer tüm $x\in\left[a,b\right]$ için $\left|f'\left(x\right)\right|\le M$ seçilirse,

$$\left|f(x)-\frac{1}{\ln b-\ln a}\int_a^b \frac{f(u)}{u}du\right| \leq (\ln b-\ln a) M\left[K_1(a,b,x)+K_4(a,b,x)\right.$$

$$\left.+K_2(a,b,x)+K_5(a,b,x)-c(\ln b-\ln a)^2\left(K_3(a,b,x)+K_6(a,b,x)\right)\right]$$

eşitsizliği elde edilir.

ii. $x=\sqrt{ab}$ için,

$$\left|f\left(\sqrt{ab}\right)-\frac{1}{\ln b-\ln a}\int_a^b \frac{f(u)}{u}du\right|$$

$$\leq (\ln b-\ln a)\left[\left|f'(a)\right|\left(K_1\left(a,b,\sqrt{ab}\right)+K_4\left(a,b,\sqrt{ab}\right)\right)\right.$$

$$+\left|f'(a)\right|\left(K_2\left(a,b,\sqrt{ab}\right)+K_5\left(a,b,\sqrt{ab}\right)\right)$$

$$\left.-c(\ln b-\ln a)^2\left(K_3\left(a,b,\sqrt{ab}\right)+K_6\left(a,b,\sqrt{ab}\right)\right)\right]$$

eşitsizliği sağlanır.

Teorem 4.4.2 $f: I\subset\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ fonksiyonu I^0 da diferansiyellenebilir fonksiyon, $a,b\in I$, $a<b$ ve $f'\in L[a,b]$ olsun. Eğer $q\geq 1$ için $|f'|^q$, $[a,b]$ de $c>0$ modülüne göre güçlü GA-konveks fonksiyon ise, tüm $x\in[a,b]$ için

$$\left|f(x)-\frac{1}{\ln b-\ln a}\int_a^b \frac{f(u)}{u}du\right| \leq (\ln b-\ln a)\left[\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\ln b-\ln x}{\ln b-\ln a}\right)^2\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\left|f'(a)\right|^q K_7(a,b,x)\right.\right.$$

$$\left.+\left|f'(b)\right|^q K_8(a,b,x)-c(\ln b-\ln a)^2 K_9(a,b,x)\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\ln a-\ln x}{\ln b-\ln a}\right)^2\right)^{1-\frac{1}{q}}$$

$$\left(\left|f'(a)\right|^q K_{10}(a,b,x)+\left|f'(b)\right|^q K_{11}(a,b,x)-c(\ln b-\ln a)^2 K_{12}(a,b,x)\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada

$$K_7(a,b,x)=\frac{-1}{q^3(\ln b-\ln a)^3}\left(q^2(\ln b-\ln x)^2x^q+2q(\ln b-\ln x)x^q+2x^q-2b^q\right),$$

$$K_8(a,b,x)=\frac{-1}{q^3(\ln b-\ln a)^3}\Big(-q^2(\ln b-\ln x)^2x^q+q^2(\ln b-\ln a)(\ln b-\ln x)x^q$$

$$-2q(\ln b-\ln x)x^q+q(\ln b-\ln a)x^q-2x^q-q(\ln b-\ln a)b^q+2b^q\Big),$$

$$K_9(a,b,x)=\frac{1}{q^4(\ln b-\ln a)^4}\Big(q^3(\ln b-\ln x)^3x^q-q^3(\ln b-\ln x)^2(\ln b-\ln a)x^q$$

$$-2q^2(\ln b-\ln x)(\ln b-\ln a)x^q+3q^2(\ln b-\ln x)^2x^q-2q(\ln b-\ln a)x^q$$

$$+2q(\ln b-\ln a)b^q+6q(\ln b-\ln x)x^q-6x^q+6b^q\Big),$$

$$K_{10}(a,b,x)=\frac{-1}{q^3(\ln b-\ln a)^3}\Big(-q^2(\ln b-\ln x)(\ln b-\ln a)x^q+q^2(\ln b-\ln x)^2x^q$$

$$-qa^q(\ln b-\ln a)+2q(\ln b-\ln x)x^q-q(\ln b-\ln a)x^q-2a^q+2x^q\Big),$$

$$K_{11}(a,b,x)=\frac{-1}{q^3(\ln b-\ln a)^3}\Big(-q^2(\ln a-\ln x)^2x^q-2q(\ln a-\ln x)x^q+2a^q-2x^q\Big),$$

$$K_{12}(a,b,x)=\frac{1}{q^4(\ln b-\ln a)^4}\Big(-q^3(\ln b-\ln x)(\ln b-\ln a)^2x^q+q^3(\ln b-\ln x)^3x^q$$

$$+q^2(\ln b-\ln a)^2x^q-4q^2(\ln b-\ln x)(\ln b-\ln a)x^q+3q^2(\ln b-\ln x)^2x^q$$

$$-6q(\ln b-\ln a)a^q+6q(\ln b-\ln x)x^q-6a^q+6x^q\Big)$$

şeklindedir.

İspat. Lemma 3.2.2'i, power mean eşitsizliğini ve $|f'|^q$'nün $c>0$ modülüne göre güçlü GA-konveksliğini kullanarak,

$$\left|f(x)-\frac{1}{\ln b-\ln a}\int_a^b\frac{f(u)}{u}du\right| \tag{4.4.8}$$

$$\leq\left|(\ln b-\ln a)\left[\int_0^{\frac{\ln b-\ln x}{\ln b-\ln a}}t\left(a^tb^{1-t}\right)f'\left(a^tb^{1-t}\right)dt+\int_{\frac{\ln b-\ln x}{\ln b-\ln a}}^1(1-t)\left(a^tb^{1-t}\right)f'\left(a^tb^{1-t}\right)dt\right]\right|$$

$$\leq(\ln b-\ln a)\left[\int_0^{\frac{\ln b-\ln x}{\ln b-\ln a}} t\left(a^t b^{1-t}\right)\left|f'\left(a^t b^{1-t}\right)\right|dt+\int_{\frac{\ln b-\ln x}{\ln b-\ln a}}^{1}(1-t)\left(a^t b^{1-t}\right)\left|f'\left(a^t b^{1-t}\right)\right|dt\right]$$

$$\leq(\ln b-\ln a)\left[\left(\int_0^{\frac{\ln b-\ln x}{\ln b-\ln a}} t\,dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^{\frac{\ln b-\ln x}{\ln b-\ln a}} t\left(a^t b^{1-t}\right)^q\left|f'\left(a^t b^{1-t}\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left.+\left(\int_{\frac{\ln b-\ln x}{\ln b-\ln a}}^{1}(1-t)\,dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_{\frac{\ln b-\ln x}{\ln b-\ln a}}^{1}(1-t)\left(a^t b^{1-t}\right)^q\left|f'\left(a^t b^{1-t}\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right]$$

$$\leq(\ln b-\ln a)\left[\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\ln b-\ln x}{\ln b-\ln a}\right)^2\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^{\frac{\ln b-\ln x}{\ln b-\ln a}} t\left(a^t b^{1-t}\right)^q\left[t\left|f'(a)\right|^q+(1-t)\left|f'(b)\right|^q\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.-ct(1-t)(\ln b-\ln a)^2\right]dt\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\ln a-\ln x}{\ln b-\ln a}\right)^2\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_{\frac{\ln b-\ln x}{\ln b-\ln a}}^{1}(1-t)\left(a^t b^{1-t}\right)^q\right.$$

$$\left.\left.\left[t\left|f'(a)\right|^q+(1-t)\left|f'(b)\right|^q-ct(1-t)(\ln b-\ln a)^2\right]dt\right)^{\frac{1}{q}}\right]$$

$$\leq(\ln b-\ln a)\left[\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\ln b-\ln x}{\ln b-\ln a}\right)^2\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\left|f'(a)\right|^q\int_0^{\frac{\ln b-\ln x}{\ln b-\ln a}} t^2 b^q\left(\frac{a}{b}\right)^{tq}dt\right.\right.$$

$$\left.+\left|f'(b)\right|^q\int_0^{\frac{\ln b-\ln x}{\ln b-\ln a}} t(1-t)b^q\left(\frac{a}{b}\right)^{tq}dt-c(\ln b-\ln a)^2\int_0^{\frac{\ln b-\ln x}{\ln b-\ln a}} t^2(1-t)b^q\left(\frac{a}{b}\right)^{tq}dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\ln a-\ln x}{\ln b-\ln a}\right)^2\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\left|f'(a)\right|^q\int_{\frac{\ln b-\ln x}{\ln b-\ln a}}^{1} t(1-t)b^q\left(\frac{a}{b}\right)^{tq}dt\right.$$

$$+\left|f'(b)\right|^q \int_{\frac{\ln b-\ln x}{\ln b-\ln a}}^{1} (1-t)^2 b^q \left(\frac{a}{b}\right)^{tq} dt - c(\ln b-\ln a)^2 \int_{\frac{\ln b-\ln x}{\ln b-\ln a}}^{1} t(1-t)^2 b^q \left(\frac{a}{b}\right)^{tq} dt \Bigg)^{\frac{1}{q}} \Bigg]$$

elde edilir. Mevcut integraller hesaplanırsa,

$$\int_0^{\frac{\ln b-\ln x}{\ln b-\ln a}} t^2 b^q \left(\frac{a}{b}\right)^{tq} dt = b^q \int_0^{\frac{\ln b-\ln x}{\ln b-\ln a}} t^2 \left(\frac{a}{b}\right)^{tq} dt \tag{4.4.9}$$

$$= \frac{-1}{q^3(\ln b-\ln a)^3}\left(q^2(\ln b-\ln x)^2 x^q + 2q(\ln b-\ln x)x^q + 2x^q - 2b^q\right) = K_7(a,b,x),$$

$$\int_0^{\frac{\ln b-\ln x}{\ln b-\ln a}} t(1-t) b^q \left(\frac{a}{b}\right)^{tq} dt = b^q \int_0^{\frac{\ln b-\ln x}{\ln b-\ln a}} t(1-t) \left(\frac{a}{b}\right)^{tq} dt \tag{4.4.10}$$

$$= \frac{-1}{q^3(\ln b-\ln a)^3}\Big[-q^2(\ln b-\ln x)^2 x^q + q^2(\ln b-\ln a)(\ln b-\ln x)x^q$$

$$-2q(\ln b-\ln x)x^q + q(\ln b-\ln a)x^q - 2x^q - q(\ln b-\ln a) + 2b^q\Big] = K_8(a,b,x),$$

$$\int_0^{\frac{\ln b-\ln x}{\ln b-\ln a}} t^2(1-t) b^q \left(\frac{a}{b}\right)^{tq} dt = b^q \int_0^{\frac{\ln b-\ln x}{\ln b-\ln a}} t^2(1-t) \left(\frac{a}{b}\right)^{tq} dt \tag{4.4.11}$$

$$= \frac{1}{q^4(\ln b-\ln a)^4}\Big(q^3(\ln b-\ln x)^3 x^q - q^3(\ln b-\ln x)^2(\ln b-\ln a)x^q$$

$$-2q^2(\ln b-\ln x)(\ln b-\ln a)x^q + 3q^2(\ln b-\ln x)^2 x^q - 2q(\ln b-\ln a)x^q$$

$$+2q(\ln b-\ln a)b^q + 6q(\ln b-\ln x)x^q - 6x^q + 6b^q\Big) = K_9(a,b,x),$$

$$\int_{\frac{\ln b-\ln x}{\ln b-\ln a}}^{1} t(1-t) b^q \left(\frac{a}{b}\right)^{tq} dt = b^q \int_{\frac{\ln b-\ln x}{\ln b-\ln a}}^{1} t(1-t) \left(\frac{a}{b}\right)^{tq} dt \tag{4.4.12}$$

$$= \frac{-1}{q^3(\ln b-\ln a)^3}\Big(-q^2(\ln b-\ln x)(\ln b-\ln a)x^q + q^2(\ln b-\ln x)^2 x^q$$

$$-qa^{q}\left(\ln b-\ln a\right)+2q\left(\ln b-\ln x\right)x^{q}-q\left(\ln b-\ln a\right)x^{q}-2a^{q}+2x^{q}\Big)=K_{10}\left(a,b,x\right),$$

$$\int_{\frac{\ln b-\ln x}{\ln b-\ln a}}^{1}\left(1-t\right)^{2}b^{q}\left(\frac{a}{b}\right)^{tq}dt=b^{q}\int_{\frac{\ln b-\ln x}{\ln b-\ln a}}^{1}\left(1-t\right)^{2}\left(\frac{a}{b}\right)^{tq}dt \tag{4.4.13}$$

$$=\frac{-1}{q^{3}\left(\ln b-\ln a\right)^{3}}\Big(-q^{2}\left(\ln a-\ln x\right)^{2}x^{q}-2q\left(\ln a-\ln x\right)x^{q}+2a^{q}-2x^{q}\Big)=K_{11}\left(a,b,x\right),$$

$$\int_{\frac{\ln b-\ln x}{\ln b-\ln a}}^{1}t\left(1-t\right)^{2}b^{q}\left(\frac{a}{b}\right)^{tq}dt=b^{q}\int_{\frac{\ln b-\ln x}{\ln b-\ln a}}^{1}t\left(1-t\right)^{2}\left(\frac{a}{b}\right)^{tq}dt \tag{4.4.14}$$

$$=\frac{1}{q^{4}\left(\ln b-\ln a\right)^{4}}\Big(-q^{3}\left(\ln b-\ln x\right)\left(\ln b-\ln a\right)^{2}x^{q}+q^{3}\left(\ln b-\ln x\right)^{3}x^{q}$$

$$+q^{2}\left(\ln b-\ln a\right)^{2}x^{q}-4q^{2}\left(\ln b-\ln x\right)\left(\ln b-\ln a\right)x^{q}+3q^{2}\left(\ln b-\ln x\right)^{2}x^{q}$$

$$-6q\left(\ln b-\ln a\right)a^{q}+6q\left(\ln b-\ln x\right)x^{q}-6a^{q}+6x^{q}\Big)=K_{12}\left(a,b,x\right)$$

elde edilir. (4.4.8) – (4.4.14)’ün kombinasyonu sonucunda ispat tamamlanır.

Sonuç 4.4.2 Teorem 4.4.2’nin şartlarına ek olarak,

i. Eğer tüm $x\in[a,b]$ için $\left|f'(x)\right|\leq M$ seçilirse,

$$\left|f(x)-\frac{1}{\ln b-\ln a}\int_{a}^{b}\frac{f(u)}{u}du\right|\leq\left(\ln b-\ln a\right)M\Bigg[\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\ln b-\ln x}{\ln b-\ln a}\right)^{2}\right)^{1-\frac{1}{q}}\Big(K_{7}\left(a,b,x\right)$$

$$+K_{8}\left(a,b,x\right)-c\left(\ln b-\ln a\right)^{2}K_{9}\left(a,b,x\right)\Big)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\ln a-\ln x}{\ln b-\ln a}\right)^{2}\right)^{1-\frac{1}{q}}$$

$$\Big(K_{10}\left(a,b,x\right)+K_{11}\left(a,b,x\right)-c\left(\ln b-\ln a\right)^{2}K_{12}\left(a,b,x\right)\Big)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği elde edilir.

ii. $x=\sqrt{ab}$ için,

$$\left|f\left(\sqrt{ab}\right)-\frac{1}{\ln b-\ln a}\int_a^b \frac{f(u)}{u}du\right|\leq(\ln b-\ln a)\left(\frac{1}{8}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left[\left(\left|f'(a)\right|^q K_7\left(a,b,\sqrt{ab}\right)\right.\right.$$

$$\left.+\left|f'(b)\right|K_8\left(a,b,\sqrt{ab}\right)-c(\ln b-\ln a)^2 K_9\left(a,b,\sqrt{ab}\right)\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\left.+\left(\left|f'(a)\right|^q K_{10}\left(a,b,\sqrt{ab}\right)+\left|f'(b)\right|^q K_{11}\left(a,b,\sqrt{ab}\right)-c(\ln b-\ln a)^2 K_{12}\left(a,b,\sqrt{ab}\right)\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği sağlanır.

Teorem 4.4.3 $f:I\subset\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ fonksiyonu I^0 da diferansiyellenebilir fonksiyon, $a,b\in I$, $a<b$ ve $f'\in L[a,b]$ olsun. Eğer $q\geq 1$ için $|f'|^q$, $[a,b]$ de $c>0$ modülüne göre güçlü GA-konveks fonksiyon ise, tüm $x\in[a,b]$ için

$$\left|f(x)-\frac{1}{\ln b-\ln a}\int_a^b \frac{f(u)}{u}du\right|$$

$$\leq(\ln b-\ln a)\left[\left(K_{13}(a,b,x)\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\left|f'(a)\right|^q K_1(a,b,x)+\left|f'(b)\right|^q K_2(a,b,x)\right.\right.$$

$$\left.-c(\ln b-\ln a)^2 K_3(a,b,x)\right)^{\frac{1}{q}}+\left(K_{14}(a,b,x)\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\left|f'(a)\right|^q K_4(a,b,x)\right.$$

$$\left.\left.+\left|f'(b)\right|^q K_5(a,b,x)-c(\ln b-\ln a)^2 K_6(a,b,x)\right)^{\frac{1}{q}}\right]$$

dir ve burada $K_1(a,b,x)-K_6(a,b,x)$, Teorem 4.4.1' de tanımlanmıştır. Ayrıca,

$$K_{13}(a,b,x)=\frac{-1}{(\ln b-\ln a)^2}\left[(\ln b-\ln x+1)x-b\right],$$

$$K_{14}(a,b,x)=\frac{1}{(\ln b-\ln a)^2}\left[(\ln x-\ln a-1)x+a\right]$$

şeklindedir.

İspat. Lemma 3.2.2'ye, power mean eşitsizliğini ve $|f'|^q$ 'nün $c>0$ modülüne göre güçlü GA-konveksliğini uygulayarak,

$$\left|f(x)-\frac{1}{\ln b-\ln a}\int_a^b \frac{f(u)}{u}du\right| \tag{4.4.15}$$

$$\leq \left|(\ln b-\ln a)\left[\int_0^{\frac{\ln b-\ln x}{\ln b-\ln a}} t\left(a^t b^{1-t}\right) f'\left(a^t b^{1-t}\right)dt+\int_{\frac{\ln b-\ln x}{\ln b-\ln a}}^1 (1-t)\left(a^t b^{1-t}\right) f'\left(a^t b^{1-t}\right)dt\right]\right|$$

$$\leq (\ln b-\ln a)\left[\int_0^{\frac{\ln b-\ln x}{\ln b-\ln a}} t\left(a^t b^{1-t}\right)\left|f'\left(a^t b^{1-t}\right)\right|dt+\int_{\frac{\ln b-\ln x}{\ln b-\ln a}}^1 (1-t)\left(a^t b^{1-t}\right)\left|f'\left(a^t b^{1-t}\right)\right|dt\right]$$

$$\leq (\ln b-\ln a)\left[\left(\int_0^{\frac{\ln b-\ln x}{\ln b-\ln a}} t\left(a^t b^{1-t}\right)dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^{\frac{\ln b-\ln x}{\ln b-\ln a}} t\left(a^t b^{1-t}\right)\left|f'\left(a^t b^{1-t}\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left.+\left(\int_{\frac{\ln b-\ln x}{\ln b-\ln a}}^1 (1-t)\left(a^t b^{1-t}\right)dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_{\frac{\ln b-\ln x}{\ln b-\ln a}}^1 (1-t)\left(a^t b^{1-t}\right)\left|f'\left(a^t b^{1-t}\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right]$$

$$\leq (\ln b-\ln a)\left[\left(\int_0^{\frac{\ln b-\ln x}{\ln b-\ln a}} t\left(a^t b^{1-t}\right)dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^{\frac{\ln b-\ln x}{\ln b-\ln a}} t\left(a^t b^{1-t}\right)\left[t\left|f'(a)\right|^q+(1-t)\left|f'(b)\right|^q\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.-ct(1-t)(\ln b-\ln a)^2\right]dt\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\int_{\frac{\ln b-\ln x}{\ln b-\ln a}}^1 (1-t)\left(a^t b^{1-t}\right)\right)^{1-\frac{1}{q}}$$

$$\left.\left(\int_{\frac{\ln b-\ln x}{\ln b-\ln a}}^1 (1-t)\left(a^t b^{1-t}\right)\left[t\left|f'(a)\right|^q+(1-t)\left|f'(b)\right|^q-ct(1-t)(\ln b-\ln a)^2\right]dt\right)^{\frac{1}{q}}\right]$$

$$\leq(\ln b-\ln a)\left[\left(\int_0^{\frac{\ln b-\ln x}{\ln b-\ln a}} t\left(a^t b^{1-t}\right)dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\left|f'(a)\right|^q\int_0^{\frac{\ln b-\ln x}{\ln b-\ln a}} t^2 b\left(\frac{a}{b}\right)^t dt\right.\right.$$

$$\left.+\left|f'(b)\right|^q\int_0^{\frac{\ln b-\ln x}{\ln b-\ln a}} t(1-t)b\left(\frac{a}{b}\right)^t dt-c(\ln b-\ln a)^2\int_0^{\frac{\ln b-\ln x}{\ln b-\ln a}} t^2(1-t)b\left(\frac{a}{b}\right)^t dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\left(\int_{\frac{\ln b-\ln x}{\ln b-\ln a}}^1 (1-t)\left(a^t b^{1-t}\right)\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\left|f'(a)\right|^q\int_{\frac{\ln b-\ln x}{\ln b-\ln a}}^1 t(1-t)b\left(\frac{a}{b}\right)^t dt\right.$$

$$\left.\left.+\left|f'(b)\right|^q\int_{\frac{\ln b-\ln x}{\ln b-\ln a}}^1 (1-t)^2 b\left(\frac{a}{b}\right)^t dt-c(\ln b-\ln a)^2\int_{\frac{\ln b-\ln x}{\ln b-\ln a}}^1 t(1-t)^2 b\left(\frac{a}{b}\right)^t dt\right)^{\frac{1}{q}}\right]$$

elde edilir. Mevcut integraller hesaplanırsa,

$$\int_0^{\frac{\ln b-\ln x}{\ln b-\ln a}} t\left(a^t b^{1-t}\right)dt=b\int_0^{\frac{\ln b-\ln x}{\ln b-\ln a}} t\left(\frac{a}{b}\right)^t dt \tag{4.4.16}$$

$$=\frac{-1}{(\ln b-\ln a)^2}\left[(\ln b-\ln x+1)x-b\right]=K_{13}(a,b,x),$$

$$\int_{\frac{\ln b-\ln x}{\ln b-\ln a}}^1 (1-t)\left(a^t b^{1-t}\right)dt=b\int_{\frac{\ln b-\ln x}{\ln b-\ln a}}^1 (1-t)\left(\frac{a}{b}\right)^t dt \tag{4.4.17}$$

$$=\frac{1}{(\ln b-\ln a)^2}\left[(\ln x-\ln a-1)x+a\right]=K_{14}(a,b,x)$$

elde edilir. (4.4.2) – (4.4.7) ile (4.4.15) – (4.4.17)’ ün kombinasyonu sonucunda ispat tamamlanır.

Sonuç 4.4.3 Teorem 4.4.3’nin şartlarına ek olarak,

i. Eğer tüm $x\in[a,b]$ için $\left|f'(x)\right|\leq M$ seçilirse,

$$\left| f(x) - \frac{1}{\ln b - \ln a} \int_a^b \frac{f(u)}{u} du \right| \leq (\ln b - \ln a) M \left[\left(K_{13}(a,b,x) \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(K_1(a,b,x) \right. \right.$$

$$+ K_2(a,b,x) - c(\ln b - \ln a)^2 K_3(a,b,x) \Big)^{\frac{1}{q}} + \left(K_{14}(a,b,x) \right)^{1-\frac{1}{q}}$$

$$\left. \left(K_4(a,b,x) + K_5(a,b,x) - c(\ln b - \ln a)^2 K_6(a,b,x) \right)^{\frac{1}{q}} \right]$$

eşitsizliği elde edilir.

ii. $x = \sqrt{ab}$ için, aşağıdaki eşitsizlik sağlanır.

$$\left| f\left(\sqrt{ab}\right) - \frac{1}{\ln b - \ln a} \int_a^b \frac{f(u)}{u} du \right|$$

$$\leq (\ln b - \ln a) \left[\left(K_{13}\left(a,b,\sqrt{ab}\right) \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(|f'(a)|^q K_1\left(a,b,\sqrt{ab}\right) + |f'(b)|^q K_2\left(a,b,\sqrt{ab}\right) \right. \right.$$

$$- c(\ln b - \ln a)^2 K_3\left(a,b,\sqrt{ab}\right) \Big)^{\frac{1}{q}} + \left(K_{14}\left(a,b,\sqrt{ab}\right) \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(|f'(a)|^q K_4\left(a,b,\sqrt{ab}\right) \right.$$

$$\left. \left. + |f'(b)|^q K_5\left(a,b,\sqrt{ab}\right) - c(\ln b - \ln a)^2 K_6\left(a,b,\sqrt{ab}\right) \right)^{\frac{1}{q}} \right].$$

Teorem 4.4.4 $f : I \subset \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ fonksiyonu I^0 da diferansiyellenebilir fonksiyon, $a, b \in I$, $a < b$ ve $f' \in L[a,b]$ olsun. Eğer $q > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ için $|f'|^q$, $[a,b]$ de $c > 0$ modülüne göre güçlü GA-konveks fonksiyon ise, tüm $x \in [a,b]$ için

$$\left| f(x) - \frac{1}{\ln b - \ln a} \int_a^b \frac{f(u)}{u} du \right|$$

$$\leq (\ln b - \ln a) \left[\left(\frac{1}{(p+1)} \left(\frac{\ln b - \ln x}{\ln b - \ln a} \right)^{p+1} \right)^{\frac{1}{p}} \left(|f'(a)|^q K_{15}(a,b,x) + |f'(b)|^q K_{16}(a,b,x) \right. \right.$$

$$-c\left(\ln b-\ln a\right)^{2}K_{17}\left(a,b,x\right)\Big)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{1}{p+1}\left(\frac{\ln x-\ln a}{\ln b-\ln a}\right)^{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\Big(\left|f'\left(a\right)\right|^{q}K_{18}\left(a,b,x\right)$$

$$+\left|f'\left(b\right)\right|^{q}K_{19}\left(a,b,x\right)-c\left(\ln b-\ln a\right)^{2}K_{20}\left(a,b,x\right)\Big)^{\frac{1}{q}}\Bigg]$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada,

$$K_{15}\left(a,b,x\right)=\frac{-1}{q^{2}\left(\ln b-\ln a\right)^{2}}\left[q\left(\ln b-\ln x\right)x^{q}+x^{q}-b^{q}\right],$$

$$K_{16}\left(a,b,x\right)=\frac{1}{q^{2}\left(\ln b-\ln a\right)^{2}}\Big[q\left(\ln b-\ln x\right)x^{q}-q\left(\ln b-\ln a\right)x^{q}$$

$$+x^{q}+q\left(\ln b-\ln a\right)b^{q}-b^{q}\Big],$$

$$K_{17}\left(a,b,x\right)=\frac{-1}{q^{3}\left(\ln b-\ln a\right)^{3}}\Big[q^{2}\left(\ln b-\ln x\right)\left(\ln b-\ln a\right)x^{q}-q^{2}\left(\ln b-\ln x\right)^{2}x^{q}$$

$$+q\left(\ln b-\ln a\right)x^{q}-q\left(\ln b-\ln a\right)b^{q}-2q\left(\ln b-\ln x\right)x^{q}-2x^{q}+2b^{q}\Big],$$

$$K_{18}\left(a,b,x\right)=\frac{-1}{q^{2}\left(\ln b-\ln a\right)^{2}}\left[q\left(\ln b-\ln x\right)x^{q}+x^{q}-q\left(\ln b-\ln a\right)a^{q}-a^{q}\right],$$

$$K_{19}\left(a,b,x\right)=\frac{1}{q^{2}\left(\ln b-\ln a\right)^{2}}\left[-q\left(\ln b-\ln x\right)x^{q}+q\left(\ln b-\ln a\right)x^{q}-x^{q}+a^{q}\right],$$

$$K_{20}\left(a,b,x\right)=\frac{-1}{q^{3}\left(\ln b-\ln a\right)^{3}}\Big[q^{2}\left(\ln b-\ln x\right)^{2}x^{q}-q^{2}\left(\ln b-\ln x\right)\left(\ln b-\ln a\right)x^{q}$$

$$-q\left(\ln b-\ln a\right)x^{q}-q\left(\ln b-\ln a\right)a^{q}+2q\left(\ln b-\ln x\right)x^{q}\Big]$$

şeklindedir.

İspat. Lemma 3.2.2'ye, Hölder eşitsizliğini ve $\left|f'\right|^{q}$'nün $c>0$ modülüne göre güçlü GA-konveksliğini uygulayarak,

$$\left|f\left(x\right)-\frac{1}{\ln b-\ln a}\int_{a}^{b}\frac{f\left(u\right)}{u}du\right| \tag{4.4.18}$$

$$\le \left|(\ln b-\ln a)\left[\int_0^{\frac{\ln b-\ln x}{\ln b-\ln a}} t\left(a^t b^{1-t}\right) f'\left(a^t b^{1-t}\right)dt+\int_{\frac{\ln b-\ln x}{\ln b-\ln a}}^{1}(1-t)\left(a^t b^{1-t}\right) f'\left(a^t b^{1-t}\right)dt\right]\right|$$

$$\le (\ln b-\ln a)\left[\int_0^{\frac{\ln b-\ln x}{\ln b-\ln a}} t\left(a^t b^{1-t}\right)\left|f'\left(a^t b^{1-t}\right)\right|dt+\int_{\frac{\ln b-\ln x}{\ln b-\ln a}}^{1}(1-t)\left(a^t b^{1-t}\right)\left|f'\left(a^t b^{1-t}\right)\right|dt\right]$$

$$\le (\ln b-\ln a)\left[\left(\int_0^{\frac{\ln b-\ln x}{\ln b-\ln a}} t^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^{\frac{\ln b-\ln x}{\ln b-\ln a}}\left(a^t b^{1-t}\right)^q\left|f'\left(a^t b^{1-t}\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left.+\left(\left(\int_{\frac{\ln b-\ln x}{\ln b-\ln a}}^{1}(1-t)^p dt\right)\int_{\frac{\ln b-\ln x}{\ln b-\ln a}}^{1}\left(a^t b^{1-t}\right)^q\left|f'\left(a^t b^{1-t}\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right]$$

$$\le (\ln b-\ln a)\left[\left(\int_0^{\frac{\ln b-\ln x}{\ln b-\ln a}} t^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^{\frac{\ln b-\ln x}{\ln b-\ln a}}\left(a^t b^{1-t}\right)^q\left[t\left|f'(a)\right|^q+(1-t)\left|f'(b)\right|^q\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.-ct(1-t)(\ln b-\ln a)^2\right]dt\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\int_{\frac{\ln b-\ln x}{\ln b-\ln a}}^{1}(1-t)^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{\frac{\ln b-\ln x}{\ln b-\ln a}}^{1}\left(a^t b^{1-t}\right)^q\right.$$

$$\left.\left.\left[t\left|f'(a)\right|^q+(1-t)\left|f'(b)\right|^q-ct(1-t)(\ln b-\ln a)^2\right]dt\right)^{\frac{1}{q}}\right]$$

$$\le (\ln b-\ln a)\left[\left(\frac{1}{(p+1)}\left(\frac{\ln b-\ln x}{\ln b-\ln a}\right)^{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\left|f'(a)\right|^q\int_0^{\frac{\ln b-\ln x}{\ln b-\ln a}} t\left(a^t b^{1-t}\right)^q dt\right.\right.$$

$$\left.+\left|f'(b)\right|^q\int_0^{\frac{\ln b-\ln x}{\ln b-\ln a}}(1-t)\left(a^t b^{1-t}\right)^q dt-c(\ln b-\ln a)^2\int_0^{\frac{\ln b-\ln x}{\ln b-\ln a}} t(1-t)\left(a^t b^{1-t}\right)^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\left(\frac{1}{(p+1)}\left(\frac{\ln x-\ln a}{\ln b-\ln a}\right)^{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\left|f'(a)\right|^{q}\int_{\frac{\ln b-\ln x}{\ln b-\ln a}}^{1} t\left(a^{t}b^{1-t}\right)^{q}dt\right.$$

$$\left.\left.+\left|f'(b)\right|^{q}\int_{\frac{\ln b-\ln x}{\ln b-\ln a}}^{1}(1-t)\left(a^{t}b^{1-t}\right)^{q}dt-c(\ln b-\ln a)^{2}\int_{\frac{\ln b-\ln x}{\ln b-\ln a}}^{1}t(1-t)\left(a^{t}b^{1-t}\right)^{q}dt\right)^{\frac{1}{q}}\right]$$

elde edilir. Mevcut integraller hesaplanırsa,

$$\int_{0}^{\frac{\ln b-\ln x}{\ln b-\ln a}} t\left(a^{t}b^{1-t}\right)^{q}dt=b^{q}\int_{0}^{\frac{\ln b-\ln x}{\ln b-\ln a}} t\left(\frac{a}{b}\right)^{tq}dt \tag{4.4.19}$$

$$=\frac{-1}{q^{2}(\ln b-\ln a)^{2}}\left[q(\ln b-\ln x)x^{q}+x^{q}-b^{q}\right]=K_{15}(a,b,x),$$

$$\int_{0}^{\frac{\ln b-\ln x}{\ln b-\ln a}}(1-t)\left(a^{t}b^{1-t}\right)^{q}dt=b^{q}\int_{0}^{\frac{\ln b-\ln x}{\ln b-\ln a}}(1-t)\left(\frac{a}{b}\right)^{tq}dt \tag{4.4.20}$$

$$=\frac{1}{q^{2}(\ln b-\ln a)^{2}}\left[q(\ln b-\ln x)x^{q}-q(\ln b-\ln a)x^{q}\right.$$

$$\left.+x^{q}+q(\ln b-\ln a)b^{q}-b^{q}\right]=K_{16}(a,b,x),$$

$$\int_{0}^{\frac{\ln b-\ln x}{\ln b-\ln a}} t(1-t)\left(a^{t}b^{1-t}\right)^{q}dt=b^{q}\int_{0}^{\frac{\ln b-\ln x}{\ln b-\ln a}} t(1-t)\left(\frac{a}{b}\right)^{tq}dt \tag{4.4.21}$$

$$=\frac{-1}{q^{3}(\ln b-\ln a)^{3}}\left[q^{2}(\ln b-\ln x)(\ln b-\ln a)x^{q}-q^{2}(\ln b-\ln x)^{2}x^{q}\right.$$

$$\left.+q(\ln b-\ln a)x^{q}-q(\ln b-\ln a)b^{q}-2q(\ln b-\ln x)x^{q}-2x^{q}+2b^{q}\right]=K_{17}(a,b,x),$$

$$\int_{\frac{\ln b-\ln x}{\ln b-\ln a}}^{1} t\left(a^{t}b^{1-t}\right)^{q}dt=b^{q}\int_{0}^{\frac{\ln b-\ln x}{\ln b-\ln a}} t\left(\frac{a}{b}\right)^{tq}dt \tag{4.4.22}$$

$$=\frac{-1}{q^2(\ln b-\ln a)^2}\left[q(\ln b-\ln x)x^q+x^q-q(\ln b-\ln a)a^q-a^q\right]=K_{18}(a,b,x),$$

$$\int_{\frac{\ln b-\ln x}{\ln b-\ln a}}^{1}(1-t)\left(a^t b^{1-t}\right)^q dt=b^q\int_0^{\frac{\ln b-\ln x}{\ln b-\ln a}}(1-t)\left(\frac{a}{b}\right)^{tq}dt \tag{4.4.23}$$

$$=\frac{1}{q^2(\ln b-\ln a)^2}\left[-q(\ln b-\ln x)x^q+q(\ln b-\ln a)x^q-x^q+a^q\right]=K_{19}(a,b,x),$$

$$\int_{\frac{\ln b-\ln x}{\ln b-\ln a}}^{1}t(1-t)\left(a^t b^{1-t}\right)^q dt=b^q\int_0^{\frac{\ln b-\ln x}{\ln b-\ln a}}t(1-t)\left(\frac{a}{b}\right)^{tq}dt \tag{4.4.24}$$

$$=\frac{-1}{q^3(\ln b-\ln a)^3}\Big[q^2(\ln b-\ln x)^2x^q-q^2(\ln b-\ln x)(\ln b-\ln a)x^q-q(\ln b-\ln a)x^q$$

$$-q(\ln b-\ln a)a^q+2q(\ln b-\ln x)x^q\Big]=K_{20}(a,b,x)$$

elde edilir. (4.4.18) – (4.4.24)’ün kombinasyonu sonucunda ispat tamamlanır.

Sonuç 4.4.4 Teorem 4.4.4’ün şartlarına ek olarak,

i. Eğer tüm $x\in[a,b]$ için $|f'(x)|\le M$ seçilirse,

$$\left|f(x)-\frac{1}{\ln b-\ln a}\int_a^b\frac{f(u)}{u}du\right|$$

$$\le(\ln b-\ln a)M\left[\left(\frac{1}{p+1}\left(\frac{\ln b-\ln x}{\ln b-\ln a}\right)^{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\Big(K_{15}(a,b,x)+K_{16}(a,b,x)\right.$$

$$-c(\ln b-\ln a)^2K_{17}(a,b,x)\Big)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{1}{p+1}\left(\frac{\ln b-\ln x}{\ln b-\ln a}\right)^{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\left.K_{18}(a,b,x)+K_{19}(a,b,x)-c(\ln b-\ln a)^2K_{20}(a,b,x)\Big)^{\frac{1}{q}}\right]$$

eşitsizliği elde edilir.

ii. $x=\sqrt{ab}$ için,

$$\left| f(x) - \frac{1}{\ln b - \ln a}\int_a^b \frac{f(u)}{u}\,du \right|$$

$$\leq (\ln b - \ln a)\left(\frac{1}{p+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\Bigg[\Big(\left|f'(a)\right|^q K_{15}\left(a,b,\sqrt{ab}\right) + \left|f'(b)\right|^q K_{16}\left(a,b,\sqrt{ab}\right)$$

$$-c(\ln b - \ln a)^2 K_{17}\left(a,b,\sqrt{ab}\right)\Big)^{\frac{1}{q}} + \Big(\left|f'(a)\right|^q K_{18}\left(a,b,\sqrt{ab}\right)$$

$$+\left|f'(b)\right|^q K_{19}\left(a,b,\sqrt{ab}\right) - c(\ln b - \ln a)^2 K_{20}\left(a,b,\sqrt{ab}\right)\Big)^{\frac{1}{q}}\Bigg]$$

eşitsizliği sağlanır.

Teorem 4.4.5 $f: I \subset \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ fonksiyonu I^0 da diferansiyellenebilir fonksiyon, $a,b \in I$, $a<b$ ve $f' \in L[a,b]$ olsun. Eğer $q>1$ ve $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ için $\left|f'\right|^q$, $[a,b]$ de $c>0$ modülüne göre güçlü GA-konveks fonksiyon ise, tüm $x \in [a,b]$ için

$$\left| f(x) - \frac{1}{\ln b - \ln a}\int_a^b \frac{f(u)}{u}\,du \right|$$

$$\leq (\ln b - \ln a)\Bigg[\left(K_{21}(a,b,x)\right)^{\frac{1}{p}}\Bigg(\left|f'(a)\right|^q\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\ln b - \ln x}{\ln b - \ln a}\right)^2\right) + \left|f'(b)\right|^q$$

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{\ln a - \ln x}{\ln b - \ln a}\right)^2\right) - c(\ln b - \ln a)^2\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\ln b - \ln x}{\ln b - \ln a}\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{\ln b - \ln x}{\ln b - \ln a}\right)^3\right)\Bigg)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\left(K_{22}(a,b,x)\right)^{\frac{1}{p}}\Bigg(\left|f'(a)\right|^q\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{\ln b - \ln x}{\ln b - \ln a}\right)^2\right) + \left|f'(b)\right|^q\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\ln a - \ln x}{\ln b - \ln a}\right)^2\right)$$

$$-c(\ln b - \ln a)^2\left(\frac{1}{6} - \left(\frac{1}{2}\left(\frac{\ln b - \ln x}{\ln b - \ln a}\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{\ln b - \ln x}{\ln b - \ln a}\right)^3\right)\right)\Bigg)^{\frac{1}{q}}\Bigg]$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada,

$$K_{21}(a,b,x)=\int_{0}^{\frac{\ln b-\ln x}{\ln b-\ln a}} b^{p}t^{p}\left(\frac{a}{b}\right)^{tp} dt \ ,$$

$$K_{22}(a,b,x)=\int_{\frac{\ln b-\ln x}{\ln b-\ln a}}^{1} b^{p}(1-t)^{p}\left(\frac{a}{b}\right)^{tp} dt$$

dir.

İspat. Lemma 3.2.2'ye, Hölder eşitsizliğini ve $|f'|^{q}$ 'nün $c>0$ modülüne göre güçlü GA-konveksliğini uygulayarak,

$$\left|f(x)-\frac{1}{\ln b-\ln a}\int_{a}^{b}\frac{f(u)}{u}du\right| \tag{4.4.25}$$

$$\leq\left|(\ln b-\ln a)\left[\int_{0}^{\frac{\ln b-\ln x}{\ln b-\ln a}} t\left(a^{t}b^{1-t}\right)f'\left(a^{t}b^{1-t}\right)dt+\int_{\frac{\ln b-\ln x}{\ln b-\ln a}}^{1}(1-t)\left(a^{t}b^{1-t}\right)f'\left(a^{t}b^{1-t}\right)dt\right]\right|$$

$$\leq(\ln b-\ln a)\left[\int_{0}^{\frac{\ln b-\ln x}{\ln b-\ln a}} t\left(a^{t}b^{1-t}\right)\left|f'\left(a^{t}b^{1-t}\right)\right|dt+\int_{\frac{\ln b-\ln x}{\ln b-\ln a}}^{1}(1-t)\left(a^{t}b^{1-t}\right)\left|f'\left(a^{t}b^{1-t}\right)\right|dt\right]$$

$$\leq(\ln b-\ln a)\left[\left(\int_{0}^{\frac{\ln b-\ln x}{\ln b-\ln a}} t^{p}\left(a^{t}b^{-t}\right)^{p}dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{0}^{\frac{\ln b-\ln x}{\ln b-\ln a}}\left[t\left|f'(a)\right|^{q}+(1-t)\left|f'(b)\right|^{q}\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.-ct(1-t)(\ln b-\ln a)^{2}\right]dt\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\int_{\frac{\ln b-\ln x}{\ln b-\ln a}}^{1}(1-t)^{p}\left(a^{t}b^{1-t}\right)^{p}dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\left.\left(\int_{\frac{\ln b-\ln x}{\ln b-\ln a}}^{1}\left[t\left|f'(a)\right|^{q}+(1-t)\left|f'(b)\right|^{q}-ct(1-t)(\ln b-\ln a)^{2}\right]dt\right)^{\frac{1}{q}}\right]$$

$$\leq(\ln b-\ln a)\left[\left(\int_0^{\frac{\ln b-\ln x}{\ln b-\ln a}} t^p\left(a^t b^{-t}\right)^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\left|f'(a)\right|^q \int_0^{\frac{\ln b-\ln x}{\ln b-\ln a}} t dt+\left|f'(b)\right|^q \int_0^{\frac{\ln b-\ln x}{\ln b-\ln a}}(1-t) dt\right.\right.$$

$$\left.-c(\ln b-\ln a)^2 \int_0^{\frac{\ln b-\ln x}{\ln b-\ln a}} t(1-t) dt\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\int_{\frac{\ln b-\ln x}{\ln b-\ln a}}^1(1-t)^p\left(a^t b^{1-t}\right)^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\left.\left(\left|f'(a)\right|^q \int_{\frac{\ln b-\ln x}{\ln b-\ln a}}^1 t dt+\left|f'(b)\right|^q \int_0^{\frac{\ln b-\ln x}{\ln b-\ln a}}(1-t) dt-c(\ln b-\ln a)^2 \int_{\frac{\ln b-\ln x}{\ln b-\ln a}}^1 t(1-t) dt\right)^{\frac{1}{q}}\right]$$

$$\leq(\ln b-\ln a)\left[\left(\int_0^{\frac{\ln b-\ln x}{\ln b-\ln a}} b^p t^p\left(\frac{a}{b}\right)^{tp} dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\left|f'(a)\right|^q\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\ln b-\ln x}{\ln b-\ln a}\right)^2\right)\right.\right.$$

$$\left.+\left|f'(b)\right|^q\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln a-\ln x}{\ln b-\ln a}\right)^2\right)-c(\ln b-\ln a)^2\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\ln b-\ln x}{\ln b-\ln a}\right)^2-\frac{1}{3}\left(\frac{\ln b-\ln x}{\ln b-\ln a}\right)^3\right)\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\left(\int_{\frac{\ln b-\ln x}{\ln b-\ln a}}^1 b^p(1-t)^p\left(\frac{a}{b}\right)^{tp} dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\left|f'(a)\right|^q\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln b-\ln x}{\ln b-\ln a}\right)^2\right)\right.$$

$$+\left|f'(b)\right|^q\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\ln a-\ln x}{\ln b-\ln a}\right)^2\right)-c(\ln b-\ln a)^2$$

$$\left.\left.\left(\frac{1}{6}-\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\ln b-\ln x}{\ln b-\ln a}\right)^2-\frac{1}{3}\left(\frac{\ln b-\ln x}{\ln b-\ln a}\right)^3\right)\right)\right)^{\frac{1}{q}}\right]$$

elde edilir. Mevcut integraller hesaplanırsa,

$$\int_0^{\frac{\ln b-\ln x}{\ln b-\ln a}} b^p t^p\left(\frac{a}{b}\right)^{tp} dt=K_{21}(a,b,x)\ , \tag{4.4.26}$$

$$\int_{\frac{\ln b-\ln x}{\ln b-\ln a}}^{1} b^{p}(1-t)^{p}\left(\frac{a}{b}\right)^{tp} dt = K_{22}(a,b,x) \tag{4.4.27}$$

elde edilir ve (4.4.25) – (4.4.27)'nin kombinasyonu sonucunda ispat tamamlanır.

Sonuç 4.4.5 Teorem 4.4.5'in şartlarına ek olarak,

i. Eğer tüm $x\in[a,b]$ için $|f'(x)|\le M$ seçilirse aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$\left|f(x)-\frac{1}{\ln b-\ln a}\int_a^b \frac{f(u)}{u}du\right| \le (\ln b-\ln a)M\left[\left(K_{21}(a,b,x)\right)^{\frac{1}{p}}\left(\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\ln b-\ln x}{\ln b-\ln a}\right)^{2}\right)\right.\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln a-\ln x}{\ln b-\ln a}\right)^{2}\right)-c(\ln b-\ln a)^{2}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\ln b-\ln x}{\ln b-\ln a}\right)^{2}-\frac{1}{3}\left(\frac{\ln b-\ln x}{\ln b-\ln a}\right)^{3}\right)\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\left(K_{22}(a,b,x)\right)^{\frac{1}{p}}\left(\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln b-\ln x}{\ln b-\ln a}\right)^{2}+\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\ln a-\ln x}{\ln b-\ln a}\right)^{2}\right)\right)\right.$$

$$\left.\left.-c(\ln b-\ln a)^{2}\left(\frac{1}{6}-\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\ln b-\ln x}{\ln b-\ln a}\right)^{2}-\frac{1}{3}\left(\frac{\ln b-\ln x}{\ln b-\ln a}\right)^{3}\right)\right)\right)^{\frac{1}{q}}\right].$$

ii. $x=\sqrt{ab}$ için, aşağıdaki eşitsizlik sağlanır.

$$\left|f\left(\sqrt{ab}\right)-\frac{1}{\ln b-\ln a}\int_a^b \frac{f(u)}{u}du\right|$$

$$\le(\ln b-\ln a)\left[\left(K_{21}\left(a,b,\sqrt{ab}\right)\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{8}|f'(a)|^{q}+\frac{3}{8}|f'(b)|^{q}-\frac{1}{12}c(\ln b-\ln a)^{2}\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left.+\left(K_{22}\left(a,b,\sqrt{ab}\right)\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{3}{8}|f'(a)|^{q}+\frac{1}{8}|f'(b)|^{q}-\frac{1}{12}c(\ln b-\ln a)^{2}\right)^{\frac{1}{q}}\right].$$

4.5 Güçlü Harmonik Konveks Fonksiyonlar için Ostrowski Tipli İntegral Eşitsizlikleri

Bu bölümde güçlü harmonik konveks fonksiyonlar için yeni Ostrowski tipli integral eşitsizlikleri elde edildi. Bunun için üçüncü bölümde verilen lemmadan yararlanarak bazı teorem ve sonuçlar verildi.

Teorem 4.5.1 $f : I \subset \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ fonksiyonu I^0 da diferansiyellenebilir fonksiyon, $a,b \in I$, $a<b$ ve $f' \in L[a,b]$ olsun. Eğer $|f'|$, $[a,b]$ de $c>0$ modülüne göre güçlü harmonik konveks fonksiyon ise, tüm $x \in [a,b]$ için

$$\left| f(x) - \frac{ab}{b-a}\int_a^b \frac{f(u)}{u^2}du \right| \le \frac{ab}{b-a}\Bigg\{ (x-a)^2 \Bigg(\lambda_1(a,x,1,1)|f'(a)|^q + \lambda_2(a,x,1,1)|f'(x)|^q$$

$$- c\left(\frac{a-x}{ax}\right)^2 \lambda_3(a,x,1,1)\Bigg)^{\frac{1}{q}} + (b-x)^2 \Bigg(\lambda_4(b,x,1,1)|f'(b)|^q$$

$$+ \lambda_5(b,x,1,1)|f'(x)|^q - c\left(\frac{b-x}{bx}\right)^2 \lambda_6(b,x,1,1)\Bigg)^{\frac{1}{q}} \Bigg\}$$

eşitsizliği vardır. Burada,

$$\lambda_1(a,x,v,\rho) = \frac{\beta(\rho+1,2)}{x^{2v}}\, {}_2F_1\left(2v, \rho+1; \rho+3; 1-\frac{a}{x}\right),$$

$$\lambda_2(a,x,v,\rho) = \frac{\beta(\rho+2,1)}{x^{2v}}\, {}_2F_1\left(2v, \rho+2; \rho+3; 1-\frac{a}{x}\right),$$

$$\lambda_3(a,x,v,\rho) = \frac{\beta(\rho+2,2)}{x^{2v}}\, {}_2F_1\left(2v, \rho+2; \rho+4; 1-\frac{a}{x}\right),$$

$$\lambda_4(b,x,v,\rho) = \frac{\beta(\rho+1,2)}{x^{2v}}\, {}_2F_1\left(2v, \rho+1; \rho+3; 1-\frac{x}{b}\right),$$

$$\lambda_5(b,x,v,\rho) = \frac{\beta(\rho+2,1)}{x^{2v}}\, {}_2F_1\left(2v, \rho+2; \rho+3; 1-\frac{x}{b}\right),$$

$$\lambda_6(b,x,v,\rho) = \frac{\beta(\rho+2,2)}{b^{2v}}\, {}_2F_1\left(2v, \rho+2; \rho+4; 1-\frac{x}{b}\right).$$

İspat. Lemma 3.2.1'de $|f'|$'nün $c>0$ modülüne göre güçlü harmonik konveksliğini kullanarak,

$$\left|f(x)-\frac{ab}{b-a}\int_a^b \frac{f(u)}{u^2}du\right| \tag{4.5.1}$$

$$\leq \left|\frac{ab}{b-a}\left\{(x-a)^2\int_0^1 \frac{t}{(ta+(1-t)x)^2}\left|f'\left(\frac{ax}{ta+(1-t)x}\right)\right|dt\right|\right.$$

$$\left|+(b-x)^2\int_0^1 \frac{t}{(tb+(1-t)x)^2}f'\left(\frac{bx}{tb+(1-t)x}\right)dt\right\}\right|$$

$$\leq \frac{ab}{b-a}\left\{(x-a)^2\int_0^1 \frac{t}{(ta+(1-t)x)^2}\left|f'\left(\frac{ax}{ta+(1-t)x}\right)\right|dt\right.$$

$$\left.+(b-x)^2\int_0^1 \frac{t}{(tb+(1-t)x)^2}\left|f'\left(\frac{bx}{tb+(1-t)x}\right)\right|dt\right\}$$

$$\leq \frac{ab}{b-a}\left\{(x-a)^2\int_0^1 \frac{t}{(ta+(1-t)x)^2}\left[(1-t)|f'(a)|+t|f'(x)|-ct(1-t)\left(\frac{a-x}{ax}\right)^2\right]dt\right.$$

$$\left.+(b-x)^2\int_0^1 \frac{t}{(tb+(1-t)x)^2}\left[(1-t)|f'(b)|+t|f'(x)|-ct(1-t)\left(\frac{b-x}{bx}\right)^2\right]\right\}$$

$$\leq \frac{ab(x-a)^2}{b-a}\left(|f'(a)|\int_0^1 \frac{t(1-t)}{(ta+(1-t)x)^2}dt+|f'(x)|\int_0^1 \frac{t^2}{(ta+(1-t)x)^2}dt\right.$$

$$\left.-ct(1-t)\left(\frac{a-x}{ax}\right)^2\int_0^1 \frac{t^2(1-t)}{(ta+(1-t)x)^2}dt\right)+\frac{ab(b-x)^2}{b-a}\left(|f'(b)|\int_0^1 \frac{t(1-t)}{(tb+(1-t)x)^2}dt\right.$$

$$\left.+|f'(x)|\int_0^1 \frac{t^2}{(tb+(1-t)x)^2}dt-ct(1-t)\left(\frac{b-x}{bx}\right)^2\int_0^1 \frac{t^2(1-t)}{(tb+(1-t)x)^2}dt\right)$$

elde edilir. Mevcut integraller hesaplanırsa,

$$\int_0^1 \frac{t(1-t)}{(ta+(1-t)x)^2}dt = \frac{\beta(2,2)}{x^2}\,{}_2F_1\left(2,2;4;1-\frac{a}{x}\right), \tag{4.5.2}$$

$$\int_0^1 \frac{t^2}{(ta+(1-t)x)^2}dt = \frac{\beta(3,1)}{x^2}\,{}_2F_1\left(2,3;4;1-\frac{a}{x}\right), \tag{4.5.3}$$

$$\int_0^1 \frac{t^2(1-t)}{(ta+(1-t)x)^2}dt = \frac{\beta(3,2)}{x^2}\,{}_2F_1\left(2,3;5;1-\frac{a}{x}\right), \tag{4.5.4}$$

$$\int_0^1 \frac{t(1-t)}{(tb+(1-t)x)^2}dt = \frac{\beta(2,2)}{b^2}\,{}_2F_1\left(2,2;4;1-\frac{x}{b}\right), \tag{4.5.5}$$

$$\int_0^1 \frac{t^2}{(tb+(1-t)x)^2}dt = \frac{\beta(3,1)}{b^2}\,{}_2F_1\left(2,3;4;1-\frac{x}{b}\right), \tag{4.5.6}$$

$$\int_0^1 \frac{t^2(1-t)}{(tb+(1-t)x)^2}dt = \frac{\beta(3,2)}{b^2}\,{}_2F_1\left(2,3;5;1-\frac{x}{b}\right) \tag{4.5.7}$$

elde edilir ve (4.5.1) – (4.5.7)’nin kombinasyonu sonucunda ispat tamamlanır.

Sonuç 4.5.1 Teorem 4.5.1’in şartlarına ek olarak,

i. Eğer tüm $x\in[a,b]$ için $|f'(x)|\le M$ seçilirse,

$$\left|f(x)-\frac{ab}{b-a}\int_a^b \frac{f(u)}{u^2}du\right| \le \frac{ab}{b-a}M\left\{(x-a)^2\left(\lambda_1(a,x,1,1)+\lambda_2(a,x,1,1)\right.\right.$$

$$\left.-c\left(\frac{a-x}{ax}\right)^2\lambda_3(a,x,1,1)\right)^{\frac{1}{q}}+(b-x)^2\left(\lambda_4(b,x,1,1)\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\left.\left.+\lambda_5(b,x,1,1)-c\left(\frac{b-x}{bx}\right)^2\lambda_6(b,x,1,1)\right)^{\frac{1}{q}}\right\}$$

eşitsizliği sağlanır.

Teorem 4.5.2 $f: I\subset\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ fonksiyonu I^0 da diferansiyellenebilir fonksiyon, $a,b\in I$, $a<b$ ve $f'\in L[a,b]$ olsun. Eğer $q\ge 1$ için $|f'|^q$, $[a,b]$ de $c>0$ modülüne göre güçlü harmonik konveks fonksiyon ise, tüm $x\in[a,b]$ için

$$\left|f(x)-\frac{ab}{b-a}\int_a^b\frac{f(u)}{u^2}du\right|\leq\frac{ab(x-a)^2}{b-a}\Big(\lambda_1(a,x,q,q)|f'(a)|^q+\lambda_2(a,x,q,q)|f'(x)|^q$$

$$-c\left(\frac{a-x}{ax}\right)^2\lambda_3(a,x,q,q)\Big)^{\frac{1}{q}}+\frac{ab(b-x)^2}{b-a}\Big(\lambda_4(b,x,q,q)|f'(b)|^q$$

$$+\lambda_5(b,x,q,q)|f'(x)|^q-c\left(\frac{b-x}{bx}\right)^2\lambda_6(b,x,q,q)\Big)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği vardır. Burada $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4,\lambda_5,\lambda_6$ Teorem 4.5.1 de tanımlanmıştır.

İspat. Lemma 3.2.1'i, power mean eşitsizliğini ve $|f'|^q$'nün $c>0$ modülüne göre güçlü harmonik konveksliğini kullanarak,

$$\left|f(x)-\frac{ab}{b-a}\int_a^b\frac{f(u)}{u^2}du\right|\leq\left|\frac{ab}{b-a}\left\{(x-a)^2\int_0^1\frac{t}{(ta+(1-t)x)^2}f'\left(\frac{ax}{ta+(1-t)x}\right)dt\right.\right|$$

$$\left|f(x)-\frac{ab}{b-a}\int_a^b\frac{f(u)}{u^2}du\right|\leq\frac{ab}{b-a}\left\{(x-a)^2\int_0^1\frac{t}{(ta+(1-t)x)^2}\left|f'\left(\frac{ax}{ta+(1-t)x}\right)\right|dt\right.$$

$$\left.+\left|(b-x)^2\int_0^1\frac{t}{(ta+(1-t)x)^2}f'\left(\frac{bx}{tb+(1-t)x}\right)dt\right\}\right|$$

$$\leq\frac{ab(x-a)^2}{b-a}\left(\int_0^1 1dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1\frac{t^q}{(ta+(1-t)x)^{2q}}\Big[(1-t)|f'(a)|^q+t|f'(x)|^q\right.$$

$$\left.-ct(1-t)\left(\frac{a-x}{ax}\right)^2\Big]dt\right)^{\frac{1}{q}}+\frac{ab(b-x)^2}{b-a}\left(\int_0^1 1dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1\frac{t^q}{(tb+(1-t)x)^{2q}}\right.$$

$$\left.\left[(1-t)|f'(b)|^q+t|f'(x)|^q-ct(1-t)\left(\frac{b-x}{bx}\right)^2\right]dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq \frac{ab(x-a)^2}{b-a}\left(\left|f'(a)\right|^q \int_0^1 \frac{t^q(1-t)}{\left(ta+(1-t)x\right)^{2q}}dt + \left|f'(x)\right|^q \int_0^1 \frac{t^{q+1}}{\left(ta+(1-t)x\right)^{2q}}dt \right.$$

$$\left. -c\left(\frac{a-x}{ax}\right)^2 \int_0^1 \frac{t^{q+1}(1-t)}{\left(ta+(1-t)x\right)^{2q}}dt \right)^{\frac{1}{q}} + \frac{ab(b-x)^2}{b-a}\left(\left|f'(b)\right|^q \int_0^1 \frac{t^q(1-t)}{\left(tb+(1-t)x\right)^{2q}}dt \right.$$

$$\left. +\left|f'(x)\right|^q \int_0^1 \frac{t^{q+1}}{\left(tb+(1-t)x\right)^{2q}}dt - c\left(\frac{b-x}{bx}\right)^2 \int_0^1 \frac{t^{q+1}(1-t)}{\left(tb+(1-t)x\right)^{2q}}dt \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq \frac{ab(x-a)^2}{b-a}\left(\lambda_1(a,x,q,q)\left|f'(a)\right|^q + \lambda_2(a,x,q,q)\left|f'(x)\right|^q - c\left(\frac{a-x}{ax}\right)^2 \lambda_3(a,x,q,q) \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\frac{ab(b-x)^2}{b-a}\left(\lambda_4(b,x,q,q)\left|f'(b)\right|^q + \lambda_5(b,x,q,q)\left|f'(x)\right|^q - c\left(\frac{b-x}{bx}\right)^2 \lambda_6(b,x,q,q) \right)^{\frac{1}{q}}$$

Burada $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4,\lambda_5,\lambda_6$ Teorem 4.5.1 de tanımlanmıştır. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 4.5.2 Teorem 4.5.2'nin şartlarına ek olarak, eğer tüm $x\in[a,b]$ için $\left|f'(x)\right|\leq M$ seçilirse aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$\left| f(x) - \frac{ab}{b-a}\int_a^b \frac{f(u)}{u^2}du \right|$$

$$\leq \frac{ab}{b-a}M\left\{ (x-a)^2\left(\lambda_1(a,x,q,q) + \lambda_2(a,x,q,q) - c\left(\frac{a-x}{ax}\right)^2 \lambda_3(a,x,q,q) \right)^{\frac{1}{q}} \right.$$

$$\left. +(b-x)^2\left(\lambda_4(b,x,q,q) + \lambda_5(b,x,q,q) - c\left(\frac{b-x}{bx}\right)^2 \lambda_6(b,x,q,q) \right)^{\frac{1}{q}} \right\}.$$

Teorem 4.5.3 $f: I \subset \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ fonksiyonu I^0 da diferansiyellenebilir fonksiyon, $a,b \in I$, $a<b$ ve $f' \in L[a,b]$ olsun. Eğer $q \geq 1$ için $|f'|^q$, $[a,b]$ de $c>0$ modülüne göre güçlü harmonik konveks fonksiyon ise, tüm $x \in [a,b]$ için

$$\left| f(x) - \frac{ab}{b-a}\int_a^b \frac{f(u)}{u^2}du \right| \leq \frac{ab}{b-a}\left(\frac{1}{2}\right)^{1-\frac{1}{q}} \left\{ (x-a)^2 \left(\lambda_1(a,x,q,1)|f'(a)|^q \right.\right.$$

$$\left.\left. +\lambda_2(a,x,q,1)|f'(x)|^q - c\left(\frac{a-x}{ax}\right)^2 \lambda_3(a,x,q,1)\right)^{\frac{1}{q}} \right\}$$

dir. Burada $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6$ Teorem 4.5.1 de tanımlanmıştır.

İspat. Lemma 3.2.1'i, power mean eşitsizliğini ve $|f'|^q$ 'nün $c>0$ modülüne göre güçlü harmonik konveksliğini kullanarak,

$$\left| f(x) - \frac{ab}{b-a}\int_a^b \frac{f(u)}{u^2}du \right| \leq \left| \frac{ab}{b-a} \left\{ (x-a)^2 \int_0^1 \frac{t}{(ta+(1-t)x)^2} f'\left(\frac{ax}{ta+(1-t)x}\right)dt \right.\right|$$

$$\left.\left. + \left| (b-x)^2 \int_0^1 \frac{t}{(ta+(1-t)x)^2} f'\left(\frac{bx}{tb+(1-t)x}\right)dt \right\} \right|$$

$$\left| f(x) - \frac{ab}{b-a}\int_a^b \frac{f(u)}{u^2}du \right| \leq \frac{ab}{b-a} \left\{ (x-a)^2 \int_0^1 \frac{t}{(ta+(1-t)x)^2} \left| f'\left(\frac{ax}{ta+(1-t)x}\right)\right| dt \right.$$

$$\left. + (b-x)^2 \int_0^1 \frac{t}{(ta+(1-t)x)^2} \left| f'\left(\frac{bx}{tb+(1-t)x}\right)\right| dt \right\}$$

$$\leq \frac{ab(x-a)^2}{b-a}\left(\int_0^1 tdt\right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 \frac{t}{(ta+(1-t)x)^{2q}} \left[(1-t)|f'(a)|^q + t|f'(x)|^q \right.\right.$$

$$\left.\left. -ct(1-t)\left(\frac{a-x}{ax}\right)^2 \right] dt \right)^{\frac{1}{q}} + \frac{ab(b-x)^2}{b-a}\left(\int_0^1 tdt\right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 \frac{t}{(tb+(1-t)x)^{2q}} \right.$$

$$\left[(1-t)\left|f'(b)\right|^{q}+t\left|f'(x)\right|^{q}-ct(1-t)\left(\frac{b-x}{bx}\right)^{2}\right]dt\Bigg)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq\frac{ab}{b-a}\left(\frac{1}{2}\right)^{1-\frac{1}{q}}\Bigg\{(x-a)^{2}\Bigg(\left|f'(a)\right|^{q}\int_{0}^{1}\frac{t(1-t)}{\left(ta+(1-t)x\right)^{2q}}dt+\left|f'(x)\right|^{q}\int_{0}^{1}\frac{t^{2}}{\left(ta+(1-t)x\right)^{2q}}dt$$

$$-c\left(\frac{a-x}{ax}\right)^{2}\int_{0}^{1}\frac{t^{2}(1-t)}{\left(ta+(1-t)x\right)^{2q}}dt\Bigg)^{\frac{1}{q}}+(b-x)^{2}\Bigg(\left|f'(b)\right|^{q}\int_{0}^{1}\frac{t(1-t)}{\left(tb+(1-t)x\right)^{2q}}dt$$

$$+\left|f'(x)\right|^{q}\int_{0}^{1}\frac{t^{2}}{\left(tb+(1-t)x\right)^{2q}}dt-c\left(\frac{b-x}{bx}\right)^{2}\int_{0}^{1}\frac{t^{2}(1-t)}{\left(tb+(1-t)x\right)^{2q}}dt\Bigg)^{\frac{1}{q}}\Bigg\}$$

$$\leq\frac{ab}{b-a}\left(\frac{1}{2}\right)^{1-\frac{1}{q}}\Big\{(x-a)^{2}\Big(\lambda_{1}(a,x,q,1)\left|f'(a)\right|^{q}+\lambda_{2}(a,x,q,1)\left|f'(x)\right|^{q}$$

$$-c\left(\frac{a-x}{ax}\right)^{2}\lambda_{3}(a,x,q,1)\Big)^{\frac{1}{q}}+(b-x)^{2}\Big(\lambda_{4}(b,x,q,1)\left|f'(b)\right|^{q}$$

$$+\lambda_{5}(b,x,q,1)\left|f'(x)\right|^{q}-c\left(\frac{b-x}{bx}\right)^{2}\lambda_{6}(b,x,q,1)\Big)^{\frac{1}{q}}\Big\}$$

elde edilir. Burada $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4,\lambda_5,\lambda_6$ Teorem 4.5.1 de tanımlanmıştır. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 4.5.3 Teorem 4.5.3'ün şartlarına ek olarak, eğer tüm $x\in[a,b]$ için $\left|f'(x)\right|\leq M$ seçilirse aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$\left|f(x)-\frac{ab}{b-a}\int_{a}^{b}\frac{f(u)}{u^{2}}du\right|$$

$$\leq\frac{ab}{b-a}M\left(\frac{1}{2}\right)^{1-\frac{1}{q}}\Bigg\{(x-a)^{2}\left(\lambda_{1}(a,x,q,1)+\lambda_{2}(a,x,q,1)-c\left(\frac{a-x}{ax}\right)^{2}\lambda_{3}(a,x,q,1)\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\left(b-x\right)^{2}\left(\lambda_{4}\left(b,x,q,1\right)+\lambda_{5}\left(b,x,q,1\right)-c\left(\frac{b-x}{bx}\right)^{2}\lambda_{6}\left(b,x,q,1\right)\right)^{\frac{1}{q}}\Bigg\}.$$

Teorem 4.5.4 $f: I\subset\mathbb{R}_{+}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu I^{0} da diferansiyellenebilir fonksiyon, $a,b\in I$, $a<b$ ve $f'\in L[a,b]$ olsun. Eğer $q\geq 1$ için $|f'|^{q}$, $[a,b]$ de $c>0$ modülüne göre güçlü harmonik konveks fonksiyon ise, tüm $x\in[a,b]$ için

$$\left|f(x)-\frac{ab}{b-a}\int_{a}^{b}\frac{f(u)}{u^{2}}du\right|$$

$$\leq\frac{ab\left(x-a\right)^{2}}{b-a}\left(\frac{1}{x-a}\left(\frac{1}{a}-\frac{\ln x-\ln a}{x-a}\right)\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\lambda_{1}\left(a,x,1,1\right)\left|f'\left(a\right)\right|^{q}+\lambda_{2}\left(a,x,1,1\right)\left|f'\left(x\right)\right|^{q}\right.$$

$$\left.-c\left(\frac{a-x}{ax}\right)^{2}\lambda_{3}\left(a,x,1,1\right)\right)^{\frac{1}{q}}+\frac{ab\left(b-x\right)^{2}}{b-a}\left(\frac{1}{b-x}\left(\frac{\ln b-\ln x}{b-x}-\frac{1}{b}\right)\right)^{1-\frac{1}{q}}$$

$$\left(\lambda_{4}\left(b,x,1,1\right)\left|f'\left(b\right)\right|^{q}+\lambda_{5}\left(b,x,1,1\right)\left|f'\left(x\right)\right|^{q}-c\left(\frac{b-x}{bx}\right)^{2}\lambda_{6}\left(b,x,1,1\right)\right)^{\frac{1}{q}}$$

dir. Burada $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4,\lambda_5,\lambda_6$ Teorem 4.5.1 de tanımlanmıştır.

İspat. Lemma 3.2.1'i, Hölder eşitsizliğini ve $|f'|^{q}$'nün $c>0$ modülüne göre güçlü harmonik konveksliğini kullanarak,

$$\left|f(x)-\frac{ab}{b-a}\int_{a}^{b}\frac{f(u)}{u^{2}}du\right|$$

$$\leq\frac{ab\left(x-a\right)^{2}}{b-a}\left(\int_{0}^{1}\frac{t}{\left(ta+\left(1-t\right)x\right)^{2}}dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_{0}^{1}\frac{t}{\left(ta+\left(1-t\right)x\right)^{2}}\left[\left(1-t\right)\left|f'\left(a\right)\right|^{q}+t\left|f'\left(x\right)\right|^{q}\right.\right.$$

$$\left.\left.-ct\left(1-t\right)\left(\frac{a-x}{ax}\right)^{2}\right]dt\right)^{\frac{1}{q}}+\frac{ab\left(b-x\right)^{2}}{b-a}\left(\int_{0}^{1}\frac{t}{\left(tb+\left(1-t\right)x\right)^{2}}dt\right)^{1-\frac{1}{q}}$$

$$\left(\int_0^1 \frac{t}{\left(tb+(1-t)x\right)^2}\left[(1-t)\left|f'(b)\right|^q + t\left|f'(x)\right|^q - ct(1-t)\left(\frac{b-x}{bx}\right)^2\right]dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

elde edilir. Mevcut integraller hesaplanırsa,

$$\int_0^1 \frac{t}{\left(ta+(1-t)x\right)^2}dt = \frac{1}{x-a}\left\{\frac{1}{a}-\frac{\ln x-\ln a}{x-a}\right\},$$

$$\int_0^1 \frac{t}{\left(tb+(1-t)x\right)^2}dt = \frac{1}{b-x}\left\{\frac{\ln b-\ln x}{b-x}-\frac{1}{b}\right\}$$

elde edilir ve böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 4.5.4 Teorem 4.5.4'ün şartlarına ek olarak, eğer tüm $x\in[a,b]$ için $\left|f'(x)\right|\le M$ seçilirse aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$\left|f(x)-\frac{ab}{b-a}\int_a^b \frac{f(u)}{u^2}du\right| \le \frac{ab}{b-a}M\left\{(x-a)^2\left(\frac{1}{x-a}\left(\frac{1}{a}-\frac{\ln x-\ln a}{x-a}\right)\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\lambda_1(a,x,1,1)\right.\right.$$

$$\left.+\lambda_2(a,x,1,1)-c\left(\frac{a-x}{ax}\right)^2\lambda_3(a,x,1,1)\right)^{\frac{1}{q}}+(b-x)^2\left(\frac{1}{b-x}\left(\frac{\ln b-\ln x}{b-x}-\frac{1}{b}\right)\right)^{1-\frac{1}{q}}$$

$$\left.\left(\lambda_4(b,x,1,1)+\lambda_5(b,x,1,1)-c\left(\frac{b-x}{bx}\right)^2\lambda_6(b,x,1,1)\right)^{\frac{1}{q}}\right\}.$$

Teorem 4.5.5 $f:I\subset\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ fonksiyonu I^0 da diferansiyellenebilir fonksiyon, $a,b\in I$, $a<b$ ve $f'\in L[a,b]$ olsun. Eğer $q>1$ ve $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ için $\left|f'\right|^q$, $[a,b]$ de $c>0$ modülüne göre güçlü harmonik konveks fonksiyon ise, tüm $x\in[a,b]$ için

$$\left|f(x)-\frac{ab}{b-a}\int_a^b \frac{f(u)}{u^2}du\right| \le \frac{ab}{b-a}\left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left\{(x-a)^2\left(\lambda_1(a,x,q,0)\left|f'(a)\right|^q\right.\right.$$

$$+\lambda_2(a,x,q,0)\left|f'(x)\right|^q - c\left(\frac{a-x}{ax}\right)^2 \lambda_3(a,x,q,0)\Bigg)^{\frac{1}{q}} + (b-x)^2$$

$$\left(\lambda_4(b,x,q,0)\left|f'(b)\right|^q + \lambda_5(b,x,q,0)\left|f'(x)\right|^q - c\left(\frac{b-x}{bx}\right)^2 \lambda_6(b,x,q,0)\right)^{\frac{1}{q}}\Bigg\}$$

dir. Burada $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4,\lambda_5,\lambda_6$ Teorem 4.5.1 de tanımlanmıştır.

İspat. Lemma 3.2.1'i, Hölder eşitsizliğini ve $\left|f'\right|^q$'nün $c>0$ modülüne göre güçlü harmonik konveksliğini kullanarak,

$$\left|f(x)-\frac{ab}{b-a}\int_a^b \frac{f(u)}{u^2}du\right| \le \frac{ab(x-a)^2}{b-a}\left(\int_0^1 t^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 \frac{1}{(ta+(1-t)x)^{2q}}\right.$$

$$\left.\left[(1-t)\left|f'(a)\right|^q + t\left|f'(x)\right|^q - ct(1-t)\left(\frac{a-x}{ax}\right)^2\right]dt\right)^{\frac{1}{q}} + \frac{ab(b-x)^2}{b-a}$$

$$\left(\int_0^1 t^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 \frac{1}{(tb+(1-t)x)^{2q}}\left[(1-t)\left|f'(b)\right|^q + t\left|f'(x)\right|^q - ct(1-t)\left(\frac{b-x}{bx}\right)^2\right]dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\le \frac{ab}{b-a}\left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\Bigg\{(x-a)^2\Bigg(\left|f'(a)\right|^q\int_0^1 \frac{(1-t)}{(ta+(1-t)x)^{2q}}dt + \left|f'(x)\right|^q\int_0^1 \frac{t}{(ta+(1-t)x)^{2q}}dt +$$

$$-c\left(\frac{a-x}{ax}\right)^2\int_0^1 \frac{t(1-t)}{(ta+(1-t)x)^{2q}}dt\Bigg)^{\frac{1}{q}} + (b-x)^2\Bigg(\left|f'(b)\right|^q\int_0^1 \frac{(1-t)}{(tb+(1-t)x)^{2q}}dt$$

$$+\left|f'(x)\right|^q\int_0^1 \frac{t}{(tb+(1-t)x)^{2q}}dt - c\left(\frac{b-x}{bx}\right)^2\int_0^1 \frac{t(1-t)}{(tb+(1-t)x)^{2q}}dt\Bigg)^{\frac{1}{q}}\Bigg\}$$

$$\le \frac{ab}{b-a}\left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\Big\{(x-a)^2\Big(\lambda_1(a,x,q,0)\left|f'(a)\right|^q + \lambda_2(a,x,q,0)\left|f'(x)\right|^q$$

$$-c\left(\frac{a-x}{ax}\right)^2\lambda_3(a,x,q,0)\Bigg)^{\frac{1}{q}}+(b-x)^2\Big(\lambda_4(b,x,q,0)\left|f'(b)\right|^q$$

$$\left.+\lambda_5(b,x,q,0)\left|f'(x)\right|^q-c\left(\frac{b-x}{bx}\right)^2\lambda_6(b,x,q,0)\Bigg)^{\frac{1}{q}}\right\}$$

elde edilir ve böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 4.5.5 Teorem 4.5.5'in şartlarına ek olarak, eğer tüm $x\in[a,b]$ için $\left|f'(x)\right|\le M$ seçilirse aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$\left|f(x)-\frac{ab}{b-a}\int_a^b\frac{f(u)}{u^2}du\right|$$

$$\le\frac{ab}{b-a}M\left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left\{(x-a)^2\left(\lambda_1(a,x,q,0)+\lambda_2(a,x,q,0)-c\left(\frac{a-x}{ax}\right)^2\lambda_3(a,x,q,0)\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left.+(b-x)^2\left(\lambda_4(b,x,q,0)+\lambda_5(b,x,q,0)-c\left(\frac{b-x}{bx}\right)^2\lambda_6(b,x,q,0)\right)^{\frac{1}{q}}\right\}.$$

Teorem 4.5.6 $f:I\subset\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ fonksiyonu I^0 da diferansiyellenebilir fonksiyon, $a,b\in I$, $a<b$ ve $f'\in L[a,b]$ olsun. Eğer $q>1$ ve $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ için $\left|f'\right|^q$, $[a,b]$ de $c>0$ modülüne göre güçlü harmonik konveks fonksiyon ise, tüm $x\in[a,b]$ için

$$\left|f(x)-\frac{ab}{b-a}\int_a^b\frac{f(u)}{u^2}du\right|$$

$$\le\frac{ab}{b-a}\left(\lambda_2(a,x,p,p)\right)^{\frac{1}{p}}\left\{(x-a)^2\left(\frac{\left|f'(a)\right|^q+\left|f'(x)\right|^q}{2}-\frac{c}{6}\left(\frac{a-x}{ax}\right)^2\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$+\left(b-x\right)^2\left(\lambda_5\left(b,x,p,p\right)\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{\left|f'(b)\right|^q+\left|f'(x)\right|^q}{2}-\frac{c}{6}\left(\frac{b-x}{bx}\right)^2\right)^{\frac{1}{q}}\Bigg\}$$

eşitsizliği vardır. Burada λ_2,λ_5 Teorem 4.5.1 de tanımlanmıştır.

İspat. Lemma 3.2.1'ye, Hölder eşitsizliğini ve $\left|f'\right|^q$ 'nün $c>0$ modülüne göre güçlü harmonik konveksliğini uygulayarak,

$$\left|f(x)-\frac{ab}{b-a}\int_a^b\frac{f(u)}{u^2}du\right|$$

$$\leq\frac{ab\left(x-a\right)^2}{b-a}\left(\int_0^1\frac{t^p}{\left(ta+(1-t)x\right)^{2p}}dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1\left[(1-t)\left|f'(a)\right|^q+t\left|f'(x)\right|^q\right.\right.$$

$$\left.\left.-ct(1-t)\left(\frac{a-x}{ax}\right)^2\right]dt\right)^{\frac{1}{q}}+\frac{ab\left(b-x\right)^2}{b-a}\left(\int_0^1\frac{t^p}{\left(tb+(1-t)x\right)^{2p}}dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\left(\int_0^1\left[(1-t)\left|f'(b)\right|^q+t\left|f'(x)\right|^q-ct(1-t)\left(\frac{b-x}{bx}\right)^2\right]dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

elde edilir. Mevcut integraller hesaplanırsa,

$$\int_0^1\frac{t^p}{\left(ta+(1-t)x\right)^{2p}}dt=\frac{\beta(p+1,1)}{x^{2p}}\,{}_2F_1\left(2p,p+1;p+2;1-\frac{a}{x}\right),$$

$$\int_0^1\frac{t^p}{\left(tb+(1-t)x\right)^{2p}}dt=\frac{\beta(1,p+1)}{x^{2p}}\,{}_2F_1\left(2p,p+1;p+2;1-\frac{b}{x}\right)$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 4.5.6 Teorem 4.5.6'nın şartlarına ek olarak, eğer tüm $x \in [a,b]$ için $|f'(x)| \le M$ seçilirse,

$$\left| f(x) - \frac{ab}{b-a} \int_a^b \frac{f(u)}{u^2} du \right| \le \frac{ab}{b-a} M \left\{ \left(\lambda_2 (a,x,p,p) \right)^{\frac{1}{p}} (x-a)^2 \left(-\frac{c}{6} \left(\frac{a-x}{ax} \right)^2 \right)^{\frac{1}{q}} \right.$$

$$\left. + (b-x)^2 \left(\lambda_5 (b,x,p,p) \right)^{\frac{1}{p}} \left(-\frac{c}{6} \left(\frac{b-x}{bx} \right)^2 \right)^{\frac{1}{q}} \right\}$$

eşitsizliği elde edilir.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tez çalışmasında, literatürde konveks ve güçlü konveks fonksiyon sınıfları için Hermite-Hadamard ve Ostrowski integral eşitsizlikleri ile ilgili olarak verilen lemmalar farklı türden güçlü konveks fonksiyonlar için verilmiştir. Verilen bu lemmalar kullanılarak ve power mean eşitsizliği, Hölder eşitsizliği gibi bilinen eşitsizliklerden yararlanılarak farklı türden güçlü konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard tipli ve Ostrowski tipli farklı intergal eşitsizlikleri elde edilmiştir.

Bu tezde ele alınan fonksiyon çeşitleri, strongly $M_{\varphi}A$-konveks fonksiyon, güçlü GA-konveks fonksiyon, güçlü p-konveks fonksiyon ve güçlü harmonik konveks fonksiyon olarak belirlenmiştir.

Bu konu ile ilgilenen araştırmacılar bu tezde verilen farklı türden güçlü konveks fonksiyon tanımlarını kullanarak ve verilen lemmalardan yararlanarak farklı konveks fonksiyon sınıfları için yeni integral eşitsizlikleri elde edebilirler.

6. KAYNAKLAR

Alomari, M., & Darus, M. (2009). On the Hadamard's inequality for log-convex functions on the coordinates. *Journal of Inequalities and Applications*, doi:10.1155/2009/283147.

Alomari, M., Darus, M., Dragomir, S. S., & Cerone, P. (2010). Ostrowski's inequalities for functions whose derivatives are s-convex in the second sense. *Applied Mathematics Letters*, 23, 1071-1076.

Angulo, H., Gimenez, J., Moros, A. M., & Nikodem, K. (2011). On strongly h-convex functions. *Annals of Functional Analysis*, 2(2), 85-91.

Anton, H. (1994). Elementary Linear Algebra. John Wily & Sons. Inc, New York, USA.

Azocar, A., Gimenez, J., Nikodem, K., & Sanchez, J. L. (2011). On strongly midconvex functions. *Opuscula Mathematica*, 31(1).

Azpeitia, A. G. (1994). Convex functions and Hadamard inequality. *Revista Colombiana De Matematicas*, 28, 7-12.

Baloch, I. A., & İşcan, İ. (2015). Some Ostrowski type inequalities for harmonically (s,m)-convex functions in the second sense. *Hindawi Publishing Corporation International Journal of Analysis*, http://dx.doi.org/10.1155/2015/672675 .

Bayraktar, M. (1987). Fonksiyonel analiz. Atatürk Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Yayınları, Erzurum, 177s.

Beckenbach, E. F., & Bellman, R. (1961). An introduction to inequalities. III. by Carl Bass. Random House.

Beckmann, M., & Künzi, H. P. (1978). Convex analysis and mathematical economics. *Springer Verlag*, 145pp.

Bekar, N. O., Akdemir, H. G., & İşcan, İ. (2014). On strongly GA-convex functions and stochastic processes. *AIP Conference Proceedings*, 1611(1), 363.

Bessenyei, M. (2010). The Hermite-Hadamard inequality in Beckenbach's setting. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 364, 366-383.

Bracamonte, M., Gimenez, J., & Medina, J. (2016). Hermite-Hadamard and Fejer type inequalities for strongly harmonically convex functions. *Revista Del Programa De Matematicas*, 3(2), 33-46.

Bracamonte, M., Gimenez, J., & Medina, J. (2017). Ostrowski and Simpson type inequalities for strongly reciprocally convex functions. *Applied Mathematics and Information Science*, 11(5), 1279-1285.

Bullen, P. S., Mitrinovic, D. S., & Vasic, P. M. (1998). Means and their inequalities. *Springer Science+Business Media, B. V.*

Cortez, M. V. (2016). Relative strongly h-convex functions and integral inequalities. *Applied Mathematics and Information Sciences Letters*, 4(2), 1-7.

Çoban, H. A., İşcan, İ. & Kunt, M. (2016). New Ostrowski type inequalities for GA-convex functions. *New Trends in Mathematical Sciences*, 4, 1-11.

Dragomir, S. S., & Pearce, C. E. M. (1991). Selected topics on Hermite-Hadamard inequalities and applications. *Melbourne and Adelaide, Victoria University, Australia.* https://rgmia.org/papers/monographs/Master.pdf

Dragomir, S. S., & Pearce, C. E. M. (1998). Quasi-convex functions and Hadamard's inequality. *Bull. Austral. Math. Soc.*, 57, 377-385.

Dragomir, S. S., Pecaric, J., & Persson, L. E. (1995). Some inequalities of Hadamard type. *Soochow Journal of Mathematics*, 21, 335-341.

Dragomir, S. S., & Themistocles, M. R. (2002). Ostrowski type inequalities and applications in numerical integration. Springer-Science+Business Media, 481pp.

Erdem, Y., Öğünmez, H., & Budak, H. (2016). Some generalized inequalities of Hermite-Hadamard type for strongly s-convex functions. *RGMIA Research Report Collection*, 19, Article 110.

Fang, Z. B., & Shi, R. (2014). On the (p,h)-convex function and some integral inequalities. *Journal of Inequalities and Applications*, 45(2014), 1-16.

Gao, X. (2010). A note on the Hermite-Hadamard inequality. *Journal of Mathematical Inequalities*, 4(4), 587-591.

Gill, P. M., Pearce, C. E. M., & Pecaric, J. (1997). Hadamard's inequality for r-convex functions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 215, 461-470.

Greenberg, H. J., & Pierskalla, W. P. (1970). A Review of quasi-convex functions. *Reprinted from Operations Research*, 19(7).

Hadamard, J. (1893). Etude sur les proprieties des fonctions entieres et en particulier d'une function consideree par Riemann. *J. Math. Pures Appl*, 58, 171-215.

Hardy, G., Littlewood, J. E., & Polya, G. (1934). Inequalities. Cambridge University Press, 327pp.

Hudzik, H., & Maligranda, L. (1994). Some remarks on s-konveks functions. *Aequationes Mathematicae*, 48, 100-111.

Ion, D. A. (2007). Some estimates on the Hermite-Hadamard inequality through quasi-convex functions. *Annals of University of Craiova, Math. Comp. Sci. Ser.*, 34, 82-87.

İşcan, İ. (2013). New general integral inequalities for quasi-geometrically convex functions via fractional integrals. *Journal of Inequalities and Applications*, 2013 (491).

İşcan, İ. (2013b). Ostrowski type inequalities for functions whose derivatives are preinvex. *Bull. Iranian Math. Soc.*,40(2), 373-386.

İşcan, İ. (2013c). Ostrowski type inequalities for harmonically s-convex functions. *Konuralp Journal of Mathematics*, 3(1), 63-74.

İşcan, İ. (2014). Hermite-Hadamard type inequalities for GA-s-convex functions. *Le Matematiche, LXIX-Fasc*, 129-146.

İşcan, İ. (2014). Hermite-Hadamard type inequalities for harmonically convex functions. *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 43(6), 935-942.

İşcan, İ. (2015). Ostrowski type inequalities for harmonically s-convex functions. *Konuralp Journal of Mathematics*, 3(1), 63-74.

İşcan, İ. (2016). Ostrowski type inequalities for p-convex functions. *New Trends in Mathematical Sciences*, 4(3), 140-150.

İşcan, İ. (2016). Hermite-Hadamard type inequalities for p-convex functions. *International Journal of Analysis and Applications*, 11(2), 137-145.

İşcan, İ., & Turhan, S. (2016). Generalized Hermite-Hadamard-Fejer type inequalities for GA-convex functions via fractional integral. *Moroccan J. Pure and Appl. Anal. (MJPAA)*, 2(1), 34-46.

İşcan, İ., Kunt, M., & Turhan, S. (2017). Some new type integral inequalities for p-convex functions. *AIP Conference Proceedings*, doi:10.1063/1.4981695.

İşcan, İ., Turhan, S., & Maden, S. (2017). Hermite-Hadamard and Simpson-like type inequalities for differentiable p-quasi-convex functions. *Filomat,* 31(19), 5945-5953.

Jeffrey, A., & Dai, H. H. (2008). Handbook of mathematical formulas and integrals. Elsevier Inc. 4. Edition, 589pp.

Kadakal, H., İşcan, İ., & Kadakal, M. (2017). New type integral inequalities for p-quasi-convex functions. *Ordu Üniv. J. Sci. Tech.,* 7(1), 124-130.

Klaricic Bakula, M., Özdemir, M. E., & Pecaric, J. (2008). Hadamard type inequalities for m-convex and (α,m)-convex functions. *Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics*, 9(3), 12pp.

Kolmogorov, A. N., & Fomin, S. V. (1975). Introductory real analysis. Dover Publications Inc., New York, USA, 392pp.

Kreyszig, E. (1989). Introductory functional analysis with applications. John Wiley & Sons., New York, USA, 703pp.

Kurdila, A. J., & Zabarankin, M. (2005). Convex functional analysis. Springer Science Business Media., New York, USA, 238pp.

Lara, T., Merentes, N., Rosales, E., &Valera, M. (2014). Some characterizations of strongly convex functions in inner product spaces. *Mathematica Aeterna*, 4(6), 651-657.

Latif, M. A., Dragomir, S. S., & Momoniat, E. (2015). Fejer type inequalities for harmonically-convex functions with applications to special means. http://rgmia.org/papers/v18/v18a24.pdf.

Latif, M. A., Dragomir, S. S., & Momoniat, E. (2015). Some Fejer type integral inequalities for geometrically-arithmetically-convex functions with applications. http://rgmia.org/papers/v18/v18a25.pdf.

Lupaş, A. (1976). A generalization of Hadamard inequalities for convex functions. *Univ. Beograd Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz*, 544(576), 115-121.

Maden, S., Demirel A. K., Turhan, S., & İşcan, İ. (2017). Some integral inequalities for the new convex functions. International Conference on Applied Analysis and Mathematical Modeling, 3-7 July, İstanbul, Turkey.

Merentes, N., & Nikodem, K. (2010). Remarks on strongly convex functions. Aequationes Mathematicae, 80(2010), 193-199.

Miheşan, V. G. (1993). A generalization of the convexity. *Seminar on Functional Equations, Approx. and Convx, Cluj-Nepoca*, Romania.

Mitrinovic, D. S. (1970). Analytic inequalities. Springer-Verlag, New York, USA, 416pp.

Mitrinovic, D. S., Pecaric, J. E., & Fink, A. M. (1991). Inequalities involving functions and their integrals and derivatives. *Mathematics and its Applications*, East Europan Series, 53, 601pp.

Mitrinovic, D. S., Pecaric, J. E., & Fink, A. M. (1993). Classical and New Inequalities in Analysis. Kluwer Academic Publishers, The Netherlands, 740pp.

Niculescu, C. P. (2000). Convexity according to the geometric mean. *Mathematical Inequalities and Applications*, 3(2), 155-167.

Niculescu, C. P. (2003). Convexity according to means. *Mathematical Inequalities and Applications*, 6(4), 571-579.

Niculescu, C. P., & Persson, L. E. (2006). Convex functions and their applications: A Contemporary Approach. Springer Science Business Media Inc., New York, USA, 269pp.

Nikodem, K., & Pales, Z. (2011). Characterizations of inner product spaces by strongly convex functions. *Banach Journal of Mathematical Analysis*, 5(1), 83-87.

Nikodem, K., Sanchez, J. L., & Sanchez, L. (2014). Jensen and Hermite-Hadamard inequalities for strongly convex set-valued maps. Mathematica Aeterna, 4(8), 979-987.

Noor, M. A., Noor, K. I., & Iftikhar, S. (2016). Hermite-Hadamard inequalities for strongly harmonic convex functions. *Journal of Inequalities and Special Functions*, 7(3), 99-113.

Ostrowski, A. (1938). Uber die Absolutabweichung einer differentienbaren Funktionen von ihren Integralmittelwert. *Comment. Math. Hel*, 10, 226-227.

Özdemir, M. E., Akdemir, A. O., & Set, E. (2011). On (h,m)-convexity and Hadamard type inequalities. *ArXiv:1103.6163v1[math.CA].*

Pachpatte, B. G. (2005). Mathematical inequalities. Elsevier, North-Holland Mathematical Library, 67, 591pp.

Pachpatte, B. G. (2012). Analytic inequalities. Atlantis Studies in Mathematics, Paris, France, 309pp.

Pavic,Z., & Avcı Ardıç, M. (2017). The most important inequalities of m-convex functions. *Turkish Journal of Mathematics*, 41, 625-635.

Pecaric, J. E., Proschan, F., & Tong, Y. L. (1992). Convex functions, partial orderings and statistical applications. Academic Press, Inc.,Bostan, 485pp.

Polyak, B. T. (1966). Existence theorems and convergence of minimizing sequences in extremum problems with restrictions. *Soviet Math. Dokl.*, 7, 72-75.

Roberts, A. W., & Varberg, D. E. (1973). Convex functions. Academic Press Inc., New York, USA, 321pp.

Rockafellar, R. T. (1972). Convex analysis. Princeton University Press, New Jersey, USA, 451pp.

Set, E., Özdemir, M. E., Sarıkaya, M. Z., & Akdemir, A. O. (2012). Ostrowski's type inequalities for strongly-convex functions. Georgian Mathematical Journal, 25(1), 109-115.

Shuang, Y., Yin, H. P., & Qi, F. (2013). Hermite-Hadamard type integral inequalities for geometric-aritmetically-s-convex functions. *Analysis R. Oldenbourg Verlag*, 33, 197-208.

Sun, Y. X., Wang, J. Y., & Guo, B. N. (2016). Some integral inequalities of the Hermite-Hadamard type for strongly quasi-convex functions. *Turkish Journal of Analysis and Number Theory*, 4(5), 132-134.

Toader, G. (1984). Some generalizations of the convexity. *Proceeding of the Colloquium on Approximation and Optimization*, 329-338.

Turhan, S., Okur, N., & Maden, S. (2016). Hermite-Hadamard type inequality for strongly convex functions via sugeno integrals. Sigma J. Eng. And Nat. Sci., 8(1), 1-10.

Turhan, S., İşcan, İ., & Kunt, M. (2017). Hermite-Hadamard type inequalities for $M_{\varphi}A$-convex functions. *ResearchGate*, doi:10.13140/RG.2.2.14526.28486.

Turhan, S., İşcan, İ., Maden, S., & Demirel, A.K. (2017). $M_{\varphi}A$-quasi-convexity and related some integral inequality. International Conference on Applied Analysis and Mathematical Modeling, 3-7 July, İstanbul, Turkey.

Varosanec, S. (2007). On h-convexity. *J. Math. Anal. Appl.*, 326, 303-311.

Zhang, K. S., & Wan, J. P. (2007). p-convex functions and their properties. *Pure Appl. Math.*, 23(1), 130-133.

Zhang, T. Y., Ji, A. P., & Qi, F. (2012). On integral inequalities of Hermite-Hadamard type for s-goemterically convex functions. *Hindawi Publishing Corporation Abstract and Applied Analysis*, doi:10.1155/2012/560586.

Zhang, T. Y., Ji, A. P., & Qi, F. (2014). Integral inequalities of Hermite-Hadamard type for harmonically quasi-convex functions. Proceedings of the Jangjeon Mathematical Society, 16(3), 399-407.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler	
Adı Soyadı	Ayşe Kübra DEMİREL
Doğum Yeri	VAN
Doğum Tarihi	01.05.1990
Uyruğu	☒ T.C. ❒ Diğer:
Telefon	
E-Posta Adresi	aysekubrademirel@gmail.com

Eğitim Bilgileri	
Lisans	
Üniversite	Yüzüncü Yıl Üniversitesi
Fakülte	Fen Fakültesi
Bölümü	Matematik
Mezuniyet Yılı	20.07.2012
Yüksek Lisans	
Üniversite	Yüzüncü Yıl Üniversitesi
Enstitü Adı	Fen Bilimleri Enstitüsü
Anabilim Dalı	İstatistik Anabilim Dalı
Mezuniyet Tarihi	15.01.2015

Yayınlar

Maden, S., Demirel, A. K., Turhan, S. and İşcan, İ., "Some integral inequalities for the new convex functions", Sigma Journal of Engineering and Natural Sciences, 9 (3) 305-312, (2018).

Turhan, S., Maden, S., Demirel, A. K. and İşcan, İ., "Hermite-Hadamard inequality for $M_{\varphi}A$ strongly convex functions", New Trends in Mathematical Sciences, 6 (4) 127-133, (2018).

Turhan, S., Demirel, A. K., Maden, S. and İşcan, İ., "Hermite-Hadamard type integral inequalities for strongly GA-convex functions", Turk. J. Math. Comput. Sci., 10, 178-183, (2018).

Turhan, S., Demirel, A. K., Maden, S. and İşcan, İ., "Hermite-Hadamard type integral inequalities for strongly p-convex functions", Turk. J. Math. Comput. Sci., 10, 184-189, (2018).