

**T.C.**  
**ORDU ÜNİVERSİTESİ**  
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**KUATERNİYONİK İNVOLÜT - EVOLÜT**  
**EĞRİLERİNE AİT FRENET ÇATISINA GÖRE**  
**SMARANDACHE EĞRİLERİ**

**CEYDA CEVAHİR**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**ORDU 2016**

## TEZ ONAY

Ordu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü öğrencisi Ceyda CEVAHİR tarafından hazırlanan ve Yrd. Doç. Dr. Süleyman ŞENYURT danışmanlığında yürütülen “Kuaterniyonik İnvolut-Evolüt Eğrilerine Ait Frenet Çatısına Göre Smarandache Eğrileri” adlı bu tez, jürimiz tarafından 23 / 12 / 2016 tarihinde oy birliği ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Yrd. Doç. Dr. Süleyman ŞENYURT

Başkan : Prof. Dr. Mustafa ÇALIŞKAN  
Matematik, Gazi Üniversitesi

İmza : 

Üye : Yrd. Doç. Dr. Seher ASLANCI  
Matematik, Ordu Üniversitesi

İmza : 

Üye : Yrd. Doç. Dr. Süleyman ŞENYURT  
Matematik, Ordu Üniversitesi

İmza : 

ONAY:

Bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulu'nun 29/12/2016..tarih ve 2016/565.sayılı kararı ile onaylanmıştır.

16/01/2017

Enstitü Müdürü

Prof. Dr. Kürşat KORKMAZ



## TEZ BİLDİRİMİ

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdığı yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.



Ceyda CEVAHİR

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirimlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

## ÖZET

### KUATERNİYONİK İNVLÜT – EVOLÜT EĞRİLERİNE AİT FRENET ÇATISININA GÖRE SMARANDACHE EĞRİLERİ

Ceyda CEVAHİR

Ordu Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü  
Matematik Anabilim Dalı, 2016  
Yüksek Lisans Tezi, 87s.

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Süleyman ŞENYURT

Bu çalışma altı bölüm halinde düzenlenmiştir. Giriş bölümünde çalışmanın amacı ve konunun ele alınma nedeni tartışıldı. Önceki çalışmalar bölümünde kuaterniyonlar ve Smarandache eğrileri ile ilgili çalışmalara yer verildi. Genel bilgiler bölümünde Öklid uzayı ile ilgili bilgilerden söz edilmiştir. Materyal ve yöntem bölümünde Öklid uzayında involüt-evolüt eğrileri ve Smarandache eğrileri ile ilgili temel kavramlar anlatılmıştır.

Bulgular Bölümü çalışmamızın orijinal kısmını oluşturmaktadır. Burada uzaysal kuaterniyonik involüt eğrisinden elde edilen Smarandache eğrilerinin Frenet vektörleri, eğrilikleri ve burulmaları uzaysal kuaterniyonik involüt eğrisine ait birim Darboux vektörü ile binormal vektörü arasındaki açığa bağlı olarak hesaplanmıştır. Elde edilen bulguların, evolüt eğrisinin Frenet aparatları cinsinden karşılıkları verilmiştir. Son olarak bir örnek verilerek oluşan yeni Smarandache eğrilerin şekilleri Mapple programında çizdirilmiştir.

**Anahtar kelimeler:** Kuaterniyonik involüt-evolüt eğrileri, Kuaterniyonik Smarandache eğrisi, Öklid uzayı.

## ABSTRACT

### SMARANDACHE CURVES OF QUATERNIONIC INVOLUTE - EVOLUTE CURVES ACCORDING TO FRENET FRAME

Ceyda CEVAHİR

University of Ordu  
Institute for Graduate Studies in Science and Technology  
Department of Mathematics, 2016  
MSc. Thesis, 87p.

Supervisor: Asst. Prof. Dr. Süleyman ŞENYURT

This study consist of six fundamental chapters. In the introduction chapter, the aim of study and the reasons why this subject is interested are given. The next chapter is covered with literature review of quaternion and Smarandache curve. In general formation chapter is included with some information about Euclidean space. The basic concepts of involute-evolute curves spatial quaternion curves on Euclidean space are given in the material and method chapter.

The findings chapter is the original part of the study. Here, Frenet vectors, curvatures and torsions quaternionic vector of Smarandache curves obtained from spatial quaternionic involute curve, are calculated depending on the angle between unit Darboux vector and binormal vector of the spatial quaternionic involute curve. The findings are given depending on Frenet apparatus of evolute curve. Finally, an example is given and shapes of these new Smarandache curves are drawn by using Mapple programme.

**Keywords:** Euclidean space, Quaternionic involute-evolute curves, Quaternionic Smarandache curves.

## TEŞEKKÜR

Tüm çalıőmalarım boyunca her zaman bilgi ve deneyimleriyle yolumu aan, maddi ve manevi olarak beni destekleyen emektar hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Süleyman ŞENYURT' a en içten duygularım ile Őukranlarımı sunarım.

Ayrıca, çalıőmalarım boyunca desteklerini esirgemeyen Matematik Bölümü hocalarıma en samimi duygularım ile teşekkür ederim.

Aynı zamanda, manevi desteklerini her an üzerimde hissettiğim annem, abim ve rahmetli babam Sedat CEVAHİR' e teŐekkürü bir borç bilirim.

## İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
<b>TEZ BİLDİRİMİ</b> .....	I
<b>ÖZET</b> .....	II
<b>ABSTRACT</b> .....	III
<b>TEŞEKKÜR</b> .....	IV
<b>İÇİNDEKİLER</b> .....	V
<b>ŞEKİLLER LİSTESİ</b> .....	VI
<b>SİMGELER ve KISALTMALAR</b> .....	VII
<b>1. GİRİŞ</b> .....	1
<b>2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR</b> .....	3
2.1. Genel Bilgiler.....	4
2.1.1. Öklid Uzayında Temel Kavramlar.....	4
2.1.2. Kuaterniyonlar (Dörtlü Grup, Dördey).....	8
<b>3. MATERYAL ve YÖNTEM</b> .....	15
3.1. 3-Boyutlu Öklid Uzayında İnvolut-Evolüt Eğrileri.....	15
3.2. Uzaysal Kuaterniyonik İnvolut-Evolüt Eğrileri.....	16
3.3. 3-Boyutlu Öklid Uzayında Frenet Çatısına Göre Smarandache Eğrileri.....	22
3.4. 3-Boyutlu Öklid Uzayında Frenet Çatısına Göre Uzaysal Kuaterniyonik Smarandache Eğrileri.....	29
<b>4. BULGULAR</b> .....	38
4.1. $t^* n_1^*$ - Smarandache Eğrisi.....	38
4.2. $n_1^* n_2^*$ - Smarandache Eğrisi.....	45
4.3. $t^* n_2^*$ - Smarandache Eğrisi.....	52
4.4. $t^* n_1^* n_2^*$ - Smarandache Eğrisi.....	59
4.5. $n_1^* w^*$ - Smarandache Eğrisi.....	68
<b>5. SONUÇ ve ÖNERİLER</b> .....	82
<b>6. KAYNAKLAR</b> .....	84
<b>ÖZGEÇMİŞ</b> .....	86

## ŞEKİLLER LİSTESİ

<u>Şekil No</u>		<u>Sayfa</u>
Şekil 3.1.1	Darboux vektörü.....	8
Şekil 3.2.1	Uzaysal kuaterniyonik involüt-evolüt eğrileri.....	16
Şekil 3.2.2	Kuaterniyonik Darboux vektörü.....	20
Şekil 4.1.	$\alpha$ uzaysal kuaterniyonik eğrisine ait $\alpha^*$ involüt eğrisi.....	80
Şekil 4.2.	$\alpha^*$ uzaysal kuaterniyonik eğrisinin Smarandache eğrileri.....	81



## SİMGELER ve KISALTMALAR

$\beta_1$	:	$t^* n_1^*$ - uzaysal kuaterniyonik Smarandache eğrisi
$\beta_2$	:	$n_1^* n_2^*$ - uzaysal kuaterniyonik Smarandache eğrisi
$\beta_3$	:	$t^* n_2^*$ - uzaysal kuaterniyonik Smarandache eğrisi
$\beta_4$	:	$t^* n_1^* n_2^*$ - uzaysal kuaterniyonik Smarandache eğrisi
$\beta_5$	:	$n_1^* w^*$ - uzaysal kuaterniyonik Smarandache eğrisi
$C$	:	Birim Darboux vektörü
$D$	:	Kuaterniyonik Darboux vektörü
$E^3$	:	3- boyutlu Öklid uzayı
$\kappa(s)$	:	Bir eğrinin eğriliği
$k(s)$	:	Uzaysal kuaterniyonik bir eğrinin eğriliği
$N( )$	:	Kuaterniyonik Norm
$r(s)$	:	Uzaysal kuaterniyonik bir eğrinin burulması
$\tau(s)$	:	Bir eğrinin burulması
$\mathbb{Q}_H$	:	Uzaysal kuaterniyon
$W$	:	Darboux vektörü
$w$	:	Kuaterniyonik birim Darboux vektörü
$\  \ $	:	Norm
$\langle \rangle$	:	Öklid iç çarpımı
$\langle \rangle_{\mathbb{Q}}$	:	Kuaterniyonik iç çarpım
$\times$	:	Kuaterniyonik çarpım
$\wedge$	:	Vektörel çarpım
$\{ t(s), n(s), b(s) \}$	:	Öklid Frenet 3- ayaklısı
$\{ t(s), n_1(s), n_2(s) \}$	:	Uzaysal kuaterniyonik Frenet 3-ayaklısı

## 1. GİRİŞ

Kuaterniyon (dördey, dördübir) kavramı ilk kez İrlandalı matematikçi *William Rowan Hamilton* tarafından 1843 yılında  $a + be_1$ ,  $e_1^2 = -1$ , şeklinde verilen kompleks sayıların  $d + ae_1 + be_2 + ce_3 = (d + ae_1) + (b + ce_1)e_2$ ,  $e_1 \times e_2 = e_3$ , biçiminde genelleştirmesiyle ortaya çıkmıştır. Her bir kuaterniyona  $\{+1, e_1, e_2, e_3\}$  gibi dört birim eşlik etmektedir. Kuaterniyonlar günümüzde molekül yapılarının incelenmesinde, DNA ve protein yapılarında, göz hareketinin tanımlanmasında hidrodinamik, elastik, astronomi ve optikteki uygulamalarına kadar pek çok alanda kullanılmaktadır. Bharathi ve Nagaraj, (1987), uzaysal kuaterniyon kavramını tanımlamışlar ve bu kavram yardımıyla bir eğrinin Serret-Frenet formüllerini hesaplamışlardır. Karadağ ve Sivridağ, (1997), kuaterniyonik eğrilerin eğilim çizgisi ve harmonik eğriliğini vermişlerdir. Turgut ve Yılmaz, (2008), Smarandache eğrisi üzerinde çalışmışlardır. Ali, (2010), Öklid uzayında bazı özel Smarandache eğrilerine ait karakterizasyonları incelemiştir. Soyfidan, (2011),  $E^3$  ve  $E^4$  Öklid uzaylarında kuaterniyonik involüt-evolüt eğrilerinin Frenet elemanlarını hesaplamıştır. Çetin ve Kocayığıt, (2013),  $E^3$  de kuaterniyonik Smarandache eğrilerini elde etmişlerdir. Benzer bir düşünceyle Parlaticı, (2013), Bishop çatıları esas alınarak kuaterniyonik ve uzaysal kuaterniyonik eğrilerin Smarandache eğrilerine ait bazı karakterizasyonlar vermiştir. Daha sonra Tuna ve Çöken, (2014), yarı Öklid uzaylarında kuaterniyonik eğrilerin Serret-Frenet formülleri, eğilim çizgileri ve harmonik eğriliklerine ait bazı karakterizasyonları vermişlerdir. Erişir ve Güngör, (2014), Yarı Öklid uzayında kuaterniyonik eğrilerin Smarandache eğrilerini incelemişlerdir. Son olarak Şenyurt ve Çalışkan, (2015), konum vektörü olarak aslinormal vektörü ile birim Darboux vektörünün oluşturduğu uzaysal kuaterniyonik Smarandache eğrisinin eğriliklerini hesaplamışlardır.

Bu tezde  $\alpha$  uzaysal kuaterniyonik eğrisine ait  $\alpha^*$  kuaterniyonik involüt eğrisinin  $t^*, n_1^*, n_2^*$  Frenet vektörleri ile  $w^*$  birim Darboux vektörü konum vektörü olarak alındığında bu vektörler tarafından oluşturulan

$$\beta_1 = \beta_{t^* n_1^*}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(t^* + n_1^*) t^* n_1^* - \text{kuaterniyonik Smarandache eğrisi,}$$

$$\beta_2 = \beta_{n_1^* n_2^*}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(n_1^* + n_2^*) n_1^* n_2^* - \text{kuaterniyonik Smarandache eğrisi,}$$

$$\beta_3 = \beta_{t^* n_2^*}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(t^* + n_2^*) t^* n_2^* - \text{kuaterniyonik Smarandache eğrisi,}$$

$$\beta_4 = \beta_{t^* n_1^* n_2^*}(s) = \frac{1}{\sqrt{3}}(t^* + n_1^* + n_2^*) t^* n_1^* n_2^* - \text{kuaterniyonik Smarandache eğrisi,}$$

$$\beta_5 = \beta_{n_1^* w^*}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(n_1^* + w^*) n_1^* w^* - \text{kuaterniyonik Smarandache eğrisi,}$$

Smarandache eğrilerinin eğrilikleri ve torsiyonları hesaplandı. Bulunan sonuçlar evolüt eğrisinin eğriliklerine bağlı ifadeleri verildi.

## 2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Karadağ ve Sivridağ, (1997), “*Tek Değişkenli Kuaterniyon Değerli Fonksiyon ve Eğilim Çizgileri*” adlı çalışmada  $\mathbb{R}^3$  ve  $\mathbb{R}^4$  deki kuaterniyonik eğrilerin eğilim çizgisi olması için bazı karakterizasyonlar vermişlerdir.

Demir ve Özdaş, (2005), “*Reel Kuaterniyonlarla Serret-Frenet Formülleri*” isimli çalışmada reel kuaterniyonların genel tanımı yapıldıktan sonra Serret-Frenet formülleri arasındaki bağıntılar incelemiştir.

Ünal, (2011), “*Kuaterniyonlar ve Kuaterniyon Matrisleri*” isimli yüksek lisans tezinde kuaterniyonların matris gösterimleri ve kuaterniyon matrislerinin özelliklerini araştırmıştır.

Soyfidan, (2011), “*Kuaterniyonik İvolüt-Evolüt Eğri Çiftleri*” isimli yüksek lisans tezinde kuaterniyonik involüt-evolüt eğrilerinin Frenet çatısına göre Frenet elemanlarını hesaplamıştır.

Çetin ve Kocayığit, (2013), “*On the Quaternionic Smarandache Curves in Euclidean 3-Space*” adlı makalede bir uzaysal kuaterniyonik eğriye ait Smarandache eğrilerinin Frenet aparatları bulmuşlardır.

Parlaticı, (2013), “*Kuaterniyonik Smarandache Eğrileri*” yüksek lisans tezinde Bishop çatısına göre kuaterniyonik eğriler için Smarandache eğrileri üzerine çalışmıştır.

Sivas, (2014), “*İvolüt- Evolüt Eğrilerine Ait Frenet Çatısına Göre Smarandache Eğrileri*” isimli yüksek lisans tezinde Frenet vektörlerinden elde edilen Smarandache eğrilerinin bazı özellikleri incelemiştir.

Şenyurt ve Çalışkan, (2015), “*An Application According to Spatial Quaternionic Smarandache Curve*” isimli çalışmada uzaysal kuaterniyonik eğrinin Frenet çatısına göre Darboux vektörü bulunmuş ve normal vektör ile birim Darboux vektörünün oluşturduğu Smarandache eğrisinin eğrilik ve burulması hesaplamışlardır.

## 2.1. Genel Bilgiler

Bu bölümde  $E^3$ , 3 boyutlu reel Öklid uzayında temel kavramlara yer verilmiştir.

### 2.1.1. Öklid Uzayında Temel Kavramlar

**Tanım 2.1.1:**  $A$  boş olmayan bir cümle,  $V$  de  $\mathfrak{F}$  cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun.  $f: A \times A \rightarrow V$  fonksiyonu aşağıdaki aksiyomları sağlarsa  $A$  ya  $V$  ile birleştirilmiş bir afin uzay denir.

$$A_1: \forall P, Q, R \in A \text{ için } f(P, Q) + f(Q, R) = f(P, R),$$

$$A_2: \forall P \in A, \forall \alpha \in V \text{ için } f(P, Q) = \alpha$$

olacak şekilde bir tek  $Q \in A$  noktası vardır (Hacısalihoglu, 2000).

**Tanım 2.1.2:**  $V$ ,  $A$  ile birleşen bir afin uzay olsun.

$$\langle, \rangle: V \times V \rightarrow IR$$

fonksiyonu aşağıdaki aksiyomları sağlarsa bu fonksiyona bir iç çarpım fonksiyonu denir:  $\forall x, y, z \in V$  için

i) Bilineerlik Aksiyomu;

$$\langle ax + by, z \rangle = a\langle x, z \rangle + b\langle y, z \rangle,$$

$$\langle x, ay + bz \rangle = a\langle x, y \rangle + b\langle x, z \rangle,$$

ii) Simetri Aksiyomu;

$$\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle,$$

iii) Pozitif Tanımlılık (kararlılık) Aksiyomu;

$$\langle x, x \rangle \geq 0, \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = \vec{0} \text{ (Hacısalihoglu, 2000).}$$

**Tanım 2.1.3:** Reel standart afin uzayı  $IR^n$  olmak üzere,  $\forall X, Y \in IR^n$  için

$$\langle, \rangle: IR^n \times IR^n \rightarrow IR, \langle X, Y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i \quad (2.1.1)$$

şeklinde tanımlı fonksiyon bir iç çarpım fonksiyonudur. Bu iç çarpıma  $IR^n$  de standart iç çarpım veya Öklid iç çarpım denir. Standart iç çarpımın tanımlı olduğu

$\mathbb{R}^n$  vektör uzayı ile birleşen afin uzayına  $n$ -boyutlu standart Öklid uzayı denir ve  $E^n$  ile gösterilir (Hacısalıhoğlu, 2000).

**Tanım 2.1.4:**  $E^n$ ,  $n$  – boyutlu Öklid uzayında farklı üç nokta  $X, Y, Z$  olsun.  $XY$  ile  $XZ$  vektörleri arasındaki  $\theta \in \mathbb{R}$  açısı,  $0 \leq \theta \leq \pi$  olmak üzere,

$$\cos \theta = \frac{\langle XY, XZ \rangle}{\|XY\| \|XZ\|} \quad (2.1.2)$$

dır (O’neill, 1966).

**Tanım 2.1.5:**  $d : E^n \times E^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $d(X, Y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - x_i)^2}$  şeklinde tanımlanan  $d$  fonksiyonuna  $E^n$  Öklid uzayında uzaklık fonksiyonu ve  $d(X, Y) \in \mathbb{R}$  sayısına da  $X$  ile  $Y$  noktaları arasındaki uzaklık denir (Hacısalıhoğlu, 2000).

**Tanım 2.1.6:**  $I \subset \mathbb{R}$  bir açık aralık ve

$$\begin{aligned} \alpha : I &\rightarrow E^n \\ t &\rightarrow \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \dots, \alpha_n(t)) \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

diferensiyellenebilir fonksiyona  $E^n$  de bir eğri denir. Burada  $I$  aralığına  $\alpha$  eğrisinin parametre aralığı ve  $t \in I$  değişkenine de  $\alpha$  eğrisinin parametresi denir (Hacısalıhoğlu, 2000).

**Tanım 2.1.7:**  $\alpha : I \rightarrow E^n$  diferensiyellenebilir bir eğri olsun.

$$\alpha'(t) = \left. \frac{d\alpha}{dt} \right|_t = \left( \left. \frac{d\alpha_1(t)}{dt}, \frac{d\alpha_2(t)}{dt}, \dots, \frac{d\alpha_n(t)}{dt} \right) \right|_t \quad (2.1.4)$$

vektörüne de  $\alpha$  eğrisinin hız vektörü,  $\|\alpha'(t)\| = 1$  ise eğriye birim hızlı eğri denir. Bu durumda  $t \in I$  parametresine de eğrinin yay parametresi denir. Genellikle yay parametresi  $s$  ile gösterilir (Hacısalıhoğlu, 2000).

**Tanım 2.1.8:**  $\alpha : I \rightarrow E^n$  bir eğri ve  $a, b \in I$  için

$$s = \int_a^b \|\alpha'(t)\| ds \quad (2.1.5)$$

reel sayısına  $\alpha(a)$  ile  $\alpha(b)$  noktaları arasındaki yay uzunluğu denir (Hacısalihoglu, 2000).

**Tanım 2.1.9:**  $\alpha : I \rightarrow E^3$  diferansiyellenebilir bir eğri olsun.  $\{\alpha', \alpha'', \alpha'''\}$  lineer bağımsız cümlesinden Gram Schmidt ortogonalleştirme yöntemi ile elde edilen  $\{t(s), n(s), b(s)\}$  ortonormal sistemine  $\alpha$  eğrisinin  $\alpha(s)$  noktasındaki Serret Frenet 3-ayaklısı denir (Hacısalihoglu, 2000).

**Teorem 2.1.1:**  $\alpha : I \rightarrow E^3$  eğrisinin  $\alpha(s)$  noktasındaki Frenet 3-ayaklısı;

1)  $s \in I$  yay parametresi ise

$$\begin{cases} t(s) = \alpha'(s) \\ n(s) = \frac{1}{\|\alpha''(s)\|} \alpha''(s) \\ b(s) = t(s) \times n(s) \end{cases} \quad (2.1.6)$$

2)  $s \in I$  yay parametresi değilse

$$\begin{cases} t(s) = \frac{1}{\|\alpha'(s)\|} \alpha'(s) \\ n(s) = b(s) \times t(s) \\ b(s) = \frac{1}{\|\alpha'(s) \times \alpha''(s)\|} (\alpha'(s) \times \alpha''(s)) \end{cases} \quad (2.1.7)$$

şeklinde verilir (Hacısalihoglu, 2000).

**Tanım 2.1.10:**  $\alpha : I \rightarrow E^3$  eğrisinin Frenet 3-ayaklısı  $\{t(s), n(s), b(s)\}$  olsun.

$$\begin{cases} \kappa(s) = \langle t'(s), n(s) \rangle \\ \tau(s) = \langle n'(s), b(s) \rangle \end{cases} \quad (2.1.8)$$

şeklinde tanımlı  $\kappa$ ,  $\tau$  fonksiyonlarına sırasıyla  $\alpha$  eğrisinin eğrilik ve torsiyonu (burulma) denir (Hacısalihoglu, 2000).

**Teorem 2.1.2:**  $\alpha : I \rightarrow E^3$  eğrisinin  $\alpha(s)$  noktasındaki eğrilik ve torsiyonu sırasıyla

$$\begin{cases} \kappa(s) = \frac{\| \alpha'(s) \wedge \alpha''(s) \|}{\| \alpha'(s) \|^3} \\ \tau(s) = \frac{\langle \alpha'(s) \wedge \alpha''(s), \alpha'''(s) \rangle}{\| \alpha'(s) \wedge \alpha''(s) \|^2} \end{cases} \quad (2.1.9)$$

şeklinde verilir (Sabuncuoğlu, 2004).

**Teorem 2.1.3:**  $\alpha : I \rightarrow E^3$  eğrisinin Frenet 3-ayaklısı  $\alpha$  eğrisinin  $\alpha(s)$  noktasındaki Frenet 3-ayaklısı  $\{ t, n, b \}$  ile gösterilsin. Bu durumda Frenet formülleri

a)  $s \in I$  yay parametresi ise

$$\begin{cases} t'(s) = \kappa(s)n(s) \\ n'(s) = -\kappa(s)t(s) + \tau(s)b(s) \\ b'(s) = -\tau(s)n(s), \end{cases} \quad (2.1.10)$$

b)  $s \in I$  yay parametresi değilse

$$\begin{cases} t'(s) = \| \alpha'(s) \| \kappa(s)n(s) \\ n'(s) = \| \alpha'(s) \| (-\kappa(s)t(s) + \tau(s)b(s)) \\ b'(s) = -\| \alpha'(s) \| \tau(s)n(s) \end{cases} \quad (2.1.11)$$

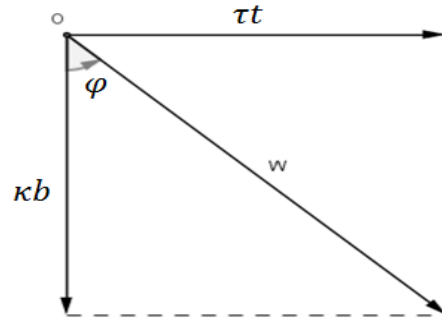
şeklinde verilir (Sabuncuoğlu, 2004).

Bir  $\alpha$  eğrisi üzerinde  $\{ t, n, b \}$  Frenet 3-ayaklısı her  $s$  anında, (bir eksen etrafında) ani bir helis hareketi yaptığı kabul edilir ve bu eksene eğrinin  $\alpha(s)$  noktasındaki Darboux (ani dönme) eksenini denir. Bu eksenin yön ve doğrultusunu veren vektör,

$$W = n \wedge n', \quad W = \tau t + \kappa b \quad (2.1.12)$$

şeklinde olur ve bu vektöre Darboux vektörü adı verilir ( Şekil 3.1 ).





Şekil 3.1.1. Darboux vektörü

$W$  ile  $b$  vektörleri arasındaki açı  $\varphi$  ile gösterilirse şekilden,

$$\sin \varphi = \frac{\tau}{\|W\|}, \quad \cos \varphi = \frac{\kappa}{\|W\|} \quad (2.1.13)$$

yazılır.  $W$  Darboux vektörü yönündeki birim vektör  $C$  ile gösterilirse

$$C = \sin \varphi t + \cos \varphi b \quad (2.1.14)$$

şeklinde bulunur (Fenchell, 1951).

### 2.2.2. Kuaterniyonlar ( Dörtlü Grup, Dördey )

Bu bölümde kuaterniyonlar ve uzaysal kuaterniyonik eğrilerle ilgili çalışmamıza esas olan tanımlar ve teoremler verilmiştir.

**Tanım 2.2.1:** Bir reel kuaterniyon  $q = d + ae_1 + be_2 + ce_3$ ,  $d, a, b, c \in \mathbb{R}$  şeklindedir.

Burada

$$i) \quad e_1 \times e_1 = e_2 \times e_2 = e_3 \times e_3 = -1,$$

$$e_1 \times e_2 = e_3 = -e_2 \times e_1$$

$$ii) \quad e_2 \times e_3 = e_1 = -e_3 \times e_2$$

$$e_3 \times e_1 = e_2 = -e_1 \times e_3$$

×	+1	$e_1$	$e_2$	$e_3$
+1	+1	$e_1$	$e_2$	$e_3$
$e_1$	$e_1$	-1	$e_3$	$-e_2$
$e_2$	$e_2$	$-e_3$	-1	$e_1$
$e_3$	$e_3$	$e_2$	$-e_1$	-1

şeklindedir. Reel kuaterniyonların cümlesi

$$\mathbb{Q} = \left\{ q \mid q = d + ae_1 + be_2 + ce_3, d, a, b, c \in \mathbb{R}, e_1, e_2, e_3 \in \mathbb{R}^3 \right\} \text{ şeklinde gösterilir.}$$

Bir  $q$  kuaterniyonu

$$S_q = d, \quad V_q = ae_1 + be_2 + ce_3$$

olmak üzere

$$q = S_q + V_q \quad (2.2.1)$$

şeklinde yazılabilir. Burada  $S_q$  ya skaler kısım ve  $V_q$  ya da vektörel kısım denir (Hacısalıhoğlu, 1983).

**Tanım 2.2.2:**  $q_1 = S_{q_1} + V_{q_1}$  ve  $q_2 = S_{q_2} + V_{q_2}$  kuaterniyonun toplamı, farkı, skaler ile çarpımı ve eşitliği işlemi sırasıyla

$$q_1 \oplus q_2 = S_{q_1+q_2} + V_{q_1 \oplus q_2}, \quad (2.2.2)$$

$$q_1 - q_2 = S_{q_1-q_2} + V_{q_1-q_2}, \quad (2.2.3)$$

$$\lambda \odot q = \lambda q = \lambda S_q + \lambda V_q, \quad (2.2.4)$$

$$q_1 = q_2 \Leftrightarrow S_{q_1} = S_{q_2} \text{ ve } V_{q_1} = V_{q_2} \quad (2.2.5)$$

şeklinde tanımlanır. Bu durumda  $\{ \mathbb{Q}, \oplus, \mathbb{R}, +, \cdot, \odot \} = \mathbb{Q}$  cümlesi bir uzay yapısına ulaşır ki bu uzaya reel kuaterniyonların uzayı denir (Hacısalıhoğlu, 1983).

**Tanım 2.2.3:**  $q_1 = d_1 + a_1e_1 + b_1e_2 + c_1e_3$  ve  $q_2 = d_2 + a_2e_1 + b_2e_2 + c_2e_3$  iki kuaterniyonun kuaterniyon çarpımı,

$$\begin{aligned} q_1 \times q_2 &= (d_1 + a_1e_1 + b_1e_2 + c_1e_3) \times (d_2 + a_2e_1 + b_2e_2 + c_2e_3) \\ &= d_1d_2 - (a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2) + (d_1a_2 + a_1d_2 + b_1c_2 - c_1b_2)e_1 \\ &\quad + (d_1b_2 + b_1d_2 + c_1a_2 - a_1c_2)e_2 + (d_1c_2 + c_1d_2 + a_1b_2 - b_1a_2)e_3 \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. Öklid'deki iç çarpım ve vektörel çarpım dikkate alındığında bu çarpım

$$q_1 \times q_2 = S_{q_1} S_{q_2} - \langle V_{q_1}, V_{q_2} \rangle + S_{q_1} V_{q_2} + S_{q_2} V_{q_1} + V_{q_1} \wedge V_{q_2} \quad (2.2.6)$$

şekline dönüşür (Hacısalıhoğlu, 1983).

**Tanım 2.2.4:**  $q = S_q + V_q \in \mathbb{Q}$  reel kuterniyonunun eşleniği

$$\begin{aligned} \bar{\cdot} : \mathbb{Q} &\rightarrow \mathbb{Q} \\ q &\rightarrow \bar{q} = S_q - V_q \end{aligned} \quad (2.2.7)$$

şeklinde tanımlanır.

Buna göre q kuaterniyonu ile eşleniğinin çarpımı

$$\begin{aligned} q \times \bar{q} &= (d + ae_1 + be_2 + ce_3) \times (d - ae_1 - be_2 - ce_3) \\ &= d^2 + a^2 + b^2 + c^2 \end{aligned} \quad (2.2.8)$$

olur (Hacısalıhoğlu, 1983).

**Tanım 2.2.5:**  $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$  reel kuaterniyonları için

$$\begin{aligned} \langle \cdot \rangle_{\mathbb{Q}} : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (q_1, q_2) &\rightarrow \langle q_1, q_2 \rangle_{\mathbb{Q}} = \frac{1}{2} (q_1 \times \bar{q}_2 + q_2 \times \bar{q}_1) \end{aligned} \quad (2.2.9)$$

şeklinde tanımlı reel değerli, simetrik, bilineer fonksiyona kuaterniyonik iç çarpım fonksiyonu denir (Bharathi ve Nagaraj, 1987).

**Tanım 2.2.6:**  $q_1$  ve  $q_2 \in \mathbb{Q}$  kuaterniyonları için  $\langle q, q \rangle_{\mathbb{Q}} = 0$  ise  $q_1$  ile  $q_2$  kuaterniyonuna ortogonaldır denir (Hacısalihoglu, 1983).

**Tanım 2.2.7:** Bir  $q \in \mathbb{Q}$  kuaterniyonunun normu

$$[N(q)]^2 = \langle q, q \rangle_{\mathbb{Q}} = q \times \bar{q} = d^2 + a^2 + b^2 + c^2 \quad (2.2.10)$$

şeklinde bir reel sayıdır (Bharathi ve Nagaraj, 1987).

**Tanım 2.2.8:** Bir  $q \in \mathbb{Q}$  kuaterniyonunun tersi

$$\begin{aligned} (\ )^{-1} : \mathbb{Q} - \{0\} &\rightarrow \mathbb{Q} - \{0\} \\ q &\rightarrow q^{-1} = \frac{\bar{q}}{N(q)} \end{aligned} \quad (2.2.11)$$

şeklinde bir kuaterniyondur (Hacısalihoglu, 1983).

**Tanım 2.2.9:**  $q_2 \neq 0$  olmak üzere,  $q_1$  in  $q_2$  kuaterniyonuna bölümü

$$r_1 = q_1 \times q_2^{-1}, \quad r_2 = q_2^{-1} \times q_1 \quad (2.2.12)$$

şeklinde tanımlı iki farklı kuaterniyondur. Burada  $r_1$  kuaterniyonuna  $q_1$  kuaterniyonunun  $q_2$  kuaterniyonu ile sağdan bölümü,  $r_2$  kuaterniyonuna da  $q_1$  kuaterniyonunun  $q_2$  kuaterniyonu ile soldan bölümü denir (Hacısalihoglu, 2000).

**Tanım 2.2.10:** Normu bir birim olan kuaterniyona birim kuaterniyon denir ve  $q_0$  ile gösterilir. Bu tanıma göre  $q_0$  birim kuaterniyonu,

$$q_0 = \frac{q}{N(q)} = \frac{d + ae_1 + be_2 + ce_3}{\sqrt{d^2 + a^2 + b^2 + c^2}} \quad (2.2.13)$$

şeklinde yazılır.

Diğer yandan  $q_0$  birim kuaterniyonu

$$q_0 = \frac{d}{\sqrt{d^2 + a^2 + b^2 + c^2}} + \frac{ae_1 + be_2 + ce_3}{\sqrt{d^2 + a^2 + b^2 + c^2}} \cdot \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{\sqrt{d^2 + a^2 + b^2 + c^2}} \quad (2.2.14)$$

şeklinde de yazılabilir. Burada

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos w = \frac{d}{\sqrt{d^2 + a^2 + b^2 + c^2}}, \\ \sin w = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{\sqrt{d^2 + a^2 + b^2 + c^2}}, \\ S_0 = \frac{ae_1 + be_2 + ce_3}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \end{array} \right. \quad (2.2.15)$$

alınırsa  $q_0$  kuaterniyonu

$$q_0 = \cos w + S_0 \sin w \quad (2.2.16)$$

olur.  $S_0$  birim vektörüne  $q_0$  birim kuaterniyonunun ekseni denir (Hacısalihoglu, 1983).

**Tanım 2.2.11:**  $\mathbb{Q}_H = \{ q \in \mathbb{Q} \mid q + \bar{q} = 0 \}$  cümlesine uzaysal kuaterniyonlar cümlesi, bu cümlenin her bir elemanına da uzaysal kuaterniyon adı verilir.

Herhangi bir  $q = d + ae_1 + be_2 + ce_3$  kuaterniyonu için

$$\begin{aligned} q + \bar{q} = 0 &\Rightarrow (d + ae_1 + be_2 + ce_3) + (d - ae_1 - be_2 - ce_3) = 0 \\ &\Rightarrow 2d = 0 \\ &\Rightarrow d = 0 \end{aligned}$$

bulunur. Bu durumda  $\mathbb{Q}_H$  uzaysal kuaterniyonun her bir elemanı

$$q = ae_1 + be_2 + ce_3 \quad (2.2.17)$$

şeklinde bir başka kuaterniyon olur. Bunun bir sonucu olarak iki uzaysal kuaterniyonun kuaterniyon çarpımı (3.2.6) bağıntısından

$$q_1 \times q_2 = -\langle q_1, q_2 \rangle + q_1 \wedge q_2 \quad (2.2.18)$$

dır (Hacısalihoglu, 1983).

$$\text{Tanım 2.2.12: } \gamma : [0,1] \rightarrow \mathbb{Q}_H, \quad \gamma(s) = \sum_{i=1}^3 \gamma_i(s) e_i \quad (2.2.19)$$

şeklinde tanımlanan eğriye uzaysal kuaterniyonik eğri denir (Bharathi ve Nagaraj, 1987).

$\gamma : [0,1] \rightarrow \mathbb{Q}_H$  eğrisinin teğet vektörleri  $t(s)$ , aslinormal vektörü  $n_1(s)$  ve binormal vektörü  $n_2(s)$  ile gösterilirse şu teorem verilebilir:

**Teorem 2.2.1:**  $\gamma : [0,1] \rightarrow \mathbb{Q}_H$  uzaysal kuaterniyonik eğrisinin Frenet vektörleri

$$\begin{cases} t(s) = \gamma'(s) \\ n_1(s) = \frac{\gamma''(s)}{N(\gamma''(s))} \\ n_2(s) = t(s) \times n_1(s) \end{cases} \quad (2.2.20)$$

şeklinde hesaplanır. Bu vektörler arasında

$$\begin{cases} t(s) \times t(s) = n_1(s) \times n_1(s) = n_2(s) \times n_2(s) = -1 \\ t(s) \times n_1(s) = n_2(s) = -n_1(s) \times t(s) \\ n_1(s) \times n_2(s) = t(s) = -n_2(s) \times n_1(s) \\ n_2(s) \times t(s) = n_1(s) = -t(s) \times n_2(s) \end{cases} \quad (2.2.21)$$

olacak şekilde bir bağıntı vardır (Karadağ ve Sivridağ, 1997).

**Teorem 2.2.2:**  $\gamma : [0,1] \rightarrow \mathbb{Q}_H$  uzaysal kuaterniyonik eğrisi keyfi parametre ile verilirse Frenet vektörleri

$$\begin{cases} t(s) = \frac{\gamma'(s)}{v(s)}, \quad v(s) = N(\gamma'(s)) \\ n_1(s) = n_2(s) \times t(s) \\ n_2(s) = \frac{\gamma'(s) \cdot \gamma''(s) + v(s) \cdot v'(s)}{N(\gamma'(s) \cdot \gamma''(s) + v(s) \cdot v'(s))} \end{cases} \quad (2.2.22)$$

bağıntısı ile verilir (Soyfidan, 2011).

**Teorem 2.2.3:**  $\gamma : [0,1] \rightarrow \mathbb{Q}_H$  uzaysal kuaterniyonik eğrisinin  $k(s)$  eğriliği ve  $r(s)$  burulması(torsiyonu) sırasıyla,

$$\begin{cases} k(s) = \frac{N(\gamma'(s) \cdot \gamma''(s) + \nu(s) \cdot \nu'(s))}{\nu^3(s)}, & \nu(s) = N(\gamma'(s)) \\ r(s) = \frac{\langle \gamma'(s) \cdot \gamma''(s), \gamma'''(s) \rangle_{\mathbb{Q}}}{N(\gamma'(s) \cdot \gamma''(s) + \nu(s) \cdot \nu'(s))^2} \end{cases} \quad (2.2.23)$$

şeklinde verilir (Soyfidan, 2011).

**Teorem 2.2.4:**  $\gamma : [0,1] \rightarrow \mathbb{Q}_H$  uzaysal kuaterniyonik eğrisinin  $\{t(s), n_1(s), n_2(s)\}$  Frenet vektörleri ile bunların türev vektörleri arasında

$$\begin{cases} t'(s) = k(s)n_1(s) \\ n_1'(s) = -k(s)t(s) + r(s)n_2(s) \\ n_2'(s) = -r(s)n_1(s) \end{cases} \quad (2.2.24)$$

bağıntısı vardır (Tuna, 2002).

### 3. MATERYAL ve YÖNTEM

Bu bölümde involüt-evolüt eğrileri, uzaysal kuaterniyonik involüt-evolüt eğrileri, Smarandache eğrileri ve uzaysal kuaterniyonik Smarandache eğrileri hakkında kısaca bilgiler verilmiştir.

#### 3.1. 3- Boyutlu Öklid Uzayında İvolüt-Evolüt Eğrileri

**Tanım 3.1.1:** Birim hızlı  $\alpha : I \rightarrow E^3$  eğrisi ve  $\alpha^* : I \rightarrow E^3$  eğrisi verilsin.  $\alpha$  eğrisinin  $\alpha(s)$  noktasındaki teğet vektörü  $\alpha^*(s)$  noktasından geçiyor ve bu noktadaki teğete dik oluyor ise  $\alpha(s)$  eğrisine evolüt,  $\alpha^*(s)$  eğrisine de  $\alpha(s)$  eğrisinin involütü denir (Sabuncuoğlu, 2004).

**Teorem 3.1.1:**  $\alpha^*$  eğrisi  $\alpha$  eğrisinin bir involütü olsun. Bu eğriler arasında

$$\alpha^*(s) = \alpha(s) + (c-s)t(s), \quad c \in \mathbb{R} \quad (3.1.1)$$

bağıntısı vardır (Sabuncuoğlu, 2004).

**Teorem 3.1.2:**  $\alpha^* : I \rightarrow E^3$  eğrisi  $\alpha : I \rightarrow E^3$  eğrisinin bir involütü, Frenet çatıları sırasıyla  $\{t, n, b\}$  ve  $\{t^*, n^*, b^*\}$  ile gösterilirse bu çatılar arasında

$$\begin{cases} t^*(s) = n(s) \\ n^*(s) = -\frac{\kappa(s)}{\sqrt{\kappa^2(s) + \tau^2(s)}}t(s) + \frac{\tau(s)}{\sqrt{\kappa^2(s) + \tau^2(s)}}b(s) \\ b^*(s) = \frac{\tau(s)}{\sqrt{\kappa^2(s) + \tau^2(s)}}t(s) + \frac{\kappa(s)}{\sqrt{\kappa^2(s) + \tau^2(s)}}b(s) \end{cases} \quad (3.1.2)$$

bağıntısı vardır (Sabuncuoğlu, 2004).

**Teorem 3.1.3:**  $\alpha^* : I \rightarrow E^3$  eğrisi  $\alpha : I \rightarrow E^3$  eğrisinin bir involütü olsun.  $\alpha$  eğrisinin eğrilikleri  $\kappa$  ve  $\tau$ ,  $\alpha^*$  eğrisinin eğrilikleri  $\kappa^*$  ve  $\tau^*$  ise bu eğrilikler arasında

$$\begin{cases} \kappa^*(s) = \frac{\sqrt{(\kappa^2 + \tau^2)}(s)}{(c-s)\kappa(s)} \\ \tau^*(s) = \frac{(\kappa\tau' - \kappa'\tau)(s)}{(c-s)\kappa(\kappa^2 + \tau^2)(s)} \end{cases} \quad (3.1.3)$$



bağıntısı vardır (Sabuncuoğlu, 2004).

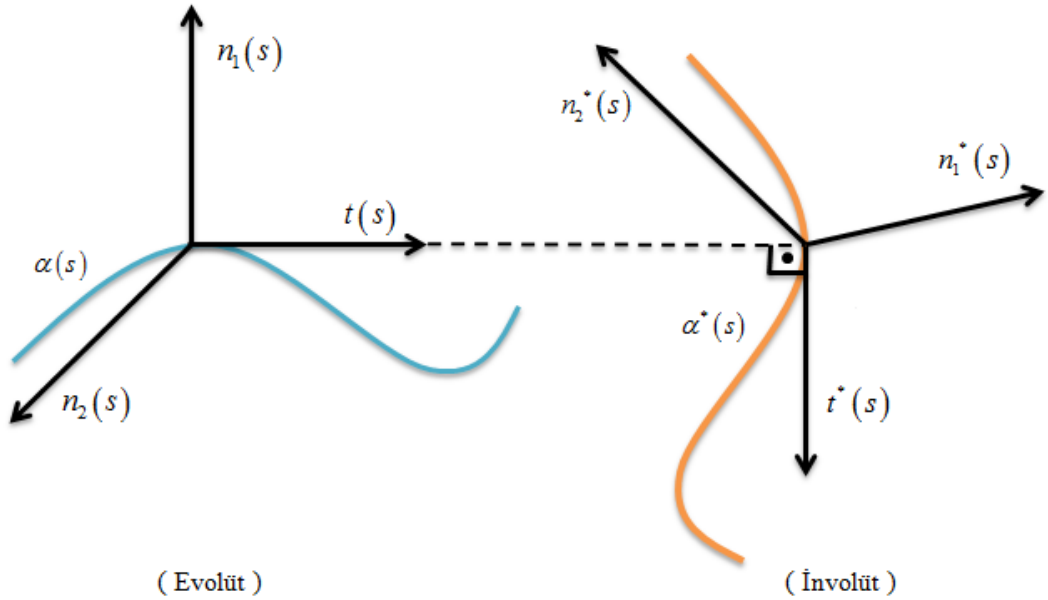
**Teorem 3.1.4:**  $\alpha^* : I \rightarrow E^3$  eğrisi  $\alpha : I \rightarrow E^3$  eğrisinin involütü ve Frenet çatıları sırasıyla  $\{t^*, n^*, b^*\}$  ve  $\{t, n, b\}$  olsun.  $b$  binormal vektörü ile  $w$  Darboux vektörü arasındaki açı  $\varphi$  ile gösterilirse Frenet çatıları arasında

$$\begin{cases} t^*(s^*) = n(s) \\ n^*(s^*) = -\cos \varphi t(s) + \sin \varphi b(s) \\ b^*(s^*) = \sin \varphi t(s) + \cos \varphi b(s) \end{cases} \quad (3.1.4)$$

bağıntısı vardır (Bilici, 1999).

### 3.2. Uzaysal Kuaterniyonik İvolüt-Evolüt Eğrileri

**Tanım 3.2.1:** Birim hızlı  $\alpha : [0,1] \rightarrow \mathbb{Q}_H$  eğrisi ve  $\alpha^* : [0,1] \rightarrow \mathbb{Q}_H$  uzaysal kuaterniyonik eğrisi verilsin.  $\alpha$  eğrisinin  $\alpha(s)$  noktasındaki teğet vektörü  $\alpha^*(s)$  noktasından geçiyor ve bu noktadaki teğete dik oluyor ise  $\alpha(s)$  uzaysal kuaterniyonik eğrisine evolüt,  $\alpha^*(s)$  eğrisine de  $\alpha(s)$  eğrisinin uzaysal kuaterniyonik involütü denir (Şekil 3.2.1).



**Şekil 3.2.1.** Uzaysal kuaterniyonik involüt-evolüt eğrisi

**Teorem 3.2.1:**  $\alpha^* : [0,1] \rightarrow \mathbb{Q}_H$  eğrisi  $\alpha : [0,1] \rightarrow \mathbb{Q}_H$  uzaysal kuaterniyonik eğrisinin bir involütü olsun. Bu eğriler arasında

$$\alpha^*(s) = \alpha(s) + (c-s)t(s), \quad c \in \mathbb{R} \quad (3.2.1)$$

bağıntısı vardır (Soyfidan, 2011).

**İspat:** İnvolut eğri tanımından  $\alpha^*(s) = \alpha(s) + \lambda(s)t(s)$  şeklinde yazılır. Türev alınır

$$\frac{d\alpha}{ds^*} \frac{ds^*}{ds} = (1 + \lambda'(s))t(s) + \lambda(s)k(s)n_1(s)$$

olur.  $\alpha^*$  eğrisi  $\alpha$  eğrisinin bir involütü olduğundan

$$1 + \lambda'(s) = 0 \Rightarrow \lambda(s) = -s + c$$

bulunur.

**Teorem 3.2.2:**  $\alpha^* : [0,1] \rightarrow \mathbb{Q}_H$  eğrisi  $\alpha : [0,1] \rightarrow \mathbb{Q}_H$  uzaysal kuaterniyonik eğrisinin bir involütü olsun. Bu eğrilerin Frenet çatıları sırasıyla  $\{t^*, n_1^*, n_2^*\}$  ve  $\{t, n_1, n_2\}$  ile gösterilirse bu çatılar arasında

$$\begin{cases} t^*(s) = n_1(s) \\ n_1^*(s) = \frac{-k(s)}{\sqrt{k^2(s) + r^2(s)}} t(s) + \frac{r(s)}{\sqrt{k^2(s) + r^2(s)}} n_2(s) \\ n_2^*(s) = \frac{r(s)}{\sqrt{k^2(s) + r^2(s)}} t(s) + \frac{k(s)}{\sqrt{k^2(s) + r^2(s)}} n_2(s) \end{cases} \quad (3.2.2)$$

bağıntısı vardır (Soyfidan, 2011).

**İspat:**  $\alpha^*(s) = \alpha(s) + (c-s)t(s)$  bağıntısından türev alınır

$$\frac{d\alpha^*}{ds^*} \frac{ds^*}{ds} = t(s) - t(s) + (c-s)k(s)n_1(s)$$

veya

$$t^* \frac{ds^*}{ds} = (c-s)k(s)n_1(s)$$

olur. Buradan norm alınır

$$N(t^*(s)) \frac{ds^*}{ds} = (c-s)k(s)N(n_1(s)),$$

$$\frac{ds^*}{ds} = (c-s)k(s)$$

bulunur. Bu ifade yukarıda yerine yazılırsa

$$t^*(s) = n_1(s) \quad (3.2.3)$$

olur. Bu ifadenin tekrar türevi alınır

$$\frac{dt^*}{ds} \frac{ds^*}{ds} = \frac{dn_1(s)}{ds} \frac{ds^*}{ds},$$

$$k^*(s)n_1^*(s) = \frac{dn_1(s)}{ds} \frac{1}{(c-s)k(s)},$$

$$k^*(s)n_1^*(s) = (-k(s)t(s) + r(s)n_2(s)) \frac{1}{(c-s)k(s)} \quad (3.2.4)$$

olur. Her iki taraf kuaterniyonik olarak iç çarpılırsa  $k^*$  eğriliği

$$\langle k^*(s)n_1^*(s), k^*(s)n_1^*(s) \rangle_{\mathbb{Q}} = \left\langle \frac{-k(s)t(s) + r(s)n_2(s)}{(c-s)k(s)}, \frac{-k(s)t(s) + r(s)n_2(s)}{(c-s)k(s)} \right\rangle_{\mathbb{Q}}$$

$$(k^*(s))^2 = \frac{k^2(s) + r^2(s)}{k^2(s)(c-s)^2}$$

veya

$$k(s)(k^*(s)) = \frac{\sqrt{k^2(s) + r^2(s)}}{(c-s)} \quad (3.2.5)$$

bulunur. Bu ifade (3.2.4) denkleminde yerine yazılırsa  $n_1^*(s)$  normal vektörü

$$n_1^*(s) = \frac{-k(s)t(s) + r(s)n_2(s)}{(c-s)k(s)k^*(s)}$$

veya (3.2.5) bağıntısından

$$n_1^*(s) = \frac{-k(s)}{\sqrt{k^2(s) + r^2(s)}} t(s) + \frac{r(s)}{\sqrt{k^2(s) + r^2(s)}} n_2(s) \quad (3.2.6)$$

şeklinde elde edilir.  $n_2^*(s) = t^*(s) \times n_1^*(s)$  olduğundan  $n_2^*(s)$  binormal vektörü

$$n_2^*(s) = n_1(s) \times \frac{-k(s)t(s) + r(s)n_2(s)}{\sqrt{k^2(s) + r^2(s)}},$$

$$n_2^*(s) = \frac{r(s)}{\sqrt{k^2(s) + r^2(s)}} t(s) + \frac{k(s)}{\sqrt{k^2(s) + r^2(s)}} n_2(s) \quad (3.2.7)$$

olur.

**Teorem 3.2.3:**  $\alpha^* : [0,1] \rightarrow \mathbb{Q}_H$  eğrisi  $\alpha : [0,1] \rightarrow \mathbb{Q}_H$  uzaysal kuaterniyonik eğrisinin bir involütü olsun.  $\alpha^*$  eğrisinin eğrilikleri  $k^*(s)$  ve  $r^*(s)$ , ve  $\alpha$  eğrisinin eğrilikleri  $k(s)$  ve  $r(s)$  ise bu eğrilikler arasında

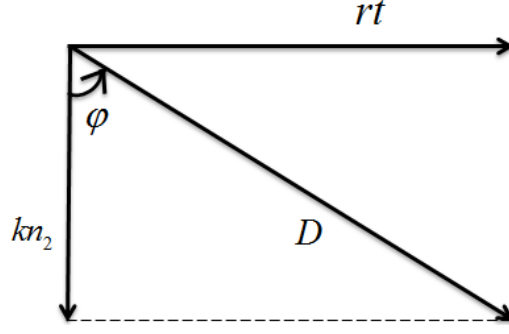
$$k^*(s) = \frac{\sqrt{k^2(s) + r^2(s)}}{|(c-s)k(s)|}, \quad r^*(s) = \frac{\left(\frac{r(s)}{k(s)}\right)' k(s)}{|(c-s)|(k^2(s) + r^2(s))} \quad (3.2.8)$$

bağıntıları vardır (Soyfidan, 2011).

**Tanım 3.2.2:**  $\alpha : [0,1] \rightarrow \mathbb{Q}_H$  uzaysal kuaterniyonik eğrisinin  $\{t(s), n_1(s), n_2(s)\}$  Frenet çatısına ait Darboux vektörü

$$D = r.t + k.n_2 \quad (3.2.9)$$

şeklinde verilir.  $D$  ile  $n_2$  arasındaki açı  $\varphi$  ile gösterilirse Şekil 3.2.2 den



Şekil 3.2.2. Kuaterniyonik Darboux vektörü

$$\begin{cases} \cos \varphi = \frac{\langle D, kn_2 \rangle|_{\mathbb{Q}}}{N(D)N(kn_2)} = \frac{(D \times \overline{kn_2} + kn_2 \times \overline{D})}{2k\sqrt{k^2 + r^2}} = \frac{k}{\sqrt{k^2 + r^2}} \\ \sin \varphi = \frac{\langle D, rt \rangle|_{\mathbb{Q}}}{N(D)N(rt)} = \frac{(D \times \overline{rt} + rt \times \overline{D})}{2r\sqrt{k^2 + r^2}} = \frac{r}{\sqrt{k^2 + r^2}} \end{cases} \quad (3.2.10)$$

olur ve bu durumda  $w$  birim Darboux vektörü

$$w = \sin \varphi t + \cos \varphi n_2 \quad (3.2.11)$$

şeklinde yazılır (Şenyurt ve Çalışkan, 2015).

**Sonuç 3.2.1:**  $\alpha^* : I \rightarrow \mathbb{Q}_H$  eğrisi  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{Q}_H$  eğrisinin involütü, Frenet çatıları da sırasıyla  $\{t, n_1, n_2\}$  ve  $\{t^*, n_1^*, n_2^*\}$  olsun. Bu çatılar arasında aşağıdaki bağıntı vardır.

$$\begin{cases} t^*(s^*) = n_1(s) \\ n_1^*(s^*) = -\cos \varphi t(s) + \sin \varphi n_2(s) \\ n_2^*(s^*) = \sin \varphi t(s) + \cos \varphi n_2(s). \end{cases} \quad (3.2.12)$$

**Sonuç 3.2.2:**  $\alpha^* : I \rightarrow \mathbb{Q}_H$  eğrisi  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{Q}_H$  eğrisinin involütü olsun.  $\alpha$  eğrisinin eğrilik ve torsiyonu sırasıyla  $k$  ve  $r$ ,  $\alpha^*$  eğrisinin eğrilik ve torsiyonu sırasıyla  $k^*$  ve  $r^*$  ile gösterilsin.  $n_2$  aslinormal vektörü ile  $D$  kuaterniyonik Darboux vektörü arasındaki açı  $\varphi$  ile gösterilirse  $k^*$  ve  $r^*$  eğrilikleri arasında

$$k^*(s) = \frac{\sec \varphi}{|c-s|}, \quad r^*(s) = \frac{\varphi'}{|c-s|k(s)} \quad (3.2.13)$$

şeklinde verilir.

**Teorem 3.2.4:**  $\alpha^* : I \rightarrow \mathbb{Q}_H$  eğrisi  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{Q}_H$  eğrisinin involütü ve Darboux vektörleri sırasıyla  $D$  ve  $D^*$  ile gösterilirse bu vektörler arasında

$$D^* = \frac{1}{k(c-s)}(D + \varphi'n_1) \quad (3.2.14)$$

bağıntısı vardır.

**İspat:** (3.2.9) bağıntısına benzer olarak  $D^*$  vektörü

$$D^* = r^* t^* + k^* n_2^*$$

şeklinde yazılır. Burada  $t^*, n_2^*, k^*$  ve  $r^*$  yerine (3.2.12) ve (3.2.13)'den karşılıkları yazılırsa

$$D^* = \frac{\varphi'}{(c-s)k} n_1 + \frac{\sec \varphi}{(c-s)} (\sin \varphi t + \cos \varphi n_2)$$

veya

$$D^* = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi (c-s)} t + \frac{\varphi'}{(c-s)k} n_1 + \frac{1}{(c-s)} n_2$$

denklemini bulunur. Burada (3.2.10) dikkate alınır

$$D^* = \frac{\frac{r}{\sqrt{k^2 + r^2}}}{\frac{k}{\sqrt{k^2 + r^2}} (c-s)} t + \frac{\varphi'}{(c-s)k} n_1 + \frac{1}{(c-s)} n_2$$

veya

$$D^* = \frac{1}{k(c-s)} (rt + \varphi'n_1 + kn_2)$$

olur. Burada (3.2.9) bağıntısı yerine yazılırsa  $D^*$  Darboux vektörü

$$D^* = \frac{1}{k(c-s)} (D + \varphi'n_1)$$

şeklinde elde edilir.

**Teorem 3.2.5:**  $\alpha^* : I \rightarrow \mathbb{Q}_H$  eğrisi  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{Q}_H$  eğrisinin bir involütü, birim Darboux vektörleri de sırasıyla  $w$  ve  $w^*$  olsun. Bu Darboux vektörleri arasında

$$w^* = \frac{\varphi'}{\sqrt{\varphi'^2 + k^2 + r^2}} n_1 + \frac{\sqrt{k^2 + r^2}}{\sqrt{\varphi'^2 + k^2 + r^2}} w \quad (3.2.15)$$

bağıntısı vardır.

**İspat:**  $n_2$  binormal vektörü ile  $w^*$  Darboux vektörü arasındaki açı  $\varphi^*$  olmak üzere (3.2.11) bağıntısından

$$w^* = \sin \varphi^* t^* + \cos \varphi^* n_2^* \quad (3.2.16)$$

yazılır. Burada

$$\sin \varphi^* = \frac{r^*}{N(D)}, \quad \cos \varphi^* = \frac{k^*}{N(D)} \quad (3.2.17)$$

veya (3.2.13) ve (3.2.14) bağıntılarından

$$\sin \varphi^* = \frac{\varphi'}{\sqrt{\varphi'^2 + k^2 + r^2}}, \quad \cos \varphi^* = \frac{\sqrt{k^2 + r^2}}{\sqrt{\varphi'^2 + k^2 + r^2}} \quad (3.2.18)$$

bulunur. Bulunan bu ifade (3.2.16) da yerine yazılırsa

$$w^* = \frac{\varphi'}{\sqrt{\varphi'^2 + k^2 + r^2}} n_1 + \frac{\sqrt{k^2 + r^2}}{\sqrt{\varphi'^2 + k^2 + r^2}} w$$

elde edilir.

### 3.3. 3-Boyutlu Öklid Uzayında Frenet Çatısına Göre Smarandache Eğrileri

**Tanım 3.3.1:** Konum vektörü olarak herhangi bir eğrinin Frenet vektörleri alınarak elde edilen regüler eğriye Smarandache eğrisi denir (Turgut ve Yılmaz, 2008).

Bu tanım şu şekilde de verilebilir:

**Tanım 3.3.2:**  $\alpha : I \rightarrow E^3$  birim hızlı regüler eğrinin  $t, n, b$  Frenet vektörlerine sıkı sıkıya bağlı

$$\beta(s) = \frac{x(s)t(s) + y(s)n(s) + z(s)b(s)}{\sqrt{x(s)^2 + y(s)^2 + z(s)^2}} \quad (3.3.1)$$

vektörün çizdiği regüler eğriye Smarandache eğrisi denir (Şenyurt ve Sivas, 2013).

**Tanım 3.3.3:**  $\alpha : I \rightarrow E^3$  birim hızlı regüler eğrinin Frenet çatısı  $\{t, n, b\}$  olsun.  $m$  -Smarandache eğrisi

$$\beta_m(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(t + n) \quad (3.3.2)$$

şeklinde tanımlanır (Ali, 2010).

**Teorem 3.3.1:**  $\alpha : I \rightarrow E^3$  eğrisinin Frenet çatısı  $\{t, n, b\}$ , eğriliği  $\kappa$  ve torsiyonu  $\tau$  olsun.  $m$  - Smarandache eğrisinin Frenet vektörleri,  $\kappa_{\beta_m}$  eğriliği ile  $\tau_{\beta_m}$  torsiyonu sırasıyla,

$$\left\{ \begin{array}{l} t_{\beta_m}(s) = \frac{-\kappa}{\sqrt{2\kappa^2 + \tau^2}}t + \frac{\kappa}{\sqrt{2\kappa^2 + \tau^2}}n + \frac{\tau}{\sqrt{2\kappa^2 + \tau^2}}b \\ n_{\beta_m} = \frac{\chi_1}{\sqrt{\chi_1^2 + \upsilon_1^2 + \ell_1^2}}t + \frac{\upsilon_1}{\sqrt{\chi_1^2 + \upsilon_1^2 + \ell_1^2}}n + \frac{\ell_1}{\sqrt{\chi_1^2 + \upsilon_1^2 + \ell_1^2}}b \\ b_{\beta_m} = \frac{\kappa\ell_1 - \tau\upsilon_1}{\sqrt{(\chi_1^2 + \upsilon_1^2 + \ell_1^2)(2\kappa^2 + \tau^2)}}t + \frac{\kappa\ell_1 + \tau\chi_1}{\sqrt{(\chi_1^2 + \upsilon_1^2 + \ell_1^2)(2\kappa^2 + \tau^2)}}n \\ \quad + \frac{-\kappa\upsilon_1 - \kappa\chi_1}{\sqrt{(\chi_1^2 + \upsilon_1^2 + \ell_1^2)(2\kappa^2 + \tau^2)}}b \end{array} \right. \quad (3.3.3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \kappa_{\beta_m} = \sqrt{2} \frac{\sqrt{\chi_1^2 + \upsilon_1^2 + \ell_1^2}}{(2\kappa^2 + \tau^2)^2} \\ \tau_{\beta_m} = \sqrt{2} \frac{(\kappa^2 + \tau^2 - \kappa')(\kappa\bar{\ell}_1 + \tau\bar{\chi}_1) + (\kappa^2\tau + \kappa\tau')(\bar{\upsilon}_1 - \bar{\chi}_1) + (\kappa^2 + \kappa')(\kappa\bar{\ell}_1 - \tau\bar{\upsilon}_1)}{(\tau(2\kappa^2 + \tau^2) + \kappa\tau' - \kappa\tau')^2 + (\kappa'\tau - \kappa\tau')^2 + (2\kappa^3 + \kappa\tau^2)^2} \end{array} \right. \quad (3.3.4)$$

şeklinde verilir. Buradaki  $\chi_1, \upsilon_1, \ell_1, \bar{\chi}_1, \bar{\upsilon}_1$  ve  $\bar{\ell}_1$



$$\begin{cases} \chi_1 = -\kappa^2(2\kappa^2 + \tau^2) - \tau(\tau\kappa' - \kappa\tau') \\ \upsilon_1 = -\kappa^2(2\kappa^2 + 3\tau^2) - \tau(\tau^3 - \tau\kappa' + \kappa\tau') \\ \ell_1 = \kappa\tau(2\kappa^2 + \tau^2) - 2\kappa(\tau\kappa' - \kappa\tau') \\ \bar{\chi}_1 = \kappa^3 + \kappa(\tau^2 - 3\kappa') - \kappa'' \\ \bar{\upsilon}_1 = -\kappa^3 - \kappa(\tau^2 + 3\kappa') - 3\tau\tau' + \kappa'' \\ \bar{\ell}_1 = -\kappa^2\tau - \tau^3 + 2\tau\kappa' + \kappa\tau' + \tau'' \end{cases}$$

şeklinde birer katsayıdır (Ali, 2010).

**Tanım 3.3.4:**  $\alpha : I \rightarrow E^3$  birim hızlı regüler eğrinin Frenet çatısı  $\{t, n, b\}$  olsun.  $nb$  - Smarandache eğrisi

$$\beta_{nb}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(n + b) \quad (3.3.5)$$

şeklinde tanımlanır (Ali, 2010).

**Teorem 3.3.2:**  $\alpha : I \rightarrow E^3$  eğrisinin Frenet çatısı  $\{t, n, b\}$ , eğriliği  $\kappa$  ve torsiyonu  $\tau$  olsun.  $nb$  - Smarandache eğrisinin Frenet vektörleri,  $\kappa_{\beta_{nb}}$  eğriliği ile  $\tau_{\beta_{nb}}$  torsiyonu sırasıyla,

$$\begin{cases} t_{\beta_{nb}}(s) = \frac{-\kappa}{\sqrt{\kappa^2 + 2\tau^2}}t - \frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2 + 2\tau^2}}n + \frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2 + 2\tau^2}}b \\ n_{\beta_{nb}} = \frac{\chi_2}{\sqrt{\chi_2^2 + \upsilon_2^2 + \ell_2^2}}t + \frac{\upsilon_2}{\sqrt{\chi_2^2 + \upsilon_2^2 + \ell_2^2}}n + \frac{\ell_2}{\sqrt{\chi_2^2 + \upsilon_2^2 + \ell_2^2}}b \\ b_{\beta_{nb}} = \frac{-\tau(\ell_2 + \upsilon_2)}{\sqrt{(\kappa^2 + 2\tau^2)(\chi_2^2 + \upsilon_2^2 + \ell_2^2)}}t + \frac{\tau\chi_2 + \kappa\ell_2}{\sqrt{(\kappa^2 + 2\tau^2)(\chi_2^2 + \upsilon_2^2 + \ell_2^2)}}n \\ + \frac{-\kappa\upsilon_2 + \tau\chi_2}{\sqrt{(\kappa^2 + 2\tau^2)(\chi_2^2 + \upsilon_2^2 + \ell_2^2)}}b, \end{cases} \quad (3.3.6)$$

$$\begin{cases} \kappa_{\beta_{tb}} = \sqrt{2} \frac{\sqrt{\chi_2^2 + \upsilon_2^2 + \ell_2^2}}{(\kappa^2 + 2\tau^2)^2} \\ \tau_{\beta_{tb}} = \sqrt{2} \frac{2\tau^3 \bar{\chi}_2 + 2\tau^2 \kappa \bar{\ell}_2 + \tau \kappa^2 \bar{\chi}_2 + \kappa^3 \bar{\ell}_2 - \kappa' \tau \bar{\ell}_2 - \kappa' \tau \bar{\upsilon}_2 + \kappa \tau' \bar{\ell}_2 + \kappa \tau' \bar{\upsilon}_2}{[\tau(2\tau^2 + \kappa^2)]^2 + [-\kappa' \tau + \kappa \tau']^2 + [\kappa(\kappa^2 + 2\tau^2 + \tau') - \tau \kappa']^2} \end{cases} \quad (3.3.7)$$

şeklinde verilir. Buradaki  $\chi_2, \upsilon_2, \ell_2, \bar{\chi}_2, \bar{\upsilon}_2$  ve  $\bar{\ell}_2$

$$\begin{cases} \chi_2 = 2\tau^2(-\kappa' + \tau\kappa) + \kappa\tau(\kappa^2 + 2\tau') \\ \upsilon_2 = \kappa(-\kappa^3 - \tau'\kappa + \tau\kappa') - \tau^2(3\kappa^2 + 2\tau^2) \\ \ell_2 = \kappa^2(\tau' - \tau^2) - \tau(2\tau^3 + \kappa\kappa') \\ \bar{\chi}_2 = -\tau^3\kappa + \kappa^3 + \kappa'\tau + 2\kappa\tau' - \kappa'' \\ \bar{\upsilon}_2 = \tau^3 + \tau\kappa^2 - 3\kappa\kappa' + 3\tau^2\tau' - \tau'' \\ \bar{\ell}_2 = \tau^3 + \tau\kappa^2 - 3\tau\tau' - \tau\tau'' \end{cases}$$

şeklinde birer katsayıdır (Şenyurt ve Sivas, 2013).

**Tanım 3.3.5:**  $\alpha : I \rightarrow E^3$  birim hızlı regüler eğrinin Frenet çatası  $\{t, n, b\}$  olsun.  $tb$  -Smarandache eğrisi

$$\beta_{tb} = \frac{1}{\sqrt{2}}(t+b) \quad (3.3.8)$$

şeklinde tanımlanır (Sivas, 2014).

**Teorem 3.3.3:**  $\alpha : I \rightarrow E^3$  eğrisinin Frenet çatası  $\{t, n, b\}$ , eğriliği  $\kappa$  ve torsiyonu  $\tau$  olsun.  $tb$  - Smarandache eğrisinin Frenet vektörleri,  $\kappa_{\beta_{tb}}$  eğriliği ile  $\tau_{\beta_{tb}}$  torsiyonu sırasıyla,

$$\begin{cases} t_{\beta_{tb}}(s) = n \\ n_{\beta_{tb}} = \frac{-\kappa}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}t + \frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}b \\ b_{\beta_{tb}} = \frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}t + \frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}b \end{cases} \quad (3.3.9)$$

$$\begin{cases} \kappa_{\beta_{tb}} = \sqrt{2} \frac{\sqrt{(\kappa^2 + \tau^2)}}{\kappa - \tau} \\ \tau_{\beta_{tb}} = \sqrt{2} \frac{\kappa^3 \bar{\ell}_3 - 2\kappa^2 \tau \bar{\ell}_3 + \kappa^2 \tau \bar{\chi}_3 + \kappa \tau^2 \bar{\ell}_3 - 2\kappa \tau^2 \bar{\chi}_3 + \tau^3 \bar{\chi}_3}{[\tau(\kappa - \tau)^2]^2 + [\kappa(\kappa - \tau)^2]^2} \end{cases} \quad (3.3.10)$$

şeklinde verilir. Buradaki  $\bar{\chi}_3$ ,  $\bar{v}_3$  ve  $\bar{\ell}_3$

$$\begin{cases} \bar{\chi}_3 = -3\kappa\kappa' + 2\kappa\tau' + \kappa'\tau \\ \bar{v}_3 = \kappa^3 + \tau\kappa^2 - \kappa\tau^2 + \tau^3 + \kappa'' - \tau'' \\ \bar{\ell}_3 = \kappa\tau' + 2\kappa'\tau - 3\tau\tau' \end{cases}$$

şeklinde birer katsayıdır (Sivas, 2014).

**Tanım 3.3.6:**  $\alpha : I \rightarrow E^3$  birim hızlı regüler eğrinin Frenet çatsısı  $\{t, n, b\}$  olsun.

$mb$  - Smarandache eğrisi

$$\beta_{mb} = \frac{1}{\sqrt{3}}(t + n + b) \quad (3.3.11)$$

şeklinde tanımlanır (Ali, 2010).

**Teorem 3.3.4:**  $\alpha : I \rightarrow E^3$  eğrisinin Frenet çatsısı  $\{t, n, b\}$ , eğriliği  $\kappa$  ve torsiyonu  $\tau$

olsun.  $mb$  - Smarandache eğrisinin Frenet vektörleri,  $\kappa_{\beta_{mb}}$  eğriliği ve  $\tau_{\beta_{mb}}$  torsiyonu sırasıyla,

$$\begin{cases} t_{\beta_{mb}}(s) = \frac{-\kappa}{\sqrt{2(\kappa^2 + \tau^2 - \kappa\tau)}} t + \frac{\kappa - \tau}{\sqrt{2(\kappa^2 + \tau^2 - \kappa\tau)}} n + \frac{\tau}{\sqrt{2(\kappa^2 + \tau^2 - \kappa\tau)}} b \\ n_{\beta_{mb}} = \frac{\chi_4}{\sqrt{\chi_4^2 + v_4^2 + \ell_4^2}} t + \frac{v_4}{\sqrt{\chi_4^2 + v_4^2 + \ell_4^2}} n + \frac{\ell_4}{\sqrt{\chi_4^2 + v_4^2 + \ell_4^2}} b \\ b_{\beta_{mb}} = \frac{(\kappa - \tau)\ell_4 - \tau v_4}{\sqrt{(2\kappa^2 + 2\tau^2 - 2\kappa\tau)(\chi_4^2 + v_4^2 + \ell_4^2)}} t + \frac{\tau\chi_4 + \kappa\ell_4}{\sqrt{(2\kappa^2 + 2\tau^2 - 2\kappa\tau)(\chi_4^2 + v_4^2 + \ell_4^2)}} n \\ - \frac{\kappa v_4 + (\kappa - \tau)\chi_4}{\sqrt{(2\kappa^2 + 2\tau^2 - 2\kappa\tau)(\chi_4^2 + v_4^2 + \ell_4^2)}} b, \end{cases} \quad (3.3.12)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \kappa_{\beta_{mb}} = \frac{\sqrt{3} \sqrt{\chi_4^2 + \nu_4^2 + \ell_4^2}}{4 (\kappa^2 + \tau^2 - \kappa\tau)^2} \\ \tau_{\beta_{mb}} = \sqrt{3} \frac{2\kappa^3 \bar{\ell}_4 - 2\kappa^2 \tau \bar{\ell}_4 + 2\kappa^2 \tau \bar{\chi}_4 + 2\kappa \tau^2 \bar{\ell}_4 - 2\kappa \tau^2 \bar{\chi}_4 + 2\tau^3 \bar{\chi}_4 + \kappa \tau' \bar{\ell}_4 - \kappa' \tau \bar{\ell}_4 + \kappa \tau' \bar{\nu}_4 + \kappa \tau' - \kappa' \tau \bar{\nu}_4 - \kappa' \tau \bar{\chi}_4}{\left[ 2\kappa \tau (\kappa - \tau) + \kappa \tau' - \tau \kappa' + 2\tau^3 \right]^2 + \left[ \kappa \tau' - \tau \kappa' \right]^2 + \left[ 2\kappa^3 + \kappa \tau' + 2\kappa \tau^2 - 2\kappa^2 \tau - \kappa' \tau \right]^2} \end{array} \right. \quad (3.3.13)$$

şeklinde verilir. Buradaki  $\chi_4$ ,  $\nu_4$ ,  $\ell_4$ ,  $\bar{\chi}_4$ ,  $\bar{\nu}_4$  ve  $\bar{\ell}_4$

$$\left\{ \begin{array}{l} \chi_4 = \kappa^2 (-2\kappa^2 - 4\tau^2 + 4\tau\kappa - \kappa^2 \tau') + \kappa \tau (\kappa' + 2\tau^2 + 2\tau') - 2\kappa' \tau^2 \\ \nu_4 = \kappa^2 (-2\kappa^2 - 4\tau^2 + 2\kappa\tau - \tau') + \tau^2 (-2\tau^2 + 2\kappa\tau + \kappa') + \kappa \tau (\kappa' - \tau') \\ \ell_4 = 2\kappa^2 (\kappa\tau - 2\tau^2 + \tau') + \tau^2 (4\kappa\tau - 2\tau^2 + \kappa') - \kappa \tau (\tau' + 2\kappa') \\ \bar{\chi}_4 = \kappa' \tau - \kappa'' - 3\kappa\kappa' + 2\kappa\tau' + \kappa^3 + \kappa\tau^2 \\ \bar{\nu}_4 = \tau^3 - \kappa^3 - 3(\kappa\kappa' + \tau\tau') - (-\kappa'' + \tau'') + \kappa\tau (\kappa - \tau) \\ \bar{\ell}_4 = \tau'' - \kappa^2 \tau - 3\tau\tau' - \tau^3 + 2\tau\kappa' + \kappa\tau' \end{array} \right.$$

şeklinde birer katsayıdır (Şenyurt ve Sivas, 2013).

**Tanım 3.3.7:**  $\alpha : I \rightarrow E^3$  birim hızlı regüler eğrinin Frenet çatası  $\{t, n, b\}$  olsun.  $nC$  - Smarandache eğrisi

$$\beta_{nc} = \frac{1}{\sqrt{2}}(n + C) \quad (3.3.14)$$

şeklinde tanımlanır (Şenyurt ve Sivas, 2013).

**Teorem 3.3.5:**  $\alpha : I \rightarrow E^3$  eğrisinin Frenet çatası  $\{t, n, b\}$ , eğriliği  $\kappa$  ve torsiyonu  $\tau$  olsun.  $nC$  - Smarandache eğrisinin Frenet vektörleri,  $\kappa_{\beta_{nc}}$  eğriliği ve  $\tau_{\beta_{nc}}$  torsiyonu sırasıyla,

$$\left\{ \begin{aligned}
t_{\beta_{nc}}(s) &= \frac{\varphi' \cos \varphi - \kappa}{\sqrt{(\varphi')^2 + \|W\|^2 - 2\varphi' \|W\|}} t + \frac{\tau - \varphi' \sin \varphi}{\sqrt{(\varphi')^2 + \|W\|^2 - 2\varphi' \|W\|}} b \\
n_{\beta_{nc}} &= \frac{\chi_5}{\sqrt{\chi_5^2 + \upsilon_5^2 + \ell_5^2}} t + \frac{\upsilon_5}{\sqrt{\chi_5^2 + \upsilon_5^2 + \ell_5^2}} n + \frac{\ell_5}{\sqrt{\chi_5^2 + \upsilon_5^2 + \ell_5^2}} b \\
b_{\beta_{nc}} &= \frac{\upsilon_5 (\varphi' \sin \varphi - \tau)}{\sqrt{((\varphi')^2 + \|W\|^2 - 2\varphi' \|W\|)(\chi_5^2 + \upsilon_5^2 + \ell_5^2)}} t \\
&+ \frac{(\chi_5 (\tau - \varphi' \sin \varphi) - \ell_5 (\varphi' \cos \varphi - \kappa))}{\sqrt{((\varphi')^2 + \|W\|^2 - 2\varphi' \|W\|)(\chi_5^2 + \upsilon_5^2 + \ell_5^2)}} n \\
&+ \frac{(\upsilon_5 (\varphi' \cos \varphi - \kappa))}{\sqrt{((\varphi')^2 + \|W\|^2 - 2\varphi' \|W\|)(\chi_5^2 + \upsilon_5^2 + \ell_5^2)}} b,
\end{aligned} \right. \quad (3.3.15)$$

$$\left\{ \begin{aligned}
\kappa_{\beta_{nc}} &= \sqrt{2} \frac{\sqrt{\chi_5^2 + \upsilon_5^2 + \ell_5^2}}{\left( (\varphi')^2 + \|W\|^2 - 2\varphi' \|W\| \right)^2} \\
&- 2\bar{\chi}_5 \tau^2 \varphi' \sin \varphi + \bar{\chi}_5 (\varphi')^2 \sin^2 \varphi - \bar{\chi}_5 \kappa^2 \varphi' \sin \varphi + \kappa \bar{\upsilon}_5 \tau + (\varphi')^3 \cos^2 \varphi \omega_2 \\
&+ \varphi'^2 \cos^2 \varphi \bar{\ell}_5 \kappa - 2\varphi' \cos \varphi \bar{\ell}_5 \kappa^2 - \varphi' \cos \varphi \bar{\ell}_5 \tau^2 - \varphi' \cos \varphi \bar{\upsilon}_5 \tau - \kappa \bar{\upsilon}_5 \varphi'' \sin \varphi \\
&- \kappa \bar{\upsilon}_5 \varphi'^2 \cos \varphi + \bar{\upsilon}_5 \varphi'' \cos \varphi \tau - \bar{\upsilon}_5 \varphi'^2 \sin \varphi \tau + \varphi'^2 \cos \varphi \bar{\ell}_5 \tau \sin \varphi + \bar{\upsilon}_5 \kappa' \varphi' \sin \varphi \\
&- \kappa \bar{\ell}_5 \tau \varphi' \sin \varphi - \bar{\chi}_5 \kappa \varphi' \cos \varphi \tau + \bar{\chi}_5 \kappa \varphi'^2 \cos \varphi \sin \varphi + \bar{\chi}_5 \kappa^2 \tau + \bar{\upsilon}_5 \varphi'^3 \sin^2 \varphi \\
\tau_{\beta_{nc}} &= \sqrt{2} \frac{-\bar{\upsilon}_5 \kappa' \tau + \kappa \bar{\ell}_5 \tau^2 + \bar{\ell}_5 \kappa^3 + \bar{\chi}_5 \tau^3}{\left[ \left( \kappa (\varphi')^2 \sin \varphi \right) \cos \varphi + \left( \tau (\varphi')^2 \sin \varphi - \kappa^2 \varphi' - 2\tau^2 \varphi' \right) \sin \varphi + \kappa^2 \tau + \tau^3 \right]^2} \\
&+ \left[ \left( \tau \varphi'' - \tau' \varphi' - \kappa (\varphi')^2 \right) \cos \varphi + \left( \kappa' \varphi' - \tau (\varphi')^2 - \kappa \varphi'' \right) \sin \varphi - \tau \kappa' + (\varphi')^3 + \kappa \tau' \right]^2 \\
&+ \left[ \left( \kappa (\varphi')^2 \cos \varphi + \tau (\varphi')^2 \sin \varphi - 2\kappa^2 \varphi' - \tau^2 \varphi' \right) \cos \varphi - \kappa \tau \varphi' \sin \varphi + \kappa^3 + \kappa \tau^2 \right]^2
\end{aligned} \right. \quad (3.3.16)$$

şeklinde verilir. Buradaki  $\chi_5$ ,  $\upsilon_5$ ,  $\ell_5$ ,  $\bar{\chi}_5$ ,  $\bar{\upsilon}_5$  ve  $\bar{\ell}_5$

$$\left\{ \begin{array}{l}
\chi_5 = \tau^2 \varphi'' \cos \varphi - \kappa \varphi' \varphi'' \cos^2 \varphi - \tau \varphi' \varphi'' \sin \varphi \cos \varphi - (\varphi')^4 \sin \varphi \\
\quad - \kappa^2 (\varphi')^2 \sin \varphi - \tau^2 (\varphi')^2 \sin \varphi + 2\kappa (\varphi')^3 \sin \varphi \cos \varphi \\
\quad + 2\tau (\varphi')^3 \sin^2 \varphi - \kappa' (\varphi')^2 - \tau^2 \kappa' - 2\kappa' \kappa \varphi' \cos \varphi - 2\kappa' \varphi' \tau \sin \varphi \\
\quad - \tau \tau' \varphi' \cos \varphi + \kappa' (\varphi')^2 \cos^2 \varphi + \tau' (\varphi')^2 \sin \varphi \cos \varphi + \kappa \varphi' \varphi'' \\
\quad + \kappa \tau \tau' - \kappa \tau \varphi'' \sin \varphi - \varphi' \tau' \kappa \sin \varphi \\
\nu_5 = \kappa (\varphi')^3 \cos \varphi + 3\kappa^3 \varphi' \cos \varphi + 3\tau^2 \kappa \varphi' \cos \varphi - 2\kappa^2 (\varphi')^2 \cos^2 \varphi \\
\quad - 4\kappa \tau (\varphi')^2 \sin \varphi \cos \varphi - \kappa^2 (\varphi')^2 - \kappa^4 - 2\kappa^2 \tau^2 + 3\kappa^2 \tau \varphi' \sin \varphi \\
\quad - \tau^2 (\varphi')^2 + 3\tau^3 \varphi' \sin \varphi + \tau (\varphi')^3 \sin \varphi - 2\tau^2 (\varphi')^2 \sin^2 \varphi \\
\ell_5 = \tau' (\varphi')^2 + \kappa^2 \tau' - 2\kappa \tau' \varphi' \cos \varphi - \kappa^2 \varphi'' \sin \varphi + \kappa \varphi' \varphi'' \sin \varphi \cos \varphi \\
\quad + \tau \varphi' \varphi'' \sin^2 \varphi - (\varphi')^4 \cos \varphi - \kappa^2 (\varphi')^2 \cos \varphi - \tau^2 (\varphi')^2 \cos \varphi \\
\quad + 2\kappa (\varphi')^3 \cos^2 \varphi + 2\tau (\varphi')^3 \sin \varphi \cos \varphi - \tau \varphi' \varphi'' - \tau \kappa \kappa' + \tau \kappa \varphi'' \cos \varphi \\
\quad + \tau \kappa' \varphi' \cos \varphi + \kappa \kappa' \varphi' \sin \varphi - \kappa' (\varphi')^2 \sin \varphi \cos \varphi - \tau' (\varphi')^2 \sin^2 \varphi \\
\bar{\chi}_5 = \varphi''' \cos \varphi - 3\varphi' \varphi'' \sin \varphi - (\varphi')^3 \cos \varphi - \kappa'' - \kappa^2 \varphi' \cos \varphi \\
\quad - \kappa \tau \varphi' \sin \varphi + \kappa^3 + \kappa \tau^2 \\
\bar{\nu}_5 = 2\kappa \varphi'' \cos \varphi - 2\kappa (\varphi')^2 \sin \varphi - 3\kappa \kappa' + \kappa \varphi'' \cos \varphi + \tau' \varphi' \sin \varphi \\
\quad + 2\tau \varphi'' \sin \varphi + 2(\varphi')^2 \cos \varphi - 3\tau \tau' \\
\bar{\ell}_5 = (\kappa \tau \varphi' - 3\varphi' \varphi'') \cos \varphi + (\tau^2 \varphi' - \varphi''' + (\varphi')^3) \sin \varphi - \kappa^2 \tau - \tau^3 + \tau''
\end{array} \right.$$

şeklinde birer katsayıdır (Şenyurt ve Sivas, 2013).

### 3.4. 3-Boyutlu Öklid Uzayında Frenet Çatısına Göre Uzaysal Kuaterniyonik Smarandache Eğrileri

**Tanım 3.4.1:**  $\gamma = \gamma(s)$  uzaysal kuaterniyonik eğrisinin Frenet çatısı  $\{t, n_1, n_2\}$

olsun.  $m_1$  - Smarandache eğrisi

$$\xi_1(s_\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}}(t + n_1) \quad (3.4.1)$$

şeklinde tanımlanır.

**Teorem 3.4.1:**  $\gamma = \gamma(s)$  uzaysal kuaterniyonik eğrisine ait  $m_1$  - Smarandache

eğrisinin  $\{t_{\xi_1}, n_{1_{\xi_1}}, n_{2_{\xi_1}}, k_{\xi_1}, r_{\xi_1}\}$  Frenet aparatları sırasıyla,

$$\begin{cases} t_{\xi_1} = \frac{1}{\sqrt{2k^2 + r^2}}(-kt + kn_1 + m_2) \\ n_{1_{\xi_1}} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2}}(\lambda_1 t + \lambda_2 n_1 + \lambda_3 n_2) \\ n_{2_{\xi_1}} = \frac{1}{\sqrt{(2k^2 + r^2)(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)}}(\sigma_1 t + \sigma_2 n_1 + \sigma_3 n_2), \end{cases} \quad (3.4.2)$$

$$\begin{cases} k_{\xi_1} = \sqrt{2} \frac{\sqrt{(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)}}{2k^2 + r^2} \\ r_{\xi_1} = \sqrt{2} \frac{(k' + k^2)(k\rho_3 - r\rho_2) + (k^2 - k' + r^2)(k\rho_3 + r\rho_1) + k(kr + r')(\rho_1 + \rho_2)}{(2kk' + rr')^2 + (2k^2r + kr' - k'r + r^3)^2 + (kr' - k'r)^2 + (2k^3 + kr^2)^2} \end{cases} \quad (3.4.3)$$

şeklindedir. Buradaki  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \rho_1, \rho_2$  ve  $\rho_3$  katsayılar

$$\begin{cases} \lambda_1 = -2k^4 - k'r^2 - k^2r^2 + krr' \\ \lambda_2 = -2k^4 - 3k^2r^2 + k'r^2 - r^4 - krr' \\ \lambda_3 = 2k^3r + 2k^2r' + kr^3 - 2kk'r \\ \sigma_1 = k\lambda_3 - r\lambda_2 \\ \sigma_2 = k\lambda_3 + r\lambda_1 \\ \sigma_3 = -k(\lambda_1 + \lambda_2) \\ \rho_1 = -k'' - 3kk' + k'r + 2kr' + k^3 + kr^2 \\ \rho_2 = -3kk' - k^3 + k^2r + k'' - r'' - 3rr' - kr^2 + r^3 \\ \rho_3 = -k^2r + 2k'r - 3rr' - r^3 + kr' + r'' \end{cases}$$

biçimindedir (Çetin ve Kocayiğit, 2013).

**İspat:**  $\xi_1(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(t + n_1)$

eğrisinin  $s_{\xi_1}$  yay parametresine göre türevi alınırsa

$$t_{\xi_1} \frac{ds_{\xi_1}}{ds} = \frac{(-kt + kn_1 + m_2)}{\sqrt{2}}$$

olur ve norm alınırsa

$$\frac{ds_{\beta_m}}{ds} = \sqrt{\frac{2k^2 + r^2}{2}}$$

şeklinde bulunur. Buradan  $\xi_1$  eğrisinin teğet vektörü

$$t_{\xi_1}(s) = \frac{(-kt + kn_1 + rn_2)}{\sqrt{2k^2 + r^2}}$$

olur. Bu ifadenin tekrar türevi alınırsa katsayılar

$$\begin{cases} \lambda_1 = -2k^4 - k'r^2 - k^2r^2 + krr' \\ \lambda_2 = -2k^4 - 3k^2r^2 + k'r^2 - r^4 - krr' \\ \lambda_3 = 2k^3r + 2k^2r' + kr^3 - 2kk'r \end{cases}$$

olmak üzere  $t'_{\xi_1}$  türevi

$$t'_{\xi_1}(s) = \frac{\sqrt{2}}{(2k^2 + r^2)^2} (\lambda_1 t + \lambda_2 n_1 + \lambda_3 n_2)$$

bulunur.  $\xi_{\xi_1}$  eğrisinin  $k_{\xi_1}$  eğriliği

$$k_{\xi_1} = N(t'_{\xi_1}),$$

$$k_{\xi_1} = \sqrt{2} \frac{\sqrt{(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)}}{(2k^2 + r^2)^2}$$

olur.  $n_{1_{\xi_1}}$  aslinormal vektörü

$$n_{1_{\xi_1}} = \frac{t'_{\xi_1}}{N(t'_{\xi_1})},$$

$$n_{1_{\xi_1}} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2}} (\lambda_1 t + \lambda_2 n_1 + \lambda_3 n_2)$$

şeklinde bulunur.  $n_{2_{\xi_1}} = t_{\xi_1} \times n_{1_{\xi_1}}$  olduğundan  $n_{2_{\xi_1}}$  binormal vektörü

$$\sigma_1 = k\lambda_3 - r\lambda_2, \sigma_2 = k\lambda_3 + r\lambda_1, \sigma_3 = -k(\lambda_1 + \lambda_2)$$

olmak üzere



$$n_{2_{\xi_1}} = \frac{1}{\sqrt{(2k^2 + r^2)(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)}} (\sigma_1 t + \sigma_2 n_1 + \sigma_3 n_2)$$

bulunur.  $\xi_1$  eğrisinin ikinci ve üçüncü türevleri alınırsa bu türevler sırasıyla

$$\xi_1'' = \frac{-(k^2 + k')t + (k' - k^2 - r^2)n_1 + (kr + r')n_2}{\sqrt{2}},$$

$$\xi_1''' = \frac{\rho_1 t + \rho_2 n_1 + \rho_3 n_2}{\sqrt{2}}$$

biçiminde bulunur. Burada katsayılar

$$\begin{cases} \rho_1 = -k'' - 3kk' + k'r + 2kr' + k^3 + kr^2 \\ \rho_2 = -3kk' - k^3 + k^2 r + k'' - r'' - 3rr' - kr^2 + r^3 \\ \rho_3 = -k^2 r + 2k'r - 3rr' - r^3 + kr' + r'' \end{cases}$$

şeklinde dir.  $\xi_1$  eğrisinin  $r_{\xi_1}$  torsiyonu  $r_{\xi_1} = \frac{\langle \xi_1' \times \xi_1'', \xi_1''' \rangle \Big|_{\mathbb{Q}}}{N(\xi_1' \times \xi_1'')^2}$  tanımından

$$r_{\xi_1} = \sqrt{2} \frac{(k' + k^2)(k\rho_3 - r\rho_2) + (k^2 - k' + r^2)(k\rho_3 + r\rho_1) + k(kr + r')(\rho_1 + \rho_2)}{(2kk' + rr')^2 + (2k^2 r + kr' - k'r + r^3)^2 + (kr' - k'r)^2 + (2k^3 + kr^2)^2}$$

şeklinde elde edilir.

**Tanım 3.4.2:**  $\gamma = \gamma(s)$  birim hızlı regüler uzaysal kuaterniyonik eğri ve  $t, n_1, n_2$  bu eğrinin Frenet vektörleri olsun. Uzaysal kuaterniyonik  $tn_2$  - Smarandache eğrisi

$$\xi_2(s_{\xi_2}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(t + n_2) \quad (3.4.4)$$

ile tanımlanır.

**Teorem 3.4.2:**  $\gamma = \gamma(s)$  uzaysal kuaterniyonik eğrisine ait  $tn_2$  - Smarandache eğrisi eğrisinin  $\{t_{\xi_2}, n_{1_{\xi_2}}, n_{2_{\xi_2}}, k_{\xi_2}, r_{\xi_2}\}$  Frenet aparatları sırasıyla,

$$\begin{cases} t_{\xi_2} = n_1 \\ n_{1_{\xi_2}} = \frac{1}{\sqrt{k^2 + r^2}}(-kt + rn_2) \\ n_{2_{\xi_2}} = \frac{1}{\sqrt{k^2 + r^2}}(rt + kn_2), \end{cases} \quad (3.4.5)$$

$$\begin{cases} k_{\xi_2} = \sqrt{2} \frac{\sqrt{(k^2 + r^2)}}{k - r} \\ r_{\xi_2} = \sqrt{2} \frac{(r - k)[\rho_3(-k^2 + kr) - \rho_1(kr - r^2)]}{(k - r)^2 (k' - r')^2 + (k^2 r - 2kr^2 + r^3)^2 + (-2k^2 r + kr^2 + k^3)^2} \end{cases} \quad (3.4.6)$$

şeklindedir. Burada  $\rho_1$ ,  $\rho_2$  ve  $\rho_3$  katsayıları

$$\begin{cases} \rho_1 = -3kk' + k'r + 2k'r \\ \rho_2 = -k^3 + k^2 r + k'' - r'' - kr^2 + r^3 \\ \rho_3 = 2k'r - 3rr' + kr' \end{cases}$$

biçimindedir (Çetin ve Kocayiğit, 2013).

**Tanım 3.4.3:**  $\gamma = \gamma(s)$  uzaysal kuaterniyonik eğri ve  $t, n_1, n_2$  bu eğrinin Frenet vektörleri olsun. Uzaysal kuaterniyonik  $n_1 n_2$  - Smarandache eğrisi

$$\xi_3(s_{\xi_3}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(n_1 + n_2) \quad (3.4.7)$$

ile tanımlanır.

**Teorem 3.4.3:**  $\gamma = \gamma(s)$  uzaysal kuaterniyonik eğrisine ait  $n_1 n_2$  - Smarandache eğrisi

eğrisinin  $\{t_{\xi_3}, n_{1_{\xi_3}}, n_{2_{\xi_3}}, k_{\xi_3}, r_{\xi_3}\}$  Frenet aparatları sırasıyla,

$$\begin{cases} t_{\xi_3} = \frac{1}{\sqrt{k^2 + 2r^2}}(-kt - rn_1 + rn_2) \\ n_{1_{\xi_3}} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2}}(\lambda_1 t + \lambda_2 n_1 + \lambda_3 n_2) \\ n_{2_{\xi_3}} = \frac{1}{\sqrt{k^2 + 2r^2} \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2}}(\sigma_1 t + \sigma_2 n_1 + \sigma_3 n_2), \end{cases} \quad (3.4.8)$$

$$\begin{cases} k_{\xi_3} = \sqrt{2} \frac{\sqrt{(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)}}{(k^2 + 2r^2)^2} \\ r_{\xi_3} = \sqrt{2} \frac{r(-k' + kr)(\rho_2 + \rho_3) + (k^2 + r' + r^2)(k\rho_3 + r\rho_1) + (-r^2 + r')(k\rho_2 - r\rho_1)}{(kk' + 2rr')^2 + (k^2r + 2r^3)^2 + (kr' - k'r)^2 + (k^3 + kr' + 2kr^2 - k'r)^2} \end{cases} \quad (3.4.9)$$

şeklindedir. Burada  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \rho_1, \rho_2$  ve  $\rho_3$  katsayıları

$$\begin{cases} \lambda_1 = k^3r - 2k'r^2 + 2kr^3 + 2krr' \\ \lambda_2 = -k^4 - k^2r' - 3k^2r^2 - 2r^4 + kk'r \\ \lambda_3 = -k^2r^2 + k^2r' - 2r^4 - kk'r \\ \sigma_1 = -r(\lambda_2 + \lambda_3) \\ \sigma_2 = k\lambda_3 + r\lambda_1 \\ \sigma_3 = -k\lambda_2 + r\lambda_1 \\ \rho_1 = -k'' + k'r + 2kr' + k^3 + kr^2 \\ \rho_2 = -3kk' + k^2r - r'' - 3rr' + r^3 \\ \rho_3 = -k^2r - 3rr' - r^3 + r'' \end{cases}$$

biçimindedir (Çetin ve Kocayiğit, 2013).

**Tanım 3.4.4:**  $\gamma = \gamma(s)$  uzaysal kuaterniyonik eğri ve  $t, n_1, n_2$  bu eğrinin Frenet aparatları olsun. Uzaysal kuaterniyonik  $tn_1n_2$  - Smarandache eğrisi

$$\xi_4(s_{\xi_4}) = \frac{1}{\sqrt{3}}(t + n_1 + n_2) \quad (3.4.10)$$

ile tanımlanır.

**Teorem 3.4.4:**  $\gamma = \gamma(s)$  uzaysal kuaterniyonik eğrisine ait  $tn_1n_2$  - Smarandache eğrisi eğrisinin  $\{t_{\xi_4}, n_{1_{\xi_4}}, n_{2_{\xi_4}}, k_{\xi_4}, r_{\xi_4}\}$  Frenet aparatları sırasıyla,

$$\begin{cases} t_{\xi_4} = \frac{1}{\sqrt{2(k^2 - kr + r^2)}}(-kt + (k - r)n_1 + m_2) \\ n_{1_{\xi_4}} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2}}(\lambda_1 t + \lambda_2 n_1 + \lambda_3 n_2) \\ n_{2_{\xi_4}} = \frac{1}{\sqrt{2(k^2 - kr + r^2)}\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2}}(\sigma_1 t + \sigma_2 n_1 + \sigma_3 n_2), \end{cases} \quad (3.4.11)$$

$$\begin{cases} k_{\xi_4} = \sqrt{3} \frac{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2}}{4(k^2 - kr + r^2)^2} \\ \quad (-k' - k^2 + kr)((r - k)\rho_3 + r\rho_2) + (k^2 - k' + r' + r^2)(k\rho_3 + r\rho_1) \\ r_{\xi_4} = \sqrt{3} \frac{(kr - r^2 + r')(k\rho_2 + (k - r)\rho_1)}{(-2kk' + k'r + 2rr' + k'r)^2 + (2k^2r - 2kr^2 + kr' + 2r^3 - k'r)^2} \\ \quad + (kr' - k'r)^2 + (k^3 + kr' + 2kr^2 - k'r - 2k^2r + k^3)^2} \end{cases} \quad (3.4.12)$$

şeklindedir. Burada  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \rho_1, \rho_2$  ve  $\rho_3$  katsayıları

$$\begin{cases} \lambda_1 = -2k^4 + 4k^3r + kk'r - 4k^2r^2 - 2k'r^2 + 2kr^3 - k^2r' + 2krr' \\ \lambda_2 = -2k^4 - k^2r' - 4k^2r^2 + 2kr^3 + kk'r - krr' + 2kr^3 + k'r^2 - 2r^4 \\ \lambda_3 = 2k^3r - k^2r^2 + 2k^2r' + 4kr^3 - krr' - 2r^4 - kk'r + k'r^2 \\ \sigma_1 = (k - r)\lambda_3 - r\lambda_2 \\ \sigma_2 = k\lambda_3 + r\lambda_1 \\ \sigma_3 = -k\lambda_2 - (k - r)\lambda_1 \\ \rho_1 = -k'' - 3kk' + k'r + 2kr' + k^3 + kr^2 \\ \rho_2 = -3(kk' + rr') - k^3 + k^2r - k'' - r'' + r^3 \\ \rho_3 = -k^2r + 2k'r - 3rr' - r^3 + kr' + r'' \end{cases}$$

biçimindedir (Çetin ve Kocayiğit, 2013).

**Tanım 3.4.5:**  $\gamma = \gamma(s)$  uzaysal kuaterniyonik eğri ve  $t, n_1, n_2$  bu eğrinin Frenet vektörleri olsun. Uzaysal kuaterniyonik  $n_1 w$  - Smarandache eğrisi

$$\xi_5(s_{\xi_5}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(n_1 + w) \quad (3.4.13)$$

ile tanımlanır.

**Teorem 3.4.5:**  $\gamma = \gamma(s)$  uzaysal kuaterniyonik eğrisine ait  $n_1 w$  - Smarandache eğrisinin  $\{t_{\xi_5}, n_{1_{\xi_5}}, n_{2_{\xi_5}}, k_{\xi_5}, r_{\xi_5}\}$  Frenet aparatları sırasıyla,

$$\left\{ \begin{aligned} t_{\xi_5}(s) &= \frac{\varphi' \cos \varphi - k}{\sqrt{(\varphi')^2 + N(D)^2 - 2\varphi'N(D)}} t + \frac{r - \varphi' \sin \varphi}{\sqrt{(\varphi')^2 + N(D)^2 - 2\varphi'N(D)}} n_2 \\ n_{1_{\xi_5}} &= \frac{\lambda_1}{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2}} t + \frac{\lambda_2}{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2}} n_1 + \frac{\lambda_3}{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2}} n_2 \\ n_{2_{\xi_5}} &= \frac{\lambda_2(\varphi' \sin \varphi - r)}{\sqrt{((\varphi')^2 + N(D)^2 - 2\varphi'N(D))(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)}} t \\ &+ \frac{\lambda_1(r - \varphi' \sin \varphi) - \lambda_3(\varphi' \cos \varphi - k)}{\sqrt{((\varphi')^2 + N(D)^2 - 2\varphi'N(D))(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)}} n_1 \\ &+ \frac{\lambda_2(\varphi' \cos \varphi - k)}{\sqrt{((\varphi')^2 + N(D)^2 - 2\varphi'N(D))(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)}} n_2, \end{aligned} \right. \quad (3.4.14)$$

$$\left\{ \begin{aligned} k_{\xi_5} &= \sqrt{2} \frac{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2}}{((\varphi')^2 + N(D)^2 - 2\varphi'N(D))^2} \\ r_{\xi_5} &= \sqrt{2} \frac{\varpi_1 \omega_1 + \varpi_2 \omega_2 + \varpi_3 \omega_3}{\varpi_1^2 + \varpi_2^2 + \varpi_3^2} \end{aligned} \right. \quad (3.4.15)$$

şeklindedir. Burada  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \varpi_1, \varpi_2$  ve  $\varpi_3$  katsayıları

$$\left\{ \begin{array}{l}
\lambda_1 = r^2 \varphi'' \cos \varphi - k \varphi' \varphi'' \cos^2 \varphi - r \varphi' \varphi'' \sin \varphi \cos \varphi - (\varphi')^4 \sin \varphi - k^2 (\varphi')^2 \sin \varphi \\
\quad - r^2 (\varphi')^2 \sin \varphi + 2k (\varphi')^3 \sin \varphi \cos \varphi + 2r (\varphi')^3 \sin^2 \varphi - k' (\varphi')^2 - r^2 k' \\
\quad - 2k' k \varphi' \cos \varphi - 2k' r \varphi' \sin \varphi - r r' \varphi' \cos \varphi + k' (\varphi')^2 \cos^2 \varphi + r' (\varphi')^2 \sin \varphi \cos \varphi \\
\quad + k \varphi' \varphi'' + k r r' - k r \varphi'' \sin \varphi - \varphi' r' k \sin \varphi \\
\lambda_2 = k (\varphi')^3 \cos \varphi + 3k^3 \varphi' \cos \varphi + 3r^2 k \varphi' \cos \varphi - 2k^2 (\varphi')^2 \cos^2 \varphi \\
\quad - 4k r (\varphi')^2 \sin \varphi \cos \varphi - k^2 (\varphi')^2 - k^4 - 2k^2 r^2 + 3k^2 r \varphi' \sin \varphi \\
\quad - r^2 (\varphi')^2 + 3r^3 \varphi' \sin \varphi + r (\varphi')^3 \sin \varphi - 2r^2 (\varphi')^2 \sin^2 \varphi \\
\lambda_3 = r' (\varphi')^2 + k^2 r' - 2k r' \varphi' \cos \varphi - k^2 \varphi'' \sin \varphi + k \varphi' \varphi'' \sin \varphi \cos \varphi \\
\quad + r \varphi' \varphi'' \sin^2 \varphi - (\varphi')^4 \cos \varphi - k^2 (\varphi')^2 \cos \varphi - k^2 (\varphi')^2 \cos \varphi \\
\quad + 2k (\varphi')^3 \cos^2 \varphi + 2r (\varphi')^3 \sin \varphi \cos \varphi - r \varphi' \varphi'' - r k k' + r k \varphi'' \cos \varphi \\
\quad + r k' \varphi' \cos \varphi + k k' \varphi' \sin \varphi - k' (\varphi')^2 \sin \varphi \cos \varphi - r' (\varphi')^2 \sin^2 \varphi \\
\omega_1 = \varphi''' \cos \varphi - 3\varphi' \varphi'' \sin \varphi - (\varphi')^3 \cos \varphi - k'' - k^2 \varphi' \cos \varphi - k r \varphi' \sin \varphi + k^3 + k r^2 \\
\omega_2 = 2k \varphi'' \cos \varphi - 2k (\varphi')^2 \sin \varphi - 3k k' + k \varphi'' \cos \varphi + r' \varphi' \sin \varphi + 2r \varphi'' \sin \varphi \\
\quad + 2(\varphi')^2 \cos \varphi - 3r r' \\
\omega_3 = (k r \varphi' - 3\varphi' \varphi'') \cos \varphi + (r^2 \varphi' - \varphi''' + (\varphi')^3) \sin \varphi - k^2 r - r^3 + r'' \\
\varpi_1 = (k (\varphi')^2 \sin \varphi) \cos \varphi + (r (\varphi')^2 \sin \varphi - k^2 \varphi' - 2r^2 \varphi') \sin \varphi + k^2 r + r^3 \\
\varpi_2 = (r \varphi'' - r' \varphi' - k (\varphi')^2) \cos \varphi + (k' \varphi' - r (\varphi')^2 - k \varphi'') \sin \varphi - r k' + (\varphi')^3 + k r' \\
\varpi_3 = (k (\varphi')^2 \cos \varphi + r (\varphi')^2 \sin \varphi - 2k^2 \varphi' - r^2 \varphi') \cos \varphi - k r \varphi' \sin \varphi + k^3 + k r^2
\end{array} \right.$$

biçimindedir (Şenyurt ve Çalışkan, 2015).

#### 4. BULGULAR

Bu çalışmada involüt-evolüt eğrileri arasındaki geçiş evolüt eğrisinin Darboux ile binormal vektörü arasındaki açığa bağlı ifadelerinden yararlanarak uzaysal kuaterniyonik involüt eğrisinden elde edilen

$$\beta_1 = \beta_{t^* n_1^*}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(t^* + n_1^*) t^* n_1^* - \text{kuaterniyonik Smarandache eğrisi,}$$

$$\beta_2 = \beta_{n_1^* n_2^*}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(n_1^* + n_2^*) n_1^* n_2^* - \text{kuaterniyonik Smarandache eğrisi,}$$

$$\beta_3 = \beta_{t^* n_2^*}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(t^* + n_2^*) t^* n_2^* - \text{kuaterniyonik Smarandache eğrisi,}$$

$$\beta_4 = \beta_{t^* n_1^* n_2^*}(s) = \frac{1}{\sqrt{3}}(t^* + n_1^* + n_2^*) t^* n_1^* n_2^* - \text{kuaterniyonik Smarandache}$$

eğrisi,

$$\beta_5 = \beta_{n_1^* w^*}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(n_1^* + w^*) n_1^* w^* - \text{kuaterniyonik Smarandache eğrisi}$$

her bir Smarandache eğrisinin Frenet vektörleri, eğrilikleri ve burulmaları hesaplanmıştır. Elde edilen sonuçlar evolüt eğrinin Frenet aparatlarına bağlı olarak ifade edilmiştir.  $n_1^* w^*$  - uzaysal kuaterniyonik Smarandache eğrisine ait sonuçlar *Advances Applied Clifford Algebras* dergisinde yayınlanmıştır (Şenyurt ve arkadaşları, 2016). Son olarak bir örnek verilerek oluşan yeni eğrilerin şekilleri Mapple programında çizdirilmiştir.

##### 4.1. $t^* n_1^*$ -Uzaysal Kuaterniyonik Smarandache Eğrisi

**Tanım 4.1.1:**  $\alpha^*$  uzaysal kuaterniyonik involüt eğrisinin Frenet vektörleri  $\{t^*, n_1^*, n_2^*\}$  olsun.

$$\beta_1(s) = \beta_{t^* n_1^*}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(t^* + n_1^*) \quad (4.1.1)$$

şeklinde tanımlı eğriye  $t^* n_1^*$  - Smarandache eğrisi denir.

**Teorem 4.1.1:**  $\alpha$  uzaysal kuaterniyonik eğrisinin involütü  $\alpha^*$  olsun.  $\alpha^*$  eğrisinden elde edilen  $t^* n_1^*$  -Smarandache eğrisinin Frenet vektörleri ve eğrilikleri sırasıyla

$$\left\{ \begin{array}{l} t_{\beta_1}(s) = \frac{-k^*}{\sqrt{2k^{*2} + r^{*2}}} t^* + \frac{k^*}{\sqrt{2k^{*2} + r^{*2}}} n_1^* + \frac{r^*}{\sqrt{2k^{*2} + r^{*2}}} n_2^* \\ n_{1\beta_1} = \frac{\omega_1}{\sqrt{\omega_1^2 + \phi_1^2 + \sigma_1^2}} t^* + \frac{\phi_1}{\sqrt{\omega_1^2 + \phi_1^2 + \sigma_1^2}} n_1^* + \frac{\sigma_1}{\sqrt{\omega_1^2 + \phi_1^2 + \sigma_1^2}} n_2^* \\ n_{2\beta_1} = \frac{k^* \sigma_1 - r^* \phi_1}{\sqrt{(\omega_1^2 + \phi_1^2 + \sigma_1^2)(2k^{*2} + r^{*2})}} t^* + \frac{k^* \sigma_1 + r^* \omega_1}{\sqrt{(\omega_1^2 + \phi_1^2 + \sigma_1^2)(2k^{*2} + r^{*2})}} n_1^* \\ \quad + \frac{-k^* \phi_1 - k^* \omega_1}{\sqrt{(\omega_1^2 + \phi_1^2 + \sigma_1^2)(2k^{*2} + r^{*2})}} n_2^*, \\ k_{\beta_1} = \sqrt{2} \frac{\sqrt{\omega_1^2 + \phi_1^2 + \sigma_1^2}}{(2k^{*2} + r^{*2})^2} \\ r_{\beta_1} = \sqrt{2} \frac{(k^{*2} + r^{*2} - k^*)(k^* \rho_1 + r^* \eta_1) + k^*(k^* r^* + r^* r')(\theta_1 + \eta_1) + (k^{*2} + k^{*'}) (k^* \rho_1 - r^* \theta_1)}{[r^*(2k^{*2} + r^{*2}) + k^* r^* - k^* r']^2 + (k^* r^* - k^* r')^2 + (2k^{*3} + k^* r^{*2})^2} \end{array} \right.$$

şeklinde verilir. Burada  $\omega_1, \phi_1, \sigma_1, \eta_1, \theta_1$  ve  $\rho_1$

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_1 = -k^{*2} (2k^{*2} + r^{*2}) - r^* (r^* k^{*'} - k^* r^{*'}) \\ \phi_1 = -k^{*2} (2k^{*2} + 3r^{*2}) - r^* (r^{*3} - r^* k^{*'} + k^* r^{*'}) \\ \sigma_1 = k^* r^* (2k^{*2} + r^{*2}) - 2k^* (\tau^* \kappa^{*'} - k^* r^{*'}) \\ \eta_1 = k^{*3} + k^* (r^{*2} - 3k^{*'}) - k^{*''} \\ \theta_1 = -k^{*3} - k^* (r^{*2} + 3k^{*'}) - 3r^* r^{*'} + k^{*''} \\ \rho_1 = -k^{*2} r^* - r^{*3} + 2r^* k^{*'} + k^* r^{*'} + r^{*''} \end{array} \right.$$

şeklinde birer katsayıdır.



**İspat:** (4.1.1) bağıntısının  $s_{\beta_1}$  yay parametresine göre türevi alınırsa

$$t_{\beta_1} \frac{ds_{\beta_1}}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}} (-k^* t^* + k^* n_1^* + r^* n_2^*) \quad (4.1.2)$$

olur ve norm alınırsa  $\frac{ds_{\beta_1}}{ds}$  ifadesi

$$\frac{ds_{\beta_1}}{ds} = \sqrt{\frac{2k^{*2} + r^{*2}}{2}} \quad (4.1.3)$$

şeklinde bulunur. Bulunan bu ifade yukarıda yerine yazılırsa  $\beta_1$  eğrisinin teğet vektörü

$$t_{\beta_1}(s) = \frac{-k^*}{\sqrt{2k^{*2} + r^{*2}}} t^* + \frac{k^*}{\sqrt{2k^{*2} + r^{*2}}} n_1^* + \frac{r^*}{\sqrt{2k^{*2} + r^{*2}}} n_2^* \quad (4.1.4)$$

olur. (4.1.1) ifadesinde  $t^*$  ve  $n_1^*$  in yerine (4.2.12) den karşılıkları yerine yazılırsa  $t^* n_1^*$  -Smarandache eğrisinin evolüt eğrisine bağlı ifadesi

$$\beta_1(s) = \frac{1}{\sqrt{2}} (-\cos \varphi(s) t(s) + n_1(s) + \sin \varphi(s) n_2(s)) \quad (4.1.5)$$

şeklinde bulunur. (4.1.4) denkleminde (3.2.12) ve (3.2.13) bağıntıları dikkate alınırsa (4.1.5) ifadesindeki  $\beta_1$  eğrisinin teğet vektörü

$$t_{\beta_1}(s) = \frac{\varphi' \sin \varphi - k}{\sqrt{\varphi'^2 + 2N(D)^2}} t - \frac{N(D)}{\sqrt{\varphi'^2 + 2N(D)^2}} n_1 + \frac{\varphi' \cos \varphi + r}{\sqrt{\varphi'^2 + 2N(D)^2}} n_2 \quad (4.1.6)$$

olur. (4.1.4) ifadesinin türevi alınırsa katsayılar

$$\begin{cases} \omega_1 = -k^{*2} (2k^{*2} + r^{*2}) - r^* (r^* k^{*'} - k^* r^{*'}) \\ \phi_1 = -k^{*2} (2k^{*2} + 3r^{*2}) - r^* (r^{*3} - r^* k^{*'} + k^* r^{*'}) \\ \sigma_1 = k^* r^* (2k^{*2} + r^{*2}) - 2k^* (r^* k^{*'} - k^* r^{*'}) \end{cases} \quad (4.1.7)$$

olmak üzere  $t'_{\beta_1}(s)$  türevi

$$t'_{\beta_1}(s) = \sqrt{2} \frac{1}{(2k^{*2} + r^{*2})^2} (\omega_1 t^* + \phi_1 n_1^* + \sigma_1 n_2^*) \quad (4.1.8)$$

olur. (4.1.7) ifadesinde  $k^*$  ve  $r^*$  in yerine (3.2.13) den karşılıkları yazılırsa yeni katsayılar

$$\begin{cases} \bar{\omega}_1 = (\varphi'' \sin \varphi + \varphi'^2 \cos \varphi - k' + kN(D)) \sqrt{\varphi'^2 + 2N(D)^2} - (\varphi' \sin \varphi - k) \left( \sqrt{\varphi'^2 + 2N(D)^2} \right)' \\ \bar{\phi}_1 = \left( -N(D)^2 - N(D)' \right) \sqrt{\varphi'^2 + 2N(D)^2} + N(D) \left( \sqrt{\varphi'^2 + 2N(D)^2} \right)' \\ \bar{\sigma}_1 = (\varphi'' \cos \varphi - \varphi'^2 \sin \varphi + r' - rN(D)) \sqrt{\varphi'^2 + 2N(D)^2} - (\varphi' \cos \varphi + r) \left( \sqrt{\varphi'^2 + 2N(D)^2} \right)' \end{cases} \quad (4.1.9)$$

şeklinde olur.  $t'_{\beta_1}(s)$  türev ifadesinde (3.2.12) ve (3.2.13) bağıntıları yerine yazılırsa  $t'_{\beta_1}$  vektörünün evolüt eğrisinin Frenet elemanları cinsinden ifadesi

$$t'_{\beta_1}(s) = \sqrt{2} \left( \frac{\bar{\omega}_1}{(\varphi'^2 + 2N(D)^2)^{3/2}} t + \frac{\bar{\phi}_1}{(\varphi'^2 + 2N(D)^2)^{3/2}} n_1 + \frac{\bar{\sigma}_1}{(\varphi'^2 + 2N(D)^2)^{3/2}} n_2 \right) \quad (4.1.10)$$

şeklinde bulunur.  $\beta_1$  eğrisinin eğriliği  $k_{\beta_1}$  ile gösterilirse (4.1.8) bağıntısından  $k_{\beta_1}$  eğriliği

$$\begin{aligned} k_{\beta_1} &= N(t'_{\beta_1}), \\ k_{\beta_1} &= \sqrt{2} \frac{\sqrt{\omega_1^2 + \phi_1^2 + \sigma_1^2}}{(2k^{*2} + r^{*2})^2} \end{aligned} \quad (4.1.11)$$

olur. Burada  $k^*$  ve  $r^*$  in yerine (4.2.13) dan karşılıkları yazılırsa  $k_{\beta_1}$  eğriliğinin evolüt eğrisinin eğriliklerine bağlı ifadesi

$$k_{\beta_1} = \sqrt{2} \frac{\sqrt{\bar{\omega}_1^2 + \bar{\phi}_1^2 + \bar{\sigma}_1^2}}{(\varphi'^2 + 2N(D)^2)^{3/2}} \quad (4.1.12)$$

şekline dönüşür.  $\beta_1$  eğrisinin aslinormali  $n_{1\beta_1}$  ile gösterilirse (4.1.8) bağıntısından

$$n_{1\beta_1} = \frac{t'_{\beta_1}}{N(t'_{\beta_1})},$$

$$n_{1\beta_1} = \frac{\omega_1}{\sqrt{\omega_1^2 + \phi_1^2 + \sigma_1^2}} t^* + \frac{\phi_1}{\sqrt{\omega_1^2 + \phi_1^2 + \sigma_1^2}} n_1^* + \frac{\sigma_1}{\sqrt{\omega_1^2 + \phi_1^2 + \sigma_1^2}} n_2^*$$

olur. Burada  $t^*$ ,  $n_1^*$  ve  $n_2^*$  in yerine (3.2.12) den karşılıkları yazılırsa  $n_{1\beta_1}$  ifadesinin evölüt eğrisinin Frenet elemanları cinsinden karşılığı

$$n_{1\beta_1} = \frac{\bar{\omega}_1}{\sqrt{\bar{\omega}_1^2 + \bar{\phi}_1^2 + \bar{\sigma}_1^2}} t + \frac{\bar{\phi}_1}{\sqrt{\bar{\omega}_1^2 + \bar{\phi}_1^2 + \bar{\sigma}_1^2}} n_1 + \frac{\bar{\sigma}_1}{\sqrt{\bar{\omega}_1^2 + \bar{\phi}_1^2 + \bar{\sigma}_1^2}} n_2 \quad (4.1.13)$$

şeklindedir.  $n_{2\beta_1} = t_{\beta_1} \times n_{1\beta_1}$  olduğundan  $n_{2\beta_1}$  binormal vektörü

$$n_{2\beta_1} = \frac{k^* \sigma_1 - r^* \phi_1}{\sqrt{(\omega_1^2 + \phi_1^2 + \sigma_1^2)(2k^{*2} + r^{*2})}} t^* + \frac{k^* \sigma_1 + r^* \omega_1}{\sqrt{(\omega_1^2 + \phi_1^2 + \sigma_1^2)(2k^{*2} + r^{*2})}} n_1^* + \frac{-k^* \phi_1 - k^* \omega_1}{\sqrt{(\omega_1^2 + \phi_1^2 + \sigma_1^2)(2k^{*2} + r^{*2})}} n_2^* \quad (4.1.14)$$

olur. Burada  $t^*$ ,  $n_1^*$ ,  $n_2^*$ ,  $k^*$  ve  $r^*$  in yerine (3.2.12) ve (3.2.13) den karşılıkları yazılırsa  $n_{2\beta_1}$  binormal vektörünün evölüt eğrisinin Frenet elemanları cinsinden karşılığı

$$n_{2\beta_1} = \frac{(-N(D)\bar{\sigma}_1 - (\varphi' \cos \varphi + r)\bar{\phi}_1)}{\sqrt{(\varphi'^2 + 2N(D)^2)(\bar{\omega}_1^2 + \bar{\phi}_1^2 + \bar{\sigma}_1^2)}} t + \frac{(\bar{\omega}_1(\varphi' \cos \varphi + r) - \bar{\sigma}_1(\varphi' \sin \varphi - k))}{\sqrt{(\varphi'^2 + 2N(D)^2)(\bar{\omega}_1^2 + \bar{\phi}_1^2 + \bar{\sigma}_1^2)}} n_1 + \frac{(\bar{\phi}_1(\varphi' \sin \varphi - k) + \bar{\omega}_1 N(D))}{\sqrt{(\varphi'^2 + 2N(D)^2)(\bar{\omega}_1^2 + \bar{\phi}_1^2 + \bar{\sigma}_1^2)}} n_2 \quad (4.1.15)$$

şeklinde bulunur.  $\beta_1$  eğrisinin ikinci ve üçüncü türevleri sırasıyla

$$\beta_1'' = \frac{-(k^{*2} + k^{*'})t^* + (k^{*'} - k^{*2} - r^{*2})n_1^* + (k^* r^* + r^{*'})n_2^*}{\sqrt{2}}$$

ve

$$\beta_1''' = \frac{\eta_1 t^* + \theta_1 n_1^* + \rho_1 n_2^*}{\sqrt{2}}$$

olur. Burada  $\eta_1$ ,  $\theta_1$  ve  $\rho_1$

$$\begin{cases} \eta_1 = k^{*3} + k^* (r^{*2} - 3k^{*'}) - k^{*''} \\ \theta_1 = -k^{*3} - k^* (r^{*2} + 3k^{*'}) - 3r^* r^{*'} + k^{*''} \\ \rho_1 = -k^{*2} r^* - r^{*3} + 2r^* k^{*'} + k^* r^{*''} + r^{*''} \end{cases} \quad (4.1.16)$$

şeklinde birer katsayıdır.  $\beta_1$  eğrisinin torsiyonu  $r_{\beta_1}$  ile gösterilirse  $r_{\beta_1}$  torsiyonu

$$r_{\beta_1} = \frac{\langle \beta_1' \times \beta_1'', \beta_1''' \rangle \Big|_{\mathbb{Q}}}{N(\beta_1' \times \beta_1'')^2}$$

yazılır. Burada  $\beta_1'$ ,  $\beta_1''$  ve  $\beta_1'''$  değerleri yerine yazılır ve gerekli hesaplamalar yapılırsa  $r_{\beta_1}$  torsiyonu

$$r_{\beta_1} = \sqrt{2} \frac{(k^{*2} + r^{*2} - k^{*'}) (k^* \rho_1 + r^* \eta_1) + k^* (k^* r^* + r^{*'}) (\theta_1 + \eta_1) + (k^{*2} + k^{*'}) (k^* \rho_1 - r^* \theta_1)}{(r^* (2k^{*2} + r^{*2}) + k^* r^{*'} - k^{*'} r^*)^2 + (k^* r^{*'} - k^{*'} r^*)^2 + (2k^{*3} + k^* r^{*2})^2} \quad (4.1.17)$$

olur. (4.1.16) bağıntısında  $k^*$  ve  $r^*$  in yerine (3.2.13) dan karşılıkları yazılırsa yeni katsayılar

$$\begin{cases} \bar{\eta}_1 = \varphi''' \sin \varphi + 3\varphi' \varphi'' \cos \varphi - \varphi'^3 \sin \varphi - k'' + k' N(D) + 2kN(D)' + kN(D)^2 \\ \bar{\theta}_1 = \varphi'^2 N(D) - kk' - rr' + N(D)^3 - 2N(D)N(D)' + N(D)'' \\ \bar{\rho}_1 = \varphi''' \cos \varphi - 3\varphi' \varphi'' \sin \varphi - \varphi'^3 \cos \varphi + r'' - r' N(D) - 2rN(D)' - rN(D)^2 \end{cases} \quad (4.1.18)$$

şeklinde bulunur ve bu katsayılar (4.1.17) de yerine yazılırsa  $t^* n_1^*$  -Smarandache eğrisinin  $r_{\beta_1}$  torsiyonunun evolüt eğrisinin Frenet elemanları cinsinden ifadesi

$$\begin{cases} \tilde{\omega}_1 = -N(D)(\varphi'' \cos \varphi - \varphi'^2 \sin \varphi + r' - rN(D)) + (N(D)^2 + N(D)')(\varphi' \cos \varphi + r) \\ \tilde{\phi}_1 = (\varphi' \cos \varphi + r)(\varphi'' \sin \varphi + \varphi'^2 \cos \varphi - k' + kN(D)) \\ \quad - (\varphi' \sin \varphi - k)(\varphi'' \cos \varphi - \varphi'^2 \sin \varphi + r' - rN(D)) \\ \tilde{\sigma}_1 = (\varphi' \sin \varphi - k)(-N(D)^2 - N(D)') + N(D)(\varphi'' \sin \varphi + \varphi'^2 \cos \varphi - k' + kN(D)) \end{cases} \quad (4.1.19)$$

$\tilde{\omega}_1$ ,  $\tilde{\phi}_1$  ve  $\tilde{\sigma}_1$  birer katsayı olmak üzere

$$r_{\beta_1} = \sqrt{2} \frac{\bar{\eta}_1 \tilde{\omega}_1 + \bar{\theta}_1 \tilde{\phi}_1 + \bar{\rho}_1 \tilde{\sigma}_1}{\tilde{\omega}_1^2 + \tilde{\phi}_1^2 + \tilde{\sigma}_1^2}$$

şeklinde elde edilir. Böylece şu sonuç verilebilir:

**Sonuç 4.1.1:**  $\alpha$  uzaysal kuaterniyonik eğrisinin involütü  $\alpha^*$  olsun.  $\alpha^*$  eğrisinden elde edilen  $t^* n_1^*$  -Smarandache eğrisinin Frenet vektörleri ve eğrilikleri  $\alpha$  evolüt eğrisinin Frenet vektörlerine ve eğriliklerine bağlı ifadeleri sırasıyla

$$\begin{cases} t_{\beta_1}(s) = \frac{\varphi' \sin \varphi - k}{\sqrt{\varphi'^2 + 2N(D)^2}} t - \frac{N(D)}{\sqrt{\varphi'^2 + 2N(D)^2}} n_1 + \frac{\varphi' \cos \varphi + r}{\sqrt{\varphi'^2 + 2N(D)^2}} n_2 \\ n_{1\beta_1} = \frac{\bar{\omega}_1}{\sqrt{\bar{\omega}_1^2 + \bar{\phi}_1^2 + \bar{\sigma}_1^2}} t + \frac{\bar{\phi}_1}{\sqrt{\bar{\omega}_1^2 + \bar{\phi}_1^2 + \bar{\sigma}_1^2}} n_1 + \frac{\bar{\sigma}_1}{\sqrt{\bar{\omega}_1^2 + \bar{\phi}_1^2 + \bar{\sigma}_1^2}} n_2 \\ n_{2\beta_1} = \frac{(-N(D)\bar{\sigma}_1 - (\varphi' \cos \varphi + r)\bar{\phi}_1)}{\sqrt{(\varphi'^2 + 2N(D)^2)(\bar{\omega}_1^2 + \bar{\phi}_1^2 + \bar{\sigma}_1^2)}} t + \frac{(\bar{\omega}_1(\varphi' \cos \varphi + r) - \bar{\sigma}_1(\varphi' \sin \varphi - k))}{\sqrt{(\varphi'^2 + 2N(D)^2)(\bar{\omega}_1^2 + \bar{\phi}_1^2 + \bar{\sigma}_1^2)}} n_1 \\ \quad + \frac{(\bar{\phi}_1(\varphi' \sin \varphi - k) + \bar{\omega}_1 N(D))}{\sqrt{(\varphi'^2 + 2N(D)^2)(\bar{\omega}_1^2 + \bar{\phi}_1^2 + \bar{\sigma}_1^2)}} n_2, \\ k_{\beta_1} = \sqrt{2} \frac{\sqrt{\bar{\omega}_1^2 + \bar{\phi}_1^2 + \bar{\sigma}_1^2}}{(\varphi'^2 + 2N(D)^2)^{3/2}} \\ r_{\beta_1} = \sqrt{2} \frac{\bar{\eta}_1 \tilde{\omega}_1 + \bar{\theta}_1 \tilde{\phi}_1 + \bar{\rho}_1 \tilde{\sigma}_1}{\tilde{\omega}_1^2 + \tilde{\phi}_1^2 + \tilde{\sigma}_1^2} \end{cases}$$

şeklindedir. Burada katsayılar

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\eta}_1 = \varphi''' \sin \varphi + 3\varphi' \varphi'' \cos \varphi - \varphi'^3 \sin \varphi - k'' + k'N(D) + 2kN(D)' + kN(D)^2 \\ \bar{\theta}_1 = \varphi'^2 N(D) - kk' - rr' + N(D)^3 - 2N(D)N(D)' + N(D)'' \\ \bar{\rho}_1 = \varphi''' \cos \varphi - 3\varphi' \varphi'' \sin \varphi - \varphi'^3 \cos \varphi + r'' - r'N(D) - 2rN(D)' - rN(D)^2 \\ \tilde{\omega}_1 = -N(D)(\varphi'' \cos \varphi - \varphi'^2 \sin \varphi + r' - rN(D)) + (N(D)^2 + N(D)')(\varphi' \cos \varphi + r) \\ \tilde{\phi}_1 = (\varphi' \cos \varphi + r)(\varphi'' \sin \varphi + \varphi'^2 \cos \varphi - k' + kN(D)) \\ \quad - (\varphi' \sin \varphi - k)(\varphi'' \cos \varphi - \varphi'^2 \sin \varphi + r' - rN(D)) \\ \tilde{\sigma}_1 = (\varphi' \sin \varphi - k)(-N(D)^2 - N(D)') + N(D)(\varphi'' \sin \varphi + \varphi'^2 \cos \varphi - k' + kN(D)) \end{array} \right.$$

biçimindedir.

#### 4.2. $n_1^* n_2^*$ - Uzaysal Kuaterniyonik Smarandache Eğrisi

**Tanım 4.2.1:**  $\alpha^*$  uzaysal kuaterniyonik involüt eğrisinin Frenet vektörleri  $\{t^*, n_1^*, n_2^*\}$  olsun.

$$\beta_2(s) = \beta_{n_1^* n_2^*}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(n_1^* + n_2^*) \quad (4.2.1)$$

şeklinde tanımlı eğriye  $n_1^* n_2^*$  - Smarandache eğrisi denir.

**Teorem 4.2.1:**  $\alpha$  uzaysal kuaterniyonik eğrisinin involütü  $\alpha^*$  olsun.  $\alpha^*$  eğrisinden elde edilen  $n_1^* n_2^*$  - Smarandache eğrisinin Frenet vektörleri ve eğrilikleri sırasıyla

$$\left\{ \begin{array}{l} t_{\beta_2}(s) = \frac{-k}{\sqrt{2r^{*2} + k^{*2}}} t^* - \frac{r}{\sqrt{2r^{*2} + k^{*2}}} n_1^* + \frac{r}{\sqrt{2r^{*2} + k^{*2}}} n_2^* \\ n_{1\beta_2} = \frac{\omega_2}{\sqrt{\omega_2^2 + \phi_2^2 + \sigma_2^2}} t^* + \frac{\phi_2}{\sqrt{\omega_2^2 + \phi_2^2 + \sigma_2^2}} n_1^* + \frac{\sigma_2}{\sqrt{\omega_2^2 + \phi_2^2 + \sigma_2^2}} n_2^* \\ n_{2\beta_2} = \frac{-r^*(\sigma_2 + \phi_2)}{\sqrt{(k^{*2} + 2r^{*2})(\omega_2^2 + \phi_2^2 + \sigma_2^2)}} t^* + \frac{r^* \omega_2 + k^* \sigma_2}{\sqrt{(k^{*2} + 2r^{*2})(\omega_2^2 + \phi_2^2 + \sigma_2^2)}} n_1^* \\ \quad + \frac{-k^* \phi_2 + r^* \omega_2}{\sqrt{(k^{*2} + 2r^{*2})(\omega_2^2 + \phi_2^2 + \sigma_2^2)}} n_2^*, \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} k_{\beta_2} = \sqrt{2} \frac{\sqrt{\omega_2^2 + \phi_2^2 + \sigma_2^2}}{(k^{*2} + 2r^{*2})^2} \\ r_{\beta_2} = \sqrt{2} \frac{(r^*(2r^{*2} + k^{*2}))\eta_2 + (-k^*r^* + k^*r^{*'})\theta_2 + (k^*(k^{*2} + 2r^{*2} + r^{*'}) - r^*k^{*'})\rho_2}{[r^*(2r^{*2} + k^{*2})]^2 + [-k^*r^* + k^*r^{*'}]^2 + [k^*(k^{*2} + 2r^{*2} + r^{*'}) - r^*k^{*'}]^2} \end{cases}$$

olur. Burada  $\omega_2, \phi_2, \sigma_2, \eta_2, \theta_2$  ve  $\rho_2$

$$\begin{cases} \omega_2 = 2r^{*2}(-k^{*'} + r^*k^*) + k^*r^*(k^{*2} + 2r^{*'}) \\ \phi_2 = k^*(-k^{*3} - r^*k^* + r^*k^{*'}) - r^{*2}(3k^{*2} + 2r^{*2}) \\ \sigma_2 = k^{*2}(r^{*'} - r^{*2}) - r^*(2r^{*3} + k^*k^{*'}) \\ \eta_2 = r^{*2}k^* + k^{*3} + k^*r^* + 2k^*r^{*'} - k^{*''} \\ \theta_2 = r^{*3} + r^*k^{*2} - 3k^*k^{*'} - 3r^*r^{*'} - r^{*''} \\ \rho_2 = -r^{*3} - r^*k^{*2} - 3r^*r^{*'} + r^{*''} \end{cases}$$

şeklinde birer katsayıdır.

**İspat:** (4.2.1) bağıntısının  $s_{\beta_2}$  yay parametresine göre türevi alınırsa

$$t_{\beta_2} \frac{ds_{\beta_2}}{ds} = \frac{(-kt^* - rn_1^* + m_2^*)}{\sqrt{2}} \quad (4.2.2)$$

olur ve norm alınırsa  $\frac{ds_{\beta_2}}{ds}$  ifadesi

$$\frac{ds_{\beta_2}}{ds} = \sqrt{\frac{2r^{*2} + k^{*2}}{2}} \quad (4.2.3)$$

şeklinde bulunur. Bu ifade yukarıda yerine yazılırsa  $\beta_2$  eğrisinin teğet vektörü

$$t_{\beta_2}(s) = \frac{-k}{\sqrt{2r^{*2} + k^{*2}}} t^* - \frac{r}{\sqrt{2r^{*2} + k^{*2}}} n_1^* + \frac{r}{\sqrt{2r^{*2} + k^{*2}}} n_2^* \quad (4.2.4)$$

şeklinde olur. (4.2.1) ifadesinde  $n_1^*$  ve  $n_2^*$  m yerine (3.2.12) den karşılıkları yazılırsa Smarandache eğrisinin evolüt eğrisine bağlı ifadesi

$$\beta_2(s) = \frac{1}{\sqrt{2}} [(\sin \varphi - \cos \varphi)t + (\sin \varphi + \cos \varphi)n_2] \quad (4.2.5)$$

şeklinde bulunur. (4.2.4) denkleminde (3.2.12) ve (3.2.13) den karşılıkları yazılırsa (4.2.5) ifadesinde verilen  $\beta_2$  eğrisinin teğet vektörü

$$t_{\beta_2} = \frac{\varphi' \cos \varphi + \varphi' \sin \varphi}{\sqrt{2\varphi'^2 + N(D)^2}} t - \frac{N(D)}{\sqrt{2\varphi'^2 + N(D)^2}} n_1 + \frac{\varphi' \cos \varphi - \varphi' \sin \varphi}{\sqrt{2\varphi'^2 + N(D)^2}} n_2 \quad (4.2.6)$$

olur. (4.2.4) ifadesinin türevi alınırsa katsayılar

$$\begin{cases} \omega_2 = 2r^{*2}(-k^{*'} + r^* k^{*'}) + k^* r^* (k^{*2} + 2r^{*'}) \\ \phi_2 = k^* (-k^{*3} - r^{*'} k^* + r^* k^{*'}) - r^{*2} (3k^{*2} + 2r^{*2}) \\ \sigma_2 = k^{*2} (r^{*'} - r^{*2}) - r^* (2r^{*3} + k^* k^{*'}) \end{cases} \quad (4.2.7)$$

olmak üzere  $t'_{\beta_2}(s)$  türevi

$$t'_{\beta_2}(s) = \sqrt{2} \frac{\omega_2 t^* + \phi_2 n_1^* + \sigma_2 n_2^*}{(k^{*2} + 2r^{*2})^2} \quad (4.2.8)$$

olur. (4.2.7) ifadesinde  $k^*$  ve  $r^*$  in yerine (3.2.13) dan karşılıkları yazılırsa yeni katsayılar

$$\begin{cases} \bar{\omega}_2 = (\varphi'' \cos \varphi - \varphi'^2 \sin \varphi + \varphi'' \sin \varphi + \varphi'^2 \cos \varphi + kN(D)) \sqrt{2\varphi'^2 + N(D)^2} \\ \quad - (\varphi' \cos \varphi + \varphi' \sin \varphi) (\sqrt{2\varphi'^2 + N(D)^2})' \\ \bar{\phi}_2 = (N(D)\varphi' - N(D)') \sqrt{2\varphi'^2 + N(D)^2} + N(D) (\sqrt{2\varphi'^2 + N(D)^2})' \\ \bar{\sigma}_2 = (\varphi'' \cos \varphi - \varphi'^2 \sin \varphi - \varphi'' \sin \varphi - \varphi'^2 \cos \varphi - rN(D)) \sqrt{2\varphi'^2 + N(D)^2} \\ \quad - (\varphi' \cos \varphi - \varphi' \sin \varphi) (\sqrt{2\varphi'^2 + N(D)^2})' \end{cases} \quad (4.2.9)$$

şeklinde olur.  $t'_{\beta_2}(s)$  türev ifadesinde (3.2.12), (3.2.13) ve (4.2.9) bağıntıları yerine yazılırsa  $t'_{\beta_2}$  vektörünün evolüt eğrisinin Frenet elemanları cinsinden ifadesi



$$t'_{\beta_2}(s) = \sqrt{2} \frac{\bar{\omega}_2 t + \bar{\phi}_2 n_1 + \bar{\sigma}_2 n_2}{(2\varphi'^2 + N(D))^{\frac{3}{2}}} \quad (4.2.10)$$

şeklinde bulunur.  $\beta_2$  eğrisinin eğriliği  $k_{\beta_2}$  ile gösterilirse (4.2.8) bağıntısından  $k_{\beta_2}$  eğriliği

$$k_{\beta_2} = N(t'_{\beta_2}),$$

$$k_{\beta_2} = \sqrt{2} \frac{\sqrt{\omega_2^2 + \phi_2^2 + \sigma_2^2}}{(k^{*2} + 2r^{*2})^2} \quad (4.2.11)$$

dır. Burada  $k^*$  ve  $r^*$  in yerine (3.2.13) den karşılıkları yazılırsa  $k_{\beta_2}$  eğriliğinin evölüt eğrisinin eğriliklerine bağlı ifadesi

$$k_{\beta_2} = \sqrt{2} \frac{\sqrt{\bar{\omega}_2^2 + \bar{\phi}_2^2 + \bar{\sigma}_2^2}}{(2\varphi'^2 + N(D))^{\frac{3}{2}}} \quad (4.2.12)$$

şekline dönüşür.  $\beta_2$  eğrisinin aslinormali  $n_{1\beta_2}$  ile gösterilirse (4.2.8) bağıntısından

$$n_{1\beta_2} = \frac{t'_{\beta_2}}{N(t'_{\beta_2})},$$

$$n_{1\beta_2} = \frac{\omega_2}{\sqrt{\omega_2^2 + \phi_2^2 + \sigma_2^2}} t^* + \frac{\phi_2}{\sqrt{\omega_2^2 + \phi_2^2 + \sigma_2^2}} n_1^* + \frac{\sigma_2}{\sqrt{\omega_2^2 + \phi_2^2 + \sigma_2^2}} n_2^*$$

olur. Burada  $t^*$ ,  $n_1^*$  ve  $n_2^*$  in yerine (3.2.13) dan karşılıkları yazılırsa  $n_{1\beta_2}$  ifadesinin evölüt eğrisinin Frenet elemanları cinsinden ifadesi

$$n_{1\beta_2} = \frac{\bar{\omega}_2}{\sqrt{\bar{\omega}_2^2 + \bar{\phi}_2^2 + \bar{\sigma}_2^2}} t + \frac{\bar{\phi}_2}{\sqrt{\bar{\omega}_2^2 + \bar{\phi}_2^2 + \bar{\sigma}_2^2}} n_1 + \frac{\bar{\sigma}_2}{\sqrt{\bar{\omega}_2^2 + \bar{\phi}_2^2 + \bar{\sigma}_2^2}} n_2 \quad (4.2.13)$$

şeklindedir.  $n_{2\beta_2} = t_{\beta_2} \times n_{1\beta_2}$  olduğundan  $n_{2\beta_2}$  binormal vektörü

$$\begin{aligned}
n_{2\beta_2} &= \frac{-r^*(\sigma_2 + \phi_2)}{\sqrt{(k^{*2} + 2r^{*2})(\omega_2^2 + \phi_2^2 + \sigma_2^2)}} t^* \\
&+ \frac{r^*\omega_2 + k^*\sigma_2}{\sqrt{(k^{*2} + 2r^{*2})(\omega_2^2 + \phi_2^2 + \sigma_2^2)}} n_1^* \\
&+ \frac{-k^*\phi_2 + r^*\omega_2}{\sqrt{(k^{*2} + 2r^{*2})(\omega_2^2 + \phi_2^2 + \sigma_2^2)}} n_2^*
\end{aligned} \tag{4.2.14}$$

olur. Burada  $t^*$ ,  $n_1^*$ ,  $n_2^*$ ,  $k^*$  ve  $r^*$  in yerine (3.2.12) ve (3.2.13) den karşılıkları yazılırsa  $n_{2\beta_2}$  binormal vektörünün evolüt eğrisinin Frenet elemanları cinsinden ifadesi

$$\begin{aligned}
n_{2\beta_2} &= \frac{-N(D)\bar{\sigma}_2 - (\varphi' \cos \varphi - \varphi' \sin \varphi)\bar{\phi}_2}{\sqrt{(2\varphi'^2 + N(D)^2)(\bar{\omega}_2^2 + \bar{\phi}_2^2 + \bar{\sigma}_2^2)}} t \\
&+ \frac{(\varphi' \cos \varphi - \varphi' \sin \varphi)\bar{\omega}_2 - (\varphi' \cos \varphi + \varphi' \sin \varphi)\bar{\sigma}_2}{\sqrt{(2\varphi'^2 + N(D)^2)(\bar{\omega}_2^2 + \bar{\phi}_2^2 + \bar{\sigma}_2^2)}} n_1 \\
&+ \frac{(\varphi' \cos \varphi + \varphi' \sin \varphi)\bar{\phi}_2 + N(D)\bar{\omega}_2}{\sqrt{(2\varphi'^2 + N(D)^2)(\bar{\omega}_2^2 + \bar{\phi}_2^2 + \bar{\sigma}_2^2)}} n_2
\end{aligned} \tag{4.2.15}$$

şeklinde bulunur.  $\beta_2$  eğrisinin ikinci ve üçüncü türevleri sırasıyla

$$\beta_2'' = \frac{(-k^{*'} + r^*k^*)t^* - (k^{*2} + r^{*2} + r^{*'})n_1^* + (r^{*'} - r^{*2})n_2^*}{\sqrt{2}}$$

ve

$$\beta_2''' = \frac{\eta_2 t^* + \theta_2 n_1^* + \rho_2 n_2^*}{\sqrt{2}}$$

olur. Burada  $\eta_2$ ,  $\theta_2$  ve  $\rho_2$

$$\begin{cases}
\eta_2 = r^{*2}k^* + k^{*3} + k^{*'}r^* + 2k^*r^{*'} - k^{*''} \\
\theta_2 = r^{*3} + r^*k^{*2} - 3k^*k^{*'} - 3r^*r^{*'} - r^{*''} \\
\rho_2 = -r^{*3} - r^*k^{*2} - 3r^*r^{*'} + r^{*''}
\end{cases} \tag{4.2.16}$$

şeklinde birer katsayılarıdır.  $\beta_2$  eğrisinin torsiyonu  $r_{\beta_2}$  ile gösterilirse  $r_{\beta_2}$  torsiyonu

$$r_{\beta_2} = \frac{\langle \beta_2' \times \beta_2'', \beta_2''' \rangle \Big|_{\mathbb{Q}}}{N(\beta_2' \times \beta_2'')^2}$$

dir. Burada  $\beta_2'$ ,  $\beta_2''$  ve  $\beta_2'''$  değerleri yerine yazılır ve gerekli hesaplamalar yapılırsa  $r_{\beta_2}$  torsiyonu

$$r_{\beta_2} = \sqrt{2} \frac{\left( r^* (2r^{*2} + k^{*2}) \right) \eta_2 + \left( -k^* r^* + k^* r^{*'} \right) \theta_2 + \left( k^* (k^{*2} + 2r^{*2} + r^{*'}) - r^* k^{*' } \right) \rho_2}{\left[ r^* (2r^{*2} + k^{*2}) \right]^2 + \left[ -k^* r^* + k^* r^{*' } \right]^2 + \left[ k^* (k^{*2} + 2r^{*2} + r^{*'}) - r^* k^{*' } \right]^2} \quad (4.2.17)$$

olur. (4.2.16) katsayılar ifadesinde  $k^*$  ve  $r^*$  in yerine (3.2.13) den karşılıkları yazılırsa yeni katsayılar

$$\begin{cases} \bar{\eta}_2 = \varphi''' \cos \varphi - 3\varphi' \varphi'' \sin \varphi - \varphi'^3 \cos \varphi + \varphi''' \sin \varphi + 3\varphi' \varphi'' \cos \varphi \\ \quad - \varphi'^3 \sin \varphi + k' N(D) + 2kN(D)' - k\varphi' N(D) \\ \bar{\theta}_2 = 2\varphi'' N(D) + \varphi'^2 N(D) + N(D)^3 + N(D)' \varphi' - N(D)'' \\ \bar{\rho}_2 = \varphi''' \cos \varphi - 3\varphi' \varphi'' \sin \varphi - \varphi'^3 \cos \varphi - \varphi''' \sin \varphi - 3\varphi' \varphi'' \cos \varphi \\ \quad + \varphi'^3 \sin \varphi - r' N(D) - 2rN(D)' + rN(D)\varphi' \end{cases} \quad (4.2.18)$$

şeklinde bulunur ve bu katsayılar (4.2.17) de yerine yazılırsa  $n_1^* n_2^*$  eğrisinin  $r_{\beta_2}$  torsiyonunun evolüt eğrisinin Frenet elemanları cinsinden ifadesi

$$\begin{cases} \tilde{\omega}_2 = -N(D) \left( \varphi'' \cos \varphi - \varphi'^2 \sin \varphi - \varphi'' \sin \varphi - \varphi'^2 \cos \varphi - rN(D) \right) \\ \quad - \left( \varphi' \cos \varphi - \varphi' \sin \varphi \right) \left( N(D)\varphi' - N(D)' \right) \\ \tilde{\phi}_2 = \left( \varphi' \cos \varphi - \varphi' \sin \varphi \right) \left( \varphi'' \cos \varphi - \varphi'^2 \sin \varphi + \varphi'' \sin \varphi + \varphi'^2 \cos \varphi + kN(D) \right) \\ \quad - \left( \varphi' \cos \varphi + \varphi' \sin \varphi \right) \left( \varphi'' \cos \varphi - \varphi'^2 \sin \varphi - \varphi'' \sin \varphi - \varphi'^2 \cos \varphi - rN(D) \right) \\ \tilde{\sigma}_2 = \left( \varphi' \cos \varphi + \varphi' \sin \varphi \right) \left( N(D)\varphi' - N(D)' \right) \\ \quad + N(D) \left( \varphi'' \cos \varphi - \varphi'^2 \sin \varphi + \varphi'' \sin \varphi + \varphi'^2 \cos \varphi + kN(D) \right) \end{cases} \quad (4.2.19)$$

katsayılar  $\tilde{\omega}_2, \tilde{\phi}_2, \tilde{\sigma}_2$  olmak üzere

$$r_{\beta_2} = \sqrt{2} \frac{\bar{\eta}_2 \tilde{\omega}_2 + \bar{\theta}_2 \tilde{\phi}_2 + \bar{\rho}_2 \tilde{\sigma}_2}{\tilde{\omega}_2^2 + \tilde{\phi}_2^2 + \tilde{\sigma}_2^2}$$

şeklinde elde edilir. Böylece şu sonuç verilir:

**Sonuç 4.2.1:**  $\alpha$  uzaysal kuaterniyonik eğrisinin involütü  $\alpha^*$  olsun.  $\alpha^*$  eğrisinden elde edilen  $n_1^* n_2^*$  -Smarandache eğrisinin Frenet vektörleri ve eğrilikleri  $\alpha$  evolüt eğrisinin Frenet vektörlerine ve eğriliklerine bağlı ifadeleri sırasıyla

$$\left\{ \begin{array}{l} t_{\beta_2} = \frac{\varphi' \cos \varphi + \varphi' \sin \varphi}{\sqrt{2\varphi'^2 + N(D)^2}} t - \frac{N(D)}{\sqrt{2\varphi'^2 + N(D)^2}} n_1 + \frac{\varphi' \cos \varphi - \varphi' \sin \varphi}{\sqrt{2\varphi'^2 + N(D)^2}} n_2 \\ n_{1\beta_2} = \frac{\bar{\omega}_2}{\sqrt{\bar{\omega}_2^2 + \bar{\phi}_2^2 + \bar{\sigma}_2^2}} t + \frac{\bar{\phi}_2}{\sqrt{\bar{\omega}_2^2 + \bar{\phi}_2^2 + \bar{\sigma}_2^2}} n_1 + \frac{\bar{\sigma}_2}{\sqrt{\bar{\omega}_2^2 + \bar{\phi}_2^2 + \bar{\sigma}_2^2}} n_2 \\ n_{2\beta_2} = \frac{-N(D)\bar{\sigma}_2 - (\varphi' \cos \varphi - \varphi' \sin \varphi)\bar{\phi}_2}{\sqrt{(2\varphi'^2 + N(D)^2)(\bar{\omega}_2^2 + \bar{\phi}_2^2 + \bar{\sigma}_2^2)}} t \\ + \frac{(\varphi' \cos \varphi - \varphi' \sin \varphi)\bar{\omega}_2 - (\varphi' \cos \varphi + \varphi' \sin \varphi)\bar{\sigma}_2}{\sqrt{(2\varphi'^2 + N(D)^2)(\bar{\omega}_2^2 + \bar{\phi}_2^2 + \bar{\sigma}_2^2)}} n_1 \\ + \frac{(\varphi' \cos \varphi + \varphi' \sin \varphi)\bar{\phi}_2 + N(D)\bar{\omega}_2}{\sqrt{(2\varphi'^2 + N(D)^2)(\bar{\omega}_2^2 + \bar{\phi}_2^2 + \bar{\sigma}_2^2)}} n_2, \\ k_{\beta_2} = \sqrt{2} \frac{\sqrt{\bar{\omega}_2^2 + \bar{\phi}_2^2 + \bar{\sigma}_2^2}}{(2\varphi'^2 + N(D)^2)^{\frac{3}{2}}} \\ r_{\beta_2} = \sqrt{2} \frac{\bar{\eta}_2 \tilde{\omega}_2 + \bar{\theta}_2 \tilde{\phi}_2 + \bar{\rho}_2 \tilde{\sigma}_2}{\tilde{\omega}_2^2 + \tilde{\phi}_2^2 + \tilde{\sigma}_2^2} \end{array} \right.$$

olur. Burada  $\bar{\omega}_2, \bar{\phi}_2, \bar{\sigma}_2, \bar{\eta}_2, \bar{\theta}_2, \bar{\rho}_2, \tilde{\omega}_2, \tilde{\phi}_2$  ve  $\tilde{\sigma}_2$  katsayıları

$$\left\{ \begin{array}{l}
\bar{\omega}_2 = (\varphi'' \cos \varphi - \varphi'^2 \sin \varphi + \varphi'' \sin \varphi + \varphi'^2 \cos \varphi + kN(D)) \sqrt{2\varphi'^2 + N(D)^2} \\
\quad - (\varphi' \cos \varphi + \varphi' \sin \varphi) \left( \sqrt{2\varphi'^2 + N(D)^2} \right)' \\
\bar{\phi}_2 = \left( N(D) \varphi' - N(D)' \right) \sqrt{2\varphi'^2 + N(D)^2} + N(D) \left( \sqrt{2\varphi'^2 + N(D)^2} \right)' \\
\bar{\sigma}_2 = (\varphi'' \cos \varphi - \varphi'^2 \sin \varphi - \varphi'' \sin \varphi - \varphi'^2 \cos \varphi - rN(D)) \sqrt{2\varphi'^2 + N(D)^2} \\
\quad - (\varphi' \cos \varphi - \varphi' \sin \varphi) \left( \sqrt{2\varphi'^2 + N(D)^2} \right)' \\
\bar{\eta}_2 = \varphi''' \cos \varphi - 3\varphi' \varphi'' \sin \varphi - \varphi'^3 \cos \varphi + \varphi''' \sin \varphi \\
\quad + 3\varphi' \varphi'' \cos \varphi - \varphi'^3 \sin \varphi + k'N(D) + 2kN(D)' - k\varphi'N(D) \\
\bar{\theta}_2 = 2\varphi''N(D) + \varphi'^2N(D) + N(D)^3 + N(D)' \varphi' - N(D)'' \\
\bar{\rho}_2 = \varphi''' \cos \varphi - 3\varphi' \varphi'' \sin \varphi - \varphi'^3 \cos \varphi - \varphi''' \sin \varphi \\
\quad - 3\varphi' \varphi'' \cos \varphi + \varphi'^3 \sin \varphi - r'N(D) - 2rN(D)' + rN(D) \varphi' \\
\tilde{\omega}_2 = -N(D) (\varphi'' \cos \varphi - \varphi'^2 \sin \varphi - \varphi'' \sin \varphi - \varphi'^2 \cos \varphi - rN(D)) \\
\quad - (\varphi' \cos \varphi - \varphi' \sin \varphi) \left( N(D) \varphi' - N(D)' \right) \\
\tilde{\phi}_2 = (\varphi' \cos \varphi - \varphi' \sin \varphi) (\varphi'' \cos \varphi - \varphi'^2 \sin \varphi + \varphi'' \sin \varphi + \varphi'^2 \cos \varphi + kN(D)) \\
\quad - (\varphi' \cos \varphi + \varphi' \sin \varphi) (\varphi'' \cos \varphi - \varphi'^2 \sin \varphi - \varphi'' \sin \varphi - \varphi'^2 \cos \varphi - rN(D)) \\
\tilde{\sigma}_2 = (\varphi' \cos \varphi + \varphi' \sin \varphi) \left( N(D) \varphi' - N(D)' \right) \\
\quad + N(D) (\varphi'' \cos \varphi - \varphi'^2 \sin \varphi + \varphi'' \sin \varphi + \varphi'^2 \cos \varphi + kN(D))
\end{array} \right.$$

biçimindedir.

### 4.3. $t^*n_2^*$ -Uzaysal Kuaterniyonik Smarandache Eğrisi

**Tanım 4.3.1:**  $\alpha^*$  uzaysal kuaterniyonik involüt eğrisinin Frenet vektörleri  $\{t^*, n_1^*, n_2^*\}$  olsun.

$$\beta_3(s) = \beta_{t^*n_2^*}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(t^* + n_2^*) \quad (4.3.1)$$

şeklinde tanımlı eğriye  $t^*n_2^*$  - Smarandache eğrisi denir.

**Teorem 4.3.1:**  $\alpha$  uzaysal kuaterniyonik eğrisinin involütü  $\alpha^*$  olsun.  $\alpha^*$  eğrisinden elde edilen  $t^* n_2^*$  -Smarandache eğrisinin Frenet vektörleri ve eğrilikleri sırasıyla

$$\begin{cases} t_{\beta_3}(s) = n_1^* \\ n_{1\beta_3} = \frac{-k^*}{\sqrt{k^{*2} + r^{*2}}} t^* + \frac{r^*}{\sqrt{k^{*2} + r^{*2}}} n_2^* \\ n_{2\beta_3} = \frac{r^*}{\sqrt{k^{*2} + r^{*2}}} t^* + \frac{k^*}{\sqrt{k^{*2} + r^{*2}}} n_2^*, \end{cases}$$

$$\begin{cases} k_{\beta_3} = \sqrt{2} \frac{\sqrt{(k^{*2} + r^{*2})}}{k^* - r^*} \\ r_{\beta_3} = \sqrt{2} \frac{\eta_3 (r^* (k^* - r^*)^2) + \rho_3 (k^* (k^* - r^*)^2)}{[r^* (k^* - r^*)^2]^2 + [k^* (k^* - r^*)^2]^2}, \end{cases}$$

şeklindedir Burada

$$\begin{cases} \eta_3 = -3k^* k'^* + 2k^* r'^* + k'^* r^* \\ \theta_3 = -k^{*3} + r^* k^{*2} - k^* r^{*2} + r^{*3} + k^{*''} - r^{*''} \\ \rho_3 = k^* r'^* + 2k'^* r^* - 3r^* r'^* \end{cases}$$

$\eta_3$ ,  $\theta_3$  ve  $\rho_3$  birer katsayıdır

**İspat:** (4.3.1) bağıntısının  $s_{\beta_3}$  yay parametresine göre türevi alınırsa

$$t_{\beta_3} \frac{ds_{\beta_3}}{ds} = \frac{(k^* - r^*) n_1^*}{\sqrt{2}} \quad (4.3.2)$$

olur ve norm alınırsa  $\frac{ds_{\beta_3}}{ds}$  ifadesi

$$\frac{ds_{\beta_3}}{ds} = \frac{|k^* - r^*|}{\sqrt{2}} \quad (4.3.3)$$

şeklinde bulunur. Bu ifade yukarıda yerine yazılırsa  $\beta_3$  eğrisinin teğet vektörü

$$t_{\beta_3}(s) = n_1^* \quad (4.3.4)$$

olur. (4.3.1) ifadesinde  $t^*$  ve  $n_2^*$  in yerine (3.2.12) dan karşılıkları yazılırsa Smarandache eğrisinin evolüt eğrisine bağlı ifadesi

$$\beta_3(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin \varphi t + n_1 + \cos \varphi n_2) \quad (4.3.5)$$

olur. (4.3.4) bağıntısında (3.2.12) dan karşılığı yazılırsa (4.3.5) ifadesinde verilen  $\beta_3$  eğrisinin teğet vektörü

$$t_{\beta_3}(s) = \frac{\varphi' \cos \varphi - k}{|\varphi' - N(D)|} t + \frac{-\varphi' \sin \varphi + r}{|\varphi' - N(D)|} n_2 \quad (4.3.6)$$

şeklinde bulunur. (4.3.4) ifadesinin tekrar türevi alınırsa  $t'_{\beta_3}(s)$  türevi

$$t'_{\beta_3}(s) = \frac{\sqrt{2}}{k^* - r^*} (-k^* t^* + r^* n_2^*) \quad (4.3.7)$$

olur veya bu ifadelerin yerine  $t^*$ ,  $n_2^*$ ,  $k^*$  ve  $r^*$  in yerine (3.2.12) ve (3.2.13) den karşılıkları yazılırsa katsayılar

$$\begin{cases} \bar{\omega}_3 = (\varphi'' \cos \varphi - \varphi'^2 \sin \varphi - k') |\varphi' - N(D)| \\ \quad - (\varphi' \cos \varphi - k) (\varphi' - N(D))' \\ \bar{\phi}_3 = (\varphi' N(D) - N(D)^2) |\varphi' - N(D)| \\ \bar{\sigma}_3 = (-\varphi'' \sin \varphi - \varphi'^2 \cos \varphi + r') |\varphi' - N(D)| \\ \quad - (-\varphi' \sin \varphi + r) (\varphi' - N(D))' \end{cases} \quad (4.3.8)$$

şeklinde olur.  $t'_{\beta_3}(s)$  türev ifadesindeki (3.2.12) ve (4.3.8) bağıntıları yerine yazılırsa  $t'_{\beta_3}(s)$  vektörünün evolüt eğrisinin Frenet elemanları cinsinden karşılığı

$$t'_{\beta_3}(s) = \sqrt{2} \frac{\bar{\omega}_3 t + \bar{\phi}_3 n_1 + \bar{\sigma}_3 n_2}{(\varphi' - N(D))^3} \quad (4.3.9)$$

şeklinde bulunur.  $\beta_3$  eğrisinin eğriliği  $k_{\beta_3}$  ile gösterilirse (4.3.7) bağıntısından  $k_{\beta_3}$  eğriliği

$$k_{\beta_3} = N(t'_{\beta_3}),$$

$$k_{\beta_3} = \sqrt{2} \frac{\sqrt{(k^{*2} + r^{*2})}}{k^* - r^*} \quad (4.3.10)$$

olur. Burada  $k^*$  ve  $r^*$  in yerine (4.2.13) dan karşılıkları yazılırsa  $k_{\beta_3}$  eğriliğinin evolüt eğrisinin eğriliklerine bağlı ifadesi

$$k_{\beta_3} = \sqrt{2} \frac{\sqrt{(\bar{\omega}_3^2 + \bar{\phi}_3^2 + \bar{\sigma}_3^2)}}{(\varphi' - N(D))^3} \quad (4.3.11)$$

şekline dönüşür.  $\beta_3$  eğrisinin aslinormali  $n_{1\beta_3}$  ile gösterilirse (4.3.7) bağıntısından

$$n_{1\beta_3} = \frac{t'_{\beta_3}}{N(t'_{\beta_3})},$$

$$n_{1\beta_3} = \frac{-k^*}{\sqrt{k^{*2} + r^{*2}}} t^* + \frac{r^*}{\sqrt{k^{*2} + r^{*2}}} n_2^*$$

olur. Burada  $t^*$  ve  $n_2^*$  in yerine (3.2.12) den karşılıkları yazılırsa  $n_{1\beta_3}$  ifadesinin evolüt eğrisinin Frenet elemanları cinsinden ifadesi

$$n_{1\beta_3} = \frac{\bar{\omega}_3}{\sqrt{\bar{\omega}_3^2 + \bar{\phi}_3^2 + \bar{\sigma}_3^2}} t + \frac{\bar{\phi}_3}{\sqrt{\bar{\omega}_3^2 + \bar{\phi}_3^2 + \bar{\sigma}_3^2}} n_1 + \frac{\bar{\sigma}_3}{\sqrt{\bar{\omega}_3^2 + \bar{\phi}_3^2 + \bar{\sigma}_3^2}} n_2 \quad (4.3.12)$$

şeklinde bulunur.  $n_{2\beta_3} = t_{\beta_3} \times n_{1\beta_3}$  olduğundan  $n_{2\beta_3}$  binormal vektörü

$$n_{2\beta_3} = \frac{r^*}{\sqrt{k^{*2} + r^{*2}}} t^* + \frac{k^*}{\sqrt{k^{*2} + r^{*2}}} n_2^* \quad (4.3.13)$$

olur. Burada  $t^*$ ,  $n_2^*$ ,  $k^*$  ve  $r^*$  in yerine (3.2.12) ve (3.2.13) den karşılıkları yazılırsa  $n_{2\beta_3}$  binormal vektörünün evolüt eğrisinin Frenet elemanları cinsinden ifadesi

$$n_{2\beta_3} = \frac{(\varphi' \sin \varphi - r) \bar{\phi}}{|\varphi' - N(D)| \sqrt{(\bar{\omega}_3^2 + \bar{\phi}_3^2 + \bar{\sigma}_3^2)}} t$$

$$+ \frac{(\varphi' \sin \varphi - r) \bar{\omega}_3 - (\varphi' \cos \varphi - k) \bar{\sigma}_3}{|\varphi' - N(D)| \sqrt{(\bar{\omega}_3^2 + \bar{\phi}_3^2 + \bar{\sigma}_3^2)}} n_1 \quad (4.3.14)$$

$$+ \frac{(\varphi' \cos \varphi - k) \bar{\phi}}{|\varphi' - N(D)| \sqrt{(\bar{\omega}_3^2 + \bar{\phi}_3^2 + \bar{\sigma}_3^2)}} n_2$$



şeklinde bulunur.  $\beta_3$  eğrisinin ikinci ve üçüncü türevleri sırasıyla

$$\beta_3'' = \frac{(-k^{*2} + r^* k^*)t^* + (k^{*'} - r^{*'})n_1^* + (k^* r^* - r^{*2})n_2^*}{\sqrt{2}}$$

ve

$$\beta_3''' = \frac{\eta_3 t^* + \theta_3 n_1^* + \rho_3 n_2^*}{\sqrt{2}}$$

olur. Burada  $\eta_3$ ,  $\theta_3$  ve  $\rho_3$

$$\begin{cases} \eta_3 = -3k^* k^{*'} + 2k^* r^{*'} + k^{*'} r^* \\ \theta_3 = -k^{*3} + r^* k^{*2} - k^* r^{*2} + r^{*3} + k^{*''} - r^{*''} \\ \rho_3 = k^* r^{*'} + 2k^{*'} r^* - 3r^* r^{*'} \end{cases} \quad (4.3.15)$$

şeklinde birer katsayıdır.  $\beta_3$  eğrisinin torsiyonu  $r_{\beta_3}$  ile gösterilirse  $r_{\beta_3}$  torsiyonu

$$r_{\beta_3} = \frac{\langle \beta_3' \times \beta_3'', \beta_3''' \rangle \Big|_{\mathbb{Q}}}{N(\beta_3' \times \beta_3'')^2}$$

dir. Burada  $\beta_3'$ ,  $\beta_3''$  ve  $\beta_3'''$  değerleri yerine yazılır ve gerekli hesaplamalar yapılırsa  $r_{\beta_3}$  torsiyonu

$$r_{\beta_3} = \sqrt{2} \frac{\eta_3 (r^* (k^* - r^*)^2) + \rho_3 (k^* (k^* - r^*)^2)}{\left[ r^* (k^* - r^*)^2 \right]^2 + \left[ k^* (k^* - r^*)^2 \right]^2} \quad (4.3.16)$$

olur. (4.3.15) katsayılar ifadesinde  $k^*$  ve  $r^*$  ın yerine (3.2.13) den karşılıkları yazılırsa yeni katsayılar

$$\begin{cases} \bar{\eta}_3 = \varphi''' \cos \varphi - 3\varphi' \varphi'' \sin \varphi - \varphi'^3 \cos \varphi - k'' - k\varphi' N(D) + kN(D)^2 \\ \bar{\theta}_3 = \varphi'' N(D) - kk' - rr' + \varphi'' N(D) + \varphi' N(D)' - 2N(D)N(D)' \\ \bar{\rho}_3 = -\varphi''' \sin \varphi - 3\varphi' \varphi'' \cos \varphi + \varphi'^3 \sin \varphi + r'' + r\varphi' N(D) - rN(D)^2 \end{cases} \quad (4.3.17)$$

şeklinde bulunur ve bu katsayılar (4.3.16) da yerine yazılırsa  $t^* n_2^*$  Smarandache eğrisinin  $r_{\beta_3}$  torsiyonunun evolüt eğrisinin Frenet elemanları cinsinden ifadesi

$$\begin{cases} \tilde{\omega}_3 = (\varphi' \sin \varphi - r) (\varphi' N(D) - N(D)^2) \\ \tilde{\phi}_3 = (\varphi' \sin \varphi - r) (\varphi'' \cos \varphi - \varphi'^2 \sin \varphi - k') \\ \quad - (\varphi' \cos \varphi - k) (-\varphi'' \sin \varphi - \varphi'^2 \cos \varphi + r') \\ \tilde{\sigma}_3 = (\varphi' \cos \varphi - k) (\varphi' N(D) - N(D)^2) \end{cases}$$

olmak üzere

$$r_{\beta_3} = \sqrt{2} \frac{\bar{\eta}_3 \tilde{\omega}_3 + \bar{\theta}_3 \tilde{\phi}_3 + \bar{\rho}_3 \tilde{\sigma}_3}{\tilde{\omega}_3^2 + \tilde{\phi}_3^2 + \tilde{\sigma}_3^2}$$

şeklinde elde edilir. Böylece şu sonuçlar verilir:

**Sonuç 4.3.1:**  $\alpha$  uzaysal kuaterniyonik eğrisinin involütü  $\alpha^*$  olsun.  $\alpha^*$  eğrisinden elde edilen  $t^* n_2^*$  -Smarandache eğrisinin Frenet vektörleri ve eğrilikleri  $\alpha$  evolüt eğrisinin Frenet vektörlerine ve eğriliklerine bağlı ifadeleri sırasıyla

$$\begin{cases} t_{\beta_3}(s) = \frac{\varphi' \cos \varphi - k}{|\varphi' - N(D)|} t + \frac{-\varphi' \sin \varphi + r}{|\varphi' - N(D)|} n_2 \\ n_{1\beta_3} = \frac{\bar{\omega}_3}{\sqrt{\bar{\omega}_3^2 + \bar{\phi}_3^2 + \bar{\sigma}_3^2}} t + \frac{\bar{\phi}_3}{\sqrt{\bar{\omega}_3^2 + \bar{\phi}_3^2 + \bar{\sigma}_3^2}} n_1 + \frac{\bar{\sigma}_3}{\sqrt{\bar{\omega}_3^2 + \bar{\phi}_3^2 + \bar{\sigma}_3^2}} n_2 \\ n_{2\beta_3} = \frac{(\varphi' \sin \varphi - r) \bar{\phi}}{|\varphi' - N(D)| \sqrt{(\bar{\omega}_3^2 + \bar{\phi}_3^2 + \bar{\sigma}_3^2)}} t \\ \quad + \frac{(\varphi' \sin \varphi - r) \bar{\omega}_3 - (\varphi' \cos \varphi - k) \bar{\sigma}_3}{|\varphi' - N(D)| \sqrt{(\bar{\omega}_3^2 + \bar{\phi}_3^2 + \bar{\sigma}_3^2)}} n_1 \\ \quad + \frac{(\varphi' \cos \varphi - k) \bar{\phi}}{|\varphi' - N(D)| \sqrt{(\bar{\omega}_3^2 + \bar{\phi}_3^2 + \bar{\sigma}_3^2)}} n_2, \\ k_{\beta_3} = \sqrt{2} \frac{\sqrt{(\bar{\omega}_3^2 + \bar{\phi}_3^2 + \bar{\sigma}_3^2)}}{(\varphi' - N(D))^3} \\ r_{\beta_3} = \sqrt{2} \frac{\bar{\eta}_3 \tilde{\omega}_3 + \bar{\theta}_3 \tilde{\phi}_3 + \bar{\rho}_3 \tilde{\sigma}_3}{\tilde{\omega}_3^2 + \tilde{\phi}_3^2 + \tilde{\sigma}_3^2} \end{cases}$$

şeklindedir. Burada  $\bar{\omega}_3, \bar{\phi}_3, \bar{\sigma}_3, \bar{\eta}_3, \bar{\theta}_3, \bar{\rho}_3, \tilde{\omega}_3, \tilde{\phi}_3$  ve  $\tilde{\sigma}_3$  katsayıları

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\omega}_3 = (\varphi'' \cos \varphi - \varphi'^2 \sin \varphi - k') |\varphi' - N(D)| \\ \quad - (\varphi' \cos \varphi - k) (\varphi' - N(D))' \\ \bar{\phi}_3 = (\varphi' N(D) - N(D)^2) |\varphi' - N(D)| \\ \bar{\sigma}_3 = (-\varphi'' \sin \varphi - \varphi'^2 \cos \varphi + r') |\varphi' - N(D)| \\ \quad - (-\varphi' \sin \varphi + r) (\varphi' - N(D))' \\ \bar{\eta}_3 = \varphi''' \cos \varphi - 3\varphi' \varphi'' \sin \varphi - \varphi'^3 \cos \varphi - k'' - k\varphi' N(D) + kN(D)^2 \\ \bar{\theta}_3 = \varphi'' N(D) - kk' - rr' + \varphi'' N(D) + \varphi' N(D)' - 2N(D)N(D)' \\ \bar{\rho}_3 = -\varphi''' \sin \varphi - 3\varphi' \varphi'' \cos \varphi + \varphi'^3 \sin \varphi + r'' + r\varphi' N(D) - rN(D)^2 \\ \tilde{\omega}_3 = (\varphi' \sin \varphi - r) (\varphi' N(D) - N(D)^2) \\ \tilde{\phi}_3 = (\varphi' \sin \varphi - r) (\varphi'' \cos \varphi - \varphi'^2 \sin \varphi - k') \\ \quad - (\varphi' \cos \varphi - k) (-\varphi'' \sin \varphi - \varphi'^2 \cos \varphi + r') \\ \tilde{\sigma}_3 = (\varphi' \cos \varphi - k) (\varphi' N(D) - N(D)^2) \end{array} \right.$$

biçimindedir.

**Sonuç 4.3.2:**  $\alpha^*$  eğrisi  $\alpha$  eğrisinin involütü olsun.  $\alpha^*$  eğrisinin  $t^*$  ve  $n_2^*$  vektörleri tarafından oluşturulan  $t^*n_2^*$ -Smarandache eğrisi,  $\alpha^*$  eğrisinin bir involütüdür.

**İspat:**  $t^*n_2^*$ -Smarandache eğrisinin Frenet vektörleri  $t_{t^*n_2^*}^*$ ,  $n_{t^*n_2^*}^*$  ve  $n_{t^*n_2^*}^*$  olsun.

$t_{t^*n_2^*}^* = n_1^*$  ve (3.2.12) bağıntısından

$$\left\langle t^*, t_{t^*n_2^*}^* \right\rangle_{\mathbb{Q}} = \langle n_1, -\cos \varphi t + \sin \varphi n_2 \rangle_{\mathbb{Q}} = 0$$

olur. İnvolut eğri tanımı gereğince  $t^*n_2^*$ -Smarandache eğrisi,  $\alpha^*$  eğrisinin bir involütüdür.

#### 4.4. $t^* n_1^* n_2^*$ -Uzaysal Kuaterniyonik Smarandache Eğrisi

**Tanım 4.4.1:**  $\alpha^*$  uzaysal kuaterniyonik involüt eğrisinin Frenet vektörleri  $\{t^*, n_1^*, n_2^*\}$  olsun.

$$\beta_4(s) = \beta_{t^* n_1^* n_2^*}(s) = \frac{1}{\sqrt{3}}(t^* + n_1^* + n_2^*) \quad (4.4.1)$$

şeklinde tanımlı eğriye  $t^* n_1^* n_2^*$  - Smarandache eğrisi denir.

**Teorem 4.4.1:**  $\alpha$  uzaysal kuaterniyonik eğrisinin involütü  $\alpha^*$  olsun.  $\alpha^*$  eğrisinden elde edilen  $t^* n_1^* n_2^*$  -Smarandache eğrisinin Frenet vektörleri ve eğrilikleri sırasıyla

$$\left\{ \begin{array}{l} t_{\beta_4}(s) = \frac{-k^*}{\sqrt{2(k^{*2} + r^{*2} - k^* r^*)}} t^* + \frac{k^* - r^*}{\sqrt{2(k^{*2} + r^{*2} - k^* r^*)}} n_1^* \\ \quad + \frac{r^*}{\sqrt{2(k^{*2} + r^{*2} - k^* r^*)}} n_2^* \\ n_{1\beta_4} = \frac{\omega_4}{\sqrt{\omega_4^2 + \phi_4^2 + \sigma_4^2}} t^* + \frac{\phi_4}{\sqrt{\omega_4^2 + \phi_4^2 + \sigma_4^2}} n_1^* + \frac{\sigma_4}{\sqrt{\omega_4^2 + \phi_4^2 + \sigma_4^2}} n_2^* \\ n_{2\beta_4} = \frac{(k^* - r^*)\sigma_4 - r^*\phi_4}{\sqrt{(2k^{*2} + 2r^{*2} - 2k^* r^*)(\omega_4^2 + \phi_4^2 + \sigma_4^2)}} t^* \\ \quad + \frac{r^*\omega_4 + k^*\sigma_4}{\sqrt{(2k^{*2} + 2r^{*2} - 2k^* r^*)(\omega_4^2 + \phi_4^2 + \sigma_4^2)}} n_1^* \\ \quad - \frac{k^*\phi_4 + (k^* - r^*)\omega_4}{\sqrt{(2k^{*2} + 2r^{*2} - 2k^* r^*)(\omega_4^2 + \phi_4^2 + \sigma_4^2)}} n_2^* , \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} k_{\beta_4} = \frac{\sqrt{3} \sqrt{\omega_4^2 + \phi_4^2 + \sigma_4^2}}{4 (k^{*2} + r^{*2} - k^* r^*)^2} \\ r_{\beta_4} = \sqrt{3} \frac{\eta_4 (2k^* r^* (k^* - r^*) + k^* r^{*'} - r^* k^{*'}) + \theta_4 (k^* r^{*' - r^* k^{*'})}}{\left[ 2k^* r^* (k^* - r^*) + k^* r^{*' - r^* k^{*'}} + 2r^{*3} \right]^2 + \left[ k^* r^{*' - r^* k^{*'}} \right]^2} \\ \quad + \left[ 2k^{*3} + k^* r^{*' + 2k^* r^{*2} - 2k^{*2} r^* - k^* r^* \right]^2} \\ \quad + \sqrt{3} \frac{\rho_4 (2k^{*3} + k^* r^{*' + 2k^* r^{*2} - 2k^{*2} r^* - k^* r^*)}{\left[ 2k^* r^* (k^* - r^*) + k^* r^{*' - r^* k^{*'}} + 2r^{*3} \right]^2 + \left[ k^* r^{*' - r^* k^{*'}} \right]^2} \\ \quad + \left[ 2k^{*3} + k^* r^{*' + 2k^* r^{*2} - 2k^{*2} r^* - k^* r^* \right]^2} \end{array} \right.$$

şeklinindedir. Burada

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_4 = k^{*2} (-2k^{*2} - 4r^{*2} + 4r^* k^* - r^{*'}) + k^* r^* (k^{*' + 2r^{*2} + 2r^{*'}) - 2k^{*' r^{*2}} \\ \phi_4 = k^{*2} (-2k^{*2} - 4r^{*2} + 2k^* r^* - r^{*'}) + r^{*2} (-2r^{*2} + 2k^* r^* + k^{*'}) + k^* r^* (k^{*' - r^{*'}) \\ \sigma_4 = 2k^{*2} (k^* r^* - 2r^{*2} + r^{*'}) + r^{*2} (4k^* r^* - 2r^{*2} + k^{*'}) - k^* r^* (r^{*' + 2k^{*'}) \\ \eta_4 = k^{*' r^* - k^{*''} - 3k^* k^{*' + 2k^* r^{*' + k^{*3} + k^* r^{*2}} \\ \theta_4 = r^{*3} - k^{*3} - 3(k^* k^{*' + r^* r^{*'}) - (-k^{*''} + r^{*''}) + k^* r^* (k^* - r^*) \\ \rho_4 = r^{*''} - k^{*2} r^* - 3r^* r^{*' - r^{*3} + 2r^* k^{*' + k^* r^{*'}} \end{array} \right.$$

$\omega_4, \phi_4, \sigma_4, \eta_4, \theta_4$  ve  $\rho_4$  birer katsayıdır.

**İspat:** (4.4.1) bağıntısının  $s_{\beta_4}$  yay parametresine göre türevi alınırsa

$$t_{\beta_4} \frac{ds_{\beta_4}}{ds} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left[ -k^* t^* + (k^* - r^*) n_1^* + r^* n_2^* \right] \quad (4.4.2)$$

olur ve norm alınırsa  $\frac{ds_{\beta_4}}{ds}$  ifadesi

$$\frac{ds_{\beta_4}}{ds} = \sqrt{\frac{2(k^{*2} + r^{*2} - k^* r^*)}{3}} \quad (4.4.3)$$

şeklinde bulunur. Bu ifade yukarıda yerine yazılırsa  $\beta_4$  eğrisinin teğet vektörü

$$t_{\beta_4}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{-k^*}{\sqrt{(k^{*2} + r^{*2} - k^* r^*)}} t^* + \frac{k^* - r^*}{\sqrt{(k^{*2} + r^{*2} - k^* r^*)}} n_1^* + \frac{r^*}{\sqrt{(k^{*2} + r^{*2} - k^* r^*)}} n_2^* \right) \quad (4.4.4)$$

bulunur. (4.4.1) ifadesinde  $t^*$ ,  $n_1^*$  ve  $n_2^*$  in yerine (3.2.12) den karşılıkları yazılırsa Smarandache eğrisinin evolüt eğrisine bağlı ifadesi

$$\beta_4 = \frac{1}{\sqrt{3}} [(\sin \varphi - \cos \varphi)t + n_1 + (\sin \varphi + \cos \varphi)n_2] \quad (4.4.5)$$

olur. (4.4.4) denkleminde (3.2.12) ve (3.2.13) bağıntıları dikkate alınır (4.4.5) ifadesindeki  $\beta_4$  eğrisinin teğet vektörü

$$t_{\beta_4} = \frac{\varphi' \cos \varphi + \varphi' \sin \varphi - k}{\sqrt{2(\varphi'^2 - \varphi' N(D) + N(D)^2)}} t - \frac{N(D)}{\sqrt{2(\varphi'^2 - \varphi' N(D) + N(D)^2)}} n_1 + \frac{\varphi' \cos \varphi - \varphi' \sin \varphi + r}{\sqrt{2(\varphi'^2 - \varphi' N(D) + N(D)^2)}} n_2 \quad (4.4.6)$$

şeklinde bulunur. (4.4.4) ifadesinin türevi alınır katsayılar

$$\begin{cases} \omega_4 = k^{*2} (-2k^{*2} - 4r^{*2} + 4r^* k^* - r^{*'}) + k^* r^* (k^{*'} + 2r^{*2} + 2r^{*'}) - 2k^{*'} r^{*2} \\ \phi_4 = k^{*2} (-2k^{*2} - 4r^{*2} + 2k^* r^* - r^{*'}) + r^{*2} (-2r^{*2} + 2k^* r^* + k^{*'}) + k^* r^* (k^{*'} - r^{*'}) \\ \sigma_4 = 2k^{*2} (k^* r^* - 2r^{*2} + r^{*'}) + r^{*2} (4k^* r^* - 2r^{*2} + k^{*'}) - k^* r^* (r^{*'} + 2k^{*'}) \end{cases} \quad (4.4.7)$$

olmak üzere  $t'_{\beta_4}(s)$  türevi

$$t'_{\beta_4}(s) = \frac{\sqrt{3}}{4} \frac{\omega_4 t + \phi_4 n_1 + \sigma_4 n_2}{(k^{*2} + r^{*2} - k^* r^*)^2} \quad (4.4.8)$$

olur. (4.4.7) ifadesinde  $k^*$  ve  $r^*$  in yerine (3.2.13) dan karşılıkları yazılırsa yeni katsayılar

$$\begin{cases}
\bar{\omega}_4 = \left( \varphi'' \cos \varphi - \varphi'^2 \sin \varphi + \varphi'' \sin \varphi + \varphi'^2 \cos \varphi - k' + kN(D) \right) \sqrt{\varphi'^2 - \varphi'N(D) + N(D)^2} \\
\quad - \left( \varphi' \cos \varphi + \varphi' \sin \varphi - k \right) \left( \sqrt{\varphi'^2 - \varphi'N(D) + N(D)^2} \right)' \\
\bar{\phi}_4 = \left( N(D)\varphi' - N(D)^2 - N(D)' \right) \sqrt{\varphi'^2 - \varphi'N(D) + N(D)^2} \\
\quad + N(D) \left( \sqrt{\varphi'^2 - \varphi'N(D) + N(D)^2} \right)' \\
\bar{\sigma}_4 = \left( \varphi'' \cos \varphi - \varphi'^2 \sin \varphi - \varphi'' \sin \varphi - \varphi'^2 \cos \varphi + r' - rN(D) \right) \sqrt{\varphi'^2 - \varphi'N(D) + N(D)^2} \\
\quad - \left( \varphi' \cos \varphi - \varphi' \sin \varphi + r \right) \left( \sqrt{\varphi'^2 - \varphi'N(D) + N(D)^2} \right)'
\end{cases}
\tag{4.4.9}$$

şeklinde olur.  $t'_{\beta_4}(s)$  türev ifadesinde (3.2.12) ve (4.4.9) bağıntıları yerine yazılırsa  $t'_{\beta_4}$  vektörünün evolüt eğrisinin Frenet elemanları cinsinden ifadesi

$$t'_{\beta_4}(s) = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\bar{\omega}_4 t + \bar{\phi}_4 n_1 + \bar{\sigma}_4 n_2}{\left( \varphi'^2 - \varphi'N(D) + N(D)^2 \right)^{3/2}}
\tag{4.4.10}$$

şeklinde bulunur.  $\beta_4$  eğrisinin eğriliği  $k_{\beta_4}$  ile gösterilirse (4.4.8) bağıntısından  $k_{\beta_4}$  eğriliği

$$\begin{aligned}
k_{\beta_4} &= N(t'_{\beta_4}), \\
k_{\beta_4} &= \frac{\sqrt{3}}{4} \frac{\sqrt{\bar{\omega}_4^2 + \bar{\phi}_4^2 + \bar{\sigma}_4^2}}{\left( k^{*2} + r^{*2} - k^* r^* \right)^2}
\end{aligned}
\tag{4.4.11}$$

olur. Burada  $k^*$  ve  $r^*$  in yerine (3.2.26) dan karşılıkları yazılırsa  $k_{\beta_4}$  eğriliğinin evolüt eğrisinin eğriliklerine bağlı ifadesi

$$k_{\beta_4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\sqrt{\bar{\omega}_4^2 + \bar{\phi}_4^2 + \bar{\sigma}_4^2}}{\left( \varphi'^2 - \varphi'N(D) + N(D)^2 \right)^{3/2}}
\tag{4.4.12}$$

şekline dönüşür.  $\beta_4$  eğrisinin aslinormali  $n_{1\beta_4}$  ile gösterilirse (4.4.8) bağıntısından

$$n_{1\beta_4} = \frac{t'_{\beta_4}}{N(t'_{\beta_4})},$$

$$n_{1\beta_4} = \frac{\omega_4}{\sqrt{\omega_4^2 + \phi_4^2 + \sigma_4^2}} t^* + \frac{\phi_4}{\sqrt{\omega_4^2 + \phi_4^2 + \sigma_4^2}} n_1^* + \frac{\sigma_4}{\sqrt{\omega_4^2 + \phi_4^2 + \sigma_4^2}} n_2^*$$

olur. Burada  $t^*$ ,  $n_1^*$  ve  $n_2^*$  in yerine (3.2.12) den karşılıkları yazılırsa  $n_{1\beta_4}$  ifadesinin evolüt eğrisinin eğriliklerine bağlı ifadesi

$$n_{1\beta_4} = \frac{\bar{\omega}_4}{\sqrt{\bar{\omega}_4^2 + \bar{\phi}_4^2 + \bar{\sigma}_4^2}} t + \frac{\bar{\phi}_4}{\sqrt{\bar{\omega}_4^2 + \bar{\phi}_4^2 + \bar{\sigma}_4^2}} n_1 + \frac{\bar{\sigma}_4}{\sqrt{\bar{\omega}_4^2 + \bar{\phi}_4^2 + \bar{\sigma}_4^2}} n_2 \quad (4.4.13)$$

şeklinde bulunur.  $n_{2\beta_4} = t_{\beta_4} \times n_{1\beta_4}$  olduğundan  $n_{2\beta_4}$  binormal vektörü

$$\begin{aligned} n_{2\beta_4} = & \frac{(k^* - r^*)\sigma_4 - r^*\phi_4}{\sqrt{2(k^{*2} + r^{*2} - k^*r^*)(\omega_4^2 + \phi_4^2 + \sigma_4^2)}} t^* \\ & + \frac{r^*\omega_4 + k^*\sigma_4}{\sqrt{2(k^{*2} + r^{*2} - k^*r^*)(\omega_4^2 + \phi_4^2 + \sigma_4^2)}} n_1^* \\ & - \frac{k^*\phi_4 + (k^* - r^*)\omega_4}{\sqrt{2(k^{*2} + r^{*2} - k^*r^*)(\omega_4^2 + \phi_4^2 + \sigma_4^2)}} n_2^* \end{aligned} \quad (4.4.14)$$

olur. Burada  $t^*$ ,  $n_1^*$ ,  $n_2^*$ ,  $k^*$  ve  $r^*$  in yerine (3.2.12) ve (3.2.13) den karşılıkları yazılırsa  $n_{2\beta_4}$  binormal vektörünün evolüt eğrisinin Frenet elemanları cinsinden ifadesi

$$\begin{aligned} n_{2\beta_4} = & \frac{(-N(D)\bar{\sigma}_4 - (\varphi' \cos \varphi - \varphi' \sin \varphi + r)\bar{\phi}_4)}{\sqrt{2(\varphi'^2 - \varphi'N(D) + N(D)^2)(\bar{\omega}_4^2 + \bar{\phi}_4^2 + \bar{\sigma}_4^2)}} t \\ & + \frac{((\varphi' \cos \varphi - \varphi' \sin \varphi + r)\bar{\omega}_4 - (\varphi' \cos \varphi + \varphi' \sin \varphi - k)\bar{\sigma}_4)}{\sqrt{2(\varphi'^2 - \varphi'N(D) + N(D)^2)(\bar{\omega}_4^2 + \bar{\phi}_4^2 + \bar{\sigma}_4^2)}} n_1 \\ & + \frac{((\varphi' \cos \varphi + \varphi' \sin \varphi - k)\bar{\phi}_4 + N(D)\bar{\omega}_4)}{\sqrt{2(\varphi'^2 - \varphi'N(D) + N(D)^2)(\bar{\omega}_4^2 + \bar{\phi}_4^2 + \bar{\sigma}_4^2)}} n_2 \end{aligned} \quad (4.4.15)$$

şeklinde bulunur.  $\beta_4$  eğrisinin ikinci ve üçüncü türevleri sırasıyla

$$\beta_4'' = \frac{(-k'' - k'^2 + k^*r^*)}{\sqrt{3}} t^* - \frac{(k'^2 + k'' + r'' + r'^2)}{\sqrt{3}} n_1^* + \frac{(k^*r^* - r'^2 + r'')}{\sqrt{3}} n_2^*$$



ve

$$\beta_4''' = \frac{\eta_4 t^* + \theta_4 n_1^* + \rho_4 n_2^*}{\sqrt{3}}$$

olur. Burada  $\eta_4$ ,  $\theta_4$  ve  $\rho_4$

$$\begin{cases} \eta_4 = k^* r^* - k^{*''} - 3k^* k^{*'} + 2k^* r^{*'} + k^{*3} + k^* r^{*2} \\ \theta_4 = r^{*3} - k^{*3} - 3(k^* k^{*'} + r^* r^{*'}) - (-k^{*''} + r^{*''}) + k^* r^* (k^* - r^*) \\ \rho_4 = r^{*''} - k^{*2} r^* - 3r^* r^{*'} - r^{*3} + 2r^* k^{*'} + k^* r^{*'} \end{cases} \quad (4.4.16)$$

şeklinde birer katsayıdır.  $\beta_4$  eğrisinin torsiyonu  $r_{\beta_4}$  ile gösterilirse  $r_{\beta_4}$  torsiyonu

$$r_{\beta_4} = \frac{\langle \beta_4' \times \beta_4'', \beta_4''' \rangle \Big|_{\mathbb{Q}}}{N(\beta_4' \times \beta_4'')^2}$$

dır. Burada  $\beta_4'$ ,  $\beta_4''$  ve  $\beta_4'''$  değerleri yerine yazılır ve gerekli hesaplamalar yapılırsa  $r_{\beta_4}$  torsiyonu

$$\begin{aligned} & \eta_4 \left( 2k^* r^* (k^* - r^*) + k^* r^{*'} - r^* k^{*'} + 2r^{*3} \right) + \theta_4 \left( k^* r^{*'} - r^* k^{*'} \right) \\ r_{\beta_4} = & \sqrt{3} \frac{+ \rho_4 \left( 2k^{*3} + k^* r^{*'} + 2k^* r^{*2} - 2k^{*2} r^* - k^{*'} r^* \right)}{\left[ 2k^* r^* (k^* - r^*) + k^* r^{*'} - r^* k^{*'} + 2r^{*3} \right]^2 + \left[ k^* r^{*'} - r^* k^{*'} \right]^2} \\ & + \left[ 2k^{*3} + k^* r^{*'} + 2k^* r^{*2} - 2k^{*2} r^* - k^{*'} r^* \right]^2 \end{aligned} \quad (4.4.17)$$

olur. (4.4.16) katsayılar ifadesinde  $k^*$  ve  $r^*$  in yerine (3.2.13) den karşılıkları yazılırsa yeni katsayılar

$$\begin{cases} \bar{\eta}_4 = \varphi''' \cos \varphi - 3\varphi' \varphi'' \sin \varphi - \varphi'^3 \cos \varphi + \varphi''' \sin \varphi + 3\varphi' \varphi'' \cos \varphi \\ \quad - \varphi'^3 \sin \varphi - k'' + k' N(D) + 2kN(D)' - kN(D)\varphi' + kN(D)^2 \\ \bar{\theta}_4 = \varphi'' N(D) + \varphi'^2 N(D) + N(D)^3 - kk' - rr' + \varphi' N(D)' + \varphi'' N(D) \\ \quad - 2N(D)N(D)' - N(D)'' \\ \bar{\rho}_4 = \varphi''' \cos \varphi - 3\varphi' \varphi'' \sin \varphi - \varphi'^3 \cos \varphi - \varphi''' \sin \varphi - 3\varphi' \varphi'' \cos \varphi \\ \quad + \varphi'^3 \sin \varphi + r'' - r' N(D) - 2rN(D)' + rN(D)\varphi' - rN(D)^2 \end{cases} \quad (4.4.18)$$

şeklinde bulunur ve bu katsayılar (4.4.17) de yerine yazılırsa  $t^* n_1^* n_2^*$  Smarandache eğrisinin  $r_{\beta_4}$  torsiyonunun evolüt eğrisinin Frenet elemanları cinsinden ifadesi

$$\begin{cases} \tilde{\omega}_4 = -N(D)(\varphi'' \cos \varphi - \varphi'^2 \sin \varphi - \varphi'' \sin \varphi - \varphi'^2 \cos \varphi + r' - rN(D)) \\ \quad - \left( N(D)\varphi' - N(D)^2 - N(D)' \right) (\varphi' \cos \varphi - \varphi' \sin \varphi + r) \\ \tilde{\phi}_4 = (\varphi' \cos \varphi - \varphi' \sin \varphi + r)(\varphi'' \cos \varphi - \varphi'^2 \sin \varphi + \varphi'' \sin \varphi + \varphi'^2 \cos \varphi - k' + kN(D)) \\ \quad - (\varphi' \cos \varphi + \varphi' \sin \varphi - k)(\varphi'' \cos \varphi - \varphi'^2 \sin \varphi - \varphi'' \sin \varphi - \varphi'^2 \cos \varphi + r' - rN(D)) \\ \tilde{\sigma}_4 = (\varphi' \cos \varphi + \varphi' \sin \varphi - k) \left( N(D)\varphi' - N(D)^2 - N(D)' \right) \\ \quad + N(D)(\varphi'' \cos \varphi - \varphi'^2 \sin \varphi + \varphi'' \sin \varphi + \varphi'^2 \cos \varphi - k' + kN(D)) \end{cases} \quad (4.4.19)$$

olmak üzere

$$r_{\beta_4} = \sqrt{3} \frac{\bar{\eta}_4 \tilde{\omega}_4 + \bar{\theta}_4 \tilde{\phi}_4 + \bar{\rho}_4 \tilde{\sigma}_4}{\tilde{\omega}_4^2 + \tilde{\phi}_4^2 + \tilde{\sigma}_4^2}$$

şeklinde elde edilir. Böylece şu sonuç verilir:

**Sonuç 4.4.1:**  $\alpha$  uzaysal kuaterniyonik eğrisinin involütü  $\alpha^*$  olsun.  $\alpha^*$  eğrisinden elde edilen  $t^* n_1^* n_2^*$  -Smarandache eğrisinin Frenet vektörleri ve eğrilikleri  $\alpha$  evolüt eğrisinin Frenet vektörlerine ve eğriliklerine bağlı ifadeleri sırasıyla

$$\left\{ \begin{aligned}
t_{\beta_4} &= \frac{\varphi' \cos \varphi + \varphi' \sin \varphi - k}{\sqrt{2(\varphi'^2 - \varphi'N(D) + N(D)^2)}} t - \frac{N(D)}{\sqrt{2(\varphi'^2 - \varphi'N(D) + N(D)^2)}} n_1 \\
&\quad + \frac{\varphi' \cos \varphi - \varphi' \sin \varphi + r}{\sqrt{2(\varphi'^2 - \varphi'N(D) + N(D)^2)}} n_2 \\
n_{1\beta_4} &= \frac{\bar{\omega}_4}{\sqrt{\bar{\omega}_4^2 + \bar{\phi}_4^2 + \bar{\sigma}_4^2}} t + \frac{\bar{\phi}_4}{\sqrt{\bar{\omega}_4^2 + \bar{\phi}_4^2 + \bar{\sigma}_4^2}} n_1 + \frac{\bar{\sigma}_4}{\sqrt{\bar{\omega}_4^2 + \bar{\phi}_4^2 + \bar{\sigma}_4^2}} n_2 \\
n_{2\beta_4} &= \frac{(-N(D)\bar{\sigma}_4 - (\varphi' \cos \varphi - \varphi' \sin \varphi + r)\bar{\phi}_4)}{\sqrt{2(\varphi'^2 - \varphi'N(D) + N(D)^2)}(\bar{\omega}_4^2 + \bar{\phi}_4^2 + \bar{\sigma}_4^2)} t \\
&\quad + \frac{((\varphi' \cos \varphi - \varphi' \sin \varphi + r)\bar{\omega}_4 - (\varphi' \cos \varphi + \varphi' \sin \varphi - k)\bar{\sigma}_4)}{\sqrt{2(\varphi'^2 - \varphi'N(D) + N(D)^2)}(\bar{\omega}_4^2 + \bar{\phi}_4^2 + \bar{\sigma}_4^2)} n_1 \\
&\quad + \frac{((\varphi' \cos \varphi + \varphi' \sin \varphi - k)\bar{\phi}_4 + N(D)\bar{\omega}_4)}{\sqrt{2(\varphi'^2 - \varphi'N(D) + N(D)^2)}(\bar{\omega}_4^2 + \bar{\phi}_4^2 + \bar{\sigma}_4^2)} n_2, \\
k_{\beta_4} &= \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\sqrt{\bar{\omega}_4^2 + \bar{\phi}_4^2 + \bar{\sigma}_4^2}}{(\varphi'^2 - \varphi'N(D) + N(D)^2)^{3/2}} \\
r_{\beta_4} &= \sqrt{3} \frac{\bar{\eta}_4 \tilde{\omega}_4 + \bar{\theta}_4 \tilde{\phi}_4 + \bar{\rho}_4 \tilde{\sigma}_4}{\tilde{\omega}_4^2 + \tilde{\phi}_4^2 + \tilde{\sigma}_4^2}
\end{aligned} \right.$$

şeklindedir. Burada  $\bar{\omega}_4$ ,  $\bar{\phi}_4$ ,  $\bar{\sigma}_4$ ,  $\bar{\eta}_4$ ,  $\bar{\theta}_4$ ,  $\bar{\rho}_4$ ,  $\tilde{\omega}_4$ ,  $\tilde{\phi}_4$  ve  $\tilde{\sigma}_4$  katsayılar

$$\left. \begin{aligned}
\bar{\omega}_4 &= (\varphi'' \cos \varphi - \varphi'^2 \sin \varphi + \varphi'' \sin \varphi + \varphi'^2 \cos \varphi - k' + kN(D)) \sqrt{\varphi'^2 - \varphi'N(D) + N(D)^2} \\
&\quad - (\varphi' \cos \varphi + \varphi' \sin \varphi - k) \left( \sqrt{\varphi'^2 - \varphi'N(D) + N(D)^2} \right)' \\
\bar{\phi}_4 &= (N(D)\varphi' - N(D)^2 - N(D)') \sqrt{\varphi'^2 - \varphi'N(D) + N(D)^2} \\
&\quad + N(D) \left( \sqrt{\varphi'^2 - \varphi'N(D) + N(D)^2} \right)' \\
\bar{\sigma}_4 &= (\varphi'' \cos \varphi - \varphi'^2 \sin \varphi - \varphi'' \sin \varphi - \varphi'^2 \cos \varphi + r' - rN(D)) \sqrt{\varphi'^2 - \varphi'N(D) + N(D)^2} \\
&\quad - (\varphi' \cos \varphi - \varphi' \sin \varphi + r) \left( \sqrt{\varphi'^2 - \varphi'N(D) + N(D)^2} \right)' \\
\bar{\eta}_4 &= \varphi''' \cos \varphi - 3\varphi' \varphi'' \sin \varphi - \varphi'^3 \cos \varphi + \varphi''' \sin \varphi + 3\varphi' \varphi'' \cos \varphi \\
&\quad - \varphi'^3 \sin \varphi - k'' + k'N(D) + 2kN(D)' - kN(D)\varphi' + kN(D)^2 \\
\bar{\theta}_4 &= \varphi''N(D) + \varphi'^2N(D) + N(D)^3 - kk' - rr' + \varphi'N(D)' + \varphi''N(D) \\
&\quad - 2N(D)N(D)' - N(D)'' \\
\bar{\rho}_4 &= \varphi''' \cos \varphi - 3\varphi' \varphi'' \sin \varphi - \varphi'^3 \cos \varphi - \varphi''' \sin \varphi - 3\varphi' \varphi'' \cos \varphi \\
&\quad + \varphi'^3 \sin \varphi + r'' - r'N(D) - 2rN(D)' + rN(D)\varphi' - rN(D)^2 \\
\bar{\eta}_4 &= \varphi''' \cos \varphi - 3\varphi' \varphi'' \sin \varphi - \varphi'^3 \cos \varphi + \varphi''' \sin \varphi + 3\varphi' \varphi'' \cos \varphi \\
&\quad - \varphi'^3 \sin \varphi - k'' + k'N(D) + 2kN(D)' - kN(D)\varphi' + kN(D)^2 \\
\bar{\theta}_4 &= \varphi''N(D) + \varphi'^2N(D) + N(D)^3 - kk' - rr' + \varphi'N(D)' + \varphi''N(D) \\
&\quad - 2N(D)N(D)' - N(D)'' \\
\bar{\rho}_4 &= \varphi''' \cos \varphi - 3\varphi' \varphi'' \sin \varphi - \varphi'^3 \cos \varphi - \varphi''' \sin \varphi - 3\varphi' \varphi'' \cos \varphi \\
&\quad + \varphi'^3 \sin \varphi + r'' - r'N(D) - 2rN(D)' + rN(D)\varphi' - rN(D)^2 \\
\tilde{\omega}_4 &= -N(D) (\varphi'' \cos \varphi - \varphi'^2 \sin \varphi - \varphi'' \sin \varphi - \varphi'^2 \cos \varphi + r' - rN(D)) \\
&\quad - (N(D)\varphi' - N(D)^2 - N(D)') (\varphi' \cos \varphi - \varphi' \sin \varphi + r) \\
\tilde{\phi}_4 &= (\varphi' \cos \varphi - \varphi' \sin \varphi + r) (\varphi'' \cos \varphi - \varphi'^2 \sin \varphi + \varphi'' \sin \varphi + \varphi'^2 \cos \varphi - k' + kN(D)) \\
&\quad - (\varphi' \cos \varphi + \varphi' \sin \varphi - k) (\varphi'' \cos \varphi - \varphi'^2 \sin \varphi - \varphi'' \sin \varphi - \varphi'^2 \cos \varphi + r' - rN(D)) \\
\tilde{\sigma}_4 &= (\varphi' \cos \varphi + \varphi' \sin \varphi - k) (N(D)\varphi' - N(D)^2 - N(D)') \\
&\quad + N(D) (\varphi'' \cos \varphi - \varphi'^2 \sin \varphi + \varphi'' \sin \varphi + \varphi'^2 \cos \varphi - k' + kN(D))
\end{aligned} \right\}$$

biçimindedir.

#### 4.5. $n_1^* w^*$ -Uzaysal Kuaterniyonik Smarandache Eğrisi

**Tanım 4.5.1:**  $\alpha^*$  uzaysal kuaterniyonik involüt eğrisinin Frenet vektörleri  $\{t^*, n_1^*, n_2^*\}$  olsun.

$$\beta_5(s) = \beta_{n_1^* w^*}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(n_1^* + w^*) \quad (4.5.1)$$

şeklinde tanımlı eğriye  $t^* n_1^* n_2^*$  - Smarandache eğrisi denir.

**Teorem 4.5.1:**  $\alpha$  uzaysal kuaterniyonik eğrisinin involütü  $\alpha^*$  olsun.  $\alpha^*$  eğrisinden elde edilen  $n_1^* w^*$  -Smarandache eğrisinin Frenet vektörleri ve eğrilikleri sırasıyla

$$\left\{ \begin{array}{l} t_{\beta_5}(s) = \frac{\varphi^{*'} \cos \varphi^* - k^*}{|\varphi^{*'} - N(D^*)|} t^* + \frac{r^* - \varphi^{*'} \sin \varphi^*}{|\varphi^{*'} - N(D^*)|} n_2^* \\ n_{1\beta_5} = \frac{\omega_5}{\sqrt{\omega_5^2 + \phi_5^2 + \sigma_5^2}} t^* + \frac{\phi_5}{\sqrt{\omega_5^2 + \phi_5^2 + \sigma_5^2}} n_1^* + \frac{\sigma_5}{\sqrt{\omega_5^2 + \phi_5^2 + \sigma_5^2}} n_2^* \\ n_{2\beta_5} = \frac{\phi_5 (\varphi^{*'} \sin \varphi^* - r^*)}{|\varphi^{*'} - N(D^*)| \sqrt{(\omega_5^2 + \phi_5^2 + \sigma_5^2)}} t^* \\ + \frac{\omega_5 (r^* - \varphi^{*'} \sin \varphi^*) - \sigma_5 (\varphi^{*'} \cos \varphi^* - k^*)}{|\varphi^{*'} - N(D^*)| \sqrt{(\omega_5^2 + \phi_5^2 + \sigma_5^2)}} n_1^* \\ + \frac{\phi_5 (\varphi^{*'} \cos \varphi^* - k^*)}{|\varphi^{*'} - N(D^*)| \sqrt{(\omega_5^2 + \phi_5^2 + \sigma_5^2)}} n_2^*, \\ k_{\beta_5} = \sqrt{2} \frac{\sqrt{\omega_5^2 + \phi_5^2 + \sigma_5^2}}{(\varphi^{*'} - N(D^*))^4} \\ r_{\beta_5} = \sqrt{2} \frac{\eta_5 \tilde{\eta}_5 + \theta_5 \tilde{\theta}_5 + \rho_5 \tilde{\rho}_5}{\tilde{\eta}_5^2 + \tilde{\theta}_5^2 + \tilde{\rho}_5^2} \end{array} \right.$$

şeklinde dir. Burada katsayılar

$$\begin{aligned}
\omega_5 &= r^{*2} \varphi^{*''} \cos \varphi^* - k^* \varphi^{*'} \varphi^{*''} \cos^2 \varphi^* - r^* \varphi^{*'} \varphi^{*''} \sin \varphi^* \cos \varphi^* - (\varphi^{*'})^4 \sin \varphi^* \\
&\quad - k^{*2} (\varphi^{*'})^2 \sin \varphi^* - r^{*2} (\varphi^{*'})^2 \sin \varphi^* + 2k^* (\varphi^{*'})^3 \sin \varphi^* \cos \varphi^* \\
&\quad + 2r^* (\varphi^{*'})^3 \sin^2 \varphi^* - k^{*'} (\varphi^{*'})^2 - r^{*2} k^{*'} - 2k^{*'} k^* \varphi^{*'} \cos \varphi^* - 2k^{*'} \varphi^{*'} r^* \sin \varphi^* \\
&\quad - r^* r^{*'} \varphi^{*'} \cos \varphi^* + k^{*'} (\varphi^{*'})^2 \cos^2 \varphi^* + r^{*'} (\varphi^{*'})^2 \sin \varphi^* \cos \varphi^* + k^* \varphi^{*'} \varphi^{*''} \\
&\quad + k^* r^* r^{*'} - k^* r^* \varphi^{*''} \sin \varphi^* - \varphi^{*'} r^{*'} k^* \sin \varphi^* \\
\phi_5 &= k^* (\varphi^{*'})^3 \cos \varphi^* + 3k^{*3} \varphi^{*'} \cos \varphi^* + 3r^{*2} k^* \varphi^{*'} \cos \varphi^* - 2k^{*2} (\varphi^{*'})^2 \cos^2 \varphi^* \\
&\quad - 4k^* r^* (\varphi^{*'})^2 \sin \varphi^* \cos \varphi^* - k^{*2} (\varphi^{*'})^2 - k^{*4} - 2k^{*2} r^{*2} + 3k^{*2} r^* \varphi^{*'} \sin \varphi^* \\
&\quad - r^{*2} (\varphi^{*'})^2 + 3r^{*3} \varphi^{*'} \sin \varphi^* + r^* (\varphi^{*'})^3 \sin \varphi^* - 2r^{*2} (\varphi^{*'})^2 \sin^2 \varphi^* \\
\sigma_5 &= r^{*'} (\varphi^{*'})^2 + k^{*2} r^{*'} - 2k^* r^{*'} \varphi^{*'} \cos \varphi^* - k^{*2} \varphi^{*''} \sin \varphi^* + k^* \varphi^{*'} \varphi^{*''} \sin \varphi^* \cos \varphi^* \\
&\quad + r^* \varphi^{*'} \varphi^{*''} \sin^2 \varphi^* - (\varphi^{*'})^4 \cos \varphi^* - k^{*2} (\varphi^{*'})^2 \cos \varphi^* - r^{*2} (\varphi^{*'})^2 \cos \varphi^* \\
&\quad + 2k^* (\varphi^{*'})^3 \cos^2 \varphi^* + 2r^* (\varphi^{*'})^3 \sin \varphi^* \cos \varphi^* - r^* \varphi^{*'} \varphi^{*''} - r^* k^* k^{*'} \\
&\quad + r^* k^* \varphi^{*''} \cos \varphi^* + r^* k^{*'} \varphi^{*'} \cos \varphi^* + k^* k^{*'} \varphi^{*'} \sin \varphi^* - k^{*'} (\varphi^{*'})^2 \sin \varphi^* \cos \varphi^* \\
&\quad - r^{*'} (\varphi^{*'})^2 \sin^2 \varphi^* \\
\eta_5 &= \varphi^{*''} \cos \varphi^* - 3\varphi^{*'} \varphi^{*''} \sin \varphi^* - (\varphi^{*'})^3 \cos \varphi^* - k^{*''} - k^{*2} \varphi^{*'} \cos \varphi^* - k^* r^* \varphi^{*'} \sin \varphi^* \\
&\quad + k^{*3} + k^* r^{*2} \\
\theta_5 &= 2k^* \varphi^{*''} \cos \varphi^* - 2k^* (\varphi^{*'})^2 \sin \varphi^* - 3k^* k^{*'} + k^* \varphi^{*''} \cos \varphi^* + r^{*'} \varphi^{*'} \sin \varphi^* \\
&\quad + 2r^* \varphi^{*''} \sin \varphi^* + 2(\varphi^{*'})^2 \cos \varphi^* - 3r^* r^{*'} \\
\rho_5 &= (k^* r^* \varphi^{*'} - 3\varphi^{*'} \varphi^{*''}) \cos \varphi^* + (r^{*2} \varphi^{*'} - \varphi^{*''} + (\varphi^{*'})^3) \sin \varphi^* - k^{*2} r^* - r^{*3} + r^{*''}
\end{aligned}$$

ve

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\eta}_5 = \left( k^* (\varphi^{*'})^2 \sin \varphi^* \right) \cos \varphi^* + \left( r^* (\varphi^{*'})^2 \sin \varphi^* - k^{*2} \varphi^{*'} - 2r^{*2} \varphi^{*'} \right) \sin \varphi^* \\ \quad + k^{*2} r^* + r^{*3} \\ \tilde{\theta}_5 = \left( r^* \varphi^{*''} - r^{*'} \varphi^{*'} - k^* (\varphi^{*'})^2 \right) \cos \varphi^* + \left( k^{*'} \varphi^{*'} - r^* (\varphi^{*'})^2 - k^* \varphi^{*''} \right) \sin \varphi^* \\ \quad - r^* k^{*'} + (\varphi^{*'})^3 + k^* r^{*'} \\ \tilde{\rho}_5 = \left( k^* (\varphi^{*'})^2 \cos \varphi^* + r^* (\varphi^{*'})^2 \sin \varphi^* - 2k^{*2} \varphi^{*'} - r^{*2} \varphi^{*'} \right) \cos \varphi^* \\ \quad - k^* r^* \varphi^{*'} \sin \varphi^* + k^{*3} + k^* r^{*2} \end{array} \right.$$

olur.

**İspat:** (4.5.1) bağıntısında  $w^*$  in yerine (3.2.17) den karşılığı yazılırsa

$$\beta_5(s) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sin \varphi^* t^* + n_1^* + \cos \varphi^* n_2^*) \quad (4.5.2)$$

olur. Bu eğrinin  $s_{\beta_5}$  yay parametresine göre türevi alınırsa

$$t_{\beta_5} \frac{ds_{\beta_5}}{ds} = \frac{\varphi^{*'} \cos \varphi^* - k^*}{\sqrt{2}} t^* + \frac{r^* - \varphi^{*'} \sin \varphi^*}{\sqrt{2}} n_2^* \quad (4.5.3)$$

olur ve norm alınırsa  $\frac{ds_{\beta_5}}{ds}$  ifadesi

$$\frac{ds_{\beta_5}}{ds} = \frac{|\varphi^{*'} - N(D^*)|}{\sqrt{2}} \quad (4.5.4)$$

bulunur. Bulunan bu ifade yukarıda yerine yazılırsa  $\beta_5$  eğrisinin teğet vektörü

$$t_{\beta_5}(s) = \frac{\varphi^{*'} \cos \varphi^* - k^*}{|\varphi^{*'} - N(D^*)|} t^* + \frac{r^* - \varphi^{*'} \sin \varphi^*}{|\varphi^{*'} - N(D^*)|} n_2^* \quad (4.5.5)$$

şeklinde bulunur. (4.5.2) ifadesinde  $t^*$ ,  $n_1^*$ ,  $n_2^*$ ,  $\sin \varphi^*$  ve  $\cos \varphi^*$  in yerine (3.2.12) ve (3.2.18) den karşılıkları yazılırsa Smarandache eğrisinin evolüt eğrisine bağlı ifadesi

$$a = \frac{N(D)}{\sqrt{\varphi'^2 + N(D)^2}} \quad \text{ve} \quad b = \frac{\varphi'}{\sqrt{\varphi'^2 + N(D)^2}}$$

olmak üzere

$$\beta_5(s) = \frac{-\cos \varphi + a \sin \varphi}{\sqrt{2}} t + \frac{b}{\sqrt{2}} n_1 + \frac{\sin \varphi + a \cos \varphi}{\sqrt{2}} n_2 \quad (4.5.6)$$

olur. (4.5.5) denkleminde (3.2.12), (3.2.13) ve (3.2.18) bağıntıları dikkate alınırsa

(4.5.6) ifadesindeki  $\beta_5$  eğrisinin teğet vektörü

$$\begin{aligned} t_{\beta_5}(s) = & \frac{\varphi' \sin \varphi + a' \sin \varphi + a \varphi' \cos \varphi - kb}{\sqrt{(\varphi' + a')^2 + (a\varphi' - bN(D))^2 + (N(D) - b')^2}} t \\ & + \frac{-N(D) + b'}{\sqrt{(\varphi' + a')^2 + (a\varphi' - bN(D))^2 + (N(D) - b')^2}} n_1 \\ & + \frac{\varphi' \cos \varphi + a' \cos \varphi - a\varphi' \sin \varphi + rb}{\sqrt{(\varphi' + a')^2 + (a\varphi' - bN(D))^2 + (N(D) - b')^2}} n_2 \end{aligned} \quad (4.5.7)$$

bulunur. (4.5.5) ifadesinin türevi alınırsa katsayılar

$$\left\{ \begin{aligned} \omega_5 = & r^{*2} \varphi^{*'} \cos \varphi^* - k^* \varphi^{*'} \varphi^{*''} \cos^2 \varphi^* - r^* \varphi^{*'} \varphi^{*''} \sin \varphi^* \cos \varphi^* - (\varphi^{*'})^4 \sin \varphi^* \\ & - k^{*2} (\varphi^{*'})^2 \sin \varphi^* - r^{*2} (\varphi^{*'})^2 \sin \varphi^* + 2k^* (\varphi^{*'})^3 \sin \varphi^* \cos \varphi^* \\ & + 2r^* (\varphi^{*'})^3 \sin^2 \varphi^* - k^{*'} (\varphi^{*'})^2 - r^{*2} k^* - 2k^{*'} k^* \varphi^{*'} \cos \varphi^* \\ & - 2k^{*'} \varphi^{*'} r^* \sin \varphi^* - r^* r^{*'} \varphi^{*'} \cos \varphi^* + k^{*'} (\varphi^{*'})^2 \cos^2 \varphi^* + r^* (\varphi^{*'})^2 \sin \varphi^* \cos \varphi^* \\ & + k^* \varphi^{*'} \varphi^{*''} + k^* r^* r^{*'} - k^* r^* \varphi^{*''} \sin \varphi^* - \varphi^{*'} r^{*'} k^* \sin \varphi^* \\ \phi_5 = & k^* (\varphi^{*'})^3 \cos \varphi^* + 3k^{*3} \varphi^{*'} \cos \varphi^* + 3r^{*2} k^* \varphi^{*'} \cos \varphi^* - 2k^{*2} (\varphi^{*'})^2 \cos^2 \varphi^* \\ & - 4k^* r^* (\varphi^{*'})^2 \sin \varphi^* \cos \varphi^* - k^{*2} (\varphi^{*'})^2 - k^{*4} - 2k^{*2} r^{*2} + 3k^{*2} r^* \varphi^{*'} \sin \varphi^* \\ & - r^{*2} (\varphi^{*'})^2 + 3r^{*3} \varphi^{*'} \sin \varphi^* + r^* (\varphi^{*'})^3 \sin \varphi^* - 2r^{*2} (\varphi^{*'})^2 \sin^2 \varphi^* \\ \sigma_5 = & r^{*'} (\varphi^{*'})^2 + k^{*2} r^{*'} - 2k^* r^{*'} \varphi^{*'} \cos \varphi^* - k^{*2} \varphi^{*''} \sin \varphi^* + k^* \varphi^{*'} \varphi^{*''} \sin \varphi^* \cos \varphi^* \\ & + r^* \varphi^{*'} \varphi^{*''} \sin^2 \varphi^* - (\varphi^{*'})^4 \cos \varphi^* - k^{*2} (\varphi^{*'})^2 \cos \varphi^* - r^{*2} (\varphi^{*'})^2 \cos \varphi^* \\ & + 2k^* (\varphi^{*'})^3 \cos^2 \varphi^* + 2r^* (\varphi^{*'})^3 \sin \varphi^* \cos \varphi^* - r^* \varphi^{*'} \varphi^{*''} - r^* k^* k^{*'} + r^* k^* \varphi^{*''} \cos \varphi^* \\ & + r^* k^{*'} \varphi^{*'} \cos \varphi^* + k^* k^{*'} \varphi^{*'} \sin \varphi^* - k^{*'} (\varphi^{*'})^2 \sin \varphi^* \cos \varphi^* - r^{*'} (\varphi^{*'})^2 \sin^2 \varphi^* \end{aligned} \right. \quad (4.5.8)$$



olmak üzere  $t'_{\beta_5}(s)$  türevi

$$t'_{\beta_5}(s) = \sqrt{2} \frac{(\omega_5 t^* + \phi_5 n_1^* + \sigma_5 n_2^*)}{(\varphi^{*'} - N(D^*))^4} \quad (4.5.9)$$

olur. (4.5.8) ifadesinde  $k^*$ ,  $r^*$  ve  $\varphi^{*}$  'ın yerine (3.2.12) ve (3.2.13) den karşılıkları yazılırsa yeni katsayılar

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\omega}_5 = (\varphi'' \sin \varphi + \varphi'^2 \cos \varphi + a'' \sin \varphi + 2a' \varphi' \cos \varphi + a\varphi'' \cos \varphi - a\varphi'^2 \sin \varphi - k'b - 2kb' + kN(D)) \\ \quad \cdot \sqrt{(\varphi' + a')^2 + (a\varphi' - bN(D))^2 + (N(D) - b')^2} \\ \quad - (\varphi' \sin \varphi + a' \sin \varphi + a\varphi' \cos \varphi - kb) \cdot \left( \sqrt{(\varphi' + a')^2 + (a\varphi' - bN(D))^2 + (N(D) - b')^2} \right)' \\ \bar{\phi}_5 = (a\varphi' N(D) - bN(D)^2 - N(D)' + b'') \cdot \sqrt{(\varphi' + a')^2 + (a\varphi' - bN(D))^2 + (N(D) - b')^2} \\ \quad + (N(D) + b') \cdot \left( \sqrt{(\varphi' + a')^2 + (a\varphi' - bN(D))^2 + (N(D) - b')^2} \right)' \\ \bar{\sigma}_5 = (\cos \varphi (\varphi'' + a'' - a\varphi'^2) - \sin \varphi (\varphi'^2 + 2a' \varphi' + a\varphi'')) + r'b + 2rb' - rN(D) \\ \quad \cdot \sqrt{(\varphi' + a')^2 + (a\varphi' - bN(D))^2 + (N(D) - b')^2} \\ \quad - (\varphi' \cos \varphi + a' \cos \varphi - a\varphi' \sin \varphi + rb) \cdot \left( \sqrt{(\varphi' + a')^2 + (a\varphi' - bN(D))^2 + (N(D) - b')^2} \right)' \end{array} \right.$$

şeklinde olur. Bulunan bu ifadeler  $t'_{\beta_5}(s)$  türev ifadesinde yerine yazılırsa  $t'_{\beta_5}(s)$  vektörünün evolüt eğrisinin Frenet elemanları cinsinden ifadesi

$$t'_{\beta_5}(s) = \sqrt{2} \frac{(\bar{\omega}_5 t + \bar{\phi}_5 n_1 + \bar{\sigma}_5 n_2)}{\left( (\varphi' + a')^2 + (a\varphi' - bN(D))^2 + (N(D) - b')^2 \right)^{3/2}} \quad (4.5.10)$$

şeklinde bulunur.  $\beta_5$  eğrisinin eğriliği  $k_{\beta_5}$  ile gösterilirse (4.5.9) bağıntısından  $k_{\beta_5}$  eğriliği

$$k_{\beta_5} = N(t'_{\beta_5}),$$

$$k_{\beta_5} = \sqrt{2} \frac{\sqrt{\omega_5^2 + \phi_5^2 + \sigma_5^2}}{(\varphi^{*'} - N(D^*))^4} \quad (4.5.11)$$

olur. Burada  $k^*$ ,  $r^*$  ve  $\varphi^{*'}$  in yerine (3.2.13) ve (3.2.18) dan karşılıkları yazılırsa  $k_{\beta_5}$  eğriliğinin evolüt eğrisinin eğriliklerine bağlı ifadesi

$$k_{\beta_5} = \sqrt{2} \frac{\sqrt{\bar{\omega}_5^2 + \bar{\phi}_5^2 + \bar{\sigma}_5^2}}{\left((\varphi' + a')^2 + (a\varphi' - bN(D))^2 + (N(D) - b')^2\right)^{3/2}} \quad (4.5.12)$$

şekline dönüşür.  $\beta_5$  eğrisinin aslinormali  $n_{1\beta_5}$  ile gösterilirse (4.5.8) bağıntısından

$$n_{1\beta_5} = \frac{t'_{\beta_5}}{N(t'_{\beta_5})},$$

$$n_{1\beta_5} = \frac{\omega_5}{\sqrt{\omega_5^2 + \phi_5^2 + \sigma_5^2}} t^* + \frac{\phi_5}{\sqrt{\omega_5^2 + \phi_5^2 + \sigma_5^2}} n_1^* + \frac{\sigma_5}{\sqrt{\omega_5^2 + \phi_5^2 + \sigma_5^2}} n_2^*$$

olur. Burada  $t^*$ ,  $n_1^*$  ve  $n_2^*$  in yerine (3.2.12) den karşılıkları yazılırsa  $n_{1\beta_5}$  ifadesinin evolüt eğrisinin eğriliklerine bağlı ifadesi

$$n_{1\beta_5} = \frac{\bar{\omega}_5}{\sqrt{\bar{\omega}_5^2 + \bar{\phi}_5^2 + \bar{\sigma}_5^2}} t + \frac{\bar{\phi}_5}{\sqrt{\bar{\omega}_5^2 + \bar{\phi}_5^2 + \bar{\sigma}_5^2}} n_1 + \frac{\bar{\sigma}_5}{\sqrt{\bar{\omega}_5^2 + \bar{\phi}_5^2 + \bar{\sigma}_5^2}} n_2 \quad (4.5.13)$$

şeklinde bulunur.  $n_{2\beta_5} = t_{\beta_5} \times n_{1\beta_5}$  olduğundan  $n_{2\beta_5}$  vektörü

$$\begin{aligned} n_{2\beta_5} = & \frac{\phi_5 (\varphi^{*' \sin \varphi^*} - r^*)}{\left| \varphi^{*' - N(D^*) \right| \sqrt{(\omega_5^2 + \phi_5^2 + \sigma_5^2)}} t^* \\ & + \frac{\left( \omega_5 \cdot (r^* - \varphi^{*' \sin \varphi^*}) - \sigma_5 (\varphi^{*' \cos \varphi^*} - k^*) \right)}{\left| \varphi^{*' - N(D^*) \right| \sqrt{(\omega_5^2 + \phi_5^2 + \sigma_5^2)}} n_1^* \\ & + \frac{\left( \phi_5 (\varphi^{*' \cos \varphi^*} - k^*) \right)}{\left| \varphi^{*' - N(D^*) \right| \sqrt{(\omega_5^2 + \phi_5^2 + \sigma_5^2)}} n_2^* \end{aligned} \quad (4.5.14)$$

olur. Burada  $t^*$ ,  $n_1^*$ ,  $n_2^*$ ,  $k^*$ ,  $r^*$ ,  $\sin \varphi^*$ ,  $\cos \varphi^*$  ve  $\varphi^{*'}$  in yerine karşılıkları yazılırsa

$n_{2\beta_5}$  binormal vektörünün evolüt eğrisinin eğriliklerine bağlı ifadesi

$$\begin{aligned}
n_{2\beta_5} = & \frac{\bar{\sigma}_5(-N(D)+b') - \bar{\phi}_5(\varphi' \cos \varphi + a' \cos \varphi - a\varphi' \sin \varphi + rb)}{\sqrt{(\bar{\omega}_5^2 + \bar{\phi}_5^2 + \bar{\sigma}_5^2)((\varphi' + a')^2 + (a\varphi' - bN(D))^2 + (N(D) - b')^2)}} t \\
& + \frac{\bar{\omega}_5(\varphi' \cos \varphi + a' \cos \varphi - a\varphi' \sin \varphi + rb) - \bar{\sigma}_5(\varphi' \sin \varphi + a' \sin \varphi + a\varphi' \cos \varphi - kb)}{\sqrt{(\bar{\omega}_5^2 + \bar{\phi}_5^2 + \bar{\sigma}_5^2)((\varphi' + a')^2 + (a\varphi' - bN(D))^2 + (N(D) - b')^2)}} n_1 \\
& + \frac{\bar{\phi}_5(\varphi' \sin \varphi + a' \sin \varphi + a\varphi' \cos \varphi - kb) - \bar{\omega}_5(-N(D) + b')}{\sqrt{(\bar{\omega}_5^2 + \bar{\phi}_5^2 + \bar{\sigma}_5^2)((\varphi' + a')^2 + (a\varphi' - bN(D))^2 + (N(D) - b')^2)}} n_2
\end{aligned} \quad (4.5.15)$$

şeklinde bulunur.  $\beta_5$  eğrisinin ikinci ve üçüncü türevleri sırasıyla

$$\begin{aligned}
\beta_5'' = & \frac{\varphi^{*''} \cos \varphi^* - (\varphi^{*'})^2 \sin \varphi^* - k^{*'}}{\sqrt{2}} t^* \\
& + \frac{k^* \varphi^{*'} \cos \varphi^* + r^* \varphi^{*''} \sin \varphi^* - k^{*2} - r^{*2}}{\sqrt{2}} n_1^* \\
& + \frac{r^{*'} - \varphi^{*''} \sin \varphi^* - (\varphi^{*'})^2 \cos \varphi^*}{\sqrt{2}} n_2^*
\end{aligned}$$

ve

$$\beta_5''' = \frac{\eta_5}{\sqrt{2}} t^* + \frac{\theta_5}{\sqrt{2}} n_1^* + \frac{\rho_5}{\sqrt{2}} n_2^*$$

olur. Burada  $\eta_5$ ,  $\theta_5$  ve  $\rho_5$

$$\left\{ \begin{aligned}
\eta_5 &= \varphi^{*'''} \cos \varphi^* - 3\varphi^{*'} \varphi^{*''} \sin \varphi^* - (\varphi^{*'})^3 \cos \varphi^* - k^{*''} \\
&\quad - k^{*2} \varphi^{*'} \cos \varphi^* - k^* r^* \varphi^{*''} \sin \varphi^* + k^{*3} + k^* r^{*2} \\
\theta_5 &= 2k^* \varphi^{*''} \cos \varphi^* - 2k^* (\varphi^{*'})^2 \sin \varphi^* - 3k^* k^{*'} + k^* \varphi^{*''} \cos \varphi^* \\
&\quad + r^{*'} \varphi^{*'} \sin \varphi^* + 2r^* \varphi^{*''} \sin \varphi^* + 2(\varphi^{*'})^2 \cos \varphi^* - 3r^* r^{*'} \\
\rho_5 &= (k^* r^* \varphi^{*'} - 3\varphi^{*'} \varphi^{*''}) \cos \varphi^* + (r^{*2} \varphi^{*'} - \varphi^{*'''} + (\varphi^{*'})^3) \sin \varphi^* \\
&\quad - k^{*2} r^* - r^{*3} + r^{*''}
\end{aligned} \right. \quad (4.5.16)$$

şeklinde katsayılardır.  $\beta_5$  eğrisinin torsiyonu  $r_{\beta_5}$  ile gösterilirse  $r_{\beta_5}$  torsiyonu

$$r_{\beta_5} = \frac{\langle \beta_5' \times \beta_5'', \beta_5''' \rangle \Big|_{\mathbb{Q}}}{\|\beta_5' \times \beta_5''\|^2}$$

dır. Burada  $\beta_5'$ ,  $\beta_5''$  ve  $\beta_5'''$  değerleri yerine yazılır ve gerekli hesaplamalar yapılırsa  $r_{\beta_5}$  torsiyonu

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\eta}_5 = \left( k^* (\varphi^{*'})^2 \sin \varphi^* \right) \cos \varphi^* + \left( r^* (\varphi^{*'})^2 \sin \varphi^* - k^{*2} \varphi^{*'} - 2r^{*2} \varphi^{*'} \right) \sin \varphi^* \\ \quad + k^{*2} r^* + r^{*3} \\ \tilde{\theta}_5 = \left( r^* \varphi^{*''} - r^{*'} \varphi^{*'} - k^* (\varphi^{*'})^2 \right) \cos \varphi^* + \left( k^{*'} \varphi^{*'} - r^* (\varphi^{*'})^2 - k^* \varphi^{*''} \right) \sin \varphi^* \\ \quad - r^* k^{*'} + (\varphi^{*'})^3 + k^* r^{*'} \\ \tilde{\rho}_5 = \left( k^* (\varphi^{*'})^2 \cos \varphi^* + r^* (\varphi^{*'})^2 \sin \varphi^* - 2k^{*2} \varphi^{*'} - r^{*2} \varphi^{*'} \right) \cos \varphi^* \\ \quad - k^* r^* \varphi^{*'} \sin \varphi^* + k^{*3} + k^* r^{*2} \end{array} \right.$$

olmak üzere

$$r_{\beta_5} = \sqrt{2} \frac{\eta_5 \tilde{\eta}_5 + \theta_5 \tilde{\theta}_5 + \rho_5 \tilde{\rho}_5}{\tilde{\eta}_5^2 + \tilde{\theta}_5^2 + \tilde{\rho}_5^2} \quad (4.5.17)$$

olur. (4.5.16) katsayılar ifadesinde  $k^*$ ,  $r^*$ ,  $\sin \varphi^*$ ,  $\cos \varphi^*$  ve  $\varphi^{*'}$  in yerine (3.2.13) ve (3.2.18) dan karşılıkları yazılırsa yeni katsayılar

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\eta}_5 = \left( \sin \varphi (\varphi'' + a'' - a\varphi'^2) + \cos \varphi (\varphi'^2 + 2a'\varphi' + a\varphi'') - k'b - 2kb' + kN(D) \right)' \\ \quad - ka\varphi'N(D) + kbN(D)^2 + kN(D)' - kb'' \\ \bar{\theta}_5 = \varphi'^2 N(D) + 2a'\varphi'N(D) + a\varphi''N(D) - b(kk' + rr') - 2b'N(D)^2 + N(D)^3 \\ \bar{\rho}_5 = \left( \cos \varphi (\varphi'' + a'' - a\varphi'^2) + \sin \varphi (-\varphi'^2 - 2a'\varphi' - a\varphi'') + r'b + 2rb' - rN(D) \right)' \\ \quad + ra\varphi'N(D) - rbN(D)^2 - rN(D)' + rb'' \end{array} \right.$$

şeklinde bulunur ve bu katsayılar (4.5.17) bağıntısında yerine yazılırsa  $n_1^* w^*$  Smarandache eğrisinin  $r_{\beta_5}$  torsiyonunun evolüt eğrisinin Frenet elemanları cinsinden ifadesi

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \varphi'' \sin \varphi + \varphi'^2 \cos \varphi + a'' \sin \varphi + 2a' \varphi' \cos \varphi + a\varphi'' \cos \varphi - a\varphi'^2 \sin \varphi \\ \quad - k'b - 2kb' + kN(D) \\ \varepsilon_2 = a\varphi'N(D) - bN(D)^2 - N(D)' + b'' \\ \varepsilon_3 = \varphi'' \cos \varphi - \varphi'^2 \sin \varphi + a'' \cos \varphi - 2a' \varphi' \sin \varphi - a\varphi'' \sin \varphi - a\varphi'^2 \cos \varphi \\ \quad + r'b + 2rb' - rN(D) \end{cases}$$

ve

$$\begin{cases} \varepsilon_4 = \varepsilon_3 (-N(D) + b') - \varepsilon_2 (\varphi' \cos \varphi + a' \cos \varphi - a\varphi' \sin \varphi + rb) \\ \varepsilon_5 = \varepsilon_1 (\varphi' \cos \varphi + a' \cos \varphi - a\varphi' \sin \varphi + rb) \\ \quad - \varepsilon_3 (\varphi' \sin \varphi + a' \sin \varphi + a\varphi' \cos \varphi - kb) \\ \varepsilon_6 = \varepsilon_2 (\varphi' \sin \varphi + a' \sin \varphi + a\varphi' \cos \varphi - kb) - \varepsilon_1 (-N(D) + b') \end{cases}$$

olmak üzere

$$r_{\beta_5} = \sqrt{2} \frac{\bar{\eta}_5 \varepsilon_4 + \bar{\theta}_5 \varepsilon_5 + \bar{\rho}_5 \varepsilon_6}{\varepsilon_4^2 + \varepsilon_5^2 + \varepsilon_6^2}$$

şeklinde elde edilir. Böylece şu sonuç verilir:

**Sonuç 4.5.1:**  $\alpha$  uzaysal kuaterniyonik eğrisinin involütü  $\alpha^*$  olsun.  $\alpha^*$  eğrisinden elde edilen  $n_1^* w^*$  -Smarandache eğrisinin Frenet vektörleri ve eğrilikleri  $\alpha$  evolüt eğrisinin Frenet vektörlerine ve eğriliklerine bağlı ifadeleri sırasıyla

$$\left. \begin{aligned}
t_{\beta_5}(s) &= \frac{\varphi' \sin \varphi + a' \sin \varphi + a\varphi' \cos \varphi - kb}{\sqrt{(\varphi' + a')^2 + (a\varphi' - bN(D))^2 + (N(D) - b')^2}} t \\
&+ \frac{-N(D) + b'}{\sqrt{(\varphi' + a')^2 + (a\varphi' - bN(D))^2 + (N(D) - b')^2}} n_1 \\
&+ \frac{\varphi' \cos \varphi + a' \cos \varphi - a\varphi' \sin \varphi + rb}{\sqrt{(\varphi' + a')^2 + (a\varphi' - bN(D))^2 + (N(D) - b')^2}} n_2 \\
n_{1\beta_5} &= \frac{\bar{\omega}_5}{\sqrt{\bar{\omega}_5^2 + \bar{\phi}_5^2 + \bar{\sigma}_5^2}} t + \frac{\bar{\phi}_5}{\sqrt{\bar{\omega}_5^2 + \bar{\phi}_5^2 + \bar{\sigma}_5^2}} n_1 + \frac{\bar{\sigma}_5}{\sqrt{\bar{\omega}_5^2 + \bar{\phi}_5^2 + \bar{\sigma}_5^2}} n_2 \\
n_{2\beta_5} &= \frac{\bar{\sigma}_5(-N(D) + b') - \bar{\phi}_5(\varphi' \cos \varphi + a' \cos \varphi - a\varphi' \sin \varphi + rb)}{\sqrt{(\bar{\omega}_5^2 + \bar{\phi}_5^2 + \bar{\sigma}_5^2) \left( (\varphi' + a')^2 + (a\varphi' - bN(D))^2 + (N(D) - b')^2 \right)}} t \\
&+ \frac{\bar{\omega}_5(\varphi' \cos \varphi + a' \cos \varphi - a\varphi' \sin \varphi + rb) - \bar{\sigma}_5(\varphi' \sin \varphi + a' \sin \varphi + a\varphi' \cos \varphi - kb)}{\sqrt{(\bar{\omega}_5^2 + \bar{\phi}_5^2 + \bar{\sigma}_5^2) \left( (\varphi' + a')^2 + (a\varphi' - bN(D))^2 + (N(D) - b')^2 \right)}} n_1 \\
&+ \frac{\bar{\phi}_5(\varphi' \sin \varphi + a' \sin \varphi + a\varphi' \cos \varphi - kb) - \bar{\omega}_5(-N(D) + b')}{\sqrt{(\bar{\omega}_5^2 + \bar{\phi}_5^2 + \bar{\sigma}_5^2) \left( (\varphi' + a')^2 + (a\varphi' - bN(D))^2 + (N(D) - b')^2 \right)}} n_2, \\
k_{\beta_5} &= \sqrt{2} \frac{\sqrt{\bar{\omega}_5^2 + \bar{\phi}_5^2 + \bar{\sigma}_5^2}}{\left( (\varphi' + a')^2 + (a\varphi' - bN(D))^2 + (N(D) - b')^2 \right)^{3/2}} \\
r_{\beta_5} &= \sqrt{2} \frac{\bar{\eta}_5 \varepsilon_4 + \bar{\theta}_5 \varepsilon_5 + \bar{\rho}_5 \varepsilon_6}{\varepsilon_4^2 + \varepsilon_5^2 + \varepsilon_6^2}
\end{aligned} \right\}$$

şeklindedir.

Burada  $a = \frac{N(D)}{\sqrt{\varphi'^2 + N(D)^2}}$ ,  $b = \frac{\varphi'}{\sqrt{\varphi'^2 + N(D)^2}}$  alınırsa katsayılar

$$\left\{ \begin{aligned}
\bar{\omega}_5 &= \left( \varphi'' \sin \varphi + \varphi'^2 \cos \varphi + a'' \sin \varphi + 2a' \varphi' \cos \varphi + a \varphi'' \cos \varphi - a \varphi'^2 \sin \varphi - k'b - 2kb' + kN(D) \right) \\
&\quad \cdot \sqrt{(\varphi' + a')^2 + (a\varphi' - bN(D))^2 + (N(D) - b')^2} \\
&\quad - (\varphi' \sin \varphi + a' \sin \varphi + a\varphi' \cos \varphi - kb) \cdot \left( \sqrt{(\varphi' + a')^2 + (a\varphi' - bN(D))^2 + (N(D) - b')^2} \right)' \\
\bar{\phi}_5 &= \left( a\varphi' N(D) - bN(D)^2 - N(D)' + b'' \right) \cdot \sqrt{(\varphi' + a')^2 + (a\varphi' - bN(D))^2 + (N(D) - b')^2} \\
&\quad + (N(D) + b') \cdot \left( \sqrt{(\varphi' + a')^2 + (a\varphi' - bN(D))^2 + (N(D) - b')^2} \right)' \\
\bar{\sigma}_5 &= \left( \cos \varphi (\varphi'' + a'' - a\varphi'^2) - \sin \varphi (\varphi'^2 + 2a' \varphi' + a\varphi'') + r'b + 2rb' - rN(D) \right) \\
&\quad \cdot \sqrt{(\varphi' + a')^2 + (a\varphi' - bN(D))^2 + (N(D) - b')^2} \\
&\quad - (\varphi' \cos \varphi + a' \cos \varphi - a\varphi' \sin \varphi + rb) \cdot \left( \sqrt{(\varphi' + a')^2 + (a\varphi' - bN(D))^2 + (N(D) - b')^2} \right)' , \\
\bar{\eta}_5 &= \left( \sin \varphi (\varphi'' + a'' - a\varphi'^2) + \cos \varphi (\varphi'^2 + 2a' \varphi' + a\varphi'') - k'b - 2kb' + kN(D) \right)' \\
&\quad - ka\varphi' N(D) + kbN(D)^2 + kN(D)' - kb'' \\
\bar{\theta}_5 &= \varphi'^2 N(D) + 2a' \varphi' N(D) + a\varphi'' N(D) - b(kk' + rr') - 2b'N(D)^2 + N(D)^3 \\
\bar{\rho}_5 &= \left( \cos \varphi (\varphi'' + a'' - a\varphi'^2) + \sin \varphi (-\varphi'^2 - 2a' \varphi' - a\varphi'') + r'b + 2rb' - rN(D) \right)' \\
&\quad + ra\varphi' N(D) - rbN(D)^2 - rN(D)' + rb'' \\
\varepsilon_4 &= \varepsilon_3 (-N(D) + b') - \varepsilon_2 (\varphi' \cos \varphi + a' \cos \varphi - a\varphi' \sin \varphi + rb) \\
\varepsilon_5 &= \varepsilon_1 (\varphi' \cos \varphi + a' \cos \varphi - a\varphi' \sin \varphi + rb) - \varepsilon_3 (\varphi' \sin \varphi + a' \sin \varphi + a\varphi' \cos \varphi - kb) \\
\varepsilon_6 &= \varepsilon_2 (\varphi' \sin \varphi + a' \sin \varphi + a\varphi' \cos \varphi - kb) - \varepsilon_1 (-N(D) + b')
\end{aligned} \right.$$

biçimindedir.

**Örnek 4.5.1:**

$$\alpha(s) = \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \cos\left(\frac{1}{\sqrt{5}}s\right) + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{5}}s\right), \frac{2}{\sqrt{5}}s, \frac{1}{\sqrt{2}} \cos\left(\frac{1}{\sqrt{5}}s\right) + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{5}}s\right) \right)$$

eğrisi uzaysal kuaterniyonik bir eğridir. Bu eğrinin Frenet vektörleri, birim Darboux vektörü, eğrilik ve torsiyonu

$$t = \left( \frac{-1}{\sqrt{10}} \sin\left(\frac{s}{\sqrt{5}}\right) + \frac{1}{\sqrt{10}} \cos\left(\frac{s}{\sqrt{5}}\right), \frac{-2}{\sqrt{5}}, \frac{-1}{\sqrt{10}} \sin\left(\frac{s}{\sqrt{5}}\right) + \frac{1}{\sqrt{10}} \cos\left(\frac{s}{\sqrt{5}}\right) \right)$$

$$n_1 = \left( -\frac{1}{\sqrt{2}} \cos\left(\frac{s}{\sqrt{5}}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin\left(\frac{s}{\sqrt{5}}\right), 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \cos\left(\frac{s}{\sqrt{5}}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin\left(\frac{s}{\sqrt{5}}\right) \right)$$

$$n_2 = \left( -\sqrt{\frac{2}{5}} \left( \cos\left(\frac{s}{\sqrt{5}}\right) - \frac{1}{\sqrt{10}} \sin\left(\frac{s}{\sqrt{5}}\right) \right), \frac{-1}{\sqrt{5}}, \sqrt{\frac{2}{5}} \left( \cos\left(\frac{s}{\sqrt{5}}\right) + \frac{1}{\sqrt{10}} \sin\left(\frac{s}{\sqrt{5}}\right) \right) \right)$$

$$w = (0, 1, 0)$$

$$k = \frac{1}{5}$$

$$r = \frac{2}{5}$$

Bu eğriye ait involüt eğrisinin denklemi

$$\alpha^*(s) = \alpha(s) + (-s + c)t(s)$$

idi.  $\alpha(s)$  ve  $t(s)$  değerleri yerine yazılırsa involüt eğrisinin denklemi

$$\alpha^*(s) = \left( \begin{array}{l} \frac{-1}{\sqrt{10}} \sin\left(\frac{s}{\sqrt{5}}\right) + \frac{s}{\sqrt{10}} \sin\left(\frac{s}{\sqrt{5}}\right) + \frac{1}{\sqrt{10}} \cos\left(\frac{s}{\sqrt{5}}\right) - \frac{s}{\sqrt{10}} \cos\left(\frac{s}{\sqrt{5}}\right) \\ + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos\left(\frac{s}{\sqrt{5}}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin\left(\frac{s}{\sqrt{5}}\right), \frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{10}} \sin\left(\frac{s}{\sqrt{5}}\right) - \frac{s}{\sqrt{10}} \sin\left(\frac{s}{\sqrt{5}}\right) \\ + \frac{1}{\sqrt{10}} \cos\left(\frac{s}{\sqrt{5}}\right) - \frac{s}{\sqrt{10}} \cos\left(\frac{s}{\sqrt{5}}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos\left(\frac{s}{\sqrt{5}}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin\left(\frac{s}{\sqrt{5}}\right) \end{array} \right)$$

olur.  $\alpha^*(s)$  uzaysal kuaterniyonik involüt eğrisinin Frenet vektörleri, birim Darboux vektörü, eğrilik ve torsiyonu

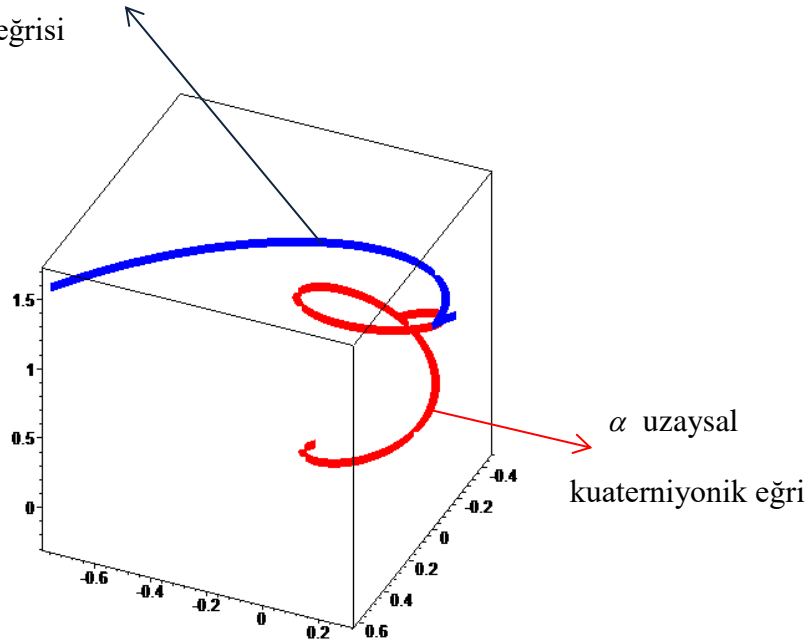


$$\begin{aligned}
t^*(s) &= \left( -\frac{1}{\sqrt{2}} \cos\left(\frac{s}{\sqrt{5}}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin\left(\frac{s}{\sqrt{5}}\right), 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \cos\left(\frac{s}{\sqrt{5}}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin\left(\frac{s}{\sqrt{5}}\right) \right) \\
n_1^*(s) &= \left( -\frac{1}{\sqrt{2}} \cos\left(\frac{s}{\sqrt{5}}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin\left(\frac{s}{\sqrt{5}}\right), 0, -\frac{1}{\sqrt{2}} \cos\left(\frac{s}{\sqrt{5}}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin\left(\frac{s}{\sqrt{5}}\right) \right) \\
n_2^*(s) &= (0, -1, 0) \\
w^*(s) &= \left( 0, -\frac{\sqrt{4}}{2(1-s)\sqrt{\frac{1}{(1-s)^2}}}, 0 \right) \\
k^*(s) &= \frac{1}{2(1-s)} \\
r^*(s) &= 0
\end{aligned}$$

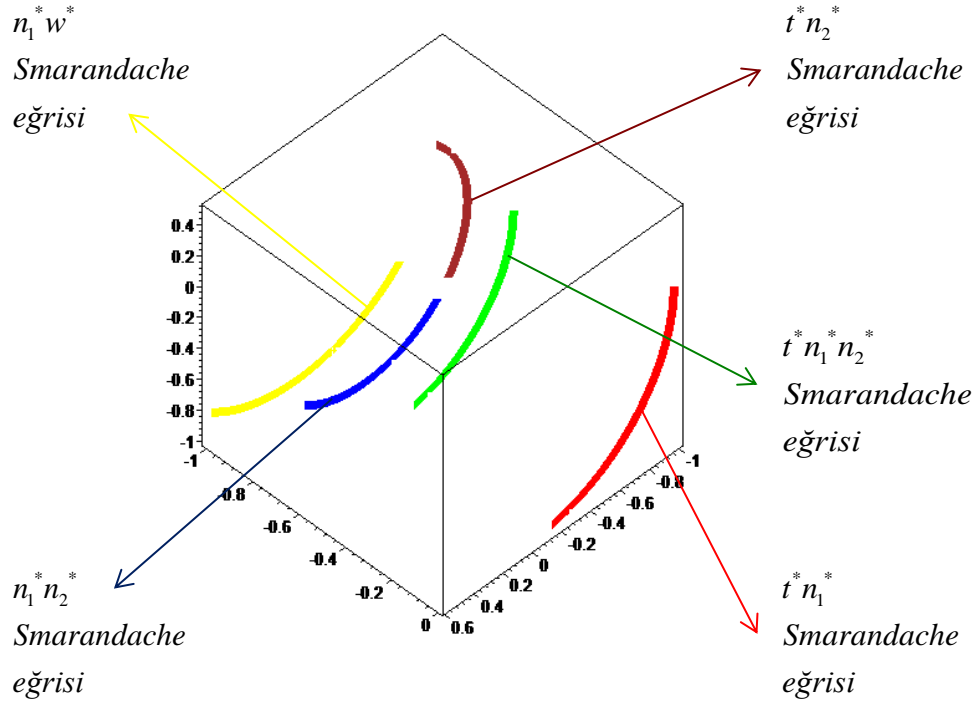
şeklinde bulunur. Uzaysal kuarterniyonik involüt ve evolüt eğrisi ve involüt eğrisine ait Smarandache eğrileri aşağıdaki şekillerde gösterilmiştir.

$\alpha^*$  uzaysal kuarterniyonik

involüt eğrisi



Şekil 4.1.  $\alpha$  uzaysal kuarterniyonik eğrisine ait  $\alpha^*$  involüt eğrisi



Şekil 4.2.  $\alpha^*$  uzaysal kuarterniyonik eğrisinin Smarandache eğrileri

## 5. SONUÇ ve ÖNERİLER

Bu tezde ilk olarak  $\alpha : I \rightarrow E^3$  uzaysal kuaterniyonik eğrisinin  $\alpha^* : I \rightarrow E^3$  uzaysal kuaterniyonik involüt eğrisi olarak alındığında konum vektörü,  $\alpha^*$  eğrisinin Frenet çatıları tarafından çizilen regüler Samarandache eğrileri

$$\beta_1 = \beta_{t^* n_1^*}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(t^* + n_1^*) \quad t^* n_1^* \quad - \text{uzaysal kuaterniyonik Samarandache}$$

eğrisi,

$$\beta_2 = \beta_{n_1^* n_2^*}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(n_1^* + n_2^*) \quad n_1^* n_2^* \quad - \text{uzaysal kuaterniyonik Samarandache}$$

eğrisi,

$$\beta_3 = \beta_{t^* n_2^*}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(t^* + n_2^*) \quad t^* n_2^* \quad - \text{uzaysal kuaterniyonik Samarandache}$$

eğrisi,

$$\beta_4 = \beta_{t^* n_1^* n_2^*}(s) = \frac{1}{\sqrt{3}}(t^* + n_1^* + n_2^*) \quad t^* n_1^* n_2^* \quad - \text{uzaysal kuaterniyonik}$$

Smarandache eğrisi,

$$\beta_5 = \beta_{n_1^* w^*}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(n_1^* + w^*) \quad n_1^* w^* \quad - \text{uzaysal kuaterniyonik Samarandache}$$

eğrisi,

şeklinde gösterildi ve bu eğrilerin Frenet vektörleri, eğrilik ve burulmaları hesaplandı.

İkinci olarak  $\alpha^*$  eğrisinin  $\{t^*, n_1^*, n_2^*\}$  Frenet vektörleri ve  $w^*$  birim Darboux vektörü konum vektörü olarak alındığında elde edilen Samarandache eğrilerinin eğilim ve burulmaları  $\alpha$  eğrisinin Frenet elemanlarına bağlı olarak ifade edildi.

Benze çalışma

a)  $(\alpha, \alpha^*)$  uzaysal kuaterniyonik Bertrand eğri çifti olması durumunda yapılabilir.

b)  $(\alpha, \alpha^*)$  uzaysal kuaterniyonik Mannheim eğri çifti olması durumunda yapılabilir.

Bu iki durum tarafımdan çalışılmaktadır.

Benzer yolla  $(\alpha, \alpha^*)$  kuaterniyonik Mannheim eğri çifti,  $(\alpha, \alpha^*)$  kuaterniyonik Bertrand eğri çifti ve  $(\alpha, \alpha^*)$  kuaterniyonik evolüt-involüt eğrileri için yapılan bu çalışmalar Lorenz uzayında ve Dual uzayda da yapılabilir. Hatta bu uzaylar üzerinde değişik çatılar alınarak bu çatılar tarafından üretilecek Smarandache eğrileri tanımlanabilir ve bu eğrilerin bazı özellikleri incelenebilir.

## 6. KAYNAKLAR

- Ali, A. T. 2010. Special Smarandache curves in the Euclidean space. *International Journal of Mathematical Combinatorics*, 2: 30-36.
- Bharathi, K., Nagaraj, M. 1987. Quaternion valued function of a real variable Serret-Frenet formula. *Indian Journal Of Pure And Applied Mathematics*, 18(6): 507-511.
- Bilici, M. 1999. İnvolut-evolüt eğrilerinin küresel göstergelerinin eğrilikleri ve tabii liftleri. Yüksek Lisans Tezi, Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Samsun.
- Çetin, M., Kocayığit, H. 2013. On the quaternionic Smarandache curves in the Euclidean 3-Space. *International Journal of Contemporary Mathematical Sciences*, 8(3): 139-150.
- Demir, S., Özdaş, K. 2005. Reel kuaterniyonlarla Serret-Frenet formülleri. *Süleyman Demirel Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi*, 9(3): 620-627.
- Erişir, T., Güngör, M.A. 2014. Some characterizations of quaternionic rectifying curves in the Semi-Euclidean space. *Honam Mathematical Journal*, 36(1): 67-83.
- Fenchel, W. 1951. On the differential geometry of closed space curves. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 57: 44-54.
- Hacısalıhoğlu, H. H. 1983. Hareket Geometrisi ve Kuaterniyonlar Teorisi. Gazi Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Yayınları, 2, 338pp., Ankara,
- Hacısalıhoğlu, H. H. 2000. Diferensiyel Geometri. Ankara Üniversitesi, 269pp., Ankara,
- Karadağ, M., Sivridağ, A. İ. 1997. Kuaterniyonik eğilim çizgileri için karakterizasyonlar. *Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi*, 13(1-2): 23-36.
- O'Neill, B. 1966. *Elementary Differential Geometry*. Academic Press, 503pp., New York,
- Özyılmaz, E., Yılmaz, S. 2009. Involute-Evolute curve couples in the Euclidean 4-space. *International Journal of Open Problems in Computer Science and Mathematics*, 2(2): 168-174.
- Parlatıcı, H. 2013. Kuaterniyonik Smarandache eğrileri. Yüksek Lisans Tezi, Sakarya Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Sakarya.
- Sabuncuoğlu, A. 2006. Diferensiyel Geometri. Nobel Yayınları, 258, 440pp., Ankara,
- Sivas, S. 2014. İnvolut- evolüt eğrilerine ait Frenet çatısına göre Smarandache eğrileri. Yüksek Lisans Tezi, Ordu Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ordu.
- Soyfidan, T. 2011. Kuaterniyonik İnvolut-Evolüt eğri çiftleri. Yüksek Lisans Tezi, Sakarya Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Sakarya.

- Şenyurt, S., Sivas, S. 2013. Smarandache eğrilerine ait bir uygulama. Ordu Üniversitesi Bilimleri Teknoloji Dergisi, 3(1): 46-60.
- Şenyurt, S., Çalışkan, A. S. 2015. An application according to spatial quaternionic Smarandache curve, Applied Mathematical Sciences, 9(5): 219-228.
- Şenyurt, S., Cevahir, C., Altun, Y. 2016. On spatial quaternionic Involute curve a new view. Advances Applied Clifford Algebras
- Ünal, T. 2011. Kuarterniyonlar ve kuarterniyon matrisleri. Yüksek Lisans Tezi, Dumlupınar Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Kütahya.
- Tuna, A. 2002. Yarı öklid uzayındaki kuarterniyonik eğriler için Serret-Frenet formülleri. Yüksek Lisans Tezi, Süleyman Demirel Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Isparta.
- Tuna, A., Çöken, A. C. 2014. On the quaternionic inclined curves in the Semi-Euclidean space. Applied Mathematics and Computation, 155(2):373-389.
- Turgut, M., Yılmaz, S. 2008. Smarandache curves in Minkowski spacetime. International Journal of Mathematical Combinatorics, 3: 51-55.

## ÖZGEÇMİŞ

**Adı Soyadı** : Ceyda CEVAHİR  
**Doğum Yeri** : İstanbul  
**Doğum Tarihi** : 13.09.1991  
**Yabancı Dil** : İngilizce  
**E-mail** : [Ceydacevahir@gmail.com](mailto:Ceydacevahir@gmail.com)  
**İletişim Bilgileri** : Akyazı mah. Atatürk bul. No:395 Daire:8  
Altınordu / ORDU



### Öğrenim Durumu :

Derece	Bölüm/ Program	Üniversite	Yıl
Lisans	Fatih Eğitim Fakültesi/ Matematik Öğretmenliği	Karadeniz Teknik Üniversitesi	2009-2014

### İş Deneyimi:

Görev	Görev Yeri	Yıl
Matematik Öğretmeni	Kılavuz Eğitim ve Danışmanlık Merkezi	2015-2016

### **Yayınlar :**

1. Şenyurt, S., Cevahir, C., Altun, Y. 2016. On spatial quaternionic involute curve a new view. *Advances Applied Clifford Algebras*, doi: 10.1007/s00006-016-0669-7.
2. Şenyurt, S., Altun, Y., Cevahir, C. 2016. Smarandache curves according to Sabban frame of fixed pole curve belonging to the Bertrand curves pair, *AIP conference proceedings*, 1726, doi:10.1063/1.4945871.
3. Şenyurt, S., Altun, Y., Cevahir, C. 2016. On the Darboux vector belonging to involute curve a different view, *Mathematical Sciences and Applications E-Notes*, 4(2), 131-138.

### **Sempozyumlar :**

1. Şenyurt, S., Cevahir, C. Altun, Y., 2015. Uzaysal kuaterniyonik involüt evolüt eğrilerinin Frenet çatısına göre Smarandache eğrileri. 28. Ulusal Matematik Sempozyumu, 7-9 Eylül 2015, Antalya.
2. Şenyurt, S., Cevahir, C., Altun, Y. 2015. Uzaysal kuaterniyonik Bertrand eğri çiftinin Frenet çatısına göre Smarandache eğrileri. 28. Ulusal Matematik Sempozyumu, 7-9 Eylül 2015, Antalya.
3. Şenyurt, S., Altun, Y., Cevahir, C. 2015. Bertrand eğri çiftine ait küresel gösterge eğrilerinin Sabban çatısına göre Smarandache eğrileri. 28. Ulusal Matematik Sempozyumu, 7-9 Eylül 2015, Antalya.
4. Şenyurt, S., Altun, Y., Cevahir, C. İnvölüt-evolüt eğrilerine ait küresel gösterge eğrilerinin Sabban çatısına göre Smarandache eğrileri. 28. Ulusal Matematik Sempozyumu, 7-9 Eylül 2015, Antalya.
5. Şenyurt, S., Cevahir, C., Altun, Y., 2016. On spatial quaternionic involute curve a new view. 14th International Geometry Symposium, 25-28 May 2016, Denizli.
6. Şenyurt, S., Altun, Y., Cevahir, C. 2016. On the Darboux vector belonging to involute curve a different view. 14th International Geometry Symposium, 25-28 May 2016, Denizli.