T.C.
ORDU ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BULANIK ESNEK KÜMELERİN TIP TANISINDA UYGULAMALARI

ONUR ZİHNİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ORDU 2016

TEZ ONAY

Ordu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü öğrencisi Onur ZİHNİ tarafından hazırlanan ve Yrd. Doç. Dr. Yıldıray ÇELİK danışmanlığında yürütülen "Bulanık Esnek Kümelerin Tıp Tanısında Uygulamaları" adlı bu tez, jürimiz tarafından 19 / 01 / 2016 tarihinde oy birliği / ~~oy çokluğu~~ ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Danışman	:	Yrd. Doç. Dr. Yıldıray ÇELİK	
Başkan	:	Doç. Dr. İmdat İŞCAN Matematik, Giresun Üniversitesi	İmza :
Üye	:	Doç. Dr. Selahattin MADEN Matematik, Ordu Üniversitesi	İmza :
Üye	:	Yrd. Doç. Dr. Yıldıray ÇELİK Matematik, Ordu Üniversitesi	İmza :

ONAY:

Bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulu'nun 22/01/2016 tarih ve 2016/32 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

26/01/2016

Enstitü Müdürü

Doç. Dr. Kürşat KORKMAZ

TEZ BİLDİRİMİ

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

Onur ZİHNİ

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

BULANIK ESNEK KÜMELERİN TIP TANISINDA UYGULAMALARI

Onur ZİHNİ

Ordu Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı, 2016
Yüksek Lisans Tezi, 65s.

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Yıldıray ÇELİK

Bu tezin amacı, bulanık esnek kümelerin tıp tanısında ki değişik uygulamalarını incelemek ve karar verme problemlerine çözüm geliştirmektir.

Bu çalışma iki bölümden oluşmaktadır. Bölüm 1'de çalışmamızda temel olan bazı tanım ve teoremler ifade edilmiştir. Bölüm 2 ise dört kısımdan oluşmaktadır. İlk kısımda, bulanık esnek matrisleri kullanarak tıp tanısında ilaç bağımlılığının etkisinin bir incelemesi ele alındı. İkinci kısımda, bulanık aritmetik işlemler yardımıyla bulanık esnek kümelerin tıp tanısında bir uygulaması yapıldı. Üçüncü kısımda, interval değerli bulanık esnek kümelerin tıp tanısında ki bir uygulaması ortaya konuldu. Dördüncü kısımda, genelleştirilmiş trapezoidal bulanık esnek kümelerin tıp tanısında bir uygulaması incelendi.

Anahtar Kelimeler: Bulanık küme, Esnek küme, Bulanık esnek küme.

ABSTRACT

APPLICATIONS OF FUZZY SOFT SETS IN MEDICAL DIAGNOSIS

Onur ZİHNİ

University of Ordu
Institute for Graduate Studies in Natural and Technology
Department of Mathematics, 2014
MSc. Thesis, 65p.

Supervisor: Asst. Prof. Dr. Yıldıray ÇELİK

The aim of the present thesis is to introduce different applications of fuzzy soft sets in medical diagnosis and improve the solution for decision-making problems.

This study consists of two main chapters. In Chapter 1, some definitions and theorems which are crucial for our study are stated. In Chapter 2 contains four parts. In the first part, drug addiction effect in medical diagnosis by using fuzzy soft matrices is discussed. In the second part, an application of fuzzy soft sets in medical diagnosis by using fuzzy arithmetic operations is introduced. In the third part, an application of interval-valued fuzzy soft sets in medical diagnosis is demonstrated. In the fourth part, an application of generalized fuzzy soft sets in medical diagnosis is studied.

Key Words: Fuzzy set, Soft set, Fuzzy soft set.

TEŞEKKÜR

Tez konumun belirlenmesi, çalışmanın yürütülmesi ve yazımı esnasında başta danışman hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Yıldıray ÇELİK' e ve Ordu Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü öğretim üyelerine teşekkür ederim.

Aynı zamanda, manevi desteklerini her an üzerimde hissettiğim aileme teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ŞEKİLLER LİSTESİ

ÇİZELGELER LİSTESİ

SİMGELER VE KISALTMALAR

F (U)	:U üzerindeki bütün bulanık alt kümeler
$\mu \le \nu$	:ν μ'yü kapsar
μ_α	:μ bulanık alt kümesinin α-seviye alt kümesi
Ĩ	:Trapezoidal bulanık küme
$\tilde{n}$	:Trapezoidal bulanık sayı
$\tilde{F}$ (U)	:U üzerindeki tüm interval değerli bulanık kümeler
P(U)	: U'nun güç kümesi
Es(U)	: U üzerindeki bütün esnek kümelerin ailesi
$\subseteq$	: Bulanık esnek alt küme
$(F,A)^c$	:(F,A) bulanık esnek kümesinin komplementi
$BEM_{m\times n}$	:Bulanık esnek matrisler
TB(U)	:U üzerindeki tüm trapezoidal bulanık esnek kümeler
$\tilde{F}_{\tilde{f}}$	:Genelleştirilmiş trapezoidal bulanık esnek küme
ô	:Genelleştirilmiş trapezoidal bulanık esnek alt küme
ò	:Genelleştirilmiş trapezoidal bulanık esnek kümelerin birleşimi
ó	: Genelleştirilmiş trapezoidal bulanık esnek kümelerin arakesiti
$\tilde{\varnothing}$	:Genelleştirilmiş boş trapezoidal bulanık esnek küme
Ũ	: Genelleştirilmiş tam trapezoidal bulanık esnek küme

1. GİRİŞ

Bulanık küme teorisi ilk olarak Zadeh, (1965), tarafından ortaya atılmıştır. Bulanık mantığa göre evrendeki bir nesne, o evrendeki bir kümenin mutlaka elemanıdır ama eleman olma derecesi farklıdır. Bulanık mantık, dilsel değişkenler yardımıyla biraz sıcak, ılık, uzun, çok uzun, soğuk gibi günlük hayatımızda kullandığımız kelimeler yardımıyla insan mantığına en yakın doğrulukta denetimi sağlayabilir. Bulanık mantık denetleyici kullanılarak elektrikli ev aletlerinden oto elektroniğine, gündelik kullandığımız iş makinelerinden üretim mühendisliğine, endüstriyel denetim teknolojilerinden otomasyona kadar her alanda uygulama alanı bulabilir.

Bulanık küme kavramı uygulamalı bilimlerde kullanım alanı bulduğu kadar teorik bilimlerde de kullanılmaktadır. Rosenfeld, (1971), bulanık küme kavramını kullanarak bulanık grup teoriyi geliştirmiştir. Bulanık grup teorinin temel özellikleri klasik grup teorideki sonuçlar kullanılarak elde edilmiştir. Çok sayıda araştırmacı cebirsel yapıların bu yeni kavramın özelliklerini çalışmışlardır. Bulanık gruplar kullanılarak daha karmaşık bulanık cebirsel yapılar olan bulanık halkalar ve bulanık idealler Liu, (1983), tarafından çalışılmıştır. Nanda, (1986), bulanık küme kavramını cisim ve lineer uzaylara uyarlayarak yeni bir kavram ortaya atmıştır.

Belirsizliğe farklı bir yaklaşım olan esnek küme teori ise ilk olarak Molodtsov, (1999), tarafından tanımlandı. Esnek kümeler birçok yönü ile zengin bir uygulama potansiyeline sahiptir. Bu uygulamalardan birkaç tanesi Molodtsov tarafından kendi çalışmasında incelenmiştir. Son yıllarda ise esnek kümeler üzerine yapılan çalışmalar hızlıca artmaktadır.

İlk olarak Maji ve ark., (2003), esnek küme işlemlerini tanımladı. Maji ve ark., (2002), Pawlak'ın yaklaşımlı küme teorisi yardımıyla, bir karar verme probleminde esnek kümelerin bir uygulamasını yaptı ve esnek kümelerde bazı işlemleri tanımladı. Xiao ve ark., (2003), esnek küme temelli iş rekabet kapasitesi için yapay bir hesaplama metodu üzerine bir çalışma yaptı. Chen ve ark., (2003,2005), esnek kümelerin parametre dönüşümlerini tanımladılar ve bir karar verme probleminde esnek kümelerin uygulamasını geliştirdiler. Xiao ve ark., (2005), ve Pei ve Miao, (2005), esnek tabanlı bilgi sistemleri üzerine çalışmalar sundular. Molodtsov, (2004), esnek küme teorisi üzerine dayalı bir analiz geliştirerek, esnek sayı, esnek türev, esnek integral gibi kavramları formüle etti. Ali ve ark., (2009), esnek kümelerde, iki esnek kümenin daraltılmış arakesiti, daraltılmış birleşimi, daraltılmış farkı ve genişletilmiş birleşimi gibi bazı yeni tanımlar verdiler.

Daha sonra esnek kümeler ve bunlara ait cebirsel özellikler de bazı araştırmacılar tarafından çalışılmaya başlandı. İlk olarak Aktaş ve Çağman, (2007), esnek küme teorisinin bulanık küme teorisi ve kaba küme teorisi ile olan ilişkisini incelediler. Ayrıca Molodtsov'un esnek küme tanımından yola çıkarak esnek grupları tanımladılar ve esnek grupların bazı özelliklerini incelediler. Çağman ve Enginoğlu, (2010), esnek matrisleri ve onlarla ilgili işlemleri tanımladılar. Ayrıca bir esnek maksimum-minimum karar verme metodunu oluşturdular. Feng ve ark., (2010), bulanık kümeler, kaba kümeler ve esnek kümelerin hepsini birleştirmek için bir yapı oluşturdular. Qin ve Hong, (2010), esnek kümelerin kafes yapısını inşaa ettiler, esnek eşitlik kavramını incelediler ve bunlarla ilgili bazı özellikler elde ettiler. Çelik ve ark., (2011), esnek kümeler üzerinde yeni ikili işlemler verdiler ve esnek halkalarla ilgili yeni özellikler elde ettiler.

Bazı araştırmacılar bulanık esnek kümeler ve bunlara ait cebirsel özellikler üzerinde çalıştılar. İlk olarak Maji ve ark., (2001), bulanık esnek küme kavramını verdiler ve onlar üzerinde bazı sonuçları elde ettiler. Maji ve ark., (2004), sezgisel bulanık esnek küme kavramını vererek bununla ilgili özellikleri araştırdılar. Roy ve Maji, (2007), kesin olmayan çoklu gözlem bilgisinden yola çıkarak bir nesneyi tanımlamanın yeni bir metodunu sundular. Jin-liang ve ark., (2008), bulanık esnek grup kavramını verdiler ve bunlarla ilgili bazı sonuçlar elde ettiler. Yang ve ark., (2009), interval değerli bulanık kümeleri ve esnek kümeleri birleştirerek interval değerli bulanık esnek kümeleri tanımladılar. Kong ve ark., (2009), bir karar verme problemi için bulanık esnek kümelere teorik bir yaklaşım sundular. Xiao ve ark., (2009), bulanık esnek kümeler üzerinde birleştirilmiş tahmin yaklaşımları ile ilgili çalışma sundular. Çağman ve ark., (2011), bulanık esnek kümeler üzerinde daha etkili karar verme metodunu inşaa etmek içim bulanık esnek birleştirme operasyonunu tanımladılar. Feng ve ark., (2010), bulanık esnek kümeler üzerinde karar verme problemine uygulanabilir bir yaklaşım sundular. Jiang ve ark., (2010), interval değerli sezgisel bulanık esnek kümeleri tanımladılar ve bunların bazı özelliklerini ortaya koydular. Meenakshi ve ark., (2011), interval değerli bulanık esnek matris kavramını

Sanchez'in tıp tanısı yaklaşımına uygulayarak yeni bir teknik sundular. Neog ve Sut, (2011), bulanık esnek kümelerin matris gösterimini, bulanık esnek komplement kavramını da kullanarak Sanchez'in tıp tanısı yöntemine uyguladılar. Çağman ve Enginoğlu, (2012), bulanık esnek matrisleri tanımladılar ve bu kavramı bir karar verme problemine uyguladılar. Mamoni, (2013), referans fonksiyonu yardımıyla bulanık esnek matrisleri tanımladı. Brouni ve ark., (2013), referans fonksiyonu yardımıyla bulanık esnek matrisleri bir karar verme problemine uyguladılar. Sarala ve Rajkumari, (2014), sezgisel bulanık esnek matrisleri kullanarak tıp tanısı için bir uygulama yaptı. Saika ve ark., (2003), sezgisel bulanık esnek kümeleri kullanarak tıp tanısı için bir yöntem ortaya koydular. Cheita ve Das, (2010), interval değerli bulanık esnek kümeleri kullanarak tıp tanısı için bir yöntem sundular. Çelik ve ark., (2013), bulanık aritmetik işlemler yardımıyla, bulanık esnek kümelerin tıp tanısında bir uygulamasını ele aldılar.

Bu tezin amacı, bulanık esnek kümelerin tıp tanısında ki değişik uygulamalarını incelemek ve karar verme problemlerine çözüm geliştirmektir. Bu çalışma iki bölümden oluşmaktadır. Bölüm 1'de çalışmamızda temel olan bazı tanım ve teoremler ifade edilmiştir. Bölüm 2 ise dört kısımdan oluşmaktadır. İlk kısımda bulanık esnek matrisleri kullanarak tıp tanısında ilaç bağımlılığının etkisinin bir incelemesi yapıldı. İkinci kısımda bulanık aritmetik işlemler yardımıyla bulanık esnek kümelerin tıp tanısındaki uygulamaları ele alındı. Üçüncü kısımda interval değerli bulanık esnek kümelerin tıp tanısında ki bir uygulaması ortaya konuldu. Dördüncü kısımda ise genelleştirilmiş trapezoidal bulanık esnek kümelerin tıp tanısında bir uygulaması incelendi.

2. GENEL BİLGİLER

2.1. Bulanık Kümeler

Bu bölümde bulanık küme, bulanık kümelerin birleşimi, kesişimi, tümleyeni gibi kavramlar ve bu kavramların çeşitli özellikleri tanımlanmıştır.

Bulanık küme teorisi kesin olmayan, belirsiz faaliyet ve gözlemlerinin tanımlarını içeren problemleri çözmek için geliştirilmiştir. Bir bulanık küme sürekli üyelik dereceleri olan nesneler sınıfıdır. Bu küme, her bir elemanı 0 ve 1 arasında değişen bir üyelik derecesine tayin eden üyelik (karakteristik) fonksiyonu tarafından karakterize edilir.

Bu kısımdaki Tanım ve Teoremler Kaufman, (1975), Mordeson ve Malik, (1998), Kaufmann ve Gupta, (1991), Yang ve ark., (2009) dan derlenmiştir.

Tanım 2.1.1. X boştan farklı bir küme ve I=[0,1] $\subseteq$P olsun.

$\mu_A : X \to [0,1]$ fonksiyonu tarafından karakterize edilen;

A={$(x, \mu_A(x)) \mid x \in X$ } $\subset X \times I$ kümesine X de bir bulanık küme denir. $\forall x \in X$ için $\mu_A(x)$ değerine x in A ya ait olma derecesi denir. $\mu_A(x)$ in 1 e yaklaşması x in A ya daha fazla ait olması anlamına gelmektedir (Zadeh, 1965).

Klasik küme teorisinde A bir küme ise üyelik fonksiyonu $\mu_A(x)$, $x \in A$ olduğunda 1, $x \notin A$ olduğunda 0 olmak üzere iki değer almaktadır. Bu şekilde üyelik fonksiyonu sadece 0 ve 1 değerini alan kümelere adî küme veya basit küme denir.

$\mu_A : X \to [0,1]$ fonksiyonu $\forall x \in X$ için $\mu_A(x) = 1$ olarak tanımlanırsa X kümesi,

$X = \{(x, 1) \mid x \in X\}$ bulanık kümesi olarak yazılabilir.

$\mu_\varnothing : X \to [0,1]$ fonksiyonu $\forall x \in X$ için $\mu_\varnothing(x) = 0$ olarak tanımlanırsa boş küme,

$\varnothing = \{(x, 0) \mid x \in X\}$ bulanık kümesi olarak yazılabilir.

Üyelik fonksiyonu μ olan X de bir A bulanık kümeye kısaca X in μ bulanık alt kümesi denir ve $\mu = \{(x, \mu(x)) \mid x \in X\}$ olarak yazılır.

X in tüm bulanık alt kümelerinin kümesini F (X) ile göstereceğiz.

Tanım 2.1.2. Bir X kümesinin μ ve η bulanık alt kümeleri verilsin. Eğer $\forall x \in \mathrm{X}$ için $\mu(x) = \eta(x)$ ise μ ve η bulanık alt kümeleri eşittir denir ve $\mu = \eta$ yazılır.

Tanım 2.1.3. μ ve η bir X kümesinin bulanık alt kümeleri olsun. Eğer $\forall x \in \mathrm{X}$ için $\mu(x) \leq \eta(x)$ ise η bulanık alt kümesi μ bulanık alt kümesini kapsıyor denir ve $\mu \subseteq \eta$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.4. Bir X kümesinin μ bulanık alt kümesinin μ' tümleyeni $\forall x \in \mathrm{X}$ için, $\mu'(x) = 1 - \mu(x)$ şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.1.5. μ ve η bir X kümesinin iki bulanık alt kümesi olsun. $\forall x \in \mathrm{X}$ için,
$\beta(x) = \text{maks}\ \{\mu(x), \eta(x)\}$
şeklinde tanımlı β bulanık alt kümesine, μ ve η bulanık alt kümelerinin birleşimi denir ve $\beta = \mu \cup \eta$ yazılır. $\forall x \in \mathrm{X}$ için $\varphi(x) = \min\ \{\mu(x), \eta(x)\}$ şeklinde tanımlı φ bulanık alt kümesine μ ve η bulanık alt kümelerinin kesişimi denir ve $\varphi = \mu \cap \eta$ yazılır.

Genel olarak $\mu = \{\mu_i \mid i \in \Lambda, \mu_i \in \mathrm{F(X)}\}$ bulanık alt kümeleri için, $\beta = \bigcup_{\mathrm{i} \in \Lambda} \mu_{\mathrm{i}}$ ve $\varphi = \bigcap_{\mathrm{i} \in \Lambda} \mu_i$ bulanık alt kümeleri $\forall x \in \mathrm{X}$ için,

$\beta(x) = \sup\limits_{\mathrm{i} \in \mathrm{I}}\ \{\mu_{\mathrm{i}}(x)\}$

$\varphi(x) = \inf\limits_{\mathrm{i} \in \mathrm{I}}\ \{\mu_{\mathrm{i}}(x)\}$ olarak tanımlanır.

Örnek 2.1.6.
X={1,2,3,4} olmak üzere X in μ ve ξ bulanık alt kümeleri,

$\mu(1) = \xi(4) = 0.7$
$\mu(2) = 0.9$
$\mu(3) = \xi(1) = \mu(4) = 0.5$
$\xi(2) = 1$
$\xi(3) = 0$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda,

$\mu = \{(1, 0.7), (2, 0.9), (3, 0.5), (4, 0.5)\}$
$\xi = \{(1, 0.5), (2, 1), (3, 0), (4, 0.7)\}$
$\mu' = \{(1, 0.3), (2, 0.1), (3, 0.5), (4, 0.7)\}$
$\xi' = \{(1, 0.5), (2, 0), (3, 1), (4, 0.3)\}$
$\mu \cup \xi = \{(1, 0.7), (2, 1), (3, 0.5), (4, 0.7)\}$
$\mu \cap \xi = \{(1, 0.5), (2, 0.9), (3, 0), (4, 0.5)\}$

Teorem 2.1.7. X boş olmayan bir küme $\mu, \eta, \beta \in \mathrm{F}\ (X)$ olsun. Bu durumda,

i) $\mu \subseteq \eta \Leftrightarrow \eta' \subseteq \mu'$

ii) $(\mu \cup \eta)' = \mu' \cap \eta'$, $(\mu \cap \eta)' = \mu' \cup \eta'$

iii) $\beta \cap (\mu \cup \eta) = (\beta \cap \mu) \cup (\beta \cap \eta)$, $\beta \cup (\mu \cap \eta) = (\beta \cup \mu) \cap (\beta \cup \eta)$

iv) $\mu \cap (\eta \cap \beta) = (\mu \cap \eta) \cap \beta$, $\mu \cup (\eta \cup \beta) = (\mu \cup \eta) \cup \beta$

v) $(\mu')' = \mu$

vi) $\mu \cap \eta = \varnothing \Leftrightarrow \mu \subseteq \eta'$

vii) $\{\mu_i \mid i \in \Lambda, \mu_i \in \mathrm{F(X)}\}$ bulanık alt kümeleri için

$$(\bigcup_{i\in\Lambda} \mu_i)' = \bigcap_{i\in\Lambda} \mu_i' \quad (\bigcap_{i\in\Lambda} \mu_i)' = \bigcup_{i\in\Lambda} \mu_i'$$

viii) $\mu \subseteq \mu \cup \eta$ ve $\eta \subseteq \mu \cup \eta$

ix) $\mu \subseteq \beta$ ve $\eta \subseteq \beta \Rightarrow \mu \cup \eta \subseteq \beta$ dır.

Tanım 2.1.8. X boş olmayan bir küme ve μ, X in bir bulanık alt kümesi olsun. $\mathrm{t} \in [0, 1]$ olmak üzere $\mu_{\mathrm{t}} = \{x \in \mathrm{X} \mid \mu(x) \geq \mathrm{t}\}$ kümesine μ nün bir seviye alt kümesi denir (Malik ve Mordeson, 1991).

Örnek 2.1.9. A={a, b, c} olmak üzere A nın bir μ bulanık alt kümesi,

$\mu(a) = 0.3$, $\mu(b) = 0.1$, $\mu(c) = 0.4$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda,

$0 \leq \mathrm{t} \leq 0.1$ için $\mu_{\mathrm{t}} = \{\mathrm{a, b, c}\} = \mathrm{A}$
$0.1 < \mathrm{t} \leq 0.3$ için $\mu_{\mathrm{t}} = \{\mathrm{a, c}\}$
$0.3 < \mathrm{t} \leq 0.4$ için $\mu_{\mathrm{t}} = \{\mathrm{c}\}$
$0.4 < \mathrm{t} \leq 1$ için $\mu_{\mathrm{t}} = \varnothing$ olur.

Tanım 2.1.10. "□" bir X kümesi üzerinde tanımlı ikili işlem ve $\mu, \eta \in \mathrm{F}\ (X)$ olsun. $\mu\eta$ çarpımı,

$$\mu\eta(\mathrm{x}) = \begin{cases} \sup\limits_{\mathrm{x}=y \square z} \{\min\{\mu(y), \eta(z)\}\} & , \mathrm{y, z} \in \mathrm{X} \text{ için } \mathrm{x} = y \square z \\ \\ 0 & , \forall \mathrm{y, z} \in \mathrm{X} \text{ için } \mathrm{x} \neq y \square z \end{cases}$$

şeklinde tanımlıdır.

Tanım 2.1.11. μ:U $\rightarrow$[0,1] , U $\subseteq$ P olsun.

i) μ konvekstir $\Leftrightarrow$ Her $\mathrm{a,b} \in \mathrm{U}$ ve $\alpha, \beta \in \square$ için

$\mu(\alpha.a + \beta.b) \geq \mu(a) \wedge \mu(b)$, $\alpha + \beta = 1$

ii) $\mu(a_i) = 1$ olacak şekilde $a_i \in \mathrm{U}$ mevcut ise μ’ye normal bulanık alt küme denir.

iii) Eğer μ hem konveks hem de normal bulanık alt küme ise μ ye bulanık sayı denir.

Tanım 2.1.12. Bir μ bulanık sayısı (a,b,c) üçlüsü ile parametre edilen parçalı fonksiyon ile karakterize edilebilir. μ bulanık sayısının üyelik fonksiyonu aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$\mu(u) = \begin{cases} 0 & u \langle a \\ \dfrac{u-a}{b-a} & a \leq u \leq b \\ \dfrac{c-u}{c-b} & b \leq u \leq c \\ 0 & u \rangle c \end{cases}$$

Eğer μ (u) üyelik fonksiyonu lineer ise μ ’ ye trapezoidal bulanık sayı denir.

Tanım 2.1.13. μ ve β iki trapezoidal bulanık sayı ve bu sayıların parametrik gösterimi a_2=$(\mathrm{a}_1,\mathrm{a}_2,\mathrm{a}_3)$ ve b_2=$(\mathrm{b}_1,\mathrm{b}_2,\mathrm{b}_3)$ şeklinde olsun.

Buna göre toplama ve çarpma işlemleri aşağıdaki şekilde verilir.

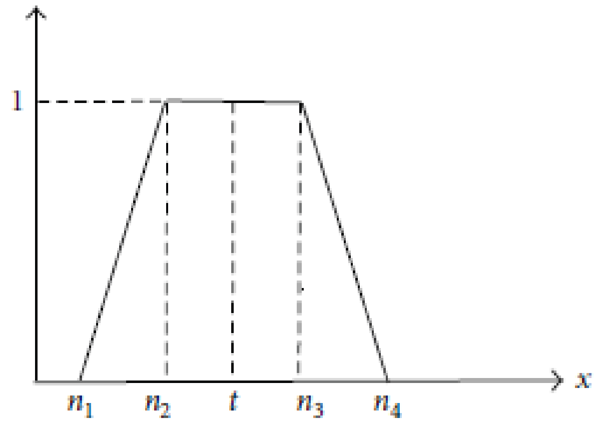
$$\mu \oplus \beta = \tilde{\mathrm{a}}_2 \oplus \tilde{\mathrm{b}}_2 = (\mathrm{a}_1,\mathrm{a}_2,\mathrm{a}_3) \oplus (\mathrm{b}_1,\mathrm{b}_2,\mathrm{b}_3) = (\mathrm{a}_1+\mathrm{b}_1,\mathrm{a}_2+\mathrm{b}_2,\mathrm{a}_3+\mathrm{b}_3)$$

$$\mu \otimes \beta = \tilde{\mathrm{a}}_2 \otimes \tilde{\mathrm{b}}_2 = (\mathrm{a}_1,\mathrm{a}_2,\mathrm{a}_3) \oplus (\mathrm{b}_1,\mathrm{b}_2,\mathrm{b}_3) = (\mathrm{a}_1 \times \mathrm{b}_1,\mathrm{a}_2 \times \mathrm{b}_2,\mathrm{a}_3 \times \mathrm{b}_3)$$

(a,b,c) üçlüsü tarafından parametre edilmiş bir bulanık sayı $e=\dfrac{a+b+b+c}{4}$ işlemi ile durulaştırılır.

Benzer şekilde (a,b,c,d) dörtlüsü tarafından parametre edilmiş bir bulanık sayı da $e=\dfrac{a+b+c+d}{4}$ işlemi ile durulaştırılır.

$\tilde{n}=(n_1,n_2,n_3,n_4)$ trapezoidal bulanık sayısı için $\mu_{\tilde{n}}(x)$ üyelik fonksiyonu aşağıdaki gibidir.



Şekil 2.1. $\mu_{\tilde{n}}(x)$ üyelik fonksiyonu

$$\mu_{\tilde{n}}(x)=\begin{cases} 0 & x\langle n_1 \\ \dfrac{x-n_1}{n_2-n_1} & n_1\le x\le n_2 \\ 1 & n_2\le x\le n_3 \\ \dfrac{x-n_4}{n_3-n_4} & n_3\le x\le n_4 \\ 0 & x\rangle n_4 \end{cases}$$

Tanım 2.1.14. $\tilde{m}=(m_1,m_2,m_3,m_4)$ ve $\tilde{n}=(n_1,n_2,n_3,n_4)$ trapezoidal bulanık sayılar olsun. Bu takdirde,

$\tilde{m}\le\tilde{n}\Leftrightarrow m_1\le n_1,\ m_2\le n_2,\ m_3\le n_3,\ m_4\le n_4$

$$\tilde{n}^c = (1-n_4, 1-n_3, 1-n_2, 1-n_1)$$

$$\tilde{z} = \tilde{m} \cup \tilde{n} = (m_1 \vee n_1, m_2 \vee n_2, m_3 \vee n_3, m_4 \vee n_4)$$

$$\tilde{z} = \tilde{m} \cap \tilde{n} = (m_1 \wedge n_1, m_2 \wedge n_2, m_3 \wedge n_3, m_4 \wedge n_4)$$

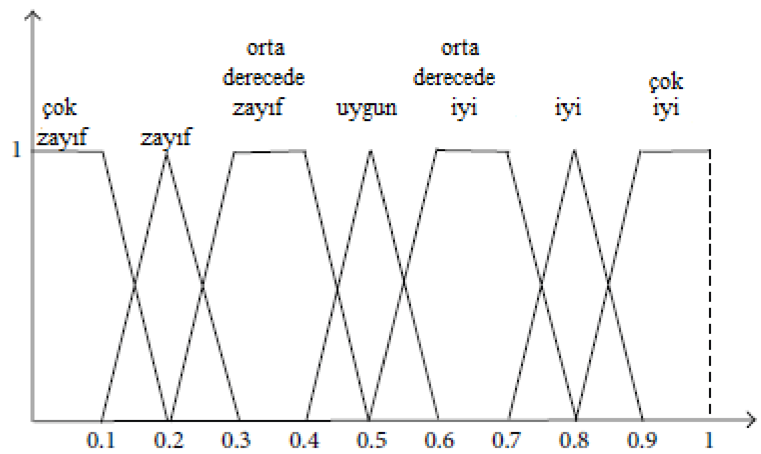
$$\tilde{z} = \tilde{m} \otimes \tilde{n} = (m_1 \times n_1, m_2 \times n_2, m_3 \times n_3, m_4 \times n_4)$$

$$\mathrm{d_v}(m,n) = \sqrt{\frac{1}{4}(m_1-n_1)^2 + (m_2-n_2)^2 + (m_3-n_3)^2 + (m_4-n_4)^2}$$

Son olarak durulaştırma işlemi ise ; $t = \dfrac{\mathrm{n_1+n_2+n_3+n_4}}{4}$ şeklinde yapılır.

Tanım 2.1.15. Bir veya birkaç farklı trapezoidal bulanık sayı ya da sayılar tarafından içerilen bir kümeye trapezoidal bulanık küme denir ve $\tilde{I}$ ile gösterilir.

Örnek 2.1.16. Yukarıda anlatılanları bir örnekle desteklemek gerekirse



Şekil 2.2. Dilsel değişkenler grafiği

$$\mu_{\tilde{n}}(x) = \begin{cases} 0 & x\langle 0.2 \\ \dfrac{x-0.2}{0.3-0.2} & 0.2 \le x \le 0.3 \\ 1 & 0.3 \le x \le 0.4 \\ \dfrac{x-0.5}{0.4-0.5} & 0.4 \le x \le 0.5 \\ 0 & x\rangle 0.5 \end{cases}$$

Tanım 2.1.17. $\mathrm{Int}([0,1])$, $[0,1]$ aralığındaki tüm kapalı interval değerli kümeler olmak üzere, U üzerindeki bir interval değerli bulanık küme $\tilde{X}:U \to \mathrm{Int}([0,1])$ ile gösterilir. U üzerindeki tüm interval değerli bulanık kümeler $\tilde{F}(U)$ ile gösterilir.

$\forall x \in \tilde{F}(U)$ ve $\forall x \in U$ için bir x elemanın üyelik derecesi

$\mu_{\hat{X}}(x) = [\mu_{\hat{X}}^{L}(x), \mu_{\hat{X}}^{U}(x)]$ şeklindedir.

Burada $\mu_{\hat{X}}^{L}(x)$ ve $\mu_{\hat{X}}^{U}(x)$ x üyesinin alt ve üst derecesi olarak adlandırılır ve $0 \leq \mu_{\hat{x}}^{L}(x) \leq \mu_{\hat{x}}^{U}(x) \leq 1$ dir.

Tanım 2.1.18. $\hat{X}, \hat{Y} \in \tilde{F}(U)$ olmak üzere

i) $\hat{X}$ ve $\hat{Y}$ nin birleşimi

$$\mu_{\hat{X}\cup\hat{Y}}(x) = \sup[\mu_{\hat{x}}^{L}(x), \mu_{\hat{y}}^{U}(x)] = [\sup[\mu_{\hat{x}}^{L}(x), \mu_{\hat{y}}^{U}(x)]] = \sup[\mu_{\hat{x}}^{L}(x), \mu_{\hat{y}}^{U}(x)]$$

ii) $\hat{X}$ ve $\hat{Y}$ nin arakesiti

$$\mu_{\hat{X}\cap\hat{Y}}(x) = \inf[\mu_{\hat{x}}^{L}(x), \mu_{\hat{y}}^{U}(x)] = [\inf[\mu_{\hat{x}}^{L}(x), \mu_{\hat{y}}^{U}(x)]] = \inf[\mu_{\hat{x}}^{L}(x), \mu_{\hat{y}}^{U}(x)]$$

iii) $\hat{X}$ in komplementi

$$\mu_{\hat{X}^{c}}(x) = \inf[\mu_{\hat{x}}^{L}(x), \mu_{\hat{y}}^{U}(x)] = [\inf[\mu_{\hat{x}}^{L}(x), \mu_{\hat{y}}^{U}(x)]] = \inf[\mu_{\hat{x}}^{L}(x), \mu_{\hat{y}}^{U}(x)]$$

olarak verilir.

2.2. Esnek Kümeler ve Bulanık Esnek Kümeler

Bu bölümde U ve E boştan farklı kümeler, $P(U)$ U 'nun güç kümesi ve $A \subseteq E$ olarak alınacaktır. Bu bölümdeki tanım ve teoremler Çelik ve ark. (2011, 2013) dan derlenmiştir.

Tanım 2.2.1. F: $A \to P(U)$ bir dönüşüm olmak üzere (F,A) ikilisine U üzerinde bir esnek küme denir. Burada A kümesine esnek kümenin parametre kümesi ve $\forall x \in A$ için $F(x)$ kümesine de x-yaklaşımlı küme denir. Des(F,A) $= \{x \in A: F(x) \neq \emptyset\}$ kümesine (F,A) esnek kümesinin desteği denir.

$\forall x \in$A için F(x)=$\varnothing$ ise (F,A)'ya boş esnek küme denir. Bu durum Φ_A notasyonu ile gösterilir.

Eğer Des(F,A)$\neq\varnothing$ ise (F,A) kümesine boştan farklı esnek küme denir.

A$\neq\varnothing$ ve $\forall x \in$A için F(x)$\neq \emptyset$ ise (F,A)'ya güçlü esnek küme denir.

Örnek 2.2.2. Örneğin bir ev satın almak istiyoruz. (F,E) satın alırken göz önünde bulunduracağımız evlerin özelliklerini tanımlayan esnek küme,

U={h_1,h_2,h_3,h_4,h_5,h_6} belirli şartlar altında 6 adet ev, E={e_1,e_2,e_3,e_4,e_5} parametreler ailesi, e_i (i=1,2,3,4,5) "pahalı", "güzel", "ağaçtan", "ucuz", "yeşil bahçeli" parametrelerini göstersin.

F:E $\rightarrow$ P(U) dönüşümü için,

$F(e_1)=\{h_2,h_4\}, F(e_2)=\{h_1,h_3\}, F(e_3)=\varnothing, F(e_4)=\{h_1,h_3,h_5\}, F(e_5)=\{h_1\}$ olsun. Bu takdirde,

(F,E)={(pahalı evler,$\{h_2,h_4\}$), (güzel evler, $\{h_1,h_3\}$), (ağaçtan evler,$\varnothing$), (ucuz evler, $\{h_1,h_3,h_5\}$), (yeşil bahçeli evler, $\{h_1\}$) şeklinde tanımlanır.

Örnekten de anlaşılacağı üzere bir kesin ve bir yaklaşık değerli küme olmak üzere her yaklaşım iki kısımdan oluşur.

Tanım 2.2.3. (F,A) U üzerinde boştan farklı bir esnek küme olsun.

i) (F,A)'ya sıfır esnek küme denir $\Leftrightarrow \forall x \in$Des(F,A) için F($x$)={0},

ii) (F,A)'ya tam esnek küme denir $\Leftrightarrow \forall x \in$Des(F,A) için F($x$)=U. Bu durum Ω_A notasyonu ile gösterilir.

Tanım 2.2.4. (F,A) ve (G,B) U üzerinde iki esnek küme olsun. (F,A)'ya (G,B)'nin esnek alt kümesi denir $\Leftrightarrow$A$\subseteq$B ve $\forall$x$\in$A için F(x)$\subseteq$G(x). Bu durum (F,A)$\subseteq$ (G,B) notasyonu ile gösterilir.

Tanım 2.2.5. U evrensel küme, E parametreler kümesi ve A$\subseteq$E olsun. F (U), U'nun bütün bulanık alt kümelerinin kümesi olmak üzere F: A$\rightarrow$F (U) ile verilen (F,A) çiftine U üzerinde tanımlı bulanık esnek bir küme denir.

Tanım 2.2.6. (F,A) ve (G,B) U üzerinde iki bulanık esnek küme olsun. Eğer

i) $A \subseteq B$

ii) $\forall a \in A$ için F(a)≤G(a) oluyorsa (F,A)'ya (G,B)'nin bulanık esnek alt kümesidir denir ve bu durum (F,A) $\subseteq$ (G,B) notasyonu ile gösterilir.

Tanım 2.2.7. (F,A) U üzerinde bir bulanık esnek küme olsun. $F^c : A \to F(U)$, $F^c(a) = 1 - F(a)$ ile tanımlanan (F^c, A) ikilisine (F,A) bulanık esnek kümesinin komplementi denir ve $(F,A)^c = (F^c, A)$ ile gösterilir.

Tanım 2.2.8. (F,A) U üzerinde bir bulanık esnek küme olsun. $\forall a \in A$ için F(a) = 1_U ise (F,A) bulanık esnek kümesine tam bulanık esnek küme, F(a) = 0_U ise (F,A) bulanık esnek kümesine boş bulanık esnek küme denir.

Tanım 2.2.9. (F,A) ve (G,B) U üzerinde iki bulanık esnek küme olsun.

i) C = $A \cup B$ olmak üzere her $c \in C$ için

$$H(c) = \begin{cases} F(c) & c \in A/B \\ G(c) & c \in B/A \\ F(c) \vee G(c) & c \in A \cap B \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan (H,C) = (F,A) $\tilde{\cup}$ (G,B) bulanık esnek kümesine (F,A) ve (G,B) bulanık esnek kümelerinin birleşimi denir.

ii) $C = A \cap B \neq \varnothing$ olmak üzere her $c \in C$ için $H(c) = F(c) \wedge G(c)$ şeklinde tanımlanan $(H,C) = (F,A) \tilde{\cap} (G,B)$ bulanık esnek kümesine (F,A) ve (G,B) bulanık esnek kümelerinin arakesiti denir.

iii) $C = A \cap B \neq \varnothing$ olmak üzere her $c \in C$ için $H(c) = F(c) \vee G(c)$ şeklinde tanımlanan $(H,C) = (F,A) \tilde{\cup} (G,B)$ bulanık esnek kümesine (F,A) ve (G,B) bulanık esnek kümelerinin daraltılmış birleşimi denir.

iv) C = $A \cup B$ olmak üzere her $c \in C$ için

$$H(c) = \begin{cases} F(c) & c \in A/B \\ G(c) & c \in B/A \\ F(c) \wedge G(c) & c \in A \cap B \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan (H,C) = (F,A) $\tilde{\cap}$ (G,B) bulanık esnek kümesine (F,A) ve (G,B) bulanık esnek kümelerinin genişletilmiş arakesiti denir.

v) $C=A\times B$ olmak üzere her $(a,b)\in A\times B$ için $H(a,b)=F(a)\wedge G(b)$ şeklinde tanımlanan $(H,C)=(F,A)\tilde{\wedge}(G,B)$ bulanık esnek kümesine (F,A) ve (G,B) bulanık esnek kümelerinin $\wedge$ - arakesiti denir.

vi) $C=A\times B$ olmak üzere her $(a,b)\in A\times B$ için $H(a,b)=F(a)\vee G(b)$ şeklinde tanımlanan $(H,C)=(F,A)\tilde{\vee}(G,B)$ bulanık esnek kümesine (F,A) ve (G,B) bulanık esnek kümelerinin $\vee$ - birleşimi denir.

2.3. İnterval Değerli Bulanık Esnek Kümeler

Tanım 2.3.1. U bir evrensel küme, E parametreler kümesi ve $A\subseteq E$ olsun. $\tilde{F}(U)$, U üzerindeki tüm interval değerli bulanık kümeler olmak üzere $F:A\to\tilde{F}(U)$ ile verilen (F,A) çiftine interval değerli bulanık esnek küme denir. U üzerinde bir interval değerli bulanık esnek küme U'nun interval değerli bulanık alt kümelerinin bir parametreler ailesidir. Üstelik interval değerli bulanık esnek küme bir esnek kümenin özel bir durumudur. $\forall e\in E$ için F(e) , $e\in E$ interval değerli bulanık bir küme olarak ele alınır. Bu küme;

$$F(e)=\{\langle x,\mu_{F(e)}(x)\rangle : x\in U\}$$

olarak yazılabilir. Eğer $\forall e\in E, \forall x\in U$ için $\mu^{L}_{F(e)}(x)=\mu^{U}_{F(e)}(x)$ ise F(e) standart bir bulanık küme ve (F,E)'de bir bulanık esnek küme olarak ele alınır.

Tanım 2.3.2. (F,A), U üzerinde interval değerli bulanık esnek küme olsun. $F^{c}:\neg A\to\tilde{F}(U)$ olmak üzere $\forall x\in\neg A$ için $F^{c}(x)=(F(\neg x))^{c}$ ile verilen $(F^{C},\neg A)$ ikilisine (F,A) interval değerli bulanık esnek kümesinin komplementi denir ve $(F,A)^{C}=(F^{C},\neg A)$ şeklinde gösterilir.

2.4. Bulanık Esnek Matrisler

Tanım 2.4.1. $U=\{u_1,u_2,u_3,...,u_m\}$, $E=\{e_1,e_2,e_3,...,e_n\}$, $A\subseteq E$ ve (F,A) U üzerinde bulanık esnek küme olsun. (F,A) bulanık esnek kümesinin matris formu

$\tilde{A}=[a_{ij}]_{mxn}$, i=1,2,3,…,m, j=1,2,3,…,n şeklindedir. Burada $[a_{ij}]=[(\mu_{ij},\gamma_{ij})]$ şeklinde olup μ_{ij} ve γ_{ij} sırasıyla keyfi bir u_i elemanının bulanık üyelik fonksiyonunu ve bulanık referans fonksiyonunu temsil eder. Ayrıca $\delta_{ij}=\mu_{ij}-\gamma_{ij}$ bize u_i elemanının bulanık üyelik değerini verir. U üzerindeki bütün $m\times n$ tipindeki bulanık esnek matrisleri $BEM_{m\times n}$(U) ile göstereceğiz. Açık olarak referans fonksiyonu sıfır olan bir bulanık esnek küme her i,j için $a_{ij}=[(\mu_{ij},0)]$ ile gösterilir.

Örnek 2.4.2. $U=\{u_1,u_2,u_3\}$ evrensel küme ve $E=\{e_1,e_2,e_3\}$ parametre kümesi olsun.

$$\begin{aligned}(F,E)=\{&F(e_1)=\{(u_1,0.6,0),(u_2,0.4,0),(u_3,0.5,0)\},\\ &F(e_2)=\{(u_1,0.7,0),(u_2,0.2,0),(u_3,0.8,0)\},\\ &F(e_3)=\{(u_1,0.9,0),(u_2,0.1,0),(u_3,0.3,0)\}\,\}\end{aligned}$$

ile verilen (F,A) bulanık esnek kümesinin matris gösterimi aşağıdaki şekildeki gibidir.

$$[a_{ij}]_{3x3}=\begin{bmatrix}(0.6,0) & (0.4,0) & (0.5,0)\\ (0.7,0) & (0.2,0) & (0.8,0)\\ (0.9,0) & (0.1,0) & (0.3,0)\end{bmatrix}$$

Tanım 2.4.3. $[a_{ij}]=[(\mu_{ij},\gamma_{ij})]$ şeklindeki bir $\tilde{A}=[a_{ij}]_{mxn}$ matrisini ele alalım. Eğer m=n iken $\delta_{ij}=1$ ise bu matrise birim bulanık esnek matris denir ve $[\tilde{1}]$ ile gösterilir.

Tanım 2.4.4. $[a_{ij}]=[(\mu_{ij},\gamma_{ij})]$ şeklinde verilen bir $\tilde{A}=[a_{ij}]_{mxn}$ matrisini alalım. $[(1-a_{ij})]$ işlemi ile elde edilen matrise bulanık esnek matrisin komplementi denir ve $\tilde{A}^c$ ile gösterilir.

Tanım 2.4.5. $[a_{ij}] = [(\mu_{ij}, \gamma_{ij})]$ şeklindeki bir $\tilde{A} = [a_{ij}]_{mxn}$ matrisini ve $[b_{jk}] = [(\mu_{jk}, \gamma_{jk})]$ şeklindeki bir $\tilde{B} = [b_{jk}]_{nxp}$ matrisi alalım. Bu iki matrisin çarpımı, $1 \le i \le m,\ 1 \le k \le p,$ j=1,2,3,…,n olmak üzere;

$\tilde{A}.\tilde{B} = [d_{ij}]_{mxp} = [\text{maxmin}(\mu_{ij}, \mu_{jk}), \text{minmax}(\gamma_{ij}, \gamma_{jk})]$ şeklindedir.

2.5. Trapezoidal Bulanık Esnek Kümeler

Bu bölümdeki tanım ve teoremler Xiao ve ark., (2012), çalışmasından derlenmiştir.

Tanım 2.5.1. TB(U), U'nun bütün trapezoidal bulanık alt kümelerinin kümesi olsun. $\tilde{F}: A \to TB(U)$ ile verilen $(\tilde{F}, A)$'ya U üzerinde bir trapezoidal bulanık esnek küme denir.

Örnek 2.5.2. Satın alınması düşünülen 5 evin kümesi $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ ve bu evlerin ucuzluk, güzellik, ebat, konum ve yeşil alan özelliklerinin oluşturduğu parametre kümesi $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ şeklinde olsun. Evlerin özelliklerini ve derecelerini veren tablo aşağıdaki gibi ele alınsın.

Çizelge 2.1. Derecelendirme tablosu

U	**ucuzluk**	**güzellik**	**ebat**	**konum**	**yeşil alan**
u_1	uygun	çok iyi	kötü	kötü	orta derecede iyi
u_2	kötü	iyi	iyi	uygun	orta derecede kötü
u_3	iyi	kötü	uygun	orta derecede kötü	kötü
u_4	orta derecede kötü	orta derecede iyi	iyi	uygun	İyi
u_5	orta derece iyi	orta derece kötü	kötü	iyi	kötü

Bu özellikler Şekil 2.2 deki grafik yardımıyla nümerik değişkenlere aktarılır.

$$\tilde{F}(e_1)=\{\frac{u_1}{(0.4,0.5,0.5,0.6)},\frac{u_2}{(0.1,0.2,0.2,0.3)},\frac{u_3}{(0.7,0.8,0.8,0.9)},\frac{u_4}{(0.2,0.3,0.4,0.5)},\frac{u_5}{(0.5,0.6,0.7,0.8)}\}$$

$$\tilde{F}(e_2)=\{\frac{u_1}{(0.8,0.9,1.0,1.0)},\frac{u_2}{(0.7,0.8,0.8,0.9)},\frac{u_3}{(0.1,0.2,0.2,0.3)},\frac{u_4}{(0.5,0.6,0.7,0.8)},\frac{u_5}{(0.2,0.3,0.4,0.5)}\}$$

$$\tilde{F}(e_3)=\{\frac{u_1}{(0.1,0.2,0.2,0.3)},\frac{u_2}{(0.7,0.8,0.8,0.9)},\frac{u_3}{(0.4,0.5,0.5,0.6)},\frac{u_4}{(0.7,0.8,0.8,0.9)},\frac{u_5}{(0.1,0.2,0.2,0.3)}\}$$

$$\tilde{F}(e_4)=\{\frac{u_1}{(0.1,0.2,0.2,0.3)},\frac{u_2}{(0.4,0.5,0.5,0.6)},\frac{u_3}{(0.2,0.3,0.4,0.5)},\frac{u_4}{(0.4,0.5,0.5,0.6)},\frac{u_5}{(0.7,0.8,0.8,0.9)}\}$$

$$\tilde{F}(e_5)=\{\frac{u_1}{(0.5,0.6,0.7,0.8)},\frac{u_2}{(0.2,0.3,0.4,0.5)},\frac{u_3}{(0.1,0.2,0.2,0.3)},\frac{u_4}{(0.7,0.8,0.8,0.9)},\frac{u_5}{(0.1,0.2,0.2,0.3)}\}$$

Uyarı 2.5.3. Yukarıdaki örnekte de görüleceği gibi trapezoidal bulanık esnek kümeler için parametrelerin öz niteliği belirsiz ve karmaşıktır. Xiao parametrelerin belirsiz niteliğinin nasıl belirteceğini ifade etmez. Bu durum modelin dezavantajıdır. Bu zorluğun üstesinden gelmek için kendisi trapezoidal bulanık olan genelleştirilmiş parametreleri inceleyeceğiz ve genelleştirilmiş trapezoidal bulanık esnek kümeyi ifade edeceğiz.

2.6. Genelleştirilmiş Trapezoidal Bulanık Esnek Kümeler

Bu bölümde Xiao ve arkadaşları tarafından verilen trapezoidal bulanık esnek küme kavramın genelleştireceğiz.

Tanım 2.6.1. U bir evren ve E'de parametre kümesi olsun. (U,E) ikilisine bir esnek evren denir. Varsayalım ki $\tilde{F}: E \to TB(U)$ ve $\tilde{f}: E \to \tilde{I}$ olsun. Burada $\tilde{f}$, E'nin bir trapezoidal bulanık alt kümesini göstermektedir.

$\tilde{F}_{\tilde{f}}: E \to TB(U) \times \tilde{I}$ ve $\forall e \in E$, için $\tilde{F}(e) \in TB(U)$ $\tilde{f}(e) \in \tilde{I}$ olmak üzere; $\tilde{F}_{\tilde{f}}(e)=(\tilde{F}(e),\tilde{f}(e))$ ile verilen $\tilde{F}_{\tilde{f}}$ 'ya (U,E) esnek evreni üzerinde bir genelleştirilmiş trapezoidal bulanık esnek küme denir. Burada her bir e_i parametresi için $\tilde{F}_{\tilde{f}}(e_i)=(\tilde{F}(e_i),\tilde{f}(e_i))$ ifadesi sadece $\tilde{F}(e_i)$ 'de U'ya ait olan elemanların trapezoidal bulanık üyelik derecelerini vermez aynı zamanda $\tilde{f}(e_i)$ tarafından ifade edilen E'ye ait olası parametrelerin trapezoidal bulanık üyelik derecelerini de verir. Genelleştirilmiş trapezoidal bulanık esnek küme aynı zamanda bir esnek kümedir. Çünkü $\tilde{F}_{\tilde{f}}:E \to TB(U)\times \tilde{I}$ bir dönüşümdür ve $\tilde{F}_{\tilde{f}}(e)=(\tilde{F}(e),\tilde{f}(e))$ şeklinde yazılır. Burada,

$$\tilde{F}(e)=\{\frac{u}{(\mu^1_{\tilde{F}(e)}(u),\mu^2_{\tilde{F}(e)}(u),\mu^3_{\tilde{F}(e)}(u),\mu^4_{\tilde{F}(e)}(u))}:u\in U\},\tilde{f}(e)=(\mu^1_{\tilde{f}(e)}(u),\mu^2_{\tilde{f}(e)}(u),\mu^3_{\tilde{f}(e)}(u),\mu^4_{\tilde{f}(e)}(u))$$

Örnek 2.6.2. Varsayalım ki Bay ve Bayan X bir ev satın almak için emlakçıya gidiyor. Konum, ucuzluk ve ebat parametrelerinin kümesi $E=\{e_1,e_2,e_3\}$ olsun ve bu parametreler ile karakterize edilen farklı tipteki 5 adet evin kümesi de $U=\{u_1,u_2,u_3,u_4,u_5\}$ olsun. X çifti değişik nitelikteki 5 evi aşağıdaki şekilde tanımlasın.

Çizelge 2.2. Derecelendirme tablosu

U	konum	fiyat	ebat
u_1	orta derece iyi	orta derece kötü	kötü
u_2	kötü	iyi	iyi
u_3	çok kötü	orta derece kötü	uygun
u_4	uygun	uygun	orta derecede iyi
u_5	iyi	kötü	kötü
$\tilde{f}$	uygun	orta derecede iyi	orta derecede kötü

Biz (U,E) evreni üzerindeki $\tilde{F}_{\tilde{f}}$ genelleştirilmiş $\tilde{F}$ bulanık esnek kümesini niteliksel dönüşümler ve nümerik değişkenler arasında dönüşüm kuralı vasıtasıyla ifade edebiliriz. Varsayalım ki

$$\tilde{F}_{\tilde{f}}(e_1)=(\{\frac{u_1}{(0.5,0.6,0.7,0.8)},\frac{u_2}{(0.1,0.2,0.2,0.3)},\frac{u_3}{(0.0,0.1,0.1,0.2)},$$
$$\frac{u_4}{(0.4,0.5,0.5,0.6)},\frac{u_5}{(0.7,0.8,0.8,0.9)}\}),(0.4,0.5,0.5,0.6))$$

$$\tilde{F}_{\tilde{f}}(e_2)=(\{\frac{u_1}{(0.2,0.3,0.4,0.5)},\frac{u_2}{(0.7,0.8,0.8,0.9)},\frac{u_3}{(0.2,0.3,0.4,0.5)},$$
$$\frac{u_4}{(0.4,0.5,0.5,0.6)},\frac{u_5}{(0.1,0.2,0.2,0.3)}\}),(0.5,0.6,0.7,0.8))$$
$$\tilde{F}_{\tilde{f}}(e_3)=(\{\frac{u_1}{(0.1,0.2,0.2,0.3)},\frac{u_2}{(0.7,0.8,0.8,0.9)},\frac{u_3}{(0.4,0.5,0.5,0.6)},$$
$$\frac{u_4}{(0.5,0.6,0.7,0.8)},\frac{u_5}{(0.1,0.2,0.2,0.3)}\}),(0.2,0.3,0.4,0.5))$$

Uyarı 2.6.3. Üstteki örnekte parametrelerin niteliğinin belirsizliğini dikkate aldık. Örneğin ucuz olma niteliği kesin değildir ve $(0.5,0.6,0.7,0.8)$ trapezoidal bulanık sayısı tarafından karakterize edilir. Fakat Örnek 2.5.2 de parametrelerin niteliğinin belirsizliği dikkate alınmamıştır. Trapezoidal bulanık esnek küme ve genelleştirilmiş trapezoidal bulanık esnek küme arasındaki fark belirsizliğin yorumlanıp yorumlanamayacağıdır. Trapezoidal bulanık esnek küme ile kıyaslandığında genelleştirilmiş trapezoidal bulanık esnek kümeler niteliksel belirsizliği daha fazla anlaşılır kılmaktadır.

Tanım 2.6.4. $\tilde{F}_{\tilde{f}}$ ve $\tilde{G}_{\tilde{g}}$, (U,E) üzerinde iki tane genelleştirilmiş trapezoidal bulanık esnek küme olsun. $\tilde{F}_{\tilde{f}}$ 'ya $\tilde{G}_{\tilde{g}}$ 'nin bir genişletilmiş trapezoidal bulanık alt kümesi denir $\Leftrightarrow$

i) $\forall e\in E$ için $\tilde{f}(e)\leq\tilde{g}(e)$ yani

$$\mu^1_{\tilde{f}(e)}\leq\mu^1_{\tilde{g}(e)},\mu^2_{\tilde{f}(e)}\leq\mu^2_{\tilde{g}(e)},\mu^3_{\tilde{f}(e)}\leq\mu^3_{\tilde{g}(e)},\mu^4_{\tilde{f}(e)}\leq\mu^4_{\tilde{g}(e)}$$

ii) $\forall e\in E$ için $\tilde{F}(e)\leq\tilde{G}(e)$ yani

$$\mu^1_{\tilde{F}(e)}\leq\mu^1_{\tilde{G}(e)},\mu^2_{\tilde{F}(e)}\leq\mu^2_{\tilde{G}(e)},\mu^3_{\tilde{F}(e)}\leq\mu^3_{\tilde{G}(e)},\mu^4_{\tilde{F}(e)}\leq\mu^4_{\tilde{G}(e)}$$

Örnek 2.6.5. Varsayalım $\tilde{F}_{\tilde{f}}$, (U,E) üzerinde genelleştirilmiş trapezoidal bulanık esnek kümesi Örnek 2.6.2 deki gibi olsun. $\tilde{G}_{\tilde{g}}$, (U,E) üzerinde başka bir genelleştirilmiş trapezoidal bulanık esnek küme aşağıdaki gibi olsun.

$$\tilde{\mathrm{G}}_{\tilde{\mathrm{g}}}(e_1) = (\{\frac{u_1}{(0.2, 0.3, 0.4, 0.5)}, \frac{u_2}{(0.0, 0.1, 0.1, 0.2)}, \frac{u_3}{(0.0, 0.1, 0.1, 0.2)},$$

$$\frac{u_4}{(0.2, 0.3, 0.4, 0.5)}, \frac{u_5}{(0.5, 0.6, 0.7, 0.8)}\}), (0.2, 0.3, 0.4, 0.5))$$

$$\tilde{\mathrm{G}}_{\tilde{\mathrm{g}}}(e_2) = (\{\frac{u_1}{(0.1, 0.2, 0.2, 0.3)}, \frac{u_2}{(0.5, 0.6, 0.7, 0.8)}, \frac{u_3}{(0.2, 0.3, 0.4, 0.5)},$$

$$\frac{u_4}{(0.2, 0.3, 0.4, 0.5)}, \frac{u_5}{(0.1, 0.2, 0.2, 0.3)}\}), (0.0, 0.1, 0.1, 0.2))$$

$$\tilde{\mathrm{G}}_{\tilde{\mathrm{g}}}(e_3) = (\{\frac{u_1}{(0.0, 0.1, 0.1, 0.2)}, \frac{u_2}{(0.7, 0.8, 0.8, 0.9)}, \frac{u_3}{(0.2, 0.3, 0.4, 0.5)},$$

$$\frac{u_4}{(0.4, 0.5, 0.5, 0.6)}, \frac{u_5}{(0.1, 0.2, 0.2, 0.3)}\}), (0.2, 0.3, 0.4, 0.5))$$

Açıkça görülüyor ki $\tilde{\mathrm{F}}_{\tilde{\mathrm{f}}}$ **ô** $\tilde{\mathrm{G}}_{\tilde{\mathrm{g}}}$ dir.

Tanım 2.6.6. $\tilde{\mathrm{F}}_{\tilde{\mathrm{f}}}$ ve $\tilde{\mathrm{G}}_{\tilde{\mathrm{g}}}$ (U,E) üzerinde iki tane genelleştirilmiş trapezoidal bulanık esnek küme olsun. Eğer

i) $\tilde{\mathrm{F}}_{\tilde{\mathrm{f}}}$ **ô** $\tilde{\mathrm{G}}_{\tilde{\mathrm{g}}}$

ii) $\tilde{\mathrm{G}}_{\tilde{\mathrm{g}}}$ **ô** $\tilde{\mathrm{F}}_{\tilde{\mathrm{f}}}$

ise $\tilde{\mathrm{F}}_{\tilde{\mathrm{f}}}$ ve $\tilde{\mathrm{G}}_{\tilde{\mathrm{g}}}$ genelleştirilmiş trapezoidal bulanık esnek kümeleri eşittir denir ve $\tilde{\mathrm{F}}_{\tilde{\mathrm{f}}} = \tilde{\mathrm{G}}_{\tilde{\mathrm{g}}}$ ile gösterilir.

Tanım 2.6.7. Varsayalım $\tilde{\mathrm{F}}_{\tilde{\mathrm{f}}}$, (U,E) üzerinde genelleştirilmiş trapezoidal bulanık esnek küme olsun. O halde $\tilde{\mathrm{F}}_{\tilde{\mathrm{f}}}$ ’nin komplementi $\tilde{\mathrm{F}}^{\mathrm{c}}_{\tilde{\mathrm{f}}}$ ile gösterilir. $\tilde{\mathrm{F}}^{\mathrm{c}}_{\tilde{\mathrm{f}}} = \tilde{\mathrm{G}}_{\tilde{\mathrm{g}}}$ olmak üzere;

$$\tilde{\mathrm{F}}^{c}(e) = \tilde{\mathrm{G}}(e) = \{\frac{u}{1-\mu^4_{\tilde{\mathrm{F}}(e)}(u), 1-\mu^3_{\tilde{\mathrm{F}}(e)}(u), 1-\mu^2_{\tilde{F}(e)}(u), 1-\mu^1_{\tilde{\mathrm{F}}(e)}(u)} : u \in \mathrm{U}\}$$

$$\tilde{\mathrm{f}}^{\mathrm{c}}(e) = \tilde{g}(e) = (1-\mu^4_{\tilde{\mathrm{f}}(e)}(u), 1-\mu^3_{\tilde{\mathrm{f}}(e)}(u), 1-\mu^2_{\tilde{\mathrm{f}}(e)}(u), 1-\mu^1_{\tilde{\mathrm{f}}(e)}(u))$$

şeklinde tanımlanır. Yukardaki tanımdan da açıkça $(\tilde{\mathrm{F}}^{\mathrm{c}}_{\tilde{\mathrm{f}}})^{\mathrm{c}} = \tilde{\mathrm{F}}_{\tilde{\mathrm{f}}}$ olduğu görülür.

Örnek 2.6.8. Örnek 2.6.5. deki $\tilde{\mathrm{G}}_{\tilde{\mathrm{g}}}$ genelleştirilmiş trapezoidal bulanık esnek kümesi için;

$$\tilde{\mathrm{G}}_{\tilde{\mathrm{g}}}{}^{c}(e_1) = (\{\frac{u_1}{(0.5,0.6,0.7,0.8)}, \frac{u_2}{(0.8,0.9,0.9,1.0)}, \frac{u_3}{(0.8,0.9,0.9,1.0)},$$

$$\frac{u_4}{(0.5,0.6,0.7,0.8)}, \frac{u_5}{(0.2,0.3,0.4,0.5)}\}), (0.5,0.6,0.7,0.8))$$

$$\tilde{\mathrm{G}}_{\tilde{\mathrm{g}}}{}^{c}(e_2) = (\{\frac{u_1}{(0.7,0.8,0.8,0.9)}, \frac{u_2}{(0.2,0.3,0.4,0.5)}, \frac{u_3}{(0.5,0.6,0.7,0.8)},$$

$$\frac{u_4}{(0.5,0.6,0.7,0.8)}, \frac{u_5}{(0.7,0.8,0.8,0.9)}\}), (0.8,0.9,0.9,1.0))$$

$$\tilde{\mathrm{G}}_{\tilde{\mathrm{g}}}{}^{c}(e_3) = (\{\frac{u_1}{(0.8,0.9,0.9,1.0)}, \frac{u_2}{(0.1,0.2,0.2,0.3)}, \frac{u_3}{(0.5,0.6,0.7,0.8)},$$

$$\frac{u_4}{(0.4,0.5,0.5,0.6)}, \frac{u_5}{(0.7,0.8,0.8,0.9)}\}), (0.5,0.6,0.7,0.8))$$

Tanım 2.6.9. $\tilde{\mathrm{F}}_{\tilde{\mathrm{f}}}$ ve $\tilde{\mathrm{G}}_{\tilde{\mathrm{g}}}$, (U,E) üzerinde iki tane genelleştirilmiş trapezoidal bulanık esnek küme olsun. Bu iki kümenin birleşimi $\tilde{\mathrm{F}}_{\tilde{\mathrm{f}}}$ ò $\tilde{\mathrm{G}}_{\tilde{\mathrm{g}}}$ şeklinde gösterilip $\tilde{\mathrm{H}}_{\tilde{\mathrm{h}}}:\mathrm{E} \to \mathrm{TB(U)} \times \tilde{\mathrm{I}}$ dönüşümü ile ifade edilir. Burada $\forall \mathrm{u} \in \mathrm{U}$ için $\tilde{\mathrm{H}}_{\tilde{\mathrm{h}}}(e) = (\tilde{\mathrm{H}}(e), \tilde{\mathrm{h}}(e))$ şeklinde olup

$$\tilde{\mathrm{H}}(e) = \tilde{\mathrm{F}}(e) \;\mathrm{t}\; \tilde{\mathrm{G}}(e) = \{\frac{u}{\mu_{\tilde{\mathrm{F}}(e)}(u) \cup \mu_{\tilde{\mathrm{G}}(e)}(u)} : u \in \mathrm{U}\}$$

$$= \{\frac{u}{(\mu^1_{\tilde{\mathrm{F}}(e)}(u) \vee \mu^1_{\tilde{\mathrm{G}}(e)}(u), \mu^2_{\tilde{\mathrm{F}}(e)}(u) \vee \mu^2_{\tilde{\mathrm{G}}(e)}(u), \mu^3_{\tilde{\mathrm{F}}(e)}(u) \vee \mu^3_{\tilde{\mathrm{G}}(e)}(u), \mu^4_{\tilde{\mathrm{F}}(e)}(u) \vee \mu^4_{\tilde{\mathrm{G}}(e)}(u))} : u \in \mathrm{U}\}$$

ve

$$\tilde{\mathrm{h}}(e) = \tilde{\mathrm{f}}(e) \cup \tilde{\mathrm{g}}(e) = (\mu^1_{\tilde{\mathrm{f}}(e)}(u) \vee \mu^1_{\tilde{\mathrm{g}}(e)}(u), \mu^2_{\tilde{\mathrm{f}}(e)}(u) \vee \mu^2_{\tilde{\mathrm{g}}(e)}(u), \mu^3_{\tilde{f}(e)}(u) \vee \mu^3_{\tilde{\mathrm{g}}(e)}(u), \mu^4_{\tilde{\mathrm{f}}(e)}(u) \vee \mu^4_{\tilde{\mathrm{g}}(e)}(u))$$

ile tanımlanır.

Tanım 2.6.10. $\tilde{\mathrm{F}}_{\tilde{\mathrm{f}}}$ ve $\tilde{\mathrm{G}}_{\tilde{\mathrm{g}}}$, (U,E) üzerinde iki tane genelleştirilmiş trapezoidal bulanık esnek küme olsun. Bu iki kümenin kesişimi $\tilde{\mathrm{F}}_{\tilde{\mathrm{f}}}$ ó $\tilde{\mathrm{G}}_{\tilde{\mathrm{g}}}$ şeklinde gösterilip

$\tilde{\mathrm{H}}_{\tilde{\mathrm{h}}}:\mathrm{E} \to \mathrm{TB(U)} \times \tilde{\mathrm{I}}$ dönüşümü ile ifade edilir. Burada $\forall \mathrm{u} \in \mathrm{U}$ için $\tilde{\mathrm{H}}_{\tilde{\mathrm{h}}}(e) = (\tilde{\mathrm{H}}(e), \tilde{\mathrm{h}}(e))$ şeklinde olup

$$\tilde{\mathrm{H}}(e) = \tilde{\mathrm{F}}(e) \ \text{u}\ \tilde{\mathrm{G}}(e) = \{\frac{u}{\mu_{\tilde{\mathrm{F}}(e)}(u) \cap \mu_{\tilde{\mathrm{G}}(e)}(u)} : u \in \mathrm{U}\}$$

$$= \{\frac{u}{(\mu^1_{\tilde{\mathrm{F}}(e)}(u) \wedge \mu^1_{\tilde{\mathrm{G}}(e)}(u), \mu^2_{\tilde{\mathrm{F}}(e)}(u) \wedge \mu^2_{\tilde{\mathrm{G}}(e)}(u), \mu^3_{\tilde{\mathrm{F}}(e)}(u) \wedge \mu^3_{\tilde{\mathrm{G}}(e)}(u), \mu^4_{\tilde{\mathrm{F}}(e)}(u) \wedge \mu^4_{\tilde{\mathrm{G}}(e)}(u))} : u \in \mathrm{U}\}$$

ve

$$\tilde{\mathrm{h}}(e) = \tilde{\mathrm{f}}(e) \cap \tilde{\mathrm{g}}(e)$$
$$= (\mu^1_{\tilde{\mathrm{f}}(e)}(u) \wedge \mu^1_{\tilde{\mathrm{g}}(e)}(u), \mu^2_{\tilde{\mathrm{f}}(e)}(u) \wedge \mu^2_{\tilde{\mathrm{g}}(e)}(u), \mu^3_{\tilde{\mathrm{f}}(e)}(u) \wedge \mu^3_{\tilde{\mathrm{g}}(e)}(u), \mu^4_{\tilde{\mathrm{f}}(e)}(u) \wedge \mu^4_{\tilde{\mathrm{g}}(e)}(u))$$

ile tanımlanır.

Örnek 2.6.11. $\tilde{\mathrm{F}}_{\tilde{\mathrm{f}}}$ genelleştirilmiş trapezoidal bulanık esnek kümesini Örnek 2.6.2 de ki gibi olsun. (U,E) üzerinde başka bir $\tilde{\mathrm{G}}_{\tilde{\mathrm{g}}}$ genelleştirilmiş trapezoidal bulanık esnek kümesini aşağıdaki gibi ele alalım.

$$\tilde{\mathrm{G}}_{\tilde{\mathrm{g}}}(e_1) = (\{\frac{u_1}{(0.4,0.5,0.5,0.6)}, \frac{u_2}{(0.0,0.1,0.1,0.2)}, \frac{u_3}{(0.7,0.8,0.8,0.9)}, \frac{u_4}{(0.5,0.6,0.7,0.8)}, \frac{u_5}{(0.8,0.9,0.9,1.0)}\}), (0.5,0.6,0.7,0.8))$$

$$\tilde{\mathrm{G}}_{\tilde{\mathrm{g}}}(e_2) = (\{\frac{u_1}{(0.4,0.5,0.5,0.6)}, \frac{u_2}{(0.2,0.3,0.4,0.5)}, \frac{u_3}{(0.5,0.6,0.7,0.8)}, \frac{u_4}{(0.2,0.3,0.4,0.5)}, \frac{u_5}{(0.0,0.1,0.1,0.2)}\}), (0.2,0.3,0.4,0.5))$$

$$\tilde{\mathrm{G}}_{\tilde{\mathrm{g}}}(e_3) = (\{\frac{u_1}{(0.5,0.6,0.7,0.8)}, \frac{u_2}{(0.5,0.6,0.7,0.8)}, \frac{u_3}{(0.7,0.8,0.8,0.9)}, \frac{u_4}{(0.2,0.3,0.4,0.5)}, \frac{u_5}{(0.4,0.5,0.5,0.6)}\}), (0.7,0.8,0.8,0.9))$$

Tanım 2.6.9'dan

$$(\tilde{\mathrm{F}}_{\tilde{\mathrm{f}}} \ \text{ò}\ \tilde{\mathrm{G}}_{\tilde{\mathrm{g}}}(e_1) = (\{\frac{u_1}{(0.5,0.6,0.7,0.8)}, \frac{u_2}{(0.1,0.2,0.2,0.3)}, \frac{u_3}{(0.7,0.8,0.8,0.9)}, \frac{u_4}{(0.5,0.6,0.7,0.8)}, \frac{u_5}{(0.4,0.5,0.5,0.6)}\}, (0.5,0.6,0.7,0.8))$$

$$(\tilde{F}_{\tilde{f}}\ \text{ò}\ \tilde{G}_{\tilde{g}}(e_2) = (\{\frac{u_1}{(0.4,0.5,0.5,0.6)}, \frac{u_2}{(0.7,0.8,0.8,0.9)}, \frac{u_3}{(0.5,0.6,0.7,0.8)},$$

$$\frac{u_4}{(0.4,0.5,0.5,0.6)}, \frac{u_5}{(0.1,0.2,0.2,0.3)}\}, (0.5,0.6,0.7,0.8))$$

$$(\tilde{F}_{\tilde{f}}\ \text{ò}\ \tilde{G}_{\tilde{g}}(e_3) = (\{\frac{u_1}{(0.5,0.6,0.7,0.8)}, \frac{u_2}{(0.7,0.8,0.8,0.9)}, \frac{u_3}{(0.7,0.8,0.8,0.9)},$$

$$\frac{u_4}{(0.5,0.6,0.7,0.8)}, \frac{u_5}{(0.4,0.5,0.5,0.6)}\}, (0.7,0.8,0.8,0.9))$$

Tanım 2.6.10'dan

$$(\tilde{F}_{\tilde{f}}\ \text{ó}\ \tilde{G}_{\tilde{g}}(e_1) = (\{\frac{u_1}{(0.4,0.5,0.5,0.6)}, \frac{u_2}{(0.0,0.1,0.1,0.2)}, \frac{u_3}{(0.0,0.1,0.1,0.2)},$$

$$\frac{u_4}{(0.4,0.5,0.5,0.6)}, \frac{u_5}{(0.7,0.8,0.8,0.9)}\}, (0.4,0.5,0.5,0.6))$$

$$(\tilde{F}_{\tilde{f}}\ \text{ó}\ \tilde{G}_{\tilde{g}}(e_2) = (\{\frac{u_1}{(0.2,0.3,0.4,0.5)}, \frac{u_2}{(0.2,0.3,0.4,0.5)}, \frac{u_3}{(0.2,0.3,0.4,0.5)},$$

$$\frac{u_4}{(0.2,0.3,0.4,0.5)}, \frac{u_5}{(0.0,0.1,0.1,0.2)}\}, (0.2,0.3,0.4,0.5))$$

$$(\tilde{F}_{\tilde{f}}\ \text{ó}\ \tilde{G}_{\tilde{g}}(e_3) = (\{\frac{u_1}{(0.1,0.2,0.2,0.3)}, \frac{u_2}{(0.5,0.6,0.7,0.8)}, \frac{u_3}{(0.4,0.5,0.5,0.6)},$$

$$\frac{u_4}{(0.2,0.3,0.4,0.5)}, \frac{u_5}{(0.1,0.2,0.2,0.3)}\}, (0.2,0.3,0.4,0.5))$$

Tanım 2.6.12. Bir genelleştirilmiş trapezoidal bulanık esnek kümeye genelleştirilmiş boş trapezoidal bulanık esnek küme denir $\Leftrightarrow \tilde{F}_{\tilde{f}}: E \to TB(U) \times \tilde{I}$ olmak üzere $\forall\ e \in E$ için $\tilde{F}_{\tilde{f}}(e) = (\tilde{F}(e), \tilde{f}(e)),\ \tilde{F}(e) = \{\frac{u}{(0,0,0,0)}\} : u \in U\}$ ve $\tilde{f}(e) = (0,0,0,0)$ dir. Bu durum $\tilde{\emptyset}$ notasyonu ile gösterilir.

Tanım 2.6.13. Bir genelleştirilmiş trapezoidal bulanık esnek kümeye genelleştirilmiş tam trapezoidal bulanık esnek küme denir $\Leftrightarrow \tilde{F}_{\tilde{f}}: E \to TB(U) \times \tilde{I}$ olmak üzere $\forall\ e \in E$ için $\tilde{F}_{\tilde{f}}(e) = (\tilde{F}(e), \tilde{f}(e)),\ \tilde{F}(e) = \{\frac{u}{(1,1,1,1)}\} : u \in U\}$ ve $\tilde{f}(e) = (1,1,1,1)$ dir. Bu durum $\tilde{U}$ notasyonu ile gösterilir.

Teorem 2.6.14. $\tilde{F}_{\tilde{f}}$, (U,E) üzerinde bir genelleştirilmiş bulanık esnek küme olsun. Bu takdirde;

1) $\tilde{F}_{\tilde{f}}\ \tilde{o}\ \tilde{\varnothing} = \tilde{F}_{\tilde{f}},\ \tilde{F}_{\tilde{f}}\ \tilde{o}\ \tilde{\varnothing} = \tilde{\varnothing}$

2) $\tilde{F}_{\tilde{f}}\ \tilde{o}\ \tilde{U}=\tilde{U},\ \tilde{F}_{\tilde{f}}\ \tilde{o}\ \tilde{U}=\tilde{F}_{\tilde{f}}$

Uyarı 2.6.15. $\tilde{F}_{\tilde{f}}$, (U,E) üzerinde bir genelleştirilmiş trapezoidal bulanık esnek küme olsun. Eğer $\tilde{F}_{\tilde{f}} \neq \tilde{U}$ ya da $\tilde{F}_{\tilde{f}} \neq \tilde{\varnothing}$ ise $\tilde{F}_{\tilde{f}}\ \tilde{o}\ \tilde{F}_{\tilde{f}}^{c} \neq \tilde{U}$ ve $\tilde{F}_{\tilde{f}}\ \tilde{o}\ \tilde{F}_{\tilde{f}}^{c} \neq \tilde{\varnothing}$ olur.

Teorem 2.6.16. $\tilde{F}_{\tilde{f}}$, $\tilde{G}_{\tilde{g}}$ ve $\tilde{H}_{\tilde{h}}$, (U,E) üzerinde üç tane genelleştirilmiş trapezoidal bulanık esnek kümeler olsun. Bu takdirde;

i) $\tilde{F}_{\tilde{f}}\ \tilde{o}\ \tilde{G}_{\tilde{g}}=\tilde{G}_{\tilde{g}}\ \tilde{o}\ \tilde{F}_{\tilde{f}}$

ii) $\tilde{F}_{\tilde{f}}\ \tilde{o}\ \tilde{G}_{\tilde{g}}=\tilde{G}_{\tilde{g}}\ \tilde{o}\ \tilde{F}_{\tilde{f}}$

iii) $\tilde{F}_{\tilde{f}}\ \tilde{o}\ (\tilde{G}_{\tilde{g}}\ \tilde{o}\ \tilde{H}_{\tilde{h}}) = (\tilde{F}_{\tilde{f}}\ \tilde{o}\ \tilde{G}_{\tilde{g}})\ \tilde{o}\ \tilde{H}_{\tilde{h}}$

iv) $\tilde{F}_{\tilde{f}}\ \tilde{o}\ (\tilde{G}_{\tilde{g}}\ \tilde{o}\ \tilde{H}_{\tilde{h}}) = (\tilde{F}_{\tilde{f}}\ \tilde{o}\ \tilde{G}_{\tilde{g}})\ \tilde{o}\ \tilde{H}_{\tilde{h}}$

Teorem 2.6.17. $\tilde{F}_{\tilde{f}}$ ve $\tilde{G}_{\tilde{g}}$, (U,E) üzerinde iki tane genelleştirilmiş trapezoidal bulanık esnek küme olsun. Bu takdirde;

1) $(\tilde{F}_{\tilde{f}}\ \tilde{o}\ \tilde{G}_{\tilde{g}})^{c} = \tilde{F}_{\tilde{f}}^{c}\ \tilde{o}\ \tilde{G}_{\tilde{g}}^{c}$

2) $(\tilde{F}_{\tilde{f}}\ \tilde{o}\ \tilde{G}_{\tilde{g}})^{c} = \tilde{F}_{\tilde{f}}^{c}\ \tilde{o}\ \tilde{G}_{\tilde{g}}^{c}$

ve $\forall e \in E$ için

$$
\begin{aligned}
(\tilde{F}_{\tilde{f}}\ \tilde{o}\ \tilde{G}_{\tilde{g}})^{c} &= (\tilde{F}(e)\ \grave{o}\ \tilde{G}(e), \tilde{f}(e) \cup \tilde{g}(e))^{c} \\
&= (\tilde{F}^{c}(e)\ \acute{o}\ \tilde{G}^{c}(e), \tilde{f}^{c}(e) \cap \tilde{g}^{c}(e)) \\
&= (\tilde{F}^{c}(e), \tilde{f}^{c}(e))\ \tilde{o}\ (\tilde{G}^{c}(e), \tilde{g}^{c}(e)) = \tilde{F}_{\tilde{f}}^{c}\ \tilde{o}\ \tilde{G}_{\tilde{g}}^{c}
\end{aligned}
$$

Teorem 2.6.18. $\tilde{F}_{\tilde{f}}$, $\tilde{G}_{\tilde{g}}$ ve $\tilde{H}_{\tilde{h}}$, (U,E) üzerinde üç tane genelleştirilmiş trapezoidal bulanık esnek küme olsun. Bu takdirde;

i) $\tilde{F}_{\tilde{f}}\ \tilde{o}\ (\tilde{G}_{\tilde{g}}\ \tilde{o}\ \tilde{H}_{\tilde{h}}) = (\tilde{F}_{\tilde{f}}\ \tilde{o}\ \tilde{G}_{\tilde{g}})\ \acute{o}\ (\tilde{F}_{\tilde{f}}\ \tilde{o}\ \tilde{H}_{\tilde{h}})$

ii) $\tilde{F}_{\tilde{f}}\ \tilde{o}\ (\tilde{G}_{\tilde{g}}\ \tilde{o}\ \tilde{H}_{\tilde{h}}) = (\tilde{F}_{\tilde{f}}\ \tilde{o}\ \tilde{G}_{\tilde{g}})\ \tilde{o}\ (\tilde{F}_{\tilde{f}}\ \tilde{o}\ \tilde{H}_{\tilde{h}})$

Tanım 2.6.19. $(\tilde{F}_{\tilde{f}},A)$ ve $(\tilde{G}_{\tilde{g}},B)$, (U,E) üzerinde iki tane genelleştirilmiş trapezoidal bulanık esnek küme olsun. $\forall(\alpha,\beta)\in A\times B$ için $\tilde{H}_{\tilde{h}}(\alpha,\beta)=(\tilde{H}(\alpha,\beta),\tilde{h}(\alpha,\beta))$ olmak üzere

$$\tilde{H}(\alpha,\beta)=\tilde{F}(\alpha)\,\acute{o}\,\tilde{G}(\beta)=\{\frac{u}{\mu_{\tilde{F}(\alpha)}(u)\cap\mu_{\tilde{G}(\beta)}(u)}:u\in U\} \text{ ve}$$

$$\tilde{h}(\alpha,\beta)=\mu_{\tilde{f}(\alpha)}\cap\mu_{\tilde{g}(\beta)}$$

ile verilen $(\tilde{H}_{\tilde{h}},A\times B)$ genelleştirilmiş trapezoidal bulanık esnek kümesine $(\tilde{F}_{\tilde{f}},A)$ ve $(\tilde{G}_{\tilde{g}},B)$ nin $\wedge$- arakesiti denir ve $(\tilde{F}_{\tilde{f}},A)\wedge(\tilde{G}_{\tilde{g}},B)=(\tilde{H}_{\tilde{h}},A\times B)$ ile gösterilir.

Tanım 2.6.20. $(\tilde{F}_{\tilde{f}},A)$ ve $(\tilde{G}_{\tilde{g}},B)$, (U,E) üzerinde iki tane genelleştirilmiş trapezoidal bulanık esnek küme olsun. $\forall(\alpha,\beta)\in A\times B$ için $\tilde{H}_{\tilde{h}}(\alpha,\beta)=(\tilde{H}(\alpha,\beta),\tilde{h}(\alpha,\beta))$ olmak üzere

$$\tilde{H}(\alpha,\beta)=\tilde{F}(\alpha)\,\grave{o}\,\tilde{G}(\beta)=\{\frac{u}{\mu_{\tilde{F}(\alpha)}(u)\cup\mu_{\tilde{G}(\beta)}(u)}:u\in U\} \text{ ve } \tilde{h}(\alpha,\beta)=\mu_{\tilde{f}(\alpha)}\cup\mu_{\tilde{g}(\beta)}$$

ile verilen $(\tilde{H}_{\tilde{h}},A\times B)$ genelleştirilmiş trapezoidal bulanık esnek kümesine $(\tilde{F}_{\tilde{f}},A)$ ve $(\tilde{G}_{\tilde{g}},B)$ nin $\vee$- arakesiti denir ve $(\tilde{F}_{\tilde{f}},A)\vee(\tilde{G}_{\tilde{g}},B)=(\tilde{H}_{\tilde{h}},A\times B)$ ile gösterilir.

Teorem 2.6.21. $(\tilde{F}_{\tilde{f}},A)$ ve $(\tilde{G}_{\tilde{g}},B)$ (U,E) üzerinde iki tane genelleştirilmiş trapezoidal bulanık esnek küme olsun. Bu takdirde;

i) $((\tilde{F}_{\tilde{f}},A)\wedge(\tilde{G}_{\tilde{g}},B))^c=(\tilde{F}_{\tilde{f}},A)^c\vee(\tilde{G}_{\tilde{g}},B)^c$

ii) $((\tilde{F}_{\tilde{f}},A)\vee(\tilde{G}_{\tilde{g}},B))^c=(\tilde{F}_{\tilde{f}},A)^c\wedge(\tilde{G}_{\tilde{g}},B)^c$

Teorem 2.6.22. $(\tilde{F}_{\tilde{f}},A)$, $(\tilde{G}_{\tilde{g}},B)$ ve $(\tilde{H}_{\tilde{h}},C)$, (U,E) üzerinde üç tane genelleştirilmiş trapezoidal bulanık esnek küme olsun. Bu takdirde;

i) $(\tilde{F}_{\tilde{f}},A)\wedge((\tilde{G}_{\tilde{g}},B)\wedge(\tilde{H}_{\tilde{h}},C))=((\tilde{F}_{\tilde{f}},A)\wedge(\tilde{G}_{\tilde{g}},B))\wedge(\tilde{H}_{\tilde{h}},C)$

ii) $(\tilde{F}_{\tilde{f}},A) \vee ((\tilde{G}_{\tilde{g}},B) \vee (\tilde{H}_{\tilde{h}},C)) = ((\tilde{F}_{\tilde{f}},A) \vee (\tilde{G}_{\tilde{g}},B)) \vee (\tilde{H}_{\tilde{h}},C)$

iii) $(\tilde{F}_{\tilde{f}},A) \wedge ((\tilde{G}_{\tilde{g}},B) \vee (\tilde{H}_{\tilde{h}},C)) = ((\tilde{F}_{\tilde{f}},A) \wedge (\tilde{G}_{\tilde{g}},B)) \vee ((\tilde{F}_{\tilde{f}},A) \wedge (\tilde{H}_{\tilde{h}},C))$

iv) $(\tilde{F}_{\tilde{f}},A) \vee ((\tilde{G}_{\tilde{g}},B) \wedge (\tilde{H}_{\tilde{h}},C)) = ((\tilde{F}_{\tilde{f}},A) \vee (\tilde{G}_{\tilde{g}},B)) \wedge ((\tilde{F}_{\tilde{f}},A) \vee (\tilde{H}_{\tilde{h}},C))$

Grup karar problemlerinde parametrelerin nitelikleri belirsiz ve kesin değilken genelleştirilmiş trapezoidal bulanık esnek kümeler, trapezoidal bulanık esnek kümelere göre daha gerçekçi kararlar vermemizi sağlar. Aşağıdaki örnekte bu durumu açıklayalım.

Örnek 2.6.23. Örnek 2.6.2 dikkate alınırsa aynı evin belirsiz nitelikleri serisinde herkes farklı fikre sahiptir. Bayan X' e göre niteliksel değişkenlerle değişik özellikteki 5 evin özellikleri aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Çizelge 2.3. Derecelendirme tablosu

U	konum	fiyat	ebat
u_1	iyi	uygun	orta derece kötü
u_2	orta derece kötü	kötü	orta derece iyi
u_3	çok kötü	orta derece kötü	uygun
u_4	orta derece iyi	iyi	iyi
u_5	uygun	kötü	çok kötü
$\tilde{g}$	iyi	uygun	iyi

Örnek 2.6.2'ye benzer şekilde bir $\tilde{G}_{\tilde{g}}$ genelleştirilmiş trapezoidal bulanık esnek kümesini aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$\tilde{G}_{\tilde{g}}(e_1) = (\{\frac{u_1}{(0.7,0.8,0.8,0.9)}, \frac{u_2}{(0.2,0.3,0.4,0.5)}, \frac{u_3}{(0.0,0.1,0.1,0.2)}, \frac{u_4}{(0.5,0.6,0.7,0.8)}, \frac{u_5}{(0.4,0.5,0.5,0.6)}\}, (0.7,0.8,0.8,0.9))$$

$$\tilde{G}_{\tilde{g}}(e_2) = (\{\frac{u_1}{(0.4,0.5,0.5,0.6)}, \frac{u_2}{(0.1,0.2,0.2,0.3)}, \frac{u_3}{(0.2,0.3,0.4,0.5)}, \frac{u_4}{(0.7,0.8,0.8,0.9)}, \frac{u_5}{(0.1,0.2,0.2,0.3)}\}, (0.4,0.5,0.5,0.6))$$

$$\tilde{\mathrm{G}}_{\tilde{g}}(e_3) = (\{\frac{u_1}{(0.2,0.3,0.4,0.5)}, \frac{u_2}{(0.5,0.6,0.7,0.8)}, \frac{u_3}{(0.4,0.5,0.5,0.6)},$$
$$\frac{u_4}{(0.5,0.6,0.7,0.8)}, \frac{u_5}{(0.0,0.1,0.1,0.2)}\}, (0.7,0.8,0.8,0.9))$$

Evli çiftler ev tercihlerinde farklı düşündüğünde biz $\wedge$ operatörünü kullanmalıyız. Dolayısıyla Tanım 2.6.19 yardımıyla aşağıdaki genelleştirilmiş trapezoidal bulanık esnek kümeyi elde ederiz.

$$\tilde{\mathrm{H}}_{\tilde{h}}(e_1,e_1) = (\{\frac{u_1}{(0.5,0.6,0.7,0.8)}, \frac{u_2}{(0.1,0.2,0.2,0.3)}, \frac{u_3}{(0.0,0.1,0.1,0.2)},$$
$$\frac{u_4}{(0.4,0.5,0.5,0.6)}, \frac{u_5}{(0.4,0.5,0.5,0.6)}\}, (0.4,0.5,0.5,0.6))$$

$$\tilde{\mathrm{H}}_{\tilde{h}}(e_1,e_2) = (\{\frac{u_1}{(0.4,0.5,0.5,0.6)}, \frac{u_2}{(0.1,0.2,0.2,0.3)}, \frac{u_3}{(0.0,0.1,0.1,0.2)},$$
$$\frac{u_4}{(0.4,0.5,0.5,0.6)}, \frac{u_5}{(0.1,0.2,0.2,0.3)}\}, (0.4,0.5,0.5,0.6))$$

$$\tilde{\mathrm{H}}_{\tilde{h}}(e_1,e_3) = (\{\frac{u_1}{(0.2,0.3,0.4,0.5)}, \frac{u_2}{(0.1,0.2,0.2,0.3)}, \frac{u_3}{(0.0,0.1,0.1,0.2)},$$
$$\frac{u_4}{(0.4,0.5,0.5,0.6)}, \frac{u_5}{(0.0,0.1,0.1,0.2)}\}, (0.4,0.5,0.5,0.6))$$

$$\tilde{\mathrm{H}}_{\tilde{h}}(e_2,e_1) = (\{\frac{u_1}{(0.2,0.3,0.4,0.5)}, \frac{u_2}{(0.1,0.2,0.2,0.3)}, \frac{u_3}{(0.0,0.1,0.1,0.2)},$$
$$\frac{u_4}{(0.4,0.5,0.5,0.6)}, \frac{u_5}{(0.1,0.2,0.2,0.3)}\}, (0.5,0.6,0.7,0.8))$$

$$\tilde{\mathrm{H}}_{\tilde{h}}(e_2,e_2) = (\{\frac{u_1}{(0.2,0.3,0.4,0.5)}, \frac{u_2}{(0.1,0.2,0.2,0.3)}, \frac{u_3}{(0.2,0.3,0.4,0.5)},$$
$$\frac{u_4}{(0.4,0.5,0.5,0.6)}, \frac{u_5}{(0.1,0.2,0.2,0.3)}\}, (0.4,0.5,0.5,0.6))$$

$$\tilde{\mathrm{H}}_{\tilde{h}}(e_2,e_3) = (\{\frac{u_1}{(0.2,0.3,0.4,0.5)}, \frac{u_2}{(0.5,0.6,0.7,0.8)}, \frac{u_3}{(0.2,0.3,0.4,0.5)},$$
$$\frac{u_4}{(0.4,0.5,0.5,0.6)}, \frac{u_5}{(0.0,0.1,0.1,0.2)}\}, (0.5,0.6,0.7,0.8))$$

$$\tilde{\mathrm{H}}_{\tilde{h}}(e_3,e_1) = (\{\frac{u_1}{(0.1,0.2,0.2,0.3)}, \frac{u_2}{(0.2,0.3,0.4,0.5)}, \frac{u_3}{(0.0,0.1,0.1,0.2)},$$
$$\frac{u_4}{(0.5,0.6,0.7,0.8)}, \frac{u_5}{(0.1,0.2,0.2,0.3)}\}, (0.2,0.3,0.4,0.5))$$

$$\tilde{\text{H}}_{\tilde{\text{h}}}(e_3,e_2)=(\{\frac{u_1}{(0.1,0.2,0.2,0.3)},\frac{u_2}{(0.1,0.2,0.2,0.3)},\frac{u_3}{(0.2,0.3,0.4,0.5)},$$
$$\frac{u_4}{(0.5,0.6,0.7,0.8)},\frac{u_5}{(0.1,0.2,0.2,0.3)}\},(0.2,0.3,0.4,0.5))$$

$$\tilde{\text{H}}_{\tilde{\text{h}}}(e_3,e_3)=(\{\frac{u_1}{(0.1,0.2,0.2,0.3)},\frac{u_2}{(0.5,0.6,0.7,0.8)},\frac{u_3}{(0.4,0.5,0.5,0.6)},$$
$$\frac{u_4}{(0.5,0.6,0.7,0.8)},\frac{u_5}{(0.0,0.1,0.1,0.2)}\},(0.2,0.3,0.4,0.5))$$

Burada elde edilen verilerin durulaştırılmış değer tablosu ve derece tablosu aşağıdaki gibidir.

Çizelge 2.4. Durulaştırılmış değer tablosu

U	(e_1,e_1)	(e_1,e_2)	(e_1,e_3)	(e_2,e_1)	(e_2,e_2)	(e_2,e_3)	(e_3,e_1)	(e_3,e_2)	(e_3,e_3)
u_1	0.65	0.50	0.35	0.35	0.35	0.35	0.20	0.20	0.20
u_2	0.20	0.20	0.20	0.43	0.20	0.65	0.35	0.20	0.65
u_3	0.10	0.10	0.10	0.10	0.35	0.35	0.10	0.35	0.50
u_4	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.65	0.65	0.65
u_5	0.50	0.20	0.10	0.20	0.20	0.10	0.20	0.20	0.10
λ	0.50	0.50	0.50	0.65	0.50	0.65	0.50	0.35	0.35

Çizelge 2.5. Durulaştırılmış derece tablosu

	(e_1,e_1)	(e_1,e_2)	(e_1,e_3)	(e_2,e_1)	(e_2,e_2)	(e_2,e_3)	(e_3,e_1)	(e_3,e_2)	(e_3,e_3)
u_i	u_1	u_1,u_4	u_4	u_4	u_4	u_2	u_4	u_4	u_2,u_4
Yüksek Derece	-	0.50	0.50	0.50	-	0.65	0.65	0.65	-
Olası Derece	-	0.50	0.50	0.65	-	0.65	0.35	0.35	-

Görüldüğü gibi $\tilde{H}_{\tilde{h}}(e_i, e_j)$'nin her elemanı bulanık matris olarak elde edilir. Bu şekilde evli bir çiftin ihtiyacı olan en iyi evi tanımlayabiliriz. Bunu yaparken son satır hariç her bir sütundaki en yüksek nümerik değeri işaretleriz. Son satır parametre çiftlerinin her birine karşı olası derecelerin her bir evin değeri ile ilgili olası (λ) durulaştırma derecesi ile bu nümerik değerlerin çarpımının toplamı alınarak hesaplanır. Yüksek skora sahip ev istenilen evdir. Burada (e_i, e_i) şeklindeki çiftlerin değerlerini almayız. Çünkü her iki parametrede aynıdır. Skor işlemi aşağıda verilmiştir.

$$\text{skor}(u_1) = 0.5 \times 0.5 = 0.25$$

$$\text{skor}(u_2) = 0.65 \times 0.65 = 0.42$$

$$\text{skor}(u_4) = 0.5 \times 0.5 + 0.5 \times 0.5 + 0.5 \times 0.65 + 0.65 \times 0.35 + 0.65 \times 0.35 = 1.28$$

Bu sonuca göre u_4 evi satın alınır.

Uyarı 2.6.24. Örnek 2.6.23 de görüldüğü gibi bir karar verme problemi uygulamasında genelleştirilmiş trapezoidal bulanık esnek küme, trapezoidal bulanık esnek kümeden daha gerçekçidir. Çünkü aynı evin belirsiz nitelikleri üzerinde değişik fikirlere sahiptir. Örneğin Bay X bir evin orta derecede zayıf olmasını daha iyi olduğunu düşünürken, bayan X böyle düşünmez. Çünkü Bayan X bir evin en iyi büyüklüğünün iyi olmasını düşünür. Parametrelerin özellikleri belirsiz ve karmaşık olduğu zaman genelleştirilmiş trapezoidal bulanık esnek küme karar verme probleminde daha etkilidir. Bu durum genelleştirilmiş trapezoidal bulanık esnek kümelerin karar vermede gerçeği yansıtması açısından daha tercih edilen bir yöntem olduğunu gösterir.

3. YAPILAN ÇALIŞMALAR

3.1. Bulanık Esnek Matrisleri (Komplementleri) Kullanarak Tıp Tanısında İlaç Bağımlılığının Etkisinin İncelenmesi

Bu kısımda hastaların bilinçsiz ilaç kullanımı sonucu doğan ya da doğabilecek yan etkilerin önüne geçebilmek amacıyla referans fonksiyonu üzerinde tanımlı bulanık esnek matrisler kullanılarak bir teknik ortaya konulmuştur.

S aşırı dozda ilaç kullanımına bağlı olarak oluşan bazı yan etkilere bağlı belirtiler kümesi, D bu belirtilerle ilişkili yan etkiler kümesi ve P'de S kümesinden verilen belirtileri taşıyan hastaların kümesi olsun.

Öncelikle biz S üzerinde (F,D) bulanık esnek kümesini oluştururuz ve bu kümeden bir A ilişki matrisini (belirti – hastalık matrisi) elde ederiz. Benzer şekilde bu bulanık esnek kümenin komplementi olan $(F,D)^c$ bulanık esnek kümesi yardımıyla diğer bir ilişki matrisi olan A^c'yi (belirtisi olmayan hastalık matrisi) elde ederiz. Buradaki A ve A^c matrislerini bulanık esnek kümelerin tıp verileri olarak adlandırabiliriz. Daha sonra P üzerinde bir başka (F,S) bulanık esnek kümesini oluştururuz. Bu bulanık esnek kümeden bir başka ilişki matrisi (hasta- belirti matrisi) olan B matrisini ve onun komplementi olan $(F,S)^c$ 'den de B^c ilişki matrisini (belirtisi olmayan hasta matrisi) elde ederiz.

Tanım 2.4.5'i kullanarak yeni T_1=B.A, T_2=B.A^c, T_3=B^c.A, T_4=B^c.A^c matrislerini elde ederiz. Burada verilen matrislerin isimleri sırasıyla, hastalıklara neden olan belirtilere sahip hastaların matrisi, hastalıklara neden olmayan belirtilere sahip hastaların matrisi, belirtileri olmayan hastalıklara sahip hastaların matrisi ve belirtileri ve hastalıkları olmayan hastaların matrisidir.

Daha sonra Tanım 2.4.1'i kullanarak ilgili üyelik değerlerine sahip olan MV(T_1), MV(T_2), MV(T_3), MV(T_4) matrisleri elde edilir. Daha sonra tanı – skor matrisleri

$$S_{T_1} = [\gamma(T_1)_{ij}]_{m\times n}, \gamma(T_1)_{ij} = \delta(T_1)_{ij} - \delta(T_3)_{ij}$$

ve

$$S_{T_2} = [\gamma(T_2)_{ij}]_{m\times n}, \gamma(T_2)_{ij} = \delta(T_2)_{ij} - \delta(T_4)_{ij}$$

şeklinde hesaplanarak belirlenir.

Buradan da $\max(\mathrm{S}_{\mathrm{T}_1}(p_i,d_j)-\mathrm{S}_{\mathrm{T}_2}(p_i,d_j))$ değeri ile tam olarak sonuç bulunabiliyorsa p_i hastası için d_k hastalığına sahiptir tanısı ortaya konulur. Net bir sonuç elde edilemiyorsa o hasta için yeni bir değerlendirme yapılır.

Algoritma

i) $(\mathrm{F,D})$ ve $(\mathrm{F,D})^{\mathrm{c}}$ bulanık esnek kümeleri yazılarak A ve A^{c} matrisleri elde edilir.

ii) $(\mathrm{F,S})$ ve $(\mathrm{F,S})^{\mathrm{c}}$ bulanık esnek kümeleri yazılarak B ve B^{c} matrisleri elde edilir.

iii) $\mathrm{T}_1=\mathrm{B.A}$, $\mathrm{T}_2=\mathrm{B.A}^{c}$, $\mathrm{T}_3=\mathrm{B}^{c}.\mathrm{A}$, $\mathrm{T}_4=\mathrm{B}^{c}.\mathrm{A}^{c}$ matrisleri elde edilir.

iv) Üyelik değer matrisleri olan $\mathrm{MV}(\mathrm{T}_1)$, $\mathrm{MV}(\mathrm{T}_2)$, $\mathrm{MV}(\mathrm{T}_3)$, $\mathrm{MV}(\mathrm{T}_4)$ elde edilir.

v) $\mathrm{S}_{\mathrm{T}_1}$ ve $\mathrm{S}_{\mathrm{T}_2}$ elde edilir.

vi) Maksimum değere bakılarak yorum yapılır.

Örnek Çalışma 1

$\mathrm{P}=\{p_1,p_2,p_3\}$ hastalar kümesi,

$\mathrm{S}=\{e_1,e_2,e_3\}$ belirtiler kümesi {sinir bozukluğu, karın ağrısı, depresyon}

$\mathrm{D}=\{d_1,d_2\}$ yan etkilere bağlı hastalıklar kümesi {beyin problemi, kalp problemi}

şeklinde olsun.

$\mathrm{F{:}D}\to \mathcal{F}(\mathrm{S})$ dönüşümü aşağıdaki şekilde tanımlansın.

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{F,D})=\{&\mathrm{F}(d_1)=\{(e_1,0.3,0),(e_2,0.6,0),(e_3,0.5,0)\},\\
&\mathrm{F}(d_2)=\{(e_1,0.9,0),(e_2,0.7,0),(e_3,0.8,0)\}\}
\end{aligned}
$$

$(\mathrm{F,D})$ kümesinin tümleyeni de $(\mathrm{F,D})^{c}$ olup

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{F,D})^{\mathrm{c}}=\{&\mathrm{F}^{\mathrm{c}}(d_1)=\{(e_1,1,0.3),(e_2,1,0.6),(e_3,1,0.5)\},\\
&\mathrm{F}^{\mathrm{c}}(d_2)=\{(e_1,1,0.9),(e_2,1,0.7),(e_3,1,0.8)\}\}
\end{aligned}
$$

şeklindedir.

Bu verileri belirti-hastalık matrisine aktarırsak

$$\begin{array}{c|cc} & d_1 & d_2 \\ \hline e_1 & (0.3,0) & (0.9,0) \\ e_2 & (0.6,0) & (0.7,0) \\ e_3 & (0.5,0) & (0.8,0) \end{array}\quad A = \begin{bmatrix} (0.3,0) & (0.9,0) \\ (0.6,0) & (0.7,0) \\ (0.5,0) & (0.8,0) \end{bmatrix} \qquad A^c = \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} d_1 & d_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} (1,0.3) & (1,0.9) \\ (1,0.6) & (1,0.7) \\ (1,0.5) & (1,0.8) \end{bmatrix} \end{array}$$

matrisleri elde edilir. Şimdi $F{:}S \rightarrow \mathcal{F}(P)$ dönüşümü aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$\begin{aligned}(F,S) = \{&F(e_1) = \{(p_1,0.7,0),(p_2,0.8,0),(p_3,0.2,0)\},\\ &F(e_2) = \{(p_1,0.8,0),(p_2,0.5,0),(p_3,0.6,0)\},\\ &F(e_3) = \{(p_1,0.3,0),(p_2,0.6,0),(p_3,0.7,0)\}\}\end{aligned}$$

(F,S) 'nin tümleyeni $(F,S)^c$ olup

$$\begin{aligned}(F,S)^c = \{&F(e_1) = \{(p_1,1,0.7),(p_2,1,0.8),(p_3,1,0.2)\},\\ &F(e_2) = \{(p_1,1,0.8),(p_2,1,0.5),(p_3,1,0.6)\},\\ &F(e_3) = \{(p_1,1,0.3),(p_2,1,0.6),(p_3,1,0.7)\}\}\end{aligned}$$

şeklindedir ve bu bulanık kümeler bize aşağıdaki gibi sırasıyla hasta-belirti matrisini ve belirtisi olmayan hasta matrisini verir.

$$B = \begin{array}{c} \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} e_1 & e_2 & e_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} (0.7,0) & (0.8,0) & (0.3,0) \\ (0.8,0) & (0.5,0) & (0.6,0) \\ (0.2,0) & (0.6,0) & (0.7,0) \end{bmatrix} \end{array} \qquad B^c = \begin{array}{c} \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} e_1 & e_2 & e_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} (1,0.7) & (1,0.8) & (1,0.3) \\ (1,0.8) & (1,0.5) & (1,0.6) \\ (1,0.2) & (1,0.6) & (1,0.7) \end{bmatrix} \end{array}$$

Daha sonra B matrisi ile A matrislerini çarparak T_1 matrisini ve B matrisi ile A^c matrisini çarparak T_2 hasta – hastalık matrisini aşağıdaki gibi elde ederiz.

$$T_1 = B.A = \begin{array}{c} \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} d_1 & d_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} (0.6,0) & (0.7,0) \\ (0.5,0) & (0.8,0) \\ (0.6,0) & (0.7,0) \end{bmatrix} \end{array} \qquad T_2 = B.A^c = \begin{array}{c} \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} d_1 & d_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} (0.8,0.3) & (0.8,0.7) \\ (0.8,0.3) & (0.8,0.7) \\ (0.7,0.3) & (0.7,0.7) \end{bmatrix} \end{array}$$

Burada matrisin her bir bileşeni iki elemanlı olup bu elemanlardan birincisi, satır ile sütun elemanlarının çarpımının minimumlarının maksimumu ikincisi ise satır ile sütun elemanlarının çarpımının maksimumlarının minimumu alınarak bulunur.

Bunun ardından T_1 ve T_2 matrislerindeki her bir bileşenden birinci elemandan ikinci eleman çıkartılarak üyelik değer matrisleri belirlenir.

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} d_1 & d_2 \end{array} \\ \mathrm{MV}(\mathrm{T}_1) = \begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{array} & \begin{bmatrix} 0.6 & 0.7 \\ 0.5 & 0.8 \\ 0.6 & 0.7 \end{bmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} d_1 & d_2 \end{array} \\ \mathrm{MV}(\mathrm{T}_2) = \begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{array} & \begin{bmatrix} 0.5 & 0.1 \\ 0.5 & 0.1 \\ 0.4 & 0.0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Benzer şekilde B^c matrisi ile A matrisini çarparak T_3 matrisini ve B^c matrisi ile A^c matrisini çarparak T_4 matrisini elde ederiz.

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} d_1 & d_2 \end{array} \\ \mathrm{T}_3 = \mathrm{B}^c.\mathrm{A}^c = \begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{array} & \begin{bmatrix} (0.6, 0.3) & (0.9, 0.3) \\ (0.6, 0.5) & (0.9, 0.5) \\ (0.6, 0.2) & (0.9, 0.2) \end{bmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} d_1 & d_2 \end{array} \\ \mathrm{T}_4 = \mathrm{B}^c.\mathrm{A}^c = \begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{array} & \begin{bmatrix} (1, 0.5) & (1, 0.8) \\ (1, 0.6) & (1, 0.7) \\ (1, 0.3) & (1, 0.7) \end{bmatrix} \end{array}$$

Bunun ardından T_3 ve T_4 matrislerindeki her bir bileşenden birinci elemandan ikinci eleman çıkartılarak aşağıdaki gibi üyelik değer matrisleri belirlenir.

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} d_1 & d_2 \end{array} \\ \mathrm{MV}(\mathrm{T}_3) = \begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{array} & \begin{bmatrix} 0.3 & 0.6 \\ 0.1 & 0.4 \\ 0.4 & 0.7 \end{bmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} d_1 & d_2 \end{array} \\ \mathrm{MV}(\mathrm{T}_4) = \begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{array} & \begin{bmatrix} 0.5 & 0.2 \\ 0.4 & 0.3 \\ 0.7 & 0.3 \end{bmatrix} \end{array}$$

Daha sonra $\mathrm{MV}(\mathrm{T}_1) - \mathrm{MV}(\mathrm{T}_3) = \mathrm{S}_{\mathrm{T}_1}$ ve $\mathrm{MV}(\mathrm{T}_2) - \mathrm{MV}(\mathrm{T}_4) = \mathrm{S}_{\mathrm{T}_2}$ işlemleri yardımıyla aşağıdaki tanı skor matrisleri elde edilir.

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} d_1 & d_2 \end{array} \\ \mathrm{S}_{\mathrm{T}_1} = \begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{array} & \begin{bmatrix} 0.3 & 0.1 \\ 0.4 & 0.4 \\ 0.2 & 0.0 \end{bmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} d_1 & d_2 \end{array} \\ \mathrm{S}_{\mathrm{T}_2} = \begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{array} & \begin{bmatrix} 0.0 & -0.1 \\ 0.1 & -0.2 \\ -0.3 & -0.3 \end{bmatrix} \end{array}$$

Elde edilen bu matrisler de birbirlerinden çıkartıldığında

Çizelge 3.1. Tanı skor tablosu

$\mathrm{S}_{\mathrm{T}_1} - \mathrm{S}_{\mathrm{T}_2}$	d_1	d_2
p_1	0.3	0.2
p_2	0.3	0.6
p_3	0.5	0.3

değerleri elde edilir. Elde edilen bu sonuca göre göre P_1 ve P_3 hastaları d_1 hastalığına (beyin problemine), P_2 hastası d_2 hastalığına (kalp problemine) yakalanmıştır.

Yapılan örnek çalışmanın amacı teşhis konulana dek hastaların kullandıkları ilaçlar yüzünden maruz kaldıkları yan etkilerden kurtulmak ve gereksiz ilaç kullanımının önüne geçmektir. Hangi hastanın hangi hastalığa yakalandığını kısa sürede saptadığımızdan yukarıdaki amaçlara ulaşılmıştır.

Örnek Çalışma 2

P={P_1,P_2,P_3} hastalar kümesi

S={e_1,e_2,e_3,e_4} belirtiler kümesi {ateş, baş ağrısı, öksürük, karın ağrısı}

D={d_1,d_2} hastalıklar kümesi {yüksek ateş, sıtma}

$\mathrm{F{:}D} \rightarrow \mathrm{F\ (S)}$ dönüşümü aşağıdaki şekilde tanımlansın.

$$\begin{aligned}(\mathrm{F,D})=\{&\mathrm{F}(d_1)=\{(e_1,0.85,0),(e_2,0.25,0),(e_3,0.55,0),(e_4,0.3,0)\},\\ &\mathrm{F}(d_2)=\{(e_1,0.75,0),(e_2,0.5,0),(e_3,0.45,0),(e_4,0.45,0)\}\}\end{aligned}$$

$(\mathrm{F,D})$ 'nin tümleyeni de $(\mathrm{F,D})^{\mathrm{c}}$ olup

$$\begin{aligned}(\mathrm{F,D})^{\mathrm{c}}=\{&\mathrm{F}^{\mathrm{c}}(d_1)=\{(e_1,1,0.85),(e_2,1,0.25),(e_3,1,0.55),(e_4,1,0.3)\},\\ &\mathrm{F}^{\mathrm{c}}(d_2)=\{(e_1,1,0.75),(e_2,1,0.5),(e_3,1,0.45),(e_4,1,0.45)\}\}\end{aligned}$$

şeklindedir. Bu verileri aşağıdaki şekilde bir belirti-hastalık matrisine aktarırsak,

$$\mathrm{A}=\begin{array}{c}\\ e_1\\ e_2\\ e_3\\ e_4\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cc}d_1 & \quad d_2\end{array}\\ \begin{bmatrix}(0.85,0) & (0.75,0)\\ (0.25,0) & (0.5,0)\\ (0.55,0) & (0.45,0)\\ (0.3,0) & (0.45,0)\end{bmatrix}\end{array}\qquad \mathrm{A}^{c}=\begin{array}{c}\\ e_1\\ e_2\\ e_3\\ e_4\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cc}d_1 & \quad d_2\end{array}\\ \begin{bmatrix}(1,0.85) & (1,0.75)\\ (1,0.25) & (1,0.5)\\ (1,0.55) & (1,0.45)\\ (1,0.3) & (1,0.45)\end{bmatrix}\end{array}$$

matrisleri elde edilir. Şimdi $\mathrm{F{:}S} \rightarrow \mathrm{F\ (P)}$ dönüşümü aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$\begin{aligned}(\mathrm{F,S})=\{&\mathrm{F}(e_1)=\{(p_1,0.75,0),(p_2,0.4,0),(p_3,0.7,0)\},\\ &\mathrm{F}(e_2)=\{(p_1,0.4,0),(p_2,0.5,0),(p_3,0.4,0),\}\\ &\mathrm{F}(e_3)=\{(p_1,0.9,0),(p_2,0.3,0),(p_3,0.6,0)\},\\ &\mathrm{F}(e_4)=\{(p_1,0.75,0),(p_2,0.4,0),(p_3,0.3,0)\}\}\end{aligned}$$

(F,S) ’nin tümleyeni $(\mathrm{F,S})^{c}$ olup

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{F,S})^{c} = \{ & \mathrm{F}^{c}(e_1) = \{(p_1,1,0.75),(p_2,1,0.4),(p_3,1,0.7)\}, \\
& \mathrm{F}^{c}(e_2) = \{(p_1,1,0.4),(p_2,1,0.5),(p_3,1,0.4),\}, \\
& \mathrm{F}^{c}(e_3) = \{(p_1,1,0.9),(p_2,1,0.3),(p_3,1,0.6)\}, \\
& \mathrm{F}^{c}(e_4) = \{(p_1,1,0.75),(p_2,1,0.4),(p_3,1,0.3)\}\}
\end{aligned}
$$

şeklindedir ve bu bulanık esnek kümeler bize aşağıdaki şekilde hasta – belirti matrisi ile belirtisi olmayan hasta matrisini verir.

$$
\mathrm{B} = \begin{array}{c} \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \end{array} \\
\begin{bmatrix} (0.75,0) & (0.4,0) & (0.9,0) & (0.75,0) \\ (0.4,0) & (0.5,0) & (0.3,0) & (0.4,0) \\ (0.7,0) & (0.4,0) & (0.6,0) & (0.3,0) \end{bmatrix} \end{array}
$$

$$
\mathrm{B}^{c} = \begin{array}{c} \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \end{array} \\
\begin{bmatrix} (1,0.75) & (1,0.4) & (1,0.9) & (1,0.75) \\ (1,0.4) & (1,0.5) & (1,0.3) & (1,0.4) \\ (1,0.7) & (1,0.4) & (1,0.6) & (1,0.3) \end{bmatrix} \end{array}
$$

Daha sonra aşağıdaki gibi B matrisi ile A matrisini çarparak T_1 matrisini ve B matrisi ile A^{c} matrisini çarparak T_2 hasta – hastalık matrisini elde ederiz.

$$
\mathrm{T}_1 = \tilde{\mathrm{B}}.\tilde{\mathrm{A}} = \begin{array}{c} \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cc} d_1 & d_2 \end{array} \\
\begin{bmatrix} (0.75,0) & (0.75,0) \\ (0.4,0) & (0.5,0) \\ (0.7,0) & (0.7,0) \end{bmatrix} \end{array}
\qquad
\mathrm{T}_2 = \tilde{\mathrm{B}}.\tilde{\mathrm{A}}^{c} = \begin{array}{c} \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cc} d_1 & d_2 \end{array} \\
\begin{bmatrix} (0.9,0.25) & (0.9,0.45) \\ (0.5,0.25) & (0.5,0.45) \\ (0.7,0) & (0.7,0) \end{bmatrix} \end{array}
$$

Burada matrisin her bir bileşeni iki elemanlı olup bu elemanlardan birincisi satır ile sütun çarpımının minimumların maksimumu ikincisi satır ile sütun elemanlarının çarpımının maksimumların minimumu alınarak bulunur.

Bunun ardından T_1 ve T_2 matrislerindeki her bir bileşende birinci elemandan ikinci eleman çıkartılarak üyelik değer matrisleri belirlenir.

$$\mathrm{MV}(\mathrm{T}_1) = \begin{array}{c} \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} d_1 & d_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.75 & 0.75 \\ 0.4 & 0.5 \\ 0.7 & 0.7 \end{bmatrix} \end{array} \qquad \mathrm{MV}(\mathrm{T}_2) = \begin{array}{c} \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} d_1 & d_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.65 & 0.45 \\ 0.25 & 0.05 \\ 0.7 & 0.7 \end{bmatrix} \end{array}$$

Benzer şekilde B^c matrisi ile A matrisini çarparak T_3 matrisini ve B^c matrisi ile A^c matrisini çarparak T_4 matrisini aşağıdaki gibi elde ederiz.

$$\mathrm{T}_3 = \mathrm{B}^c.\mathrm{A}^c = \begin{array}{c} \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} d_1 & d_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} (0.85, 0.4) & (0.75, 0.4) \\ (0.85, 0.3) & (0.75, 0.3) \\ (0.85, 0.3) & (0.75, 0.3) \end{bmatrix} \end{array} \qquad \mathrm{T}_4 = \mathrm{B}^c.\mathrm{A}^c = \begin{array}{c} \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} d_1 & d_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} (1, 0.4) & (1, 0.5) \\ (1, 0.4) & (1, 0.45) \\ (1, 0.3) & (1, 0.45) \end{bmatrix} \end{array}$$

Bunun ardından T_3 ve T_4 matrislerinde birinci elemandan ikinci eleman çıkartılarak aşağıdaki gibi üyelik değer matrisleri belirlenir.

$$\mathrm{MV}(\mathrm{T}_3) = \begin{array}{c} \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} d_1 & d_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.45 & 0.35 \\ 0.55 & 0.45 \\ 0.55 & 0.45 \end{bmatrix} \end{array} \qquad \mathrm{MV}(\mathrm{T}_4) = \begin{array}{c} \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} d_1 & d_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.6 & 0.5 \\ 0.6 & 0.55 \\ 0.7 & 0.55 \end{bmatrix} \end{array}$$

$\mathrm{MV}(\mathrm{T}_1) - \mathrm{MV}(\mathrm{T}_3) = \mathrm{S}_{\mathrm{T}_1}$ ve $\mathrm{MV}(\mathrm{T}_2) - \mathrm{MV}(\mathrm{T}_4) = \mathrm{S}_{\mathrm{T}_2}$ işlemleriyle aşağıdaki iki matris elde edilir.

$$\mathrm{S}_{\mathrm{T}_1} = \begin{array}{c} \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} d_1 & d_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.3 & 0.4 \\ -0.15 & 0.05 \\ 0.15 & 0.15 \end{bmatrix} \end{array} \qquad \mathrm{S}_{\mathrm{T}_2} = \begin{array}{c} \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} d_1 & d_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.05 & -0.05 \\ -0.35 & -0.50 \\ 0 & 0.15 \end{bmatrix} \end{array}$$

Bu matrislerde birbirlerinden çıkartıldığında aşağıdaki değerler elde edilir.

Çizelge 3.2. Tanı skor tablosu

$\mathrm{S}_{\mathrm{T}_1} - \mathrm{S}_{\mathrm{T}_2}$	d_1	d_2
P_1	0.25	0.45
P_2	0.2	0.55
P_3	0.15	0

Buna göre P_1 ve P_2 hastaları d_2 hastalığına (sıtmaya), P_3 hastası d_1 hastalığına (yüksek ateşe) hastalığına yakalanmıştır.

3.2. Bulanık Aritmetik İşlemleri Kullanarak Bulanık Esnek Kümelerin Tıp Tanısında Uygulaması

Bu kısımda bulanık aritmetik işlemler yardımıyla, bulanık esnek kümelerin tıp tanısında bir uygulamasını ele alacağız.

Varsayalım $\mathrm{D}=\{d_1,d_2,d_3,...,d_k\}$ k tane hastalıkların kümesi, $\mathrm{S}=\{s_1,s_2,s_3,...,s_n\}$ n tane belirtilerin kümesi ve $\mathrm{P}=\{p_1,p_2,p_3,...,p_m\}$ m tane hastanın oluşturduğu kümeler olsun.

Biz hangi hastanın hangi hastalığa yakalandığını tespit edebilmek ve bir teknik geliştirebilmek için bulanık esnek küme teorisini Sanchez'in metoduna (Sanchez, 1979) uygulayacağız. Bunun için öncelikle S üzerinde (F,P) bulanık esnek kümesini oluştururuz. Bu bulanık esnek küme bize hasta belirti matrisi olarak adlandırılan Q ilişki matrisini verir. Buradaki Q matrisinin elemanları (p-1,p,p+1) üçlüsü tarafından parametre edilmiş $\tilde{p}$ bulanık sayılarından oluşur.

Daha sonra D üzerinde bir başka (G,S) bulanık esnek kümesini oluştururuz. Bu bulanık esnek küme belirti– hastalık matrisi olarak adlandırılan R ilişki matrisini verir. Bu matrisin her bir elemanı bize kesin hastalık için belirtilerin etkisini ifade eder. Üstelik bu elemanlar triangüler bulanık sayılar olarak adlandırılır.

Q ve R matrislerinin genel formları aşağıdaki gibidir.

$$
Q=\begin{array}{c} \\ p_1\\ p_2\\ p_3\\ .\\ .\\ .\\ p_m \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccc} s_1 & s_2 & s_3 & . & . & . & s_n \end{array}\\
\left[\begin{array}{ccccccc}
\tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{13} & . & . & . & \tilde{a}_{1n}\\
\tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} & \tilde{a}_{23} & . & . & . & \tilde{a}_{2n}\\
\tilde{a}_{31} & \tilde{a}_{32} & \tilde{a}_{33} & . & . & . & \tilde{a}_{3n}\\
. & . & . & . & . & . & .\\
. & . & . & . & . & . & .\\
. & . & . & . & . & . & .\\
\tilde{a}_{m1} & \tilde{a}_{m2} & \tilde{a}_{m3} & . & . & . & \tilde{a}_{mn}
\end{array}\right]_{(p_m\times s_n)}
\end{array}
\qquad
R=\begin{array}{c} \\ s_1\\ s_2\\ s_3\\ .\\ .\\ .\\ s_n \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} d_1 & d_2 & d_3 & . & . & . & d_k \end{array}\\
\left[\begin{array}{ccccccc}
\tilde{b}_{11} & \tilde{b}_{12} & \tilde{b}_{13} & . & . & . & \tilde{b}_{1k}\\
\tilde{b}_{21} & \tilde{b}_{22} & \tilde{b}_{23} & . & . & . & \tilde{b}_{2k}\\
\tilde{b}_{31} & \tilde{b}_{32} & \tilde{b}_{33} & . & . & . & \tilde{b}_{3k}\\
. & . & . & . & . & . & .\\
. & . & . & . & . & . & .\\
. & . & . & . & . & . & .\\
\tilde{b}_{n1} & \tilde{b}_{n2} & \tilde{b}_{n3} & . & . & . & \tilde{b}_{nk}
\end{array}\right]_{(s_n\times d_k)}
\end{array}
$$

Bu iki matrisi çarparak hasta teşhis matrisi olan D^* matrisini buluruz. Bu matrisin genel formu da aşağıdaki gibidir.

$$D^* = \begin{array}{c} \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ . \\ . \\ . \\ p_m \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} d_1 & d_2 & d_3 & . & . & . & d_k \end{array} \\ \begin{bmatrix} \tilde{c}_{11} & \tilde{c}_{12} & \tilde{c}_{13} & . & . & . & \tilde{c}_{1k} \\ \tilde{c}_{21} & \tilde{c}_{22} & \tilde{c}_{23} & . & . & . & \tilde{c}_{2k} \\ \tilde{c}_{31} & \tilde{c}_{32} & \tilde{c}_{33} & . & . & . & \tilde{c}_{3k} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ \tilde{c}_{m1} & \tilde{c}_{m2} & \tilde{c}_{m3} & . & . & . & \tilde{c}_{mk} \end{bmatrix}_{(p_m \times d_k)} \end{array}$$

Matris içerisindeki her bir bulanık sayı aşağıdaki yöntemle parametre edilir.

$$\tilde{c}_{il} = (\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}-1)(b_{jl}-1), \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jl}, \sum_{j=1}^{n}(a_{ij}+1)(b_{jl}+1)$$

Daha sonra Tanım 21.13 de verilen durulaştırma işlemi ile genel formu aşağıdaki gibi olan D^{**} matrisi elde edilir.

$$D^{**} = \begin{array}{c} \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ . \\ . \\ . \\ p_m \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} d_1 & d_2 & d_3 & . & . & . & d_k \end{array} \\ \begin{bmatrix} \tilde{v}_{11} & \tilde{v}_{21} & \tilde{v}_{31} & . & . & . & \tilde{v}_{1k} \\ \tilde{v}_{21} & \tilde{v}_{22} & \tilde{v}_{23} & . & . & . & \tilde{v}_{2k} \\ \tilde{v}_{31} & \tilde{v}_{32} & \tilde{v}_{33} & . & . & . & \tilde{v}_{3k} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ \tilde{v}_{m1} & \tilde{v}_{m2} & \tilde{v}_{m3} & . & . & . & \tilde{v}_{mk} \end{bmatrix}_{(p_m \times d_k)} \end{array}$$

Elde edilen bu matris üzerinde maksimum değerli terimlerle sonuç saptanır.

Algoritma

i) (F,P) esnek kümesiyle hasta – belirti matrisi olan Q matrisi elde edilir.

ii) (G,S) esnek kümesi ile belirti – hastalık matrisi olan R matrisi elde edilir.

iii) Yukarıdaki iki matris çarpılarak hasta – hastalık matrisi olan D^* matrisi elde edilir.

iv) Durulaştırma işlemi ile D^* matrisinden D^{**} matrisi elde edilir.

v) Maksimum değerli terimlerle sonuç saptanır.

Örnek Çalışma 1

$P=\{p_1,p_2,p_3\}$ hastalar kümesi

$S=\{s_1,s_2,s_3\}$ belirtiler kümesi {ateş, baş ağrısı, öksürük, karın ağrısı}

$D=\{d_1,d_2,d_3\}$ hastalıklar kümesi {yüksek ateş, tifo, sıtma} şeklinde olsun.

F:P $\rightarrow \mathcal{F}$ (S) ile verilen (F,P) bulanık esnek kümesi aşağıdaki gibi tanımlansın.

$\mathrm{F}(p_1)=\{s_1/\tilde{7},s_2/\tilde{3},s_3/\tilde{5},s_4/\tilde{2}\}$

$\mathrm{F}(p_2)=\{s_1/\tilde{6},s_2/\tilde{2},s_3/\tilde{3},s_4/\tilde{5}\}$

$\mathrm{F}(p_3)=\{s_1/\tilde{3},s_2/\tilde{5},s_3/\tilde{3},s_4/\tilde{6}\}$

Bu veriler aşağıdaki gibi bir hasta-belirti matrisine aktarılırsa

$$\mathrm{Q}=\begin{array}{c}\\ p_1\\ p_2\\ p_3\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}s_1 & s_2 & s_3 & s_4\end{array}\\ \begin{bmatrix}\tilde{7} & \tilde{3} & \tilde{5} & \tilde{2}\\ \tilde{6} & \tilde{2} & \tilde{3} & \tilde{5}\\ \tilde{3} & \tilde{5} & \tilde{3} & \tilde{6}\end{bmatrix}\end{array}$$

matrisi elde edilir.

Benzer şekilde G:S $\rightarrow \mathcal{F}$ (D) ile verilen (G,S) bulanık esnek kümesi aşağıdaki gibi tanımlansın.

$\mathrm{G}(s_1)=\{d_1/\tilde{9},d_2/\tilde{5},s_3/\tilde{1}\}$

$\mathrm{G}(s_2)=\{d_1/\tilde{3},d_2/\tilde{5},s_3/\tilde{5}\}$

$\mathrm{G}(s_3)=\{d_1/\tilde{5},d_2/\tilde{2},s_3/\tilde{5}\}$

$\mathrm{G}(s_4)=\{d_1/\tilde{2},d_2/\tilde{8},s_3/\tilde{8}\}$

Bu verileri de bir belirti-hastalık matrisine aktaracak olursak;

$$\mathrm{R}=\begin{array}{c}\\ s_1\\ s_2\\ s_3\\ s_4\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}d_1 & d_2 & d_3\end{array}\\ \begin{bmatrix}\tilde{9} & \tilde{5} & \tilde{1}\\ \tilde{3} & \tilde{5} & \tilde{5}\\ \tilde{5} & \tilde{2} & \tilde{5}\\ \tilde{2} & \tilde{8} & \tilde{8}\end{bmatrix}\end{array}$$

matrisini elde ederiz. Bu iki matrisin çarpımıyla da aşağıdaki hasta-hastalık matrisini elde ederiz.

$$D^{*} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} d_1 & d_2 & d_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{array} & \begin{bmatrix} \tilde{101} & \tilde{76} & \tilde{63} \\ \tilde{85} & \tilde{86} & \tilde{71} \\ \tilde{69} & \tilde{94} & \tilde{91} \end{bmatrix} \end{array}$$

Matris içerisindeki her bir bulanık sayı aşağıdaki gibi parametre edilir.

$\tilde{101}$=(69,101,141) $\tilde{76}$=(44,76,117) $\tilde{63}$=(31,63,103)

$\tilde{85}$=(54,85,124) $\tilde{86}$=(54,86,126) $\tilde{71}$=(40,71,101)

$\tilde{69}$=(37,69,109) $\tilde{94}$=(61,94,135) $\tilde{91}$=(59,91,131)

Bu parametreleri elde ederken satır ve sütun elemanlarının bir eksiği ile çarpımı birinci bileşeni, satır ve sütun elemanlarının normal çarpımı ikinci bileşeni ve satır sütun elemanlarının bir fazlasının çarpımı da üçüncü bileşeni verir. Mesela $\tilde{101}$ sayısını

6.8+2.2+4.4+1.1=69

7.9+3.3+5.5+2.2=**101**

8.10+4.4+6.6+3.3=141

şeklinde elde ederiz. İkinci parametre değeri bu sayı sistemi için bulanık sayı olarak alınır. Her bir eleman için aynı işlem tekrarlanır. Ardından durulaştırma işlemi ile D^{**} matrisi elde edilir. Durulaştırma evresinde her bir bulanık sayı parametre elemanlarının toplamının dörde bölünmesiyle durulaştırılır. Üç eleman tarafından parametre edilmiş bulanık sayılarda ise ikinci parametre elemanı iki kere toplanıp dörde bölünerek durulaştırılır. Örneğin $\tilde{101}$ sayısı için durulaştırma işlemi şöyle yapılır.

$\tilde{101}$=(69+101+101+141)/4=103

Her bir eleman için aynı işlem tekrarlanır ve sonuçta

$$
\begin{array}{c}
 \\
D^{**} = \begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{array}
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc} \quad d_1 & \quad d_2 & \quad d_3 \end{array} \\
\begin{bmatrix} 103 & 78,25 & 65 \\ 87 & 88 & 70,75 \\ 71 & 96 & 93 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

matrisi elde edilir. Maksimum değerlere göre matris yorumlandığında p_1 hastasının d_1 hastalığına (yüksek ateşe), p_2 ve p_3 hastalarının d_2 hastalığına (tifoya) yakalandığı görülür.

Örnek Çalışma 2

$\mathrm{P} = \{p_1, p_2, p_3\}$ hastalar kümesi

$\mathrm{S} = \{s_1, s_2, s_3\}$ belirtiler kümesi {ateş, baş ağrısı, öksürük, karın ağrısı}

$\mathrm{D} = \{d_1, d_2, d_3\}$ hastalıklar kümesi {yüksek ateş, tifo, sıtma}

$\mathrm{F{:}P} \rightarrow \mathsf{F}\ (\mathrm{S})$ ile verilen (F,P) bulanık esnek kümesi aşağıdaki gibi tanımlansın.

$\mathrm{F}(p_1) = \{s_1 / \tilde{6}, s_2 / \tilde{8}, s_3 / \tilde{4}\}$

$\mathrm{F}(p_2) = \{s_1 / \tilde{8}, s_2 / \tilde{6}, s_3 / \tilde{5}\}$

$\mathrm{F}(p_3) = \{s_1 / \tilde{6}, s_2 / \tilde{7}, s_3 / \tilde{7}\}$

$\mathrm{F}(p_4) = \{s_1 / \tilde{4}, s_2 / \tilde{8}, s_3 / \tilde{7}\}$

olsun. Bu veriler bir hasta-belirti matrisine aktarılırsa

$$
\begin{array}{c}
 \\
Q = \begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{array}
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \end{array} \\
\begin{bmatrix} \tilde{6} & \tilde{8} & \tilde{6} & \tilde{4} \\ \tilde{8} & \tilde{6} & \tilde{7} & \tilde{8} \\ \tilde{4} & \tilde{5} & \tilde{7} & \tilde{7} \end{bmatrix}
\end{array}
$$

matrisi elde edilir. Benzer şekilde $\mathrm{G{:}S} \rightarrow \mathsf{F}\ (\mathrm{D})$ ile verilen (G,S) bulanık esnek kümesi aşağıdaki gibi tanımlansın.

$\mathrm{G}(s_1) = \{d_1/\tilde{9}, d_2/\tilde{8}, d_3/\tilde{3}\}$
$\mathrm{G}(s_2) = \{d_1/\tilde{8}, d_2/\tilde{5}, d_3/\tilde{6}\}$
$\mathrm{G}(s_3) = \{d_1/\tilde{5}, d_2/\tilde{7}, d_3/\tilde{4}\}$
$\mathrm{G}(s_4) = \{d_1/\tilde{4}, d_2/\tilde{7}, d_3/\tilde{8}\}$

Bu verileri de bir belirti-hastalık matrisine aktaracak olursak;

$$\mathrm{R} = \begin{array}{c} \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} d_1 & d_2 & d_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \tilde{9} & \tilde{8} & \tilde{3} \\ \tilde{8} & \tilde{5} & \tilde{6} \\ \tilde{5} & \tilde{7} & \tilde{4} \\ \tilde{4} & \tilde{7} & \tilde{8} \end{bmatrix} \end{array}$$

matrisini elde ederiz.

Bu iki matrisin çarpımıyla elde edilen hasta-hastalık matrisi aşağıdaki gibi oluşturulur.

$$\mathrm{D}^* = \begin{array}{c} \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} d_1 & d_2 & d_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \tilde{218} & \tilde{213} & \tilde{170} \\ \tilde{246} & \tilde{259} & \tilde{206} \\ \tilde{192} & \tilde{209} & \tilde{174} \end{bmatrix} \end{array}$$

Daha sonra matris içerisindeki her bir bulanık sayı için durulaştırma işlemi yaparak aşağıdaki D^{**} matrisini elde ederiz.

$$\mathrm{D}^{**} = \begin{array}{c} \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} d_1 & d_2 & d_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 175 & 167 & 131{,}75 \\ 202 & 212{,}5 & 166 \\ 144 & 165 & 136 \end{bmatrix} \end{array}$$

Buradan da maksimum değerlere göre matris yorumlandığında P_1 hastanın d_1 hastalığına (yüksek ateşe), P_2 ve P_3 hastalarının d_2 hastalığına (tifoya) yakalandığı görülür.

3.3. İnterval Değerli Bulanık Esnek Kümelerin Tıp Tanısında Uygulaması

Varsayalım S kesin hastalıkları veren belirtilerin kümesi, D hastalıkların kümesi ve P de hastaların kümesi olsun.

S üzerinde (F,D) interval değerli bulanık esnek bir küme olsun. Burada $F:D \to \tilde{F}(S)$ bir dönüşüm olmak üzere (F,D) interval değerli bulanık esnek kümesinden bir R_1 ilişki matrisi inşa edilir ve bu matris belirti – hastalık matrisi olarak adlandırılır. Benzer şekilde $(F,D)^c$ bize bir başka ilişki matrisi olan R_2 matrisini verir ve bu matris belirtileri olmayan hastalık matrisini ifade eder. Daha sonra P üzerinde bir başka interval değerli bulanık esnek küme olarak (F_1,S) yi ele alalım. Burada $F_1:S \to \tilde{F}(P)$ bir dönüşüm olmak üzere (F,S) interval değerli bulanık esnek kümesinden bir başka Q ilişki matrisi oluşturulur ve bu matris de hasta – belirti matrisi olarak adlandırılır. Daha sonra bu matrisler yardımıyla belirti – hasta matrisi olarak adlandırılan $T_1=Q \circ R_1$ ve belirtisi olmayan hasta matrisi olarak adlandırılan $T_2=Q \circ R_2$ ilişki matrisleri elde edilir. Bu matrislerin üyelik dereceleri aşağıdaki gibidir.

$$\mu_{T_1}(p_i,d_k) = \inf[\{\mu_Q^L(p_i,e_j) \wedge \mu_{R_1}^L(e_j,d_k)\}, \sup\{\mu_Q^U(p_i,e_j) \wedge \mu_{R_1}^U(e_j,d_k)\}]$$

$$\mu_{T_2}(p_i,\neg d_k) = \inf[\{\mu_Q^L(p_i,e_j) \wedge \mu_{R_2}^L(e_j,d_k)\}, \sup\{\mu_Q^U(p_i,e_j) \wedge \mu_{R_2}^U(e_j,d_k)\}]$$

Daha sonra S_{T_1} ve S_{T_2} tanı skorları aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$S_{T_1} = \sum\{(\mu_{T_1}^L(p_i,d_j) - \mu_{T_1}^L(p_j,d_i)\} + \sum\{(\mu_{T_1}^L(p_i,d_j) - \mu_{T_1}^L(p_j,d_i)\}$$

$$S_{T_2} = \sum\{(\mu_{T_2}^L(p_i,d_j) - \mu_{T_2}^L(p_j,d_i)\} + \sum\{(\mu_{T_2}^L(p_i,d_j) - \mu_{T_2}^L(p_j,d_i)\}$$

$\max\{S_{T_1}(P_i,d_j) - S_{T_2}(P_i,\neg d_j)\}$ sonucuna göre hangi hastanın hangi hastalığa yakalandığını belirleriz.

Algoritma

i) S belirti kümesi üzerinde (F,D) ve $(F,D)^c$ interval değerli bulanık esnek kümeleri oluşturulur.

ii) R_1 ve R_2 ilişki matrisleri elde edilir.

iii) P üzerinde (F_1,S) interval değerli bulanık esnek kümesi oluşturulur ve Q ilişki matrisi elde edilir.

iv) $\mathrm{T_1}=\mathrm{Q}\circ\mathrm{R_1}$ ve $\mathrm{T_2}=\mathrm{Q}\circ\mathrm{R_2}$ matrisleri belirlenir.

v) $\mathrm{S_{T_1}}$ ve $\mathrm{S_{T_2}}$ tanı skorları bulunur.

vi) $\mathrm{S_k}=\max\{\mathrm{S_{T_1}}(p_i,d_j)-\mathrm{S_{T_2}}(p_i,\neg d_j)\}$

değeri hesaplanarak hangi hastanın hangi hastalığa yakalandığı bulunur.

Eğer $\mathrm{S_k}$ bir değerden fazlasına sahipse birinci adıma gidilir ve hasta için belirtiler yeniden değerlendirilerek aşamalar tekrarlanır.

Örnek Çalışma

$\mathrm{P}=\{p_1,p_2,p_3\}$ hastalar kümesi

$\mathrm{S}=\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ belirtiler kümesi {ateş, baş ağrısı, öksürük, karın ağrısı}

$\mathrm{D}=\{d_1,d_2\}$ hastalıklar kümesi {yüksek ateş, sıtma}

şeklinde olsun. Varsayalım ki,

$\mathrm{F}(d_1)=\{\langle e_1,[.7,1]\rangle,\langle e_2,[.1,.4]\rangle,\langle e_3,[.5,.6]\rangle,\langle e_4,[.2,.4]\rangle\}$

$\mathrm{F}(d_2)=\{\langle e_1,[.6,.9]\rangle,\langle e_2,[.4,.6]\rangle,\langle e_3,[.3,.6]\rangle,\langle e_4,[.8,.1]\rangle\}$ olsun.

Burada (F,D), S üzerindeki bütün bulanık esnek kümelerin bir ailesi olan $\{\mathrm{F}(d_1),\mathrm{F}(d_2)\}$ tarafından parametre edilmiş interval değerli bulanık esnek bir kümedir. Burada (F,D) iki hastalığın ve bunların belirtilerinin interval değerli esnek tıp bilgisinin yaklaşık tanımlamasını verir. (F,D) ve onun komplementi olan $(\mathrm{F,D})^c$ bulanık esnek kümelerinden R_1 ve R_2 matrisleri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\mathrm{R_1}=\begin{array}{c} \\ e_1\\ e_2\\ e_3\\ e_4\end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} d_1 & d_2\end{array}\\ \begin{bmatrix}[.7,1] & [.6,.9]\\ [.1,.4] & [.4,.6]\\ [.5,.6] & [.3,.6]\\ [.2,.4] & [.8,.1]\end{bmatrix}\end{array} \qquad \mathrm{R_2}=\begin{array}{c} \\ e_1\\ e_2\\ e_3\\ e_4\end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} d_1 & d_2\end{array}\\ \begin{bmatrix}[0,.3] & [.1,.4]\\ [.6,.9] & [.4,.6]\\ [.4,.5] & [.4,.7]\\ [.6,.8] & [0,.2]\end{bmatrix}\end{array}$$

Yine varsayalım ki;

$$F_1(e_1)=\{\langle p_1,[.6,.9]\rangle,\langle p_2,[.3,.5]\rangle,\langle p_3,[.6,.8]\}$$
$$F_1(e_2)=\{\langle p_1,[.3,.5]\rangle,\langle p_2,[.3,.7]\rangle,\langle p_3,[.2,.6]\}$$
$$F_1(e_3)=\{\langle p_1,[.8,1]\rangle,\langle p_2,[.2,.4]\rangle,\langle p_3,[.5,.7]\}$$
$$F_1(e_4)=\{\langle p_1,[.6,.9]\rangle,\langle p_2,[.3,.5]\rangle,\langle p_3,[.2,.5]\}$$

olsun. İnterval değerli (F_1,S) bulanık esnek kümesi bütün interval değerli bulanık kümelerin parametreler ailesidir ve hasta belirtilerinin yaklaşık ifadelerinin bir kümesini verir. (F_1,S) interval değerli bulanık esnek kümesi yardımıyla hasta belirti matrisi olarak adlandırılan aşağıdaki Q ilişki matrisi elde edilir.

$$Q=\begin{array}{c} \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} [.6,.9] & [.3,.5] & [.8,1] & [.6,.9] \\ [.3,.5] & [.3,.7] & [.2,.4] & [.3,.5] \\ [.6,.8] & [.2,.6] & [.5,.7] & [.2,.5] \end{bmatrix}\end{array}$$

Q matrisini sırasıyla R_1 ve R_2 matrisleri ile çarparak hastalığı olan hastalar ve hastalığı olmayan hastalar matrislerini elde ederiz.

$$T_1=Q\circ R_1=\begin{array}{c} \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} d_1 & d_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} [.1,.9] & [.3,.9] \\ [.1,.5] & [.2,.6] \\ [.1,.8] & [.2,.8] \end{bmatrix}\end{array} \qquad T_2=Q\circ R_2=\begin{array}{c} \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} d_1 & d_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} [0,.8] & [0,.7] \\ [0,.7] & [0,.6] \\ [0,.6] & [0,.7] \end{bmatrix}\end{array}$$

Buradan da gerekli işlemler yardımıyla S_{T_1} ve S_{T_2} tanı skorları aşağıdaki şekilde elde edilir.

Çizelge 3.3. Tanı skor tablosu

$S_{T_1}-S_{T_2}$	d_1	d_2
p_1	.2	.6
p_2	-.7	-.4
p_3	.5	-.1

Elde edilen bu sonuca göre p_3 hastası d_1 hastalığına (yüksek ateşe) p_1 ve p_2 hastaları ise d_2 hastalığına (sıtmaya) yakalanmıştır.

3.4. Genelleştirilmiş Trapezoidal Bulanık Esnek Kümelerin Tıp Tanısında Uygulaması

Bu kısımda Çelik ve ark., (2013), tarafından verilen tanı metodundan da yola çıkarak genelleştirilmiş trapezoidal bulanık esnek küme teorisi yardımıyla tıp tanısı için bir yöntem sunacağız.

Esnek kümeler ilk kez Molodstov, (1999), tarafından ifade edilmesinden bu yana esnek küme ve onun değişik uygulamaları problemlere uygulandı. Özellikle bulanık esnek küme teorisinin tıp tanısındaki uygulamaları birçok araştırmacı tarafından çalışıldı. De ve ark., (2001), sezgisel bulanık kümeyi kullanarak tıp tanısı metodu üzerine çalıştı. Saikia ve ark., (2003), sezgisel bulanık küme teoriyi kullanarak genişletti. Chetia ve Das, (2010), Sanchez'in yaklaşımını interval değerli bulanık esnek kümelerle değerlendirdi. Fakat yukarıda bahsedilen tıp tanısı yaklaşımları kaçınılmaz sınırlamalara sahiptir. Örneğin mevcut yaklaşımlarda bir hastanın ne kadar baş ağrısı çektiğini kesin üyelik derecesi ile ifade edemeyiz. Fakat genelleştirilmiş trapezoidal bulanık esnek küme de biz bu sorunu çözebiliriz. Mesela bir doktora başının çok fazla ağrıdığını söyleyen bir hastanın baş ağrısının derecesini (0.8,0.9,0.9,1.0) trapezoidal bulanık sayısı yardımıyla ile karakterize edebilir.

Varsayalım $D=\{d_1,d_2,d_3,...,d_k\}$ k tane hastalıkların kümesi, $S=\{s_1,s_2,s_3,...,s_n\}$ n tane belirtilerin kümesi ve $P=\{p_1,p_2,p_3,...,p_m\}$ m tane hastanın oluşturduğu kümeler olsun.

İlk olarak S üzerinde $\tilde{\mathrm{F}}:\mathrm{P}\to \mathrm{TB(S)}$ dönüşümü ile resmedilen $(\tilde{\mathrm{F}},\mathrm{P})$ trapezoidal bulanık esnek kümesini inşa edelim. Bu $(\tilde{\mathrm{F}},\mathrm{P})$ trapezoidal bulanık esnek kümesi bize hasta – belirti matrisi olan Q ilişki matrisini verir. Matristeki trapezoidal bulanık sayılar

$$\tilde{a}_{ij}=(a_{ij}^1,a_{ij}^2,a_{ij}^3,a_{ij}^4),\ 1\le i\le m \text{ ve } 1\le \mathrm{j}\le \mathrm{n}$$

şeklinde ifade edilir ve Q ilişki matrisinde aşağıdaki gibi gösterilir.

$$Q = \begin{array}{c} \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ . \\ . \\ . \\ p_m \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} s_1 & s_2 & s_3 & . & . & . & s_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{13} & . & . & . & \tilde{a}_{1n} \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} & \tilde{a}_{23} & . & . & . & \tilde{a}_{2n} \\ \tilde{a}_{31} & \tilde{a}_{32} & \tilde{a}_{33} & . & . & . & \tilde{a}_{3n} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ \tilde{a}_{m1} & \tilde{a}_{m2} & \tilde{a}_{m3} & . & . & . & \tilde{a}_{mn} \end{pmatrix} \end{array}$$

İkinci olarak D üzerinde $\tilde{G}_{\tilde{g}}: S \to TB(D) \times \tilde{I}$ dönüşümü ile resmedilen $(\tilde{G}_{\tilde{g}}, S)$ genelleştirilmiş trapezoidal bulanık esnek kümesini inşa edelim. Bu genelleştirilmiş trapezoidal bulanık esnek küme bize belirti - hastalık matrisi olan R ilişki matrisini verir. Matristeki trapezoidal bulanık sayılar

$$\tilde{b}_{ij} = (b_{ij}^1, b_{ij}^2, b_{ij}^3, b_{ij}^4),\ 1 \leq j \leq n \text{ ve } 1 \leq l \leq k+1$$

şeklinde verilir ve R ilişki matrisinde aşağıdaki gibi gösterilir.

$$R = \begin{array}{c} \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ . \\ . \\ . \\ s_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} d_1 & d_2 & . & . & . & d_k & \tilde{g} \end{array} \\ \begin{pmatrix} \tilde{b}_{11} & \tilde{b}_{12} & . & . & . & \tilde{b}_{1k} & \tilde{b}_{1k+1} \\ \tilde{b}_{21} & \tilde{b}_{22} & . & . & . & \tilde{b}_{2k} & \tilde{b}_{2k+1} \\ \tilde{b}_{31} & \tilde{b}_{32} & . & . & . & \tilde{b}_{3k} & \tilde{b}_{3k+1} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ \tilde{b}_{n1} & \tilde{b}_{n2} & . & . & . & \tilde{b}_{nk} & \tilde{b}_{nk+1} \end{pmatrix} \end{array}$$

Matriste son satıra kadar olan kısım i. satır vektörü $\tilde{G}_{\tilde{g}}(s_i)$ ’yi, i. Sütun vektörü d_i ’yi ve son sütunda S üzerinde bir trapezoidal bulanık küme olan $\tilde{g}$ ’yı temsil eder.

Üçüncü olarak Q ve R matrislerini çarptığımızda hasta – teşhis matrisi olan D ilişki matrisini elde ederiz. Bu matriste aşağıdaki gibidir.

$$
\begin{array}{c} \\ \\ \\ D= \\ \\ \\ \\ \end{array}
\begin{array}{c} \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ . \\ . \\ . \\ p_m \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} d_1 & d_2 & . & . & . & d_k \quad \tilde{g} \end{array} \\
\begin{pmatrix}
\tilde{c}_{11} & \tilde{c}_{12} & . & . & . & \tilde{c}_{1k} & \tilde{c}_{1k+1} \\
\tilde{c}_{21} & \tilde{c}_{22} & . & . & . & \tilde{c}_{2k} & \tilde{c}_{2k+1} \\
\tilde{c}_{31} & \tilde{c}_{32} & . & . & . & \tilde{c}_{3k} & \tilde{c}_{3k+1} \\
. & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . \\
\tilde{c}_{m1} & \tilde{c}_{m2} & . & . & . & \tilde{c}_{mk} & \tilde{c}_{mk+1}
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

Bu matrisin her bir elemanı

$\tilde{c}_{il} = (\sum_{j=1}^{n} a^1_{ij}, b^1_{jl}, \sum_{j=1}^{n} a^1_{ij}, b^1_{jl}, \sum_{j=1}^{n} a^1_{ij}, b^1_{jl}, \sum_{j=1}^{n} a^1_{ij}, b^1_{jl})$, (i=1,2,...,m, l=1,2,...,k+1) şeklindedir.

Dördüncü olarak durulaştırma işlemi ile bulanık teşhis matrisini elde ederiz. Bu matris aşağıdaki gibidir.

$$
\begin{array}{c} \\ \\ \\ D^* = \\ \\ \\ \\ \end{array}
\begin{array}{c} \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ . \\ . \\ . \\ p_m \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} d_1 & d_2 & . & . & . & d_k \quad \tilde{g} \end{array} \\
\begin{pmatrix}
\tilde{v}_{11} & \tilde{v}_{21} & . & . & . & \tilde{v}_{1k} & \tilde{v}_{1k+1} \\
\tilde{v}_{21} & \tilde{v}_{22} & . & . & . & \tilde{v}_{2k} & \tilde{v}_{2k+1} \\
\tilde{v}_{31} & \tilde{v}_{32} & . & . & . & \tilde{v}_{3k} & \tilde{v}_{3k+1} \\
. & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . \\
\tilde{v}_{m1} & \tilde{v}_{m2} & . & . & . & \tilde{v}_{mk} & \tilde{v}_{mk+1}
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

Elde edilen sonuçla $v_{il} \geq v_{i,k+1}$ $,1 \leq i \leq m$ ve $1 \leq 1 \leq$ k, oluyorsa p_i hastası d_l hastalığına yakalanmıştır denir.

Algoritma

i) $(\tilde{\mathrm{F}},\mathrm{P})$ trapezoidal bulanık esnek kümesi hasta - belirti matrisi olan Q matrisine aktarılır.

ii) $(\tilde{\mathrm{G}}_{\tilde{g}},\mathrm{S})$ genişletilmiştrapezoidal bulanık esnek kümesi belirti - hastalık matrisi olan R matrisine aktarılır.

iii) Hasta – teşhis matrisi olan D matrisi $\mathrm{Q} \otimes \mathrm{R}$ işlemi ile bulunur.

iv) Durulaştırma işlemi ile D^* matrisi elde edilir.

v) En yüksek skora bakılarak sonuç yorumlanır.

Örnek Çalışma

Konunun daha iyi anlaşılması amacıyla nümerik bir örnek verelim.

$P=\{p_1,p_2,p_3\}$ hastalar kümesi

$S=\{s_1,s_2,s_3,s_4\}$ belirtiler kümesi {ateş, baş ağrısı, öksürük, karın ağrısı}

$D=\{d_1,d_2,d_3\}$ hastalıklar kümesi {yüksek ateş, tifo, sıtma} şeklinde olsun.

Doktor üç hasta ile konuştuktan sonra aşağıdaki tabloyu hazırlıyor.

Çizelge 3.4. Derecelendirme tablosu

U	s_1 (ateş)	s_2 (baş ağrısı)	s_3 (öksürük)	s_4 (karın ağrısı)
p_1	uygun	orta derece iyi	orta derece iyi	çok iyi
p_2	uygun	iyi	orta derece iyi	kötü
p_3	iyi	kötü	uygun	çok iyi

Öncelikle Şekil 2.2 de verilen dilsel değişkenlerle nümerik değişkenler arasındaki dönüşüm kuralı yardımıyla S evreni üzerinde $(\tilde{F},P)$ trapezoidal bulan esnek kümesini oluştururuz. Bu trapezoidal bulanık esnek küme hasta belirti matrisi olarak adlandırılan Q matrisine aşağıdaki gibi aktarılır.

$$
\begin{array}{c}
 \\ Q=
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} \quad s_1 \quad & \quad s_2 \quad & \quad s_3 \quad & \quad s_4 \quad \end{array} \\
\begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{array}
\begin{pmatrix}
(0.4,0.5,0.5,0.6) & (0.5,0.6,0.7,0.8) & (0.5,0.6,0.7,0.8) & (0.8,0.9,0.9,1.0) \\
(0.4,0.5,0.5,0.6) & (0.7,0.8,0.8,0.9) & (0.5,0.6,0.7,0.8) & (0.1,0.2,0.2,0.3) \\
(0.7,0.8,0.8,0.9) & (0.1,0.2,0.2,0.3) & (0.4,0.5,0.5,0.6) & (0.8,0.9,0.9,1.0)
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

Şimdi $\tilde{G}_{\tilde{g}}:S\rightarrow TB(D)\times\tilde{I}$ dönüşümüyle resmedilen $\tilde{G}_{\tilde{g}}$ genelleştirilmiş trapezoidal bulanık esnek kümesini inşa edelim. Burada $\tilde{G}_{\tilde{g}}$ genelleştirilmil trapezoidal bulanık esnek kümesi dört belirtinin ve üç hastalığın yaklaşık ifadesini verir. Bu küme aşağıdaki gibi R ilişki matrisine aktarılır.

$$
\begin{array}{c}
 \\ R=
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} \quad d_1 \quad & \quad d_2 \quad & \quad d_3 \quad & \quad \tilde{g} \quad \end{array} \\
\begin{array}{c} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \end{array}
\begin{pmatrix}
(0.8,0.9,0.9,1.0) & (0.5,0.6,0.7,0.8) & (0.7,0.8,0.8,0.9) & (0.5,0.6,0.7,0.8) \\
(0.2,0.3,0.4,0.5) & (0.7,0.8,0.8,0.9) & (0.7,0.8,0.8,0.9) & (0.4,0.5,0.5,0.6) \\
(0.4,0.5,0.5,0.6) & (0.2,0.3,0.4,0.5) & (0.0,0.1,0.1,0.2) & (0.2,0.3,0.4,0.5) \\
(0.0,0.1,0.1,0.2) & (0.7,0.8,0.8,0.9) & (0.5,0.6,0.7,0.8) & (0.7,0.8,0.8,0.9)
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

Daha sonra Q ve R matrisleri çarpılırsa aşağıdaki hasta – teşhis matrisi olan D matrisi elde edilir.

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccc} d_1 & d_2 & d_3 & \tilde{g} \end{array} \\
D = \begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{array} & \begin{pmatrix} (0.62,1.02,1.17,1.68) & (1.21,1.68,1.91,2.50) & (1.03,1.48,1.66,2.22) & (1.06,1.50,1.70,2.26) \\ (0.66,1.01,1.14,1.59) & (0.86,1.28,1.43,1.96) & (0.82,1.22,1.25,1.75) & (0.65,1.04,1.19,1.69) \\ (0.74,1.12,1.14,1.61) & (1.06,1.51,1.64,2.19) & (0.96,1.39,1.48,2.00) & (1.03,1.45,1.58,2.10) \end{pmatrix}
\end{array}
$$

Buradan da durulaştırma işlemi ile aşağıdaki matris elde edilir.

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccc} d_1 & d_2 & d_3 & \tilde{g} \end{array} \\
D^* = \begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 1.12 & 1.83 & 1.60 & 1.63 \\ 1.10 & 1.38 & 1.26 & 1.14 \\ 1.15 & 1.60 & 1.46 & 1.54 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

Elde edilen sonuca göre p_1 ve p_3 hastaları d_2 hastalığına (tifoya), p_2 hastası ise d_2 (tifo) ve d_3 (sıtma) hastalıklarına yakalanmıştır.

4. SONUÇ ve ÖNERİLER

Bu çalışmada öncelikle teşhis konulana dek hastaların bilinçsiz ilaç kullanımı sonucu doğan ya da doğabilecek yan etkilerin önüne geçebilmek ve gereksiz ilaç kullanımını önlemek amacıyla referans fonksiyonu üzerinde tanımlı bulanık esnek matrisler kullanılarak tıp tanısı için bir yöntem ortaya koyduk.

Aynı zamanda bulanık aritmetik işlemler yardımıyla bulanık esnek kümeler üzerinde uyguladığımız bir yöntem yardımıyla hangi hastanın hangi hastalığa yakalandığını teşhis edebileceğimiz bir uygulama ortaya koyduk.

Ayrıca interval değerli bulanık esnek kümeler yardımıyla tıp tanısında başka bir uygulamayı değerlendirdik.

Son olarak genelleştirilmiş trapezoidal bulanık esnek küme kavramını ele aldık. Genelleştirilmiş trapezoidal bulanık esnek kümelere ait bazı önemli sonuçlar elde ettik ve bu yapının trapezoidal bulanık esnek kümeye göre niteliksel değerlendirmede daha çok fayda sağladığını gösterdik. Üstelik genelleştirilmiş trapezoidal bulanık esnek kümelerin karar verme problemlerinde ve özellikle de tıp tanısında sağladığı katkıyı örnek bir çalışma üzerinde değerlendirdik.

Bu çalışma, bulanık esnek kümelerin karar verme problemlerinden birisi olan tıp tanısında uygulanabileceğini ve bu uygulamaların sağlayacağı faydaları irdeledik. Bu yönüyle belirsizliklerle başa çıkabilmede önemli bir rolü olan bulanık esnek kümeler, daha farklı karar verme problemlerine uygulanabilir ve elde edilecek sonuçlar uygulamalı bilimlerle birleştirilerek bilim dünyasına katkı sağlayabilir.

5. KAYNAKLAR

Aktaş, H., Çağman, N. 2007. Soft sets and soft groups, Information Sciences, 177(1): 2726-2735.

Ali, M. I., Feng, F., Liu, X., Min W. K., Shabir M. 2009. On some new operations in soft set theory, Computers and Mathematics with Applications, 57: 1547-1553.

Brouni, S., Smarandache, F., Dhar, M. (2013). On Fuzzy Soft Matrix Based on Reference Function, I.J. Information Engineering and Electronic Business, 2:52- 59.

Çağman, N., Enginoğlu, S. 2010. Soft matrix theory and its decision making, Computers and Mathematics with Applications, 59: 3308-3314.

Çağman, N., Enginoğlu, S., Çıtak, F. 2011. Fuzzy soft set theory and its applications, Iranian Journal of Fuzzy Systems, 8(3): 137-147.

Çagman, N., Enginoglu, S. (2012). Fuzzy Soft Matrix Theory and Its Application in Decision Making, Iranian Journal of Fuzzy systems, 9(1): 109-119.

Çelik, Y., Ekiz, C., Yamak, S. 2011. A new view on soft rings, Hacettepe J. Math. Stat., 40(2): 273-286.

Çelik, Y., Yamak, S. 2013. Fuzzy soft set theory applied to medical diagnosis using fuzzy arithmetic operations, Journal of Inequalities and Applications, 82: 1-9.

Chetia, B, Das, PK. 2010. An application of interval valued fuzzy soft set in medical diagnosis. Int. J. Contemp. Math. Sci., 5(38): 1887-1894.

Chen, D., Tsang, E. C. C., Yeung, D. S., Wang X. 2005. The parameterization reduction of soft sets and its applications, Computers and Mathematics with Applications, 49(1): 757-763.

De, S.K., Biswas, R., Roy, A.R, An application of intuitionistic fuzzy sets in medical diagnosis, Fuzzy Sets and Systems, 117: 209-213.

Feng, F., Jun Y. B., Liu X., Li L. 2010. An adjustable approach to fuzzy soft set based decision making, Journal of Computational and Applied Mathematics, 234: 10-20.

Feng, F., Li C., Davvaz, B. 2010. Soft sets combined with fuzzy sets and rough sets:a tentative approach, Soft Comput., 14: 899–911.

Jiang, Y., Tang, Y., Chen, Q., Liu, H., Tang, J. 2010. Interval valued intuitionistic fuzzy soft sets and their properties, Computers and Mathematics with Applications, 60: 906-918.

Jin-liang, L., Rui-xia, Y., Bing-xue, Y. 2008. Fuzzy Soft Sets and Fuzzy Soft Groups, Chinese Control and Decision Conference, China, 2626-2629.

Kaufmann, A. 1.975. Introduction to the Theory of Fuzzy Subsets, Volume I, Academic Press, London.

Kaufmann, A., Gupta, M.M. 1991. Introduction to Fuzzy Arithmetic Theory and Applications, Van Nostrand – Reinhold, New York.

Kong, Z., Gao, L., Wang, L. 2009. Comment on "A fuzzy soft set theoretic approach to decision making problems", Journal of Computational and Applied Mathematics, 223: 540-542.

Kumar, R. 1992. Fuzzy subgroups, fuzzy ideals, and fuzzy cosets: Some properties. Fuzzy Sets and Systems, 4: 267-274.

Liu, W. J. 1983. Operations on fuzzy ideals, Fuzzy Sets Systems, 11: 31-41.

Maji, P. K., Biswas, R., Roy, A. R. 2001. Fuzzy soft sets, Journal of Fuzzy Mathematics, 9(3): 589-602.

Maji, P. K., Roy, A. R., Biswas, R. 2002. An application of soft sets in a decision making problem, Computers and Mathematics with Applications, 44(1): 1077-1083.

Maji, P. K., Bismas, R., Roy, A.R. 2003. Soft set theory, Computers and Mathematics with Applications, 45(1): 555-562.

Maji, P. K., Roy, A. R., Biswas R. 2004. On Intuitionistic Fuzzy soft sets, J. Fuzzy Math., 12(3): 669-683.

Mamoni, D. (2013). Representation of Fuzzy Matrices Based on Reference Function, Int. J. Intelligent systems and Applications, 84-90.

Meenakshi , A. R., Kaliraja , M. 2011. “An Application of Interval Valued Fuzzy Matrices in Medical Diagnosis”, Int. Journal of Math. Analysis, 5(36): 1791 – 1802.

Molodtsov, D. 1999. Soft set theory-first results, Computers and Mathematics with Applications, 37(1): 19-31.

Molodtsov D. 2004. The Theory of Soft Sets, URSS Publishers, Moscow.

Molodtsov, D. 1999. Soft set theory-first results, Computers and Mathematics with Applications, 37(1): 19-31.

Mordeson, J. N., Malik, D. S. 1998. Fuzzy Commutative Algebra, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., London.

Nanda, S. 1986. Fuzzy fields and fuzzy linear spaces, Fuzzy Sets and Systems, 19: 89-94.

Pawlk, Z. 1982. Rough sets, International Journal of Information and Computer Sciences, 11(1): 341-356.

Pei,D., Miao, D. 2005. From Soft Sets to Information Systems, International Conference on Granular Computing, China, 617-621.

Qin, K., Hong, Z. 2010. On soft equality, Journal of Computational and Applied Mathematics, 234: 1347-1355.

Rosnfeld, A. 1971. Fuzzy groups, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 35: 512-517.

Rosenfeld, A. 1971. Fuzzy groups, Journal Of Mathematical Analysis and Aplications, 35: 512-517.

Roy, A. R., Maji, P. K. 2007. A fuzzy soft set theoretic approach to decision making problems, Journal of Computational and Applied Mathematics, 20(1): 412-418.

Saikia, B.K., Das, P. K., Borkakati, A.K. 2003. “An Application of Intuitionistic fuzzy soft sets in medical diagnosis”, Bio Science Research Bulletin, 19(2): 121-127.

Sanchez, E. (1976). “Resolution of composite fuzzy relation equations, Information and control”, 30, 38 - 48.

Sanchez, E. (1979). Inverse of fuzzy relations, application to possibility distributions and medical diagnosis, Fuzzy sets and Systems, 2 (1): 7586.

Saral, N., Rajkumari, S. 2014. Application of Intuitionistic Fuzzy Soft Matrices in Decision Making Problem by Using Medical Diagnosis, IOSR Journal of Mathematics, 10(3) 37-43.

Xiao,Z., Li, Y., Zhong, B., Yang, X. 2003. Research on synthetically evaluating method for business competitive capacity based on soft set, Statistical Research, 52-54.

Xiao,Z., Gong, K., Zou, Y. 2009. A combined forecasting approach based on fuzzy soft sets, Computers and Mathematics with Applications, 228: 326-333.

Xiao, Z. Xia, S. Gong, K., Li, D. 2012. The trapezoidal fuzzy soft set and its application in MCDM, Applied Mathematical Modelling, 36(12): 5844 – 5855

Yang, X., Lin, T. Y., Yang, J., Li Y., Yu, D. 2009. Combination of interval-valued fuzzy set and soft set, Computers and Mathematics with Applications, 58: 521-527.

Zadeh, L. A. Fuzzy Sets, 1965. Information and Control, 8: 338 – 353.

Zhang, H. Shu, L., Liao, S. 2014. Generalized trapezoida Fuzzy Soft Set and Its Application in Medical Diagnosis, Journal of Applied Mathematics, doi: 10.1155/2014/312069

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Onur ZİHNİ

Doğum Yeri : İSTANBUL

Doğum Tarihi : 01/01/1985

Yabancı Dili : İngilizce

E-mail : kuzeydenizli@gmail.com

İletişim Bilgileri : Ordu Üniv. Fen Edebiyat Fak. Matematik Böl. ORDU

Öğrenim Durumu :

Derece	**Bölüm/ Program**	**Üniversite**	**Yıl**
Lisans	Matematik	Eskişehir Osmangazi Üniversitesi	2008
Tezsiz Y. Lisans	Ortaöğretim Matematik Öğr.	Başkent Üniversitesi	2009