T.C.

ORDU ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BÜYÜMENİN MATEMATİKSEL TANIMLANMASI ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA

ÖZNUR KURALAY

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ORDU 2019

T.C.

ORDU ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

BÜYÜMENİN MATEMATİKSEL TANIMLANMASI ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA

ÖZNUR KURALAY

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ORDU 2019

TEZ ONAY

Öznur KURALAY tarafından hazırlanan **"BÜYÜMENİN MATEMATİKSEL TANIMLANMASI ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA"** adlı tez çalışmasının savunma sınavı 27.08.2019 tarihinde yapılmış ve jüri tarafından oy birliği ile Ordu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü MATEMATİK ANABİLİM DALI YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman
Dr. Öğr. Üyesi Mehmet KORKMAZ

Jüri Üyeleri	İmza
Üye Prof. Dr. Selahattin MADEN Matematik Bölümü, Ordu Üniversitesi	....
Üye Dr. Öğr. Üyesi Sercan TURHAN Matematik Bölümü , Giresun Üniversitesi	....
Üye Dr. Öğr. Üyesi Mehmet KORKMAZ Matematik Bölümü, Ordu Üniversitesi	....

29 / 08 / 2019 tarihinde enstitüye teslim edilen bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulu'nun 29/08 / 2019 tarih ve 2019 / 5.13 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

T.C. ORDU ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ 1923

Enstitü Müdürü
Dr. Öğr. Üyesi Mehmet Sami GÜLER

TEZ BİLDİRİMİ

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan ve kullanılan intihal tespit programının sonuçlarına göre; bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

Öznur KURALAY

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

BÜYÜMENİN MATEMATİKSEL TANIMLANMASI ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA

ÖZNUR KURALAY

ORDU ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ, 28 SAYFA

TEZ DANIŞMANI: Dr. Öğr. Üyesi Mehmet KORKMAZ

Bu çalışmada, yaygın olarak kullanılan büyüme modellerinin tanımlanması yapılmıştır. Büyümenin uygun bir matematiksel tanımının, ölçülen verimin miktarını azaltmada gözlenen büyümenin açıklanmasında, büyüme hızlarının kıyaslanmasında, türler arasında ve türler içindeki kıyaslamada ve bu türlerin gelecekteki büyümelerinin tahmininde kullanılabilir olduğu belirtilmiştir. Canlı organizmalarda gözlenen büyüme stratejilerinin farklılığı bunların birkaç basit eğri ile tanımını güçleştirir. Bu yüzden değişik modeller incelenmiştir. Büyümenin kendine özgü kalıpları, deneysel modellerin büyüme eğrileri, büyümenin teorileri ve mekanistik modelleri ve büyüme modellerinin seçimi üzerinde durulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Büyüme Eğrileri, Deneysel Modeller

ABSTRACT

A STUDY ON MATHEMATICAL DESCRIPTION OF GROWTH

ÖZNUR KURALAY

ORDU UNIVERSITY INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

MATHEMATICS

MASTER THESIS, 28 PAGES
SUPERVISOR: Assist. Prof. Dr. Mehmet KORKMAZ

In this work, description of commonly used growth models were done. An appropriate mathematical definition of growth is stated to be useful in reducing the amount of measured yield, explaining observed growth, comparing growth rates, comparing among species and within species and predicting future growth of these speies. The difference among growth strategies observed in living organisms made it difficult to define these strategies with a few simple curves. For this reason, various models were investigated. The specific pattern of growth, growth curves of experimental models, theories and mechanistic models of growth and selection of growth models were emphasized.

Anahtar Kelimeler: Growth Curves, Experimental Models

TEŞEKKÜR

Tüm çalışmalarım boyunca bilgi ve deneyimleriyle bana yol gösteren, hiçbir zaman desteğini esirgemeyen değerli danışman hocam, Sayın Dr. Öğr. Üyesi Mehmet KORKMAZ'a, Ordu Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü öğretim üyelerine ve öğretim elemanlarına sonsuz teşekkür ve şükranlarımı sunarım.

Hayatım boyunca her konuda maddi, manevi desteklerini esirgemeyen annem, babam, ablam ve kız kardeşime, çalışmalarım süresince her zaman moral ve motivasyonumu sağlayan eşime, her şeyden değerli olan canım kızım Ela'ya sonsuz teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

SİMGELER ve KISALTMALAR LİSTESİ

A	:	Richards Fonksiyonu Maksimum Asimptotik Büyüklük
b,c,m	:	Büyüme Fonksiyonu Parametreleri
d	:	Richards Fonksiyonu Düşük Asimptotik Büyüklük
e_t	:	Hata Terimi
t, t', t^*, T	:	Zaman
y_∞	:	Büyümenin Yaklaşabileceği En Üst Sınır
y_0	:	Başlangıç Büyüklüğü
$y, \tilde{y}$	:	Anlık Büyüklük
β	:	Katsayı, Sabit
η,k	;	Katsayı, Sabit
v, α, μ	:	Büyüme Fonksiyonunun Şekil Parametreleri

1.GİRİŞ

Büyümenin uygun bir matematiksel tanımı, ölçülen verimin miktarını azaltmada, gözlenen büyümenin açıklanmasında, büyüme hızlarının kıyaslanmasında, türler arasında ve türler içindeki kıyaslamada ve bu türlerin gelecekteki büyümelerinin tahmininde kullanılabilir. Büyüme, canlıların en önemli biyolojik özelliklerinden birisidir. Bugüne kadar büyümenin birçok tanımı yapılmıştır. Standart bir tanımı olmamakla birlikte, büyüme bir toplumun veya bir organizmanın büyüklüğünde zamanla görülen gelişmedir (Yıldızbakan, 2005). İki şekilde yaklaşım oluşturulabilir; bunlar büyüme eğrilerinin tanımlanması ve büyüme teorilerine dayalı modellerdir ki bu yaklaşımlar genel anlamda terminolojik olarak ayırt edilemez. O yüzden ikisine birden büyüme modelleri adı verilir. Ama bilinmelidir ki aralarında farklılıklar vardır. France ve Thornley, (1984) bu iki tanımı deneysel modeller olarak tanımlamışlardır. Mekanistik modellerin daha kolay anlaşılabilmesini sağlamışlardır.

Deneysel modeller olarak büyüme eğrileri parametrik fonksiyonlardır. Organizmanın büyüklüğü ve yaşının ölçümleri ile alakalı birkaç parametreye sahiptir. Çoğu büyüme eğrisinin matematiksel fonksiyonu, canlının yaşamsal süreç içindeki büyümesini ifade etmeyi tam olarak sağlamaz. Bu modeller oluşturulurken büyüme eğrileri gözlenir ve elde edilen parametreler tahmin edilir. Sonrasında organizmaların büyümeleri üzerine çokça soruların cevaplarına ulaşımı sağlanabilir.

Büyüme eğrilerinin ilerlemesindeki en önemli zorluklar, insandaki erken yaştaki anormal büyüme ve hastalıkların neticesindeki ilerlemenin sonucuyla, ekonomik olarak değeri olan üremeli canlıların (inek, koyun, keçi vb.) ürün verimini arttırmaya yönelik büyümesinin kıyaslanması ve tahminindeki farklılıklardır. Bunun yanı sıra başka bir problem olan nüfus devamının büyüme ile ilişkisinin ve türlerin bir arada bulunmasının alakası, büyüme modellerinin geliştirilmesine katkı sağlayacaktır. Büyüme eğrilerinin ortak bir uygulaması da asimptotik büyüklüğün oluşturulması içindir.

Canlı yapılarda gözlemlenen büyüme stratejilerinin farklılığı bunların bir iki basit eğri ile tanımlanması açısından güçtür. Büyüme faktörlerinin modellenmesine yapısal yaklaşımının hedefleri; büyüme ölçümlerinin bulunması, bir fonksiyona uygun büyüme parametrelerinin tahmin edilmesi, uygunluğunun derecesinin değerlendirilmesi ve meydana gelecek büyümenin tahminidir (Karkach, 2006).

Mekanik model veya büyüme teorisi ikinci bir farklı yaklaşım sunar. Bu yaklaşım veriyi modele uygun anlamda oturtmak için değil de belli bir organizma sistemi içerisinde yer alan büyüme değerlerinin gelişimi için kullanılmasıdır. Büyüme modeli olarak basit ve özet bir şekilde olabilen ve büyüme süreçlerinin yüzeysel ilgisinin ortaya konduğu (Bertalanffy, 1957) organizma yapılarının ve dokularının bozulduğu veya inşa edildiği basit tanımları içerir. Veya enerji deposu ve bileşik dengesi, süreçlerin tüketimi ve depolanması ve farklı sistemler tarafından enerjinin kullanımı gibi tanımları içerir. Bunun yanı sıra detaylı modeller; şekil, seyreltme, bedensel dokuların vücut oranı, organizma düzeyinin özellikleri ve fizyolojisi gibi ayrıntılı verileri Dinamik Enerji Bütçe Teorisinde olduğu gibi (Kooijman, 2000) göz önünde bulundurur.

Büyüme; biyoloji, kimya, tıp, ziraat, ekonomi, vb. alanlarda gözlenmektedir (Ersöz, 1992). Büyümeye daha genel bir yaklaşım, genel olarak boyuttaki değişiklikler, birikme ve bedenin yıkımı arasındaki dinamik dengenin sonucu olarak organizmanın boyutu ile alakalı olabilir.

Mekanistik modellerin ve teorilerin amacı, farklı türler arasındaki büyümedeki farklılık ve benzerlikleri anlamak ve bir mekanistik çerçeveden bu farklılıkları açıklamaktır. Bir mekanistik modelde genellikle büyüme oranını (**dy/dt**) ile ilgili diferansiyel denklemden büyüklüğü (y) türetir. Bu matematiksel ilişki büyüme süreçlerini yöneten mekanizmayı göstermektedir. Bu yaklaşım bedensel büyüme için ayrıntılı olarak kullanılır. Bu sayede çok sayıda büyüme fonksiyonu türetilmiştir. Monomoleküler, Lojistik, Gompertz modelleri buna örnek gösterilebilir (Turner ve ark., 1976; France ve Thornley, 1984).

2. MATERYAL ve YÖNTEM

2.1 Tipik Olarak Gözlenen Büyüme Eğrileri

Serbest olarak beslenen canlılardaki büyüme hızı sıklıkla birkaç modelde gözlenir. Üstel model denilen model hemen doğum sonrası belirli süre aralıklarında büyüme için kullanılan tipik bir modeldir. Asimptotik büyüme modeli de ayrıca üstel olarak adlandırılır. Karakteristik olarak pozitif ve yatay bir büyüme hızı gözlenir. Buna bağlı olarak da bir çekim noktası yoktur (Şekil 1) .

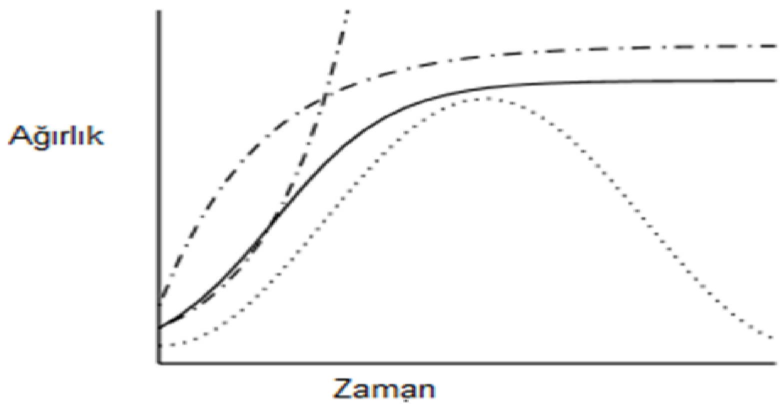
Vücudun ağırlığı, hacmi ve çoğu organdaki büyüme sigmoid veya S-şeklinde bir büyüme modeli gösterir. Başlangıç olarak kütledeki büyüme hızı yavaştır lakin sonradan artmaktadır. Büyüme hızı bir maksimuma ulaşır bu bir kıvrılmaya karşılık gelir ve sonra yavaşça sıfıra doğru azalır ki bu da canlının ergin ağırlığına ulaştığı zamana denk gelir. Sigmoid eğrisi kararlı bir şekilde büyüme için yaygındır ve bu da büyümeyi tarif ederken Sigmoid Fonksiyonlarının ortaya çıkmasına sebep olmuştur. Burada birkaç sigmoid periyodu gelişim boyunca diğerini takip eder ve bu yüzden birkaç büyüme hızı maksimumu bulunur (Şekil 1).

Çan eğrisi şeklindeki büyümeye örnek olarak dejenere olmuş ve yıpranmış organlar gösterilebillir. Dejenarasyon ve içe kıvrılma çan eğrisi şeklindeki büyümenin göstergesidir. Yaşlanan insanların kemiklerinin değişimi buna güzel bir örnektir. Organın uzunluğu ilk önce artar sonra maksimuma ulaşır ve yaşlandıkça da azalmaya başlar (Şekil 1).

Bu büyüme modelleri için, çoklu büyüme eğrileri önerilmiştir. Bununla beraber hiçbiri keskin bir hassasiyetle biyofiziksel modelin ihtiyaçlarını karşılamamaktadır. Bu yüzden büyüme eğrisi analizi büyüme seyrinin az ya da çok görünen bir analizidir.

Büyüme eğrileri; kütledeki mevsimsel farklılıklarla, beslenme kalitesindeki farklılıklar ile karmaşık modellerin tecrübe edilmesini sağlayabilir. Sıklıkla, kütledeki değişim bu etkilerden dolayı olduğu için büyümenin şeklini açıklamak oldukça zor olacaktır. Mesela doğada bulunan bir canlı her zaman aynı beslenme diyetine uymayacaktır ya da besini çok bulduğu dönemlerdeki organ yapısı ile bulamadığı zamanki organ yapısında boyutsal farklılıklar gözükecektir. Bu nedenle büyüme eğrilerine bakarken neyin araştırıldığı da önemlidir. Yani büyüme modeli, seçilen büyümenin ölçüsüne de bağlıdır.

Üstel büyümeyi kesik noktalı çizgilerle, Sigmoid büyümeyi düzgün çizgi ile ve Çan şeklindeki büyümeyi noktalı çizgi ile basit veriler vererek çizdirdiğimizde Şekil 1 meydana gelir.



Şekil 2.1 Tipik Büyüme Eğrileri

2.2 Deneysel (Empirikal) Büyüme Modelleri

Büyüme modelleri belirleyici veya belirsiz olarak oluşturdukları büyüme çeşidine göre sınıflandırılabilir. Oluşturulan modellerin büyük bir kısmı belirleyici büyümeyi tanımlar. Belirlenen büyüme, maksimum azalan büyüme hızı ile karakterize edilmesi sebebiyle bu tür eğri modeller asimptotik olarak da ifade edilir. Bu modellere örnek olarak Gompertz, Von Bertalanffy, Üstel, Lojistik, Richards vb. verilebilir. Bu gibi modeller dışındakiler de sigmoidal görüntüye sahiptir. Bu modelleri oluştururken genel olarak (t) zamanına bağlı olarak y = y(t) denklemi tercih edilir.

2.3 Büyüme Eğrilerinin Belirlenmesi

Bu bölümde bazı büyüme eğrilerinin tanıtımına yer verilmiştir. Örneğin; Üstel, Monomoleküler, Lojistik, Sigmoid (Brody), Richards, Gompertz, Von Bertalanffy, Belirsiz Büyüme, Polinomial Büyüme, Çok Fazlı Büyüme eğrileri gibi modeller üstünde durulmuştur. Tabi bu örnekler modelleme yapacaklar açısından yeterli sayıda olmayabilir. Fakat sıklıkla kullanılan modellerden oldukları söylenebilir. Burada bazı modellenen eğriler birbirlerinin farklı formatlarda gösterimleri ile oluşturulabileceği de gözden kaçırılmamalıdır. Bu çalışma bizim konumuz dışında tutulmuş olup bazen sözel olarak modeller tanıtılırken bahsi geçecektir. Bununla ilgili çıkarımlar büyüme modelleri ile ilgili birçok kaynakta zaten mevcuttur. Hatta farklı disiplinlerde çalışan bilimler de dahi çalışma konusuna, verilerin çeşidine bakılarak uyarlanabileceği gibi çalışılan bilimsel alanla ilgili yeni yeni modeller de türetilebilir.

2.3.1 Üstel Büyüme Eğrisi

Büyüme oranın boyutla orantılı olduğunu farzederek,

$$dy/dt = by$$

ifade edilebilir. Bu farklılık diferansiyel denkleminin çözümünü üslü büyüme eğilimi olarak şöyle tanımlar. y_0 başlangıç boyutu, b>0 olmak üzere;

$$y = y_0 \, e^{bt}$$

oluşur ki bu fonksiyon genel olarak sadece büyümenin geçici sınırlı periyotlarında uygulanabilecektir. b<0 için, bu üstel azalmaya iyi bir model olabilir. Üstel fonksiyona şu dönüşümler uygullandığında;

$$\tau = -t \, , \qquad \tilde{y} = y_\infty \, (1- y/y_0)$$

formunda çizgisel dönüşümünü kullanarak zamanı ve boyut ölçülerini ters çevirerek,

$$\tilde{y} = y_\infty \, (1 - e^{-b\tau})$$

elde edilir. Burada y_∞ büyümenin yaklaşabileceği en üst sınırı göstermektedir. Eğrinin bu görselliği çoğunlukla Bertalanffy eğrisi olarak adlandırılır. Fakat Bertalanffy modeli için gerçek çözüm $\mathbf{y = y_0 \, e^{bt}}$ gibi daha güçlü bir üslü fonksiyon formuna sahiptir. $\mathbf{\tilde{y} = y_\infty (1 - e^{-b\tau})}$ denklemi; t_0 teorikte canlının sıfır boyutunu alabileceği yaşı, k daha çok Brody büyüme katsayısı ve yahut büyüme oranın azaldığı zamanki ölçümü oranı olmak üzere, $\mathbf{y = y_\infty \, (1 - e^{-k(t - t_0)})}$ şeklinde de yazılabilir. Brody'nin kendi Sigma fonksiyonlarının bir kısmında ters üslü büyüme fonksiyonlarını bu şekilde kullandığı görülür. Genel olarak yüksek bir '**k**' hızlı erken büyümeyle, olgunlukta düşük yaş ve boyutla, sık tekrarlayan üretimle, kısa yaşam aralığıyla ve kısa bir maksimum uzunlukla ilişkilendirilir. Üstel eğrinin bu şekli, hızlı bir büyümenin olduğu monomoleküler büyümenin özel bir durumudur. Üstel eğri uzunluğa, uygun olan bir kütleye de uygulanabilir. Üstel eğri kütleden çok uzunluğa daha iyi uyar ve daha büyük ölçüler için daha iyi çalışır. Doğum ve erken gençlik dönemleri boyunca, sigmoid eğrisi daha iyi uygulanabilir.

2.3.2 Monomoleküler Büyüme Eğrisi

Sınırlandırılmış değere yaklaşan büyüme eğrilerine neden olan hipotezlerin en basitlerinden birisidir. 'y_∞' büyümenin yaklaşabileceği en üst sınır, 'b' çalışılan uygulamaya ait sabit bir katsayı, 'y' ise t anındaki büyüklük olmak üzere, b > 0 olduğu zaman t anındaki artma miktarının (y_∞-y) farkıyla orantılı olduğunun kabul edilmesi esasına dayanır. Bu artış denklemi, **$dy/dt = b\,(y_\infty - y)$** olarak yazılabilir. Bu eşitliğe aşağıdaki düzenlmelar yapılırsa;

$\rightarrow \quad \frac{dy}{y_\infty - y} = bdt$

$\rightarrow \quad \int \frac{dy}{y_\infty - y} = b \int dt$

$\rightarrow \quad \ln c - \ln|y_\infty - y| = b\,t$

$\rightarrow \quad \ln \frac{c}{y_\infty - y} = \ln e^{bt}$

$\rightarrow \quad \frac{c}{y_\infty - y} = e^{bt}$

$\rightarrow \quad y_\infty - y = \frac{c}{e^{bt}} = ce^{-bt}$

$\rightarrow \quad y = y_\infty - ce^{-bt}$

$\rightarrow \quad y = y_\infty\left(1 - \frac{c}{y_\infty}e^{-bt}\right) + e_t$ büyüme denklemi elde edilir. Burada β canlının büyüklüğüne ait sabit bir ölçü olmak üzere $\beta = \frac{c}{y_\infty}$ yazılarak,

$$y = y_\infty\left(1 - \beta e^{-bt}\right) \text{ elde edilir.}$$

İntegralden dolayı e_t hata payları yukarıda gözününde bulundurulmalıdır. Böylelikle monomoleküler eğrinin genel formu çıkmış olur. Monomoleküler eğriler hızlı başlangıç yapıp yatay bir süreçle takip eden büyümeye sahiptir.

2.3.3 Lojistik Büyüme Eğrisi

Bir canlının büyümesi dört basamağa ayrılabilir: Büyüme oranının kiloya orantılı olduğu erken üslü büyüme, daha çok enerjisini bakıma adadığı doğrusal büyüme, bakım dengesinin yaklaşıldığı azalan büyüme ve ihtiyarlık boyunca olan büyümedir. İhtiyarlık basamağı göz önüne almak konu dışı olduğundan ve yahut bu basamakta çok az araştırma yapıldığından son bölüm ihmal edilebilir. İlk basamaktaki büyüme oranı canlının ağırlığıyla orantılıdır.

$$\mathbf{dy/dt=by}\ ,$$

Bu farksal eşitliğin çözümü yine üslü büyümedir. İkinci basamaktaki büyüme zamanında ise doğrusallık söz konusudur. Örneğin; $\mathbf{y = y_o+bt}$ şeklinde ifade edilebilir. Üçüncü basamaktaki büyüme ise daha yataysal devam eden büyüme oranının sıfıra yaklaştığı ve ağırlığın en üst seviyeye ulaştığı bir kısıtlanmış dönemdir. Dördüncü bölüm burada dikkate alınmayacak olduğunu ise daha önce bahsetmiştik. Sadece ilk üç evreyi göz önüne alarak, 'y_∞' büyümenin yaklaşabileceği en üst sınır, 'b' çalışılan uygulamaya ait sabit bir katsayı, 'y' ise t anındaki büyüklük olmak üzere, büyüme şu eşitlikle tarif edilir.

$\rightarrow \quad \mathbf{dy/dt = by}\left(\mathbf{1 - \frac{y}{y_\infty}}\right)$

$\rightarrow \quad \frac{\mathbf{dy}}{\mathbf{y(1-\frac{y}{y_\infty})}} = \mathbf{bdt}$

$\rightarrow \quad \int \frac{dy}{y(\frac{y_\infty - y}{y_\infty})} = \int bdt$

$\rightarrow \quad \int \frac{y_\infty}{y(y_\infty - y)} dy = \int bdt$

$\rightarrow \quad \int \frac{dy}{y} - \int \frac{dy}{y_\infty - y} = \int bdt$

$\rightarrow \quad \mathbf{ln}|y| - \mathbf{ln}|y_\infty - y| = \mathbf{bt + c}$

$\rightarrow \quad \mathbf{ln}\left|\frac{y_\infty - y}{y}\right| = \mathbf{-bt - c}$

$\rightarrow \quad \frac{y_\infty - y}{y} = e^{-bt} e^{-c}$ burada $e^{-c} = \beta$ sabit katsayısını yazarak,

$\rightarrow \quad \frac{\mathbf{y_\infty - y}}{\mathbf{y}} = \beta e^{-bt}$

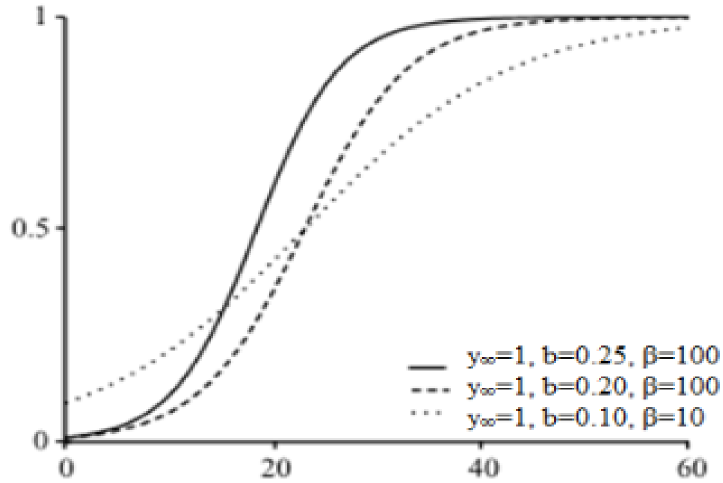
$\rightarrow \quad \frac{y_\infty}{y} - \mathbf{1} = \beta \mathbf{e^{-bt}}$

$\rightarrow \quad \frac{y_\infty}{y} = \mathbf{1} + \beta e^{-bt}$

Bu işlemlerin sonucunda lojistik eğri formulü elde edilir:

$$y = \frac{y_\infty}{1+\beta e^{-bt}}$$

(y) değeri, zamanın sonsuza gittiğinde üst limit y_∞'a kavuşur. β parametresi doğumdan olgunluğa kadar olan kilodaki farklılaşmanın ölçümü olarak kabul edilebilir. Lojistik eğri sigmoid şeklindedir. Başlangıçta büyüme düşük ve sonrasında yüksektir. Eğri, tam büyüme oranının maksimum olduğu bükülme noktası olan ($y = y_\infty / 2$) yerde simetriktir (Şekil 2). Bu özellik lojistik büyüme eğrisinin dezavantajlarından birisidir.



Şekil 2.2 Lojistik Bir Modele Rasgele Bir Örnek

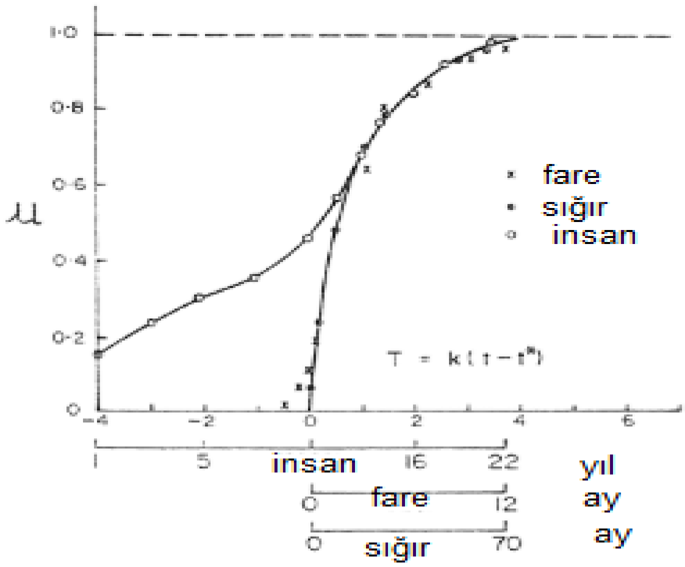
2.3.4 Sigmoid (Brody) Büyüme Eğrisi

Büyümenin sigmoid şekli, daha istikrarlı büyüme sağladıklarından dolayı genellikle hayvanlarda gözlemlenir. Brody, (1945) büyümenin büküm noktasında kesintili eğimle devamlı giden bir eğri olarak ifade edilmesi gerektiğini tavsiye etmiştir. Sigmoid eğri, sıklıkla Brody'nin eğrisi olarak referans edilir. Büyümeyi önce hızlandıran ve t' yaşından sonra azalan veya kendini kısıtlayan olarak tarif etmiştir. y_o hayvanın yaşayan başlangıç kilosu, doğumdaki ilk ağırlığı da denilebilir. b, hızlandırılan ivmedeki sürekli olan üslü büyümeyi, y_∞ ise yaşayan olgunluğa ulaştığındaki kilosunu göstermek üzere şu matematiksel tanımı önerir:

$$y = y_0 e^{bt} \quad , \quad 0 \leq t \leq t' \quad ,$$

$$y = y_\infty\left[1 - e^{-k(t-t^*)}\right] \;, \quad t \leq t' \quad ,$$

Çoğu hayvan için büyüme eğrilerini iyi derecede ifade eden bir eğridir. Brody olgunluk derecesindeki yapının büyümesinin hızlı olduğunu gösterir. t^* zaman kaydırma parametresi, k genetik sabit katsayı olmak üzere ($\mu = y / y_\infty$) T zamanında normalleştirmeye karşı dönüşüm uygulandığında T=k(t-t*) ve u = l- e^{-T}, 0 < T ve (Şekil 3) aynı grafikte hayvanın düzeninin geniş aralığı için, büyüme verilerini verir. 0 < T için birkaç değişik parçadan büyüme verilerinin çakışması önemlidir. Bu koordinatlardaki çizim farklı yerlerde aynı geleceğe sahip farklı hayvanların büyüme belirlediği yerleri gösteren bir kanıt olabilir.



Şekil 2.3 Brody'nin T Anındaki Eğrisi (Park, 1982)

2.3.5 Richards Eğrisi

Richards, (1959) hayvanların gelişimini tarif etmek için Von Bertalanffy tarafından geliştirilen büyüme eşitliğini bitki bilimine uygulanan ilk kişiydi (France ve Thornley, 1984). Richards eğrisi genel olarak, Monomoleküler (v = -1), Lojistik (v = 1), Gompertz (v = 0) özel durumlarda yerine v yazılan bir yapıya sahiptir. Diğer büyüme eğrileri için ise eğri eşitliğini yazmanın değişik metotları vardır (Labouriau ve ark., 2000). Bunlardan biri de,

$$\mathbf{y = \alpha\{1 + sign(v)e^{\beta - kt}\}^{-1/v}},$$

Burada α , β > 0 ve -1 ≤ v ama v≠0 dir. v = 0 olduğunda ise zaten yukarıda bahsettiğimiz gibi Gompertz denklemi olacağını söylemiştik. $t = \frac{(\beta - \ln|v|)}{k}$ anında büküm noktasına sahip olacağından istenen sonuç $\mu = \alpha(v+1)^{-1/v}$ ile sağlanır.

-1 $\leq v < \infty$ iken son ağırlık ölçümlerinde birçok bükülme meydana getirebilir. k parametresi de büküm noktasının pozisyonu açısından önemlidir. α eğrinin asimptotlarının büyüklüğünü belirlerken, v parametresi bükülme noktasındaki Richards fonksiyonlarının büyüklüğü belirlemeyle alakalı değerleri, β parametresi de ilk büyüklüğü kontrol ederken Richards eğrisinin t=0 anında ise şekli şu dur:

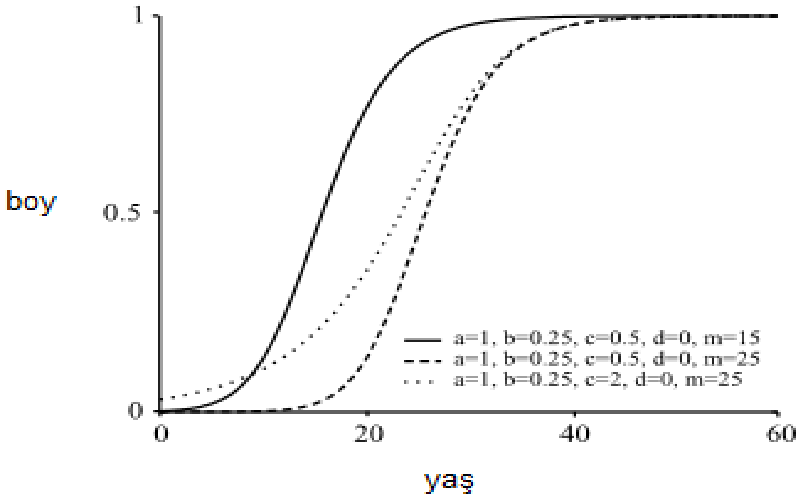
$$\mathbf{y = \alpha\{1 + sign(v)\, e^{\beta}\}^{-1/v}} \quad ,$$

$$\mathbf{y = \alpha(v+1)^{-1/v}} \quad ,$$

a maksimum asimptotik büyüklüğü, d düşük asimptotik büyüklüğü, b ortalama büyüme hızını, m maksimum büyümenin zamanı, c maksimum büyümenin erken yada geç meydana gelip gelmediğini belirlemek üzere Richards eğrisinde eşitliğin başka bir şekli şöyledir.

$$\mathbf{y = d + a\,\{\,1 + ce^{-b(t-m)}\,\}^{(-1/c)}} \quad ,$$

Görünen o ki; sayısal değerler karşısında Richards eğrisini uydurabilmek birçok değişkenden ve parametreden dolayı hayli zor gözükmektedir (Şekil 4).



Şekil 2.4 Richards Eğrisine Rasgele Bir Örnek

2.3.6 Gompetrz Büyüme Eğrisi

Gompertz denklemi süreç içerisinde eksponansiyel azalma olduğu yerlerde kendini sınırlayacı büyüme modellerinden ortaya çıkar. Sigmoid büyüme noktalarını takip eden tümör hücrelerinin çoğunun büyümesini takip etmek için ilk kez tanıtıldı. Bu model farklı eşitlikler tarafından belirlenen büyüme oranlarına izin verir. Gompertz fonksiyonu üç parametreli bir fonksiyondur. Parametreleri çift üstel halindedir. Gompertz modelinde artım, büyüklük ve (y_∞ / y) oranının logaritması ile orantılı kabul edilmektedir. y_∞ büyümenin yaklaşabileceği en üst sınır, y ise t yaşındaki büyüklük , β başlangıç büyüklüğüne ait bir ölçü, b büyüme sabiti, e_t hata terimi olmak üzere;

$$\frac{\mathbf{dy}}{\mathbf{dt}} = \mathbf{by \ln \frac{y_\infty}{y}}$$

$$\rightarrow \quad \int \frac{\mathbf{dy}}{y \ln(\frac{y_\infty}{y})} = \mathbf{b} \int \boldsymbol{dt}$$

Burada $\mathbf{u = \ln(\frac{y_\infty}{y})}$ dönüşümü yapılarak;

$$\mathrm{du} = \frac{-\frac{y_\infty}{y^2}}{\frac{y_\infty}{y}}\,\mathrm{dy} = -\frac{dy}{y} \quad \rightarrow \quad -\mathrm{du} = \frac{dy}{y}$$

$$\rightarrow \quad -\int \frac{\mathbf{du}}{\mathbf{u}} = \mathbf{b} \int \mathbf{dt}$$

$$\rightarrow \quad -\mathbf{\ln}|\boldsymbol{u}| = \mathbf{bt}$$

$$\rightarrow \quad \mathbf{\ln}\left|\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{u}}\right| = \mathbf{\ln}\, \boldsymbol{e^{bt}}$$

$$\rightarrow \quad \mathbf{u} = \boldsymbol{e^{-bt}}$$

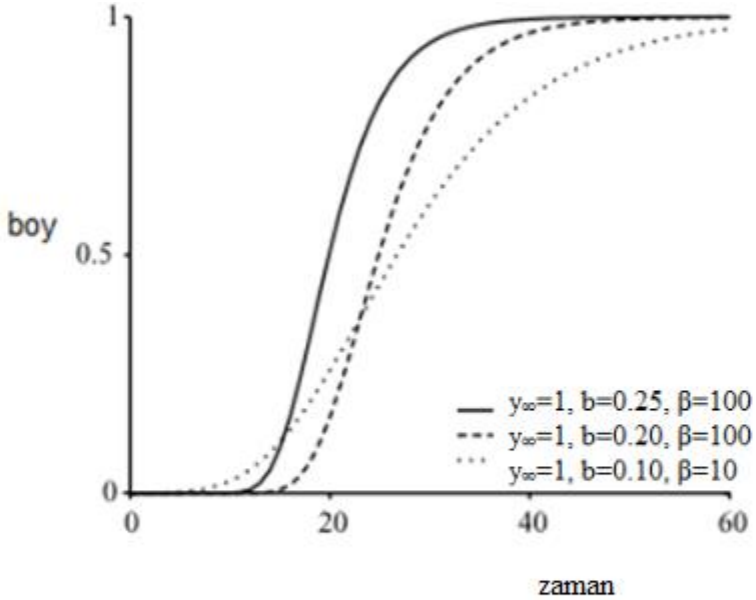
$$\rightarrow \quad \mathbf{\ln}\frac{\boldsymbol{y_\infty}}{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{\beta e^{-bt}}$$

$$\rightarrow \quad \mathbf{\ln}\frac{\boldsymbol{y_\infty}}{\boldsymbol{y}} = \mathbf{\ln}\, \boldsymbol{e^{\beta e^{-bt}}}$$

$\rightarrow \quad \frac{\mathbf{y_\infty}}{\mathbf{y}} = \boldsymbol{e^{\beta e^{-bt}}}$ eşitliği ile gompertz eğrisinin denklemi şu şekilde elde edilir;

$$\mathbf{y = y_\infty}\ \boldsymbol{e^{-\beta e^{-bt}}} + \mathbf{e_t}$$

$y_\infty > 0$ olan yerler son büyüklüğü, b > 0 parametresi özel büyüme oranının bozulmasını kontrol eder. y = y_∞/e olduğu zaman büküm noktası oluşur. Gompertz eğrisi, büküm noktasında asimetriye mahal verecektir. Ulaşılan maksimum büyüklüğün yarısından önce büküm noktasına ulaşılır (Şekil 5). Biyologlar tümörlerin büyümesi, populasyon büyümesi, bireysel büyümenin uzunluğunu tarif etmek için sıklıkla kullanılır (Savageau, 1980). Gompertz eğrisinde büyümenin çok hızlı ama büküm noktası çevresinde uzun lineer periyod ile asimptota yavaşça yaklaştığı görülür.



Şekil 2.5 Gompertz Eğrisine Rasgele Bir Örnek

2.3.7 Belirsiz Büyüme Eğrisi

Belirsiz büyümeyi açıklamak için yüksek limitli eğriler kullanılamaz. Monoton bir şekilde artan üslü büyüme eğrisi kullanmak için çok elverişsizdir. Tanaka, (1982) ilk üslü büyüme periyodunu takiben belirsiz yavaş büyümeye sahip olan dört parametreli belirsiz büyüme eğrisini tanıttı. Üslü büyümeyi en mantıklı şekilde tarif eden ilk modeldi. a,c,d,f sıfırdan büyük parametreler olmak üzere fonksiyon şu forma sahiptir:

$$\boldsymbol{y = \frac{1}{\sqrt{f}} \ln\left(2f(t-c) + 2\sqrt{f^2(t-c) + fa}\right) + d}$$

Eğri monoton bir şekilde sonsuzluğu yaklaşır ve 't' artar. Bu büyüme oranı $dy/dt = 1/\ \sqrt{f(t-c)^2 + a}$ şeklindedir. Pozitif olarak devam eder ve büküm noktasında maksimuma ulaşır. Büküm noktası olan t = c yanlarında sigmoid biçimini alır. Büyüme eğrisi ilk olarak kaşık şeklinde yapılara uygulandığı bilinir (Tanaka ve Kikuchi, 1979, 1980).

2.3.8 Çok Fazlı Büyüme Eğrileri

Hayvanların büyüme şekli dönemsel hızlı periyodlarla gerçekleşir. İnsanların büyüme eğrileri de tıpkı hayvanlardaki sürecin şekline benzetilebilir. Böyle bir büyüme en iyi şekilde ayrı büyüme eğrisi kombinasyonları ile anlatılabilir. Koops, (1986) çok fazlı gelişme eğrisini bir kaç lojistik büyüme fonksiyonunun özeti olarak oluşturdu. İnsanların boy uzama eğrisi ikili ya da üçlü bölüme uğrayan eğriler olarak ifade edilebileceği gibi hayvanların kilolarının artış eğrisine bakarak da büyüme safhasının varlığının bir ispatı olarak kayıt edilebilir.

2.3.9 Polinomial Büyüme Eğrileri

Büyüme eğrilerini izah ederken polinom fonksiyonlarının kullanımı da önemli bir metot olarak benimsenmiştir. Birçok araştırmacı polinom denklemlerinin büyüme eğrilerini tahmin edebileceğini söylemiştir (Wishart, 1938;Goldstein, 1979). Polinomial eğrilerin diğer çeşit eğrilere göre avantajları da vardır. Polinomial eğri, daha basit ve üzerinde çalışması daha kolay olması ile rahatlıkla fark edilebilir. Sandland ve McGilchrist, (1979) üçüncü derece polinomial fonksiyon modeline olasılık yaklaşım uygulayarak tam büyüme başlamadan önceki verilerle son boyut bilgilerini açıklamaya çalışmıştır.

Yi ve Li-feng, (1998) Gompertz ve polinomial denklemlerde uygulama yaparak bir modelleme yaptığı da litaratürde görülmüştür. Şu şekilde izah etmiştir:

$$\boldsymbol{y = c e^{\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i t^i}} \quad ,$$

Hasani ve ark., (2003) n anında büyüme fonksiyonunu polinomial bir zemine oturtup çocukluk çağından gelen bir büyüme ile ilgili modelleme örneği vermiştir. Bunu da şu şekilde izah etmiştir:

$$\mathbf{y = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{n} \left\{ (-1)^{k+1} \alpha_k \frac{t^k}{c^k} \right\}} \quad ,$$

Bunlar gibi oluşturulan birçok model matematik uygulamalarının, istatistiğin uygulamalarının anlatıldığı ders kitaplarında sıklıkla geçtiği de görülür.

2.3.10 Von Bertalanffy Eğrisi

Metabolik gelişmeye bağlı olarak ilk hayvan gelişme modelini Bertalanffy önerdi. Bu model ve daha birçok asimptotik büyüme eğrilerinin çözümü Von Bertalanfyy büyüme eğrileri olarak adlandırılır. Hayvanlardaki ve insanlardaki büyümeyi geniş ölçüde açıklamak için kullanılır. Asimptotik büyüklüğün başlangıç değeri olan y_o'dan büyümenin yaklaşabileceği en üst sınır y_∞'a bir düşüş oranı vardır. Bu eğrinin bükülme noktası yoktur. Bu modeli daha sonra farklı bir başlık altında ele alacağız. $\mathbf{y}_\infty$

asimptotik büyüklük, $\mathbf{y_0}$ başlangıç değeri, c sabit bir katsayı ve t zaman olmak üzere zamana bağlı Bertalanffy denkleminin genel formunun şu şekilde olduğunu da kısaca belirtelim:

$$\mathbf{y = y_\infty - (y_\infty - y_0)e^{-ct}},$$

3. BULGULAR ve TARTIŞMA

3.1 Gelişimin Teorileri ve Mekanik Modelleri

Bu bölümde, daha önce tanıttığımız büyüme eğrilerinin sayesinde oluşturulan teorileri ve büyüme modellerini ele alacağız.

3.1.1 Von Bertalanffy Modeli

Metabolik oranın farklı türlerde, kütlesiyle bağlantısı birçok dönemden beri tartışılmaktadır. Pütter, (1920) vücudun yapı malzemesini oluşturan sentez ve yapılanma, anabolizma ve katabolizma arasındaki sonuçların hayvan gelişimindeki önemini belirtmiştir. Organizmanın gelişimi yapı oluşumundan çöküşe kadar devam eder. Her iki süreç eşit olduğunda sabit bir orana erişir.

Bertalanffy bireysel gelişim üzerine çok çaba sarf etmiştir. O farklı türlerdeki farklı metabolik oranın kütle ile bağlantısını açıklamış ve hayvan türlerini üç gruba ayırmıştır. İlk olarak metabolik oran $M^{2/3}$ olarak "yüzey kuralına" göre çıkmıştır (Brody, 1945; Kleiber, 1947 ; Krebs, 1950). İkinci olarak M ile eş oranlı olanlar, üçüncü olarak ise orta seviyedeki grup bulunmaktadır. İlginç olarak farklı metabolik türler, farklı gelişim modelleri kabul etmektedir. Bu durum şunu gösteriyor ki; gelişim çeşitleri ve metabolik türler arasında sıkı bir bağlantı vardır. Metabolik oran vücut ebatı ile ilişkilidir (Bertalanffy, 1951).

Bertalanfyy, (1941, 1942) metobolik gelişmelere bağlı hayvan büyümesinin ilk modelini, Pütter'in katabolizma ve anabolizma büyümesinin arasındaki denge fikrine göre, vücut kütlesindeki değişikliklerin olduğu ya da büyüme-küçülme arasındaki farkı η, katabolizma ve anabolizmanın aynı oranda sabiti k olmak üzere şu şekilde biçimlendirdi.

$$\mathbf{dM/dt = \eta M^{m} - kM^{n}} \quad ,$$

Bu durumda m ve n üs sonraki vücut kütlesine göre kısmi güç açısından orantılıdır. t= 0 zamanındaki ağırlığı W_0 olduğu yerde şu denklemi söyleyebiliriz (Bertalanffy, 1957);

$$\mathbf{W = \{\eta/k-[\eta/k-W_0^{(1-m)}]e^{-(1-m)kt}\}^{1/1-m}} \quad ,$$

Bu büyüme eğrisi sık sık hayvan büyümesini açıklamak için kullanılır. Ve Bertalanffy büyüme eğrisi denilir. Bu Brody'nin kıvrımlı işlevlerde kullanıldığı ters kuvvetli büyüme fonksiyonuna benzer. Bu büyüme eğrisi özel olarak dizayn edilmiş ve bireyi tarif ederken hayvanlar için önerilmiştir ve insanlar için de geniş ölçüde kullanılmıştır.

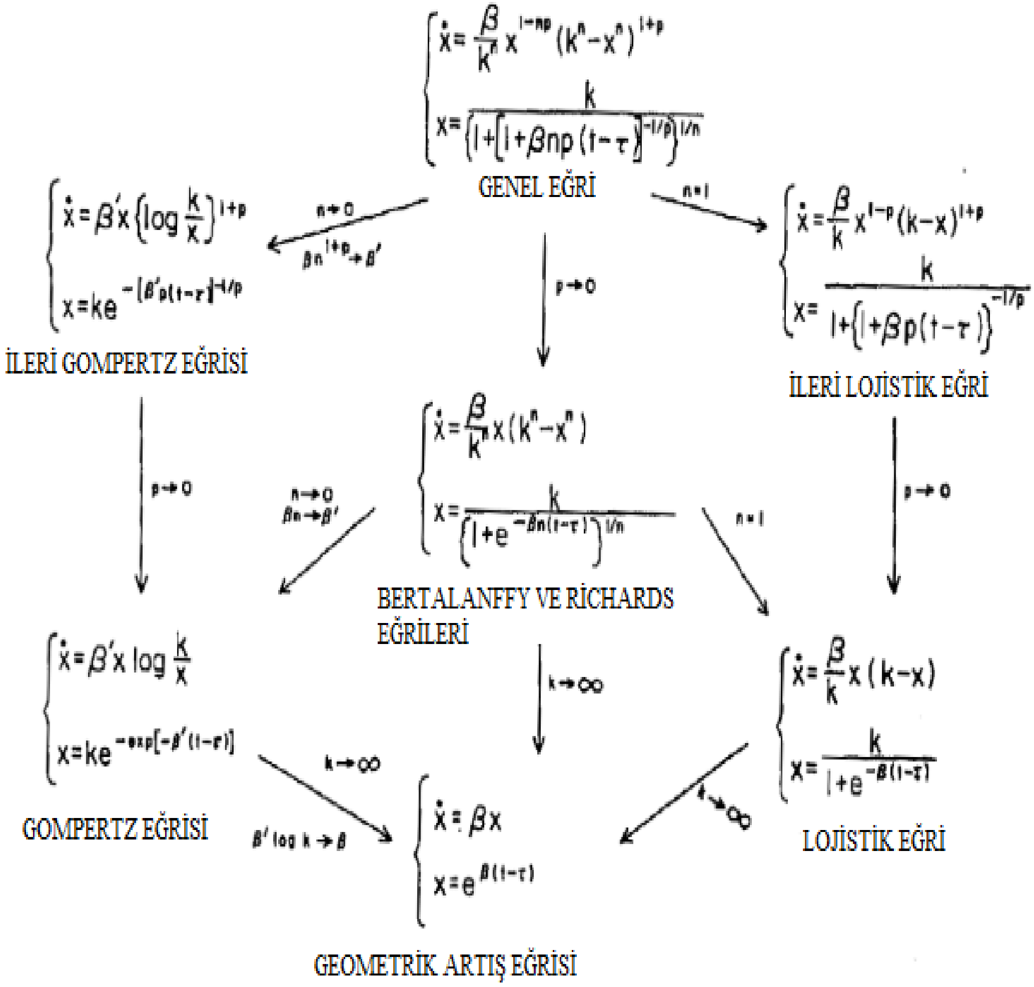
Bertalanffy, (1951) metabolizma özelliklerine göre hayvanlarda gözlemlediği büyüme kaynaklarını sınıflandırdı. Metabolizma ve büyüklük arasındaki ilişkiyi sorguladı ve türler arası ve tür içi allometri üzerine çalıştı (Bertalanffy ve Pirozynski, 1952). Metabolizma ile ilgili büyümenin sayısal açılarının üzenine çalıştı (Bertalanfyy, 1957).

3.1.2 Turner ve ark.,'nın Büyüme Teorisi

Turner ve ark., (1976) üç gerçeğe dayalı genel bir büyüme teorisi sundu. İlk, büyüme oranı başlangıç ölçüsünden şimdiki ölçüye genel uzaklığının ve monoton fonksiyonu ile kesin ölçüye genel uzaklığının monoton fonksiyonu, ikincisi gerçek büyüme gücünün monoton işlevini sınırlama, üçüncüsü doğru modelleme denkleminin matematiksel olarak kolayca işler şekle girmeye zorlamasıdır.

Kinetik büyüme teoileri üzerine bir çok katkısı olan kişiler vardır. Verhulst, (1838), Pearl ve Reead, (1920), Medawar, (1940), Bertalanffy, (1941), Lotka, (1956), Bertalanfyy, (1957) , Richards, (1959), Nelder, (1961), Quetelet, (1968) ve Turner ve ark., (1969) bunlardan bazılarıdır.

Bu gerçeklerin temelinde genel bir büyüme fonksiyonu elde edilir ki bu özel bir limit formuna sahiptir. Verhulst'un lojistik enerjisi gibi, Gompertz eğrisi ve Bertalanffy'nin genel büyüme eğrisi gibidir. Elde edilen birkaç yeni forma ek olarak onların büyüme eğrileri ve diğer bilinen büyüme eğrileri arasındaki ilişki Şekil 6'da gösterilmiştir . En genel eğri, Turner ve ark., (1976) tarafından gerçek büyüme modeli olarak nitelendirilmiştir.



Şekil 3.1 Turner ve ark., (1976)'nın Büyüme Eğrileri ile Diğer İyi Bilinen Büyüme Eğrileri Arasındaki İlişki

3.1.3 Park'ın Hayvan Beslenme ve Büyüme Teorisi

Park, (1982) birçok sayıda deneysel büyümeyi, sığır ve evcil hayvanların farklı diyetleri ile beslenme bilgilerini, farklı beslenme rejimleri altında ve hayvan beslemede belirlenmesine elementler arayan ve test edilebilir teorilerin temelini oluşturabilen büyüme modeli ifade etmiştir. Farklı beslenme biçimleri altında tahminlerde bulunmaya izin veren büyüme ve beslenmelerin matematiksel teorileri ile bu çalışmaları entegre eder. Teori enerji dengesinin kanunları ile ilgilidir. Büyüyen diğer hayvanların besin ve diyetleri üzerindeki çalışmalarda Park'ın teorisi kullanılmak için yeterince güçlüdür. Yaygın hayvan üretimi ekonomisinde fareleri ve tavukları sentezleme tekniği ile büyüme eğrileri üzerine genetik deneysel işler yapan teoriler ile ilgili olarak da çalışır.

3.1.4 Koojman ve ark. Dinamik Enerji Bütçe Teorisi

Dinamik enerji bütçe teorisi, bireyin enerjisinin büyüme tarifinin çok ötesindedir. Anahtar süreçler, beslenme, sindirme, depolama, büyümeye devam etme, gelişme, tekrar ürün oluşturma, solunum ve gelişmedir. Teori bireylerin örneklerinin alınması ve kullanımı için basit bir mekanizmada esirlenmiş kurallar koymayı amaçlar. Populasyon dinamikleri için geniş etkili içermeler vardır.

Teori Koojman tarafından geliştirilmiştir. Lika ve Nisbet, (2000) tarafından yayınlandı. Bilgilere karşı test edildi ve yapılanmış bir popülasyona uygulandı.

DEB teorisi (eş yapılı izomorp madde) Bertalanffy'nin bol besinle sağlanan büyümenin eğrisini takip eder. Bertalanffy büyüme oranı ise maksimum hacimsel büyüme ile ters orantılıdır.

Bu büyüme teorisi farklı türler üzerinde gösterilebilir. DEB teorisi özel durumlar için çok iyi bilinen bazı deneysel maddeler ile sonuç vermiştir. Bu yüzden büyük ölçüde deneysel desteğe sahiptir.

3.1.5 West ve ark. Genel Ontogenetik Birey Oluş Modeli

West ve ark., (2001) yeni bir biyokütle oluşturmuş. Dokunun varoluşu ve devamlılığı arasında metabolik enerjiyi ayırmak için temel prensipleri esas alan sayısal bir model önerdi. Temel hücre özelliklerinden, büyümeyi düzenleyen parametrelerinin değerlerini türetirler ve parametresiz tek bir eğri oluştururlar. Bunlar bir çok türün büyümesini açıklar. Bu model temel allometrik ilişki ile oranı ve yaşamsal zamanlama olayını sağlamaktadır.

3.2 Canlıların Büyümesinin Yorumlanması

İnsan gelişimi doğumda ve olgunlukta olmak üzere iki dönemle belirlenir. Belirli yaş aralıklarında özelikle ilk çocuklukta gelişim için birçok dönem öne sürülmüştür. Von Bertalanffy modeli insanlar ve hayvanlardaki gelişim dönemleri için tanımlanan en yaygın modeldir.

Jenss ve Bayley, (1937) a, b, c, d katsayı sabitleri olmak üzere y = a+bt-e^{c-dt} formunda çocukluk boyunca olan boy gelişimin ilk dönemlerinden alınan bilgilerle bu formu öne sürmüştür. Von Bertalanffy gelişim modelinde ve lineer gelişimde bir dönemeç sayılabilir.

Count, (1943) insanda boy gelişimi için a, b, c katsayı sabitleri olmak üzere y=a+bt+clog(t) şeklinde bir form öne sürmüştür.

Jolicoeur, (1963) çoklu algoritmik bir modelde büyümeyi izah eder. Krüger, (1965) Reziprok fonksiyonunu ile büyüme eğrilerine katkı sunar. Tanaka, (1976) ikili üstel bir fonksiyonla büyüme yaklaşımına destek sağlar. Yetişkinlik dönemine kadar olan süreçte insanda boy gelişimi üslü lojistik modelle tanıtılmıştır. Bock ve Thissen, (1976) insan gelişimi için üçlü lojistik bir modelle karşımıza çıkar. İki bileşenden oluşan modellerinde dört gelişim evresini gelişim modelleri açısından kıyaslayarak denemişlerdir. Çalışmalarında bağımsız verileri kıyaslayarak problemleri tanımlayarak çözüme kavuşturmayı önermişlerdir.

Preece ve Baines, (1978) ise boysal büyüme verilerine uygun olarak s(t) zaman fonksiyonunu olmak üzere $dh/dt = s(t)(h_1-h)$ şeklinde modelle h_1 yetişkin olduğu döneme eşitleyerek yeni bir diferansiyel denklem meydana getirmişlerdir. Shohoji ve Sasaki, (1987) Count'un modelini d sabit katsayı olmak üzere y= a+bt+clog(1+dt) şeklinde değiştirip geliştirmiştir. Nelder, (1989)'in değişim yapılan lojistik modeli ile Jolicoeur ve Pointer, (1989) bu modelin genelini izah etmişlerdir. Kanefuji ve Shohoji, (1990) yaşamsal süreçte asimptot boy modeli ile erişkinliğin göreceli ölçüsünü düşünüp temel büyüme modelinde değişiklik yaparak büyüme modeli oluşturmuştur. Bu model Preece ve Baines, (1978)'in, Jolicoeur ve arkadaşlarının önceki modeline kıyasla uygunluk derecesi en güzel olanı olarak da sayılır. Jolicoeur, Bock ve Thissen, (1976) oluşturduğu JPA1 üçlü genel aritmetik modelinin modifiye bir versiyonu olan yeni bir JPA1 versiyonunu oluşturdular. Bu yeni modeli JPA2 olarak isimlendirdiler.

Günümüzde büyüme ve insan gelişimi üzerine yapılan çalışmalarda kullanılan en yaygın büyüme modelleri olarak, Gompertz modeli, Bock ve Thissen, (1976)'nin genel üçlü lojistik modeli, McCullagh ve Nelder, (1989)'in modifiye edilmiş genel lojistik modeli, Jolicoeur ve Pointer, (1989)'in genelleştirilmiş lojistik modeli, Preece ve Baines, (1978)'in oluşturduğu model olarak söylenebilir.

Jolicoeur ve ark., (1991) insan büyümesine uygulanmış yaygın olarak kullanılan birçok büyüme modelini test etmiştir. JPPS'nin en makbul asimptotik model olduğu kanaatine varmışlardır.

Büyüme dönemlerinin gelişimi her biri farklı dönemlerde olan karmaşık büyüme modellerinin farklı aşamalarına uyan çok evreli dönemlerin ortaya çıkmasına etken olmaktadır.

Son çalışmalar göstermiştir ki, modern çağda erkeklerin üreme başarısıyla boy uzaması arasında pozitif bir ilişki vardır (Pawlowski ve ark., 2000; Mueller ve Mazur, 2001; Nettle, 2002a). Bu durum onların karşı cinsi çekme yeteneklerinden kaynaklandığı kanaati doğurur. Nettle, (2002b) çalışmasında İngiliz kadınların yaşam öykülerini incelemiş ve boy uzamasının düşük ancak önemli ölçüde üreme başarısıyla ilgili olduğunu bulmuştur. Bu ilişki U eğrisi şeklindedir. Bu durum aşırı uzun ve aşırı kısa kadınlar arasında düşük ölçüde yetersiz beslenmeden kaynaklanmakta olduğu sonucunu ortaya çıkarır.

İnsanda belli bir cins ayrılığı olduğu söylenir. Boy ölçümlerinde bu fark %10'a karşılık gelir. Vücut ölçümünde cins ayrılığını öne süren hipotezler, çok eşli türlerde karşı cins için rekabetten dolayı seçimi, cinsiyetten farklı yaşam alışkanlıklarını ve daha geniş vücut ölçüleri için raslantısal seçimlerinden oluşur. Bu ayrılığın boyutu nüfuslar arasında değişir. Bu tamamen erkek gelişiminin besin eksikliğine karşı büyük duyarlılığına, cinsiyetlerin farklı ekolojik boşluklarına, belli bir toplumda belli bir cinsiyetin üretkenliği o cinsiyetin çocuklarına madden desteği ile arasındaki ilişkiye ve cinsiyet seçimine bağlıdır. Ve bunların tümü karşı cins için erkekler arası rekabetten dolayı çok eşli evliliklerle beraber hala büyük erkek nüfusuna, doğum komplikasyonları olasılığı ve kadın bedeni arasındaki ilişkiye yol açar (Rogers ve Mukherjee, 1992; Guegan ve ark., 2000). Kadın ve erkek ağırlığı sıkı bir şekilde birbiriyle ilişkilidir ve cins ayrılığı basit bir allometrik ölçü fonksiyonu değildir. Lindenfors ve Tullberg, (1998) primat eşleşme sistemi ile beden ve beden ayrılığı arasındaki ilişkiyi incelemişlerdir.

Sığır, koyun gibi hayvanların gelişiminin tanımı insanlarda olduğu gibi benzer bir amaca sahiptir. Gelişimindeki ilk evreler, ilerideki gelişmeler ve hayvanın son durumunun gözlenmesi insan gelişimi ile benzerlik göstermektedir. Gelişim modellerine tanımlamak ve sığırın büyümesini önceden tahmin etmek için sık sık aynı klasik denklemleri kullanılmaktadır. Kütle için yapılan çalışmalarda Gompertz ve Lojistik, uzunluk için yapılan çalışmalarda Brody ve Von Bertalanffy, değişkenlik ile ilgili yapılan çalışmalarda Feller, Weiss ve Kavanau, Fitzhugh, Richards, kesin olmayan gelişim ile ilgili yapılan çalışmalarda Laird, Parks ve Tanaka modellerinin daha kullanışlı olduğu söylenebilir (Arango ve Van Vleck, 2002; Parks, 1982).

4. SONUÇ ve ÖNERİLER

Birçok büyüme eğrisi insanlar ve hayvanlardaki büyümeyi tarif etmek için öne sürülür. Bir takım eğriler özellikle bu büyümenin nasıl olduğunu kestirebilmek içindir. İnsan büyümesi, uygun olması sebebiyle sığır-koyun gibi hayvanların büyüme eğrileri de lineer büyüme ile açıklanır. Boy ve yapılarının büyüme tarzları buna uygundur. Büyüme fonksiyonlarının belli bir matematiksel limitleri vardır. Biz bu çalışmamızda büyüme eğrilerini tanıtımına, yer yer nerelerde kullanılabileceği hakkında bilgiler vermeye çalıştık. Çalışmamızda eksik gibi gözüken bir konu bu eğrilerin bazılarının nasıl türedikleri ile ilgili olabilir. Matematiksel eşitliklerden çok bu eğrilerin nerelerde kullanılabileceğini araştırmak temel noktamızdı.

Uygun bir büyüme modeli seçebilmek için bu modelleri tanımanın yeri de ayrıdır. Hangi veriler hangi modellerde kullanılabilir. Hangi büyüme tipi hangi canlı ile ilgilidir. Bunların bilinmesi ve belirlenen denklemler yardımı ile uygulanması gerekir. Bir matematikçinin temel görevi problem çözmek olsa da yorum yapması da kaçınılmazdır.

Belli bir büyüme eğrisi bazen basit bir şekilde verilerin uyumuna bakılarak da seçilir. Bazen bu seçim için rasgele tercih yapılabilir ya da başka bir model de kullanılabilir. Böylelikle farklı disiplinlerde farklı sonuçların çıktığı da gözlenebilir. Aslında bu çeşitlilik yani farklı bilimlerde hiç kullanılmamış modelleri denemek ayrı bir çalışma konusu olabilir ki ileride çalışmalarımıza bu fikir ışık tutabilir.

Büyüme modellemelerinde anlamlı parametreler vardır. Bu fonksiyonel ilişki büyüme modelinde büyüme oranındaki farklı denklem çözümlerinden gelen bilgidir. En uygun model seçimi esneklik ve karmaşıklık arasında bir ilişkidir. Mesela Lojistik model ve Gompertz eğrileri kısa serilerde karmaşık yapıdadır ve birçok parametresi vardır. Bazı deneylerde anlamsız parametre tahminleri üretmenin ortak bir sonuca varmada mümkün olmadığı kanaatine varılır. Minimum miktarda parametreler ile parametrik fonksiyonlar oluşturmaya çalışmak kesintisiz bir süreçtir. Ve büyüme bilgilerine en uygun olan organizma ve büyüme periyodudur.

Bazı büyüme modellerinin özellikle kendine has konularda işlemesinin belki de temel nedenin sırf yapılan çalışmaları rahatlatmak amacıyla türetildiğini de bu çalışmamız da anlamış olduk. Mesela canlı ağırlığında sınırlı büyümenin sık sık Bertalanffy büyüme eğrisine uyması gibidir. Bunun yanı sıra en çok kullanılan büyüme eğrisi

Gompertz, (1825) ve Tanaka, (1982)’nın sigmoidal lojistik eğrisinin bilimsel çalışmalardaki eğri tiplerine uyduğu da gözlemlenebilir. Brody’nin üslü büyüme eğrisi ve hatta Tanaka’nın çift üslü eğrisi de genellikle kullanılır. Büyüme eğrisi olarak üslü eğri dışındaki büyüme eğrilerine bakarsak, tek düze bir gidiş vardır. Bu da büyüme modeli seçimi yaparken bizi net sonuçlara ulaştırmayabilir.

5. KAYNAKLAR

Bertalanffy, L. V. (1941). Untersuchungen über die Gesetzmässigkeit des Wachstums. VII. Stoffwechseltypen und Wachstumstypen., volume 61. Biol. Zb

Bertalanffy, L. V. (1942). Theoretische Biologie. vol. II: Stoffwechsel, Wachstum. Berlin: Gebrüder Borntraeger.

Bertalanffy, L. V. (1951). Metabolic types and growth types. Am Nat, 85(821):111–117.

Bertalanffy, L. (1957). Quantitative laws in metabolism and growth. The Quarterly review of, 32: 217–231.

Bock, R. D., & Thissen, D. (1976). Fitting multicomponent models for growth in stature. In Proceedings of the 9th International Biometrics Conference, Boston. Biometrics Society.

Brody, S. (1945). Bioenergetics and growth. New York: Hafner.

Count, E. W. (1943). Growth patterns of the human physique: an approach to kinetic anthropometry. Hum Biol, 15 :1–32.

Ersöz, F., (1992). Doğrusal olmayan büyüme modellerinin incelenmesi ve parametre tahmini. Yüksek Lisans Tezi, Ankara Üniversitesi, Sağlık Bilimleri Enstitüsü, Zootekni Anabilim Dalı, Ankara.

France, J., & Thornley, J. (1984). Mathematical Models in Agriculture. Butterworths, London

Goldstein, H. (1979). The design and analysis of longitudinal studies: Their role in the measurements of change. Academic press, London

Gompertz, B. (1825). On the nature of the function expressive of the law of human mortal- ity, and on a new mode of determining the value of life contingencies. Philosophical Transactions of the Royal Society of London, 115:513–583.

Guégan, J.-F., Teriokhin, A., & Thomas, F. (2000). Human fertility variation, size-related obstetrical performance and the evolution of sexual stature dimorphism. Proc. R. Soc. Lond. B, 267:2529–2535.

Hasani, H., Zokaei, M., & Amidi, A. (2003). A new approach to polynomial regression and its application to physical growth of human height (Hawaii International Conference on Statistics and Related Fields).

Jenss, R., & Bayley, B. (1937). A mathematical method for studying the growth of child. Human Biology, 9: 556–563.

Jolicoeur, P. (1963). The multivariate generalization of the allometry equation. Biometrics, 19: 497–499.

Jolicoeur, P., & Pontier, J. (1989). Population growth and decline: a four-parameter generalization of the logistic curve. J Theor Biol, 141(4):563.

Kanefuji, K., & Shohoji, T. (1990). On a growth model of human height. Growth Dev Aging, 54(4):155–165.

Karkach, K. S. (2006). Trajectories and models of individual growth, Demographic Research, 15(12): 347-400.

Kleiber, M. (1947). Body size and metabolic rate. Physiol. Rev., 27:511.

Kooijman, S. A. L. M. (2000). Dynamic energy and mass budgets in biological systems. Cambridge University Press.

Koops, W. J. (1986). Multiphasic growth curve analysis. Growth, 50(2):169–177.

Krebs, H. (1950). Body size and tissue respiration. Biochem. ve Biophys. Acta, 4: 249.

Krüger, F. (1965). Zur Mathematik der tierischen Wachstums. I. Grundlagen einer neuen Wachstumsfunktion. Helgoländen wiss. Meeresunters, 12 : 78–136.

Labouriau, R., Schulin-Zeuthen, M., & Danfær, A. (2000). Statistical analysis of pigs development: An application of richards regression models. Technical report, Inter- nal Report 14, Biometry Research Unit, Danish Institute of Agrucultural Sciences.

Lika, K., & Nisbet, R. M. (2000). A dynamic energy budget model based on partitioning of net production. J. Math. Biol., 41:361–386.

Lindenfors, P., & Tullberg, B. S. (1998). Phylogenetic analyses of primate size evolution: the consequences of sexual selection. Biological Journal of the Linnean Society, 64: 413–447.

Lotka, A. (1956). Elements of mathematical biology. Dover, New York.

McCullagh, P., & Nelder, J. A. (1989). Generalized linear models. London: Chapman & Hall, second edition.

Medawar, P. (1940). The growth, growth energy, and ageing of the chicken's heart. Proc. R. Soc., B129:332.

Mueller, U., & Mazur, A. (2001). Evidence of unconstrained directional selection for male tallness. Behav. Ecol. Sociobiol., 50:302–311.

Nelder, J. (1961). The fitting of a generalization of the logistic curve. Biometrics, 17: 89.

Nettle, D. (2002a). Height and reproductive success in a cohort of british men. Human Nature, 13: 473–491.

Nettle, D. (2002b). Womens height, reproductive success and the evolution of sexual dimorphism in modern humans. Proc. R. Soc. Lond. B, 269:1919–1923.

Nisbet, R. M., Muller, E. B., Lika, K., & Kooijman, S. A. L. M. (2000). From molecules to ecosystems through dynamic energy budget models. J. Anim.Ecol., 69:913–926.

Noonburg, E. G., Nisbet, R. M., McCauley, E., Gurney, W. S. C., Murdoch, W. W., & de Roos, A. M. (1998). Experimental testing of dynamic energy budget models. Functional Ecology, 12: 211–222.

Parks, J. R. (1982). A theory of feeding and growth of animals. Berlin; New York: Springer-Verlag. Pásztor, L., Meszéna, G., and Kisdi, É. (1996). Ror r: a matter of taste? J. Evol. Biol., 09:511–518.

Pawlowski, B., Dunbar, R. I., & Lipowicz, A. (2000). Tall men have more reproductive success. Nature, 403:156.

Pearl, R., & Reead, L. J. (1920). On the rate of growth of the population of the United States since 1790 and its mathematical representation. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., G:275.

Preece, M., & Baines, M. (1978). A new family of mathematical models describing the human growth curve. Ann Hum Biol, 5(1):24.

Pütter, A. (1920). Studien über physiologische ähnlichkeit. VI. Wachstumsähnlichkeiten. Pflüg. Arch. ges. Physiol., 180:298–340.

Quetelet, M. A. (1968). A treatize on man and the development of his facilities. Burt Franklin, New York.

Richards, F. J. (1959). A flexible growth function for empirical use. J. Exp. Botany, 10: 290–300.

Rogers, A. R., & Mukherjee, A. (1992). Quantitative genetics of sexual dimorphism in human body size. Evolution, 46(1):226–234.

Sandland, R. L., & McGilchrist, C. A. (1979). Stochastic growth curve analysis. Biometrics, 35: 255–271.

Shohoji, T., & Sasaki, H. (1987). Individual growth of stature of Japanese. Growth, 51: 432–450.

Tanaka, M. (1976). On a few patterns of growth curve and their expressions. Physiol. Ecol. Japan, 17: 519–525.

Tanaka, M., & Kikuchi, T. (1979). Ecological studies on benthic macrofauna in tomoe cove, amakusa. III. life history and population fluctuation of major molluscs. Publ. Amakusa Mar. Biol. Lab., 5:79–115.

Tanaka, M., & Kikuchi, T. (1980). Growth curves in Theora lubrica (Gould) (Bivalvia, Seneridae). I. fitting of several growth curves. Publ. Amakusa Mar. Biol. Lab., 5:201–214.

Tanaka, M. (1982). A new growth curve which expresses infinitive increase. Publ. Amakusa Mar. Biol. Lab., 6(2):167–177.

Turner, M., Blimenstein, B., & Sebaugh, J. (1969). A generalization of the logistic law of growth. Biometrics, 25: 577.

Turner, M., Bradley, E., Kirk, K., & Pruitt, K. (1976). A theory of growth. Math. Biosci., 29:367–373.

Verhulst, P. F. (1838). Notice sur la loi que la population suit dans son accroissement. Corr. Math. Phys, 10: 113.

West, G. B., Brown, J. H., & Enquist, B. J. (2001). A general model for ontogenetic growth [Letters to Nature]. Nature, 413:628–631.

Wishart, J. (1938). Growth-rate determinations in nutrition studies with the bacon pig, and their analysis. Biometrika, 30(1/2):16–28.

Yıldızbakan, A. (2005). Ağaçlarda büyümeye ait matematiksel modeller ve bu modellerin karşılaştırmalı olarak incelenmesi. Yüksek Lisans Tezi, Çukurova Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü. Zootekni Anabilim Dalı, Adana.

Yi, S., & Li-feng, H. (1998). A new literature growth model: Variable exponential growth law of literature Scientometrics, 42(2): 259-265.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler	
Adı Soyadı	Öznur KURALAY
Doğum Yeri	Terme-SAMSUN
Doğum Tarihi	05.11.1979
Uyruğu	⦿ T.C. ❐ Diğer:
Telefon	0 532 3742670
E-Posta Adresi	runzokur@yahoo.com

Eğitim Bilgileri	
Lisans	
Üniversite	Marmara Üniversitesi
Fakülte	Fen Edebiyat Fakültesi
Bölümü	Matematik
Mezuniyet Yılı	25.07.2002
Yüksek Lisans	
Üniversite	Ordu Üniversitesi
Fakülte	Fen Edebiyat Fakültesi
Bölümü	Matematik