T.C.
ORDU ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KESİRLİ İNTEGRALLER İÇİN HERMİTE-HADAMARD-FEJER TİPLİ EŞİTSİZLİKLER

Hasan Hüseyin KARA

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ORDU 2016

TEZ ONAY

Ordu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü öğrencisi Hasan Hüseyin KARA tarafından hazırlanan ve Doç. Dr. Erhan SET danışmanlığında yürütülen "KESİRLİ İNTEGRALLER İÇİN HERMİTE-HADAMARD-FEJER TİPLİ EŞİTSİZLİKLER" adlı bu tez, jürimiz tarafından 01/06/2016 tarihinde oy birliği ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Doç. Dr. Erhan SET

Başkan	:	Doç. Dr. İmdat İŞCAN Matematik Bölümü, Giresun Üniversitesi	İmza :
Üye	:	Doç. Dr. Erhan SET Matematik Bölümü, Ordu Üniversitesi	İmza :
Üye	:	Yrd. Doç. Dr. Erdal ÜNLÜYOL Matematik Bölümü, Ordu Üniversitesi	İmza :

ONAY:

Bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulu'nun 02/06/2016 tarih ve 2016/275 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

22/06/2016

Enstitü Müdürü

Doç. Dr. Kürşat KORKMAZ

TEZ BİLDİRİMİ

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

İmza:

Hasan Hüseyin KARA

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirimlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

KESİRLİ İNTEGRALLER İÇİN HERMİTE-HADAMARD-FEJER TİPLİ EŞİTSİZLİKLER

Hasan Hüseyin KARA
Ordu Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı, 2016
Yüksek Lisans Tezi, 57 Sayfa

Danışman: Doç.Dr.Erhan SET

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş niteliğinde olup bu bölümde eşitsizlikler ve konveks fonksiyonların tarihsel gelişimi hakkında bilgiler verilmiştir. İkinci bölümde konveks fonksiyonlar ile ilgili temel tanım ve teoremlerden bahsedilmiş ve ayrıca tezde kullanılan literatürde iyi bilinen integral eşitsizliklerine yer verilmiştir. Üçüncü bölümde Riemann-Liouville kesirli integral hakkında bilgiler ve ilgili Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler verilmiştir.

Dördüncü bölümde ilk olarak Riemann-Liouville kesirli integral yardımıyla konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard-Fejer tipli eşitsizlikler verilmiştir. Bu bölümün ikinci kısmın-da ise s-konveks fonksiyonlar için Riemann-Liouville kesirli integralleri içeren bazı yeni Hermite-Hadamard-Fejer tipli eşitsizlikler elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Konveks fonksiyon, s-konveks fonksiyon, Hermite-Hadamard eşitsizliği, Hermite-Hadamard-Fejer eşitsizliği, Riemann-Liouville kesirli integralleri

ABSTRACT

HERMITE- HADAMARD-FEJER TYPE INEQUALITIES FOR FRACTIONAL INTEGRALS

Hasan Hüseyin KARA
Ordu University
Institute for Graduate Studies in Science and Technology
Department of Mathematics, 2016
MSc. Thesis, 57 page

Supervisor: Assoc.Prof.Dr. Erhan SET

This thesis consist of four chapters. First chapter is the introduction chapter that includes informations about the historical development of convex function and inequalities. In the second chapter, fundamental definitions and theorems related to convex functions are mentioned. Moreover, integral inequalities which were used in the thesis and known in the literature are given. In the third chapter, the informations about Riemann-Liouville fractional integral and its associated Hermite-Hadamard type inequalities are given.

In the fourth chapter, firstly, Hermite- Hadamard-Fejer type inequalities for convex functions via Riemann-Liouville fractional integral are given. In the second part of this chapter some new Hermite-Hadamard-Fejer type inequalities for s-convex functions including the Riemann-Liouville fractional integrals have been established.

Keywords: Convex function, s-convex function , Hermite-Hadamard inequality, Hermite-Hadamard-Fejer inequality, Riemann-Liouville fractional integrals

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans çalışmam boyunca tez konumda çalışmamı sağlayan ve bu tezin hazırlanması esnasında ilgisini hiç eksik etmeyen, beni yönlendiren ve rehberlik eden saygıdeğer danışman hocam Sayın Doç. Dr. Erhan SET'e teşekkür ve şükranlarımı sunarım.

Tezin yazım aşamasında yardımlarını esirgemeyen değerli hocam Sayın Yrd.Doç.Dr. Serkan KARATAŞ'a ve değerli yüksek lisans arkadaşlarım Necla KORKUT ve Barış ÇELİK'e teşekkür ederim.

Ayrıca, çalışmalarım boyunca desteklerini esirgemeyen Ordu Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü öğretim üyeleri ve araştırma görevlilerine en içten şükranlarımı sunuyorum.

Çalışmalarım boyunca göstermiş oldukları sabır ve manevi desteklerinden dolayı aileme şükranlarımı sunarım.

İÇİNDEKİLER

ŞEKİLLER LİSTESİ

SİMGELER VE KISALTMALAR

K_s^1	:	Birinci anlamda s-konveks fonksiyonların sınıfı
K_s^2	:	İkinci anlamda s-konveks fonksiyonların sınıfı
$J_{a^+}^{\alpha}$	:	α. dereceden sağ Riemann-Liouville kesirli integral
$J_{b^-}^{\alpha}$	:	α. dereceden sol Riemann-Liouville kesirli integral
$L[a,b]$	:	$[a,b]$ aralığında integrallenebilen fonksiyonlar kümesi
Γ	:	Gamma fonksiyonu
β	:	Beta fonksiyonu
β_x	:	Tamamlanmamış Beta fonksiyonu
I	:	$\mathbb{R}$'de bir aralık
I°	:	I'nın içi
sup	:	Supremum
$\mathbb{R}$	:	Reel sayılar kümesi

1. GİRİŞ

Matematikte “ eşitsizlik” iki değer arasındaki farkı ifade eden bir ilişkidir. 19. yüzyıldan itibaren eşitsizlikler matematiğin birçok alanında önemli rol oynamakta ve eşitsizliklerin fizik ve mühendislik gibi çeşitli bilim dallarında birçok uygulaması bulunmaktadır. Bu yüzden eşitsizlik teorisi birçok araştırmacının ilgisini çekmiş ve tarihsel gelişimini diğer birçok alanla ilişkili olarak bugüne kadar sürdürmüştür. Eşitsizlik teorisine ilişkin ilk monografi yayınlandığında henüz 1930'lu yıllardı. 1934 yılında Hardy, Littlewood ve Polya [11] tarafından yazılan “ Inequalities” isimli bu ilk kitap hızla gelişen bir alanı sistematikleştirmek için yapılan ilk eserdir. Bu kitabın birçok baskısı olmakla birlikte bugün hala yeni baskısıda bulunmaktadır. Bu kitabın basımından sonra eşitsizliklere artan ilgi bu alanda, birçok kitabın yayınlamasına yol açmıştır. Bunlardan bazıları “ Inequalities ” E.F. Beckenback ve R. Bellman [5], “ Analytic Inequalities ”Mitrinović [16], “ Classical and New Inequalities in Analysis ” Mitrinović ve ark. [17], “ Mathematical Inequalities ” Pachpatte [20] , “Convex Functions Partial Orderings and Statistical Applications ” Pečarić ve ark. [21] “ Selected Topics on Hermite-Hadamard Inequalities and Applications ” Dragomir ve Pearce [8] isimli kitaplardır.

Eşitsizlikler teorisinin gelişmesinde önemli rol alan kavramlardan biride konveks fonksiyon kavramıdır. Konveksliğin basit ve doğal tanımı Archimedes'e ve onun çok ünlü olan $\pi(pi)$ değerini hesaplamasına kadar uzanmakla birlikte matematikte yer alması 19.yüzyılın sonu ve 20.yüzyılın başları olarak gösterilebilir. 19.yüzyılın sonlarında Hermite ve Hadamard' ın çalışmaları açıkça belirtilmesede bu türden fonksiyonlardan bahsedilmektedir. Konveks fonsiyonlar ilk kez sistemli olarak 1905 ve 1906 yıllarında J.L.W.V. Jensen tarafından çalışılmıştır. Jensen'in bu çalışmalarından sonra konveks fonksiyonlar teorisi eşitsizliklerle birlikte oldukça hızlı bir gelişme göstermiş ve birçok kitap yazılmıştır.

Konveks fonksiyonların matematiksel analiz, uygulamalı matematik, olasılık teorisi gibi matematiğin birçok alanında, tıp, sanat ve endüstri gibi diğer bilim dallarında uygulaması olduğu gibi günlük yaşantımızda yeri vardır. Örneğin ayakta duruş posizyonumuzda ayaklarımızın kapladığı konveks alanın içine ağırlık merkezinin dik izdüşümü boyunca dengemizi sağlamaktayız.

Konveks fonksiyonlar ile eşitsizlikler teorisi arasındaki ilişki oldukça önemli ve faydalıdır. Birçok önemli eşitsizlik konveks fonksiyonların yardımıyla elde edilmiştir. Örneğin 1881'de

Hermite tarafından ifade edilen ve bugün birçok kaynakta Hermite-Hadamard eşitsizliği olarak adlandırılan eşitsizlik bunlardan birtanesidir.

Hermite (1822-1901), Ekim 1881'de, Journal Mathesis dergisine ispatsız olarak yazdığı aşağıdaki ifadeyi bir mektup ile sundu. Bu mektup Mathesis 3 de (1883, p.82) şu şekilde basıldı.

"**Sur deux limites d'une integrale definie**. Soit $f\ (x)$ une Fonction qui varie toujours dans le même sens de x = a, x = b. On aura les relations

$$(b-a)\, f\left(\frac{a+b}{2}\right) < \int_a^b f\,(x)\,dx < (b-a)\,\frac{f\,(a)+f\,(b)}{2}$$

ou bien

$$(b-a)\, f\left(\frac{a+b}{2}\right) > \int_a^b f\,(x)\,dx > (b-a)\,\frac{f\,(a)+f\,(b)}{2}$$

suivant que la courbe $y = f\ (x)$ tourne sa convexité ou sa concavite vers l'axe des abcisses."

Bu önemli eşitsizlikler, integraller için ortalama değer teoreminin fonksiyon ve görüntülerin ortalama değerlerine ilişkin bir eşitsizlik olup fonksiyonun konkav veya konvekslik durumuna göre değişir.

Daha sonra 1906 yılında Fejer (1880-1959) trigonometrik polinomları çalışırken Hermite'in sonuçlarının genelleştirilmesi olan

$$f(\frac{a+b}{2})\int_a^b g(x)dx \le \int_a^b f(x)g(x)dx \le \frac{f(a)+f(b)}{2}\int_a^b g(x)dx$$

eşitsizliklerini elde etmiştir. $g(x) = 1$ ve $x \in (a, b)$ için Hermitin eşitsizlikleri elde edildiği açıkça görülmektedir. Fejer'in bu sonucu ile ilgili özellikle son yıllarda olmak üzere birçok çalışma literatürde mevcuttur.

Eşitsizlik teorisinin gelişmesine son yıllarda ivme kazandıran kavramlardan biride kesirli türev ve kesirli integral kavramıdır. Kesirli türev ve integral kavramı ilk olarak Liouville tarafından tanıtıldı ve literatürde Riemann-Liouville kesirli türev ve kesirli integrali olarak bilinmektedir. Kesirli türev ve kesirli integral kavramı türev ve integrallerin sadece tamsayılar için var mıdır sorusundan yola çıkılarak ortaya çıktı. Euler kesirli türevi ele aldı. 17. yüzyıldan itibaren Leibniz, Euler, Lagrange, Abel, Liouville ve diğer bir çok matematikçinin, kesirli mertebe için diferansiyel ve integrasyonun genelleştirilmesine dayanan öncü çalışmalarıyla gelişmeye başlamıştır. Keyfi mertebeli diferansiyel ve integrasyon kavramları, tamsayı mertebeli türev ve n-katlı integralleri birleştiren ve genelleştiren kavramlardır. Kesirli türev ve kesirli kavramları hakkında yayınlanan ilk kitap 1993'de S.G. Samko, A.A. Kilbaş ve O.I. Marichev [23] tarafından yazılmıştır.

Bu tezin amacı Riemann- Liouville kesirli integralleri yardımıyla elde edilen Hermite-Hadamard tipli ve Hermite-Hadamard-Fejer tipli eşitsizlikleri biraraya getirerek sistematik bir şekilde okuyucuya sunmak ve konveksliğin farklı bir sınıfı olan s-konveks fonksiyonlar için elde edilen yeni kesirli Hermite-Hadamard-Fejer tipli eşitsizlikleri vermektir. Bu konuda oldukça fazla çalışma yapıldığından dolayı öncelikle bu konular ile ilgili temel teşkil eden makalelere ağırlık verilmiştir.

2. GENEL KAVRAMLAR

Bu bölümde literatürde geçen ve tezin hazırlanmasında kullanılan bazı temel kavramlar ve teoremler ile bazı teoremlerin ispatlarına yer verilecektir.

2.1 Konveks Fonksiyonlar

Tanım 2.1.1 (Lineer Uzay): L boş olmayan bir küme ve F bir cisim olsun.

$+ : L \times L \to L$ ve $\cdot : F \times L \to L$ işlemleri tanımlansın. Aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa L' ye F cismi üzerinde lineer uzay (vektör uzayı) denir:

A) $L, +$ işlemine göre değişmeli gruptur. Yani,

G1. $\forall\ x,\, y \in L$ için $x + y \in L$ dir.

G2. $\forall\, x,\, y,\, z \in L$ için $x + (y + z) = (x + y) + z$ dir.

G3. $\forall\, x \in L$ için $x + \theta = \theta + x$ olacak şekilde $\theta \in L$ vardır.

G4. $\forall\, x \in L$ için $x + (-x) = (-x) + x = \theta$ olacak şekilde $-x \in L$ vardır.

G5. $\forall\, x,\, y \in L$ için $x + y = y + x$ dir.

B) $x,\, y \in L$ ve $\alpha,\, \beta \in F$ olmak üzere aşağıdaki şartlar sağlanır:

L1. $\alpha.x \in L$ dir.

L2. $\alpha.(x + y) = \alpha.x + \alpha y$ dir.

L3. $(\alpha + \beta).x = \alpha.x + \beta.x$ dir.

L4. $(\alpha.\beta).x = \alpha.(\beta.x)$ dir.

L5.$1.x = x$ dir.(Burada 1, F nin birim elemanıdır.)

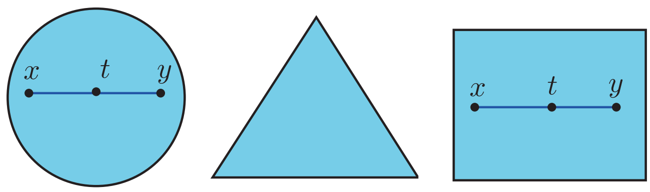
$F = \mathbb{R}$ ise L reel lineer uzay, $F = \mathbb{C}$ ise L ye kompleks lineer uzay adı verilir [2].

Tanım 2.1.2 (Lineer Dönüşüm) F bir cisim ve , V ve W'de F cismi üzerinde tanımlı iki lineer uzay olsun. $\upsilon, \nu \in V$ ve $c \in F$ olmak üzere $T : V \to W$ dönüşümü
(a) $T(\upsilon + \nu) = T(\upsilon) + T(\nu)$
(b) $T(c.\upsilon) = c.T(\upsilon)$
şartlarını sağlıyorsa T ye V üzerinde lineer dönüşüm denir. Özel olarak V=W ise $T : V \to V$ lineer dönüşümüne bir lineer operatör denir [2].

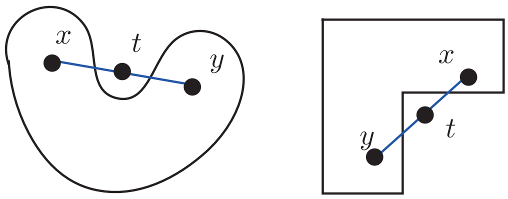
Tanım 2.1.3 (Konveks Küme) L bir lineer uzay $A \subseteq L$ ve x,$y \in A$ keyfi olmak üzere

$$B = \{z \in L : z = tx + (1-t)\,y, \quad 0 \leq t \leq 1\} \subseteq A$$

ise A kümesine konveks küme denir. Eğer $z \in B$ ise $z = \alpha x + (1-\alpha)\,y$ eşitliğindeki x ve y'nin katsayıları için $\alpha + (1-\alpha) = 1$ bağıntısı her zaman doğrudur. Bu sebeple konveks küme tanımındaki $\alpha, (1-\alpha)$ yerine $\alpha + \beta = 1$ şartını sağlayan ve negatif olmayan α, β reel sayılarını alabiliriz. Geometrik olarak B kümesi uç noktaları x ve y olan bir doğru parçasıdır. Bu durumda sezgisel olarak konveks küme, boş olmayan ve iki noktasını birleştiren doğru parçasını ihtiva eden kümedir [4].



Şekil 2.1: Konveks Kümeler



Şekil 2.2: Konkav Kümeler

Tanım 2.1.4 $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ olmak üzere $f : I \to \mathbb{R}$, $a \leq x < y \leq b$, $a, b \in I$ ve $t \in [0, 1]$ için

$$f(tx + (1-t)\,y) \leq tf(x) + (1-t)\,f(y) \tag{2.1.1}$$

şartını sağlayan f fonksiyonuna konveks fonksiyon denir [18].

Eğer $t \in [0,1]$ kapalı aralığındaki uç noktaları dışarıda bırakırsak o zaman konveks fonksiyon şartındaki "$\leq$" yerine "$<$" gelir yani

$$f(tx + (1-t)y) < tf(x) + (1-t)f(y)$$

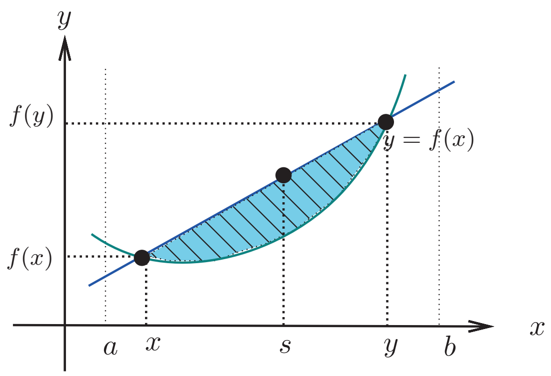
olur. Bu durumda bu fonksiyona kesin konveks fonksiyon denir.

$x, y \in I$, $p, q \geq 0$, $p + q > 0$ için

$$f\left(\frac{px+qy}{p+q}\right) \leq \frac{pf(x)+qf(y)}{p+q}$$

eşitsizliği (2.1.1) eşitsizliğine denktir [16] .

"$-f$" konveks (kesin konveks) ise o zaman f ye konkav (kesin konkav) denir. Eğer f fonksiyonu hem konveks hem de konkav ise f afin dönüşümdür. Bu afin dönüşüm uygun m ve n sabitleri için $mx+n$ şeklindedir. Geometrik olarak $tx+(1-t)y$ noktasında f'nin eğri üzerinde aldığı değer $(x, f(x))$ ve $(y, f(y))$ noktalarını birleştiren doğru parçasının üzerinde aldığı değerlerden her zaman daha küçüktür, yani bu iki noktayı birleştiren kiriş (doğru parçası) her zaman eğrinin $[x, y]$ aralığında kalan kısmının üzerinde veya üstündedir.



Şekil 2.3: Konveks Fonksiyon

Gerçekten, $(x, f(x))$ *ve* $(y, f(y))$ noktalarından geçen doğrunun denklemi;

$$L(s) = f(x) + \frac{f(y)-f(x)}{y-x}(s-x)$$

dir. Burada $s = ty + (1-t)\,x$ yazılırsa

$$\begin{aligned} L\left(ty + (1-t)\,x\right) &= f(x) + \frac{f(y) - f(x)}{y - x}\left(t\,(y - x)\right) \\ &= f(x) + t\left(f(y) - f(x)\right) \\ &= tf(y) + (1-t)\,f(x) \end{aligned}$$

olur. Böylece (2.1.1) eşitsizliği

$$f\left(ty + (1-t)\,x\right) \leq L\left(ty + (1-t)\,x\right) = tf(y) + (1-t)\,f(x)$$

elde edilir.

Tanım 2.1.5 (Jensen Eşitsizliği) f, $[a,b]$ aralığında konveks fonksiyon $t_i \in [0,1]$ için

$\sum\limits_{i=1}^{n} t_i = 1$ ve her $x_i \in [a,b]$ için aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir.

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} t_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} t_i f(xi)$$

Bu eşitsizlikte özel olarak $t_1 = t_2 = t_3 = ... = t_n = \dfrac{1}{n}$ alınarak tekrar düzenleme yapılırsa

$$f\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\right) \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(xi)$$

elde edilir.

Gerçektende f, $[a,b]$ aralığında bir konveks fonksiyon ve $t_i \in [0,1]$ için $\sum_{i=1}^{n} t_i = 1$ olduğundan her $x_i \in [a,b]$ için indüksiyonla

$$
\begin{aligned}
& f\left(t_1x_1 + t_2x_2 + ... + t_{n-1}x_{n-1} + t_nx_n\right) \\
= \; & f\left((1-t_n)\left(\frac{t_1}{(1-t_n)}x_1 + ... + \frac{t_{n-1}}{(1-t_n)}x_{n-1}\right) + t_nx_n\right) \\
\leq \; & (1-t_n)\, f\left(\left(\frac{t_1}{(1-t_n)}x_1 + ... + \frac{t_{n-1}}{(1-t_n)}x_{n-1}\right)\right) + t_nf\left(x_n\right) \\
\leq \; & (1-t_n)\left\{\frac{t_1}{(1-t_n)}f\left(x_1\right) + ... + \frac{t_{n-1}}{(1-t_n)}f\left(x_{n-1}\right)\right\} + t_nf\left(x_n\right) \\
= \; & t_1f\left(x_1\right) + t_2f\left(x_2\right) + ... + t_nf\left(x_n\right)
\end{aligned}
$$

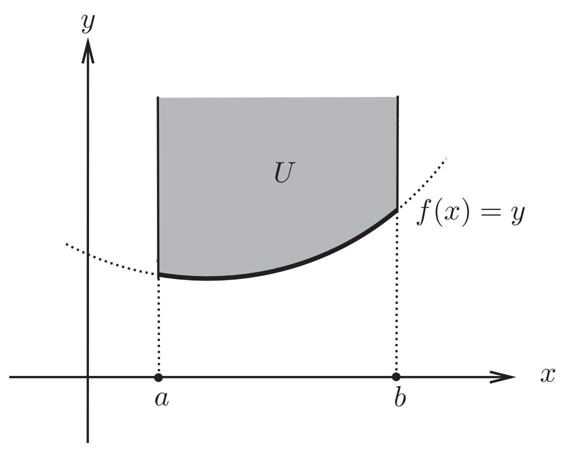
olduğu görülür.

Teorem 2.1.1 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun konveks olması için gerek ve yeter şart

$$U = \; \{(x,y) \mid a \leq x \leq b,\; f(x) \leq y\}$$

kümesinin konveks olmasıdır.

İspat.



Şekil 2.4: U Konveks Kümesi

Kabul edelim ki f bir konveks fonksiyon ve $A = \{x_1, y_1\}$ ve $B = \{x_2, y_2\}$ noktaları $U = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b,\ f(x) \leq y\}$ kümesi üzerinde iki nokta olsun. Bu taktirde $t \in [0, 1]$ olmak üzere

$$tB + (1-t)A = (tx_2 + (1-t)x_1, ty_2 + (1-t)y_1)$$

ifadesinin U'ya ait olduğunu göstermek için

$$a \leq tx_2 + (1-t)x_1 \leq b \qquad \text{...................}(1)$$

ve

$$f(tx_2 + (1-t)x_1) \leq ty_2 + (1-t)y_1 \ \text{.............}(2)$$

olduğu gösterilmelidir. Birinci durum için x_1 ve x_2 $[a, b]$'ye ait olduğundan ispat açıktır.

İkinci duruma gelince f konveks olduğundan

$$f(tx_2 + (1-t)x_1) \leq tf(x_2) + (1-t)f(x_1)$$

yazılır. Buradan da $f(x_2) \leq y_2$ ve $f(x_1) \leq y_1$ olduğu gözönüne alınırsa

$$f(tx_2 + (1-t)x_1) \leq ty_2 + (1-t)y_1$$

bulunur.

Şimdi de tersine U konveks iken f'nin konveks olduğunu gösterelim. $x_1, x_2 \in [a, b]$ olsun. $A = \{x_1, f(x_1)\}$ ve $B = \{x_2, f(x_2)\}$ noktalarının U' ya ait olduğu açıktır. U konveks olduğundan $t \in [0, 1]$ için A ve B noktalarını birleştiren noktaların kümesi, yani $tB + (1-t)A$ da U' ya aittir. O halde

$$(tx_2 + (1-t)x_1, tf(x_2) + (1-t)f(x_1)) \in U$$

olur. Dolayısıyla $f(tx_2 + (1-t)x_1) \leq tf(x_2) + (1-t)f(x_1)$ yazılabileceğinden f konvekstir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 2.1.2 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun konveks olması için gerek ve yeter şart her $x_0 \in [a, b]$ ve $x \neq x_0$ için $P(x) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ fonksiyonunun azalmayan olmasıdır.

İspat. Farzedelim ki f konveks olsun. $P(x)$' in azalmayan olduğunu göstermek için $x < y$ iken $P(x) \leq P(y)$ olduğunu göstermeliyiz. Bunun için

$$\left.\begin{array}{l} 1.Durum : x_0 < x < y \\ 2.Durum : x < x_0 < y \\ 3.Durum : x < y < x_0 \end{array}\right\} \text{üç durum söz konusudur.}$$

Şimdi 1.durumu göz önüne alalım. f'nin konveksliği kullanılarak

$$\begin{aligned} P(x) \leq P(y) &\Leftrightarrow \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq \frac{f(y)-f(x_0)}{y-x_0} \\ &\Leftrightarrow (f(x)-f(x_0))(y-x_0) \leq (f(y)-f(x_0))(x-x_0) \\ &\Leftrightarrow (y-x_0)f(x) \leq (f(y)-f(x_0))(x-x_0)+f(x_0)(y-x_0) \\ &\Leftrightarrow f(x) \leq \frac{x-x_0}{y-x_0}f(y) - \frac{x-x_0}{y-x_0}f(x_0)+f(x_0) \\ &\Leftrightarrow f(x) \leq \left(\frac{x-x_0}{y-x_0}\right)f(y) + \left(\frac{y-x}{y-x_0}\right)f(x_0) \\ &\Leftrightarrow f\left(\frac{x-x_0}{y-x_0}y + \frac{y-x}{y-x_0}x_0\right) \leq \left(\frac{x-x_0}{y-x_0}\right)f(y) + \left(\frac{y-x}{y-x_0}\right)f(x_0) \end{aligned}$$

yazılır. Dolayısıyla $x < y$ için $P(x) \leq P(y)$ olur.

2. durumu göz önüne alalım. Yani $x < x_0 < y$ olsun. Bu taktirde f'nin konveksliği kullanılarak

$$\begin{aligned} P(x) \leq P(y) &\Leftrightarrow \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq \frac{f(y)-f(x_0)}{y-x_0} \\ &\Leftrightarrow \frac{f(x_0)-f(x)}{x_0-x} \leq \frac{f(y)-f(x_0)}{y-x_0} \\ &\Leftrightarrow (y-x_0)(f(x_0)-f(x)) \leq (x_0-x)(f(y)-f(x_0)) \\ &\Leftrightarrow (y-x_0)f(x_0)-(y-x_0)f(x) \leq (x_0-x)f(y)-(x_0-x)f(x_0) \\ &\Leftrightarrow -(y-x_0)f(x) \leq (x_0-x)f(y)-(x_0-x)f(x_0)-(y-x_0)f(x_0) \\ &\Leftrightarrow -(y-x_0)f(x) \leq (x_0-x)f(y)+f(x_0)(x-x_0-y+x_0) \\ &\Leftrightarrow -(y-x_0)f(x) \leq (x_0-x)f(y)+(x-y)f(x_0) \\ &\Leftrightarrow -(x-y)f(x_0) \leq (x_0-x)f(y)+(y-x_0)f(x) \\ &\Leftrightarrow f(x_0) \leq \left(\frac{y-x_0}{y-x}\right)f(x) + \left(\frac{x_0-x}{y-x}\right)f(y) \\ &\Leftrightarrow f\left(\frac{y-x_0}{y-x}x + \frac{x_0-x}{y-x}y\right) \leq \left(\frac{y-x_0}{y-x}\right)f(x) + \left(\frac{x_0-x}{y-x}\right)f(y) \end{aligned}$$

olduğu görülür.

3. durumu göz önüne alalım. Yani $x < y < x_0$ olsun. f'nin konveksliğinden

$$\begin{aligned}
P(x) \leq P(y) \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq \frac{f(y)-f(x_0)}{y-x_0} \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{f(x_0)-f(x)}{x_0-x} \leq \frac{f(x_0)-f(y)}{x_0-y} \\
&\Leftrightarrow \quad (f(x_0)-f(x))(x_0-y) \leq (f(x_0)-f(y))(x_0-x) \\
&\Leftrightarrow \quad f(x_0)(x_0-y)-f(x)(x_0-y) \leq f(x_0)(x_0-x)-f(y)(x_0-x) \\
&\Leftrightarrow \quad (x_0-x)f(y) \leq f(x_0)(x_0-x)-f(x_0)(x_0-y)+f(x)(x_0-y) \\
&\Leftrightarrow \quad (x_0-x)f(y) \leq f(x_0)(x_0-x-x_0+y)+f(x)(x_0-y) \\
&\Leftrightarrow \quad (x_0-x)f(y) \leq f(x_0)(y-x)+f(x)(x_0-y) \\
&\Leftrightarrow \quad f(y) \leq \frac{x_0-y}{x_0-x}f(x)+\frac{y-x}{x_0-x}f(x_0) \\
&\Leftrightarrow \quad f\Big(\frac{x_0-y}{x_0-x}x+\frac{y-x}{x_0-x}x_0\Big) \leq \Big(\frac{x_0-y}{x_0-x}\Big)f(x)+\Big(\frac{y-x}{x_0-x}\Big)f(x_0)
\end{aligned}$$

yazılır. Böylece 3 durumda ispatlanmış olur.

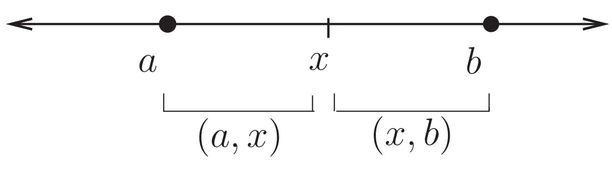
Teorem 2.1.3 (Ortalama Değer (Lagrange) Teoremi) $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli ve (a,b) aralığında diferansiyellenebilir olsun. Bu durumda,

$$f(b)-f(a) = f'(c)(b-a)$$

olacak şekilde en az bir $c \in (a,b)$ noktası vardır [14].

Teorem 2.1.4 (İkinci Türev) Eğer $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu diferansiyellenebilir ve türevi azalmayan ise f konvekstir. Özellikle f' nin ikinci dereceden diferansiyellenebilir ve $f''(x) \geq 0$ ise f konvekstir.

İspat. $x \in [a,b]$ aralığı için $f'(x)$'in azalmayan türevli olması $f''(x) \geq 0$ olduğunu gösterir. Dolayısıyla $f(x)$ azalmayan türevli iken f fonksiyonunun konveks olduğunu göstereceğiz. $x = tb + (1-t)a$, $t \in [0,1]$, $[a,b]$ kapalı aralığında bir nokta olsun. Ortalama değer teoremine göre;



$$f(x)-f(a) = f'(c)(x-a) = f'(c)t(b-a)$$

ve

$$f(b) - f(x) = f'(d)(b - x) = f'(d)(1 - t)(b - a)$$

olacak şekilde $c \in (a, x)$ ve $d \in (x, b)$ vardır. f' azalmayan olduğundan dolayı

$$\begin{aligned}
f'(c) &\leq f'(d) \\
t(1-t)(b-a)f'(c) &\leq t(1-t)(b-a)f'(d) \\
(1-t)(f(x)-f(a)) &\leq t(f(b)-f(x)) \\
f(x)-f(a)-tf(x)+tf(a) &\leq tf(b)-tf(x) \\
f(x) &\leq (1-t)f(a)+tf(b) \\
f(tb+(1-t)a) &\leq tf(b)+(1-t)f(a)
\end{aligned}$$

olup f konvekstir. Böylece ispat tamamlanır.

Konvekslik ve Konkavlığın Bir Geometrik Yorumu

x, y, z' ler $x < y < z$ olacak şekilde $[a, b]$ aralığında birer nokta olsun. Eğer XYZ üçgenin köşeleri $X = (x, f(x)), Y = (y, f(y))$ *ve* $Z = (z, f(z))$ koordinatlarına sahipse bu takdirde üçgenin alanı

$$\Delta = \frac{1}{2} \det A$$

dır. Burada

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x & f(x) \\ 1 & y & f(y) \\ 1 & z & f(z) \end{pmatrix} \ dir.$$

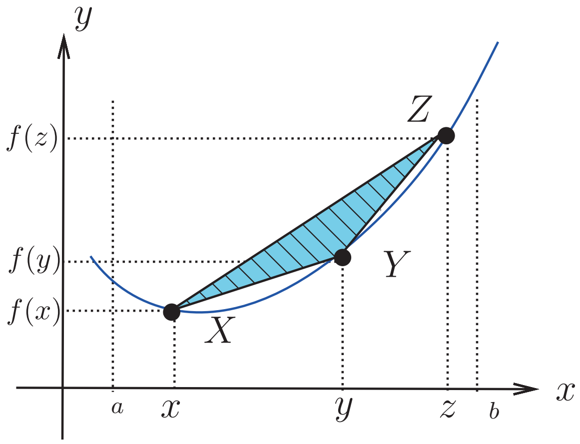
Alan pozitif yada negatif olabilir. Bu XYZ üçgeninin pozitif yönlü (saatin tersi yönünde) yada negatif yönlü olmasına bağlıdır. Aşağıdaki grafiklerde de gösterildiği gibi fonksiyon konveks ise $\Delta > 0$, konkav ise $\Delta < 0$ dır. Gerçekten de

$$\begin{aligned}
\Delta > 0 &\iff \det A > 0 \\
&\iff (z-y) f(x) - (z-x) f(y) + (y-x) f(z) > 0 \\
&\iff f(y) < \frac{z-y}{z-x} f(x) + \frac{y-x}{z-x} f(z)
\end{aligned}$$

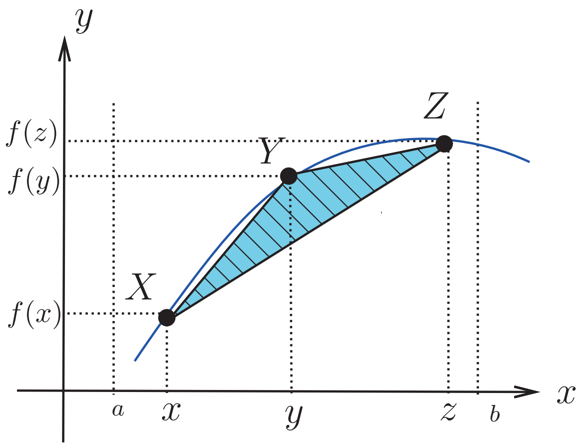
dır. Buradan $t = \dfrac{y-x}{z-x}$ alınırsa $0 < t < 1$, $1-t = \frac{z-y}{z-x}$ ve

$$f(tz + (1 - tx)) \leq tf(z) + (1-t) f(x)$$

elde edilir. Bu da f'nin konveks olduğunu gösterir.



Şekil 2.5: Konveks fonksiyon ($\Delta > 0$)



Şekil 2.6: Konkav fonksiyon ($\Delta < 0$)

Şimdi eşitsizlikler elde etmek için konveks fonksiyonların, kullanıldığı birkaç örnek verelim.

Örnek 2.1.1 $n \geq 1$ için ; $f(x) = x^n$ fonksiyonu $\mathbb{R}^+$ da konveks iken n çift olmak şartıyla $f(x) = x^n$ fonksiyonuda $\mathbb{R}'$de konvekstir.

Gerçekten de $f''(x) = n(n-1)x^{n-2} > 0$ olduğundan her iki durumda da f konvekstir.

Örnek 2.1.2 $f(x) = e^x$ üstel fonksiyonu $\mathbb{R}$ de konvekstir. Çünkü $\forall x \in \mathbb{R}$ için $f''(x) = e^x > 0$ dir.

Örnek 2.1.3 $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 1$ olacak şekilde $x_1, x_2, ..., x_n$ reel sayıları için

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\sqrt{1-x_i}} \geq \frac{\sum_{i=1}^{n} \sqrt{x_i}}{\sqrt{n-1}}$$

olduğunu gösterelim. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x}}$ fonksiyonun $f''(x) > 0$ iken $(0,1)$ aralığında konveks olduğu gerçeğini kullanalım;

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\sqrt{1-x_i}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)$$

$$\geq \quad f\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} x_i\right) = f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n-1}}$$

yazılır. Böylece

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\sqrt{1-x_i}} \geq \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n-1}}$$

olur. Buradan
$\sum_{i=1}^{n} x_i \geq \sqrt{n}$ elde edilmesi Cauchy-Schwarz eşitsizliği kullanılarak

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} 1} = \sqrt{n}$$

yazılır. Dolayısıyla

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\sqrt{1-x_i}} \geq \frac{n}{\sqrt{n-1}} \geq \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\sqrt{n-1}}$$

bulunur.

Tanım 2.1.6 (Artan ve Azalan Fonksiyonlar) f, I aralığında tanımlı bir fonksiyon olsun. Bu durumda, $\forall x_1, x_2 \in I$ için $x_2 > x_1$ iken

i) $f(x_2) > f(x_1)$ ise f fonksiyonu I üzerinde artandır,

ii) $f(x_2) < f(x_1)$ ise f fonksiyonu I üzerinde azalandır,

iii) $f(x_2) \geq f(x_1)$ ise f fonksiyonu I üzerinde azalmayandır,

iv) $f(x_2) \leq f(x_1)$ ise f fonksiyonu I üzerinde artmayandır denir [1].

Önerme 2.1.1 (Konveks fonksiyonlarla ilgili işlemler)

i) Aynı aralık üzerinde tanımlı iki konveks fonksiyonun toplamı yine bir konveks fonksiyondur. Bu toplamda biri kesin konveks ise toplamda kesin konvekstir.

ii) Bir (kesin) konveks fonksiyonun pozitif bir skalerle çarpımı da (kesin) konveks fonksiyondur.

iii) Tanımlandığı aralığın bir alt aralığına kısıtlanmış her (kesin) konveks fonksiyon yine bu aralıkta (kesin) konveks fonksiyondur.

iv) Eğer $f : I \to \mathbb{R}$ bir kesin konveks fonksiyon ve $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ azalmayan (artan) bir konveks fonksiyon ise $f \circ g$ bileşkesi de (kesin) konveks fonksiyondur.

v) f, I ve J aralıkları arasında tam bir eşleme (birebir ve örten) olsun. Eğer f artan ise f'nin (kesin) konveks olması için gerek ve yeter şart f^{-1} in (kesin) konkav olmasıdır. Eğer f azalan bir eşleme ise f ve f^{-1} aynı tip konvekstir. [18]

Teorem 2.1.5 f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında konveks ise

i. f, (a, b) aralığında süreklidir ve

ii. f, $[a, b]$ aralığında sınırlıdır. [3]

Tanım 2.1.7 (J-Konveks Fonksiyon) I, $\mathbb{R}$ de bir aralık olmak üzere $\forall x, y \in I$ için

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

şartını sağlayan, f fonksiyonuna I üzerinde Jensen anlamında konveks veya $J-konveks$ fonksiyon denir [16].

Tanım 2.1.8 (Kesin J-Konveks Fonksiyon) $\forall x, y \in I$ ve $x \neq y$ için

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) < \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

oluyorsa, f fonksiyonuna I üzerinde kesin $J-konveks$ fonksiyon denir [16].

Sonuç 2.1.1 Her konveks fonksiyon $J-konveks$ fonksiyondur [16].

Tanım 2.1.9 (Birinci Anlamda s-konveks Fonksiyon) $\alpha, \beta \geq 0, \quad \alpha^s + \beta^s = 1$ ve $s \in (0,1]$ olmak üzere tüm $u, v \in \mathbb{R}^+$için $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$f(\alpha u + \beta v) \leq \alpha^s f(u) + \beta^s f(v) \tag{2.1.2}$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f ye birinci anlamda s-konveks fonksiyon denir. Bu fonksiyonun sınıfı K_s^1 ile gösterilir. Eşitsizlik yön değiştirirse f fonksiyonu birinci anlamda s-konkav olarak adlandırılır.[19]

Tanım 2.1.10 (İkinci Anlamda s-konveks Fonksiyon) $\alpha, \beta \geq 0, \quad \alpha + \beta = 1$ ve $s \in (0,1]$ olmak üzere tüm $u, v \in \mathbb{R}^+$için $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$f(\alpha u + \beta v) \leq \alpha^s f(u) + \beta^s f(v) \tag{2.1.3}$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f' ye ikinci anlamda s-konveks fonksiyon denir. Bu fonksiyonun sınıfı K_s^2 ile gösterilir. Eşitsizlik yön değiştirirse f fonksiyonu ikinci anlamda s-konkav olarak adlandırılır.[6, 12]
Yukarıda verilen her iki s-konveks fonksiyon tanımları için $s = 1$ olması durumunda bilinen konveks fonksiyona dönüşür.

Teorem 2.1.6 $0 < s \leq 1$ olsun. Eğer $f \in K_s^2$ sınıfına ait bir fonksiyon ise $f, \;\; [0, \infty)$ aralığında negatif değildir [12].

Teorem 2.1.7 $f \in K_s^2$ olsun. $\forall u, v \in \mathbb{R}_+ \; (\mathbb{R}_+ = [0, \infty))$, $\forall \alpha, \beta \geq 0$ ve $\alpha + \beta \leq 1$ olmak üzere (2.1.2) eşitsizliğinin sağlanması için gerek ve yeter şart $f(0) = 0$ olmasıdır [12].

Teorem 2.1.8 (a) $0 < s \leq 1$ olsun. Eğer $f \in K_s^2$ sınıfına ait bir fonksiyon ve $f(0) = 0$ ise $f \in K_s^1$ sınıfına ait bir fonksiyondur,

(b) $0 < s_1 \leq s_2 \leq 1$ olsun. Eğer $f \in K_{s_2}^2$ sınıfına ait bir fonksiyon ve $f(0) = 0$ ise $f \in K_{s_1}^2$ sınıfına ait bir fonksiyondur,

(c) $0 < s_1 \leq s_2 \leq 1$ olsun. Eğer $f \in K_{s_2}^1$ sınıfına ait bir fonksiyon ve $f(0) \leq 0$ ise $f \in K_{s_1}^1$ sınıfına ait bir fonksiyondur [12].

2.2 Konveks Fonksiyonlar için Eşitsizlikler

Tanım 2.2.1 (Ölçülebilir Fonksiyon) E ölçülebilir bir küme olmak üzere f bu küme üzerinde tanımlı ve reel değerli bir fonksiyon olsun. Bu durumda keyfi K sayısı için $f(x) > K$ olan $x \in E$ değerlerin kümesi ölçülebilirse f fonksiyonuna ölçülebilir fonksiyon denir.

Tanım 2.2.2 (Lebesgue İntegralinin Varlık Teoremi) Sonlu ölçümlü E kümesi üzerinde f fonksiyonu sınırlı ve ölçülebilir ise Lebesgue integrali vardır.

Teorem 2.2.1 (Hermite-Hadamard Eşitsizliği) $f : I \to \mathbb{R}$ konveks fonksiyon olmak üzere, her $a,\, b \in I$ ve $a < b$ için,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{2.2.1}$$

eşitsizliğine Hermite-Hadamard eşitsizliği denir. Burada f fonksiyonunun konkav olması eşitsizliği tersine çevirir [6].

İspat. f fonksiyonu sürekli ve sınırlı olduğundan dolayı $[a, b]$ aralığında integrallenebilirdir. Konvekslik tanımından

$$f(ta + (1-t)b) \leq tf(a) + (1-t)f(b)$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizliğin her iki tarafının $[0, 1]$ aralığında t'ye göre integrali alınırsa

$$\begin{aligned} & \int_0^1 f(ta + (1-t)b)\,dt \\ \leq\ & \int_0^1 tf(a)\,dt + \int_0^1 (1-t)f(b)\,dt \\ =\ & \frac{f(a)+f(b)}{2} \end{aligned}$$

elde edilip soldaki eşitsizlikte $x = ta + (1-t)b$, $t \in [0, 1]$ dönüşümü uygulanırsa Hermite-Hadamard eşitsizliğinin sağ tarafı elde edililir. Sol tarafı ispat etmek için,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \\ =\ & \frac{1}{b-a}\left[\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)\,dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)dx\right] \end{aligned}$$

eşitliğinin sağ tarafındaki integrandlara sırasıyla $x = \dfrac{a + t(b - a)}{2}$ ve $x = \dfrac{b - t(b - a)}{2}$ değişken değişimi uygulanırsa,

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \\
= \; & \frac{1}{2}\int_0^1 \left[f\left(a + \frac{t(b-a)}{2} \right) + f\left(b - \frac{t(b-a)}{2} \right) \right] dt \\
\geq \; & f\left(\frac{a+b}{2} \right)
\end{aligned}
$$

elde edilip Hermite-Hadamard eşitsizliğinin sol tarafı ispatlanmış olur.

Teorem 2.2.2 (Hermite-Hadamard-Fejer Eşitsizliği) $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ konveks fonksiyon, $g : [a, b] \to \mathbb{R}$, $[a, b]$ üzerinde integrallenebilir, negatif olmayan, $\frac{a+b}{2}$ 'ye göre simetrik bir fonksiyon olmak üzere

$$
f\left(\frac{a+b}{2} \right) \int_a^b g(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \int_a^b g(x)\,dx \tag{2.2.2}
$$

dir [10].

İspat. Her $t \in [0, 1]$ için f, $[a, b]$ aralığında konveks olduğundan

$$
\begin{aligned}
f\left(\frac{a+b}{2} \right) &= f\left(\frac{ta + (1-t)b + tb + (1-t)a}{2} \right) \\
&\leq \frac{f(ta + (1-t)b) + f(tb + (1-t)a)}{2}
\end{aligned} \tag{2.2.3}
$$

yazılabilir. (2.2.3) eşitsizliğinin her iki tarafıda $g(tb + (1-t)a)$ ile çarpılıp $[0, 1]$ aralığında t' ye göre integral aldığımızda

$$
\begin{aligned}
& f\left(\frac{a+b}{2} \right) \int_0^1 g(tb + (1-t)a)\,dt \\
\leq \; & \frac{1}{2}\int_0^1 g(tb + (1-t)a) \Big[f(ta + (1-t)b) + f(tb + (1-t)a) \Big] dt
\end{aligned} \tag{2.2.4}
$$

bulunur. Buradan $x = tb + (1-t)\,a$ ve $dx = (b-a)\,dt$ dönüşümü yapıldığında

$$
\begin{aligned}
& f\left(\frac{a+b}{2}\right)\frac{1}{(b-a)}\int_a^b g\left(x\right)dx \\
\leq\ & \frac{1}{2}\frac{1}{(b-a)}\left\{\int_a^b f\left(a+b-x\right)g\left(x\right)dx + \int_a^b f\left(x\right)g\left(x\right)dx\right\} \\
=\ & \frac{1}{2}\frac{1}{(b-a)}\left\{\int_a^b f\left(x\right)g\left(a+b-x\right)dx + \int_a^b f\left(x\right)g\left(x\right)dx\right\} \\
=\ & \frac{1}{(b-a)}\int_a^b f\left(x\right)g\left(x\right)dx
\end{aligned}
$$

bulunarak (2.2.3) eşitsizliğinin sol tarafı ispatlanmış olur. Sağ tarafın ispatı için f konveks fonksiyon olduğundan her $t \in [0,1]$ için

$$
f\left(ta + (1-t)\,b\right) + f\left(tb + (1-t)\,a\right) \leq f\left(a\right) + f\left(b\right) \tag{2.2.5}
$$

yazılabilir. (2.2.5) eşitsizliğinin her iki tarafını da $g\left(tb + (1-t)\,a\right)$ ile çarpılıp $[0,1]$ aralığında t' ye göre integral alınırsa

$$
\begin{aligned}
& \int_0^1 g\left(tb + (1-t)\,a\right) f\left(ta + (1-t)\,b\right)dt \\
& + \int_0^1 g\left(tb + (1-t)\,a\right) f\left(tb + (1-t)\,a\right)dt \\
\leq\ & \left[f\left(a\right) + f\left(b\right)\right]\int_0^1 g\left(tb + (1-t)\,a\right)dt
\end{aligned}
$$

yazılır. Gerekli düzenleme yapılırsa

$$
\frac{2}{(b-a)}\int_a^b f\left(x\right)g\left(x\right)dx \leq \left[f(a) + f(b)\right]\frac{1}{(b-a)}\int_a^b g\left(x\right)dx
$$

bulunarak (2.2.3) eşitsizliğinin sağ tarafı ispatlanmış olur. Böylece ispat tamamlanır.

Dragomir ve Fitzpatrick 1999'da "The Hadamard's inequality for s-convex functions in the second sense" başlığı altında yayınlanan makalelerinde ikinci anlamda s-konveks fonksiyonlar için aşağıdaki teoreme yer vermişlerdir.

Teorem 2.2.3 (s - konveks Fonksiyonlar İçin Hermite - Hadamard Eşitsizliği) $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ ikinci anlamda s-konveks fonksiyon, $s \in (0,1)$ ve $a, b \in [0,\infty)$, $a < b$ olsun. Eğer $f \in L\,[a,b]$ ise aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:

$$
2^{s-1} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f\left(x\right)dx \leq \frac{f\left(a\right) + f\left(b\right)}{s+1} \tag{2.2.6}
$$

Bu eşitsizliğe s-konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliği denir. Eğer (2.2.6) eşitsizliğinde s=1 alınırsa (2.2.1) elde edilir [7].

2.3 Hölder Eşitsizliği ve İlgili Eşitsizlikler

Teorem 2.3.1 (İntegraller İçin Hölder Eşitsizliği) $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. f ve g , $[a, b]$ aralığında tanımlı ve integrallenebilen iki fonksiyon olsun. $|f|^p$ ve $|g|^q$, $[a, b]$ aralığında integrallenebilen fonksiyonlar ise

$$\int_a^b |f(x)\, g(x)|\, dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p\, dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q\, dx \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir [17].

Ayrıca Hölder eşitsizliğinin bir sonucu olan power mean eşitsizliği aşağıdaki gibi ifade edilir.

Sonuç 2.3.1 (Power-Mean Eşitsizliği) $q \geq 1$ olsun. f ve g , $[a, b]$ aralığında tanımlı ve integrallenebilen iki fonksiyon olsun. $|f|$ ve $|g|^q$, $[a, b]$ aralığında integrallenebilen fonksiyonlar ise

$$\int_a^b |f(x)\, g(x)|\, dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|\, dx \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_a^b |f(x)|\, |g(x)|^q\, dx \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği elde edilir.

Teorem 2.3.2 (Üçgen Eşitsizliğinin İntegral Versiyonu) f, $[a, b]$ aralığında sürekli reel değerli bir fonksiyon olsun. Bu takdirde

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx \qquad (a < b)$$

eşitsizliği geçerlidir [17].

3. KESİRLİ İNTEGRALLER İÇİN HERMİTE-HADAMARD TİPLİ EŞİTSİZLİKLER

3.1 Riemann-Liouville Kesirli İntegralinin Elde Edilişi

Riemann-Liouville kesirli integral operatörünü elde etmek için ilk olarak n-katlı

$$\int_a^x \int_a^{\sigma_1} \int_a^{\sigma_2} ... \int_a^{\sigma_{n-1}} f(\sigma_n)\, d\sigma_n d\sigma_{n-1} ... d\sigma_2 d\sigma_1 \tag{3.1.1}$$

integralini ele alalım. Bu integralde integrasyon sırasını ve buna bağlı sınırları değiştirelim. Bunun için;

$$\begin{array}{cc} a < \sigma_1 < x & \sigma_2 < \sigma_1 < x \\ a < \sigma_2 < \sigma_1 & \sigma_3 < \sigma_2 < x \\ ,..., & ,..., \\ a < \sigma_{n-1} < \sigma_{n-2} & \sigma_n < \sigma_{n-1} < x \\ a < \sigma_n < \sigma_{n-1} & a < \sigma_n < x \end{array} \tag{3.1.2}$$

sınır değişimleri altında (3.1.1) ifadesi,

$$\begin{aligned} & \int_a^x \int_a^{\sigma_1} \int_a^{\sigma_2} ... \int_a^{\sigma_{n-1}} f(\sigma_n)\, d\sigma_n d\sigma_{n-1} ... d\sigma_2 d\sigma_1 \\ = & \int_a^x f(\sigma_n) \left(\int_{\sigma_n}^x \left(\int_{\sigma_{n-1}}^x ... \int_{\sigma_3}^x \left(\int_{\sigma_2}^x d\sigma_1 \right) d\sigma_2 ... \right) d\sigma_{n-1} \right) d\sigma_n \end{aligned} \tag{3.1.3}$$

şeklinde yazılır. (3.1.3) eşitliğinin sağ tarafı terim terim hesaplanırsa

$$\int_a^x \int_a^{\sigma_1} \int_a^{\sigma_2} ... \int_a^{\sigma_{n-1}} f(\sigma_n)\, d\sigma_n d\sigma_{n-1} ... d\sigma_2 d\sigma_1 = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x f(\sigma_n)(x-\sigma_n)^{n-1} d\sigma_n \tag{3.1.4}$$

eşitliği elde edilir. Burada $\Gamma(n) = (n-1)!$ oluşu kullanılırsa

$$\int_a^x \int_a^{\sigma_1} \int_a^{\sigma_2} ... \int_a^{\sigma_{n-1}} f(\sigma_n)\, d\sigma_n d\sigma_{n-1} ... d\sigma_2 d\sigma_1 = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^x f(\sigma_n)(x-\sigma_n)^{n-1} d\sigma_n \tag{3.1.5}$$

yazılır. Bu eşitliğin sağ tarafındaki n bir pozitif tamsayıdır. Gamma fonksiyonu tam sayılar dışında da ifade edilebildiğinden, n' nin tam sayı olmaması durumunda (3.1.5) eşitliğinin sağ yanı için aşağıdaki Riemann-Liouville kesirli integral operatörünün tanımı verilebilir.

Tanım 3.1.1 (Riemann-Liouville Kesirli İntegrali) $f(x) \in L[a,b]$, $\alpha > 0$ ve $a \geq 0$ olsun. Sağ ve sol Riemann-Liouville integralleri sırasıyla $J_{a^+}^{\alpha} f(x)$ ve $J_{b^-}^{\alpha} f(x)$ asağıdaki şekilde tanımlanır:

$$J_{a^+}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)\, dt,\ x > a$$

ve

$$J_{b^-}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (t-x)^{\alpha-1} f(t)\, dt,\ x < b$$

integrallerine $\alpha > 0$ için α. mertebeden kesirli integral denir. Bu integral Riemann-Liouville kesirli integrali olarak bilinir. Burada $\Gamma(\alpha)$ Gamma fonksiyonu, $\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt$ ve $J_{a^+}^{0} f(x) = J_{b^-}^{0} f(x) = f(x)$ dir.

Şimdi $f(t) = (t-a)^{\frac{1}{2}}$ *ve* $\alpha = \frac{1}{2}$ olmak üzere aşağıdaki Riemann-Liouville kesirli integralini göz önüne alalım.

$$J_{a^+}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)\, dt,\ x > a$$

Bu integral kabuller altında

$$J_{a^+}^{1/2} f(x) = \frac{1}{\Gamma(1/2)} \int_a^x (x-t)^{-1/2} (t-a)^{1/2}\, dt,\ x > a$$

olarak yazılır. Şayet $t = a + (x-a)\tau$ değişken değiştirmesi yapılırsa,

$$\int_0^1 \tau^{p-1} (1-\tau)^{q-1}\, d\tau = \beta(p,q)$$

şeklindeki Beta fonksiyonu yardımıyla

$$\begin{aligned}
J_{a^+}^{1/2} f(x) &= \frac{1}{\Gamma(1/2)} \int_a^x (x-t)^{-1/2} (t-a)^{1/2}\, dt,\ x > a \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 (x-a)^{1/2} (x-a)^{-1/2+1} \tau^{1/2} (1-\tau)^{1/2}\, d\tau \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} (x-a) \int_0^1 \tau^{1/2} (1-\tau)^{1/2}\, d\tau \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} (x-a)\, \beta(3/2, 1/2) \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} (x-a) \frac{\Gamma(3/2) . \Gamma(1/2)}{\Gamma(3/2 + 1/2)} \\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{2} (x-a)
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

Tanım 3.1.2 (Gamma Fonksiyonu) Gamma fonksiyonu, $n > 0$ için

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx$$

ile tanımlanır. Bu integral $n > 0$ için yakınsaktır. Gamma fonksiyonunun bazı özellikleri şu şekildedir:

i. $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n!$

ii. $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$

iii. $\int_0^\infty \frac{x^p}{1+x} dx = \Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin(p\pi)}$, $0 < p < 1$

iv. $2^{2n-1}\Gamma(n)\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\Gamma(2n)$

Tanım 3.1.3 (Beta Fonksiyonu) $m, n > 0$ için

$$\beta(m,n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1} dx$$

genelleştirilmiş integarali yardımıyla tanımlanan iki değişkenli β fonksiyonuna *Beta fonksiyonu* denir.

Tanım 3.1.4 (Tamamlanmamış Beta Fonksiyonu) $m, n > 0$ ve $0 < x \leq 1$ için

$$\beta_x(m,n) = \beta(x; m, n) = \int_0^x t^{m-1}(1-t)^{n-1} dt$$

şeklinde tanımlanan β fonksiyonuna tamamlanmamış Beta fonksiyonu denir.

3.2 Riemann-Liouville Kesirli İntegralleri için Hermite - Hadamard Tipli Eşitsizlikler

Sarıkaya ve arkadaşları kesirli integraller yardımıyla Hermite-Hadamard eşitsizliğini aşağıdaki gibi elde etmişlerdir [25].

Teorem 3.2.1 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ pozitif bir fonksiyon, $0 \leq a < b$ ve $f \in L_1[a,b]$ olsun. Eğer

f, $[a,b]$ aralığında konveks bir fonksiyon ve $\alpha > 0$ ise kesirli integraller için

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}}\left[J_{a+}^{\alpha}f(b)+J_{b-}^{\alpha}f(a)\right] \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{3.2.1}$$

eşitsizliği geçerlidir [25].

İspat. f, $[a,b]$ aralığında konveks bir fonksiyon, $\lambda = \frac{1}{2}$ ve $\forall x, y \in [a,b]$ için

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2} \tag{3.2.2}$$

eşitsizliğinde $x = ta + (1-t)b$, $y = (1-t)a + tb$ yazıldığında

$$2f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq f(ta+(1-t)b) + f((1-t)a+tb) \tag{3.2.3}$$

olur. (3.2.3) eşitsizliğinin her iki tarafı $t^{\alpha-1}$ ile çarpılıp $[0,1]$ aralığında t değişkenine göre integral alındığında

$$\begin{aligned}
&\frac{2}{\alpha}f\left(\frac{a+b}{2}\right) \\
\leq\ & \int_0^1 t^{\alpha-1}f(ta+(1-t)b)\,dt + \int_0^1 t^{\alpha-1}f((1-t)a+tb)\,dt \\
=\ & \int_b^a \left(\frac{b-u}{b-a}\right)^{\alpha-1} f(u)\frac{du}{a-b} + \int_a^b \left(\frac{v-a}{b-a}\right)^{\alpha-1} f(v)\frac{dv}{b-a} \\
=\ & \frac{\Gamma(\alpha)}{(b-a)^{\alpha}}\left[J_{a+}^{\alpha}f(b)+J_{b-}^{\alpha}f(a)\right]
\end{aligned} \tag{3.2.4}$$

olarak bulunur. Yani

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}}\left[J_{a+}^{\alpha}f(b)+J_{b-}^{\alpha}f(a)\right] \tag{3.2.5}$$

olur ki böylece eşitsizliğin sol tarafı ispat edilmiş olur. Eğer f, $\lambda \in [0,1]$ için konveks bir fonksiyon ise (3.2.2) eşitsizliğinin sağ tarafı aşağıdaki gibi ispatlanır. f konveks olduğundan

$$f(ta+(1-t)b) \leq tf(a) + (1-t)f(b) \tag{3.2.6}$$

ve

$$f((1-t)a+tb) \leq (1-t)f(a) + tf(b) \tag{3.2.7}$$

yazılır. Yukarıdaki eşitsizlikleri taraf tarafa topladığımızda

$$\begin{aligned} & f(ta+(1-t)b)+f((1-t)a+tb) \\ \leq\ & tf(a)+(1-t)f(b)+(1-t)f(a)+tf(b) \end{aligned} \tag{3.2.8}$$

elde edilir. (3.2.8) eşitsizliğinin her iki tarafını $t^{\alpha-1}$ ile çarpıp, $[0,1]$ aralığında t'ye göre integral aldığımızda;

$$\begin{aligned} & \int_0^1 t^{\alpha-1} f(ta+(1-t)b)\,dt + \int_0^1 f((1-t)a+tb)\,t^{\alpha-1}dt \\ \leq\ & [f(a)+f(b)] \int_0^1 t^{\alpha-1}dt \end{aligned} \tag{3.2.9}$$

olur. Böylece

$$\frac{\Gamma(\alpha)}{(b-a)^{\alpha}}\left[J_{a+}^{\alpha} f(b) + J_{b-}^{\alpha} f(a)\right] \leq \frac{f(a)+f(b)}{\alpha} \tag{3.2.10}$$

bulunur. Buradan da her iki tarafı $\dfrac{\alpha}{2}$ ile çarptığımızda

$$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}}\left[J_{a+}^{\alpha} f(b) + J_{b-}^{\alpha} f(a)\right] \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{3.2.11}$$

elde edilerek ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 3.2.1 Eğer Teorem 3.2.1 de $\alpha = 1$ yazılırsa Teorem 2.2.1 deki (2.2.1) eşitsizliği elde edilir [25].

Dragomir ve Agarwal (2.2.1) eşitsizliğinin sağ tarafından yola çıkarak aşağıdaki sonuçları elde etmişlerdir.

Lemma 3.2.1 $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I° de diferansiyellenebilir bir fonksiyon, $a, b \in I^{\circ}$ ve $a < b$ olsun. Eğer $f' \in L[a,b]$ ise

$$\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{2}\int_0^1 (1-2t) f'(ta+(1-t)b)\,dt$$

eşitliği geçerlidir [9].

Teorem 3.2.2 $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I° de diferansiyellenebilir bir fonksiyon, $a, b \in I^{\circ}$ ve $a < b$ olsun. Eğer $|f'|$, $[a, b]$ aralığında konveks ise

$$\left|\frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \frac{b-a}{8}\left(|f'(a)| + |f'(b)|\right).$$

eşitsizliği geçerlidir [9].

Sarıkaya ve arkadaşları [25] yukarıdaki lemma ve teoremi kesirli integraller yardımıyla aşağıdaki gibi genelleştirmişlerdir.

Lemma 3.2.2 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, (a, b) aralığında diferansiyellenebilir bir fonksiyon, $a < b$ olsun. Eğer $f' \in L[a, b]$ ise kesirli integraller için

$$\begin{aligned} & \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{2(b-a)^{\alpha}}\left[J_{a+}^{\alpha} f(b) + J_{b-}^{\alpha} f(a)\right] \\ = & \frac{b-a}{2}\int_0^1 \left[(1-t)^{\alpha} - t^{\alpha}\right] f'(ta + (1-t)b)\,dt \end{aligned} \tag{3.2.12}$$

dir.

İspat.

$$\int_0^1 \left[(1-t)^{\alpha} - t^{\alpha}\right] f'(ta + (1-t)b)\,dt$$

integralini hesaplamak yeterlidir. Bunun için

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \left[(1-t)^{\alpha} - t^{\alpha}\right] f'(ta + (1-t)b)\,dt \\ &= \left[\int_0^1 (1-t)^{\alpha} f'(ta + (1-t)b)\,dt\right] + \left[-\int_0^1 t^{\alpha} f'(ta + (1-t)b)\,dt\right] \\ &= I_1 + I_2 \end{aligned} \tag{3.2.13}$$

olarak yazalım.

I_1 ve I_2 kısmi integrasyonla ayrı ayrı hesaplandığında;

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 (1-t)^{\alpha} f'(ta+(1-t)b)\,dt \qquad (3.2.14) \\ &= (1-t)^{\alpha} \frac{f(ta+(1-t)b)}{a-b}\Big|_0^1 + \int_0^1 \alpha (1-t)^{\alpha-1} \frac{f(ta+(1-t)b)}{a-b} dt \\ &= \frac{f(b)}{b-a} - \frac{\alpha}{b-a} \int_b^a \left(\frac{a-x}{a-b}\right)^{\alpha-1} \frac{f(x)}{a-b} dx \\ &= \frac{f(b)}{b-a} - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha+1}} J_{b-}^{\alpha} f(a) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} I_2 &= -\int_0^1 t^{\alpha} f'(ta+(1-t)b)\,dt \qquad (3.2.15) \\ &= -\frac{t^{\alpha} f(ta+(1-t)b)}{a-b}\Big|_0^1 + \alpha \int_0^1 t^{\alpha-1} \frac{f(ta+(1-t)b)}{a-b} dt \\ &= \frac{f(a)}{b-a} - \frac{\alpha}{b-a} \int_b^a \left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{\alpha-1} \frac{f(x)}{a-b} dx \\ &= \frac{f(a)}{b-a} - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha+1}} J_{a+}^{\alpha} f(b) \end{aligned}$$

elde edilir. (3.2.14) ve (3.2.15) daki eşitlikler (3.2.13) yerine yazıldığında

$$I = \frac{f(a)+f(b)}{b-a} - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha+1}} \left[J_{a+}^{\alpha} f(b) + J_{b-}^{\alpha} f(a)\right]$$

bulunur. Bu eşitliğin her iki tarafı da $\frac{b-a}{2}$ ile çarpıldığında (3.2.12) elde edilir.

Sonuç 3.2.2 Lemma 3.2.2 de $\alpha = 1$ yazılırsa Teorem 2.2.1 deki (2.2.1) eşitsizliği elde edilir.

Teorem 3.2.3 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, (a,b) aralığında diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $a < b$ olsun. Eğer $|f'|$, $[a,b]$ aralığında konveks ise kesirli integraller için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\begin{aligned} &\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}} \left[J_{a+}^{\alpha} f(b) + J_{b-}^{\alpha} f(a)\right]\right| \qquad (3.2.16) \\ &\leq \frac{b-a}{2(\alpha+1)} \left(1 - \frac{1}{2^{\alpha}}\right) \left[|f'(a)| + |f'(b)|\right]. \end{aligned}$$

İspat. Lemma 3.2.2 ve $|f'|$' nin konveksliği kullanılarak,

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}}\left[J_{a+}^{\alpha}f(b)+J_{b-}^{\alpha}f(a)\right]\right| \qquad (3.2.17)\\
=&\left|\frac{b-a}{2}\int_0^1((1-t)^{\alpha}-t^{\alpha})f'(ta+(1-t)b)\,dt\right|\\
\leq&\ \frac{b-a}{2}\int_0^1|(1-t)^{\alpha}-t^{\alpha}|\,|f'(ta+(1-t)b)|\,dt\\
\leq&\ \frac{b-a}{2}\int_0^1|(1-t)^{\alpha}-t^{\alpha}|\,[t\,|f'(a)|+(1-t)\,|f'(b)|]\,dt\\
=&\ \frac{b-a}{2}\left\{\int_0^{\frac{1}{2}}[(1-t)^{\alpha}-t^{\alpha}]\,[t\,|f'(a)|+(1-t)\,|f'(b)|]\,dt\right.\\
&\left.+\int_{\frac{1}{2}}^1[t^{\alpha}-(1-t)^{\alpha}]\,[t\,|f'(a)|+(1-t)\,|f'(b)|]\,dt\right\}\\
=&\ \frac{b-a}{2}(K_1+K_2)
\end{aligned}$$

yazılır. K_1 ve K_2 integralleri hesaplandığında

$$\begin{aligned}
K_1 &= |f'(a)|\left[\int_0^{\frac{1}{2}}t(1-t)^{\alpha}\,dt-\int_0^{\frac{1}{2}}t^{\alpha+1}dt\right]\\
&\quad+|f'(b)|\left[\int_0^{\frac{1}{2}}(1-t)^{\alpha+1}\,dt-\int_0^{\frac{1}{2}}(1-t)\,t^{\alpha}dt\right] \qquad (3.2.18)\\
&= |f'(a)|\left[\frac{1}{(\alpha+1)(\alpha+2)}-\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{(\alpha+1)}}{(\alpha+1)}\right]\\
&\quad+|f'(b)|\left[\frac{1}{(\alpha+2)}-\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{(\alpha+1)}}{(\alpha+1)}\right]
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
K_2 &= |f'(a)|\left[\int_{\frac{1}{2}}^1 t^{\alpha+1}dt-\int_{\frac{1}{2}}^1 t(1-t)^{\alpha}\,dt\right]\\
&\quad+|f'(b)|\left[\int_{\frac{1}{2}}^1(1-t)\,t^{\alpha}dt-\int_{\frac{1}{2}}^1(1-t)^{\alpha+1}\,dt\right] \qquad (3.2.19)\\
&= |f'(a)|\left[\frac{1}{(\alpha+2)}-\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{(\alpha+1)}}{(\alpha+1)}\right]\\
&\quad+|f'(b)|\left[\frac{1}{(\alpha+1)(\alpha+2)}-\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{(\alpha+1)}}{(\alpha+1)}\right]
\end{aligned}$$

bulunur. (3.2.18) ve (3.2.19), (3.2.17) de yerine yazılırsa istenilen eşitsizlik elde edilir.

Sonuç 3.2.3 Teorem 3.2.3 de $\alpha = 1$ yazılırsa Teorem 3.2.1 deki (3.2.1) eşitsizliği elde edilir.

4. KESİRLİ İNTEGRALLER İÇİN HERMİTE–HADAMARD–FEJER TİPLİ EŞİTSİZLİKLER

4.1 Riemann-Liouville Kesirli İntegralleri için Hermite–Hadamard–Fejer Tipli Eşitsizlikler

Bu bölüm boyunca $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonu için $\|g\|_{\infty} = \sup_{t\in[a,b]} |g(t)|$ olsun.

Lemma 4.1.1 $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrallenebilir, $\frac{a+b}{2}$' ye göre simetrik bir fonkiyon ve $a < b$ ise bu takdirde $\alpha > 0$ olmak üzere

$$J_{a^+}^{\alpha} g(b) = J_{b^-}^{\alpha} g(a) = \frac{1}{2}\left[J_{a^+}^{\alpha} g(b) + J_{b^-}^{\alpha} g(a)\right]$$

eşitliği geçerlidir [13].

İspat. g, $\frac{a+b}{2}$' ye göre simetrik olduğundan $\forall x \in [a,b]$ için $g(a+b-x) = g(x)$ dir. Buradan, aşağıdaki integralde $x = tb + (1-t)a$ değişken değişikliği yapılarak

$$\begin{aligned} J_{a^+}^{\alpha} g(b) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b (b-x)^{\alpha-1} g(x)\,dx \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b (t-a)^{\alpha-1} g(a+b-t)\,dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b (t-a)^{\alpha-1} g(t)\,dt = J_{b^-}^{\alpha} g(a) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Kesirli integraller için Hermite-Hadamard-Fejer eşitsizliği aşağıdaki gibi ifade edilir.

Teorem 4.1.1 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ konveks fonksiyon, $a < b$ ve $f \in L[a,b]$ olsun. Eğer $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu negatif olmayan, integrallenebilir ve $\frac{a+b}{2}$' ye göre simetrik ise $\alpha > 0$ olmak üzere kesirli integraller için

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a+b}{2}\right)\left[J_{a^+}^{\alpha} g(b) + J_{b^-}^{\alpha} g(a)\right] &\leq \left[J_{a^+}^{\alpha}(fg)(b) + J_{b^-}^{\alpha}(fg)(a)\right] \\ &\leq \frac{f(a)+f(b)}{2}\left[J_{a^+}^{\alpha} g(b) + J_{b^-}^{\alpha} g(a)\right] \end{aligned} \quad (4.1.1)$$

eşitsizliği geçerlidir [13].

İspat. f, $[a,b]$ aralığı üzerinde konveks bir fonksiyon olduğundan $\forall t\in[0,1]$ aralığı için

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a+b}{2}\right) &= f\left(\frac{ta+(1-t)\,b+tb+(1-t)\,a}{2}\right) \\ &\leq \frac{f\left(ta+(1-t)\,b\right)+f\left(tb+(1-t)\,a\right)}{2} \end{aligned} \tag{4.1.2}$$

yazılır. (4.1.2) de eşitsizliğin her iki tarafı $2t^{\alpha-1}g\left(tb+(1-t)\,a\right)$ ile çarpılıp $[0,1]$ aralığı üzerinden t'ye göre integral alınırsa

$$\begin{aligned} & 2f\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_0^1 t^{\alpha-1}g\left(tb+(1-t)\,a\right)dt \\ \leq & \int_0^1 t^{\alpha-1}\Big[f\left(ta+(1-t)\,b\right)+f\left(tb+(1-t)\,a\right)\Big]g\left(tb+(1-t)\,a\right)dt \\ = & \int_0^1 t^{\alpha-1}f\left(ta+(1-t)\,b\right)g\left(tb+(1-t)\,a\right)dt \\ & +\int_0^1 t^{\alpha-1}f\left(tb+(1-t)\,a\right)g\left(tb+(1-t)\,a\right)dt \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $x=tb+(1-t)\,a$ değişken değişiklikliği yapılırsa

$$\begin{aligned} & \frac{2}{(b-a)^{\alpha}}f\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b (b-x)^{\alpha-1}\,g\left(x\right)dx \\ \leq & \frac{1}{(b-a)^{\alpha}}\left\{\int_a^b (x-a)^{\alpha-1}\,f\left(a+b-x\right)g\left(x\right)dx+\int_0^1 (x-a)^{\alpha-1}\,f\left(x\right)g\left(x\right)dx\right\} \\ = & \frac{1}{(b-a)^{\alpha}}\left\{\int_a^b (b-x)^{\alpha-1}\,f\left(x\right)g\left(a+b-x\right)dx+\int_0^1 (x-a)^{\alpha-1}\,f\left(x\right)g\left(x\right)dx\right\} \\ = & \frac{1}{(b-a)^{\alpha}}\left\{\int_a^b (b-x)^{\alpha-1}\,f\left(x\right)g\left(x\right)dx+\int_0^1 (x-a)^{\alpha-1}\,f\left(x\right)g\left(x\right)dx\right\} \end{aligned}$$

yazılır. Böylece Lemma 4.1.1 den

$$\frac{\Gamma\left(\alpha\right)}{(b-a)^{\alpha}}f\left(\frac{a+b}{2}\right)\left[J_{a+}^{\alpha}g\left(b\right)+J_{b-}^{\alpha}g\left(a\right)\right]\leq\frac{\Gamma\left(\alpha\right)}{(b-a)^{\alpha}}\left[J_{a+}^{\alpha}\left(fg\right)\left(b\right)+J_{b-}^{\alpha}\left(fg\right)\left(a\right)\right]$$

elde edilir. Son eşitsizlikte her iki tarafı $\frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}$ ile çarpılırsa

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\left[J_{a+}^{\alpha}g\left(b\right)+J_{b-}^{\alpha}g\left(a\right)\right]\leq\left[J_{a+}^{\alpha}\left(fg\right)\left(b\right)+J_{b-}^{\alpha}\left(fg\right)\left(a\right)\right]$$

elde edilerek (4.1.1)' in sol tarafı ispatlanmış olur.

Şimdi de (4.1.1) deki ikinci eşitsizliğin ispatını verelim. f, konveks bir fonksiyon olduğundan $\forall t\in[0,1]$ için

$$f\left(ta+(1-t)\,b\right)+f\left((1-t)\,a+bt\right)\leq f\left(a\right)+f\left(b\right) \tag{4.1.3}$$

yazılır. (4.1.3) de de eşitsizliğin her iki tarafı $2t^{\alpha-1}g\left(tb+\left(1-t\right)a\right)$ ile çarpılıp $[0,1]$ aralığı üzerinden t'ye göre integral alınırsa

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 t^{\alpha-1}f\left(ta+\left(1-t\right)b\right)g\left(tb+\left(1-t\right)a\right)dt \\
& +\int_0^1 t^{\alpha-1}f\left(tb+\left(1-t\right)a\right)g\left(tb+\left(1-t\right)a\right)dt \\
\leq\ & \left[f\left(a\right)+f\left(b\right)\right]\int_0^1 t^{\alpha-1}g\left(tb+\left(1-t\right)a\right)dt
\end{aligned}$$

yani

$$\frac{\Gamma\left(\alpha\right)}{\left(b-a\right)^{\alpha}}\left[J_{a^+}^{\alpha}\left(fg\right)\left(b\right)+J_{b^-}^{\alpha}\left(fg\right)\left(a\right)\right]\leq\frac{\Gamma\left(\alpha\right)}{\left(b-a\right)^{\alpha}}\left(\frac{f\left(a\right)+f\left(b\right)}{2}\right)\left[J_{a^+}^{\alpha}g\left(b\right)+J_{b^-}^{\alpha}g\left(a\right)\right]$$

elde edilir. Son eşitsizliğin her iki tarafı $\frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}$ ile çarpılırsa istenilen eşitsizlik elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 4.1.1 Teorem 4.1.1 de;
i) $\alpha=1$ alınırsa Teorem 2.2.2 deki eşitsizlik elde edilir.
ii) $g\left(x\right)=1$ alınırsa Teorem 3.2.1 deki eşitsizlik elde edilir.

Lemma 4.1.2 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, (a,b) aralığında diferansiyellenebilir bir fonksiyon, $a<b$ ve $f'\in L[a,b]$ olsun. $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu integrallenebilir ve $\frac{a+b}{2}$' ye göre simetrik ise $\alpha>0$ olmak üzere kesirli integraller için

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{f(a)+f(b)}{2}\right)\left[J_{a^+}^{\alpha}g\left(b\right)+J_{b^-}^{\alpha}g\left(a\right)\right]-\left[J_{a^+}^{\alpha}\left(fg\right)\left(b\right)+J_{b^-}^{\alpha}\left(fg\right)\left(a\right)\right] \\
=\ & \frac{1}{\Gamma\left(\alpha\right)}\int_a^b\left[\int_a^t\left(b-s\right)^{\alpha-1}g\left(s\right)ds-\int_t^b\left(s-a\right)^{\alpha-1}g\left(s\right)ds\right]f'\left(t\right)dt \qquad (4.1.4)
\end{aligned}$$

eşitliği geçerlidir [13].

İspat.

$$\int_a^b\left[\int_a^t\left(b-s\right)^{\alpha-1}g\left(s\right)ds-\int_t^b\left(s-a\right)^{\alpha-1}g\left(s\right)ds\right]f'\left(t\right)dt$$

integralini hesaplamak yeterlidir. Bunun için

$$\begin{aligned}
I &= \int_a^b\left[\int_a^t\left(b-s\right)^{\alpha-1}g\left(s\right)ds-\int_t^b\left(s-a\right)^{\alpha-1}g\left(s\right)ds\right]f'\left(t\right)dt \\
&= \int_a^b\left(\int_a^t\left(b-s\right)^{\alpha-1}g\left(s\right)ds\right)f'\left(t\right)dt+\int_a^b\left(-\int_t^b\left(s-a\right)^{\alpha-1}g\left(s\right)ds\right)f'\left(t\right)dt \\
&= I_1+I_2
\end{aligned}$$

olarak yazalım. Buradan Lemma 4.1.1 kullanılarak kısmi integrasyon ile

$$\begin{aligned}
I_1 &= \left(\int_a^t (b-s)^{\alpha-1} g(s)\,ds\right) f(t)\Big|_a^b - \int_a^b (b-t)^{\alpha-1} g(t) f(t)\,dt \\
&= \left(\int_a^b (b-s)^{\alpha-1} g(s)\,ds\right) f(b) - \int_a^b (b-t)^{\alpha-1} (fg)(t)\,dt \\
&= \Gamma(\alpha)\left[f(b) J_{a^+}^{\alpha} g(b) - J_{a^+}^{\alpha}(fg)(b)\right] \\
&= \Gamma(\alpha)\left[\frac{f(b)}{2}\left[J_{a^+}^{\alpha} g(b) + J_{b^-}^{\alpha} g(a)\right] - J_{a^+}^{\alpha}(fg)(b)\right]
\end{aligned}$$

bulunur ve benzer şekilde;

$$\begin{aligned}
I_2 &= \left(-\int_t^b (s-a)^{\alpha-1} g(s)\,ds\right) f(t)\Big|_a^b - \int_a^b (t-a)^{\alpha-1} g(t) f(t)\,dt \\
&= \left(\int_a^b (s-a)^{\alpha-1} g(s)\,ds\right) f(a) - \int_a^b (t-a)^{\alpha-1} (fg)(t)\,dt \\
&= \Gamma(\alpha)\left[\frac{f(a)}{2}\left[J_{a^+}^{\alpha} g(b) + J_{b^-}^{\alpha} g(a)\right] - J_{b^-}^{\alpha}(fg)(a)\right]
\end{aligned}$$

olur. Böylece

$$\begin{aligned}
I &= I_1 + I_2 \\
&= \Gamma(\alpha)\left\{\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}\right)\left[J_{a^+}^{\alpha} g(b) + J_{b^-}^{\alpha} g(a)\right] - \left[J_{a^+}^{\alpha}(fg)(b) + J_{b^-}^{\alpha}(fg)(a)\right]\right\}
\end{aligned}$$

yazılır. Bu eşitliğin her iki tarafı $(\Gamma(\alpha))^{-1}$ ile çarpılırsa (4.1.4) eşitliği elde edilerek ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 4.1.2 Lemma 4.1.2 de $g(x) = 1$ alınırsa Lemma 3.2.2 deki eşitlik elde edilir.

Teorem 4.1.2 $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I°' de diferansiyellenebilir bir fonksiyon, $a < b$ ve $f' \in L[a,b]$ olsun. $|f'|$, $[a,b]$ aralığında konveks, $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ sürekli ve $\frac{a+b}{2}$' ye göre simetrik bir fonksiyon ise $\alpha > 0$ olmak üzere kesirli integraller için

$$\begin{aligned}
&\left|\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}\right)\left[J_{a^+}^{\alpha} g(b) + J_{b^-}^{\alpha} g(a)\right] - \left[J_{a^+}^{\alpha}(fg)(b) + J_{b^-}^{\alpha}(fg)(a)\right]\right| \\
&\leq \frac{(b-a)^{\alpha+1}\|g\|_{\infty}}{(\alpha+1)\Gamma(\alpha+1)}\left(1-\frac{1}{2^{\alpha}}\right)\left[|f'(a)| + |f'(b)|\right] \qquad (4.1.5)
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir [13].

İspat. Lemma 4.1.2 den

$$\begin{aligned} &\left|\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}\right)\left[J_{a^+}^{\alpha} g(b)+J_{b^-}^{\alpha} g(a)\right]-\left[J_{a^+}^{\alpha}(fg)(b)+J_{b^-}^{\alpha}(fg)(a)\right]\right| \\ =& \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b\left|\int_a^t (b-s)^{\alpha-1} g(s)\,ds-\int_t^b (s-a)^{\alpha-1} g(s)\,ds\right| |f'(t)|\,dt \end{aligned} \tag{4.1.6}$$

yazılır. $|f'|$, $[a,b]$ aralığında konveks olduğundan $t\in[a,b]$ olmak üzere

$$|f'(t)|=\left|f'\left(\frac{b-t}{b-a}a+\frac{t-a}{b-a}b\right)\right|\le\frac{b-t}{b-a}|f'(a)|+\frac{t-a}{b-a}|f'(b)| \tag{4.1.7}$$

dir ve $g:[a,b]\to\mathbb{R}$, $\frac{a+b}{2}$ ye göre simetrik olduğundan

$$\int_t^b (s-a)^{\alpha-1} g(s)\,ds=\int_a^{a+b-t}(b-s)^{\alpha-1} g(a+b-s)\,ds=\int_a^{a+b-t}(b-s)^{\alpha-1} g(s)\,ds$$

yazılır. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} &\left|\int_a^t (b-s)^{\alpha-1} g(s)\,ds-\int_t^b (s-a)^{\alpha-1} g(s)\,ds\right| \\ =& \left|\int_t^{a+b-t}(b-s)^{\alpha-1} g(s)\,ds\right| \\ \le& \begin{cases} \displaystyle\int_t^{a+b-t}\left|(b-s)^{\alpha-1} g(s)\right| ds, & t\in\left[a,\frac{a+b}{2}\right] \\ \displaystyle\int_{a+b-t}^{t}\left|(b-s)^{\alpha-1} g(s)\right| ds, & t\in\left[\frac{a+b}{2},b\right] \end{cases} \end{aligned} \tag{4.1.8}$$

olur. Böylece $(4.1.6)$, $(4.1.7)$ ve $(4.1.8)$ den

$$\begin{aligned} &\left|\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}\right)\left[J_{a^+}^{\alpha} g(b)+J_{b^-}^{\alpha} g(a)\right]-\left[J_{a^+}^{\alpha}(fg)(b)+J_{b^-}^{\alpha}(fg)(a)\right]\right| \\ \le& \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^{\frac{a+b}{2}}\left(\int_t^{a+b-t}\left|(b-s)^{\alpha-1} g(s)\right| ds\right)\left(\frac{b-t}{b-a}|f'(a)|+\frac{t-a}{b-a}|f'(b)|\right)dt \\ &+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{\frac{a+b}{2}}^{b}\left(\int_{a+b-t}^{t}\left|(b-s)^{\alpha-1} g(s)\right| ds\right)\left(\frac{b-t}{b-a}|f'(a)|+\frac{t-a}{b-a}|f'(b)|\right)dt \\ \le& \frac{\|g\|_\infty}{(b-a)\Gamma(\alpha+1)} \\ &\times\left\{\int_a^{\frac{a+b}{2}}\left[(b-t)^{\alpha}-(t-a)^{\alpha}\right]\left[(b-t)|f'(a)|+(t-a)|f'(b)|\right]dt\right. \\ &\left.+\int_{\frac{a+b}{2}}^{b}\left[(t-a)^{\alpha}-(b-t)^{\alpha}\right]\left[(b-t)|f'(a)|+(t-a)|f'(b)|\right]dt\right\} \end{aligned} \tag{4.1.9}$$

yazılır. Buradan da

$$\begin{aligned}
& \int_a^{\frac{a+b}{2}} \left[(b-t)^\alpha - (t-a)^\alpha\right](b-t)\,dt \\
= & \int_{\frac{a+b}{2}}^b \left[(t-a)^\alpha - (b-t)^\alpha\right](t-a)\,dt \\
= & \frac{(b-a)^{\alpha+2}}{\alpha+1}\left(\frac{\alpha+1}{\alpha+2} - \frac{1}{2^{\alpha+1}}\right) \qquad (4.1.10)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
& \int_a^{\frac{a+b}{2}} \left[(b-t)^\alpha - (t-a)^\alpha\right](t-a)\,dt \\
= & \int_{\frac{a+b}{2}}^b \left[(t-a)^\alpha - (b-t)^\alpha\right](b-t)\,dt \\
= & \frac{(b-a)^{\alpha+2}}{\alpha+1}\left(\frac{1}{\alpha+2} - \frac{1}{2^{\alpha+1}}\right) \qquad (4.1.11)
\end{aligned}$$

şeklinde integralleri hesaplanır ve (4.1.9) 'de yerine yazılıp gerekli düzenlemeler yapıldığında istenilen eşitsizlik elde edilir.

Sonuç 4.1.3 Teorem 4.1.2 de $g(x) = 1$ alınırsa Teorem 3.2.3 deki eşitsizlik elde edilir.

Teorem 4.1.3 $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I°' de diferansiyellenebilir bir fonksiyon , $a < b$ ve $f' \in L[a,b]$ olsun. Eğer $|f'|^q$, $[a,b]$ aralığında konveks, $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ sürekli ve $\frac{a+b}{2}$'ye göre simetrik bir fonksiyon ise $\alpha > 0$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ve $q > 1$ olmak üzere kesirli integraller için

$$\begin{aligned}
& \left| \left(\frac{f(a)+f(b)}{2}\right)\left[J_{a^+}^\alpha g(b) + J_{b^-}^\alpha g(a)\right] - \left[J_{a^+}^\alpha (fg)(b) + J_{b^-}^\alpha (fg)(a)\right] \right| \\
\leq & \frac{2(b-a)^{\alpha+1}\|g\|_\infty}{(b-a)^{1/q}(\alpha+1)\Gamma(\alpha+1)}\left(1-\frac{1}{2^\alpha}\right)\left(\frac{|f'(a)|^q + |f'(b)|^q}{2}\right)^{1/q} \qquad (4.1.12)
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir [13].

İspat. Lemma 4.1.2, Hölder eşitsizliği, (4.1.8) eşitsizliği ve $|f'|^{q}$' nin konveksliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
&\left|\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}\right)\left[J_{a^+}^{\alpha}g(b)+J_{b^-}^{\alpha}g(a)\right]-\left[J_{a^+}^{\alpha}(fg)(b)+J_{b^-}^{\alpha}(fg)(a)\right]\right| \\
\leq\ & \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left(\int_a^b\left|\int_t^{a+b-t}(b-s)^{\alpha-1}g(s)\,ds\right|dt\right)^{1-1/q} \\
&\times\left(\int_a^b\left|\int_t^{a+b-t}(b-s)^{\alpha-1}g(s)\,ds\right|\left|f'(t)\right|^q dt\right)^{1/q} \\
\leq\ & \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left[\int_a^{\frac{a+b}{2}}\left(\int_t^{a+b-t}\left|(b-s)^{\alpha-1}g(s)\right|ds\right)dt\right. \qquad (4.1.13)\\
&\left.+\int_{\frac{a+b}{2}}^{b}\left(\int_{a+b-t}^{t}\left|(b-s)^{\alpha-1}g(s)\right|ds\right)dt\right]^{1-1/q} \\
&\times\left[\int_a^{\frac{a+b}{2}}\left(\int_t^{a+b-t}\left|(b-s)^{\alpha-1}g(s)\right|ds\right)\left|f'(t)\right|^q dt\right. \\
&\left.+\int_{\frac{a+b}{2}}^{b}\left(\int_{a+b-t}^{t}\left|(b-s)^{\alpha-1}g(s)\right|ds\right)\left|f'(t)\right|^q dt\right]^{1/q} \\
\leq\ & \frac{2^{1-1/q}\left\|g\right\|_{\infty}}{(b-a)^{1/q}\,\Gamma(\alpha+1)}\left(\frac{(b-a)^{\alpha+1}}{(\alpha+1)}\left[1-\frac{1}{2^{\alpha}}\right]\right)^{1-1/q} \\
&\times\left\{\int_a^{\frac{a+b}{2}}\left[(b-t)^{\alpha}-(t-a)^{\alpha}\right]\left((b-t)\left|f'(a)\right|^q+(t-a)\left|f'(b)\right|^q\right)dt\right. \\
&\left.+\int_{\frac{a+b}{2}}^{b}\left[(t-a)^{\alpha}-(b-t)^{\alpha}\right]\left((b-t)\left|f'(a)\right|^q+(t-a)\left|f'(b)\right|^q\right)dt\right\}^{1/q}
\end{aligned}$$

yazılır ki burada

$$\begin{aligned}
&\int_a^{\frac{a+b}{2}}\left(\int_t^{a+b-t}(b-s)^{\alpha-1}ds\right)dt+\int_{\frac{a+b}{2}}^{b}\left(\int_{a+b-t}^{t}(b-s)^{\alpha-1}ds\right)dt \\
=\ & \frac{2(b-a)^{\alpha+1}}{\alpha(\alpha+1)}\left[1-\frac{1}{2^{\alpha}}\right]
\end{aligned}$$

olduğu kolayca görülebilir. Böylece (4.1.10) *ve* (4.1.11), (4.1.13)$'$*de* kullanılırsa istenilen sonuç elde edilir ve ispat tamamlanır.

Şimdi de $q>1$ olmak üzere elde edilen aşağıdaki teoremi ifade etmeden önce teoremin ispatında kullanılacak şu lemmayı verelim.

Lemma 4.1.3 $0 < \alpha \leq 1$ ve $0 \leq a \leq b$ olmak üzere

$$|a^{\alpha} - b^{\alpha}| \leq (b-a)^{\alpha}$$

eşitsizliği geçerlidir ([22], [29]).

Teorem 4.1.4 $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I°' de diferansiyellenebilir bir fonksiyon, $a < b$ ve $f' \in L[a,b]$ olsun. $q > 1$ olmak üzere $|f'|^{q}$, $[a,b]$ aralığında konveks, $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ sürekli ve $\frac{a+b}{2}$ 'ye göre simetrik bir fonksiyon ise kesirli integraller için

(*i*) $\alpha > 0$ *ise*;

$$\begin{aligned} &\left| \left(\frac{f(a)+f(b)}{2} \right) \left[J_{a^+}^{\alpha} g(b) + J_{b^-}^{\alpha} g(a) \right] - \left[J_{a^+}^{\alpha} (fg)(b) + J_{b^-}^{\alpha} (fg)(a) \right] \right| \\ \leq\ & \frac{2^{1/p} \|g\|_{\infty} (b-a)^{\alpha+1}}{(\alpha p+1)^{1/p} \Gamma(\alpha+1)} \left(1 - \frac{1}{2^{\alpha p}} \right)^{1/p} \left(\frac{|f'(a)|^{q} + |f'(b)|^{q}}{2} \right)^{1/q} \end{aligned} \tag{4.1.14}$$

(*ii*) $0 < \alpha \leq 1$ *ve* $1/p + 1/q = 1$ *ise*;

$$\begin{aligned} &\left| \left(\frac{f(a)+f(b)}{2} \right) \left[J_{a^+}^{\alpha} g(b) + J_{b^-}^{\alpha} g(a) \right] - \left[J_{a^+}^{\alpha} (fg)(b) + J_{b^-}^{\alpha} (fg)(a) \right] \right| \\ \leq\ & \frac{\|g\|_{\infty} (b-a)^{\alpha+1}}{(\alpha p+1)^{1/p} \Gamma(\alpha+1)} \left(\frac{|f'(a)|^{q} + |f'(b)|^{q}}{2} \right)^{1/q} \end{aligned} \tag{4.1.15}$$

eşitsizlikleri geçerlidir [13].

İspat. Lemma 4.1.2, Hölder eşitsizliği, (4.1.8) eşitsizliği ve $|f'|^{q}$' nin konveksliği kullanılarak

$$\begin{aligned} &\left| \left(\frac{f(a)+f(b)}{2} \right) \left[J_{a^+}^{\alpha} g(b) + J_{b^-}^{\alpha} g(a) \right] - \left[J_{a^+}^{\alpha} (fg)(b) + J_{b^-}^{\alpha} (fg)(a) \right] \right| \\ \leq\ & \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\int_{a}^{b} \left| \int_{t}^{a+b-t} (b-s)^{\alpha-1} g(s)\, ds \right|^{p} dt \right)^{1/p} \left(\int_{a}^{b} |f'(t)|^{q} dt \right)^{1/q} \\ \leq\ & \frac{\|g\|_{\infty}}{\Gamma(\alpha+1)} \left(\int_{a}^{\frac{a+b}{2}} \left[(b-t)^{\alpha} - (t-a)^{\alpha} \right]^{p} dt + \int_{\frac{a+b}{2}}^{b} \left[(t-a)^{\alpha} - (b-t)^{\alpha} \right]^{p} dt \right)^{1/p} \\ &\times \left(\int_{a}^{b} \left(\frac{b-t}{b-a} |f'(a)|^{q} + \frac{t-a}{b-a} |f'(b)|^{q} \right) dt \right)^{1/q} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\|g\|_\infty (b-a)^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)} \left(\int_0^{\frac{1}{2}} [(1-t)^\alpha - t^\alpha]^p \, dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 [t^\alpha - (1-t)^\alpha]^p \, dt \right)^{1/p} \\
&\quad \times \left(\frac{|f'(a)|^q + |f'(b)|^q}{2} \right)^{1/q} \qquad (4.1.16) \\
&\le \frac{\|g\|_\infty (b-a)^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)} \left(\int_0^{\frac{1}{2}} [(1-t)^{\alpha p} - t^{\alpha p}] \, dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 [t^{\alpha p} - (1-t)^{\alpha p}] \, dt \right)^{1/p} \\
&\quad \times \left(\frac{|f'(a)|^q + |f'(b)|^q}{2} \right)^{1/q}
\end{aligned}
$$

yazılır. Daha sonra $A \geq B \geq 0$ *ve* $q \geq 1$ *iken*

$$(A-B)^q \le A^q - B^q$$

olduğundan;

$$t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \quad \text{için} \quad [(1-t)^\alpha - t^\alpha]^p \le (1-t)^{\alpha p} - t^{\alpha p}$$

ve

$$t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \quad \text{için} \quad [t^\alpha - (1-t)^\alpha]^p \le t^{\alpha p} - (1-t)^{\alpha p}$$

olduğu gözönüne alınırsa

$$
\begin{aligned}
&\left| \left(\frac{f(a)+f(b)}{2} \right) [J^\alpha_{a^+} g(b) + J^\alpha_{b^-} g(a)] - [J^\alpha_{a^+}(fg)(b) + J^\alpha_{b^-}(fg)(a)] \right| \\
&\le \frac{\|g\|_\infty (b-a)^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)} \left(\frac{2}{(\alpha p+1)} \left[1 - \frac{1}{2^{\alpha p}}\right] \right)^{1/p} \left(\frac{|f'(a)|^q + |f'(b)|^q}{2} \right)^{1/q}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Böylece (4.1.14) eşitsizliği ispatlanmış olur.

(ii) (4.1.15) eşitsizliği, (4.1.16) eşitsizliği ve Lemma 4.1.3 kullanılarak kolayca elde edilir.

Sonuç 4.1.4 Teorem 4.1.4 'de $\alpha = 1$ alınırsa [29]' da Önerme 13 deki eşitsizlik elde edilir.

Kırmacı Hermite-Hadamard integral eşitsizliğinden ve konveks fonksiyonlardan faydalanarak differansiyellenebilen fonksiyonlar için aşağıdaki lemma ve teoremleri elde etmiştir.

Lemma 4.1.4 $f : I^\circ \to \mathbb{R}$ I°' de diferansiyellenebilir bir fonksiyon, $a, b \in I^\circ$ ve $a < b$

olsun. Eğer $f' \in L[a,b]$ ise

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \qquad (4.1.17)\\
&= (b-a)\left[\int_0^{\frac{1}{2}} tf'(ta+(1-t)b)\,dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 (t-1)f'(ta+(1-t)b)\,dt\right]
\end{aligned}$$

eşitliği geçerlidir [15] .

Teorem 4.1.5 $f : I^\circ \to \mathbb{R}$ I°' de diferansiyellenebilir bir fonksiyon, $a,b \in I^\circ$ ve $a < b$ olsun. Eğer $|f'|$, $[a,b]$ aralığında konveks ise

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| \le \frac{b-a}{8}\left(|f'(a)| + |f'(b)|\right) \qquad (4.1.18)$$

eşitsizliği geçerlidir [15].

Teorem 4.1.6 $f : I^\circ \to \mathbb{R}$ I°' de diferansiyellenebilir bir fonksiyon, $a,b \in I^\circ$, $a < b$ ve $p > 1$ olsun. Eğer $|f'|^{\frac{p}{(p-1)}}$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında konveks ise

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| \qquad (4.1.19)\\
&\le \frac{b-a}{16}\left(\frac{4}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left[\left(|f'(a)|^{\frac{p}{(p-1)}} + 3|f'(b)|^{\frac{p}{(p-1)}}\right)^{\frac{(p-1)}{p}}\right.\\
&\left. + \left(3|f'(a)|^{\frac{p}{(p-1)}} + |f'(b)|^{\frac{p}{(p-1)}}\right)^{\frac{(p-1)}{p}}\right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir [15].

Sarıkaya, Hermite-Hadamard-Fejér tipli eşitsizlikler elde etmek için aşağıdaki lemmayı elde etmiştir.

Lemma 4.1.5 $f : I^\circ \to \mathbb{R}$ I°' de diferansiyellenebilir bir fonksiyon, $a,b \in I^\circ$, $a < b$ ve $g : [a,b] \to [0,\infty)$ diferansiyellenebilir fonksiyon olsun. Eğer $f' \in L[a,b]$ ise $t \in [0,1]$ için;

$$k(t) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^t g(as+(1-s)b)\,ds, & t \in [0,1/2) \\ \displaystyle -\int_t^1 g(as+(1-s)b)\,ds, & t \in [1/2,1] \end{cases}$$

olmak üzere

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx - \frac{1}{b-a}f\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b g(x)\,dx \tag{4.1.20}$$
$$= (b-a)\int_0^1 k(t)\,f'(ta+(1-t)b)\,dt$$

eşitliği geçerlidir [24].

Sarıkaya ve Erden ise Hermite-Hadamard-Fejer tipli ve Ostrowski tipli yeni eşitsizlikler elde etmek için aşağıdaki lemmayı elde etmişlerdir.

Lemma 4.1.6 $f: I^{\circ} \to \mathbb{R}$ I°' de diferansiyellenebilir bir fonksiyon, $a, b \in I^{\circ}$, $a < b$ ve $w : [a,b] \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $x \in [a,b]$ için $f', w \in L[a,b]$ ise

$$\int_a^x \left(\int_a^t w(s)\,ds\right)^{\alpha} f'(t)\,dt - \int_x^b \left(\int_t^b w(s)\,ds\right)^{\alpha} f'(t)\,dt$$
$$= \left[\left(\int_a^x w(s)\,ds\right)^{\alpha} + \left(\int_x^b w(s)\,ds\right)^{\alpha}\right] f(x) \tag{4.1.21}$$
$$-\alpha \int_a^x \left(\int_a^t w(s)\,ds\right)^{\alpha-1} w(t)\,f(t)\,dt - \alpha \int_x^b \left(\int_t^b w(s)\,ds\right)^{\alpha-1} w(t)\,f(t)\,dt$$

eşitliği geçerlidir [26].

Set ve arkadaşları aşağıdaki lemmayı kullanarak (2.2.2) eşitsizliğininin sol tarafı ile ilgili bazı yeni sonuçlar elde etmişlerdir.

Lemma 4.1.7 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ (a,b)' da diferansiyellenebilir fonksiyon, $a < b$ ve $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyon olsun. Eğer $f', g \in L[a,b]$ ise kesirli integraller için

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\left[J^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^-} g(a) + J^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^+} g(b)\right] - \left[J^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^-} (fg)(a) + J^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^+} (fg)(b)\right]$$
$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b k(t)\,f'(t)\,dt \tag{4.1.22}$$

eşitliği geçerlidir. Burada

$$k(t) = \begin{cases} \displaystyle\int_a^t (s-a)^{\alpha-1} g(s)\,ds & , t \in \left[a, \frac{a+b}{2}\right] \\ \displaystyle\int_b^t (b-s)^{\alpha-1} g(s)\,ds & , t \in \left[\frac{a+b}{2}, b\right] \end{cases}$$

dir [27].

İspat.

$$
\begin{aligned}
I &= \int_a^b k(t)\, f'(t)\, dt \\
&= \int_a^{\frac{a+b}{2}} \left(\int_a^t (s-a)^{\alpha-1} g(s)\, ds \right) f'(t)\, dt + \int_{\frac{a+b}{2}}^b \left(\int_b^t (b-s)^{\alpha-1} g(s)\, ds \right) f'(t)\, dt \\
&= I_1 + I_2
\end{aligned}
$$

I_1 *ve* I_2 integrallerini ayrı ayrı hesaplarsak

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \left(\int_a^t (s-a)^{\alpha-1} g(s)\, ds \right) f(t) \Big|_a^{\frac{a+b}{2}} - \int_a^{\frac{a+b}{2}} (t-a)^{\alpha-1} g(t) f(t)\, dt \\
&= \left(\int_a^{\frac{a+b}{2}} (s-a)^{\alpha-1} g(s)\, ds \right) f\left(\frac{a+b}{2} \right) - \int_a^{\frac{a+b}{2}} (t-a)^{\alpha-1} (fg)(t)\, dt \\
&= \Gamma(\alpha) \left[f\left(\frac{a+b}{2} \right) J^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^-} g(a) - J^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^-} (fg)(a) \right]
\end{aligned}
$$

benzer şekilde

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \left(\int_b^t (b-s)^{\alpha-1} g(s)\, ds \right) f(t) \Big|_{\frac{a+b}{2}}^{b} - \int_{\frac{a+b}{2}}^b (b-t)^{\alpha-1} g(t) f(t)\, dt \\
&= \left(\int_{\frac{a+b}{2}}^b (b-s)^{\alpha-1} g(s)\, ds \right) f\left(\frac{a+b}{2} \right) - \int_{\frac{a+b}{2}}^b (b-t)^{\alpha-1} (fg)(t)\, dt \\
&= \Gamma(\alpha) \left[f\left(\frac{a+b}{2} \right) J^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^+} g(b) - J^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^+} (fg)(b) \right]
\end{aligned}
$$

elde edilir ve sonuçlar I' da yerine yazılırsa

$$
\begin{aligned}
I &= I_1 + I_2 \\
&= \Gamma(\alpha) \left\{ f\left(\frac{a+b}{2} \right) \left[J^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^-} g(a) + J^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^+} g(b) \right] \right. \\
&\quad \left. - \left[J^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^-} (fg)(a) + J^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^+} (fg)(b) \right] \right\}
\end{aligned}
$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitliğin her iki tarafı$(\Gamma(\alpha))^{-1}$ ile çarpılırsa (4.1.22) elde edilir ve ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 4.1.5 Eğer Lemma 4.1.7' de $\alpha = 1$ alınırsa (4.1.22) deki eşitliği (4.1.20) eşitliğini verir.

Teorem 4.1.7 $f : I^{\circ} \to \mathbb{R}$ I°' de diferansiyellenebilir bir fonksiyon, $f' \in L[a,b]$, $a < b$ ve $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ sürekli olsun. Eğer $|f'|$, $[a,b]$ aralığında konveks fonksiyon, $\alpha > 0$ olmak üzere kesirli integraller için

$$\begin{aligned} &\left| f\left(\frac{a+b}{2}\right)\left[J^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^-}g(a)+J^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^+}g(b)\right]-\left[J^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^-}(fg)(a)+J^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^+}(fg)(b)\right]\right| \\ \leq\ &\frac{(b-a)^{\alpha+1}\|g\|_{[a,b],\infty}}{2^{\alpha+1}(\alpha+1)\Gamma(\alpha+1)}\left(|f'(a)|+|f'(b)|\right) \end{aligned} \tag{4.1.23}$$

eşitsizliği geçerlidir [27].

İspat. $|f'|$, $[a,b]$ aralığında konveks ve $t \in [a,b]$ olduğundan

$$|f'(t)| = \left| f'\left(\frac{b-t}{b-a}a+\frac{t-a}{b-a}b\right)\right| \leq \frac{b-t}{b-a}|f'(a)|+\frac{t-a}{b-a}|f'(b)|$$

yazılabilir. Lemma 4.1.7'den

$$\begin{aligned} &\left| f\left(\frac{a+b}{2}\right)\left[J^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^-}g(a)+J^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^+}g(b)\right]-\left[J^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^-}(fg)(a)+J^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^+}(fg)(b)\right]\right| \\ \leq\ &\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \\ &\times\left\{\int_a^{\frac{a+b}{2}}\left|\int_a^t (s-a)^{\alpha-1}g(s)\,ds\right||f'(t)|\,dt+\int_{\frac{a+b}{2}}^b\left|\int_b^t (b-s)^{\alpha-1}g(s)\,ds\right||f'(t)|\,dt\right\} \\ \leq\ &\frac{\|g\|_{\left[a,\frac{a+b}{2}\right],\infty}}{(b-a)\Gamma(\alpha)} \\ &\times\int_a^{\frac{a+b}{2}}\left(\int_a^t (s-a)^{\alpha-1}ds\right)\left[(b-t)|f'(a)|+(t-a)|f'(b)|\right]dt \\ &+\frac{\|g\|_{\left[\frac{a+b}{2},b\right],\infty}}{(b-a)\Gamma(\alpha)} \\ &\times\int_{\frac{a+b}{2}}^b\left(\int_t^b (b-s)^{\alpha-1}ds\right)\left[(b-t)|f'(a)|+(t-a)|f'(b)|\right]dt \\ =\ &\frac{\|g\|_{\left[a,\frac{a+b}{2}\right],\infty}}{(b-a)\Gamma(\alpha+1)} \\ &\times\int_a^{\frac{a+b}{2}}(t-a)^{\alpha}\left((b-t)|f'(a)|+(t-a)|f'(b)|\right)dt \\ &+\frac{\|g\|_{\left[\frac{a+b}{2},b\right],\infty}}{(b-a)\Gamma(\alpha+1)} \\ &\times\int_{\frac{a+b}{2}}^b(b-t)^{\alpha}\left((b-t)|f'(a)|+(t-a)|f'(b)|\right)dt \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{(b-a)^{\alpha+1}}{2^{\alpha+2}(\alpha+2)(\alpha+1)\Gamma(\alpha+1)} \\
&\quad \times \left\{ \|g\|_{\left[a,\frac{a+b}{2}\right],\infty} \left[(\alpha+3)\left|f'(a)\right| + (\alpha+1)\left|f'(b)\right|\right] \right. \\
&\quad \left. + \|g\|_{\left[\frac{a+b}{2},b\right],\infty} \left[(\alpha+1)\left|f'(a)\right| + (\alpha+3)\left|f'(b)\right|\right] \right\} \\
&\leq \frac{(b-a)^{\alpha+1}\|g\|_{[a,b],\infty}}{2^{\alpha+1}(\alpha+1)\Gamma(\alpha+1)} \left(\left|f'(a)\right| + \left|f'(b)\right|\right)
\end{aligned}
$$

yazılır ki burada

$$
\begin{aligned}
\int_a^{\frac{a+b}{2}} (t-a)^{\alpha+1}\,dt &= \int_{\frac{a+b}{2}}^{b} (b-t)^{\alpha+1}\,dt \\
&= \frac{(b-a)^{\alpha+2}}{2^{\alpha+2}(\alpha+2)}
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
\int_a^{\frac{a+b}{2}} (t-a)^{\alpha}(b-t)\,dt &= \int_{\frac{a+b}{2}}^{b} (b-t)^{\alpha}(t-a)\,dt \\
&= \frac{(\alpha+3)(b-a)^{\alpha+2}}{2^{\alpha+2}(\alpha+1)(\alpha+2)}
\end{aligned}
$$

şeklindedir. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 4.1.6 Eğer (4.1.23) eşitsizliğinde g$(x) = 1$ *ve* $\alpha = 1$ alınırsa (4.1.18) eşitsizliği elde edilir.

Teorem 4.1.8 $f : I^{\circ} \to \mathbb{R}$, I°' de diferansiyellenebilir bir fonksiyon, $f' \in L[a,b]$, $a < b$ ve $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ sürekli olsun. Eğer $|f'|$, $[a,b]$ aralığında konveks fonksiyon, $q > 1$ ve $\alpha > 0$ ise kesirli integraller için

$$
\begin{aligned}
&\left| f\left(\frac{a+b}{2}\right)\left[J^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^-} g(a) + J^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^+} g(b)\right] - \left[J^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^-} (fg)(a) + J^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^+} (fg)(b)\right] \right| \\
&\leq \frac{(b-a)^{\alpha+1}}{2^{\alpha+1+\frac{1}{q}}(\alpha+1)(\alpha+2)^{\frac{1}{q}}\Gamma(\alpha+1)} \\
&\quad \times \left\{ \|g\|_{\left[a,\frac{a+b}{2}\right],\infty} \left[(\alpha+3)\left|f'(a)\right|^q + (\alpha+1)\left|f'(b)\right|^q\right]^{1/q} \right. \\
&\quad \left. + \|g\|_{\left[\frac{a+b}{2},b\right],\infty} \left[(\alpha+1)\left|f'(a)\right|^q + (\alpha+3)\left|f'(b)\right|^q\right]^{1/q} \right\}
\end{aligned} \tag{4.1.24}
$$

$$
\begin{aligned}
\leq\quad & \frac{(b-a)^{\alpha+1}\|g\|_{[a,b],\infty}}{2^{\alpha+1+\frac{1}{q}}(\alpha+1)(\alpha+2)^{\frac{1}{q}}\Gamma(\alpha+1)} \\
& \times\left\{\left((\alpha+3)|f'(a)|^q+(\alpha+1)|f'(b)|^q\right)^{1/q}\right. \\
& \left.+\left((\alpha+1)|f'(a)|^q+(\alpha+3)|f'(b)|^q\right)^{1/q}\right\}
\end{aligned}
$$

eşitsizliği geçerlidir [27].

İspat. $|f'|^q$, $[a,b]$ aralığında konveks olduğundan $t\in[a,b]$ için

$$
|f'(t)|^q=\left|f'\left(\frac{b-t}{b-a}a+\frac{t-a}{b-a}b\right)\right|^q\leq\frac{b-t}{b-a}|f'(a)|^q+\frac{t-a}{b-a}|f'(b)|^q
$$

dir. Lemma 4.1.7, Power mean eşitsizliği ve $|f'|^q$'nin konveksliği kullanılarak

$$
\begin{aligned}
& \left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)\left[J^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^-}g(a)+J^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^+}g(b)\right]-\left[J^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^-}(fg)(a)+J^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^+}(fg)(b)\right]\right| \\
\leq\quad & \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \\
& \times\left(\int_a^{\frac{a+b}{2}}\left|\int_a^t(s-a)^{\alpha-1}g(s)\,ds\right|dt\right)^{1-1/q}\left(\int_a^{\frac{a+b}{2}}\left|\int_a^t(s-a)^{\alpha-1}g(s)\,ds\right||f'(t)|^q\,dt\right)^{1/q} \\
& +\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \\
& \times\left(\int_{\frac{a+b}{2}}^b\left|\int_b^t(b-s)^{\alpha-1}g(s)\,ds\right|dt\right)^{1-1/q}\left(\int_{\frac{a+b}{2}}^b\left|\int_b^t(b-s)^{\alpha-1}g(s)\,ds\right||f'(t)|^q\,dt\right)^{1/q} \\
\leq\quad & \frac{\|g\|_{\left[a,\frac{a+b}{2}\right],\infty}}{\Gamma(\alpha)} \\
& \times\left(\int_a^{\frac{a+b}{2}}\left|\int_a^t(s-a)^{\alpha-1}ds\right|dt\right)^{1-1/q}\left(\int_a^{\frac{a+b}{2}}\left|\int_a^t(s-a)^{\alpha-1}ds\right||f'(t)|^q\,dt\right)^{1/q} \\
& +\frac{\|g\|_{\left[\frac{a+b}{2},b\right],\infty}}{\Gamma(\alpha)} \\
& \times\left(\int_{\frac{a+b}{2}}^b\left|\int_b^t(b-s)^{\alpha-1}ds\right|dt\right)^{1-1/q}\left(\int_{\frac{a+b}{2}}^b\left|\int_b^t(b-s)^{\alpha-1}ds\right||f'(t)|^q\,dt\right)^{1/q}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{\alpha\Gamma(\alpha)}\left(\frac{(b-a)^{\alpha+1}}{2^{\alpha+1}(\alpha+1)}\right)^{1-\frac{1}{q}} \\
&\times\left\{\frac{\|g\|_{\left[a,\frac{a+b}{2}\right],\infty}}{b-a}\right. \\
&\times\left(\int_a^{\frac{a+b}{2}}(t-a)^{\alpha}(b-t)\left|f'(a)\right|^q+(t-a)^{\alpha+1}\left|f'(b)\right|^q dt\right)^{1/q} \\
&+\frac{\|g\|_{\left[\frac{a+b}{2},b\right],\infty}}{(b-a)^{1/q}} \\
&\times\left.\left(\int_{\frac{a+b}{2}}^{b}(b-t)^{\alpha+1}\left|f'(a)\right|^q+(b-t)^{\alpha}(t-a)\left|f'(b)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right\} \\
&\leq \frac{(b-a)^{\alpha+1}}{2^{\alpha+\frac{1}{q}}(\alpha+1)(\alpha+2)^{\frac{1}{q}}\Gamma(\alpha+1)} \\
&\times\left\{\|g\|_{\left[a,\frac{a+b}{2}\right],\infty}\left[(\alpha+3)\left|f'(a)\right|^q+(\alpha+1)\left|f'(b)\right|^q\right]^{1/q}\right. \\
&\left.+\|g\|_{\left[\frac{a+b}{2},b\right],\infty}\left[(\alpha+1)\left|f'(a)\right|^q+(\alpha+3)\left|f'(b)\right|^q\right]^{1/q}\right\} \\
&\leq \frac{(b-a)^{\alpha+1}\|g\|_{[a,b],\infty}}{2^{\alpha+1+\frac{1}{q}}(\alpha+1)(\alpha+2)^{\frac{1}{q}}\Gamma(\alpha+1)} \\
&\times\left\{\left((\alpha+3)\left|f'(a)\right|^q+(\alpha+1)\left|f'(b)\right|^q\right)^{1/q}\right. \\
&\left.+\left((\alpha+1)\left|f'(a)\right|^q+(\alpha+3)\left|f'(b)\right|^q\right)^{1/q}\right\}
\end{aligned}
$$

yazılır. Burada

$$
\int_a^{\frac{a+b}{2}}\left|\int_a^t(s-a)^{\alpha-1}ds\right|dt=\int_{\frac{a+b}{2}}^{b}\left|\int_b^t(b-s)^{\alpha-1}ds\right|dt=\frac{(b-a)^{\alpha+1}}{2^{\alpha+1}\alpha(\alpha+1)}
$$

olup ispat tamamlanır.

Teorem 4.1.9 $f: I^{\circ}\to\mathbb{R}$, I°' de diferansiyellenebilir bir fonksiyon, $f'\in L[a,b]$, $a<b$ ve $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ sürekli olsun. Eğer $|f'|^q$, $[a,b]$ aralığında konveks fonksiyon ise $q>1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ ve $\alpha>0$ olmak üzere kesirli integraller için

$$
\begin{aligned}
&\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)\left[J^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^-}g(a)+J^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^+}g(b)\right]-\left[J^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^-}(fg)(a)+J^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^+}(fg)(b)\right]\right| \\
\leq\ &\frac{\|g\|_{\infty}(b-a)^{\alpha+1}}{2^{\alpha+1+\frac{2}{q}}(\alpha p+1)^{\frac{1}{q}}\Gamma(\alpha+1)}\left[\left(3\left|f'(a)\right|^q+\left|f'(b)\right|^q\right)^{1/q}+\left(\left|f'(a)\right|^q+3\left|f'(b)\right|^q\right)^{1/q}\right]
\end{aligned}
\tag{4.1.25}
$$

eşitsizliği geçerlidir [27].

İspat. Lemma 4.1.7, Hölder eşitsizliği ve $|f'|^{q}$' nin konveksliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
&\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)\left[J^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^{-}}g(a)+J^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^{+}}g(b)\right]-\left[J^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^{-}}(fg)(a)+J^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^{+}}(fg)(b)\right]\right| \\
\leq\ & \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left(\int_a^{\frac{a+b}{2}}\left|\int_a^t (s-a)^{\alpha-1}g(s)\,ds\right|^p dt\right)^{1/p}\left(\int_a^{\frac{a+b}{2}}|f'(t)|^q\,dt\right)^{1/q} \\
&+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left(\int_{\frac{a+b}{2}}^b\left|\int_b^t (b-s)^{\alpha-1}g(s)\,ds\right|^p dt\right)^{1/p}\left(\int_{\frac{a+b}{2}}^b|f'(t)|^q\,dt\right)^{1/q} \\
\leq\ & \frac{(b-a)^{1/q}\|g\|_{\left[a,\frac{a+b}{2}\right],\infty}}{\Gamma(\alpha)} \\
&\times\left(\int_a^{\frac{a+b}{2}}\left|\int_a^t (s-a)^{\alpha-1}ds\right|^p dt\right)^{1/p}\left[\frac{3|f'(a)|^q+|f'(b)|^q}{8}\right]^{1/q} \\
&+\frac{(b-a)^{1/q}\|g\|_{\left[\frac{a+b}{2},b\right],\infty}}{\Gamma(\alpha)} \\
&\times\left(\int_{\frac{a+b}{2}}^b\left|\int_b^t (b-s)^{\alpha-1}ds\right|^p dt\right)^{1/p}\left[\frac{|f'(a)|^q+3|f'(b)|^q}{8}\right]^{1/q} \\
\leq\ & \frac{\|g\|_{\infty}(b-a)^{\alpha+1}}{2^{\alpha+1+\frac{2}{q}}(\alpha p+1)^{\frac{1}{q}}\Gamma(\alpha+1)} \\
&\times\left[\left(3|f'(a)|^q+|f'(b)|^q\right)^{1/q}+\left(|f'(a)|^q+3|f'(b)|^q\right)^{1/q}\right]
\end{aligned}$$

yazılır. Burada

$$\int_a^{\frac{a+b}{2}}\left|\int_a^t (s-a)^{\alpha-1}ds\right|^p dt=\int_{\frac{a+b}{2}}^b\left|\int_b^t (b-s)^{\alpha-1}ds\right|^p dt=\frac{(b-a)^{\alpha p+1}}{2^{\alpha p+1}(\alpha p+1)\alpha^p}$$

$$\begin{aligned}
\int_a^{\frac{a+b}{2}}|f'(t)|^q\,dt &\leq \frac{1}{b-a}\int_a^{\frac{a+b}{2}}\left[(b-t)|f'(a)|^q+(t-a)|f'(b)|^q\right]dt \\
&= (b-a)\frac{3|f'(a)|^q+|f'(b)|^q}{8}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{a+b}{2}}^b|f'(t)|^q\,dt &\leq \frac{1}{b-a}\int_{\frac{a+b}{2}}^b\left[(b-t)|f'(a)|^q+(t-a)|f'(b)|^q\right]dt \\
&= (b-a)\frac{|f'(a)|^q+3|f'(b)|^q}{8}
\end{aligned}$$

olarak hesaplanmıştır. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 4.1.7 (4.1.25) da $\alpha=1$ ve $g(x)=1$ olarak alınırsa (4.1.19) eşitsizliği elde edilir.

4.2 Riemann-Liouville Kesirli İntegralleri Yardımıyla s-konveks Fonksiyonlar için Hermite-Hadamard-Fejer Tipli Eşitsizlikler

Bu bölümde elde edilen yeni bulgulara yer verilecektir.

Teorem 4.2.1 $f : I \subseteq [0,\infty) \to \mathbb{R}$ I°' de diferansiyellenebilir bir fonksiyon, $a < b$, $f' \in L[a,b]$ ve $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ sürekli olsun. $s \in (0,1]$ için $|f'|$, $[a,b]$ aralığında s-konveks ise kesirli integraller için

$$\begin{aligned}
&\left| f\left(\frac{a+b}{2}\right)\left[J^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^{-}} g(a) + J^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^{+}} g(b)\right] - \left[J^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^{-}} (fg)(a) + J^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^{+}} (fg)(b)\right]\right| \\
\leq\ & \frac{(b-a)^{\alpha+1} \|g\|_{[a,b],\infty}}{\Gamma(\alpha+1)} \\
& \times \left\{\beta_{1/2}(\alpha+1, s+1) + \frac{1}{2^{\alpha+s+1}(\alpha+s+1)}\right\}\left[|f'(a)| + |f'(b)|\right]
\end{aligned} \tag{4.2.1}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. $|f'|$, $s \in (0,1]$ için $[a,b]$ aralığında s-konveks olduğundan, $t \in [a,b]$ olmak üzere

$$|f'(t)| = \left| f'\left(\frac{b-t}{b-a}a + \frac{t-a}{b-a}b\right)\right| \leq \left(\frac{b-t}{b-a}\right)^{s} |f'(a)| + \left(\frac{t-a}{b-a}\right)^{s} |f'(b)|$$

yazılır. Lemma 4.1.7 dan

$$\begin{aligned}
&\left| f\left(\frac{a+b}{2}\right)\left[J^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^{-}} g(a) + J^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^{+}} g(b)\right] - \left[J^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^{-}} (fg)(a) + J^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^{+}} (fg)(b)\right]\right| \\
\leq\ & \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \\
& \times \left\{\int_{a}^{\frac{a+b}{2}} \left|\int_{a}^{t} (s-a)^{\alpha-1} g(s)\, ds\right| |f'(t)|\, dt + \int_{\frac{a+b}{2}}^{b} \left|\int_{t}^{b} (b-s)^{\alpha-1} g(s)\, ds\right| |f'(t)|\, dt\right\} \\
\leq\ & \frac{\|g\|_{\left[a,\frac{a+b}{2}\right],\infty}}{(b-a)^{s}\Gamma(\alpha)} \\
& \times \int_{a}^{\frac{a+b}{2}} \left(\int_{a}^{t} (s-a)^{\alpha-1} ds\right) \left((b-t)^{s} |f'(a)| + (t-a)^{s} |f'(b)|\right) dt \\
& + \frac{\|g\|_{\left[\frac{a+b}{2},b\right],\infty}}{(b-a)^{s}\Gamma(\alpha)} \\
& \times \int_{\frac{a+b}{2}}^{b} \left(\int_{t}^{b} (b-s)^{\alpha-1} ds\right) \left((b-t)^{s} |f'(a)| + (t-a)^{s} |f'(b)|\right) dt
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{||g||_{\left[a,\frac{a+b}{2}\right],\infty}}{(b-a)^{s}\Gamma(\alpha+1)} \\
&\quad\times\int_a^{\frac{a+b}{2}}(t-a)^{\alpha}\left[(b-t)^{s}\left|f'(a)\right|+(t-a)^{s}\left|f'(b)\right|\right]dt \\
&\quad+\frac{||g||_{\left[\frac{a+b}{2},b\right],\infty}}{(b-a)^{s}\Gamma(\alpha+1)} \\
&\quad\times\int_{\frac{a+b}{2}}^{b}(b-t)^{\alpha}\left[(b-t)^{s}\left|f'(a)\right|+(t-a)^{s}\left|f'(b)\right|\right]dt \\
&= \frac{||g||_{\left[a,\frac{a+b}{2}\right],\infty}}{(b-a)^{s}\Gamma(\alpha+1)} \\
&\quad\times\left[\left|f'(a)\right|\int_a^{\frac{a+b}{2}}(t-a)^{\alpha}(b-t)^{s}dt+\left|f'(b)\right|\int_a^{\frac{a+b}{2}}(t-a)^{\alpha+s}dt\right] \\
&\quad+\frac{||g||_{\left[\frac{a+b}{2},b\right],\infty}}{(b-a)^{s}\Gamma(\alpha+1)} \\
&\quad\times\left[\left|f'(a)\right|\int_{\frac{a+b}{2}}^{b}(b-t)^{\alpha+s}dt+\left|f'(b)\right|\int_{\frac{a+b}{2}}^{b}(b-t)^{\alpha}(t-a)^{s}dt\right] \\
&= \frac{||g||_{\left[a,\frac{a+b}{2}\right],\infty}}{(b-a)^{s}\Gamma(\alpha+1)} \\
&\quad\times\left[\left|f'(a)\right|(b-a)^{\alpha+s+1}\beta_{1/2}(\alpha+1,s+1)+\left|f'(b)\right|\frac{(b-a)^{\alpha+s+1}}{2^{\alpha+s+1}(\alpha+s+1)}\right] \\
&\quad+\frac{||g||_{\left[\frac{a+b}{2},b\right],\infty}}{(b-a)^{s}\Gamma(\alpha+1)} \\
&\quad\times\left[\left|f'(a)\right|\frac{(b-a)^{\alpha+s+1}}{2^{\alpha+s+1}(\alpha+s+1)}+\left|f'(b)\right|(b-a)^{\alpha+s+1}\beta_{1/2}(\alpha+1,s+1)\right] \\
&= \frac{(b-a)^{\alpha+s+1}}{(b-a)^{s}\Gamma(\alpha+1)} \\
&\quad\times\Big\{||g||_{\left[a,\frac{a+b}{2}\right],\infty} \\
&\quad\times\left(\left|f'(a)\right|\beta_{1/2}(\alpha+1,s+1)+\left|f'(b)\right|\frac{1}{2^{\alpha+s+1}(\alpha+s+1)}\right) \\
&\quad+||g||_{\left[\frac{a+b}{2},b\right],\infty} \\
&\quad\times\left(\left|f'(a)\right|\frac{1}{2^{\alpha+s+1}(\alpha+s+1)}+\left|f'(b)\right|\beta_{1/2}(\alpha+1,s+1)\right)\Big\} \\
&\le \frac{(b-a)^{\alpha+1}||g||_{[a,b],\infty}}{\Gamma(\alpha+1)} \\
&\quad\times\left\{\beta_{1/2}(\alpha+1,s+1)\left[\left|f'(a)\right|+\left|f'(b)\right|\right]+\frac{\left[\left|f'(a)\right|+\left|f'(b)\right|\right]}{2^{\alpha+s+1}(\alpha+s+1)}\right\}
\end{aligned}
$$

$$= \frac{(b-a)^{\alpha+1}\|g\|_{[a,b],\infty}}{\Gamma(\alpha+1)}$$
$$\times\left\{\beta_{1/2}(\alpha+1,s+1)+\frac{1}{2^{\alpha+s+1}(\alpha+s+1)}\right\}\left[|f'(a)|+|f'(b)|\right]$$

yazılır. Burada

$$\int_a^{\frac{a+b}{2}}(t-a)^{\alpha+s}\,dt=\int_{\frac{a+b}{2}}^{b}(b-t)^{\alpha+s}\,dt=\frac{(b-a)^{\alpha+s+1}}{2^{\alpha+s+1}(\alpha+s+1)}$$

ve

$$\int_a^{\frac{a+b}{2}}(t-a)^{\alpha}(b-t)^{s}\,dt$$
$$=\int_{\frac{a+b}{2}}^{b}(b-t)^{\alpha}(t-a)^{s}\,dt=(b-a)^{\alpha+s+1}\beta_{1/2}(\alpha+1,s+1)$$

dır.

Sonuç 4.2.1 Eğer (4.2.1) eşitsizliğinde $s=1$ alınırsa, (4.1.23) eşitsizliği elde edilir.

Teorem 4.2.2 $f: I\subseteq[0,\infty)\to\mathbb{R}$ I°' de diferansiyellenebilir bir fonksiyon, $a<b$, $f'\in L[a,b]$ ve $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ sürekli olsun. Eğer $|f'|^q$, $[a,b]$ aralığında ve $s\in(0,1]$, $q\geq 1$ için s-konveks ise kesirli integraller için aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir.

$$\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)\left[J^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^-}g(a)+J^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^+}g(b)\right]-\left[J^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^-}(fg)(a)+J^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^+}(fg)(b)\right]\right|$$
$$\leq \frac{(b-a)^{\alpha+1}\|g\|_{[a,b],\infty}}{2^{\alpha+1+\frac{1}{q}}(\alpha+1)(\alpha+2)^{1/q}(\alpha+s+q)^{1/q}\Gamma(\alpha+1)}$$
$$\times\left\{\left((\alpha+s+1)(\alpha+3)|f'(a)|^q+2^{1-s}(\alpha+1)(\alpha+2)|f'(b)|^q\right)^{1/q}\right.$$
$$\left.+\left(2^{1-s}(\alpha+1)(\alpha+2)|f'(a)|^q+(\alpha+s+1)(\alpha+3)|f'(b)|^q\right)^{1/q}\right\}. \qquad (4.2.2)$$

İspat. $t\in[a,b]$ olmak üzere $|f'|^q$ için $[a,b]$ aralığında $s\in(0,1]$, s-konvekslik uygulanırsa

$$|f'(t)|^q=\left|f'\left(\frac{b-t}{b-a}a+\frac{t-a}{b-a}b\right)\right|^q\leq\left(\frac{b-t}{b-a}\right)^s|f'(a)|^q+\left(\frac{t-a}{b-a}\right)^s|f'(b)|^q$$

yazlır. Buradan Lemma 4.1.7, power mean eşitsizliği ve $|f'|^{q}$' nun konveksliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
&\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)\left[J^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^{-}}g(a)+J^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^{+}}g(b)\right]-\left[J^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^{-}}(fg)(a)+J^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^{+}}(fg)(b)\right]\right| \\
\leq\ &\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left(\int_{a}^{\frac{a+b}{2}}\left|\int_{a}^{t}(s-a)^{\alpha-1}g(s)\,ds\right|dt\right)^{1-1/q} \\
&\times\left(\int_{a}^{\frac{a+b}{2}}\left|\int_{a}^{t}(s-a)^{\alpha-1}g(s)\,ds\right|\left|f'(t)\right|^{q}dt\right)^{1/q} \\
&+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left(\int_{\frac{a+b}{2}}^{b}\left|\int_{t}^{b}(b-s)^{\alpha-1}g(s)\,ds\right|dt\right)^{1-1/q} \\
&\times\left(\int_{\frac{a+b}{2}}^{b}\left|\int_{t}^{b}(b-s)^{\alpha-1}g(s)\,ds\right|\left|f'(t)\right|^{q}dt\right)^{1/q} \\
\leq\ &\frac{||g||_{\left[a,\frac{a+b}{2}\right],\infty}}{\Gamma(\alpha)}\left(\int_{a}^{\frac{a+b}{2}}\left|\int_{a}^{t}(s-a)^{\alpha-1}ds\right|dt\right)^{1-1/q} \\
&\times\left(\int_{a}^{\frac{a+b}{2}}\left|\int_{a}^{t}(s-a)^{\alpha-1}ds\right|\left|f'(t)\right|^{q}dt\right)^{1/q} \\
&+\frac{||g||_{\left[\frac{a+b}{2},b\right],\infty}}{\Gamma(\alpha)}\left(\int_{\frac{a+b}{2}}^{b}\left|\int_{t}^{b}(b-s)^{\alpha-1}ds\right|dt\right)^{1-1/q} \\
&\times\left(\int_{\frac{a+b}{2}}^{b}\left|\int_{t}^{b}(b-s)^{\alpha-1}ds\right|\left|f'(t)\right|^{q}dt\right)^{1/q} \\
\leq\ &\frac{1}{\alpha\Gamma(\alpha)}\left(\frac{(b-a)^{\alpha+1}}{2^{\alpha+1}(\alpha+1)}\right)^{1-1/q} \\
&\times\left\{\frac{||g||_{\left[a,\frac{a+b}{2}\right],\infty}}{(b-a)^{s/q}}\right. \\
&\times\left[\int_{a}^{\frac{a+b}{2}}\left((t-a)^{\alpha}(b-t)^{s}\left|f'(a)\right|^{q}+(t-a)^{\alpha+s}\left|f'(b)\right|^{q}\right)dt\right]^{1/q} \\
&+\frac{||g||_{\left[\frac{a+b}{2},b\right],\infty}}{(b-a)^{s/q}} \\
&\times\left.\left[\int_{\frac{a+b}{2}}^{b}\left((b-t)^{\alpha+s}\left|f'(a)\right|^{q}+(b-t)^{\alpha}(t-a)^{s}\left|f'(b)\right|^{q}\right)dt\right]^{1/q}\right\}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\left(\frac{(b-a)^{\alpha+1}}{2^{\alpha+1}(\alpha+1)}\right)^{1-1/q} \\
&\quad \times \left\{ \frac{||g||_{\left[a,\frac{a+b}{2}\right],\infty}}{(b-a)^{s/q}} \right. \\
&\quad \times \left[(b-a)^{\alpha+s+1}\beta_{1/2}(\alpha+1,s+1)\left|f'(a)\right|^q + \frac{(b-a)^{\alpha+s+1}}{2^{\alpha+s+1}(\alpha+s+1)}\left|f'(b)\right|^q\right]^{1/q} \\
&\quad + \frac{||g||_{\left[\frac{a+b}{2},b\right],\infty}}{(b-a)^{s/q}} \\
&\quad \left. \times \left[\frac{(b-a)^{\alpha+s+1}}{2^{\alpha+s+1}(\alpha+s+1)}\left|f'(a)\right|^q + (b-a)^{\alpha+s+1}\beta_{1/2}(\alpha+1,s+1)\left|f'(b)\right|^q\right]^{1/q} \right\} \\
&\leq \frac{(b-a)^{\alpha+1}||g||_{[a,b],\infty}}{2^{\alpha+1+\frac{s}{q}}(\alpha+1)^{1-1/q}(\alpha+s+q)^{1/q}\Gamma(\alpha+1)} \\
&\quad \times \left\{ \left(2^{\alpha+s+1}(\alpha+s+1)\beta_{1/2}(\alpha+1,s+1)\left|f'(a)\right|^q + \left|f'(b)\right|^q\right)^{1/q} \right. \\
&\quad \left. + \left(\left|f'(a)\right|^q + 2^{\alpha+s+1}(\alpha+s+1)\beta_{1/2}(\alpha+1,s+1)\left|f'(b)\right|^q\right)^{1/q} \right\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \frac{(b-a)^{\alpha+1}||g||_{[a,b],\infty}}{2^{\alpha+1+\frac{1}{q}}(\alpha+1)(\alpha+2)^{1/q}(\alpha+s+q)^{1/q}\Gamma(\alpha+1)} \\
&\quad \times \left\{ \left((\alpha+s+1)(\alpha+3)\left|f'(a)\right|^q + 2^{1-s}(\alpha+1)(\alpha+2)\left|f'(b)\right|^q\right)^{1/q} \right. \\
&\quad \left. + \left(2^{1-s}(\alpha+1)(\alpha+2)\left|f'(a)\right|^q + (\alpha+s+1)(\alpha+3)\left|f'(b)\right|^q\right)^{1/q} \right\}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 4.2.2 Eğer Teorem 4.2.2 de $s = 1$ alınırsa (4.2.2) eşitsizliği Teorem 4.1.8 de (4.1.24) eşitsizliğinin sol tarafını verir.

Teorem 4.2.3 $f : I \subseteq [0,\infty) \to \mathbb{R}$, I°' de diferansiyellenebilir bir fonksiyon, $a < b$, $f' \in L[a,b]$ ve $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ sürekli olsun. Eğer $|f'|^q$, $[a,b]$ aralığında ve $s \in (0,1]$, $q > 1$ için $s-$*konveks* ise kesirli integraller için aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir.

$$
\begin{aligned}
&\left| f\left(\frac{a+b}{2}\right)\left[J^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^-}g(a) + J^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^+}g(b)\right] - \left[J^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^-}(fg)(a) + J^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^+}(fg)(b)\right] \right| \\
&\leq \frac{(b-a)^{\alpha+1}||g||_{[a,b],\infty}}{2^{\alpha+1+\frac{s}{q}}(\alpha p+1)(\alpha+2)^{1/p}(s+1)^{1/q}\Gamma(\alpha+1)} \\
&\quad \times \left[\left(\left|f'(a)\right|^q\left(2^{s+1}-1\right) + \left|f'(b)\right|^q\right)^{1/q} \right. \\
&\quad \left. + \left(\left|f'(a)\right|^q + \left|f'(b)\right|^q\left(2^{s+1}-1\right)\right)^{1/q}\right] \qquad (4.2.3)
\end{aligned}
$$

burada $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

İspat. $|f'|^q$ için Lemma 4.1.7, Hölder eşitisizliği ve konvekslik uyguladığımızda;

$$\begin{aligned}
&\left| f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\left[J^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^-} g(a) + J^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^+} g(b)\right] - \left[J^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^-} (fg)(a) + J^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^+} (fg)(b)\right]\right| \\
\leq\ & \tfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\left[\int_a^{\frac{a+b}{2}} \left|\int_a^t (s-a)^{\alpha-1} g(s)\,ds\right| dt \right. \\
&\left. + \int_{\frac{a+b}{2}}^b \left|\int_t^b (s-a)^{\alpha-1} g(s)\,ds\right| |f'(t)|^q\,dt\right] \\
\leq\ & \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left(\int_a^{\frac{a+b}{2}} \left|\int_a^t (s-a)^{\alpha-1} g(s)\,ds\right|^p dt\right)^{1/p}\left(\int_a^{\frac{a+b}{2}} |f'(t)|^q\,dt\right)^{1/q} \\
&+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left(\int_{\frac{a+b}{2}}^b \left|\int_t^b (s-a)^{\alpha-1} g(s)\,ds\right|^p dt\right)^{1/p}\left(\int_{\frac{a+b}{2}}^b |f'(t)|^q\,dt\right)^{1/q} \\
=\ & \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left(\int_a^{\frac{a+b}{2}} \left|\int_a^t (s-a)^{\alpha-1} g(s)\,ds\right|^p dt\right)^{1/p} \\
&\times\left[\left(\int_a^{\frac{a+b}{2}} |f'(t)|^q\,dt\right)^{1/q} + \left(\int_{\frac{a+b}{2}}^b |f'(t)|^q\,dt\right)^{1/q}\right] \\
\leq\ & \frac{(b-a)^{\alpha+1}\,||g||_{[a,b],\infty}}{2^{\alpha+1+\frac{s}{q}}(\alpha p+1)(\alpha+2)^{1/p}(s+1)^{1/q}\,\Gamma(\alpha+1)} \\
&\times\left[\left(|f'(a)|^q\left(2^{s+1}-1\right)+|f'(b)|^q\right)^{1/q}\right. \\
&\left.+\left(|f'(a)|^q+|f'(b)|^q\left(2^{s+1}-1\right)\right)^{1/q}\right].
\end{aligned}$$

Hesapladığımız;

$$\begin{aligned}
\int_a^{\frac{a+b}{2}} \left|\int_a^t (s-a)^{\alpha-1} g(s)\,ds\right|^p dt &= \int_{\frac{a+b}{2}}^b \left|\int_t^b (s-a)^{\alpha-1} g(s)\,ds\right|^p dt \\
&= \frac{(b-a)^{\alpha p+1}}{2^{\alpha p+1}(\alpha p+1)\,\alpha^p}
\end{aligned}$$

$$\int_a^{\frac{a+b}{2}} |f'(t)|^q\,dt \leq \frac{b-a}{2^{s+1}(s+1)}\left[|f'(a)|^q\left(2^{s+1}-1\right)+|f'(b)|^q\right]$$

$$\int_{\frac{a+b}{2}}^b |f'(t)|^q\,dt \leq \frac{b-a}{2^{s+1}(s+1)}\left[|f'(a)|^q+|f'(b)|^q\left(2^{s+1}-1\right)\right].$$

Sonuç 4.2.3 Eğer (4.2.3) eşitsizliğinde $s=1$ alınırsa (4.1.25) eşitsizliği elde edilir.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu çalışmada, Lemma 4.1.7'de Set ve arkadaşlarının kesirli integraller yardımıyla vermiş oldukları özdeşlikten faydalanarak s-konveks fonksiyonlar için yeni Hermite-Hadamard-Fejer tipli eşitsizlikler sunulmuştur. Bu sonuçlar 4'üncü bölümün ikinci kısmında verilmiş ve "*E. Set, İ. İşcan, H.H. Kara, Hermite- Hadamard- Fejer type inequalities for s-convex function in the second sense via fractional integrals, Filomat, In Press*" [28] şeklinde yayına kabul edilmiş olup basım aşamasındadır. Konuyla ilgilenen araştırmacılar Lemma 4.1.7'den ve quasi-konvekslik, h-konvekslik, m-konvekslik, (α, m)-konvekslik ve φ-konvekslik gibi konveksliğin farklı sınıflarından faydalanarak Hermite-Hadamard-Fejer tipli yeni integral eşitsizlikleri elde edebilirler.

KAYNAKLAR

[1] Adams, R.A. and Essex, C., 2010. Calculus A Complete Course, Pearson Canada Inc., Toronto, Ontario, 934 .

[2] Anton.H., 1994. Elementary Linear Algebra. Jhon Wiley & Sons, Inc..

[3] Azpeitia, A.G., 1994. Convex functions and the Hadamard inequality, Rev. Colombiana Mat., 28 7-12.

[4] Bayraktar, M., 2000. Fonksiyonel Analiz, ISBN 975-442-035-1 .

[5] Beckenback E.F., Bellman R., 1961. Inequalities, Springer-Verlag, Berlin.

[6] Breckner. W.W., 1978. Stetigkeitsaussagenf ureine Klass ever all gemeinerter konvexer funktionen in topologisc henlinearen Raumen, Pupl. Inst. Math., 23 13-20.

[7] Dragomir S.S., Fitzpatrick S., 1999. The Hadamard's inequality for s-convex functions in the second sense, Demonstratio Math. 32 (4) 687–696.

[8] Dragomir S.S., Pearce C.E.M., 2000. Selected topics on Hermite–Hadamard inequalities and applications, in: RGMIA Monographs, Victoria University. Online: http://www.staff.vu.edu.au/RGMIA/monographs/hermite_hadamard.html.

[9] Dragomir S.S., Agarwal R.P., 1998. Two inequalities for differentiable mappings and applications to special means of real numbers and to trapezoidal formula, Appl. Math. lett. 11(5) 91-95.

[10] Fejér L., 1906. Über die Fourierreihen, II, Math. Naturwiss, Anz. Ungar. Akad. Wiss., 369–390. (In Hungarian).

[11] Hardy G., Littlewood J.E. and Polya G., 1952. Inequalities, 2nd Ed., Cambridge University Press.

[12] Hudzik H., Maligranda L., 1994. Some remarks on s-convex functions, Aequationes Math. 48 100–111.

[13] İşcan İ., 2015. Hermite-Hadamard-Fejer type inequalities for convex function via fractional integrals, Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math.. 60(3) 355-366.

[14] Kadıoğlu, E., Kamali, M., 2013. Genel Matematik, 8. Baskı, Kültür Eğitim Vakfı Yayınevi, Erzurum.

[15] Kırmacı U.S., 2004. Inequelities for differentiable mappings and applications to special means of real numbers and to midpoint formula, Appl. Math. Comput. 147 (1) $137-146$

[16] Mitrinović, D.S., 1970. Analytic Inequalities, Springer-Verlag, Berlin.

[17] Mitrinović, J.E. and Fink, A.M. 1993. Classical and New Inequalities in Analysis. Kluwer Academic Publishers, 740, UK.

[18] Niculescu, C.P. and Persson, L.E., 2006. Convex Functions and Their Applications. A Contemporary Approach, Springer Science+Business Media, Inc., 255 pp.

[19] Orlicz W. and Matuszewska W., 1968. A note on modular spaces. IX, Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Sci. Math. Astronom. Phys. 801-808. MR 39:3278

[20] Pachpatte B.G., 2005. Mathematical Inequalities, Elsevier B.V., Amsterdam, The Netherlands .

[21] Pečarić J.E., F. Proschan, Tong Y.L., 1992. Convex Functions, Partial Orderings, and Statistical Applications, Academic Press, Inc, San Diego.

[22] Prudnicov A.P., Brychkov Y.A. and Marichev O.I., 1981. Integral and series. In: Elementary Functions,. Nauka, Moscow.

[23] Samko S.G., Kilbaş A.A., Marichev O.I., 1993. Fractional Integrals and Derivatives-Theory and Applications, Gordon and Breach, Longhorne, PA.

[24] Sarıkaya M.Z., 2012. On new Hermite-Hadamard-Fejér type integral inequalities, Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math. 57(3) $377-386$.

[25] Sarıkaya M.Z., Set E., Yaldız H. and Başak N., 2013. Hermite-Hadamard's inequalities for fractional integralsand related fractional inequalities. Mathematical and Computer Modelling, 57(9) 2403-2407.

[26] Sarıkaya M.Z., Erden S., 2014. On the weighted integral inequalities for convex functions, RGMIA Res.Rep. Collection 17 12 Article 70.

[27] Set E., İşcan İ., Özdemir M.E. and Sarıkaya M.Z., 2014. On New Inequalities of Hermite-Hadamard-Fejér Type For Convex Functions Via Fractional Integrals, arXiv: 1409.5243v1 [math.CA] 18 Sep.

[28] Set E., İşcan İ., Kara H. H., 2016. Hermite-Hadamard-Fejer type inequalities for $s-$convex function in the second sense via fractional integrals, Filomat, In-press.

[29] Wang J., Zhu C. and Zhou Y., 2013. " New generalized Hermite-Hadamard type inequalities and applications to special means, J. Inequal. Appl., 2013 (325), 15 pages.

ÖZGEÇMİŞ

Adı-Soyadı	:	Hasan Hüseyin KARA
Doğum Yeri	:	Şalpazarı / Trabzon
Doğum Tarihi	:	15.11.1989
Medeni Hali	:	Evli
Bildiği Yabancı Dil	:	İngilizce
İletişim Bilgileri	:	Ordu Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü, h.huseyin.kara61@gmail.com
Lise	:	Samsun Mithat Paşa Lisesi, 2007
Lisans	:	Ordu Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü 2008-2013