T.C.
ORDU ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HİLBERT UZAYINDA OPERATÖR p, h VE GODUNOVA-LEVİN KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN HERMİTE-HADAMARD TİPLİ EŞİTSİZLİKLER VE SYNCHRONOUS, ASYNCHRONOUS FONKSİYONLAR İÇİN UYGULAMALAR

Seren SALAŞ

Bu tez,

Matematik Anabilim Dalında

Yüksek Lisans

derecesi için hazırlanmıştır

ORDU 2016

TEZ ONAY

Ordu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü öğrencisi Seren SALAŞ tarafından hazırlanan ve Yrd. Doç. Dr. Erdal ÜNLÜYOL danışmanlığında yürütülen "HİLBERT UZAYINDA OPERATÖR p, h VE GODUNOVA-LEVİN KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN HERMİTE-HADAMARD TİPLİ EŞİTSİZLİKLER VE SYNCHRONOUS, ASYNCHRONOUS FONKSİYONLAR İÇİN UYGULAMALAR" adlı bu tez, jürimiz tarafından 04 / 05/ 2016 tarihinde oy birliği / ~~oy çokluğu~~ ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Danışman	:	YRD. DOÇ. DR. ERDAL ÜNLÜYOL	
Başkan	:	DOÇ. DR. İMDAT İŞCAN MATEMATİK, GİRESUN ÜNİVERSİTESİ	İmza :
Üye	:	DOÇ. DR. ERHAN SET MATEMATİK, ORDU ÜNİVERSİTESİ	İmza :
Üye	:	YRD. DOÇ. DR. ERDAL ÜNLÜYOL MATEMATİK, ORDU ÜNİVERSİTESİ	İmza :

ONAY:

Bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulu'nun 20/05/2016 tarih ve 2016/ 248 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

30 / 05 / 2016

Enstitü Müdürü

Doç. Dr. Kürşat KORKMAZ

TEZ BİLDİRİMİ

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

İmza:

Seren SALAŞ

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirimlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

HİLBERT UZAYINDA OPERATÖR p, h VE GODUNOVA-LEVİN KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN HERMİTE-HADAMARD TİPLİ EŞİTSİZLİKLER VE SYNCHRONOUS, ASYNCHRONOUS FONKSİYONLAR İÇİN UYGULAMALAR

Seren SALAŞ
Ordu Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı, 2016
Yüksek Lisans Tezi, 52 sayfa.

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Erdal ÜNLÜYOL

Bu tez çalışması, 4 bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümünde, giriş ve literatür taraması, ikinci bölümde temel kavramlar ve üçüncü bölümde ise yapılan çalışmalar anlatılmaktadır. Üçüncü bölüm tezin özgün kısmı olup bu bölümde yapılan çalışmaların tamamı ilk defa burada ifade edilip, matematik literatürüne kazandırılmıştır. Yani, Hilbert uzayında Hermite-Hadamard Tipli Eşitsizlikler yardımıyla operatör p-konveks fonksiyonlar (S_pO), operatör h-konveks fonksiyonlar (ES_hO) ve operatör Godunova-Levin fonksiyon (S_QO) kavramları verilip, bu fonksiyon sınıflarının temel teorem ve sonuçları elde edilmiştir. Ayrıca Synchronous ve Asynchrounous fonksiyonlar için uygulamalar yapılmıştır. Dördüncü bölümde sonuçlar ve öneriler verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Hilbert uzayı; Hermite-Hadamard Eşitsizliği; operatör p-konveks, operatör h-konveks ve operatör Godunova-Levin fonksiyon; Synchronous ve Asynchrounous fonksiyonlar.

ABSTRACT

THE HERMITE-HADAMARD TYPE INEQUALITIES FOR OPERATOR p, h, AND GODUNOVA-LEVIN CONVEX FUNCTIONS, AND APPLICATIONS FOR SYNCHRONOUS, ASYNCHRONOUS FUNCTIONS IN HILBERT SPACE

Seren SALAŞ
Ordu University
Institute for Graduate Studies in Science and Technology
Department of Mathematics, 2016
MSc.Thesis, 52 pages.

Supervisor: Assist. Prof. Dr. Erdal ÜNLÜYOL

This thesis is consist of four chapters. In the first chapter, it is mentioned about the object of the thesis and previous studies in this area. In the second chapter, basic definitions and theorems that were used in thesis are given. In the third chapter, it is explained committed studies. This chapter is the original section of this thesis. All committed studies are firstly given in here and brought in the mathematical literature. That is, definitions, theorems and basic results of operator p-convex functions (S_pO), operator h-convex functions (ES_hO), and operator Godunova-Levin functions (S_QO), in Hilbert spaces via Hermite-Hadamard type inequalities are firstly given in this thesis. Moreover, it is applied to Synchronous and Asynchronous Functions for these operator convex function class. In the fourth chapter, it is given some results and propositions.

Keywords: Hilbert Space; Hermite-Hadamard inequality; operator p-convex, operator h-convex, operator Godunova-Levin functions; Synchronous and Asynchronous functions.

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca bilgi ve deneyimleriyle yolumu açan danışman hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Erdal ÜNLÜYOL' a en samimi duygularım ile teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca, tez yazımım sırasında teknik desteğini esirgemeyen Sayın Yrd. Doç. Dr. Serkan Karataş'a en içten şükranlarımı sunarım.

Lisans ve yüksek lisans eğitim-öğretim süresince bilgilerinden istifade ettiğim Ordu Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü öğretim üyeleri ve araştırma görevlilerine teşekkür ederim.

Eğitim hayatım süresince maddi-manevi desteklerini esirgemeyen aileme de teşekkürü borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR

$\mathbb{R}$	:	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	:	Kompleks sayılar kümesi
$< \cdot, \cdot >$	:	İç çarpım fonksiyonu
H	:	Hilbert uzayı
$L(H)$	:	H'dan H' ya lineer operatörlerin kümesi
$B(H)$	:	H'dan H' ya sınırlı lineer operatörlerin kümesi
$B(H)^+$	:	H'dan H' ya sınırlı pozitif lineer operatörlerin kümesi
$\rho(A)$	:	A operatörün rezolvent kümesi
$Sp(A), \sigma(A)$	:	A operatörün spekturumu
$C\big(Sp(A)\big)$	:	A operatörün spekturumu üzerinde tanımlı tüm sürekli fonksiyonların kümesi
S_pO	:	Operatör p-konveks fonksiyonlar sınıfı
ES_hO	:	Operatör h-konveks fonksiyonlar sınıfı
S_QO	:	Operatör Godunova-Levin fonksiyon sınıfı

1. GİRİŞ

Eşitsizlik Teorisi'nin temellerini $XVIII.$ ve $XIX.$ yüzyıllarda K. F. Gauss (1775 – 1855), A. L. Cauchy (1785 – 1857) ve P. L. Chebyshev (1821 – 1894) gibi matematikçiler atmışlardır. Fakat modern anlamda "Eşitsizlik Teorisi" alanında yapılan ilk çalışma 1934 yılında G. H. Hardy, J. E. Littlewood ve G. Polya tarafından yazılan "Inequalities" adlı kitaptır. Bu çalışmayı 1961 yılında E. F. Beckenbach ve R. Bellman'ın yine aynı ismi taşıyan "Inequalities" kitabı takip eder. Daha sonra 1965 yılında J. Szarski'nin "Differantial Inequalities", 1991 yılında Mitrinović ve ark."Inequalities Involving Functions and Their Derivatives", 1963 yılında yine Mitrinović ve ark.'ın "Classical and New Inequalities in Analysis" isimli kitapları izler. Bunların dışında S. S. Dragomir, R. P. Agarwal, G. V. Milovanovic, C. P. Niculescu, C. E. M. Pearce, J. E. Pećarić, A. M. Fink, M. E. Özdemir, M. Z. Sarıkaya, E. Set, İ. İşcan, A. O. Akdemir, M. Tunç gibi bilim insanlarının da bir çok çalışması literatürde mevcut.

Konvekslik kavramının ortaya çıkışı Arşimet'in, çemberin içine ve etrafına çizdiği düzgün çokgenler yardımıyla yaptığı 'π' sayısı hesabına kadar dayanır. Bu çalışmaları sırasında Arşimet, herhangi bir konveks şeklin çevresinin, etrafına çizilen bütün diğer konveks şekillerin çevresinden daha küçük olduğunu fark etmiştir. Böylece konvekslik kavramı konveks şekiller etrafında gelişmiştir. Euler ve Descartes konveks çokgenler ile ilgili formüller üzerinde çalışmıştır. Daha sonra 1841'de Cauchy, konvekslik hakkında bazı özellikler vermiştir. Konveksliğin modern tanımı eşitsizlik tanımı içerdiğinden konveksliğin eşitsizliklerle birlikte çalışılması da doğal bir sonuç olmuştur.

Konveks fonksiyonların tarihi çok eskiye dayanmakla birlikte $XIX.$ yüzyılın sonları olarak gösterilebilir. 1893'de Hadamard'ın çalışmasında açıkça belirtilmese de bu türden fonksiyonların temellerinden bahsedilmektedir. Bu tarihten sonra literatürde konveks fonksiyonları ima eden sonuçlara rastlanılmasına rağmen, konveks fonksiyonların ilk kez sistemli olarak 1905 ve 1906 yıllarında J. L. W. V. Jensen tarafından çalışılmıştır. Jensen'in bu, çalışmalarından itibaren Konveks Fonksiyonlar Teorisi hızlı bir gelişme göstermiştir. Sadece konveks fonksiyonlar için eşitsizlikleri içeren ilk kaynak 1987 yılında Pečarič tarafından yazılan "Convex Functions: Inequalities" isimli kitaptır. Ayrıca 1973 yılında A. W. Roberts ve B. E. Vorberg "Convex Functions", 1992 yılında Pečarič ve ark. "Convex Functions, Partial Ordering and Statistical Applications", 2006 yılında C. Niculescu ve L. E. Persson "Convex Functions and Their Applications, A Contempoarary Approach" gibi eserler konveks fonksiyonlar üzerinde eşitsizlikle ilgili yapılan çalışmalardır. Bu çalışmaların bir kısmını integral eşitsizlikleri oluşturmaktadır.

Niculescu ve Persson'a göre konveksliğin teorik ve uygulamalı matematik alanlarında geniş yer bulmasının iki önemli sebebi vardır:

1. Sınır değerlerinin birinde bir maksimum değeri vardır,
2. Her yerel minimum aynı zamanda global minimumdur. Ayrıca kesin konveks bir fonksiyonunun en fazla bir minumumu vardır.

1978 yılında R. Bellman, Almanya' da düzenlenen "Second International Conference on General Inequalities" isimli konferansta: "Neden Matematiksel Eşitsizlikler?" diye sorulan soruya şu cevabı vermiştir: Eşitsizlik çalışmak için üç neden vardır. Bunlar:

1. Pratik Nedenler,
2. Teorik Nedenler,
3. Estetik Nedenlerdir.

Pratik nedenler açısından bakıldığında, bir çok araştırmada bir niceliği diğer bir nicelikle sınırlandırmak karşımıza çıkmaktadır. Klasik Eşitsizlikler de bu şekilde ortaya çıkmıştır. Teorik nedenler açısından bakıldığında çok basit sorular sorularak tüm temel teoremler oluşturabilir. Örneğin, negatif olmayan bir niceliğin ne zaman bir diğerini kapsadığı sorulabilir ve bu basit soru ile Pozitif Operatörler Teorisi ve Diferansiyel Eşitsizlikler Teorisi kurulur. Son olarak estetik nedenler açısından bakıldığından genelde resim, müzik ve matematiğin bazı parçalarının uyumlu olduğu görülür. Elde edilen eşitsizliklerin göze hitap etmesi de eşitsizlikleri çekici hale getirir.

Biz bu çalışmada Eşitsizlik Teorisi'nin önemli bir kolu olan Hermite-Hadamard Tipli Eşitsizliklerin, Hilbert uzayında sınırlı, öz-eşlenik operatörlerin sürekli fonksiyonları için elde edilen bazı özel eşitsizliklerini inceleyeceğiz. Bu incelemeler sayesinde Lineer Operatörler Teorisi ile Matematiksel Eşitsizliklerin çeşitli alanlarında çalışma yapmak ve kendi alanlarında uygulamak isteyen araştırmacılara yardımcı olacaktır. Bu alanda yapılan önemli çalışmalardan bir tanesi 2011 yılında S. S. Dragomir tarafından yapılmıştır. Ayrıca

H. H. Bauschke ve P. L. Combetles tarafından 2011 yılında "Convex Analysis and Monotone Operator Theory in Hilbert Spaces", 2012 yılında S. S. Dragomir tarafından "Operator Inequalities of Ostrowski and Trapezoidal Type" ve yine 2012 yılında " Operator Inequalities of the Jensen, Čebyšev and Grüss Type" adlı kitaplar mevcuttur. Literatürde S. S. Dragomir, A. G. Ghazanfari, E. Unluyol, S. Salaş , Y. Erdaş ve daha bir çok yazar bu alanda çalışmaktadır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde bazı temel tanım, teorem ve örnekler verilecektir.

Tanım 2.0.1 (**Lineer Uzay**) L boş olmayan bir küme ve F bir cisim olsun. $+ : L \times L \to L$ ve $. : F \times L \to L$ işlemleri tanımlansın. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa L ye F cismi üzerinde lineer uzay (vektör uzayı) denir.

A) L, "+" işlemine göre değişmeli bir gruptur. Yani,

G1. Her $x, y \in L$ için $x + y \in L$ dir.
G2. Her $x, y, z \in L$ için $x + (y + z) = (x + y) + z$dir.
G3. Her $x \in L$ için $x + \theta = \theta + x = x$ olacak şekilde $\theta \in L$ vardır.
G4. Her $x \in L$ için $x + (-x) = (-x) + x = \theta$ olacak şekilde $-x \in L$ vardır.
G5. Her $x, y \in L$ için $x + y = y + x$ dir.

B) $x, y \in L$ ve $\alpha, \beta \in F$ omak üzere aşağıdaki şartlar sağlanır:

L1. $\alpha x \in L$ dir.
L2. $\alpha.(x + y) = \alpha.x + \alpha.y$ dir.
L3. $(\alpha + \beta)x = \alpha.x + \beta.x$ dir.
L4. $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta.x)$ dir.
L5. $1.x = x$ dir. (Burada 1, F nin birim elemanıdır).

$F = \mathbb{R}$ ise L ye reel lineer uzay, $F = \mathbb{C}$ ise L ye karmaşık lineer uzay adı verilir.

Tanım 2.0.2 Lineer uzaylarda tanımlı dönüşümlere operatör denir.

Tanım 2.0.3 F bir cisim ve V ve W, F cismi üzerinde iki lineer uzay olsun. $u, v \in V$ ve $c \in F$ olmak üzere $T : V \to W$ dönüşümü,
a $T(u + v) = T(u) + T(v)$
b $T(cu) = cT(u)$ şartlarını sağlıyorsa T ye V üzerinde lineer dönüşüm denir .

Tanım 2.0.4 (**Konveks Küme**): L bir lineer uzay $A \subseteq L$ ve $x, y \in A$ keyfi olmak üzere

$$B = \{z \in L : z = \alpha x + (1 - \alpha)y, \;\; 0 \le \alpha \le 1\} \subseteq A$$

ise A kümesine konveks küme denir. Eğer $z \in B$ ise $z = \alpha x + (1 - \alpha)y$ eşitliğindeki x ve y nin katsayıları için $\alpha + (1 - \alpha) = 1$ bağıntısı her zaman doğrudur. Bu sebeple konveks küme tanımındaki $\alpha, 1-\alpha$ yerine $\alpha+\beta=1$ şartını sağlayan ve negatif olmayan α, β reel sayılarını alabiliriz. Geometrik olarak B kümesi uç noktaları x ve y olan bir doğru parçasıdır. Bu durumda sezgisel olarak konveks küme, boş olmayan ve herhangi iki noktasını birleştiren doğru parçasını ihtiva eden kümedir.

Tanım 2.0.5 (**Konveks Fonksiyon**): I, $\mathbb{R}$'de bir aralık ve $f : I \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere her $x, y \in I$ ve $\alpha \in [0,1]$ için,

$$f(\alpha x+(1-\alpha)y) \quad \leq \quad \alpha f(x)+(1-\alpha)f(y) \tag{2.0.1}$$

şartını sağlayan, f fonksiyonuna konveks fonksiyon denir. Eğer (3.7.4) eşitsizliği $x \neq y$ ve $\alpha \in (0,1)$ için kesin ise bu durumda f fonksiyonuna kesin konvekstir denir.

Teorem 2.0.1 [1] f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında konveks ise
a. $f, (a,b)$ aralığında süreklidir ve
b. $f, [a,b]$ aralığında sınırlıdır.

Teorem 2.0.2 (**Hermite-Hadamard Eşitsizliği**): I, $\mathbb{R}$ de bir aralık, $a, b \in I$ ve $a<b$ olmak üzere $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konveks bir fonksiyon olsun. Bu taktirde,

$$f\Big(\frac{a+b}{2}\Big) \quad \leq \quad \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{2.0.2}$$

olur.

Tanım 2.0.6 (**h-Konveks Fonksiyon**): $h \neq 0$ ve $h : J \to \mathbb{R}$ negatif olmayan bir fonksiyon olsun. Her $x, y \in I$, $\alpha \in (0,1)$ için,

$$f(\alpha x+(1-\alpha)y) \leq h(\alpha)f(x)+h(1-\alpha)f(y)$$

şartını sağlayan negatif olmayan $f : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna h-konveks fonksiyon denir. Burada I ve J, $\mathbb{R}$ de iki aralık, $(0,1) \subseteq J$ dir.

Tanım 2.0.7 (**İç-çarpım uzayı**): $F(\mathbb{R}\,\text{veya}\,\mathbb{C})$ olmak üzere, X bir vektör uzayı olsun. $\langle\cdot,\cdot\rangle : X \times X \to F$ dönüşümü aşağıdaki özelliklere sahip ise " $\langle\cdot,\cdot\rangle$" dönüşümüne X üzerinde bir iç-çarpım, $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ikilisine de "iç-çarpım" uzayı denir:

1. $\forall x \in X$ için $\langle x,x\rangle \geq 0$ ve $\langle x,x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0_X$;

2. $\forall x, y \in X$ için $\langle x,y\rangle = \overline{\langle y,x\rangle}$;

3. $\forall x, y \in X$ ve $\alpha \in F$ için $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$;

4. $\forall x, y, z \in X$ için $\langle x + y, z\rangle = \langle x, y\rangle + \langle y, z\rangle$.

Not 2.0.1 $F = \mathbb{R}$ olması halinde 2. özellik $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$ olur. İç-çarpım tanımını kullanarak aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu kolayca görebiliriz.

1. $\forall x, y, z \in X$ ve $\forall \alpha, \beta \in F$ için $\langle \alpha x + \beta y, z\rangle = \alpha\langle x, y\rangle + \beta\langle y, z\rangle$,

2. $\forall x, y \in X$ ve $\forall \alpha \in F$ için $\langle x, \alpha y\rangle = \overline{\alpha}\langle x, y\rangle$;

3. $\forall x, y \in X$ ve $\forall \alpha, \beta \in F$ için $\langle x, \alpha y + \beta z\rangle = \overline{\alpha}\langle x, y\rangle + \overline{\beta}\langle y, z\rangle$.

Tanım 2.0.8 (**Norm**): $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ bir iç çarpım uzayı olsun. Bir $x \in X$ vektör normu

$$\| x \| = \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}} \tag{2.0.3}$$

şeklinde tanımlanan reel sayıya denir.

Tanım 2.0.9 (**Hilbert Uzayı**): $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ bir iç çarpım uzayı olsun. Eğer bu iç-çarpım uzayı (2.0.3) normuna göre tam ise, yani $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ iç-çarpım uzayı içindeki her Cauchy Dizisi (2.0.3) norma göre yakınsak ise bu iç çarpıma bir "Hilbert Uzayı" denir.

Tanım 2.0.10 (**Birim Operatör**): $A : X \to X$ operatörü verilsin. Eğer her $x \in X$ için $Ax = x$ ise A operatörüne birim(özdeşlik) operatör denir. I, E ve I_X sembollerinden biriyle gösterilir.

Tanım 2.0.11 (**Sınırlı Operatör**): X ve Y iki normlu uzay olsun. A ise tanım kümesi $D(A) \subset X$ ve görüntü kümesi $R(A) \subset Y$ olan bir operatör olsun. Eğer A operatörü $D(A)$ 'nın X' de sınırlı her kümesine $R(A)$'nın Y de sınırlı bir kümesini karşılık getiriyorsa A' ya "sınırlı bir operatör" denir. Başka bir deyişle

$$\| Ax \|_Y \leq c \| x \|_X, \text{ her } x \in D(A)$$

olacak şekilde sabit bir $c > 0$ sayısı varsa, A'ya "sınırlı bir operatör"denir.

Tanım 2.0.12 (**Lineer Operatör**): X ve Y aynı F cismi üzerinde iki lineer uzay ve $A : X \to Y$ operatörü verilsin. Eğer $D(A)$, X' in bir alt uzayı ve

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y), \ \forall x, y \in D(A) \ ve \ \forall \alpha, \beta \in F$$

ise A'ya "lineer operatör"denir.

Tanım 2.0.13 (**Eşlenik ve Öz-eşlenik Operatör**): A, H Hilbert uzayında sınırlı lineer bir operatör olsun. Eğer her $f, g \in D(A) \subset H$ için

$$\langle Af, g\rangle = \langle f, A^* g\rangle$$

sağlanıyorsa A^* a A'nın "eşlenik operatörü"denir.

Eğer $D(A) = D(A^*)$ ve $A = A^*$ ise bu A' ya özeşlenik operatör denir.

Tanım 2.0.14 (**Rezolventa**): H bir Hilbert uzayı ve $A : D(A) \subset H \to H$ bir lineer operatör olsun.

$$\rho(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : (A - \lambda E)^{-1} \in L(H)\}$$

kümesine A operatörünün "regüler değerler kümesi" veya "rezolvent kümesi" denir.

$\lambda \in \rho(A)$ olmak üzere $R(\lambda; A) = (A - \lambda E)^{-1}$ operatorüne A operatorünün "rezolventası" veya "çözücü operatörü" adı verilir.

Tanım 2.0.15 (**Spektrum**): H bir Hilbert uzayı olsun.

$$Sp(A) = \sigma(A) := \mathbb{C} \setminus \rho(A)$$

kümesine A operatörünün "spektrumu " denir. A operatörünün spektrum kümesi "$\sigma(A)$" veya "$Sp(A)$" ile göstereceğiz.

Tanım 2.0.16 A, $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ kompleks bir Hilbert uzayı üzerinde keyfi bir özeşlenik lineer operatör olsun. $C\big(Sp(A)\big)$, A operatörünün spektrumu üzerinde tanımlı tüm sürekli fonksiyonların kümesini göstersin. Gelfand dönüşümü yardımıyla aşağıdaki özellikleri yazılan Φ ile $C\big(Sp(A)\big)$ kümesi arasında bir $*$-izometrik izomorfizim vardır. Ayrıca H üzerinde 1_H birim operatörü ve A operatörü tarafından üretilen bir $C^*(A)$ cebiri vardır[2]. Keyfi $f, g \in C\big(Sp(A)\big)$ ve $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ için

1. $\Phi(\alpha f + \beta g) = \alpha\Phi(f) + \beta\Phi(g)$;
2. $\Phi(fg) = \Phi(f)\Phi(g)$ ve $\Phi(\overline{f}) = \Phi(f)^*$;
3. $\|\Phi(f)\| := \|f\| := \sup_{t\in Sp(A)} |f(t)|$;
4. $\Phi(f_0) = 1_H$ ve $\Phi(f_1) = A$ burada $f_0(t) = 1$ ve $f_1(t) = t$ için $t \in Sp(A)$.

Şimdi bir operatörün, bir fonksiyon altındaki görüntüsünün ne anlama geldiğini ifade edelim.

Tanım 2.0.17 A, $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ kompleks bir Hilbert uzayı üzerinde keyfi bir özeşlenik lineer operatör olsun. $C\big(Sp(A)\big)$, A operatörünün spektrumu üzerinde tanımlı tüm sürekli fonksiyonların kümesini ve Φ de tanım (2.0.16) deki fonksiyon olsun. Bu durumda her $f \in C\big(Sp(A)\big)$ için

$$f(A) := \Phi(f)$$

şeklinde tanımlanan ifadeye keyfi bir A özeşlenik operatörünün sürekli fonksiyonel hesabı denir.

Tanım 2.0.18 (**Operatörlerde Sıralama**): A ve B, H Hilbert uzayı üzerinde iki özeşlenik operatör olsun.

1. $A \leq B \Leftrightarrow \langle Ax, x \rangle \leq \langle Bx, x \rangle \ \forall x \in H$;
2. $A \geq 0$ ise A operatörüne pozitiftir denir.

Not 2.0.2 Eğer A özeşlenik bir operatör ve f de $Sp(A$ üzerinde tanımlı reel değerli sürekli bir fonksiyon ise, bu durumda $t \in Sp(A)$ için $f(t) \geq 0$ dır. Buradan $f(A) \geq 0$, yani $f(A)$ H Hilbert uzayı üzerinde pozitif bir operatördür. İlaveten eğer f ve g, $Sp(A)$ üzerinde iki fonksiyon ise aşağıdaki önemli özelliği sağlanır. Her $t \in Sp(A)$ için

$$f(t) \geq g(t) \text{ dir. Buradan } f(A) \geq g(A)$$

Teorem 2.0.3 [4] A, H Hilbert uzayı üzerinde sınırlı özeşlenik bir operatör olsun. Bu durumda aşağıdakiler doğrudur.

$$m := \inf_{\|x\|=1} \langle Ax, x \rangle = \max\{\alpha \in \mathbb{R} | \alpha E \leq A\};$$
$$M := \sup_{\|x\|=1} \langle Ax, x \rangle = \min\{\alpha \in \mathbb{R} | A \leq \alpha E\};$$

ve

$$\|A\| = \max\{\|m\|, \|M\|\}.$$

Ayrıca $m, M \in Sp(A)$ ve $Sp(A) \subset [m, M]$.

Tanım 2.0.19 (**Operatör Konveks**): A ve B, spektrumları $I \subset \mathbb{R}$ da olan keyfi özeşlenik operatörler ve $\lambda \in [0, 1]$ olsun. Bu durumda,

$$f((1-\lambda)A + \lambda B) \leq (1-\lambda)f(A) + \lambda f(B)$$

eşitsizliğini sağlayan, I aralığı üzerinde tanımlı, reel değerli sürekli fonksiyona operatör konveks denir.

3. YAPILAN ÇALIŞMALAR

Tezin bu bölümünde yapılan tüm çalışmalar uluslararası bir makalede [15], uluslararası sempozyumlarda [21], [23] ve ulusal bir sempozyumda [20] sunulmuş olup, tamamı özgün bir çalışmadır.

3.1 Hilbert Uzayında Operatör p-Konveks Fonksiyonlar İçin Hermite-Hadamard Tipli Eşitsizlikler

Aşağıdaki tanım literatüre ilk defa Seren Salaş tarafından kazandırılmıştır.

Tanım 3.1.1 A ve B, spektrumları I'da olan sınırlı pozitif operatör olsunlar. Eğer $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonu her $\alpha \in [0,1]$ için,

$$f\big(\alpha A + (1-\alpha)B\big) \leq f(A) + f(B) \tag{3.1.1}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, bu f fonksiyonuna, I aralığı üzerinde operatör p-konveks fonksiyon denir.

Not 3.1.1 Bundan sonra, $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu bir operatör p-konveks fonksiyon ise, bu durumu $f \in S_pO$ sembolü ile göstereceğiz.

Lemma 3.1.1 K, $B(H)^+$ kümesinin konveks bir alt kümesi olsun. Eğer $f \in S_pO$ ise, her $A \in K$ için $f(A)$ pozitiftir.

İspat. $A \in K$ ve $f \in S_pO$ için

$$f(A) = f\left(\frac{A}{2} + \frac{A}{2}\right) \leq f(A) + f(A) = 2f(A)$$

$$0 \leq f(A)$$

olup, $f(A)$ pozitiftir.

Moslehian ve Najafi [7] pozitif operatörler için aşağıdaki teoremi ispat etmişlerdir.

Teorem 3.1.1 [7] $A, B \in B(H)^+$ olsun. $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, negatif olmayan tüm operatör fonksiyonlar için $AB + BA$-nın pozitif olabilmesi için gerekli ve yeterli koşul

$$f(A+B) \leq f(A) + f(B)$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır.

Dragomir [8], operatör konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard tipli eşitsizliklerle ilgili aşağıdaki teoremi ispat etmiştir.

Teorem 3.1.2 [8] $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bir operatör konveks fonksiyon olsun. Bu durumda spektrumu I' da olan keyfi A ve B öz eşlenik operatörleri için aşağıdaki eşitsizlikler doğrudur.

$$\begin{aligned} f\left(\frac{A+B}{2}\right) &\le \frac{1}{2}\left[f\left(\frac{3A+B}{4}\right)+f\left(\frac{A+3B}{4}\right)\right] \\ &\le \int_0^1 f\Big((1-t)A+tB\Big)dt \\ &\le \frac{1}{2}\left[f\left(\frac{A+B}{2}\right)+\frac{f(A)+f(B)}{2}\right] \\ &\le \frac{f(A)+f(B)}{2}. \end{aligned}$$

X bir vektör uzayı ve $x \neq y$, $x, y \in X$ olsun.

$$[x, y] := (1-t)x + ty$$

$t \in [0, 1]$ şeklinde bir parça tanımlayalım.

$f : [x, y] \to \mathbb{R}$ fonksiyonunu göz önüne alalım.

$$g(x, y)(t) := f((1-t)x + ty)$$

$t \in [0, 1]$ şeklinde $g(x, y) : [0, 1] \to \mathbb{R}$ fonksiyonunu tanımlayalım.

Literatürden biz biliyoruz ki, f fonksiyonunun $[x, y]$ üzerinde konveks olabilmesi için gerekli yeter koşul $g(x, y)(.)$ fonksiyonunun $[0, 1]$ kapalı aralığı üzerinde konveks olmasıdır. Bir $[x, y]$ parçası üzerinde tanımlı keyfi konveks fonksiyonlar için aşağıdaki şekilde verilen ve Hermite-Hadamard Eşitsizliği olarak bilinen eşitsizlik elde edilir:

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \le \int_0^1 f((1-t)x + ty)dt \le \frac{f(x)+f(y)}{2}.$$

Lemma 3.1.2 $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olsun. $A, B \in K \subseteq B(H)^+$ pozitif keyfi iki operatör için

$$[A, B] := \{(1-t)A + tB,\ t \in [0, 1]\}$$

şeklinde, bir parçalanışı tanımlayalım. Burada K, spektrumları I'da olan pozitif operatörlerin kümesidir. Bu durumda f'nin operatör p-konveks olabilmesi için gerekli ve yeterli koşul

$$\varphi_{x,A,B}(t) := \Big\langle f((1-t)A + tB)x, x\Big\rangle$$

şeklinde $\varphi_{x,A,B} : [0,1] \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun her $x \in H$, $\|x\| = 1$ için $[0,1]$ aralığı üzerinde operatör p-konveks olmadır.

İspat. f fonksiyonu $[A,B]$ parçalanışı üzerinde operatör p-konveks olduğundan, her $t_1, t_2 \in [0,1]$ ve $\alpha \in [0,1]$ için, aşağıdaki eşitsizlikten ispat tamamlanır.

$$\begin{aligned} \varphi_{x,A,B}(\alpha t_1 + (1-\alpha)t_2) &= \big\langle f((1-(\alpha t_1 + (1-\alpha)t_2)A + (\alpha t_1 + (1-\alpha)t_2)B)x, x\big\rangle \\ &= \big\langle f(\alpha[(1-t_1)A + t_1 B] + (1-\alpha)[(1-t_2)A + t_2 B])x, x\big\rangle \\ &\leq \big\langle f((1-t_1)A + t_1 B)x, x\big\rangle + \big\langle f((1-t_2)A + t_2 B)x, x\big\rangle \\ &\leq \varphi_{x,A,B}(t_1) + \varphi_{x,A,B}(t_2) \end{aligned}$$

Teorem 3.1.3 f bir operatör p-konveks fonksiyon olsun. Spektrumları I-da olan, tüm pozitif A ve B operatörleri için

$$\frac{1}{2} f\left(\frac{A+B}{2}\right) \leq \int_0^1 f\big(tA + (1-t)B\big)dt \leq \big[f(A) + (B)\big] \tag{3.1.2}$$

eşitsizliği doğrudur.

İspat. $x \in H$, $\|x\| = 1$, $t \in [0,1]$ ve $\big\langle Ax, x\big\rangle \in Sp(A) \subseteq I$, $\big\langle Bx, x\big\rangle \in Sp(B) \subseteq I$ olduğundan aşağıdaki eşitliği yazabiliriz.

$$\big\langle((1-t)A + tB)x, x\big\rangle = (1-t)\big\langle Ax, x\big\rangle + t\big\langle Bx, x\big\rangle \in I, \tag{3.1.3}$$

f'nin sürekliliği ve (3.1.3) eşitsizliğinden

$$\int_0^1 f\big(tA + (1-t)B\big)dt$$

integrali vardır.

$f \in S_p O$ olduğundan, $t \in [0,1]$ ve $A, B \in K$ için

$$f\big(tA + (1-t)B\big) \leq f(A) + f(B) \tag{3.1.4}$$

eşitsizliği doğrudur.

(3.1.4) eşitsizliğinin her iki tarafı $[0,1]$ üzerinden integrali alınırsa aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz.

$$\int_0^1 f\big(tA + (1-t)B\big)dt \le f(A) + f(B)$$

(3.1.2) eşitsizliğinin sol tarafının ispatı için

$$f\left(\frac{A+B}{2}\right) \le f\big(tA + (1-t)B\big) + f\big((1-t)A + tB\big) \quad (3.1.5)$$

doğru olan eşitsizliğini göz önüne alalım. $t \in [0,1]$ üzerinde (3.1.5) eşitsizliğinin integralini alıp ve

$$\int_0^1 f\big(tA + (1-t)B\big)dt = \int_0^1 f\big((1-t)A + tB\big)dt$$

eşitliğini kullanarak (3.1.2)'ın sol kısmının da ispatı tamamlanmış olur.

3.2 Çarpım Durumunda İki Operatör p-Konveks Fonksiyonlar İçin Hermite-Hadamard Tipli Eşitsizlikler

f ve g iki operatör p-konveks fonksiyon olsun. Spektrumu $I \subseteq \mathbb{R}$ da olan tüm $A, B \in K \subseteq B(H)^+$ operatörleri için aşağıdaki şekilde H Hilbert uzayı üzerinde reel değerli fonksiyonları tanımlayalım.

$$M(A,B)(x) = \langle f(A)x, x\rangle\langle g(A)x, x\rangle + \langle f(B)x, x\rangle\langle g(B)x, x\rangle \ (x \in H),$$

$$N(A,B)(x) = \langle f(A)x, x\rangle\langle g(B)x, x\rangle + \langle f(B)x, x\rangle\langle g(A)x, x\rangle \ (x \in H).$$

$$P(A,B)(x) = \langle [f(A)g(A) + f(B)g(B)]x, x\rangle \ (x \in H),$$

Teorem 3.2.1 f ve g iki operatör p-konveks fonksiyon olsun. Bu durumda spektrumu I-da olan tüm $A, B \in K \subseteq B(H)^+$ operatörleri ve $x \in H$, $\|x\| = 1$ için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır.

$$\int_0^1 \langle f\big(tA + (1-t)B\big)x, x\rangle\langle g\big(tA + (1-t)B\big)x, x\rangle dt \le M(A,B) + N(A,B) \quad (3.2.1)$$

İspat. $x \in H$, $\|x\| = 1$ ve $t \in [0,1]$, ayrıca $\big\langle Ax, x\big\rangle \in Sp(A) \subseteq I$ ve $\big\langle Bx, x\big\rangle \in Sp(B) \subseteq I$ olduğundan

$$\big\langle((1-t)A + tB)x, x\big\rangle = (1-t)\big\langle Ax, x\big\rangle + t\big\langle Bx, x\big\rangle \in I, \tag{3.2.2}$$

f, g sürekliliğinden ve (3.2.2) eşitliğinden

$$\int_0^1 f\big(tA + (1-t)B\big)dt,$$

$$\int_0^1 g\big(tA + (1-t)B\big)dt,$$

ve

$$\int_0^1 (fg)\big(tA + (1-t)B\big)dt$$

integralleri mevcuttur.

$f, g \in S_pO$ olduğundan, $t \in [0,1]$ ve $x \in H$ için

$$\langle f\big(tA + (1-t)B\big)x, x\rangle \leq \langle f(A) + f(B)x, x\rangle \tag{3.2.3}$$

$$\langle g\big(tA + (1-t)B\big)x, x\rangle \leq \langle g(A) + g(B)x, x\rangle. \tag{3.2.4}$$

yazabiliriz. (3.2.3) ve (3.2.4)-den

$$\begin{aligned}\langle f\big(tA + (1-t)B\big)x, x\rangle\langle g\big(tA + (1-t)B\big)x, x\rangle &\leq \langle f(A)x, x\rangle\langle g(A)x, x\rangle \\ &+\langle f(A)x, x\rangle\langle g(B)x, x\rangle \\ &+\langle f(B)x, x\rangle\langle g(A)x, x\rangle \\ &+\langle f(B)x, x\rangle\langle g(B)x, x\rangle\end{aligned} \tag{3.2.5}$$

elde edilir. (3.2.5) in her iki tarafı $[0,1]$ üzerinde integral alınırsa, (3.2.1) eşitsizliği ispat edilmiş olur.

Teorem 3.2.2 f ve g iki operatör p-konveks fonksiyon olsun. Spektrumları I-da olan tüm $A, B \in K \subseteq B(H)^+$ operatörleri ve $x \in H$, $\|x\| = 1$ için aşağıdaki eşitsizlik doğrudur.

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\left\langle f\left(\frac{A+B}{2}\right)x, x\right\rangle\left\langle g\left(\frac{A+B}{2}\right)x, x\right\rangle \\ \leq\ &\int_0^1 \langle f\big(tA + (1-t)B\big)x, x\rangle\langle g\big(tA + (1-t)B\big)x, x\rangle dt \\ &+M(A,B) + N(A,B)\end{aligned} \tag{3.2.6}$$

İspat. $f, g \in S_pO$ olduğundan, $t \in [0,1]$ ve $x \in H$, $\|x\| = 1$ için

$$\begin{aligned}
& \left\langle f\left(\frac{A+B}{2}\right)x, x\right\rangle \left\langle g\left(\frac{A+B}{2}\right)x, x\right\rangle \\
= & \left\langle f\left(\frac{tA+(1-t)B}{2} + \frac{(1-t)A+tB}{2}\right)x, x\right\rangle \\
& \times\left\langle g\left(\frac{tA+(1-t)B}{2} + \frac{(1-t)A+tB}{2}\right)x, x\right\rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\leq & \Big\{\langle f\big(tA+(1-t)B\big)x, x\rangle + \langle f\big((1-t)A+tB\big)x, x\rangle \\
& \times\langle g\big(tA+(1-t)B\big)x, x\rangle + \langle g\big((1-t)A+tB\big)x, x\rangle\Big\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\leq & \Big\{\Big[\langle f\big(tA+(1-t)B\big)x, x\rangle\langle g\big(tA+(1-t)B\big)x, x\rangle\Big] \\
& +\Big[\langle f\big((1-t)A+tB\big)x, x\rangle\langle g\big((1-t)A+tB\big)x, x\rangle\Big] \\
& +\Big[\langle f(A)x, x\rangle + \langle f(B)x, x\rangle\Big] \times \Big[\langle g(A)x, x\rangle + \langle g(B)x, x\rangle\Big] \\
& +\Big[\langle f(A)x, x\rangle + \langle f(B)x, x\rangle\Big] \times \Big[\langle g(A)x, x\rangle + \langle g(B)x, x\rangle\Big]\Big\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
= & \Big\{\Big[\langle f\big(tA+(1-t)B\big)x, x\rangle g\big(tA+(1-t)B\big)x, x\rangle\Big] \\
& +\Big[\langle f\big((1-t)A+tB\big)x, x\rangle\langle g\big((1-t)A+tB\big)x, x\rangle\Big] \\
& +2\Big[\langle f(A)x, x\rangle\langle g(A)x, x\rangle\Big] + 2\Big[\langle f(B)x, x\rangle\langle g(B)x, x\rangle\Big] \\
& +2\Big[\langle f(A)x, x\rangle\langle g(B)x, x\rangle\Big] + 2\Big[\langle f(B)x, x\rangle\langle g(A)x, x\rangle\Big]\Big\}
\end{aligned}$$

elde ederiz. Burada $[0,1]$ üzerinde integral alınırsa,

$$\begin{aligned}
& \left\langle f\left(\frac{A+B}{2}\right)x, x\right\rangle \left\langle g\left(\frac{A+B}{2}\right)x, x\right\rangle \\
\leq & \int_0^1 \Big[\langle f\big((1-t)A+tB\big)x, x\rangle\langle g\big(tA+(1-t)B\big)x, x\rangle \\
& +\langle f\big(tA+(1-t)B\big)x, x\rangle\langle g\big((1-t)A+tB\big)x, x\rangle\Big]dt \\
& +2M(A,B) + 2N(A,B)
\end{aligned}$$

elde ederiz. Bu ise (3.2.6) eşitsizliğinin ispatını tamamlar.

Teorem 3.2.3 $f, g : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ iki operatör p-konveks fonksiyon olsun. Spektrumları I' da olan, bütün pozitif A, B operatörleri ve $x \in H$, $\|x\| = 1$ için aşağıdaki eşitsizlik doğrudur.

$$\begin{aligned}
& 2\left\langle f\left(\frac{A+B}{2}\right)x, x\right\rangle \int_0^1 \langle g\big(tA+(1-t)b\big)x, x\rangle dt \\
& +2\left\langle g\left(\frac{A+B}{2}\right)x, x\right\rangle \int_0^1 \langle f\big(tA+(1-t)B\big)x, x\rangle dt \\
\leq \; & 2\int_0^1 \langle f\big(tA+(1-t)B\big)x, x\rangle\langle g\big(tA+(1-t)B\big)x, x\rangle dt \\
& +2M(A,B)(x) + 2N(A,B)(x) \\
& +\left\langle f\left(\frac{A+B}{2}\right)x, x\right\rangle\left\langle g\left(\frac{A+B}{2}\right)x, x\right\rangle
\end{aligned} \tag{3.2.7}$$

İspat. f ve g iki operator p-konveks fonksiyon ve $t \in [0,1]$ için,

$$\begin{aligned}
\left\langle f\left(\frac{A+B}{2}\right)x, x\right\rangle &= \left\langle f\left(\frac{tA+(1-t)B}{2} + \frac{(1-t)A+tB}{2}\right)x, x\right\rangle \\
&\leq \left\langle f(tA+(1-t)B) + f((1-t)A+tB)x, x\right\rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left\langle g\left(\frac{A+B}{2}\right)x, x\right\rangle &= \left\langle g\left(\frac{tA+(1-t)B}{2} + \frac{(1-t)A+tB}{2}\right)x, x\right\rangle \\
&\leq \left\langle g(tA+(1-t)B) + g((1-t)A+tB)x, x\right\rangle.
\end{aligned}$$

eşitsizliklerini yazabiliriz. Bu iki eşitsizliği çapraz olarak çarpıp, daha sonra taraf tarafa toplarsak

$$\begin{aligned}
& \left\langle f\left(\frac{A+B}{2}\right)x, x\right\rangle\left\langle g(tA+(1-t)B) + g((1-t)A+tB)x, x\right\rangle \\
& +\left\langle g\left(\frac{A+B}{2}\right)x, x\right\rangle\left\langle f(tA+(1-t)B) + f((1-t)A+tB)x, x\right\rangle \\
\leq \; & \left\langle f(tA+(1-t)B) + f((1-t)A+tB)x, x\right\rangle \\
& \times\left\langle g(tA+(1-t)B) + g((1-t)A+tB)x, x\right\rangle \\
& +\left\langle f\left(\frac{A+B}{2}\right)x, x\right\rangle\left\langle g\left(\frac{A+B}{2}\right)x, x\right\rangle
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$
\begin{aligned}
&\left\langle f\left(\frac{A+B}{2}\right)x,x\right\rangle\Big[\langle g\big(tA+(1-t)B\big)x,x\rangle+g\big((1-t)A+tB)\big)x,x\rangle\Big]\\
&+\left\langle g\left(\frac{A+B}{2}\right)x,x\right\rangle\Big[\langle f\big(tA+(1-t)B\big)x,x\rangle+\langle f\big((1-t)A+tB)\big)x,x\rangle\Big]\\
&\leq\Big[\langle f\big(tA+(1-t)B\big)x,x\rangle\langle g\big(tA+(1-t)B\big)x,x\rangle\\
&+\langle f\big((1-t)A+tB)\big)x,x\rangle\langle g\big((1-t)A+tB)\big)x,x\rangle\Big]\\
&+\big[\langle f(A)x,x\rangle+\langle f(B)x,x\rangle\big]\\
&\times\langle g(A)x,x\rangle+\langle g(B)x,x\rangle\big]\\
&+\langle f(A)x,x\rangle+\langle f(B)x,x\rangle\big]\\
&\times\langle g(A)x,x\rangle+\langle g(B)x,x\rangle\big]+\left\langle f\left(\frac{A+B}{2}\right)x,x\right\rangle\left\langle g\left(\frac{A+B}{2}\right)x,x\right\rangle
\end{aligned}
$$

elde ederiz. Burada $[0,1]$ üzerinde integral alınırsa,

$$
\begin{aligned}
&\langle f\left(\frac{A+B}{2}\right)x,x\right\rangle\int_0^1[\langle g\big(tA+(1-t)B\big)x,x\rangle+g\big((1-t)A+tB)\big)x,x\rangle]\\
&+\langle g\left(\frac{A+B}{2}\right)x,x\right\rangle\int_0^1[\langle f\big(tA+(1-t)B\big)x,x\rangle+\langle f\big((1-t)A+tB)\big)x,x\rangle]\\
&\leq\int_0^1[\langle f\big(tA+(1-t)B\big)x,x\rangle\langle g\big(tA+(1-t)B\big)x,x\rangle]\\
&+\langle f\big((1-t)A+tB)\big)x,x\rangle\langle g\big((1-t)A+tB)\big)x,x\rangle]\\
&+2M(A,B)(x)+2N(A,B)(x)\\
&+\left\langle f\left(\frac{A+B}{2}\right)x,x\right\rangle\left\langle g\left(\frac{A+B}{2}\right)x,x\right\rangle\int_0^1 dt
\end{aligned}
$$

elde ederiz. Bu ise (3.2.7) eşitsizliğinin ispatını tamamlar.

3.3 Operatör p-Konveks Fonksiyonların, Synchronous ve Asynchronous Fonksiyonlara Uygulanması

Bu kısımda ilk önce Synchronous ve Asynchronous Fonksiyon tanımları verilecek ve daha sonra ise operatör p-konveks fonksiyonlar için bu fonksiyonlara uygulamalar yapılacaktır.

Tanım 3.3.1 $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ iki fonksiyon olsun. Eğer her $t,s\in[a,b]$ için

$$(f(t)-f(s))(g(t)-g(s))\geq 0$$

eşitsizliği sağlanıyorsa bu f,g fonksiyonlarına $[a,b]$ aralığı üzerinde "synchronous" denir.

Tanım 3.3.2 $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ iki fonksiyon olsun. Eğer her $t, s \in [a, b]$ için

$$(f(t) - f(s))(g(t) - g(s)) \leq 0$$

eşitsizliği sağlanıyorsa bu f, g fonksiyonlarına $[a, b]$ aralığı üzerinde "asynchronous" denir.

Teorem 3.3.1 A, $Sp(A) \subset [m, M]$'da sınırlı lineer özeşlenik bir operatör olsun. Eğer $f, g : [m, M] \to \mathbb{R}$ sürekli ve synchronous fonksiyon ise bu durumda $x \in H$, $||x|| = 1$ için

$$\langle f(A)g(A)x, x\rangle \geq \langle f(A)x, x\rangle\langle g(A)x, x\rangle \tag{3.3.1}$$

eşitsizliği doğrudur. Benzer şekilde sürekli ve asynchronous $f, g : [m, M] \to \mathbb{R}$ fonksiyon ise

$$\langle f(A)g(A)x, x\rangle \leq \langle f(A)x, x\rangle\langle g(A)x, x\rangle, \tag{3.3.2}$$

eşitsizliği de doğrudur.

Teorem 3.3.1'den açıkça görülür ki, eğer $f, g : [m, M] \to \mathbb{R}$ sürekli ve synchronous fonksiyon ise, bu durumda

$$N(A, B)(x) \leq M(A, B)(x) \leq P(A, B)(x) \tag{3.3.3}$$

Eğer, $f, g : [m, M] \to \mathbb{R}$ sürekli ve asynchronous fonksiyon ise bu durumda $x \in H$ ve $||x|| = 1$ olmak üzere

$$N(A, B)(x) \geq M(A, B)(x) \geq P(A, B)(x) \tag{3.3.4}$$

eşitsizlikleri doğrudur.

Teorem 3.3.2 $f, g : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ iki operatör p-konveks fonksiyon ve A, B de $Sp(A) \cup Sp(B) \subset [m, M]$' de sınırlı, lineer, özeşlenik iki operatör olsun. Bu durumda, f, g sürekli, synchronous fonksiyon ve $f, g \geq 0$ ise, (3.2.1) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \langle f\big(tA + (1-t)B\big)x, x\rangle\langle g\big(tA + (1-t)B\big)x, x\rangle dt \\ \leq\ & M(A, B)(x) + N(A, B)(x) \\ \leq\ & 2P(A, B)(x) \end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 3.3.3 $f, g : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ iki operatör p-konveks fonksiyon ve A, B de $Sp(A) \cup Sp(B) \subset [m, M]$' de sınırlı, lineer, özeşlenik iki operatör olsun. Bu durumda, f, g sürekli, synchronous fonksiyon ve $f, g \geq 0$ ise,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\left\langle f\left(\frac{A+B}{2}\right)x, x\right\rangle\left\langle g\left(\frac{A+B}{2}\right)x, x\right\rangle \\ \leq \; & \left[\int_0^1 \langle f\big(tA+(1-t)B\big)x, x\rangle g\big((1-t)A+tB\big)x, x\rangle dt\right] \\ & +2[P(A,B)(x)] \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} & 2\left\langle f\left(\frac{A+B}{2}\right)x, x\right\rangle\left\langle \int_0^1 \langle g\big(tA+(1-t)B\big)x, x\rangle dt \right. \\ & +2\left\langle g\left(\frac{A+B}{2}\right)x, x\right\rangle \int_0^1 \langle f\big(tA+(1-t)B\big)x, x\rangle dt \\ \leq \; & 2\int_0^1 \langle f\big(tA+(1-t)B\big)x, x\rangle\langle g\big(tA+(1-t)B\big)x, x\rangle dt \\ & +4[P(A,B)(x)] \\ & +\left\langle f\left(\frac{A+B}{2}\right)x, x\right\rangle\left\langle g\left(\frac{A+B}{2}\right)x, x\right\rangle \end{aligned}$$

(3.2.6) ve (3.2.7) eşitsizliklerinden sağlanır.

Teorem 3.3.4 $f, g : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ iki operatör p-konveks fonksiyon ve A, B de $Sp(A) \cup Sp(B) \subset [m, M]$' de sınırlı, lineer, özeşlenik iki operatör olsun. Eğer, f, g sürekli, asynchronous fonksiyon ve $f, g \geq 0$ ise, (3.2.1) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \langle f\big(tA+(1-t)B\big)x, x\rangle\langle g\big(tA+(1-t)B\big)x, x\rangle dt \\ \leq \; & M(A,B)(x) + N(A,B)(x) \\ \leq \; & 2N(A,B)(x) \end{aligned} \tag{3.3.5}$$

elde edilir.

Teorem 3.3.5 $f, g : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ iki operatör p-konveks fonksiyon ve A, B de $Sp(A) \cup Sp(B) \subset [m, M]$' de sınırlı, lineer, özeşlenik iki operatör olsun. Eğer, f, g sürekli, synchronous fonksiyon ve $f, g \geq 0$ ise,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left\langle f\left(\frac{A+B}{2}\right)g\left(\frac{A+B}{2}\right)x,x\right\rangle \\
\leq\ & \left[\int_0^1 \langle f\big(tA+(1-t)B\big)x,x\rangle g\big((1-t)A+tB\big)x,x\rangle dt\right] \\
& +2[N(A,B)(x)]
\end{aligned} \tag{3.3.6}$$

ve

$$\begin{aligned}
&2\left\langle f\left(\frac{A+B}{2}\right)x,x\right\rangle\left\langle \int_0^1 \langle g\big(tA+(1-t)B\big)x,x\rangle dt \right. \\
&+2\left\langle g\left(\frac{A+B}{2}\right)x,x\right\rangle \int_0^1 \langle f\big(tA+(1-t)B\big)x,x\rangle dt \\
\leq\ & 2\int_0^1 \langle f\big(tA+(1-t)B\big)x,x\rangle\langle g\big(tA+(1-t)B\big)x,x\rangle dt \\
&\qquad +2[N(A,B)(x)] \\
&\qquad +\left\langle f\left(\frac{A+B}{2}\right)x,x\right\rangle\left\langle g\left(\frac{A+B}{2}\right)x,x\right\rangle
\end{aligned} \tag{3.3.7}$$

(3.2.6) ve (3.2.7) eşitsizliklerinden sağlanır.

3.4 Hilbert Uzayında Operatör h-Konveks Fonksiyonlar İçin Hermite-Hadamard Tipli Eşitsizlikler

Bu kısımda daha önce Salaş ve arkadaşları tarafından tanımlanan [14] operatör p-konveks fonksiyonlar sınıfı, yani S_pO, genişletilmiş ve daha genel eşitsizlikler elde edilmiştir.

Tanım 3.4.1 $h : J \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ negatif olmayan bir fonksiyon ve K da $B(H)^+$ ın konveks bir alt kümesi olsun. Eğer $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$f\big(\alpha A+(1-\alpha)B\big) \leq h(\alpha)f(A)+h(1-\alpha)f(B)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa bu f fonksiyonuna I aralığı üzerinde operatör h-konveks fonksiyon denir. Burada A ve B, spektrumları I'da olan keyfi pozitif operatörler ve $\alpha \in [0,1]$. Bu eşitsizliği sağlayan fonksiyonların sınıfını bundan sonra ES_hO ile göstereceğiz.

Lemma 3.4.1 f bir operatör h-konveks fonksiyon ve $h(\frac{1}{2}) > \frac{1}{2}$ olsun. Bu durumda her $A \in K \subseteq B(H)^+$ için $f(A)$ pozitiftir.

İspat. Her $A \in K$ için

$$f(A) = f\left(\frac{A}{2}+\frac{A}{2}\right) \leq h\left(\frac{1}{2}\right)f(A)+h\left(\frac{1}{2}\right)f(A) = 2h\left(\frac{1}{2}\right)f(A). \tag{3.4.1}$$

$h\left(\dfrac{1}{2}\right)f(A) \geq 0$ olup $f(A) \geq 0$, yani $f(A)$ operatör h-konveks fonksiyonu pozitiftir.

Lemma 3.4.2 $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olsun. $A, B \in K \subseteq B(H)^+$ pozitif keyfi iki operatör için

$$[A, B] := \{(1-t)A + tB\,, t \in [0,1]\}$$

şeklinde, spektrumları I'da olan tüm pozitif operatörlerin kümesi üzerinde bir parça tanımlayalım. Bu durumda f'nin operator h-konveks olabilmesi için gerekli ve yeterli koşul

$$\varphi_{x,A,B}(t) := \big\langle f((1-t)A + tB)x, x \big\rangle$$

şeklindeki $\varphi_{x,A,B} : [0,1] \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun her $x \in H$, $\|x\| = 1$ için $[0,1]$ aralığı üzerinde operatör h-konveks olmasıdır.

İspat. $f \in ES_hO$ olduğundan keyfi $t_1, t_2 \in [0,1]$ ve $\alpha \in [0,1]$ için

$$\begin{aligned}
& \varphi_{x,A,B}(\alpha t_1 + (1-\alpha)t_2) = \big\langle f((1-(\alpha t_1 + (1-\alpha)t_2)A + (\alpha t_1 + (1-\alpha)t_2)B)x, x \big\rangle \\
= \;& \big\langle f(\alpha[(1-t_1)A + t_1 B] + (1-\alpha)[(1-t_2)A + t_2 B])x, x \big\rangle \\
\leq \;& h(\alpha)\big\langle f((1-t_1)A + t_1 B)x, x \big\rangle + h(1-\alpha) f((1-t_2)A + t_2 B)x, x \big\rangle \\
\leq \;& h(\alpha)\varphi_{x,A,B}(t_1) + h(1-\alpha)\varphi_{x,A,B}(t_2)
\end{aligned} \tag{3.4.2}$$

olup, bu ise ispatı tamamlar.

Teorem 3.4.1 f bir operatör h-konveks fonksiyon olsun. Spektrumları I' da olan her pozitif A ve B operatörleri için

$$\frac{1}{2h\left(\frac{1}{2}\right)} f\left(\frac{A+B}{2}\right) \leq \int_0^1 f\big(tA + (1-t)B\big)dt \leq \Big[f(A) + (B)\Big] \int_0^1 h(t)dt \tag{3.4.3}$$

eşitsizliği doğrudur.

İspat. $x \in H$, $\|x\| = 1$ ve $t \in [0,1]$, ayrıca $\big\langle Ax, x \big\rangle \in Sp(A) \subseteq I$ ve $\big\langle Bx, x \big\rangle \in Sp(B) \subseteq I$ olduğundan

$$\big\langle ((1-t)A + tB)x, x \big\rangle = (1-t)\big\langle Ax, x \big\rangle + t\big\langle Bx, x \big\rangle \in I, \tag{3.4.4}$$

eşitliğini yazabiliriz. f'nin sürekliliği ve (3.4.4)' den

$$\int_0^1 f\big(tA + (1-t)B\big)dt$$

integrali mevcuttur. $f \in ES_hO$ olduğundan, $t \in [0,1]$ ve $A, B \in K$ için

$$f\big(tA + (1-t)B\big)dt \leq h(t)f(A) + h(1-t)f(B) \tag{3.4.5}$$

elde edilir. (3.4.5)' ın her iki tarafının $[0,1]$ üzerinden integrali alınırsa

$$\int_0^1 f\big(tA + (1-t)B\big)dt \leq \Big[f(A) + (B)\Big] \int_0^1 h(t)dt$$

elde edilir. (3.4.3) deki eşitsizliğin sol tarafı ispatlanmış olur.

$$f\left(\frac{A+B}{2}\right) \leq h\left(\frac{1}{2}\right)\Big(f\big(tA + (1-t)B\big) + f\big((1-t)A + tB\big)\Big) \tag{3.4.6}$$

eşitsizliğini göz önünde bulunduralım. (3.4.6) eşitsizliğinin, $[0,1]$ aralığı üzerinden integrali alınır ve doğru olan aşağıdaki eşitliği kullanırsak

$$\int_0^1 f\big(tA + (1-t)B\big)dt = \int_0^1 f\big((1-t)A + tB\big)dt$$

bu durumda (3.4.3) ın ilk kısmı da ispat edilmiş olur. Böylece ispat tamamlanır.

3.5 Çarpım Durumunda İki Operator h-Konveks Fonksiyon için Hermite Hadamard Tipli Eşitsizlikler

$f, g : I \to \mathbb{R}$ sırasıyla operatör h_1-konveks fonksiyon ve operatör h_2-konveks fonksiyon olsunlar. Bu durumda, spektrumları I'da olan bütün A ve B pozitif operatörleri için aşağıdaki şekilde reel değerli fonksiyonlar tanımlayalım.

$$M(A,B)(x) = \langle f(A)x, x\rangle\langle g(A)x, x\rangle + \langle f(B)x, x\rangle\langle g(B)x, x\rangle \ (x \in H),$$

$$N(A,B)(x) = \langle f(A)x, x\rangle\langle g(B)x, x\rangle + \langle f(B)x, x\rangle\langle g(A)x, x\rangle \ (x \in H).$$

$$P(A,B)(x) = \langle [f(A)g(A) + f(B)g(B)]x, x\rangle \ (x \in H),$$

Teorem 3.5.1 $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bir operatör h_1-konveks fonksiyon ve $g : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de operatör h_2-konveks fonksiyon olsun. Spektrumları I' da olan bütün pozitif A ve B operatörleri için $x \in H$, $\|x\| = 1$ olmak üzere

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \langle f\big(tA + (1-t)B\big)x, x\rangle\langle g\big(tA + (1-t)B\big)x, x\rangle dt \\ \leq\ & M(A,B)\int_0^1 h_1(t)h_2(t)dt + N(A,B)\int_0^1 h_1(t)h_2(1-t)dt \end{aligned} \tag{3.5.1}$$

eşitsizliği doğrudur.

İspat. $x \in H$, $\|x\| = 1$ ve $t \in [0,1]$, ayrıca $\big\langle Ax, x\big\rangle \in Sp(A) \subseteq I$ and $\big\langle Bx, x\big\rangle \in Sp(B) \subseteq I$ olduğundan

$$\big\langle (tA + (1-t)B)x, x\big\rangle = t\big\langle Ax, x\big\rangle + (1-t)\big\langle Bx, x\big\rangle \in I, \tag{3.5.2}$$

eşitliğini yazabiliriz. f,g' nin sürekliliğinden ve (3.5.2)' den

$$\int_0^1 f\big(tA + (1-t)B\big)dt,$$

$$\int_0^1 g\big(tA + (1-t)B\big)dt$$

ve

$$\int_0^1 (fg)\big(tA + (1-t)B\big)dt$$

integralleri mevcuttur.

$f \in ES_{h_1}O$ ve $g \in ES_{h_2}O$ olduğundan, $t \in [0,1]$ ve $x \in H$, $\|x\| = 1$ için

$$\langle f\big(tA + (1-t)B\big)x, x\rangle \leq \langle h_1(t)f(A) + h_1(1-t)f(B)x, x\rangle \tag{3.5.3}$$

$$\langle g\big(tA + (1-t)B\big)x, x\rangle \leq \langle h_2(t)g(A) + h_2(1-t)g(B)x, x\rangle \tag{3.5.4}$$

yazılır. (3.5.3) ve (3.5.4) ten

$$\begin{aligned} \langle f\big(tA + (1-t)B\big)x, x\rangle\langle g\big(tA + (1-t)B\big)x, x\rangle \leq\ & h_1(t)h_2(t)\langle f(A)x, x\rangle\langle g(A)x, x\rangle \\ & + h_1(t)h_2(1-t)\langle f(A)x, x\rangle\langle g(B)x, x\rangle \\ & + h_1(1-t)h_2(t)\langle f(B)x, x\rangle\langle g(A)x, x\rangle \\ & + h_1(1-t)h_2(1-t)\langle f(B)x, x\rangle\langle g(B)x, x\rangle \end{aligned} \tag{3.5.5}$$

elde edilir. (3.5.5) te $[0,1]$ aralığı üzerinden her iki tarafın integrali alınırsa (3.5.1) eşitsizliği ispat edilmiş olur.

Teorem 3.5.2 $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bir operatör h_1-konveks fonksiyon ve $g : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de bir operatör h_2-konveks fonksiyon olsun. Spektrumları I' da olan, bütün pozitif A ve B operatörleri için $x \in H$, $\|x\| = 1$ olmak üzere

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2h_1\left(\frac{1}{2}\right)h_2\left(\frac{1}{2}\right)}\left\langle f\left(\frac{A+B}{2}\right)x, x\right\rangle\left\langle g\left(\frac{A+B}{2}\right)x, x\right\rangle \\ \leq\ & \int_0^1 \langle f\big(tA + (1-t)B\big)x, x\rangle\langle g\big(tA + (1-t)B\big)x, x\rangle dt \\ & + M(A,B)\int_0^1 h_1(t)h_2(t)dt + N(A,B)\int_0^1 h_1(t)h_2(1-t)dt \end{aligned} \tag{3.5.6}$$

dir.

İspat. $f \in ES_{h_1}O$ ve $g \in ES_{h_2}O$ olduğundan, keyfi $t \in [0,1]$ ve $x \in H$, $\|x\| = 1$ için

$$\left\langle f\left(\frac{A+B}{2}\right)x,x\right\rangle\left\langle g\left(\frac{A+B}{2}\right)x,x\right\rangle \leq \left\langle f\left(\frac{tA+(1-t)B}{2}+\frac{(1-t)A+tB}{2}\right)x,x\right\rangle \times\left\langle g\left(\frac{tA+(1-t)B}{2}+\frac{(1-t)A+tB}{2}\right)x,x\right\rangle \tag{3.5.7}$$

$$\begin{aligned}\leq\ & h_1\left(\frac{1}{2}\right)h_2\left(\frac{1}{2}\right)\Big\{\left[\langle f\big(tA+(1-t)B\big)x,x\rangle + f\big((1-t)A+tB\big)x,x\rangle\right] \\ & \times\big[g\big(tA+(1-t)B\big)x,x\rangle + g\big((1-t)A+tB\big)x,x\rangle\big]\Big\}\end{aligned} \tag{3.5.8}$$

$$\begin{aligned}\leq\ & h_1\left(\frac{1}{2}\right)h_2\left(\frac{1}{2}\right)\Big\{\big[\langle f\big(tA+(1-t)B\big)x,x\rangle\langle g\big(tA+(1-t)B\big)x,x\rangle\big] \\ & +\big[\langle f\big((1-t)A+tB\big)x,x\rangle\langle g\big((1-t)A+tB\big)x,x\rangle\big] \\ & +\big[h_1(t)\langle f(A)x,x\rangle + h_1(1-t)\langle f(B)x,x\rangle\big] \\ & \times\big[h_2(1-t)\langle g(A)x,x\rangle + h_2(t)\langle g(B)x,x\rangle\big] \\ & +\big[h_1(1-t)\langle f(A)x,x\rangle + h_1(t)\langle f(B)x,x\rangle\big] \\ & \times\big[h_2(t)\langle g(A)x,x\rangle + h_2(1-t)\langle g(B)x,x\rangle\big]\Big\}\end{aligned} \tag{3.5.9}$$

$$\begin{aligned}=\ & h_1\left(\frac{1}{2}\right)h_2\left(\frac{1}{2}\right)\Big\{[\langle f\big(tA+(1-t)B\big)x,x\rangle + \langle g\big(tA+(1-t)B\big)x,x\rangle] \\ & +[\langle f\big((1-t)A+tB\big)x,x\rangle + \langle g\big((1-t)A+tB\big)x,x\rangle] \\ & +(h_1(t)h_2(1-t)+h_2(t)h_1(1-t))[\langle f(A)x,x\rangle\langle g(A)x,x\rangle] + \big[\langle f(B)x,x\rangle\langle g(B)x,x\rangle\big] \\ & +(h_1(1-t)h_2(1-t)+h_1(t)h_2(t))\big[(\langle f(A)x,x\rangle\langle f(B)x,x\rangle] + \langle f(B))x,x\rangle\langle g(A)x,x\rangle\big]\Big\}\end{aligned} \tag{3.5.10}$$

olup $[0,1]$ aralığı üzerinde integralini alırsak

$$\begin{aligned}& \left\langle f\left(\frac{A+B}{2}\right)x,x\right\rangle\left\langle g\left(\frac{A+B}{2}\right)x,x\right\rangle \\ \leq\ & h_1\left(\frac{1}{2}\right)h_2\left(\frac{1}{2}\right)\bigg(\int_0^1 \langle f\big(tA+(1-t)B\big)x,x\rangle + g\big((1-t)A+tB\big)x,x\rangle] \\ & +[f\big(tA+(1-t)B\big)x,x\rangle + \langle g\big((1-t)A+tB\big)x,x\rangle]dt \\ +\ & M(A,B)\int_0^1 h_1(t)h_2(t)dt + N(A,B)\int_0^1 h_1(t)h_2(1-t)dt\end{aligned} \tag{3.5.11}$$

bulunur ki, bu da (3.5.6) nın ispatını tamamlar.

Teorem 3.5.3 $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ve $g : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de iki operatör h-konveks fonksiyon olsun. Spektrumları I' da olan bütün pozitif A ve B operatörleri için

$$\begin{aligned}
& 2h\Big(\frac{1}{2}\Big)\Big\langle f\Big(\frac{A+B}{2}\Big)x,x\Big\rangle\Big\langle \int_0^1 \langle g\big(tA+(1-t)B\big)x,x\rangle dt \\
& +2h\Big(\frac{1}{2}\Big)g\Big(\frac{A+B}{2}\Big)x,x\Big\rangle \int_0^1 \langle f\big(tA+(1-t)B\big)x,x\rangle dt \\
\leq\; & 2h\Big(\frac{1}{2}\Big)^2 \int_0^1 \langle f\big(tA+(1-t)B\big)x,x\rangle\langle g\big(tA+(1-t)B\big)x,x\rangle dt \\
& +2h\Big(\frac{1}{2}\Big)^2\Big[M(A,B)\int_0^1 h(t)h(1-t)dt + N(A,B)\int_0^1 h(t)^2 dt\Big] \\
& +\Big\langle f\Big(\frac{A+B}{2}\Big)x,x\Big\rangle\Big\langle g\Big(\frac{A+B}{2}\Big)x,x\Big\rangle
\end{aligned} \tag{3.5.12}$$

eşitsizliği doğrudur.

İspat. f ve g iki operatör h-konveks fonksiyon ve $t \in [0,1]$ için

$$\begin{aligned}
\Big\langle f\Big(\frac{A+B}{2}\Big)x,x\Big\rangle &= \Big\langle f\Big(\frac{tA+(1-t)B}{2}+\frac{(1-t)A+tB}{2}\Big)x,x\Big\rangle \\
&\leq h\Big(\frac{1}{2}\Big)\Big\langle \frac{f(tA+(1-t)B)+f((1-t)A+tB)}{2}x,x\Big\rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Big\langle g\Big(\frac{A+B}{2}\Big)x,x\Big\rangle &= \Big\langle g\Big(\frac{tA+(1-t)B}{2}+\frac{(1-t)A+tB}{2}\Big)x,x\Big\rangle \\
&\leq h\Big(\frac{1}{2}\Big)\Big\langle \frac{g(tA+(1-t)B)+g((1-t)A+tB)}{2}x,x\Big\rangle.
\end{aligned}$$

eşitsizliklerini yazabiliriz. Bu iki eşitsizliği çapraz olarak çarpıp, daha sonra taraf tarafa toplarsak

$$\begin{aligned}
& \Big\langle f\Big(\frac{A+B}{2}\Big)x,x\Big\rangle\Big\langle g(tA+(1-t)B)+g((1-t)A+tB)x,x\Big\rangle \\
& +\Big\langle g\Big(\frac{A+B}{2}\Big)x,x\Big\rangle\Big\langle f(tA+(1-t)B)+f((1-t)A+tB)x,x\Big\rangle \\
\leq\; & h\Big(\frac{1}{2}\Big)^2\Big\langle f(tA+(1-t)B)+f((1-t)C+tB)x,x\Big\rangle \\
& \times\Big\langle g(tA+(1-t)B)+g((1-t)C+tB)x,x\Big\rangle \\
& +\Big\langle f\Big(\frac{A+B}{2}\Big)x,x\Big\rangle\Big\langle g\Big(\frac{A+B}{2}\Big)x,x\Big\rangle
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$
\begin{aligned}
& h\Big(\frac{1}{2}\Big)\Big\langle f\Big(\frac{A+B}{2}\Big)x,x\Big\rangle\Big[\langle g\big(tA+(1-t)B\big)x,x\rangle + g\big((1-t)A+tB)\big)x,x\rangle\Big] \\
& + h\Big(\frac{1}{2}\Big)\Big\langle g\Big(\frac{A+B}{2}\Big)x,x\Big\rangle\Big[\langle f\big(tA+(1-t)B\big)x,x\rangle + \langle f\big((1-t)A+tB)\big)x,x\rangle\Big] \\
& \leq h\Big(\frac{1}{2}\Big)^2\Big\{\Big[\langle f\big(tA+(1-t)B\big)x,x\rangle\langle g\big(tA+(1-t)B\big)x,x\rangle \\
& + \langle f\big((1-t)A+tB)\big)x,x\rangle\langle g\big((1-t)A+tB)\big)x,x\rangle\Big] \\
& + \big[h(t)\langle f(A)x,x\rangle + h(1-t)\langle f(B)x,x\rangle\big] \\
& \times \big[h(1-t)\langle g(A)x,x\rangle + h(t)\langle g(B)x,x\rangle\big] \\
& + \big[h(1-t)\langle f(A)x,x\rangle + h(t)\langle f(B)x,x\rangle\big] \\
& \times \big[h(t)\langle g(A)x,x\rangle + h(1-t)\langle g(B)x,x\rangle\big]\Big\} + \Big\langle f\Big(\frac{A+B}{2}\Big)x,x\Big\rangle\Big\langle g\Big(\frac{A+B}{2}\Big)x,x\Big\rangle
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& h\Big(\frac{1}{2}\Big)\Big\langle f\Big(\frac{A+B}{2}\Big)x,x\Big\rangle\int_0^1[\langle g\big(tA+(1-t)B\big)x,x\rangle + g\big((1-t)A+tB)\big)x,x\rangle] \\
& + h\Big(\frac{1}{2}\Big)g\Big(\frac{C+D}{2}\Big)x,x\Big\rangle\int_0^1[\langle f\big(tA+(1-t)B\big)x,x\rangle + \langle f\big((1-t)A+tB)\big)x,x\rangle] \\
& \leq h\Big(\frac{1}{2}\Big)^2\Big[\int_0^1[\langle f\big(tA+(1-t)B\big)x,x\rangle\langle g\big(tA+(1-t)B\big)x,x\rangle] \\
& + \langle f\big((1-t)C+tD)\big)x,x\rangle\langle g\big((1-t)A+tB)\big)x,x\rangle] \\
& + 2M(A,B)(x)\int_0^1 h(t)h(1-t)dt + 2N(A,B)(x)\int_0^1 h(t)^2dt \\
& + \Big\langle f\Big(\frac{A+B}{2}\Big)x,x\Big\rangle\Big\langle g\Big(\frac{A+B}{2}\Big)x,x\Big\rangle\int_0^1 dt
\end{aligned}
$$

elde ederiz. Buradan (3.5.12) eşitsizliğinin ispatı tamamlanmış olur.

3.6 Operatör h-Konveks Fonksiyonların, Synchronous ve Asynchronous Fonksiyonlara Uygulanması

Teorem 3.6.1 $f, g : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ iki operatör h-konveks fonksiyon ve A, B de $Sp(A) \cup Sp(B) \subset [m, M]$' de sınırlı, lineer, özeşlenik iki operatör olsun. Eğer, f, g sürekli, synchronous fonksiyon ve $f, g \geq 0$ ise, (3.5.1) eşitsizliğinden

$$
\begin{aligned}
& \int_0^1 \langle f\big(tA+(1-t)B\big)x,x\rangle\langle g\big(tA+(1-t)B\big)x,x\rangle dt \\
\leq \;& M(A,B)(x)\int_0^1 h_1(t)h_2(t)dt + N(A,B)(x)\int_0^1 h_1(t)h_2(1-t)dt \\
\leq \;& \Big[\int_0^1 h_1(t)h_2(t)dt + \int_0^1 h_1(t)h_2(1-t)dt\Big]P(A,B)(x). \qquad (3.6.1)
\end{aligned}
$$

elde edilir.

Teorem 3.6.2 Eğer f, g sürekli, synchronous fonksiyon ve $f, g \geq 0$ ise, o zaman (3.5.6) ve (3.5.12) eşitsizliklerinden sırasıyla

$$\begin{aligned}
&\left\langle f\left(\frac{A+B}{2}\right)x, x\right\rangle\left\langle g\left(\frac{A+B}{2}\right)x, x\right\rangle \\
\leq\ & 2h_2\left(\frac{1}{2}\right)h_2\left(\frac{1}{2}\right)\Big[\int_0^1 \langle f\big(tA+(1-t)B\big)x, x\rangle + g\big((1-t)A+tB\big)x, x\rangle dt\Big] \\
&+h_1\left(\frac{1}{2}\right)h_2\left(\frac{1}{2}\right)[P(A,B)(x)]\Big[\int_0^1 h_1(t)h_2(1-t)dt + \int_0^1 h_1(t)h_2(t)dt\Big],
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
&2h\left(\frac{1}{2}\right)\left\langle f\left(\frac{A+B}{2}\right)x, x\right\rangle\left\langle \int_0^1 \langle g\big(tA+(1-t)B\big)x, x\rangle dt \right. \\
&+2h\left(\frac{1}{2}\right)\left\langle g\left(\frac{A+B}{2}\right)x, x\right\rangle \int_0^1 \langle f\big(tA+(1-t)B\big)x, x\rangle dt \\
\leq\ & 2h\left(\frac{1}{2}\right)h\left(\frac{1}{2}\right)\int_0^1 \langle f\big(tA+(1-t)B\big)x, x\rangle\langle g\big(tA+(1-t)B\big)x, x\rangle dt \\
&+2h\left(\frac{1}{2}\right)h\left(\frac{1}{2}\right)[P(A,B)(x)]\Big[\int_0^1 h(t)h(1-t)dt + \int_0^1 h(t)^2 dt\Big] \\
&+\left\langle f\left(\frac{A+B}{2}\right)x, x\right\rangle\left\langle g\left(\frac{A+B}{2}\right)x, x\right\rangle
\end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 3.6.3 Eğer f, g sürekli, asynchronous fonksiyon ve $f, g \geq 0$ ise, o zaman (3.5.1) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \langle f\big(tA+(1-t)B\big)x, x\rangle\langle g\big(tA+(1-t)B\big)x, x\rangle dt \\
\leq\ & M(A,B)(x)\int_0^1 h_1(t)h_2(t)dt + N(A,B)(x)\int_0^1 h_1(t)h_2(1-t)dt \\
\leq\ & \Big[\int_0^1 h_1(t)h_2(t)dt + \int_0^1 h_1(t)h_2(1-t)dt\Big)\Big]N(A,B)(x).
\end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 3.6.4 Eğer f, g sürekli, synchronous fonksiyon ise o zaman (3.5.6) ve (3.5.12) eşitsizliklerinden sırasıyla

$$\begin{aligned}
&\left\langle f\left(\frac{A+B}{2}\right)x,x\right\rangle\left\langle g\left(\frac{A+B}{2}\right)x,x\right\rangle \\
\leq\; & 2h_1\left(\frac{1}{2}\right)h_2\left(\frac{1}{2}\right)\Big[\int_0^1 \langle f\big(tA+(1-t)B\big)x,x\rangle + g\big((1-t)A+tB\big)x,x\rangle dt\Big] \\
&+h_1\left(\frac{1}{2}\right)h_2\left(\frac{1}{2}\right)[N(A,B)(x)]\Big[\int_0^1 h_1(t)h_2(1-t)dt+\int_0^1 h_1(t)h_2(t)dt\Big],
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
2h\left(\frac{1}{2}\right)&\left\langle f\left(\frac{A+B}{2}\right)x,x\right\rangle\left\langle \int_0^1 \langle g\big(tA+(1-t)B\big)x,x\rangle dt\right. \\
&+2h\left(\frac{1}{2}\right)\left\langle g\left(\frac{A+B}{2}\right)x,x\right\rangle \int_0^1 \langle f\big(tA+(1-t)B\big)x,x\rangle dt \\
\leq 2h\left(\frac{1}{2}\right)h\left(\frac{1}{2}\right)&\int_0^1 \langle f\big(tA+(1-t)B\big)x,x\rangle\langle g\big(tA+(1-t)B\big)x,x\rangle dt \\
&+2h\left(\frac{1}{2}\right)h\left(\frac{1}{2}\right)[N(A,B)(x)]\Big[\int_0^1 h(t)h(1-t)dt+\int_0^1 h(t)^2dt\Big] \\
&+\left\langle f\left(\frac{A+B}{2}\right)x,x\right\rangle\left\langle g\left(\frac{A+B}{2}\right)x,x\right\rangle
\end{aligned}$$

elde edilir.

3.7 Hilbert Uzayında Operatör Godunova-Levin Fonksiyonları İçin Hermite-Hadamard Tipli Eşitsizlikler

Biz bu kısımda ilk önce, literatüre ilk defa burada tanımı verilen Operatör Godunova-Levin Fonksiyon Sınıfı tanıtılacak ve daha sonra Hilbert Uzayında operatör Godunova-Levin Fonksiyonlar için bazı yeni Hermite-Hadamard Tipli Eşitsizlikler elde edilecektir.

Tanım 3.7.1 I, $\mathbb{R}$'de bir aralık, A ve B de spekrumları I-da olan sınırlı pozitif operatörler olsun. Eğer her $\lambda \in (0,1)$ için

$$f\big(\lambda A+(1-\lambda)B\big) \leq \frac{1}{\lambda}f(A)+\frac{1}{1-\lambda}f(B) \qquad (3.7.1)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, bu $f : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna I aralığı üzerinde operator Godunova-Levin sınıfındandır denir. Bundan sonra bu sınıftan olan fonksiyonları $S_Q O$ sembolü ile göstereceğiz.

Lemma 3.7.1 Eğer f, operatör Godunova-Levin fonksiyon sınıfından ise, bu durumda her $A \in K \subseteq B(H)^+$ için $f(A)$ pozitiftir.

İspat. $A \in K$ olduğundan

$$f(A) = f\left(\frac{A}{2} + \frac{A}{2}\right) \leq 2f(A) + 2f(A) = 4f(A)$$
$$f(A) \geq 0$$

olup, $f(A)$' nın pozitif olduğu ispatlanmış olur.

Lemma 3.7.2 $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon ve A, B de spektrumları I' da olan keyfi pozitif iki operatör olsun. Bu durumda,

$$[A, B] := \Big\{(1-t)A + tB;\ t \in [0,1]\Big\} \subseteq I$$

parçası üzerinde f' nin operatör Godunova-Levin fonksiyon olabilmesi için gerekli ve yeterli koşul

$$\varphi_{x,A,B}(t) := \big\langle f((1-t)A + tB)x, x\big\rangle$$

şeklinde tanımlanan $\varphi_{x,A,B} : [0,1] \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun $[0,1]$ kapalı aralığı üzerinde operatör Godunova-Levin fonksiyon olmasıdır.

İspat. f, $[A, B] \subseteq I$ parçası üzerinde operatör Godunova-Levin sınıfından bir fonksiyon ve her $t_1, t_2 \in [0,1]$, $\lambda \in (0,1)$ için

$$\begin{aligned}
\varphi_{x,A,B}(\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2) &= \big\langle f((1-(\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2)A + (\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2)B)x, x\big\rangle \\
&= \big\langle f(\lambda[(1-t_1)A + t_1 B] + (1-\lambda)[(1-t_2)A + t_2 B])x, x\big\rangle \\
&\leq \frac{1}{\lambda}\big\langle f((1-t_1)A + t_1 B)x, x\big\rangle + \frac{1}{1-\lambda} f((1-t_2)A + t_2 B)x, x\big\rangle \\
&\leq \frac{1}{\lambda}\varphi_{x,A,B}(t_1) + \frac{1}{1-\lambda}\varphi_{x,A,B}(t_2).
\end{aligned}$$

olup, ispat tamamlanır.

Teorem 3.7.1 $f : I \subseteq [0,\infty) \to \mathbb{R}$ operatör Godunova-Levin sınıfından bir fonksiyon, A ve B de spektrumları I-da olan keyfi pozitif lineer operatör olsun. Bu durumda $\lambda \in (0,1)$ için

$$\frac{1}{4} f\left(\frac{A+B}{2}\right) \leq \int_0^1 f\big(\lambda A + (1-\lambda)B\big) d\lambda \tag{3.7.2}$$

eşitsizliği doğrudur.

İspat. $x \in H$, $\|x\| = 1$ ve $\lambda \in (0,1)$ için

$$\big\langle Ax, x\big\rangle \in Sp(A) \subseteq I \text{ ve} \big\langle Bx, x\big\rangle \in Sp(B) \subseteq I$$

olup

$$\big\langle((1-\lambda)A + \lambda B)x, x\big\rangle = (1-\lambda)\big\langle Ax, x\big\rangle + \lambda\big\langle Bx, x\big\rangle \in I, \tag{3.7.3}$$

eşitliğini yazabiliriz. f foksiyonunun sürekliliğinden ve 3.7.3 eşitliğinden

$$\int_0^1 f\big(\lambda A + (1-\lambda)B\big)d\lambda$$

integrali vardır. $\lambda \in (0,1)$, $f \in S_Q O$ ve $A, B \in K \subseteq B(H)^+$ için

$$f\big(\lambda A + (1-\lambda)B\big) \leq \frac{1}{\lambda} f(A) + \frac{1}{1-\lambda} f(B) \tag{3.7.4}$$

eşitsizliğini yazabiliriz. (3.7.3) eşitsizliğinin ispatı için

$$f\left(\frac{A+B}{2}\right) \leq 2f\big(\lambda A + (1-\lambda)B\big) + 2f\big((1-\lambda)A + \lambda B\big) \tag{3.7.5}$$

doğru olan eşitsizliğini λ'ya göre $[0,1]$ kapalı aralığı üzerinde integralini alıp, ayrıca literatürde bilinen

$$\int_0^1 f\big(\lambda A + (1-\lambda)B\big)d\lambda = \int_0^1 f\big((1-\lambda)A + \lambda B\big)d\lambda$$

eşitliğini de göz önünde bulundurursak (3.7.3) eşitsizliğinin ispatı tamamlanır.

Teorem 3.7.2 $f : I \subseteq [0,\infty) \to \mathbb{R}$ operatör Godunova-Levin sınıfından bir fonksiyon, A ve B de spektrumları I-da olan keyfi pozitif lineer operatör olsun. Bu durumda $\lambda \in (0,1)$ için

$$\int_0^1 \lambda(1-\lambda) f\big(\lambda A + (1-\lambda)B\big)d\lambda \leq \frac{f(A) + (B)}{2} \tag{3.7.6}$$

eşitsizliği doğrudur.

İspat. $x \in H$, $\|x\| = 1$ ve $\lambda \in (0,1)$, için ayrıca

$$\big\langle Ax, x\big\rangle \in Sp(A) \subseteq I \text{ ve} \big\langle Bx, x\big\rangle \in Sp(B) \subseteq I$$

olduğundan

$$\big\langle((1-\lambda)A + \lambda B)x, x\big\rangle = (1-\lambda)\big\langle Ax, x\big\rangle + \lambda\big\langle Bx, x\big\rangle \in I, \tag{3.7.7}$$

eşitliğini yazabiliriz. f foksiyonunun sürekliliğinden ve (3.7.7) eşitliğinden

$$\int_0^1 f\big(\lambda A + (1-\lambda)B\big)d\lambda$$

integrali vardır. $\lambda \in (0,1)$, $f \in S_Q O$ ve $A, B \in K \subseteq B(H)^+$ için

$$f\big(\lambda A + (1-\lambda)B\big) \leq \frac{1}{\lambda} f(A) + \frac{1}{1-\lambda} f(B) \tag{3.7.8}$$

$$\lambda(1-\lambda) f\big(\lambda A + (1-\lambda)B\big) \leq (1-\lambda) f(A) + \lambda f(B) \tag{3.7.9}$$

ve

$$\lambda(1-\lambda) f\big((1-\lambda)A + \lambda B\big) \leq \lambda f(A) + (1-\lambda) f(B) \tag{3.7.10}$$

eşitsizliklerini yazabiliriz. (3.7.9) ve (3.7.10) eşitsizliklerini taraf tarafa toplarsak,

$$\lambda(1-\lambda)\Big(f\big(\lambda A + (1-\lambda)B\big) + f\big((1-\lambda)A + \lambda B\big)\Big) \leq f(A) + f(B) \tag{3.7.11}$$

eşitsizliğini elde ederiz, (3.7.11)'in her iki tarafını $(0,1)$ kapalı aralığında λ-ya göre integralini alırsak

$$\int_0^1 \lambda(1-\lambda)\big(f\big(\lambda A + (1-\lambda)B\big) + f\big((1-\lambda)A + \lambda B\big)\big)d\lambda \leq f(A) + f(B) \tag{3.7.12}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Ayrıca

$$\int_0^1 \lambda(1-\lambda) f\big(\lambda A + (1-\lambda)B\big)d\lambda = \int_0^1 \lambda(1-\lambda) f\big((1-\lambda)A + \lambda B\big)d\lambda$$

doğru olan bu eşitliği de kullanarak bu teoremin ispatı tamamlanır.

3.8 Hilbert Uzayında Operator Godunova-Levin Fonksiyonlar İçin Hermite-Hadamard Tipli Eşitsizlikler

$f, g : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ iki operatör Godunova-Levin fonksiyon ve $A, B \in K \subseteq B(H)^+$ olsun. Bu durumda aşağıdaki şekilde reel değerli fonksiyonlar tanımlayalım.

$$M(A,B)(x) = \langle f(A)x, x\rangle\langle g(A)x, x\rangle + \langle f(B)x, x\rangle\langle g(B)x, x\rangle \ (x \in H),$$

$$N(A,B)(x) = \langle f(A)x, x\rangle\langle g(B)x, x\rangle + \langle f(B)x, x\rangle\langle g(A)x, x\rangle \ (x \in H).$$

$$P(A,B)(x) = \langle [f(A)g(A) + f(B)g(B)]x, x\rangle \ (x \in H),$$

Lemma 3.8.1 $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olsun. $A, B \in K \subseteq B(H)^+$ operatörleri için f-nin

$$[A,B] := \Big\{(1-t)A + tB;\ t \in [0,1]\Big\}$$

parçasında operatör Godunova-Levin fonksiyon olabilmesi için gerekli ve yeter koşul her $x \in H$, $\|x\| = 1$ için

$$\varphi_{x,A,B}(t) := \big\langle f((1-t)A + tB)x, x\big\rangle$$

şeklinde $\varphi_{x,A,B} : [0,1] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $[0,1]$ aralığı üzerinde operatör Godunova-Levin fonksiyon olmasıdır.

İspat. f, $[A, B]$ parçası üzerinde operatör Godunova-Levin fonksiyon olsun. Bu durumda her $t_1, t_2 \in [0,1]$ ve $\lambda \in (0,1)$ için

$$\begin{aligned}\varphi_{x,A,B}(\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2) &= \Big\langle f((1-(\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2)A + (\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2)B)x, x\Big\rangle \\ &= \Big\langle f(\lambda[(1-t_1)A + t_1 B] + (1-\lambda)[(1-t_2)A + t_2 B])x, x\Big\rangle \\ &\leq \frac{1}{\lambda}\Big\langle f((1-t_1)A + t_1 B)x, x\Big\rangle + \frac{1}{1-\lambda} f((1-t_2)A + t_2 B)x, x\Big\rangle \\ &\leq \frac{1}{\lambda}\varphi_{x,A,B}(t_1) + \frac{1}{1-\lambda}\varphi_{x,A,B}(t_2).\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.8.1 $f, g : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ iki operatör Godunova-Levin fonksiyon olsun. Bu durumda $A, B \in K \subseteq B(H)^+$ ve her $x \in H$, $\|x\| = 1$ için

$$\begin{aligned}&\int_0^1 \lambda^2(1-\lambda)^2 \langle f\big(\lambda A + (1-\lambda)B\big)x, x\rangle \langle g\big(\lambda A + (1-\lambda)B\big)x, x\rangle d\lambda \\ &\qquad \leq \frac{1}{3}M(A,B)(x) + \frac{1}{6}N(A,B)(x) \qquad (3.8.1)\end{aligned}$$

eşitsizliği doğrudur.

İspat. $x \in H$, $\|x\| = 1$ ve $\lambda \in [0,1]$ olsun. $\big\langle Ax, x\big\rangle \in Sp(A) \subseteq I$ ve $\big\langle Bx, x\big\rangle \in Sp(B) \subseteq I$ olduğundan

$$\Big\langle((1-\lambda)A + \lambda B)x, x\Big\rangle = (1-\lambda)\Big\langle Ax, x\Big\rangle + \lambda\Big\langle Bx, x\Big\rangle \in I, \qquad (3.8.2)$$

yazabiliriz. f, g nin sürekliliğinden ve (3.8.2)'den

$$\int_0^1 f\big(\lambda A + (1-\lambda)B\big)d\lambda$$

$$\int_0^1 g\big(\lambda A + (1-\lambda)B\big)d\lambda$$

ve

$$\int_0^1 (fg)\big(\lambda A + (1-\lambda)B\big)d\lambda$$

integralleri mevcuttur. $f, g \in S_Q O$ olduğundan $\lambda \in (0,1)$ ve $x \in H$ için

$$\langle f\big(\lambda A + (1-\lambda)B\big)x, x\rangle \leq \langle \frac{1}{\lambda} f(A) + \frac{1}{1-\lambda} f(B)x, x\rangle \qquad (3.8.3)$$

$$\langle g\big(\lambda A + (1-\lambda)B\big)x, x\rangle \leq \langle \frac{1}{\lambda} g(A) + \frac{1}{1-\lambda} g(B)x, x\rangle. \qquad (3.8.4)$$

yazabiliriz. (3.8.3) ve (3.8.4)' den

$$
\begin{aligned}
\langle f\big(\lambda A+(1-\lambda)B\big)x,x\rangle\langle g\big(\lambda A+(1-\lambda)B\big)x,x\rangle \;\le\; & \frac{1}{\lambda^2}\langle f(A)x,x\rangle\langle g(B)x,x\rangle \\
& +\frac{1}{\lambda(1-\lambda)}\langle f(A)x,x\rangle\langle g(B)x,x\rangle \\
& +\frac{1}{\lambda(1-\lambda)}\langle f(B)x,x\rangle\langle g(A)x,x\rangle \\
& +\frac{1}{\lambda(1-\lambda)^2}\langle f(B)x,x\rangle\langle g(B)x,x\rangle
\end{aligned} \tag{3.8.5}
$$

elde ederiz. (3.8.5)-in her iki tarafının $(0,1)$ üzerinde integrali alınırsa istenilen eşitsizlik elde edilmiş olur.

Teorem 3.8.2 $f,g : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ iki operatör Godunova-Levin fonksiyon olsun. Bu durumda $A,B \in K \subseteq B(H)^+$ ve her $x \in H$, $\|x\| = 1$ için

$$
\begin{aligned}
& \lambda^2(1-\lambda)^2\left\langle f\left(\frac{A+B}{2}\right)x,x\right\rangle\left\langle g\left(\frac{A+B}{2}\right)x,x\right\rangle \\
\le\; & 8\lambda^2(1-\lambda)^2\int_0^1\langle f\big(\lambda A+(1-\lambda)B\big)x,x\rangle\langle g\big(\lambda A+(1-\lambda)B\big)x,x\rangle d\lambda \\
& +\frac{4}{3}M(A,B)(x)+\frac{8}{3}N(A,B)(x)
\end{aligned} \tag{3.8.6}
$$

eşitsizliği doğrudur.

İspat. $f,g \in S_QO$, $\lambda \in (0,1)$ ve her $x \in H$, $\|x\| = 1$ için

$$
\begin{aligned}
& \left\langle f\left(\frac{A+B}{2}\right)x,x\right\rangle\left\langle g\left(\frac{A+B}{2}\right)x,x\right\rangle \\
=\; & \left\langle f\left(\frac{\lambda A+(1-\lambda)B}{2}+\frac{(1-\lambda)A+\lambda B}{2}\right)x,x\right\rangle \\
& \times\left\langle g\left(\frac{\lambda A+(1-\lambda)B}{2}+\frac{(1-\lambda)A+\lambda B}{2}\right)x,x\right\rangle
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\le\; & 4\Big\{\langle f\big(\lambda A+(1-\lambda)B\big)\rangle+\langle f\big((1-\lambda)A+\lambda B\big)\rangle \\
& \times\langle g\big(\lambda A+(1-\lambda)B\big)\rangle+\langle g\big((1-\lambda)A+\lambda B\big)\rangle\Big\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\leq 4\Bigg\{\Big[\langle f\big(\lambda A+(1-\lambda)B\big)x,x\rangle\langle g\big(\lambda A+(1-\lambda)B\big)x,x\rangle\Big]\\
&+\Big[\langle f\big((1-\lambda)A+tB\big)x,x\rangle\langle g\big((1-\lambda)A+\lambda B\big)x,x\rangle\Big]\\
&+\Big[\frac{1}{\lambda}\langle f(A)x,x\rangle+\frac{1}{1-\lambda}\langle f(B)x,x\rangle\Big]\\
&\times\Big[\frac{1}{1-\lambda}\langle g(A)x,x\rangle+\frac{1}{\lambda}\langle g(B)x,x\rangle\Big]\\
&+\Big[\frac{1}{1-\lambda}\langle f(A)x,x\rangle+\frac{1}{\lambda}\langle f(B)x,x\rangle\Big]\\
&\times\Big[\frac{1}{\lambda}\langle g(A)x,x\rangle+\frac{1}{1-\lambda}\langle g(B)x,x\rangle\Big]\Bigg\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= 4\Bigg\{\langle f\big(\lambda A+(1-\lambda)B\big)x,x\rangle g\big(\lambda C+(1-\lambda)D\big)x,x\rangle\Big]\\
&+\Big[\langle f\big((1-\lambda)A+\lambda B\big)x,x\rangle\langle g\big((1-\lambda)A+\lambda B\big)x,x\rangle\Big]\\
&+\frac{1}{\lambda(1-\lambda)}\Big[\langle f(A)x,x\rangle\langle g(A)x,x\rangle\Big]+\frac{1}{(\lambda)^2}\Big[\langle f(A)x,x\rangle\langle g(B)x,x\rangle\Big]\\
&+\frac{1}{(1-\lambda)^2}\Big[\langle f(B)x,x\rangle\langle g(A)x,x\rangle\Big]+\frac{1}{\lambda(1-\lambda)}\Big[\langle f(B)x,x\rangle\langle g(B)x,x\rangle\Big]\\
&+\frac{1}{\lambda(1-\lambda)}\Big[\langle f(A)x,x\rangle\langle g(A)x,x\rangle\Big]+\frac{1}{(1-\lambda)^2}\Big[\langle f(A)x,x\rangle\langle g(B)x,x\rangle\Big]\\
&+\frac{1}{(\lambda)^2}\Big[\langle f(B)x,x\rangle\langle g(A)x,x\rangle\Big]+\frac{1}{\lambda(1-\lambda)}\Big[\langle f(B)x,x\rangle\langle g(B)x,x\rangle\Big]\Bigg\}
\end{aligned}
$$

eşitsizliklerini yazabiliriz. Buradan her iki tarafın $(0,1)$ üzerinde inregrali alınırsa

$$
\begin{aligned}
&\lambda^2(1-\lambda)^2\int_0^1\Big\langle f\Big(\frac{A+B}{2}\Big)x,x\Big\rangle\Big\langle g\Big(\frac{A+B}{2}\Big)x,x\Big\rangle d\lambda\\
&\leq 4\lambda^2(1-\lambda)^2\int_0^1\Big[\langle f\big((1-\lambda)A+\lambda B\big)x,x\rangle+g\big((\lambda A+(1-\lambda)B\big)x,x\rangle\\
&+\langle f\big(\lambda A+(1-\lambda)B\big)x,x\rangle+\langle g\big((1-\lambda A+\lambda B\big)x,x\rangle)\Big]d\lambda\\
&+\frac{8}{3}M(A,B)(x)+\frac{4}{3}N(A,B)(x)
\end{aligned}
$$

elde edilir ki, bu ise ispatı tamamlar.

Teorem 3.8.3 $f,g:I\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ iki operatör Godunova-Levin fonksiyon ve $A,B\in K\subseteq$

$B(H)^+$ olsun. Bu durumda $x \in H$, $\|x\| = 1$ için

$$
\begin{aligned}
& 4\lambda^2(1-\lambda)^2\Bigg(\Bigg\langle f\Bigg(\frac{A+B}{2}\Bigg)x,x\Bigg\rangle \int_0^1 \Big[\langle g\big(\lambda A+(1-\lambda)B\big)x,x\rangle\Big]d\lambda \\
+ & \Bigg\langle g\Bigg(\frac{A+B}{2}\Bigg)x,x\Bigg\rangle \int_0^1 \Big[\langle f\big(\lambda A+(1-\lambda)B\big)x,x\rangle\Bigg)d\lambda \\
\leq & 8\lambda^2(1-\lambda)^2\int_0^1 \langle f\big(\lambda A+(1-\lambda)B\big)x,x\rangle\langle g\big(\lambda A+(1-\lambda)B\big)x,x\rangle d\lambda \\
& +\frac{4}{3}M(A,B)(x)+\frac{8}{3}N(A,B)(x)+\Bigg\langle f\Bigg(\frac{A+B}{2}\Bigg)x,x\Bigg\rangle\Bigg\langle g\Bigg(\frac{A+B}{2}\Bigg)x,x\Bigg\rangle
\end{aligned}
\tag{3.8.7}
$$

eşitsizliği doğrudur.

İspat. $f, g \in S_QO$ ve her $\lambda \in (0,1)$ için

$$
\begin{aligned}
\Bigg\langle f\Bigg(\frac{A+B}{2}\Bigg)x,x\Bigg\rangle &= \Bigg\langle f\Bigg(\frac{\lambda A+(1-\lambda)B}{2}+\frac{(1-\lambda)A+\lambda B}{2}\Bigg)x,x\Bigg\rangle \\
&\leq \Bigg\langle 2f(\lambda A+(1-\lambda)B)+2f((1-\lambda)A+tB)x,x\Bigg\rangle
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Bigg\langle g\Bigg(\frac{A+B}{2}\Bigg)x,x\Bigg\rangle &= \Bigg\langle g\Bigg(\frac{\lambda A+(1-\lambda)B}{2}+\frac{(1-\lambda)A+\lambda B}{2}\Bigg)x,x\Bigg\rangle \\
&\leq \Bigg\langle 2g(\lambda A+(1-\lambda)B)+2g((1-\lambda)A+\lambda B)x,x\Bigg\rangle.
\end{aligned}
$$

eşitliklerini yazabiliriz. Bu iki eşitsizliği çapraz olarak çarpıp, daha sonra taraf tarafa toplarsak

$$
\begin{aligned}
& \Bigg\langle f\Bigg(\frac{A+B}{2}\Bigg)x,x\Bigg\rangle\Bigg\langle 2g(tA+(1-t)B)+2g((1-t)A+tB)x,x\Bigg\rangle \\
& +\Bigg\langle g\Bigg(\frac{A+B}{2}\Bigg)x,x\Bigg\rangle\Bigg\langle 2f(tA+(1-t)B)+2f((1-t)A+tB)x,x\Bigg\rangle \\
\leq & \Bigg\langle 2f(tA+(1-t)B)+2f((1-t)A+tB)x,x\Bigg\rangle \\
& \times\Bigg\langle 2g(tA+(1-t)B)+2g((1-t)A+tB)x,x\Bigg\rangle \\
& +\Bigg\langle f\Bigg(\frac{A+B}{2}\Bigg)x,x\Bigg\rangle\Bigg\langle g\Bigg(\frac{A+B}{2}\Bigg)x,x\Bigg\rangle
\end{aligned}
$$

bulunur. Buradan

$$
\begin{aligned}
& 2\Bigg\langle f\Bigg(\frac{A+B}{2}\Bigg)x,x\Bigg\rangle\Big[\langle g\big(\lambda A+(1-\lambda)B\big)x,x\rangle+g\big((1-\lambda)A+\lambda B)\big)x,x\rangle\Big] \\
+ & 2\Bigg\langle g\Bigg(\frac{A+B}{2}\Bigg)x,x\Bigg\rangle\Big[\langle f\big(\lambda C+(1-\lambda)D\big)x,x\rangle+\langle f\big((1-\lambda)A+\lambda B)\big)x,x\rangle\Big]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\leq 4\Big\{\langle f\big(\lambda A+(1-\lambda)B\big)x,x\rangle g\big(\lambda A+(1-\lambda)B\big)x,x\rangle\Big]\\
&+\Big[\langle f\big((1-\lambda)A+\lambda B\big)x,x\rangle\langle g\big((1-\lambda)A+\lambda B\big)x,x\rangle\Big]\\
&+\frac{1}{\lambda(1-\lambda)}\Big[\langle f(A)x,x\rangle\langle g(A)x,x\rangle\Big]+\frac{1}{(\lambda)^2}\Big[\langle f(A)x,x\rangle\langle g(B)x,x\rangle\Big]\\
&+\frac{1}{(1-\lambda)^2}\Big[\langle f(B)x,x\rangle\langle g(A)x,x\rangle\Big]+\frac{1}{\lambda(1-\lambda)}\Big[\langle f(B)x,x\rangle\langle g(B)x,x\rangle\Big]\\
&+\frac{1}{\lambda(1-\lambda)}\Big[\langle f(A)x,x\rangle\langle g(A)x,x\rangle\Big]+\frac{1}{(1-\lambda)^2}\Big[\langle f(A)x,x\rangle\langle g(B)x,x\rangle\Big]\\
&+\frac{1}{(\lambda)^2}\Big[\langle f(B)x,x\rangle\langle g(B)x,x\rangle\Big]+\frac{1}{\lambda(1-\lambda)}\Big[\langle f(B)x,x\rangle\langle g(B)x,x\rangle\Big]\Big\}\\
&+\Big\langle f\Big(\frac{A+B}{2}\Big)x,x\Big\rangle\Big\langle g\Big(\frac{A+B}{2}\Big)x,x\Big\rangle
\end{aligned}
$$

elde ederiz. Ve son olarak her iki tarafın $(0,1)$ üzerinde integralini alırsak

$$
\begin{aligned}
&\lambda^2(1-\lambda)^2\Big(2\Big\langle f\Big(\frac{A+B}{2}\Big)x,x\Big\rangle\int_0^1\Big[\langle g\big(\lambda A+(1-\lambda)B\big)x,x\rangle+g\big((1-\lambda)A+\lambda B)\big)x,x\rangle\Big]d\lambda\\
+\quad&2\Big\langle g\Big(\frac{A+B}{2}\Big)x,x\Big\rangle\int_0^1\Big[\langle f\big(\lambda A+(1-\lambda)B\big)x,x\rangle+\langle f\big((1-\lambda)A+\lambda B)\big)x,x\rangle\Big]\Big)d\lambda\\
\leq\quad&4\lambda^2(1-\lambda)^2\int_0^1[\langle f\big((1-\lambda)A+\lambda B\big)x,x\rangle+g\big((\lambda A+(1-\lambda)B\big)x,x\rangle\\
&+\langle f\big(\lambda A+(1-\lambda)B\big)x,x\rangle+\langle g\big((1-\lambda)A+\lambda B\big)x,x\rangle)]d\lambda\\
&+\frac{8}{3}M(A,B)(x)+\frac{4}{3}N(A,B)(x)\\
&+\Big\langle f\Big(\frac{A+B}{2}\Big)x,x\Big\rangle\Big\langle g\Big(\frac{A+B}{2}\Big)x,x\Big\rangle
\end{aligned}
$$

bulunur ve istenilen eşitsizlik elde edilir.

3.9 Operatör Godunova-Levin Fonksiyonların Synchronous ve Asynchronous Fonksiyonlara Uygulanması

Daha önceki kısımlarda Synchronous ve Asynchronous Fonksiyonların tanımı verildiği için burada yeniden tanım vermeyeceğiz.

Teorem 3.9.1 $f,g:[m,M]\to\mathbb{R}$ iki operatör Godunova-Levin fonksiyon ve A,B de $Sp(A)\cup Sp(B)\subset[m,M]$'de sınırlı özeşlenik operatör olsun. Eğer f,g sürekli, synchronous foksiyon ve $f,g\geq 0$ ise, (3.8.1) eşitsizliği

$$\int_0^1 \lambda^2(1-\lambda)^2\langle f\big(\lambda A+(1-\lambda)B\big)x,x\rangle\langle g\big(\lambda A+(1-\lambda)B\big)x,x\rangle d\lambda$$
$$\leq \frac{1}{3}M(A,B)(x)+\frac{1}{6}N(A,B)(x)$$
$$\leq \frac{1}{2}P(A,B)(x)$$

haline dönüşür.

Teorem 3.9.2 Eğer f,g sürekli, synchronous foksiyon ise, (3.8.6) ve (3.8.7) sırasıyla

$$\begin{aligned} & \lambda^2(1-\lambda)^2\left\langle f\left(\frac{A+B}{2}\right)x,x\right\rangle\left\langle g\left(\frac{A+B}{2}\right)x,x\right\rangle \\ \leq\ & 8\lambda^2(1-\lambda)^2\int_0^1\langle f\big(\lambda A+(1-\lambda)B\big)x,x\rangle\langle g\big(\lambda A+(1-\lambda)B\big)x,x\rangle d\lambda \\ & +4P(A,B)(x) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} & \lambda^2(1-\lambda)^2\left\langle f\left(\frac{A+B}{2}\right)x,x\right\rangle\left\langle g\left(\frac{A+B}{2}\right)x,x\right\rangle \\ \leq\ & 8\lambda^2(1-\lambda)^2\int_0^1\langle f\big(\lambda A+(1-\lambda)B\big)x,x\rangle\langle g\big(\lambda A+(1-\lambda)B\big)x,x\rangle d\lambda \\ & +4P(A,B)(x)+\left\langle f\left(\frac{A+B}{2}\right)x,x\right\rangle\left\langle g\left(\frac{A+B}{2}\right)x,x\right\rangle \end{aligned}$$

haline dönüşür.

Teorem 3.9.3 Eğer f,g sürekli, asynchronous foksiyon ve $f,g\geq 0$ ise, bu durumda (3.8.1) eşitsizliği

$$\int_0^1 \lambda^2(1-\lambda)^2\langle f\big(\lambda A+(1-\lambda)B\big)x,x\rangle\langle g\big(\lambda A+(1-\lambda)B\big)x,x\rangle d\lambda$$
$$\leq \frac{1}{3}M(A,B)(x)+\frac{1}{6}N(A,B)(x)\leq\frac{1}{2}N(A,B)(x)$$

haline dönüşür.

Teorem 3.9.4 Eğer f,g sürekli, synchronous foksiyon ise, bu durumda (3.8.6) ve (3.8.7) sırasıyla

$$\begin{aligned} & \lambda^2(1-\lambda)^2\left\langle f\left(\frac{A+B}{2}\right)x,x\right\rangle\left\langle g\left(\frac{A+B}{2}\right)x,x\right\rangle \\ \leq\ & 8\lambda^2(1-\lambda)^2\int_0^1\langle f\big(\lambda A+(1-\lambda)B\big)x,x\rangle\langle g\big(\lambda A+(1-\lambda)B\big)x,x\rangle\lambda \\ & +4N(A,B)(x) \end{aligned}$$

ve

$$
\begin{aligned}
& \lambda^2(1-\lambda)^2\left\langle f\left(\frac{A+B}{2}\right)x,x\right\rangle\left\langle g\left(\frac{A+B}{2}\right)x,x\right\rangle \\
\leq\; & 8\lambda^2(1-\lambda)^2\int_0^1 \langle f\big(\lambda A+(1-\lambda)B\big)x,x\rangle\langle g\big(\lambda A+(1-\lambda)B\big)x,x\rangle d\lambda \\
& +4N(A,B)(x)+\left\langle f\left(\frac{A+B}{2}\right)x,x\right\rangle\left\langle g\left(\frac{A+B}{2}\right)x,x\right\rangle
\end{aligned}
$$

haline dönüşür.

4. SONUÇ VE ÖNERİLER

Yüksek lisans tezi olarak yapılan bu çalışma, tamamı özgün olan üçüncü bölüm ile matematik literatürüne yeni kavramlar, teoremler, sonuçlar ve uygulamalar getirmiştir. Elde edilen bu yenilikler uluslararası hakemli dergilerde [14] basılmış uluslararası [15] ve ulusal [20] sempozyumlarda sunulmuştur. İlaveten halihazırda uluslararası hakemli iki dergide inceleme aşamasında olan iki çalışmamız bulunmaktadır. İlk önce bu tezden elde edilen sonuçları ifade edip, daha sonra önerilerimizi verelim.

Yapılan bu tez çalışması ile:

1. Eşitsizlik Teorisi ve Sınırlı Operatörler Teorisi birleştirilmiştir.
2. Reel anlamda bilinen konves, p-konveks, h-konveks ve Godunova-Levin foksiyonlar sınıfı, Hilbert uzayında Hermite-Hadamard Eşitsizliği aracılığıyla operatör konveks, p-konveks, h-konveks ve Godunova-Levin fonksiyon sınıfı elde edilmiştir.
3. Elde edilen bu yeni sınıflar ile ilgili , teorem ve sonuçları verilmiştir.
4. Özel olarak, çarpımları bu sınıftan olan operatör konveks sınıflarının durumları incelenmiştir.
5. Son olarak ise, Synchronous ve Asynchrounous fonksiyonlara uygulanarak uygulaması yapılmıştır.

Şimdi bu yüksek lisans tezinden çıkan sonuçlara göre bazı öneriler verelim:

1. Bu tez çalışması, Eşitsizlik Teorisi ve Sınırlı Lineer Operatörler Teorisi'nin bir araya getirdiği için, literatürde reel anlamda bilinen fakat sınırlı lineer operatörler teorisine uygun olmak koşuluyla diğer konvekslik çeşitlerinin (s-konveks, 2.anlamda s-konveks, logaritmik konveks, v.s.) operatör kısmı yapılabilir.
2. Burada biz Hilbert uzayında Hermite-Hadamard Tipli Eşitsizlik yardımıyla, sınırlı lineer operatörlere taşıdık. Literatürde daha bir çok eşitsizlik vardır. Bunların bazılarını söylemek gerekirse Jensen, Čebyšev Fonksiyoneli için eşitsizlik, Grüss, Quasi-Grüss, Ostrowski, Trapezoidal, Taylor, v.b. tipli eşitsizlikler vardır. Dolayısıyla her biri için yeni eşitsizlikler operatör konveklik kavramı verilebilir.

3. Elde edilecek bu yeni sınıfların sadece Synchronous ve Asynchrounous fonksiyonlar için değil diğer fonksiyonlara da uygulanarak, yeni uygulama alanları bulunabilir.

KAYNAKLAR

[1] Azpeitia A. G., Convex Functions and Hadamard Inequality, Rev. Colombiana Mat., 28 (1994) 7-12.

[2] Furuta T., Hot J. M., Pečarić J., Seo Y. , Mond-Pečarić Method in Operator Inequalities for Bounded Selfadjoint Operators on a Hilbert Space, Element, Zagreb, (2005).

[3] Dragomir S. S., Pečarić J. , Persson L. E., Some inequality of Hadamard Type, Soochow J. Math., 21 (1995) 335-341.

[4] Dragomir S. S., Inequalities for Functions of Selfadjoint Operators on Hilbert Spaces(2011), http://ajmaa.org/RGMIA/monographs/InFuncOp.pdf.

[5] Pearce C. E. M., Rubinov A. M., P-Funcutions, Quasi-Convex Functions and Hadamard-Type Inequalities, J. Math. Anal. Appl., 240 (1999) 92-104.

[6] Tseng K. L., Yang G. S., Dragomir S. S., On Quasi-Convex Functions and Hadamard-Type Inequality, RGMIA Res. Rep. Coll., Article 1., 6 (3) (2003).

[7] Moslehian M. S., Najafi H., Around Operator Monotone Functions, Integr. Equ. Oper. Theory.,doi: 10.1007/s00020-011-1921-0, 71 (2011), 575–582.

[8] Dragomir S. S., The Hermite-Hadamard Type Inequalities for Operator Convex Functions, Appl. Math. Comput., 218, 3(2011), 766-772.

[9] Varošanec S., On h-Convexity, J. Math. Anal. Appl., 326 (2007), 303-311.

[10] Bombardelli M., Varošanec S., Properties Of h-Convex Functions Related to the Hermite-Hadamard-Fejer Inequalities, Computers and Matematics with Applications, 58 (2009), 1869–1877.

[11] Sarıkaya M. Z., Set E., Özdemir M. E., On Some New Inequalities of Hadamard Type Involving h-Convex Functions, Acta Math. Univ. Comenianae, Vol. LXXIX, 2 (2010), pp. 265-272.

[12] Sarıkaya M. Z., Sağlam A.,Yıldırım H., On Some New Inequalities Hadamard Type Inequalities for h-Convex Functions, Journal of Matematical Inequalities, Vol. 2, 3(2008), pp. 335-341.

[13] Burai P., Hazy A., On Approximately h-Convex Functions, Journal of Convex Analysis, 18, 2(2001).

[14] Salaş S., Unluyol E., Erdaş Y., The Hermite-Hadamard Type Inequalities for Operator p-Convex Functions in Hilbert Space, Journal of New Theory, 4(2015), 74-79.

[15] Unluyol E. , Salaş S., Erdaş Y., The Hermite-Hadamard Type Inequalities for Operator h-Convex Functions in Hilbert Space, International Conference on Applied Analysis and Mathematical Modelling,ICAAMM, June 2015, Yildiz Tecnical University Istanbul, 8-12.

[16] Erdaş Y., Unluyol E., Salaş S., The Hermite-Hadamard Type Inequalities for Operator m-Convex Functions in Hilbert Space, Journal of New Theory, 5(2015), 80-91.

[17] Pachpatte B. G., On Some Inequalities for Convex Functions, RGMIA Res. Rep. Coll., 6(E), (2003).

[18] Tunc M., On Some New Inequalities for Convex Functions, Turk. J. Math., 35, (2011), 1-7.

[19] Dragomir S. S., Ćebyśev Type İnequalities for Functions of Selfadjoint Operators in Hilbert Spaces, Linear and Multilinear Algebra, 58(2010) no. 7-8, 805-814.

[20] Salaş S., Unluyol E., Erdaş Y. , Yeni bir operatör konveks sınıfı ES_hO, Mini Matematik İstatistik Sempozyumu, 17 Aralık, Ordu Üniversitesi, Ordu, Türkiye, 9(2015).

[21] Unluyol E., Salaş S., Erdaş Y., Some New Hermite-Hadamard Type Inequalities and Applications for Two Operator ES_hO-Convex Functions in Hilbert Space, International Conference on Advancement in Mathematical Sciences, November (2015), Porto Bello Hotel Resort, Spa, Antalya, 190.

[22] Unluyol E., ErdaşY., Salaş S. Some new Hermite-Hadamard Type Inequalities for Two Operator (α, m)-Convex Functions in Hilbert Spaces, International Conference on Advancement in Mathematical Sciences, 05-07 November (2015), Porto Bello Hotel Resort, Spa, Antalya, 104.

[23] Unluyol E. , S. Salaş, Y. Erdaş, Some New Hermite-Hadamard Type Inequalities and Applications for Godunova-Levin Operator Convex Functions in Hilbert Space, International Conference on Advancement in Mathematical Sciences, 05-07 November (2015), Porto Bello Hotel Resort, Spa, Antalya, 224.

[24] Mitrinović D.S. , Lacković I. B. , Hermite and Cconvexity, Aequationes Math. 28(1985) 229-232.

[25] Pećarić J. E., Proschan F., Tong Y. L., Functions Convex, Partial Orderings, and Statistical Applications, Academic Press. Inc., San Diego, 1992.

[26] Beckenbach E. F. , Convex Functions, Bull. Amer. Math. Soc. 54(1948) 439-460.

[27] Godunova E. K., Levin V. I., Neravenstra dlja funccii širokogo Klassa Soderžaščego Vypuklye, Monotonnye Inekotorye Drugie Vidy Funkaii, Vyčislitel Mat. i Mt. Fiz., Mežvuzov Sb. Nauč. Trudov. MGPI, Moscow, (1985), 138-142.

[28] Mitrinovič D. S., Pečarić J. E., Note on a class of functions of Godunova and Levin, C.R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada, 12 (1990), 33-36.

[29] Mitrinović D. S., Pečarić J. E., Fink A. M., Classical and New Inequalities in Analysis, Kluwer Acad. Publ., (1993).

ÖZGEÇMİŞ

Adı-Soyadı	:	SEREN SALAŞ
Doğum Yeri	:	Mersin
Doğum Tarihi	:	10.01.1993
Medeni Hali	:	Bekar
Bildiği Yabancı Dil	:	İngilizce
İletişim Bilgileri	:	Ordu Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü, serensalas@gmailcom
Lise	:	Salim Yılmaz Lisesi, 2010
Lisans	:	Ordu Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü, 2014
Yüksek Lisans	:	Ordu Üniversitesi 2016