



T.C.

ORDU ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**UZAYSAL KUATERNİYON KEMERLERİ VE REGLE
YÜZEYLER**

ABDUSSAMET ÇALIŞKAN

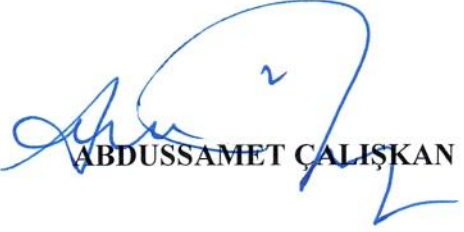
DOKTORA TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ORDU 2020

TEZ BİLDİRİMİ

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan ve kullanılan intihal tespit programının sonuçlarına göre; bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.


ABDUSSAMET ÇALIŞKAN

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

UZAYSAL KUATERNİYON KEMERLER VE REGLE YÜZEYLER

ABDUSSAMET ÇALIŞKAN

ORDU ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLER ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DOKTORA TEZİ, 104 SAYFA

(TEZ DANIŞMANI: DR. ÖR. ÜYES SÜLEYMAN ENYURT)

(KONU TEZ DANIŞMANI: PROF. DR. EMİN KASAP)

Bu tez dört bölüm halinde düzenlendi. Giriş bölümünde çalışmanın amacı ve konunun ele alınma nedeni tartışıldı. Önceki Çalışmalar bölümünde kuaterniyonik eğriler ve dual uzaylarla ilgili çalışmalarına yer verildi. Genel bilgiler bölümünde, araştırma bulguları bölümünde kullanılacak bazı bilgiler verildi.

Araştırma ve Bulgular bölümü çalışmamızın orijinal kısmını oluşturmaktadır. Bu bölümde, Öklid uzayında bir regle yüzeyin uzaysal kuaterniyonlar cinsinden ifadesi verildi. Regle yüzeye ait striksiyon eğrisi, dağınıklık parametresi, açılım açısı ve açılım uzunluğu kavramları kuaterniyonik hesaplamalar kullanılarak formüle edildi. Yeni formüller kullanılarak kapalı bir eğriye ait Frenet vektörlerinin çizdiği regle yüzeylerin açılım uzunlukları, açılım açıları ve dağınıklık parametreleri hesaplandı. Kuaterniyonik hesaplama yöntemleri kullanılarak dual Frenet vektörlerinin oluşturduğu kapalı regle yüzeylerin integral invariantları yeniden ifade edildi.

Anahtar Kelimeler: Uzaysal Kuaterniyon, Regle Yüzey, Dağınıklık Parametresi, Açılım Açısı, Açılım Uzunluğu, Dual Uzay, Dual Uzaysal Kuaterniyon, Dual Açılım Açısı.

ABSTRACT

SPATIAL QUATERNIONIC CURVES AND RULED SURFACES

ABDUSSAMET ÇALI KAN

ORDU UNIVERSITY INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

MATHEMATICS

PHD THESIS, 104 PAGES

(SUPERVISOR: DR. Ö. R. ÜYES SÜLEYMAN ENYURT

SECOND SUPERVISOR: PROF. DR. EMİN KASAP)

This study consists of four fundamental chapters. The first chapter discusses aim and reason of why this study is taken into consideration. The next chapter is covered with literature review of quaternions and dual space. General information chapter deals with some properties which are necessary for the research and findings chapter.

The research and findings chapter is the main part of the study. In this chapter, the ruled surface in Euclid space is expressed as a spatial quaternionic. The concepts of the striction curve, the distribution parameter, angle of pitch and the pitch are formulated using quaternionic calculations. According to this calculations, the pitches, angle of pitches and distribution parameters of the ruled surfaces drawn by the motion of the Frenet vectors belonging to the closed curve are recalculated. Integral invariants of closed ruled surfaces formed by dual Frenet vectors are reexpressed using quaternionic calculation methods.

Keywords: Spatial Quaternion, Ruled Surface, Distribution Parameter, Angle of Pitch, The Pitch, Dual Space, Dual Spatial Quaternion, Dual Angle of Pitch.

TE EKKÜR

Tez konumun belirlenmesi, çalı manın yürütülmesi ve yazımı esnasında bilgi ve deneyimleriyle yolumu açan danı man hocam Dr. Ö r. Üyesi Süleyman enyurt'a ve çalı malarım boyunca desteklerini esirgemeyen Ondokuz Mayıs Üniversitesi ö retim üyeleri Prof. Dr. Emin Kasap ve Prof. Dr. smail Aydemir hocalarıma en samimi duygularıyla te ekkür ederim.

Aynı zamanda, manevi desteklerini her an üzerimde hissetti im babam, annem ve e im Eda'ya te ekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

TEZ BİLDİRİMİ	I
ÖZET	II
ABSTRACT	III
TEŞEKKÜR	IV
ŞEKİLLER LİSTESİ	VII
SİMGELER VE KISALTMALAR	VIII
1. GİRİŞ	1
2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR	9
3. Genel Bilgiler	12
3.1 Öklid Uzayı	12
3.2 Öklid Uzayında Regle Yüzeyler	14
3.3 Dual Uzayda Regle Yüzeyler	17
3.4 Reel ve Dual Kuaterniyonlar	22
3.4.1 Reel Kuaterniyon	22
3.4.2 Dual Kuaterniyon	26

4. ARAŞTIRMA BULGULARI	29
4.1 Uzaysal Kuaterniyon ve Regle Yüzey	29
4.1.1 Uzaysal Kuaterniyonik Regle Yüzey	29
4.1.2 Uzaysal Kuaterniyonik Regle Yüzeyin Striksiyon (Boğaz) Noktası . .	39
4.1.3 Kapalı Uzaysal Kuaterniyonik Regle Yüzeyin İntegral İnvaryantları .	42
4.1.4 Teğet Vektörün Çizdiği Uzaysal Kuaterniyonik Regle Yüzeyin İntegral İnvaryantları	52
4.1.5 Asli Normal Vektörün Çizdiği Uzaysal Kuaterniyonik Regle Yüzeyin İntegral İnvaryantları	56
4.1.6 Binormal Vektörün Çizdiği Uzaysal Kuaterniyonik Regle Yüzeyin İntegral İnvaryantları	61
4.2 Regle Yüzeyin Dual Uzaysal Kuaterniyonik İfadesi	65
4.2.1 Dual Uzaysal Kuaterniyonik Gösterge Eğrilerine Karşılık Gelen Ka- palı Uzaysal Kuaterniyonik Regle Yüzeylerin İntegral İnvaryantları .	71
4.2.1.1 Birim Dual Teğetler Göstergesine Karşılık Gelen Dual Regle Yüzeyin İntegral İnvaryantları	74
4.2.1.2 Birim Dual Asli Normaller Göstergesine Karşılık Gelen Dual Regle Yüzeyin İntegral İnvaryantları	83
4.2.1.3 Birim Dual Binormaller Göstergesine Karşılık Gelen Dual Regle Yüzeyin İntegral İnvaryantları	90
5. TARTIŞMA VE SONUÇ	97
KAYNAKLAR	98

ŞEKİLLER LİSTESİ

1.1	Sir William Hamilton	1
1.2	Hamilton Köprüsü Üzerindeki Levha	1
3.1	Yüzey Şekli	14
3.2	Regle Yüzey	15
3.3	Açılabilir Regle Yüzey	16
3.4	Anadoğru Vektörünün Vektörel Momenti	19
3.5	Regle Yüzeyin Dual Küresel Resmi	20
3.6	Regle Yüzeyin Dayanak Eğrisi ve Anadoğru vektörü	21
4.1	Dayanak Eğrisine v Birim Uzaklıkta Olan $\varphi(v)$ Eğrisi	33
4.2	Uzaysal Kuaterniyonik Regle Yüzeğe Ait Dağılma Parametresi	37
4.3	Uzaysal Kuaterniyonik Striksiyon Eğrisi	39
4.4	Uzaysal Kuaterniyonik Regle Yüzeyin Ortogonal Yörünge Eğrisi	42
4.5	Uzaysal Kuaterniyonik Açılım Uzunluğu	44

SİMGELER VE KISALTMALAR

\mathbb{D}	:	Dual Sayılar Kümesi
\mathbb{D}^3	:	Dual Uzay
q	:	Kuaterniyon
Q	:	Dual Kuaterniyon
K	:	Reel Kuaterniyonlar Kümesi
K_D	:	Dual Kuaterniyonlar Kümesi
Q_D	:	Dual Uzaysal Kuaterniyonlar Kümesi
Q	:	Uzaysal Kuaterniyonlar Kümesi
$\ \cdot\ $:	Norm
\vec{d}	:	Steiner Dönme Vektörü
\vec{D}	:	Dual Steiner Vektörü
\vec{W}	:	Darboux Vektörü
$\vec{\widehat{W}}$:	Ani Dual Pfaff Vektörü
P_x	:	Regle Yüzeyin Dağılma Parametresi
λ_x	:	Regle Yüzeyin Açılım Açısı
l_x	:	Regle Yüzeyin Açılım Uzunluğu
Λ_X	:	Dual Açılım Açısı
L_X	:	Dual Açılım Uzunluğu
κ	:	Eğrinin Eğriliği
τ	:	Eğrinin Burulması

1. GİRİŞ

Kuaterniyon kavramı 1843 yılında İrlandalı matematikçi William Rowan Hamilton tarafından ortaya atılmıştır. Bu kavram karmaşık sayıların bir genellemesi olup

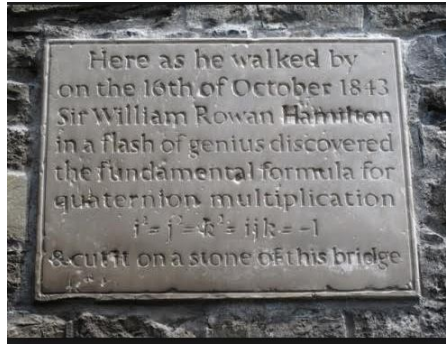
$$q = (d, a, b, c) = de_0 + ai + bj + ck, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R} \quad (1.0.1)$$

şeklinde ifade edilmiştir [18].



Şekil 1.1: Sir William Hamilton

Hamilton, 16 Ekim 1843 yılında, Kraliyet Ailesi'nin bir Konsey toplantısına giderken kuaterniyon ile ilgili formülünü Brougham Köprüsü üzerindeki bir taşta yazmıştır. Bugün bu köprü üzerinde formülü gösteren bir levha bulunmaktadır (Şekil 1.2). İnsanlar bu köprüyü "Hamilton Köprüsü" olarak anmaktadırlar [1].



Şekil 1.2: Hamilton Köprüsü Üzerindeki Levha

Kuaterniyonlar kompleks sayıların bir genellemesi olarak düşünülmektedir. Bir kompleks sayı

$$z = a + ib, \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad i^2 = -1$$

şeklinde yazılır. Kompleks sayılar

$$\left\{ \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

şeklinde yazılan matris kümesine izomorftur [9]. Buna göre (1.0.1) ifadesinde verilen bir q kuaterniyonu

$$\begin{bmatrix} d & -a & b & -c \\ a & d & c & b \\ -b & -c & d & a \\ c & -b & -a & d \end{bmatrix} \quad (1.0.2)$$

şeklinde bir matrise izomorf olur [33, 35]. Bunu görmek için bir q kuaterniyonu tıpkı kompleks sayılarda olduğu gibi

$$q = (d + ai)e_0 + (b + ci)j$$

şeklinde yazılabilir. Burada

$$\alpha_1 = d + ai, \quad \alpha_2 = b + ci$$

alınırsa q kuaterniyonu

$$q = \alpha_1 e_0 + \alpha_2 j, \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$$

şeklinde ifade edilir. Kuaterniyonların kümesi K ile gösterilsin. Herhangi bir $q \in K$ için T_q dönüşümü

$$\begin{aligned} T_q : K &\rightarrow K \\ T_q(q'_1 + q'_2) &= (q'_1 + q'_2) \times q \\ &= q'_1 \times q + q'_2 \times q \\ &= T_q(q'_1) + T_q(q'_2), \quad q_1, q_2 \in K \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_q(q'x) &= (q'x) \times q \\ &= xq' \times q \\ &= xT_q(q'), \quad x \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlansın. Bu dönüşüm bir lineer dönüşümdür. Burada \times Hamilton (kuaterniyon) çarpımıdır. K üzerinde tanımlı bütün lineer dönüşümlerin kümesi

$$Hom(K, K) = \{T_q : q \in K\}$$

şeklinde gösterilir ve bu küme \mathbb{C} kompleks sayılar cisim üzerinde bir vektör uzayı olur. T_q dönüşümü altında e_0 ve j kuaterniyonlarının görüntüsü

$$T_q(e_0) = x_{11}e_0 + x_{12}j,$$

$$T_q(j) = x_{21}e_0 + x_{22}j$$

şeklinde yazılır. Burada q yerine e_0 alınırsa T_q lineer dönüşümü

$$T_{e_0}(e_0) = e_0 \times e_0 = x_{11}e_0 + x_{12}j$$

$$T_{e_0}(j) = j \times e_0 = x_{21}e_0 + x_{22}j$$

şeklinde olur. $e_0 \times e_0 = 1$ ve $j \times e_0 = j$ olduğundan x_{11}, x_{12}, x_{21} ve x_{22} katsayıları

$$x_{11} = x_{22} = 1, \quad x_{12} = x_{21} = 0$$

bulunur. Bu durumda T_{e_0} dönüşümüne karşılık gelen matris

$$T_{e_0} \longleftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılır. Benzer şekilde $q = i$ alınırsa T_q lineer dönüşümü

$$T_i(e_0) = e_0 \times i = x_{11}e_0 + x_{12}j,$$

$$T_i(j) = j \times i = x_{21}e_0 + x_{22}j$$

şeklinde olur. $e_0 \times i = i$ ve $j \times i = -k$ olduğundan katsayılar

$$x_{11} = i, \quad x_{22} = -i, \quad x_{12} = x_{21} = 0$$

bulunur ve T_i dönüşümüne karşılık gelen matris

$$T_i \longleftrightarrow \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılmış olur. $q = j$ alınırsa T_q lineer dönüşümü

$$T_j(e_0) = e_0 \times j = x_{11}e_0 + x_{12}j$$

$$T_j(j) = j \times j = x_{21}e_0 + x_{22}j$$

şeklinde olur. $e_0 \times j = i$ ve $j \times j = -1$ olduğundan katsayılar

$$x_{11} = x_{22} = 0, x_{12} = 1, x_{21} = -1$$

bulunur ve T_j dönüşümüne karşılık gelen matris

$$T_j \longleftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılır. $q = k$ için T_q lineer dönüşümü

$$T_k(e_0) = e_0 \times k = x_{11}e_0 + x_{12}j$$

$$T_k(j) = j \times k = x_{21}e_0 + x_{22}j$$

olur. $e_0 \times k = i$ ve $j \times k = i$ olduğundan katsayılar

$$x_{11} = x_{22} = 0, x_{12} = x_{21} = i$$

bulunur ve T_k dönüşümüne karşılık gelen matris

$$T_k \longleftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılır. Böylece bir q kuaterniyonu

$$q = d \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + a \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılmış olur. Bu ifade de gerekli işlemler yapılırsa bir q kuaterniyonu

$$T_q \longleftrightarrow \begin{bmatrix} d + ai & b + ci \\ -b + ci & d - ai \end{bmatrix}$$

veya

$$\begin{bmatrix} d & -a & b & -c \\ a & d & c & b \\ -b & -c & d & a \\ c & -b & -a & d \end{bmatrix}$$

matris formatında ifade edilmiş olur. Bu yazılışa göre

$$e_0 = (1, 0, 0, 0), \quad i = (0, 1, 0, 0), \quad j = (0, 0, 1, 0), \quad k = (0, 0, 0, 1)$$

kuaterniyonlarının matris gösterimleri, sırasıyla

$$e_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad i = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$j = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde olur. Bu matrisler yardımıyla i, j ve k kuaterniyonları için

$$i \times i = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = -1,$$

$$j \times i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = -k$$

oldukları görülür. Yukarıdaki işlemlerin sonucu olarak K kuaterniyonlarının kümesi

$$K = \{q = de_0 + ai + bj + ck \mid a, b, c, d \in IR, i^2 = j^2 = k^2 = -1\}$$

şeklinde karakterize edilmiş olur.

Kuaterniyon kavramı birçok disiplinde kendine kullanım alanı bulmuştur. Bunlardan bazıları bilgisayar grafikleri, görme cihazlarının geliştirilmesi, robot kinematiği, kontrol teorisi, kuantum teorisi, moleküler dinamik, animasyon gösterimleri ve navigasyon cihazlarıdır. Kuaterniyonların kullanım alanlarıyla ilgili detaylı bilgiler için [12, 19, 22, 25] kaynaklarına bakılabilir.

Eğri ve yüzey teorisinin incelenmesinde de kuaterniyonlar kullanılarak yeni yorumlar yapılmıştır.

Bharathi ve Nagaraj (1987) “*Quaternion Valued Function of a Real Variable Serret-Frenet Formulae*” isimli çalışmada bir eğrinin Serret-Frenet formüllerini kuaterniyonlar cinsinden ifade etmişlerdir. Sivridağ ve ark., (1994) “*The Serret-Frenet Formulae for Dual Quaternion Valued Functions of a Single Real Variable*” isimli çalışmada, dual kuaterniyonik eğrinin dual Serret-Frenet formüllerini vermişlerdir. Cehn ve Li (2005) “*Quaternionic maps and minimal surfaces*” isimli çalışmasında kuaterniyonik dönüşümler ile minimal yüzeyler arasında bağlantı kurarak yeni sonuçlara ulaşmışlardır. Aslan (2017) “*Kuaterniyonların diferensiyel geometrisi*” isimli doktora tezinde Öklid uzayında kanal yüzeyler ve genelleştirilmiş sabit oranlı yüzeyler ile Minkowski uzayında kanal yüzeyler ve bunlara ait bazı özellikleri ifade etmiştir. Tuncer ve ark., (2018) “*Circular surfaces with split quaternionic representations in Minkowski 3-space*” isimli çalışmada split kuaterniyonlarla dairesel yüzeylerin bazı özelliklerini incelemişlerdir.

Kuaterniyonlarla ilgili araştırma yapacak olan araştırmacılar [2, 3, 6, 7, 10, 20, 21, 27, 30, 32, 36] numaralı kaynaklara bakabilirler.

Bu tezde ilk olarak herhangi bir regle yüzeyin uzaysal (pure) kuaterniyonik ifadesi verilerek elde edilen yüzeyin striksiyon eğrisi ve dağılma parametresi yeniden formüle edildi. Yüzeyin kapalı olması durumunda açılım açısı ve açılım uzunluğu yeniden yorumlandı. Dayanak eğrisi kuaterniyonik eğri alınarak elde edilen regle yüzeylerin integral invaryantları kuaterniyonik formüller kullanılarak hesaplandı. Daha sonra Study tekabül prensibinden hareketle herhangi bir regle yüzeyin dual ifadesi kuaterniyonlar kullanılarak yeniden verildi. Son olarak Frenet vektörlerinin oluşturduğu kapalı regle yüzeylerin dual integral invaryantları kuaterniyon kullanılarak yeniden ifade edildi.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Hacısalihoglu (1972) “*On the Pitch of a Closed Ruled Surface*” isimli çalışmada, Holditch ve Steiner teoremlerini, dual küre üzerinde ele alarak çizgiler uzayına genelleştirmiş ve kapalı regle yüzeylerin açılım uzunlukları arasında bazı sonuçlar elde etmiştir [17].

Bharathi ve Nagaraj (1987) “*Quaternion Valued Function of a Real Variable Serret-Frenet Formulae*” isimli çalışmada 3-boyutlu reel Öklid uzayındaki bir eğrinin Serret-Frenet formüllerini uzaysal kuaterniyonlar yardımıyla yeniden türetmişlerdir. Ayrıca, 4-boyutlu reel Öklid uzayındaki kuaterniyonik eğrilerin Serret-Frenet formülleri elde edilmiştir [3].

Gürsoy (1990) “*The Dual Angle of Pitch of a Closed Ruled Surface*” isimli çalışmada, dual açılım açısının, kapalı dual küresel eğriler için, bir integral invaryant olduğunu göstermiştir. Dual açılım açılarını kullanarak, Holditch ve Steiner teoremlerini, kapalı regle yüzeylerine genelleştirmiştir [13].

Sivridağ ve ark., (1994) “*The Serret-Frenet Formulae for Dual Quaternion Valued Functions of a Single Real Variable*” isimli çalışmada \mathbb{H}^3 de dual eğrinin dual Serret-Frenet formüllerini dual uzaysal kuaterniyonlar yardımıyla yeniden türetmişlerdir, Ayrıca, \mathbb{H}^4 de kuaterniyonik eğrilerin Serret-Frenet formülleri elde edilmiştir [26].

Karadağ ve Sivridağ (1997) “*Tek Değişkenli Kuaterniyon Değerli Fonksiyonlar ve Eğilim Çizgileri*” isimli çalışmada \mathbb{R}^3 ve \mathbb{R}^4 uzaylarındaki kuaterniyonik eğriler için eğilim çizgisi ve harmonik eğrilik kavramları verilmiştir. Ayrıca, kuaterniyonik eğrilerin eğilim çizgisi olması için karakterizasyon verilmiştir [20].

Çöken ve Tuna (2004) “*On the Quaternionic Inclined Curves in the Semi-Euclidean Space \mathbb{E}_2^4* ” isimli çalışmada yarı-Öklid uzayında kuaterniyonik eğilim çizgileri ile ilgili bazı sonuçlar vermişlerdir. Ayrıca, harmonik eğriliklere göre kuaterniyonik eğilim çizgileri için bazı karakterizasyonlar ifade etmişlerdir [7].

Çöken ve ark., (2009) “*Formulas for Dual-Split Quaternionic Curves*” isimli çalışmada yarı-dual uzayında dual-split kuaterniyonları tanıtmışlardır. Dual-split kuaterniyonik eğriler için Serret-Frenet formüllerini ifade etmişlerdir. Ayrıca \mathbb{D}_1^3 ve \mathbb{D}_2^4 yarı-dual uzaylarında yarı-dual kuaterniyonik eğrilerin tanımlamışlardır ve bu eğriler için Serret-Frenet formüllerini elde etmişlerdir [8].

Soyfidan (2011) “*Kuaterniyonik İnvolut-Evolüt Eğri Çiftleri*” isimli yüksek lisans tez çalışmasında, Öklid uzayındaki eğriler kuaterniyonik eğriler alınarak kuaterniyonik involüt-evolüt eğri çifti kavramı verilmiştir. Ayrıca bu eğri çiftinin Frenet elemanlarının birbirleri cinsinden yazılabildiği gösterilmiştir [27].

Şenyurt ve Çalışkan, (2014) “*Parallel Ruled Surfaces and some their Characteristic Properties*” isimli çalışmada, birim dual küresel paralel eğrilere 3- boyutlu Öklid uzayında karşılık gelen paralel regle yüzeylerin integral invaryantlarını hesaplamışlardır [31].

Kızıltuğ ve Yaylı, (2015) “*On the Quaternionic Mannheim Curves of $Aw(k)$ -type in \mathbb{E}^3 ” isimli çalışmada kuaterniyonik Mannheim eğrilerini incelemişlerdir. Bununla birlikte kuaterniyonik Mannheim eğrilerinin AW(2) ve AW(3)- tipinden kuaterniyonik eğriler olduklarını ancak AW(1)- tipinden kuaterniyonik eğri olmadıklarını göstermişlerdir [21].*

Yaylı ve Aslan (2015) “*Canal surfaces with quaternions*” isimli çalışmada kanal yüzeylerinin ve tüp yüzeylerinin kuaterniyon çarpımı ve matris temsili ile elde edilebildiğini göstermişlerdir. Spine eğrisinin farklı çatıları tarafından kanal yüzeyin denklemi elde edilmiştir [36].

Şenyurt ve ark., (2017) “*On Spatial Quaternionic Involute Curve A New View*” isimli çalışmada bir kuaterniyonik evolüt eğrisine ait involüt eğrisinin Frenet vektörleri ve kuaterniyonik birim Darboux vektörü konum vektörü olarak alındığında elde edilen kuaterniyonik Smarandache eğrilerinin eğrilik ve burulmalarını hesaplamışlardır [30].

Tuncer ve ark., (2018) “*Circular surfaces with split quaternionic representations in Minkowski 3-space*” isimli çalışmada kuaterniyonları ve homotetik hareketleri kullanarak spacelike dairesel ve spacelike roller coaster yüzeylerinin denklemlerini yeniden ifade etmişlerdir. Daha sonra Gauss ve ortalama eğrilikleri gibi bazı geometrik özellikler vermişlerdir. Son olarak timelike dairesel ve timelike roller coaster yüzeylerinin split kuaterniyonik ve matris temsillerini ifade etmişlerdir [32].

3. Genel Bilgiler

3.1 Öklid Uzayı

V , n boyutlu bir vektör uzayı olsun.

$$\langle, \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

şeklinde tanımlı fonksiyon aşağıdaki aksiyomları sağlarsa bu fonksiyona bir iç çarpım fonksiyonu denir [23].

$\forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in V, \forall a, b \in \mathbb{R}$ için

a. Bilineerlik Aksiyomu;

$$\langle a\vec{x} + b\vec{y}, \vec{z} \rangle = a\langle \vec{x}, \vec{z} \rangle + b\langle \vec{y}, \vec{z} \rangle,$$

$$\langle \vec{x}, a\vec{y} + b\vec{z} \rangle = a\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle + b\langle \vec{x}, \vec{z} \rangle,$$

b. Simetri Aksiyomu;

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle \vec{y}, \vec{x} \rangle,$$

c. Pozitif Tanımlılık Aksiyomu;

$$\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle \geq 0,$$

$$\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = 0.$$

Reel standart afin uzayı \mathbb{R}^n ile gösterilsin. $\forall \vec{X}, \vec{Y} \in \mathbb{R}^n$ için

$$\langle, \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \langle \vec{X}, \vec{Y} \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

şeklinde tanımlı fonksiyon bir iç çarpım fonksiyonudur. Bu iç çarpıma \mathbb{R}^n de standart iç çarpım veya Öklid iç çarpımı, bu iç çarpımın tanımlı olduğu afin uzayına Öklid uzayı denir ve \mathbb{E}^n ile gösterilir.

\mathbb{E}^n , n-boyutlu Öklid uzayında iki nokta X ve Y olsun. Bu noktalar arasındaki uzaklık

$$d(X, Y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - x_i)^2}$$

şeklinde tanımlanır [16].

$\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^n$ bir eğri ve $\varphi = \{\alpha', \alpha'', \alpha''', \dots, \alpha^{(r)}\}$ kümesi lineer bağımsız olsun.

$$\alpha^{(k)} \in Sp\{\varphi\}, \quad k > r$$

olmak üzere φ den ile elde edilen $\{v_1(s), v_2(s), \dots, v_r(s)\}$ ortonormal sistemine α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki Serret-Frenet r -ayaklısı, $\forall v_i$ ($1 \leq i \leq r$), vektörüne de Serret-Frenet vektörü,

$$k_i : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad 1 \leq i \leq r, \quad k_i(s) = \langle v'_i(s), v_{i+1}(s) \rangle$$

şeklinde tanımlı k_i fonksiyonuna α eğrisinin i -yinci eğrilik fonksiyonu, $\forall s \in I$ için $k_i(s) \in \mathbb{R}$ sayısına da α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki i -yinci eğriliği denir. $n=3$ özel hali için eğrinin Frenet vektörleri $\vec{T}(s), \vec{N}(s)$ ve $\vec{B}(s)$ şeklinde gösterilir. Burada $\vec{T}(s)$ ye teğet vektör, $\vec{N}(s)$ ye asli normal vektör ve $\vec{B}(s)$ ye de binormal vektör adı verilir. Buna göre eğrinin Frenet vektörleri, eğrilikleri ve Frenet formülleri sırasıyla

a) s yay parametresi ise

$$T(s) = \alpha'(s), \quad N(s) = \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|}, \quad B(s) = T(s) \wedge N(s),$$

$$\kappa(s) = \|\alpha''(s)\|, \quad \tau(s) = -\langle N(s), B'(s) \rangle,$$

$$\vec{T}'(s) = \kappa(s)\vec{N}(s), \quad \vec{N}'(s) = -\kappa(s)\vec{T}(s) + \tau(s)\vec{B}(s), \quad \vec{B}'(s) = -\tau(s)\vec{N}(s).$$

b) t keyfi parametre ise

$$T(t) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}, \quad N(t) = \frac{\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)}{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|}, \quad B(t) = \frac{\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)}{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|},$$

$$\kappa(t) = \frac{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3}, \quad \tau(t) = \frac{\langle \alpha'(t) \wedge \alpha''(t), \alpha'''(t) \rangle}{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|^2},$$

$$\vec{T}'(t) = v\kappa(t)\vec{N}(t), \vec{N}'(t) = -v\kappa(t)\vec{T}(t) + v\tau(t)\vec{B}(t), \vec{B}'(t) = -v\tau(t)\vec{N}(t), v = \|\alpha'(t)\|.$$

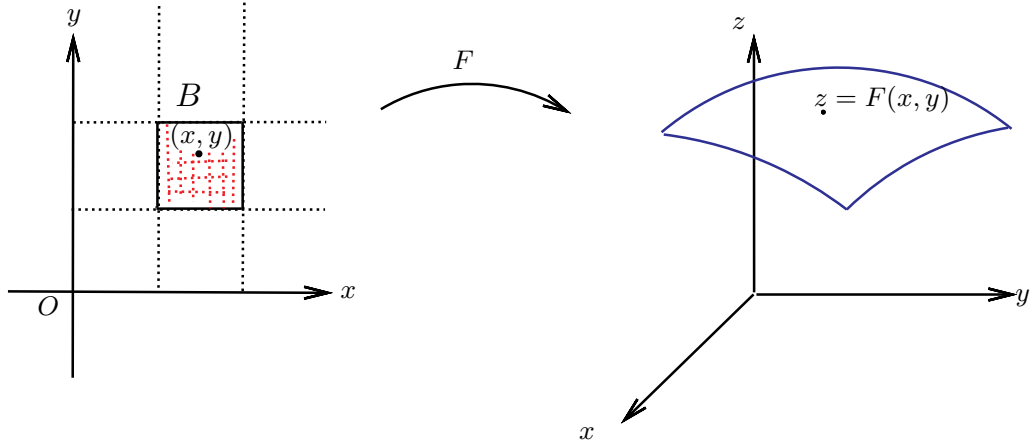
şeklinde verilir. Burada $\kappa(s)$ ye eğrinin eğriliği ve $\tau(s)$ ye de burulması (torsiyonu) denir [16, 23]. Eğrilere ait temel kavramlara [5, 16, 23, 24, 28] kaynaklarından ulaşılabilir.

3.2 Öklid Uzayında Regle Yüzeyler

$x \circ y$ düzleminin bir B bölgesindeki her bir (x, y) noktasının F diffeomorfizmi altındaki resmi $z = F(x, y)$ olsun. (x, y) noktaları, B bölgesini tararken, $z = F(x, y)$ noktaları da uzayda bir yüzey meydana getirir. Bu yüzeyin kapalı denklemi

$$F(x, y, z) = 0$$

şeklinde verilir (Şekil 3.1).



Şekil 3.1: Yüzey Şekli

s ve v , $s_0 \leq s \leq s_1$, $v_0 \leq v \leq v_1$, bağımsız parametreler olmak üzere yüzeyin parametrik denklemi

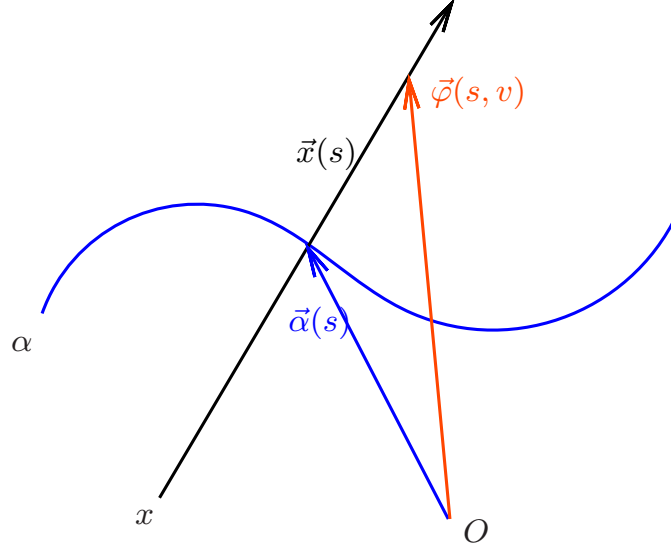
$$x = x(s, v), y = y(s, v), z = z(s, v)$$

şeklinde yazılır [23, 24].

α eğrisine bağlı bir $\vec{x}(s)$ doğrusunun meydana getirdiği yüzeye regle yüzey denir. Burada eğriye regle yüzeyin dayanak eğrisi ve x doğrusuna da yüzeyin anadoğrusu (doğrultmanı) adı verilir. Bu tanıma göre bir regle yüzeyinin parametrik denklemi

$$\varphi : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \varphi(s, v) = \vec{\alpha}(s) + v\vec{x}(s)$$

şeklinde yazılır (Şekil 3.2) [16].



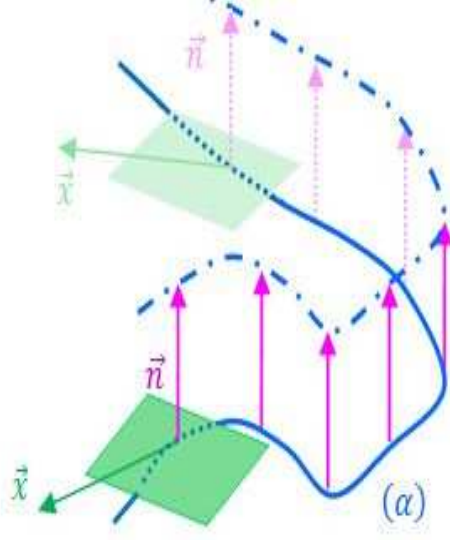
Şekil 3.2: Regle Yüzey

Herhangi bir φ regle yüzeyi için

$$\varphi(s + T, v) = \varphi(s, v), \quad T > 0$$

olacak şekilde periyodik ise yüzeye kapalı regle yüzey ve T ye yüzeyin periyodu denir. Regle yüzey üzerinde komşu iki anadoğrunun ortak dikmesinin esas doğru üzerindeki ayağına striksiyon (boğaz) noktası, bu noktaların geometrik yerine de yüzeyin striksiyon çizgisi (eğrisi) denir. Komşu iki ana doğrusu arasındaki en kısa uzaklığın bu doğrular arasındaki açıya oranına yüzeyin dağılma parametresi (drali), ana doğrularının her birini dik kesen eğriye de yüzeyin ortogonal yörünge eğrisi denir [16].

Bir regle yüzeyin herhangi bir noktasından geçen ve yüzey normaline dik olan düzleme regle yüzeyin teğet düzlemi, eğri boyunca teğet düzlemleri paralel olan yüzeylere açılabilir regle yüzeyler denir (Şekil 3.3) [4].



Şekil 3.3: Açılabilir Regle Yüzey

Herhangi bir α eğrisi üzerinde $\{\vec{v}_1(s), \vec{v}_2(s), \vec{v}_3(s)\}$ vektörleri ile bunların türev vektörleri arasında

$$\begin{bmatrix} d\vec{v}_1(s) \\ d\vec{v}_2(s) \\ d\vec{v}_3(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & w_3(s) & -w_2(s) \\ -w_3(s) & 0 & w_1(s) \\ w_2(s) & -w_1(s) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{v}_1(s) \\ \vec{v}_2(s) \\ \vec{v}_3(s) \end{bmatrix} \quad (3.2.1)$$

bağıntısı vardır. Burada katsayılar matrisi Ω ile gösterilirse Ω anti-simetrik bir matristir [16].

Birim anadoğru vektörü \vec{x} olan bir yüzeyin Pfaff vektörü $\vec{w}(s) = (w_1(s), w_2(s), w_3(s))$ ile gösterilirse $\vec{x}(s)$ in diferensiyeli

$$d\vec{x}(s) = \vec{w}(s) \wedge \vec{x}(s)$$

şeklinde verilir [16].

Herhangi bir regle yüzeyin ana doğrularına dik bir doğrultunun bir periyot sonra ilk konumu ile yaptığı açığa regle yüzeyin açılım açısı ve bu anadoğrular arasındaki uzaklığa da yüzeyin açılım uzunluğu denir. Açılım açısı ve açılım uzunluğu sırasıyla

$$\lambda_x = \langle \vec{d}(s), \vec{x}(s) \rangle, \quad (3.2.2)$$

$$\begin{aligned} l_x &= \oint \langle d\vec{\alpha}(s), \vec{x}(s) \rangle \\ &= - \oint_{(\alpha)} dv \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

$$= \langle \vec{V}(s), \vec{x}(s) \rangle \quad (3.2.4)$$

şeklinde verilir [16].

Regle yüzeylere ait temel kavramlara [4, 11, 16, 23, 29] kaynaklarından ulaşılabilir.

3.3 Dual Uzayda Regle Yüzeyler

$\mathbb{D} = \{A = (a, a^*) : a, a^* \in IR\}$ kümesi üzerinde toplama, çarpma, bölme ve eşitlik işlemleri sırasıyla,

$$A \oplus B = (a, a^*) \oplus (b, b^*) = (a + b, a^* + b^*),$$

$$A \odot B = (a, a^*) \odot (b, b^*) = (ab, ab^* + a^*b),$$

$$\frac{B}{A} = \left(\frac{b}{a}, \frac{ab^* - a^*b}{a^2} \right), a \neq 0,$$

$$A = B \Leftrightarrow a = b, a^* = b^*$$

şeklinde tanılanır. Bu kümeye dual sayılar kümesi ve her elemanına da bir dual sayı denir. $(\mathbb{D}, \oplus, \odot)$ üçlüsü birimli ve değişmeli bir halkadır ancak cisim değildir. $(a, 0)$ şeklindeki

bir dual sayı reel bir a sayısına izomorftur. Buna göre $A = (a, a^*) \in \mathbb{ID}$ sayısı

$$\begin{aligned} A &= (a, a^*) \\ &= (a, 0) \oplus (0, a^*) \\ &= (a, 0) \oplus (0, 1) \odot (a^*, 0) \\ &= a + \varepsilon a^*, \quad \varepsilon = (0, 1) \end{aligned}$$

şeklinde yazılır. Bu yazılışa göre dual sayılar kümesi

$$\mathbb{ID} = \{A = a + \varepsilon a^* \mid a, a^* \in \mathbb{IR}, \varepsilon^2 = 0\}$$

şeklinde ifade edilmiş olur. Dual sayılar kümesi üzerinde

$$\mathbb{ID}^3 = \{\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^* \mid \vec{a}, \vec{a}^* \in \mathbb{IR}^3, \varepsilon^2 = 0\}$$

kümesini tanımlayalım. Bu küme üzerinde toplama ve skalar ile çarpma işlemleri sırasıyla

$$\begin{aligned} \vec{A} + \vec{B} &= \vec{a} + \vec{b} + \varepsilon(\vec{a}^* + \vec{b}^*), \\ \lambda \cdot \vec{A} &= \lambda(\vec{a} + \varepsilon \vec{a}^*) \end{aligned}$$

şeklinde verilir. Bu işlemlerle birlikte $(\mathbb{ID}^3, +, \cdot)$ cebirsel yapısı bir modüldür. Bu modül kısaca \mathbb{ID} - modül şeklinde gösterilir. Bu cebirsel yapı bir vektör uzayı olarak alınacak ve bu yapının herbir elemanına bir vektör gözüyle bakılacaktır [15]. \mathbb{ID} - modülde iki dual vektör \vec{A} ve \vec{B} olsun. Bu vektörlerin iç çarpımı, vektörel çarpımı ve normu sırasıyla;

$$\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + \varepsilon(\langle \vec{a}, \vec{b}^* \rangle + \langle \vec{a}^*, \vec{b} \rangle),$$

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = \vec{a} \wedge \vec{b} + \varepsilon(\vec{a} \wedge \vec{b}^* + \vec{a}^* \wedge \vec{b})$$

$$\|\vec{A}\| = \sqrt{\langle \vec{A}, \vec{A} \rangle} = \|\vec{a}\| + \varepsilon \frac{\langle \vec{a}, \vec{a}^* \rangle}{\|\vec{a}\|}, \quad \vec{a} \neq 0$$

şeklinde tanımlanır.

Normu $(1, 0)$ dual sayısına eşit olan vektöre birim dual vektör ve bu vektörlerin kümesine de birim dual küre adı verilir [15].

Teorem 3.3.1 (E.Study) $\vec{A} \neq (\vec{O}, \vec{a}) \in \mathbb{ID}$ - modül olmak üzere normu $(1, 0)$ olan birim dual kürenin dual noktaları \mathbb{IR}^3 de yönlü doğrulara bire-bir karşılık gelir [15].

İspat. \mathbb{IR}^3 de M noktasından geçen bir doğrunun doğrultu vektörü \vec{u} ile gösterilsin.

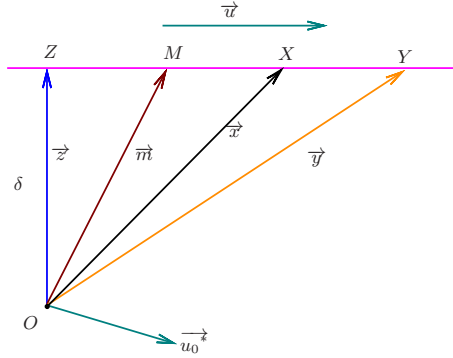
Şekil 3.4'den doğrunun vektörel denklemi

$$\begin{aligned}\vec{OX} &= \vec{OM} + \vec{MX} \\ \vec{x} &= \vec{m} + \lambda\vec{u} \\ \vec{x} - \vec{m} &= \lambda\vec{u} \\ (\vec{x} - \vec{m}) \wedge \vec{u} &= \lambda\vec{u} \wedge \vec{u} \\ (\vec{x} - \vec{m}) \wedge \vec{u} &= 0\end{aligned}$$

şeklinde olur. Burada \vec{u} vektörü birim olarak alınabilir. Gerekli işlemler yapılırsa

$$\vec{x} \wedge \vec{u} - \vec{m} \wedge \vec{u} = 0 \Rightarrow \vec{x} \wedge \vec{u} = \vec{m} \wedge \vec{u}$$

olur. $u_0^* = x \wedge u$ alınırsa bu vektöre \vec{u} vektörünün O başlangıç noktasına göre vektörel momentü denir. Vektörel moment doğru üzerindeki nokta seçiminden bağımsızdır. Doğru üzerinde değişken bir nokta Y olsun.



Şekil 3.4: Anadoğru Vektörünün Vektörel Momenti

Şekil 3.4' den

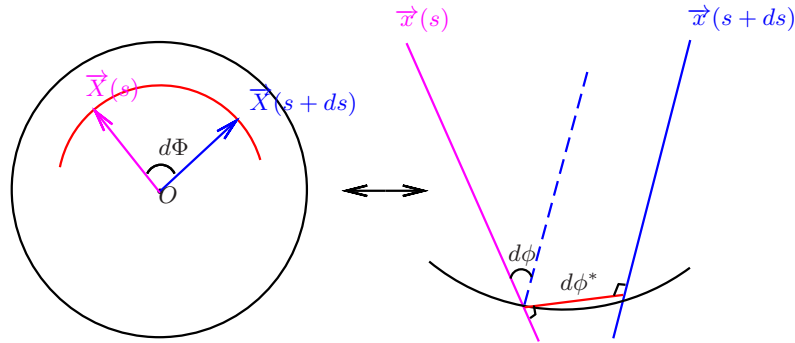
$$\begin{aligned}\vec{OY} &= \vec{OM} + \vec{MY} \\ \vec{y} &= \vec{m} + \lambda\vec{u} \\ (\vec{y} - \vec{m}) \wedge \vec{u} &= 0\end{aligned}$$

olur. Buradan gerekli işlemler yapılırsa u_0^* vektörel moment $\vec{y} \wedge \vec{u} = \vec{m} \wedge \vec{u} = u_0^*$ dır. Vektörel moment vektörü başlangıç noktasının seçimine bağlıdır. Bunu görmek için O noktasına doğruya bir dikme çizelim. Bu dikmenin ayağı Z olsun. Bu durumda $\vec{z} \wedge \vec{u} = \vec{u}_0^*$ olur. Bu eşitliğin normu alınırsa

$$\|\vec{u}_0^*\| = \|\vec{z} \wedge \vec{u}\| = \|\vec{z}\| = \delta$$

bulunur. O noktası değişeceğinden δ sayısı değişir. Bu da bize vektörel moment vektörünün başlangıç noktasına bağlı olduğunu ifade eder. Böylece $\mathbb{I}\mathbb{R}^3$ teki her yönlü doğru, doğrunun doğrultu vektörü ve vektörel moment vektörü ile ifade edilmiş olur. Buna göre her bir yönlü doğru (\vec{u}, \vec{u}_0^*) vektör çifti ile ifade edilir. Bu vektör çifti $\vec{U} = \vec{u} + \varepsilon \vec{u}_0^*$ şeklinde bir dual sayıdır. Bu vektörün normu bir birim olduğundan dual küre üzerinde bir dual nokta olur. Tersine birim dual küre üzerinde bir dual nokta $\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^*$ olsun. Burada \vec{a} doğrunun doğrultu vektörü ve \vec{a}^* doğrunun vektörel momentini olarak alınabilir. Bu durumda (\vec{a}, \vec{a}^*) iklisi $\mathbb{I}\mathbb{R}^3$ te yönlü doğruya karşılık gelir. \square

Birim dual küre üzerinde bir $\vec{X}(s) = \vec{x}(s) + \varepsilon \vec{x}^*(s)$ noktası verilsin. Bu nokta dual küre üzerinde bir $\vec{X}(s)$ dual eğrisini çizer. Study tekabül prensibine göre bu eğriye Öklid uzayında bir regle yüzey karşılık gelir. $\vec{X}(s)$ dual eğrisine, regle yüzeyin dual küresel resmi denir (Şekil 3.5) [15].



Şekil 3.5: Regle Yüzeyin Dual Küresel Resmi

$\vec{X} = \vec{X}(s)$ dual küresel eğrisinin dual yay elementi $d\Phi = d\phi + \varepsilon d\phi^*$ ile gösterilsin. Bu ifade $\vec{X}(s)$ ve $\vec{X}(s + ds)$ komşu iki dual vektör arasındaki açıdır. Bu dual açı

$$d\Phi^2 = \langle d\vec{X}, d\vec{X} \rangle = \langle \vec{X}', \vec{X}' \rangle ds^2$$

şeklinde yazılabilir. $\vec{X} = \vec{X}(s)$ dual eğrisine karşılık gelen regle yüzeyin dağılma parametresi $\frac{1}{d}$ ile gösterilse bu parametre

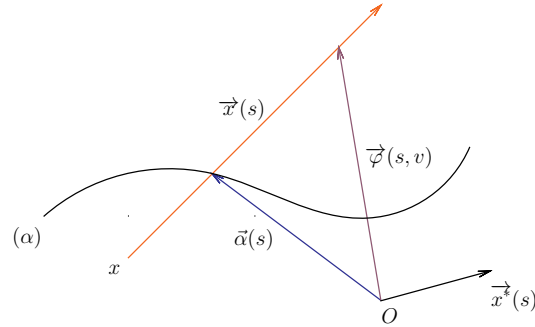
$$\frac{1}{d} = \frac{\langle d\vec{x}, d\vec{x}^* \rangle}{\langle d\vec{x}, d\vec{x} \rangle} = \frac{d\phi^*}{d\phi}$$

şeklinde verilir [15]. Bu açının $d\phi$ reel kısmı anadoğrular arasındaki açı ve $d\phi^*$ dual kısmı ise anadoğrular arasındaki en kısa uzaklıktır [15].

Dayanak eğrisi $\alpha(s)$ olan bir regle yüzeyin parametrik denklemi

$$\vec{\varphi}(s, v) = \vec{\alpha}(s) + v\vec{x}(s)$$

şeklinde yazılır. \vec{x} vektörünün vektörel momenti \vec{x}^* ile gösterilsin. Bu vektör Şekil 3.6 dan



Şekil 3.6: Regle Yüzeyin Dayanak Eğrisi ve Anadoğru vektörü

$$\begin{aligned} \vec{x}^*(s) &= \vec{\alpha}(s) \wedge \vec{x}(s) \Rightarrow \vec{x} \wedge \vec{x}^*(s) = \vec{x}(s) \wedge (\vec{\alpha}(s) \wedge \vec{x}(s)) \\ &= \langle \vec{x}(s), \vec{x}(s) \rangle \vec{\alpha}(s) - \langle \vec{\alpha}(s), \vec{x}(s) \rangle \vec{x}(s) \\ &= \vec{\alpha}(s) - \langle \vec{\alpha}(s), \vec{x}(s) \rangle \vec{x}(s) \end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Buna göre anadoğrusu $x(s)$ olan φ regle yüzeyinin dual ifadesi

$$\begin{aligned}\vec{\varphi}(s, v) = \vec{\alpha}(s) + v\vec{x}(s) &\Rightarrow \vec{\varphi}(s, u) = \vec{x}(s) \wedge \vec{x}^*(s) + \underbrace{(\langle \vec{\alpha}(s), \vec{x}(s) \rangle + v)}_u \vec{x}(s) \\ &\Rightarrow \vec{\varphi}(s, u) = \vec{x}(s) \wedge \vec{x}^*(s) + u\vec{x}(s)\end{aligned}$$

şeklinde olur [15].

$\vec{X}(s) = \vec{x}(s) + \varepsilon\vec{x}^*(s)$ vektörünün birim dual küre üzerinde çizdiği dual eğriye Öklid uzayında karşılık gelen kapalı regle yüzeyin dual açılım açısı Λ_X ile gösterilirse bu açı

$$\Lambda_X = -\langle \vec{D}(s), \vec{X}(s) \rangle$$

şeklinde verilir [13]. Burada $\vec{D}(s) = \vec{d}(s) + \varepsilon\vec{d}^*(s)$ dual Steiner vektörüdür. Λ_X dual açılım açısı regle yüzeyin reel invaryantları cinsinden

$$\Lambda_X = \lambda_x - \varepsilon l_x$$

şeklinde verilir [13, 15]. Burada λ_x ve l_x sırasıyla reel açılım açısı ve reel açılım uzunluğudur.

Dual uzayda eğri ve yüzey teorilerine ait temel kavramlara [5, 13–15, 17, 34] kaynaklarından ulaşılabilir.

3.4 Reel ve Dual Kuaterniyonlar

3.4.1 Reel Kuaterniyon

Bir q kuaterniyonu $q = d + ai + bj + ck$ şeklinde verilsin. Bu kuaterniyonun skalar kısmı S_q , vektör kısmı V_q ile gösterilirse $S_q = d$ ve $\vec{V}_q = ai + bj + ck$ olur. Bu durumda q kuaterniyonu

$$q = S_q + V_q$$

şeklinde yazılır. Herhangi iki kuaterniyon $q_1 = S_{q_1} + \vec{V}_{q_1}$ ve $q_2 = S_{q_2} + \vec{V}_{q_2}$ olsun. Bu kuaterniyonların toplamı, farkı, skaler ile çarpımı ve eşitliği işlemi sırasıyla

$$\begin{aligned} q_1 \oplus q_2 &= (S_{q_1} + S_{q_2}) + (\vec{V}_{q_1} + \vec{V}_{q_2}), \\ q_1 - q_2 &= (S_{q_1} - S_{q_2}) + (\vec{V}_{q_1} - \vec{V}_{q_2}), \\ \lambda \odot q &= \lambda S_q + \lambda \vec{V}_q, \\ q_1 = q_2 &\Leftrightarrow S_{q_1} = S_{q_2}, \vec{V}_{q_1} = \vec{V}_{q_2} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. Bu durumda $\{K, \oplus, \mathbb{R}, +, \cdot, \odot\} \equiv K$ cebirsel yapısı bir uzay yapısına ulaşır ve bu uzaya reel kuaterniyonların uzayı denir [15, 18, 35].

Herhangi iki kuaterniyon $q_1, q_2 \in K$ olsun. Bunların kuaterniyon çarpımı (Hamilton çarpımı)

$$\begin{aligned} q_1 \times q_2 &= (d_1 + a_1i + b_1j + c_1k) \times (d_2 + a_2i + b_2j + c_2k) \\ &= d_1d_2 - (a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2) + (d_1a_2 + a_1d_2 + b_1c_2 - c_1b_2)i \\ &\quad + (d_1b_2 + b_1d_2 + c_1a_2 - a_1c_2)j + (d_1c_2 + c_1d_2 + a_1b_2 - b_1a_2)k \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. Bu çarpımda Öklid uzayındaki iç çarpım ve vektörel çarpım dikkate alınırsa $q_1 \times q_2$ kuaterniyonu

$$q_1 \times q_2 = S_{q_1}S_{q_2} - \langle \vec{V}_{q_1}, \vec{V}_{q_2} \rangle + S_{q_1}\vec{V}_{q_2} + S_{q_2}\vec{V}_{q_1} + \vec{V}_{q_1} \wedge \vec{V}_{q_2} \quad (3.4.1)$$

şekline dönüşür [15]. Kuaterniyon çarpımının aşağıdaki özellikleri vardır [15]:

- i) $q_1 \times q_2 \in K, \forall q_1, q_2 \in K,$
- ii) $q_1 \times (q_2 \times q_3) = (q_1 \times q_2) \times q_3 \in K, \forall q_1, q_2, q_3 \in K,$
- iii) $q_1 \times (q_2 + q_3) = q_1 \times q_2 + q_1 \times q_3 \in K,$
 $(q_1 + q_2) \times q_3 = q_1 \times q_3 + q_2 \times q_3 \in K,$
- iv) $q_1 \times q_2 \neq q_2 \times q_1.$

Herhangi bir $q = S_q + \vec{V}_q \in K$ kuaterniyonunun eşleniği $\bar{q} = S_q - \vec{V}_q$ şeklinde tanımlı bir kuaterniyondur. Buna göre q ile \bar{q} eşleniğinin kuaterniyon çarpımı

$$q \times \bar{q} = (S_q + \vec{V}_q) \times (S_q - \vec{V}_q) = d^2 + a^2 + b^2 + c^2$$

olur [3]. Kuaterniyonlar kümesi üzerinde bir h fonksiyonu

$$h : K \times K \rightarrow \mathbb{R}, h(q_1, q_2) = \frac{1}{2}(q_1 \times \bar{q}_2 + q_2 \times \bar{q}_1)$$

şeklinde tanımlansın. Bu fonksiyon bir iç çarpım fonksiyonudur ve bu fonksiyona kuaterniyonik iç çarpım fonksiyonu denir [3]. Bu iç çarpıma göre bir q kuaterniyonunun normu

$$\mathbf{N}(q) = \sqrt{h(q, q)} = \sqrt{d^2 + a^2 + b^2 + c^2}$$

şeklinde bir reel sayıdır. Herhangi bir q kuaterniyonun tersi

$$\begin{aligned} (\)^{-1} : K - \{0\} &\rightarrow K - \{0\} \\ q &\rightarrow q^{-1} = \frac{\bar{q}}{\mathbf{N}(q)} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. $q_2 \neq 0$ olmak üzere q_1, q_2 iki kuaterniyon verilsin. q_1 kuaterniyonun q_2 kuaterniyonuna bölümü

$$r_1 = q_1 \times q_2^{-1}, r_2 = q_2^{-1} \times q_1$$

şeklinde tanımlı farklı iki kuaterniyondur [15].

Herhangi bir kuaterniyon ile eşleniğinin toplamı sıfır olan kuaterniyona uzaysal (pure) kuaterniyon denir. Bir q kuaterniyonu ile eşleniğinin toplamından skalar kısım

$$q + \bar{q} = 0 \Rightarrow d = 0$$

olur. Buna göre q kuaterniyonu

$$q = ai + bj + ck$$

şeklide bir pure kuaterniyon olur. Herbir pure kuaterniyona uzaysal kuaterniyon denir [3]. Uzaysal kuaterniyonların kümesi \mathbb{Q} ile gösterilirse bu küme

$$\mathbb{Q} = \{q \in K \mid q + \bar{q} = 0\}$$

şeklinde yazılır [3]. (1.0.2) bağıntısında verilen matriste $d = 0$ alınırsa $q \in \mathbb{Q}$ kuaterniyonunun matris gösterimi

$$\begin{bmatrix} 0 & -a & -c & -b \\ a & 0 & b & -c \\ c & -b & 0 & a \\ b & c & -a & 0 \end{bmatrix}$$

şekline dönüşür. İki uzaysal kuaterniyonun çarpımı (3.4.1) bağıntısından

$$q_1 \times q_2 = -\langle q_1, q_2 \rangle + q_1 \wedge q_2 \quad (3.4.2)$$

şeklinde verilir. [3]. Uzaysal kuaterniyonlar üzerinde tanımlanan

$$\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{Q}, \quad \alpha(s) = \sum_{n=1}^3 \alpha_n(s) \vec{e}_n$$

$\alpha(s)$ eğrisine uzaysal kuaterniyonik eğri denir [3]. s eğrinin yay parametresi ise Frenet elemanları sırasıyla

$$\begin{aligned} \vec{T}(s) &= \alpha'(s), \quad \vec{N}(s) = \frac{\alpha''(s)}{\mathbf{N}(\alpha''(s))}, \quad \vec{B}(s) = \vec{T}(s) \times \vec{N}(s), \\ \vec{T}'(s) &= \kappa(s)\vec{N}(s), \quad \vec{N}'(s) = -\kappa(s)\vec{T}(s) + \tau(s)\vec{B}(s), \quad \vec{B}'(s) = -\tau(s)\vec{N}(s) \end{aligned}$$

bağıntısı ile verilir [3]. Eğer t keyfi parametre ise Frenet elemanları, sırasıyla

$$\begin{aligned} \vec{T}(t) &= \frac{\alpha'(t)}{\mathbf{N}(\alpha'(t))}, \\ \vec{N}(t) &= \vec{B}(t) \times \vec{T}(t), \\ \vec{B}(t) &= \frac{\alpha'(t) \times \alpha''(t) + \mathbf{N}(\alpha'(t)) \times \mathbf{N}'(\alpha'(t))}{\mathbf{N}(\alpha'(t) \times \alpha''(t) + \mathbf{N}(\alpha'(t)) \times \mathbf{N}'(\alpha'(t)))}, \\ \kappa(t) &= \frac{\mathbf{N}(\alpha'(t) \times \alpha''(t) + \mathbf{N}(\alpha'(t)) \times \mathbf{N}'(\alpha'(t)))}{\mathbf{N}^3(\alpha'(t))}, \\ \tau(t) &= \frac{h(\alpha'(t) \times \alpha''(t), \alpha'''(t))}{\mathbf{N}(\alpha'(t) \times \alpha''(t) + \mathbf{N}(\alpha'(t)) \times \mathbf{N}'(\alpha'(t)))} \end{aligned}$$

şeklinde hesaplanır [27].

3.4.2 Dual Kuaterniyon

İki reel kuaterniyon $q = d + ai + bj + ck$, $q^* = d^* + a^*i + b^*j + c^*k$ şeklinde olmak üzere bir $Q = q + \varepsilon q^*$ dual kuaterniyonu

$$\begin{aligned} Q &= q + \varepsilon q^* \\ &= d + ai + bj + ck + \varepsilon(d^* + a^*i + b^*j + c^*k) \\ &= D + Ai + Bj + Ck \end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Burada

$$D = d + \varepsilon d^*, A = a + \varepsilon a^*, B = b + \varepsilon b^*, C = c + \varepsilon c^*$$

dır. Dual kuaterniyonların kümesi K_D ile gösterilirse bu küme

$$K_D = \{Q = D + Ai + Bj + Ck \mid D, A, B, C \in \mathbb{D}\}$$

şeklinde yazılır. P ve $Q \in K_D$ olsun. Bu iki kuaterniyonun kuaterniyon çarpımı

$$P \times Q = p \times q + \varepsilon(p \times q^* + p^* \times q)$$

şeklinde verilir [15]. Bu çarpımın aşağıdaki özellikleri vardır [15]:

- i) $P \times Q \in K_D, \forall P, Q \in K_D,$
- ii) $P \times (Q \times R) = (P \times Q) \times R \in K_D, \forall P, Q, R \in K_D,$
- iii) $P \times (Q + R) = P \times Q + P \times R \in K_D,$
 $(P + Q) \times R = P \times R + Q \times R \in K_D,$
- iv) $P \times Q \neq Q \times P.$

Herhangi bir $Q \in K_D$ dual kuaterniyonunun skalar kısmı $S_Q = D$ ve vektör kısmı $\vec{V}_Q = Ai + Bj + Ck$ ile gösterilirse bu kuaterniyon

$$Q = S_Q + \vec{V}_Q$$

şeklinde yazılır. Buna göre $P = S_P + \vec{V}_P$ ve $Q = S_Q + \vec{V}_Q$ kuaterniyonları için toplama, çıkarma, skaler ile çarpma ve eşitlik işlemi sırasıyla

$$\begin{aligned} P \oplus Q &= (S_P + S_Q) + (\vec{V}_P + \vec{V}_Q), \\ P - Q &= (S_P - S_Q) + (\vec{V}_P - \vec{V}_Q), \\ \lambda \odot Q &= \lambda S_Q + \lambda \vec{V}_Q, \\ P = Q &\Leftrightarrow S_P = S_Q, \vec{V}_P = \vec{V}_Q \end{aligned}$$

şeklinde verilir [15]. Bir $Q = S_Q + \vec{V}_Q$ dual kuaterniyonun eşleniği $\bar{Q} = S_Q - \vec{V}_Q$ şeklinde bir kuaterniyondur. Q ile \bar{Q} eşleniğinin kuaterniyon çarpımı

$$Q \times \bar{Q} = D^2 + A^2 + B^2 + C^2$$

şeklinde bir dual sayıdır [15]. K_D kümesi üzerinde tanımlı bir H fonksiyonu

$$\begin{aligned} H &: K_D \times K_D \rightarrow \mathbb{H} \\ H(P, Q) &= \frac{1}{2}(P \times \bar{Q} + Q \times \bar{P}) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlansın. Bu fonksiyon iç çarpım aksiyomlarını sağlar. Bu iç çarpım düzenlenirse

$$H(P, Q) = h(p, q) + \varepsilon(h(p, q^*) + h(p^*, q)) \quad (3.4.3)$$

şeklinde olur [26]. Bu iç çarpım kullanılarak Q dual kuaterniyonunun normu

$$\mathbf{N}(Q) = \sqrt{H(Q, Q)} = \sqrt{D^2 + A^2 + B^2 + C^2}$$

şeklinde bir dual sayıdır. K_D üzerinde bir Q dual kuaterniyonunun tersi

$$\begin{aligned} (\)^{-1} : K_D - \{0\} &\rightarrow K_D - \{0\} \\ Q &\rightarrow Q^{-1} = \frac{\bar{Q}}{\mathbf{N}(Q)} \end{aligned}$$

şeklinde verilir. $Q \neq 0$ olmak üzere iki kuaterniyon P ve Q olsun. P kuaterniyonun Q kuaterniyonuna bölümü

$$R_1 = P \times Q^{-1}, R_2 = Q^{-1} \times P$$

şeklinde tanımlı iki dual kuaterniyondur [15]. Herhangi bir Q kuaterniyonu ile ve \bar{Q} eşlenik kuaterniyonun toplamından skalar kısım

$$Q + \bar{Q} = 0 \Rightarrow D = 0$$

olur. Buna göre Q kuaterniyonu

$$Q = Ai + Bj + Ck$$

şeklide bir pure dual kuaterniyon olur. Herbir pure dual kuaterniyona dual uzaysal kuaterniyon denir [26]. Dual uzaysal kuaterniyonların kümesi \mathbb{Q}_D ile gösterilirse bu küme

$$\mathbb{Q}_D = \{Q \in K_D \mid Q + \bar{Q} = 0\}$$

şeklinde yazılır. (3.4.2) bağıntısına benzer olarak iki dual uzaysal kuaterniyonun kuaterniyon çarpımı

$$P \times Q = -\langle P, Q \rangle + P \wedge Q$$

şeklinde yazılır [26].

Kuaterniyonlara ait temel kavramlara [3, 15, 26, 27, 35] kaynaklarından ulaşılabilir.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

4.1 Uzaysal Kuaterniyon ve Regle Yüzey

Bu bölümde uzaysal kuaterniyonik eğri boyunca tanımlanan kuaterniyonik regle yüzeyin striksiyon eğrisi, dağılma parametresi, açılım açısı ve açılım uzunluğunun kuaterniyonik formülleri verildi. Bu formüller kullanılarak yüzeyin dayanak eğrisinin Frenet vektörlerinin çizdiği kuaterniyonik kapalı regle yüzeylerin integral invaryantları yeniden hesaplandı.

4.1.1 Uzaysal Kuaterniyonik Regle Yüzey

$\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Q}$ uzaysal kuaterniyonik eğrisi boyunca bir $\vec{x}(s)$ doğrusunun meydana getirdiği φ regle yüzeyinin parametrik ifadesi

$$\begin{aligned}\varphi : I \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{Q} \\ (s, v) &\rightarrow \vec{\varphi}(s, v) = \vec{\alpha}(s) + v\vec{x}(s)\end{aligned}$$

şeklinde verilir. α eğrisinin teğet vektörü $\vec{T}(s)$, φ yüzeyinin normali $\vec{n}(s)$, $\vec{T}(s)$ ve $\vec{n}(s)$ vektörüne dik olan vektör $\vec{x}(s)$ ile gösterilsin. Böylece yüzey üzerinde bir $\{\vec{T}(s), \vec{x}(s), \vec{n}(s)\}$ ortonormal sistemi elde edilmiş olur.

Teorem 4.1.1 $\varphi = \varphi(s, v)$ yüzeyinin ortonormal çatısı $\{\vec{T}(s), \vec{x}(s), \vec{n}(s)\}$ olsun. Bu çatı ile türevleri arasında

$$\begin{bmatrix} \vec{T}'(s) \\ \vec{x}'(s) \\ \vec{n}'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \sigma(s) & \beta(s) \\ -\sigma(s) & 0 & -\gamma(s) \\ -\beta(s) & \gamma(s) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{T}(s) \\ \vec{x}(s) \\ \vec{n}(s) \end{bmatrix}$$

bağıntısı vardır. Burada $\sigma(s), \beta(s), \gamma(s)$

$$\sigma(s) = h(\vec{T}'(s), \vec{x}(s)),$$

$$\beta(s) = h(\vec{T}'(s), \vec{n}(s)),$$

$$\gamma(s) = h(\vec{n}'(s), \vec{x}(s)).$$

İspat. h kuaterniyonik iç çarpımından

$$h(\vec{T}(s), \vec{x}(s)) = h(\vec{T}(s), \vec{n}(s)) = h(\vec{x}(s), \vec{n}(s)) = 0,$$

$$\vec{T}(s) \times \vec{T}(s) = \vec{n}(s) \times \vec{n}(s) = \vec{x}(s) \times \vec{x}(s) = -1,$$

$$\vec{T}(s) \times \vec{x}(s) = \vec{n}(s), \vec{n}(s) \times \vec{T}(s) = \vec{x}(s), \vec{x}(s) \times \vec{n}(s) = \vec{T}(s) \quad (4.1.1)$$

yazılır. $\vec{T}(s)$ birim vektör olduğundan

$$\mathbf{N}(\vec{T}(s))^2 = h(\vec{T}(s), \vec{T}(s)) = 1 \Rightarrow \frac{1}{2}(\vec{T}(s) \times \overline{\vec{T}(s)} + \overline{\vec{T}(s)} \times \vec{T}(s)) = 1$$

$$\Rightarrow \vec{T}(s) \times \overline{\vec{T}(s)} = 1$$

olur. Bu ifadenin türevi alınırsa

$$\vec{T}'(s) \times \overline{\vec{T}(s)} + \vec{T}(s) \times \overline{\vec{T}'(s)} = 0$$

bulunur. Kuaterniyonik iç çarpım tanımından

$$h(\vec{T}'(s), \vec{T}(s)) = 0 \Rightarrow \vec{T}'(s) \times \overline{\vec{T}(s)} + \overline{(\vec{T}'(s) \times \overline{\vec{T}(s)})} = 0$$

olur ve dolayısıyla $\vec{T}'(s) \times \overline{\vec{T}(s)}$ vektörü bir uzaysal kuaterniyondur.

$\vec{T}'(s) \in Sp\{\vec{T}(s), \vec{x}(s), \vec{n}(s)\}$ olduğundan

$$\vec{T}'(s) = \xi(s)\vec{T}(s) + \sigma(s)\vec{x}(s) + \beta(s)\vec{n}(s)$$

şeklinde yazılır. Burada kuaterniyonik iç çarpım yapılırsa $\xi(s)$ katsayısı

$$\xi(s) = h(\vec{T}'(s), \vec{T}(s)) = 0$$

olur. Benzer şekilde diğer katsayılar

$$\sigma(s) = h(\vec{T}'(s), \vec{x}(s)) \text{ ve } \beta(s) = h(\vec{T}'(s), \vec{n}(s))$$

şekinde bulunur. Bu katsayılar $\vec{T}'(s)$ ifadesinde yerine yazılırsa

$$\vec{T}'(s) = \sigma(s)\vec{x}(s) + \beta(s)\vec{n}(s)$$

olur. $\vec{n}(s)$ birim vektör olduğundan

$$\mathbf{N}(\vec{n}(s))^2 = h(\vec{n}(s), \vec{n}(s)) = 1 \Rightarrow \frac{1}{2}(\vec{n}(s) \times \bar{\vec{n}}(s) + \bar{\vec{n}}(s) \times \vec{n}(s)) = 1$$

$$\Rightarrow \vec{n}(s) \times \bar{\vec{n}}(s) = 1$$

olur. Buradan türev alınırsa

$$\vec{n}'(s) \times \bar{\vec{n}}(s) + \vec{n}(s) \times \bar{\vec{n}}'(s) = 0$$

bulunur. Kuaterniyonik iç çarpım tanımından

$$h(\vec{n}'(s), \vec{n}(s)) = 0$$

bulunur. (4.1.1) bağıntısından

$$\vec{T}(s) \times \vec{n}(s) = -\vec{x}(s)$$

olur. Bu denklemin türevi alınır ve $\vec{T}'(s)$ nün ifadesi yerine yazılırsa $\vec{x}'(s)$ vektörü

$$-\vec{x}'(s) = \vec{T}'(s) \times \vec{n}(s) + \vec{T}(s) \times \vec{n}'(s)$$

$$-\vec{x}'(s) = (\sigma(s)\vec{x}(s) + \beta(s)\vec{n}(s)) \times \vec{n}(s) + \vec{T}(s) \times \vec{n}'(s)$$

$$-\vec{x}'(s) = \sigma(s)(\vec{x}(s) \times \vec{n}(s)) + \beta(s)(\vec{n}(s) \times \vec{n}(s)) + \vec{T}(s) \times \vec{n}'(s)$$

$$-\vec{x}'(s) = \sigma(s)\vec{T}(s) - \beta(s) + \vec{T}(s) \times \vec{n}'(s) \tag{4.1.2}$$

şeklinde bulunur.

$\vec{n}'(s) \in Sp\{\vec{T}(s), \vec{x}(s), \vec{n}(s)\}$ olduğundan

$$\vec{n}'(s) = \vartheta(s)\vec{T}(s) + \gamma(s)\vec{x}(s) + \pi(s)\vec{n}(s) \tag{4.1.3}$$

yazılır. Eşitliğin her iki tarafı $\vec{n}(s)$ ile kuaterniyonik iç çarpılırsa

$$h(\vec{n}'(s), \vec{n}(s)) = \pi(s)$$

bulunur. $h(\vec{n}'(s), \vec{n}(s)) = 0$ olduğundan $\pi(s)$ katsayısı $\pi(s) = 0$ olur. (4.1.3) eşitliği $\vec{T}(s)$ ile soldan kuaterniyon çarpımı yapılırsa

$$\begin{aligned} \vec{T}(s) \times \vec{n}'(s) &= \vartheta(s)\vec{T}(s) \times \vec{T}(s) + \gamma(s)\vec{T}(s) \times \vec{x}(s) \\ &= -\vartheta(s) + \gamma(s)\vec{n}(s) \end{aligned} \quad (4.1.4)$$

bulunur. (4.1.2) ve (4.1.4) bağıntılarından $\vec{x}'(s)$ vektörü

$$-\vec{x}'(s) = \sigma(s)\vec{T}(s) - \beta(s) - \vartheta(s) + \gamma(s)\vec{n}(s) \quad (4.1.5)$$

şeklinde olur. $\vec{x}'(s) \in \mathbb{Q}$ uzaysal kuaterniyon olduğundan katsayılar arasında

$$\vec{x}'(s) + \overline{\vec{x}'(s)} = 0 \Rightarrow -\sigma(s)\vec{T}(s) + \beta(s) + \vartheta(s) - \gamma(s)\vec{n}(s) + \sigma(s)\vec{T}(s)$$

$$+\beta(s) + \vartheta(s) + \gamma(s)\vec{n}(s) = 0$$

$$\Rightarrow 2\beta(s) + 2\vartheta(s) = 0$$

$$\Rightarrow \vartheta(s) = -\beta(s)$$

bağıntısı olduğu görülür. $\vartheta(s)$ ve $\pi(s)$ değerleri (4.1.3) de yerine yazılırsa $\vec{n}'(s)$ vektörü

$$\vec{n}'(s) = -\beta(s)\vec{T}(s) + \gamma(s)\vec{x}(s)$$

şeklinde olur. (4.1.5) bağıntısından $\vec{x}'(s)$ vektörü

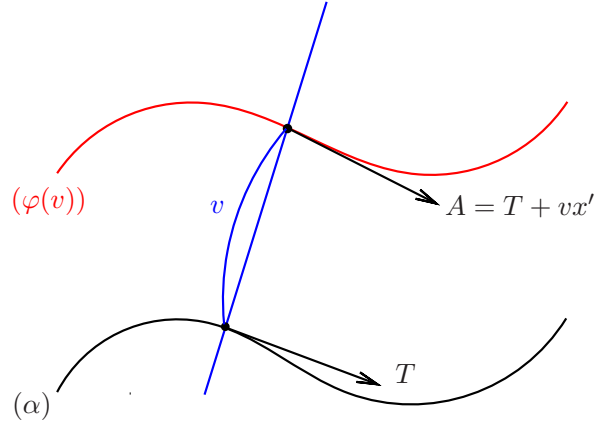
$$\begin{aligned} \vec{x}'(s) &= -\sigma(s)\vec{T}(s) + \beta(s) + \vartheta(s) - \gamma(s)\vec{n}(s) \\ &= -\sigma(s)\vec{T}(s) - \vartheta(s) + \vartheta(s) - \gamma(s)\vec{n}(s) \\ &= -\sigma(s)\vec{T}(s) - \gamma(s)\vec{n}(s) \end{aligned} \quad (4.1.6)$$

şeklinde elde edilir. \square

Tanım 4.1.1 $\varphi = \varphi(s, v)$ uzaysal kuaterniyonik regle yüzeyinin bir M noktasından geçen ve yüzeyin normaline dik olan düzleme bu yüzeyin teğet düzlemi denir.

Teorem 4.1.2 $\varphi = \varphi(s, v)$ uzaysal kuaterniyonik regle yüzeyin açılabilir olması için gerek ve yeter şart teğet düzlemleri paralel olmalıdır.

İspat. $\varphi = \varphi(s, v)$ yüzeyinde v sabit değeri için $\varphi(v) : I \times \{v\} \rightarrow \mathbb{Q}$ eğrisi bir uzaysal kuaterniyonik bir eğridir (Şekil 4.1).



Şekil 4.1: Dayanak Eğrisine v Birim Uzaklıkta Olan $\varphi(v)$ Eğrisi

Bu eğrinin teğet vektörü $\vec{A}(s)$ ile gösterilirse

$$\vec{A}(s) = \vec{T}(s) + v\vec{x}'(s)$$

olur. Burada x' nün yerine (4.1.6) bağıntısından karşılığı yazılırsa

$$\begin{aligned} \vec{A}(s) &= \vec{T}(s) + v\vec{x}'(s) \\ &= \vec{T}(s) + v(-\sigma(s)\vec{T}(s) - \gamma(s)\vec{n}(s)) \\ &= (1 - \sigma(s)v)\vec{T}(s) - \gamma(s)v\vec{n}(s) \end{aligned}$$

olur. Eğri boyunca teğet düzlemin normalı yüzey normaline paralel olmalıdır. Bu durumda $\{\vec{A}, \vec{T}\}$ lineer bağımlıdır. Buradan $\vec{n}(s)$ vektörünün katsayısı 0 olmalıdır, yani $\gamma(s) = 0$ bulunur. \square

Tanım 4.1.2 $\varphi = \varphi(s, v)$ uzaysal kuaterniyonik regle yüzeyinin ana doğrusu boyunca normal doğrusu (teğet düzlemi) aynı kalıyorsa yüzeye açılabilir uzaysal kuaterniyonik regle yüzey denir.

Teorem 4.1.3 Bir uzaysal kuaterniyonik regle yüzey açılabilir ise

$$h(\vec{x}(s) \times \vec{x}'(s), \vec{\alpha}'(s)) = 0$$

şeklinde ifade edilir.

İspat. Bir uzaysal kuaterniyonik regle yüzey açılabilir ise $\gamma(s) = 0$ dır. Diğer taraftan $\vec{x}(s)$ ile $\vec{n}(s)$ uzaysal kuaterniyonik olarak dik olduğundan

$$\begin{aligned} h(\vec{n}(s), \vec{x}(s)) = 0 &\Rightarrow \underbrace{h(\vec{n}'(s), \vec{x}(s))}_{\gamma(s)} + h(\vec{n}(s), \vec{x}'(s)) = 0 \\ &\Rightarrow \gamma(s) = -h(\vec{n}(s), \vec{x}'(s)) \end{aligned}$$

yazılır. Bu bağıntıdan $\gamma(s)$

$$\begin{aligned} \gamma(s) &= -h(\vec{x}'(s), \vec{n}(s)) \\ &= -h(\vec{x}'(s), \vec{T} \times \vec{x}) \\ &= -h(\vec{x}'(s), \vec{\alpha}'(s) \times \vec{x}(s)) \end{aligned} \tag{4.1.7}$$

şeklinde bulunur.

$$\begin{aligned}
h(\vec{x}(s) \times \vec{x}'(s), \vec{\alpha}'(s)) &= h(\vec{x}(s) \times \vec{x}'(s), \vec{T}(s)) \\
&= \frac{1}{2} \left[(\vec{x}(s) \times \vec{x}'(s)) \times \vec{T}(s) + \vec{T}(s) \times \overline{(\vec{x}(s) \times \vec{x}'(s))} \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[-(\vec{x}(s) \times \vec{x}'(s)) \times \vec{T}(s) + \vec{T}(s) \times \overline{(\vec{x}(s) \times \vec{x}'(s))} \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[-(\vec{x}(s) \times (-\sigma(s)\vec{T}(s) - \gamma(s)\vec{n}(s))) \times \vec{T}(s) \right. \\
&\quad \left. + \vec{T}(s) \times \overline{(\vec{x}(s) \times (-\sigma(s)\vec{T}(s) - \gamma(s)\vec{n}(s)))} \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[-(-\sigma(s)\vec{x}(s) \times \vec{T}(s) - \gamma(s)\vec{x}(s) \times \vec{n}(s)) \times \vec{T}(s) \right. \\
&\quad \left. + \vec{T}(s) \times \overline{(-\sigma(s)\vec{x}(s) \times \vec{T}(s) - \gamma(s)\vec{x}(s) \times \vec{n}(s))} \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[(-\sigma(s)\vec{n}(s) + \gamma(s)\vec{T}(s)) \times \vec{T}(s) + \vec{T}(s) \times (-\sigma(s)\vec{n}(s) \right. \\
&\quad \left. + \gamma(s)\vec{T}(s)) \right] \\
&= -\gamma(s)
\end{aligned}$$

eşitliği ve (4.1.7) bağıntısı dikkate alınırsa

$$h(\vec{x}'(s), \vec{\alpha}'(s) \times \vec{x}(s)) = h(\vec{x}(s) \times \vec{x}'(s), \vec{\alpha}'(s))$$

olur. O halde açılabilir olma koşulu

$$h(\vec{x}(s) \times \vec{x}'(s), \vec{\alpha}'(s)) = 0$$

şeklinde elde edilir. \square

Tanım 4.1.3 $\varphi = \varphi(s, v)$ regle yüzeyinin komşu iki ana doğrusu arasındaki en kısa uzaklığın, bu ana doğrular arasındaki açığa oranına regle yüzeyin dağılma parametresi (drali) denir.

Teorem 4.1.4 $\varphi = \varphi(s, v)$ regle yüzeyinin dağılma parametresi

$$P_x = \frac{1}{2} \frac{\left((\vec{x}(s) \times \vec{x}'(s)) \times \overline{\alpha'}(s) + \overline{\alpha'}(s) \times \overline{(\vec{x}(s) \times \vec{x}'(s))} \right)}{\mathbf{N}(\vec{x}'(s))^2} \quad (4.1.8)$$

bağıntısıyla verilir.

İspat. Regle yüzeyin komşu anadoğrularının ortak dikmesi yönündeki vektör,

$$\begin{aligned} \vec{x}(s) \wedge (\vec{x}(s) + d\vec{x}(s)) &= \vec{x}(s) \wedge \vec{x}(s) + \vec{x}(s) \wedge d\vec{x}(s) \\ &= \vec{x}(s) \wedge d\vec{x}(s) \end{aligned}$$

şeklinde yazılır. Diğer yandan $\vec{x}(s) \times d\vec{x}(s)$ ifadesi

$$\vec{x}(s) \times d\vec{x}(s) = -\langle \vec{x}(s), d\vec{x}(s) \rangle + \vec{x}(s) \wedge d\vec{x}(s)$$

şeklinde yazılır. Bu çarpımda

$$\langle \vec{x}(s), \vec{x}(s) \rangle = 1 \Rightarrow \langle \vec{x}(s), d\vec{x}(s) \rangle = 0$$

olduğu dikkate alınırsa $\vec{x}(s) \times d\vec{x}(s)$ vektörü

$$\vec{x}(s) \times d\vec{x}(s) = \vec{x}(s) \wedge d\vec{x}(s)$$

şeklinde bulunur. Buna göre ortak dikme vektörü $\vec{x}(s) \times d\vec{x}(s)$ şeklinde alınabilir.

şeklinde bulunur. x vektörünün küresel gösterge eğrisi (x) ile gösterilsin. Bu eğrinin yay elementi ds_x ile gösterilirse

$$\begin{aligned}
\alpha_x(s) = \vec{x}(s) &\Rightarrow \frac{d\alpha_x}{ds_x} \frac{ds_x}{ds} = \vec{x}'(s) \\
&\Rightarrow \vec{T}_x \frac{ds_x}{ds} = \vec{x}'(s) \\
&\Rightarrow \frac{ds_x}{ds} = \mathbf{N}(\vec{x}'(s)) \\
&\Rightarrow ds_x = \mathbf{N}(\vec{x}'(s)) ds
\end{aligned}$$

olur. Dağılma parametresi tanımından P_x ifadesi

$$\begin{aligned}
P_x &= \frac{k}{ds_x} \\
&= \frac{h(\vec{x}(s) \times \vec{x}'(s), d\vec{\alpha}(s))}{\mathbf{N}(\vec{x}'(s))^2 ds} \\
&= \frac{h(\vec{x}(s) \times \vec{x}'(s), \frac{d\alpha}{ds})}{\mathbf{N}(\vec{x}'(s))^2} \\
&= \frac{h(\vec{x}(s) \times \vec{x}'(s), \vec{\alpha}'(s))}{\mathbf{N}(\vec{x}'(s))^2} \\
&= \frac{1}{2} \frac{\left((\vec{x}(s) \times \vec{x}'(s)) \times \vec{\alpha}'(s) + \vec{\alpha}'(s) \times (\vec{x}(s) \times \vec{x}'(s)) \right)}{\mathbf{N}(\vec{x}'(s))^2}
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. \square

Teorem 4.1.5 $\varphi = \varphi(s, v)$ regle yüzeyinin açılabilir olması için gerek ve yeter şart dağılma parametresinin sıfır olmasıdır.

İspat. \Rightarrow) : Regle yüzey açılabilir olsun. Teorem 4.1.2 den $\gamma(s) = 0$ olur. Bu durumda

$$P_x = \frac{-\gamma(s)}{\sigma(s)^2 + \gamma(s)^2} = 0.$$

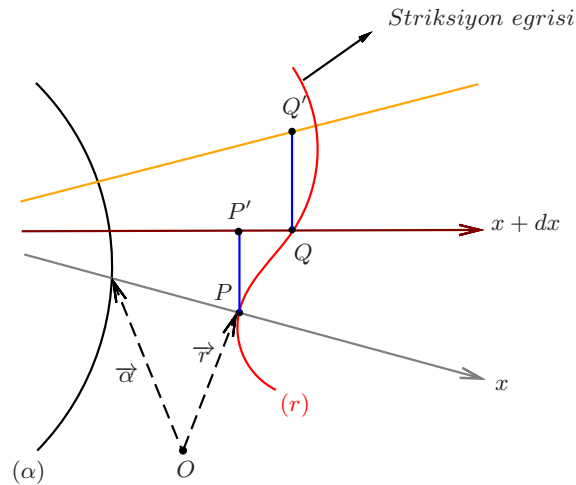
\Leftarrow) : Dağılma parametresi sıfır olsun. Bu durumda $P_x = 0$. Buradan $\gamma(s) = 0$ olur. Teorem 4.1.2 den regle yüzey açılabilir. \square

4.1.2 Uzaysal Kuaterniyonik Regle Yüzeyin Striksiyon (Boğaz) Noktası

Bir $\varphi = \varphi(s, v)$ regle yüzeyin striksiyon eğrisi \vec{r} , dayanak eğrisi $\vec{\alpha}$ ve anadoğrusu \vec{x} olsun. Buna göre striksiyon eğrisinin denklemi

$$\vec{r}(s) = \vec{\alpha}(s) + u\vec{x}(s) \quad (4.1.9)$$

şeklinde yazılabilir. Komşu iki anadoğru x ve $x + dx$ olsun. Bu doğrular üzerinde alınan P ve Q noktalarının ortak dikme üzerindeki ayakları P' ve Q' ile gösterilsin. Ortak dikme olarak $\vec{x}(s) \times \vec{x}'(s)ds$ alınabilir (Şekil 4.3).



Şekil 4.3: Uzaysal Kuaterniyonik Striksiyon Eğrisi

Komşu anadoğruların birbirlerine sonsuz yaklaşması yani limit halinde \overrightarrow{PQ} ile $\overrightarrow{PP'}$ vektörleri çakışır ve \overrightarrow{PQ} vektörü striksiyon çizgisinin teğeti olur. Bu durumda

$$h(\vec{x}(s), \overrightarrow{PQ}) = 0$$

ve

$$h(\vec{x}(s) + \vec{x}'(s)ds, \overrightarrow{PQ}) = 0.$$

$$h(\vec{x}(s) + \vec{x}'(s)ds, \overrightarrow{PQ}) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} [(\vec{x}(s) + \vec{x}'(s)ds) \times \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PQ} \times (\vec{x}(s) + \vec{x}'(s)ds)] = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} [\vec{x}(s) \times \overrightarrow{PQ} + \vec{x}'(s)ds \times \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PQ} \times \vec{x}(s)$$

$$+ \overrightarrow{PQ} \times (\vec{x}'(s)ds)] = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{1}{2} [\vec{x}(s) \times \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PQ} \times \vec{x}(s)]}_{=h(\vec{x}(s), \overrightarrow{PQ})} + \frac{1}{2} ds [\vec{x}'(s) \times \overrightarrow{PQ}$$

$$+ \overrightarrow{PQ} \times \vec{x}'(s)] = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{h(\vec{x}(s), \overrightarrow{PQ})}_{=0} + h(\vec{x}'(s), \overrightarrow{PQ}) ds = 0$$

$$\Rightarrow h(\vec{x}'(s), \overrightarrow{PQ}) = 0$$

bulunur. \vec{PQ} vektörü striksiyon eğrisinin teğeti olduğundan $\vec{r}'(s) = \vec{PQ}$ alınabilir. Bu ifade yukarıda yerine yazılırsa

$$h(\vec{x}'(s), \vec{PQ}) = h(\vec{x}'(s), \vec{r}'(s)) = 0$$

olur. (4.1.9) bağıntısından striksiyon eğrisinin türevi alınırsa

$$\vec{r}'(s) = \vec{T}(s) + u'\vec{x}(s) + u\vec{x}'(s)$$

olur. $\vec{r}'(s)$ vektörü yukarıda yerine yazılırsa u parametresi

$$h(\vec{x}'(s), \vec{r}'(s)) = 0 \Rightarrow h(\vec{x}'(s), \vec{T}(s) + \underbrace{u'}_{=0}\vec{x}(s) + u\vec{x}'(s)) = 0$$

$$\Rightarrow h(\vec{x}'(s), \vec{T}(s) + u\vec{x}'(s)) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \left[\vec{x}'(s) \times \overline{(\vec{T}(s) + u\vec{x}'(s))} + (\vec{T}(s) + u\vec{x}'(s)) \times \overline{\vec{x}'(s)} \right] = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \left[\vec{x}'(s) \times \overline{\vec{T}(s)} + 2u\vec{x}'(s) \times \overline{\vec{x}'(s)} + \vec{T}(s) \times \overline{\vec{x}'(s)} \right] = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \left[\underbrace{\vec{x}'(s) \times \overline{\vec{T}(s)} + \vec{T}(s) \times \overline{\vec{x}'(s)}}_{h(\vec{x}'(s), \vec{T}(s))} + u \underbrace{\vec{x}'(s) \times \overline{\vec{x}'(s)}}_{\mathbf{N}(\vec{x}'(s))^2} \right] = 0$$

$$\Rightarrow u = -\frac{h(\vec{x}'(s), \vec{T}(s))}{\mathbf{N}(\vec{x}'(s))^2}$$

şeklinde bulunur. u nun bu değeri (4.1.9) bağıntısında yerine yazılırsa striksiyon eğrisinin denklemi

$$\vec{r}(s) = \vec{\alpha}(s) - \frac{h(\vec{x}'(s), \vec{T}(s))}{\mathbf{N}(\vec{x}'(s))^2} \vec{x}(s)$$

şeklinde elde edilir. Böylece şu teorem ispat edilmiş olur:

Teorem 4.1.6 $\varphi = \varphi(s, v)$ regle yüzeyinin striksiyon eğrisi

$$\vec{r}(s) = \vec{\alpha}(s) - \frac{h(\vec{x}'(s), \vec{T}(s))}{\mathbf{N}(\vec{x}'(s))^2} \vec{x}(s)$$

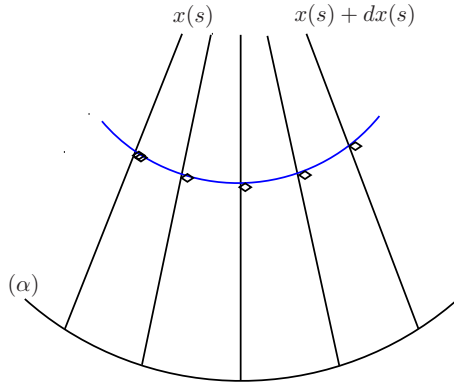
denklemleri ile verilir.

4.1.3 Kapalı Uzaysal Kuaterniyonik Regle Yüzeyin İntegral İnvaryantları

Bir $\vec{\varphi}(s, v) = \vec{\alpha}(s) + v\vec{x}(s)$ kapalı regle yüzeyi verilsin. Bu yüzeyin anadoğrularının ortogonal yörüngeleri için

$$h(\vec{x}(s), d\vec{\varphi}) = 0$$

yazılır (Şekil 4.4).



Şekil 4.4: Uzaysal Kuaterniyonik Regle Yüzeyin Ortogonal Yörünge Eğrisi

Buna göre dv parametresi

$$\begin{aligned}
h(\vec{x}(s), d\vec{\varphi}) = 0 &\Rightarrow h(\vec{x}(s), d\vec{\alpha}(s) + dv \vec{x}(s) + v d\vec{x}(s)) = 0 \\
&\Rightarrow h(\vec{x}(s), d\vec{\alpha}(s)) + dv h(\vec{x}(s), \vec{x}(s)) + v \underbrace{h(\vec{x}(s), d\vec{x}(s))}_{=0} = 0 \\
&\Rightarrow h(\vec{x}(s), d\vec{\alpha}(s)) + dv \underbrace{N(\vec{x}(s))^2}_{=1} = 0 \\
&\Rightarrow -h(\vec{x}(s), d\vec{\alpha}(s)) = dv
\end{aligned}$$

bulunur. (3.2.3) bağıntısından regle yüzeyin açılım uzunluğu

$$l_x = -h\left(\oint_{(\vec{\alpha})} d\vec{\alpha}(s), \vec{x}(s)\right) \quad (4.1.10)$$

şeklinde olur.

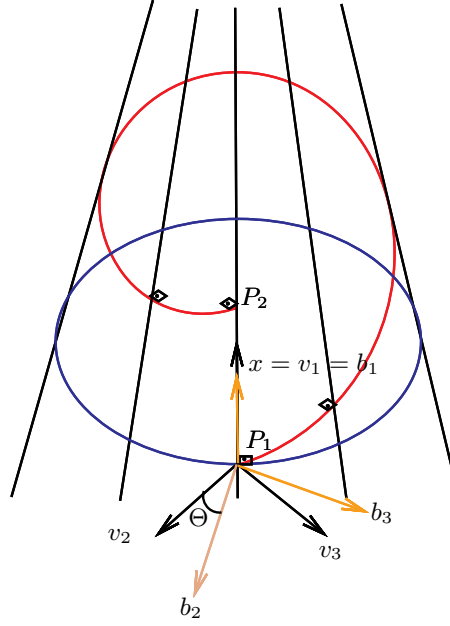
Şimdi yüzeyin açılım açısını hesaplayalım. $\varphi = \varphi(s, v)$ yüzeyinin anadoğrusu $\vec{v}_1(s)$, $\vec{v}_1(s)$ e dik olan vektör $\vec{v}_2(s)$ ve bu iki vektöre dik olan vektör de $\vec{v}_3(s) = \vec{v}_1(s) \wedge \vec{v}_2(s)$ ile gösterilsin. Bir periyot sonra $\vec{v}_1(s)$, $\vec{v}_2(s)$ ve $\vec{v}_3(s)$ vektörlerinin konumları sırasıyla $\vec{b}_1(s)$, $\vec{b}_2(s)$ ve $\vec{b}_3(s)$ ile gösterilsin. $\{\vec{b}_1(s), \vec{b}_2(s), \vec{b}_3(s)\}$ ortonormal sistemine göre $\vec{v}_1(s)$, \vec{v}_2 ve \vec{v}_3 vektörlerinin konumları

$$\vec{v}_1(s) = \vec{b}_1(s),$$

$$\vec{v}_2(s) = \vec{b}_2(s) \cos \Theta - \vec{b}_3(s) \sin \Theta,$$

$$\vec{v}_3(s) = \vec{b}_2(s) \sin \Theta + \vec{b}_3(s) \cos \Theta$$

şeklinde bulunur. Burada Θ açısı $\vec{v}_2(s)$ ile $\vec{b}_2(s)$ vektörleri arasındaki açıdır (Şekil 4.7).



Şekil 4.5: Uzaysal Kuaterniyonik Açılım Uzunluğu

$\vec{v}_2(s)$ ve $\vec{v}_3(s)$ vektörlerinin türevi alınırsa;

$$d\vec{v}_2(s) = d\vec{b}_2(s) \cos \Theta - d\vec{b}_3(s) \sin \Theta + \overbrace{(-\vec{b}_2(s) \sin \Theta - \vec{b}_3(s) \cos \Theta)}^{-\vec{v}_3(s)} d\Theta,$$

$$d\vec{v}_3(s) = d\vec{b}_2(s) \sin \Theta + d\vec{b}_3(s) \cos \Theta + \underbrace{(\vec{b}_2(s) \cos \Theta - \vec{b}_3(s) \sin \Theta)}_{\vec{v}_2(s)} d\Theta$$

olur. $\{\vec{v}_1(s), \vec{v}_2(s), \vec{v}_3(s)\}$ ortonormal sistemi $\{\vec{b}_1(s), \vec{b}_2(s), \vec{b}_3(s)\}$ ortonormal sistemine göre konumlandırıldığından

$$d\vec{b}_2(s) = 0 \quad \text{ve} \quad d\vec{b}_3(s) = 0$$

olur. Bu durumda

$$d\vec{v}_2(s) = -\vec{v}_3(s) d\Theta \quad \text{ve} \quad d\vec{v}_3(s) = \vec{v}_2(s) d\Theta$$

bulunur. Bu bağıntılardan $d\Theta$ hesap edilirse

$$h(d\vec{v}_2(s), \vec{v}_3(s)) = -h(\vec{v}_3(s), \vec{v}_3(s)) d\Theta \Rightarrow h(d\vec{v}_2(s), \vec{v}_3(s)) = -d\Theta$$

veya

$$h(d\vec{v}_3(s), \vec{v}_2(s)) = h(\vec{v}_2(s), \vec{v}_2(s)) d\Theta \Rightarrow h(d\vec{v}_3(s), \vec{v}_2(s)) = d\Theta$$

olur. Bu son denklemden integral alınırsa yüzeyin açılım açısı

$$\begin{aligned}
\lambda_x &= - \oint_{(\bar{\alpha})} d\Theta \\
&= \oint_{(\bar{\alpha})} h(d\vec{v}_2(s), \vec{v}_3(s)) \\
&= - \oint_{(\bar{\alpha})} h(d\vec{v}_3(s), \vec{v}_2(s))
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Diğer yandan (3.2.1) bağıntısından $d\vec{v}_2(s)$ ve $d\vec{v}_3(s)$ sırasıyla

$$\begin{aligned}
d\vec{v}_2(s) &= -w_3(s)\vec{v}_1(s) + w_1\vec{v}_3(s) \\
d\vec{v}_3(s) &= w_2(s)\vec{v}_1(s) - w_1(s)\vec{v}_2(s)
\end{aligned}$$

şeklinde yazılır. Bu bağıntılar $h(d\vec{v}_2(s), \vec{v}_3(s))$ ve $h(d\vec{v}_3(s), \vec{v}_2(s))$ ifadelerinde yerine yazılır ve gerekli hesaplamalar yapılırsa

$$\begin{aligned}
h(d\vec{v}_2(s), \vec{v}_3(s)) &= \frac{1}{2}(d\vec{v}_2(s) \times \vec{v}_3(s) + \vec{v}_3(s) \times d\vec{v}_2(s)) \\
&= \frac{1}{2}((-w_3(s)\vec{v}_1(s) + w_1(s)\vec{v}_3(s)) \times \vec{v}_3(s) + \vec{v}_3(s) \\
&\quad \times (-w_3(s)\vec{v}_1(s) + w_1(s)\vec{v}_3(s))) \\
&= \frac{1}{2}(-w_3(s)(\vec{v}_1(s) \times \vec{v}_3(s)) + w_1(s)(\vec{v}_3(s) \times \vec{v}_3(s)) \\
&\quad -w_3(s)(\vec{v}_3(s) \times \vec{v}_1(s)) + w_1(s)(\vec{v}_3(s) \times \vec{v}_3(s))) \\
&= \frac{1}{2}(2w_1(s)(\vec{v}_3(s) \times \vec{v}_3(s)) - w_3(s)(\vec{v}_1(s) \times \vec{v}_3(s)) \\
&\quad -w_3(s)(\vec{v}_3(s) \times \vec{v}_1(s)))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h(d\vec{v}_2(s), \vec{v}_3(s)) &= \frac{1}{2} (2w_1(s)(\vec{v}_3(s) \times \overline{\vec{v}_3(s)}) + w_3(s)(\vec{v}_1(s) \times \vec{v}_3(s)) \\
&\quad + w_3(s)(\vec{v}_3(s) \times \vec{v}_1(s))) \\
&= \frac{1}{2} [2w_1(s)(\vec{v}_3(s) \times \overline{\vec{v}_3(s)}) + w_3(s)(-\underbrace{\langle \vec{v}_1(s), \vec{v}_3(s) \rangle}_0 + \underbrace{\vec{v}_1(s) \wedge \vec{v}_3(s)}_{-\vec{v}_2(s)}) \\
&\quad + w_3(s)(-\underbrace{\langle \vec{v}_3(s), \vec{v}_1(s) \rangle}_0 + \underbrace{\vec{v}_3(s) \wedge \vec{v}_1(s)}_{\vec{v}_2(s)})] \\
&= w_1(s),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-h(d\vec{v}_3(s), \vec{v}_2(s)) &= -\frac{1}{2} (d\vec{v}_3(s) \times \overline{\vec{v}_2(s)} + \vec{v}_2(s) \times \overline{d\vec{v}_3(s)}), \\
&= -\frac{1}{2} ((w_2(s)\vec{v}_1(s) - w_1(s)\vec{v}_2(s)) \times \overline{\vec{v}_2(s)}) \\
&\quad + \vec{v}_2(s) \times \overline{(w_2(s)\vec{v}_1(s) - w_1(s)\vec{v}_2(s))})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-h(d\vec{v}_3(s), \vec{v}_2(s)) &= -\frac{1}{2}(w_2(s)(\vec{v}_1(s) \times \overline{v}_2(s)) - w_1(s)(\vec{v}_2(s) \times \overline{v}_2(s))) \\
&+ w_2(s)(\vec{v}_2(s) \times \overline{v}_1(s)) - w_1(s)(\vec{v}_2(s) \times \overline{v}_2(s)) \\
&= -\frac{1}{2}\left(-w_2(s)\underbrace{(-\langle \vec{v}_1(s), \vec{v}_2(s) \rangle)}_0 + \underbrace{\vec{v}_1(s) \wedge \vec{v}_2(s)}_{\vec{v}_3(s)} + w_1(s)(\vec{v}_2(s) \times \vec{v}_2(s))\right. \\
&\quad \left.- w_2(s)\underbrace{(-\langle \vec{v}_2(s), \vec{v}_1(s) \rangle)}_0 + \underbrace{\vec{v}_2(s) \wedge \vec{v}_1(s)}_{-\vec{v}_3(s)} + w_1(s)(\vec{v}_2(s) \times \vec{v}_2(s))\right) \\
&= -\frac{1}{2}(2w_1(s)(\vec{v}_2(s) \times \vec{v}_2(s))) \\
&= w_1(s)
\end{aligned}$$

bulunur. Bu ifadeler λ_x bağıntısında yerine yazılırsa açılım açısı

$$\lambda_x = \oint_{(\vec{\alpha})} h(d\vec{v}_2(s), \vec{v}_3(s)) = \oint_{(\vec{\alpha})} w_1(s) \quad (4.1.11)$$

olur. Diğer taraftan \vec{d} Steiner dönme vektörü için

$$\vec{d}(s) = \vec{v}_1(s) \oint_{(\vec{\alpha})} w_1(s) + \vec{v}_2(s) \oint_{(\vec{\alpha})} w_2(s) + \vec{v}_3(s) \oint_{(\vec{\alpha})} w_3(s)$$

yazılır.

$$h(\vec{d}(s), \vec{x}(s)) = h(\vec{d}(s), \vec{v}_1(s))$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
h(\vec{d}, \vec{v}_1(s)) &= \frac{1}{2}(\vec{d}(s) \times \vec{v}_1(s) + \vec{v}_1(s) \times \vec{d}(s)) \\
&= \frac{1}{2} \left[\left(\vec{v}_1(s) \oint_{(\vec{\alpha})} w_1(s) + \vec{v}_2 \oint_{(\vec{\alpha})} w_2(s) + \vec{v}_3 \oint_{(\vec{\alpha})} w_3(s) \right) \times \vec{v}_1(s) \right. \\
&\quad \left. + \vec{v}_1(s) \times \left(\overline{\vec{v}_1(s) \oint_{(\vec{\alpha})} w_1(s) + \vec{v}_2 \oint_{(\vec{\alpha})} w_2(s) + \vec{v}_3 \oint_{(\vec{\alpha})} w_3(s)} \right) \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[(\vec{v}_1(s) \times \vec{v}_1(s)) \oint_{(\vec{\alpha})} w_1(s) + (\vec{v}_2 \times \vec{v}_1(s)) \oint_{(\vec{\alpha})} w_2(s) \right. \\
&\quad \left. + (\vec{v}_3(s) \times \vec{v}_1(s)) \oint_{(\vec{\alpha})} w_3(s) + (\vec{v}_1(s) \times \vec{v}_1(s)) \oint_{(\vec{\alpha})} w_1(s) \right. \\
&\quad \left. + (\vec{v}_1(s) \times \vec{v}_2) \oint_{(\vec{\alpha})} w_2(s) + (\vec{v}_1(s) \times \vec{v}_3) \oint_{(\vec{\alpha})} w_3(s) \right] \\
&= (\vec{v}_1(s) \times \vec{v}_1(s)) \oint_{(\vec{\alpha})} w_1(s) \\
&= -(\vec{v}_1(s) \times \vec{v}_1(s)) \oint_{(\vec{\alpha})} w_1(s) \\
&= \oint_{(\vec{\alpha})} w_1(s) \tag{4.1.12}
\end{aligned}$$

bulunur. (4.1.11) ve (4.1.12) bağıntılarından regle yüzeyin (3.2.2) de verilen λ_x açılım açısının kuaterniyonik ifadesi

$$\lambda_x = h(\vec{d}(s), \vec{x}(s))$$

şeklinde bulunur. Steiner öteleme vektörü

$$V = \oint_{(\vec{\alpha})} d\alpha(s)$$

şeklinde yazıldığından [15] l_x açılım uzunluğu,

$$\begin{aligned} l_x &= \oint_{(\vec{\alpha})} h(d\vec{\alpha}(s), \vec{x}(s)) \\ &= h\left(\oint_{(\vec{\alpha})} d\vec{\alpha}(s), \vec{x}(s)\right) \end{aligned} \quad (4.1.13)$$

veya

$$l_x = h(\vec{V}(s), \vec{x}(s))$$

şeklinde elde edilir. Böylece şu teorem ispat edilmiş olur.

Teorem 4.1.7 $\varphi = \varphi(s, v)$ kapalı regle yüzeyinin açılım uzunluğu ve açılım açısının kuaterniyonik ifadeleri sırasıyla,

$$\begin{aligned} l_x &= h(\vec{V}(s), \vec{x}(s)) \\ \lambda_x &= h(\vec{d}(s), \vec{x}(s)), \end{aligned} \quad (4.1.14)$$

şeklinde verilir.

$\varphi = \varphi(s, v)$ uzaysal kuaterniyonik regle yüzeyinin dayanak eğrisinin anadoğruları eğrinin $\{\vec{T}(s), \vec{N}(s), \vec{B}(s)\}$ Frenet çatısı olsun. Bu çatıya bağlı Darboux vektörü $\vec{W}(s)$ ile gösterilirse bu vektör

$$\vec{T}'(s) = \vec{W}(s) \times \vec{T}(s)$$

$$\vec{N}'(s) = \vec{W}(s) \times \vec{N}(s)$$

$$\vec{B}'(s) = \vec{W}(s) \times \vec{B}(s)$$

bağıntısını sağlar. $\vec{W}(s)$ Darboux vektörünü

$$\vec{W}(s) = t_1(s)\vec{T}(s) + t_2(s)\vec{N}(s) + t_3(s)\vec{B}(s) \quad (4.1.15)$$

şeklinde alalım. Her iki taraf $\vec{T}(s)$ vektörü ile sağdan kuaterniyon çarpılırsa

$$\begin{aligned} \vec{W}(s) \times \vec{T}(s) &= -t_1(s) + t_2(s)(\vec{N}(s) \times \vec{T}(s)) + t_3(s)(\vec{B}(s) \times \vec{T}(s)) \\ &= -t_1(s) - t_2(s)\vec{B}(s) + t_3(s)\vec{N}(s) \end{aligned} \quad (4.1.16)$$

olur. Diğer taraftan (3.4.2) bağıntısından

$$\begin{aligned} \vec{W}(s) \times \vec{T}(s) &= -\langle \vec{W}(s), \vec{T}(s) \rangle + \vec{W}(s) \wedge \vec{T}(s) \\ &= -t_1(s) + \vec{W}(s) \wedge \vec{T}(s) = -t_1(s) + d\vec{T}(s) \\ &= -t_1(s) + \kappa(s)\vec{N}(s) \end{aligned} \quad (4.1.17)$$

yazılır. (4.1.16) ve (4.1.17) ifadelerinden katsayılar

$$t_2(s) = 0, \quad t_3(s) = \kappa(s)$$

şeklinde bulunur. Benzer yöntem $\vec{N}(s)$ vektörü için de yapılırsa

$$\begin{aligned} \vec{W}(s) \times \vec{N}(s) &= t_1(s)(\vec{T}(s) \times \vec{N}(s)) + t_2(s)(\vec{N}(s) \times \vec{N}(s)) + t_3(s)(\vec{B}(s) \times \vec{N}(s)) \\ &= t_1(s)\vec{B}(s) - t_2(s) - t_3(s)\vec{T}(s) \end{aligned} \quad (4.1.18)$$

olur. Diğer yandan $\vec{W}(s) \times \vec{N}(s)$ kuaterniyon çarpımı yapılırsa

$$\begin{aligned} \vec{W}(s) \times \vec{N}(s) &= -\langle \vec{W}(s), \vec{N}(s) \rangle + \vec{W}(s) \wedge \vec{N}(s) \\ &= -t_2(s) + d\vec{N}(s) \\ &= -t_2(s) - \kappa(s)\vec{T}(s) + \tau(s)\vec{B}(s) \end{aligned} \quad (4.1.19)$$

bulunur. (4.1.18) ve (4.1.19) bağıntılarından katsayılar

$$t_1(s) = \tau(s), \quad t_3(s) = \kappa(s)$$

şeklinde bulunur. Bulunan katsayılar (4.1.15) bağıntısında yerine yazılırsa $\vec{W}(s)$ vektörü

$$\vec{W}(s) = \tau(s)\vec{T}(s) + \kappa(s)\vec{B}(s)$$

olur. $\vec{N}(s)$ ile $\vec{N}'(s)$ vektörleri kuaterniyonik olarak çarpılırsa

$$\begin{aligned}\vec{N}(s) \times \vec{N}'(s) &= \vec{N}(s) \times (-\kappa(s)\vec{T}(s) + \tau(s)\vec{B}(s)) \\ &= \tau(s)\vec{T}(s) + \kappa(s)\vec{B}(s)\end{aligned}$$

olur. Buna yazılışa göre Darboux vektörü

$$\vec{W}(s) = \vec{N}(s) \times \vec{N}'(s)$$

şeklinde ifade edilir.

4.1.4 Teğet Vektörün Çizdiği Uzaysal Kuaterniyonik Regle Yüzeyin İntegral İnvaryantları

$\varphi = \varphi(s, v)$ yüzeyinde anadoğru olarak α kuaterniyonik eğrisinin teğet vektörü alınırsa yüzeyin parametrik denklemi

$$\vec{\varphi}_T(s, v) = \vec{\alpha}(s) + v\vec{T}(s)$$

şeklinde yazılır. Bu yüzeyin dağılma parametresinin kuaterniyonik ifadesi

$$P_T = \frac{h(\vec{T}(s) \times \vec{T}'(s), \vec{\alpha}'(s))}{\mathbf{N}(\vec{T}'(s))^2}$$

şeklinde dir. Pay kısmı için gerekli hesaplamalar yapılırsa

$$\begin{aligned}
h(\vec{T}(s) \times \vec{T}'(s), \vec{T}(s)) &= \frac{1}{2} \left((\vec{T}(s) \times \vec{T}'(s)) \times \vec{T}(s) + \vec{T}(s) \times (\overline{\vec{T}(s) \times \vec{T}'(s)}) \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(- (\vec{T}(s) \times \vec{T}'(s)) \times \vec{T}(s) + \vec{T}(s) \times (\overline{\vec{T}'(s)} \times \overline{\vec{T}(s)}) \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(- (\vec{T}(s) \times \vec{T}'(s)) \times \vec{T}(s) - \vec{T}(s) \times (\overline{\vec{T}'(s)} \times \vec{T}(s)) \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(- (\vec{T}(s) \times \kappa(s) \vec{N}(s)) \times \vec{T}(s) + \vec{T}(s) \times (\kappa(s) \vec{N}(s) \times \vec{T}(s)) \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(- \kappa(s) (\vec{B}(s) \times \vec{T}(s)) - \kappa(s) (\vec{T}(s) \times \vec{B}(s)) \right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

olur. Bu ifade yerine yazılırsa P_T dağılma parametresi

$$P_T = 0$$

şeklinde bulunur. φ_T yüzeyinin açılım açısı λ_T ile gösterilsin. (4.1.14) bağıntısından λ_T açılım açısının kuaterniyonik ifadesi

$$\begin{aligned}
\lambda_T &= h(\vec{d}(s), \vec{T}(s)) \\
&= \frac{1}{2} \left(\vec{d}(s) \times \vec{T}(s) + \vec{T}(s) \times \vec{d}(s) \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(-\vec{d}(s) \times \vec{T}(s) + \vec{T}(s) \times \vec{d}(s) \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(-(\vec{T}(s) \oint \tau(s) ds + \vec{B}(s) \oint \kappa(s) ds) \times \vec{T}(s) \right. \\
&\quad \left. + \vec{T}(s) \times (-\vec{T}(s) \oint \tau(s) ds - \vec{B}(s) \oint \kappa(s) ds) \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(-(\vec{T}(s) \times \vec{T}(s)) \oint \tau(s) ds - \underbrace{(\vec{B}(s) \times \vec{T}(s))}_{\vec{N}(s)} \oint \kappa(s) ds \right. \\
&\quad \left. - (\vec{T}(s) \times \vec{T}(s)) \oint \tau(s) ds - \underbrace{(\vec{T}(s) \times \vec{B}(s))}_{-\vec{N}(s)} \oint \kappa(s) ds \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\oint \tau(s) ds - \vec{N}(s) \oint \kappa(s) ds + \oint \tau(s) ds + \vec{N}(s) \oint \kappa(s) ds \right) \\
&= \oint \tau(s) ds
\end{aligned}$$

şeklinde olur. Bu yüzeyin açılım uzunluğu l_T ile gösterilsin. (4.1.13) bağıntısından l_T açılım uzunluğunun kuaterniyonik ifadesi

$$\begin{aligned}
l_T &= h(\oint d\vec{\alpha}(s), \vec{T}(s)) \\
&= h(\oint \vec{T}(s) ds, \vec{T}(s)) \\
&= \frac{1}{2} \left(\vec{T}(s) \oint ds \times \vec{T}(s) + \vec{T}(s) \times \overline{\vec{T}(s)} \oint ds \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(-\vec{T}(s) \oint ds \times \vec{T}(s) - \vec{T}(s) \times \vec{T}(s) \oint ds \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(-(\vec{T}(s) \times \vec{T}(s)) \oint ds - (\vec{T}(s) \times \vec{T}(s)) \oint ds \right) \\
&= \oint ds
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Böylece şu sonuç verilebilir:

Sonuç 4.1.1 Herhangi bir eğrinin teğet vektörünün oluşturduğu kapalı regle yüzey ile uzaysal kuaterniyonik eğrinin teğet vektörünün oluşturduğu kapalı regle yüzeyin dağılma parametresi, açılım açısı ve açılım uzunluğu eşittir.

4.1.5 Asli Normal Vektörün Çizdiği Uzaysal Kuaterniyonik Regle Yüzeyin İntegral İnvaryantları

$\varphi = \varphi(s, v)$ yüzeyinde anadoğru olarak α kuaterniyonik eğrisinin asli normal vektörü alınırsa yüzeyin parametrik denklemi

$$\vec{\varphi}_N(s, v) = \vec{\alpha}(s) + v\vec{N}(s)$$

şeklinde yazılır. Bu yüzeyin dağılma parametresinin kuaterniyonik ifadesi

$$P_N = \frac{h(\vec{N}(s) \times \vec{N}'(s), \vec{\alpha}'(s))}{\mathbf{N}(\vec{N}'(s))^2}$$

şeklindedir. Pay ve paydadaki ifadeler ayrı ayrı hesaplanırsa

$$\begin{aligned} h(\vec{N}(s) \times \vec{N}'(s), \vec{T}(s)) &= \frac{1}{2} \left((\vec{N}(s) \times \vec{N}'(s)) \times \vec{T}(s) + \vec{T}(s) \times \overline{(\vec{N}(s) \times \vec{N}'(s))} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(-(\vec{N}(s) \times \vec{N}'(s)) \times \vec{T}(s) + \vec{T}(s) \times (\overline{\vec{N}'(s)} \times \overline{\vec{N}(s)}) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(-(\vec{N}(s) \times (-\kappa(s)\vec{T}(s) + \tau(s)B)) \times \vec{T}(s) \right. \\ &\quad \left. + \vec{T}(s) \times \overline{((- \kappa(s)\vec{T}(s) + \tau(s)B) \times \vec{N}(s))} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h(\vec{N}(s) \times \vec{N}'(s), \vec{T}(s)) &= \frac{1}{2} \left((\kappa(s)(\vec{N}(s) \times \vec{T}'(s)) - \tau(s)(\vec{N}(s) \times \vec{B}(s))) \times \vec{T}(s) \right. \\
&\quad \left. - \vec{T}(s) \times ((\kappa(s)\vec{T}'(s) - \tau(s)\vec{B}(s)) \times \vec{N}(s)) \right) \\
&= \frac{1}{2} \left((\kappa(s)(\vec{N}(s) \times \vec{T}'(s)) \times \vec{T}(s) - \tau(s) \underbrace{(\vec{N}(s) \times \vec{B}(s))}_{\vec{T}(s)}) \times \vec{T}(s) \right. \\
&\quad \left. - (\kappa(s)(\vec{T}'(s) \times \vec{T}(s)) - \tau(s)(\vec{T}'(s) \times \vec{B}(s))) \times \vec{N}(s) \right) \\
&= \frac{1}{2} (-\kappa(s)\vec{N}(s) + \tau(s) + \kappa(s)\vec{N}(s) + \tau(s) \\
&\quad + \tau(s)\vec{T}(s) \times \underbrace{(\vec{B}(s) \times \vec{N}(s))}_{-\vec{T}(s)}) \\
&= \tau(s)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\mathbf{N}(\vec{N}'(s))^2 &= h(\vec{N}'(s), \vec{N}'(s)) \\
&= \frac{1}{2} \left(\vec{N}'(s) \times \overline{\vec{N}'(s)} + \vec{N}'(s) \times \overline{\vec{N}'(s)} \right) \\
&= \vec{N}'(s) \times \overline{\vec{N}'(s)} \\
&= (-\kappa(s)\vec{T}(s) + \tau(s)\vec{B}(s)) \times (\kappa(s)\vec{T}(s) - \tau(s)\vec{B}(s)) \\
&= \kappa(s)^2 + \kappa(s)\tau(s)(\vec{T}(s) \times \vec{B}(s)) + \kappa(s)\tau(s)(\vec{B}(s) \times \vec{T}(s)) + \tau(s)^2 \\
&= \kappa(s)^2 + \tau(s)^2
\end{aligned}$$

olur. Bulunan bu değerler P_N de yerine yazılırsa dağılma parametresi

$$P_N = \frac{h(\vec{N}(s) \times \vec{N}'(s), \vec{\alpha}'(s))}{\mathbf{N}(\vec{N}'(s))^2} = \frac{\tau(s)}{\kappa(s)^2 + \tau(s)^2}$$

şeklinde bulunur. φ_N yüzeyinin açılım açısı λ_N ile gösterilsin. (4.1.14) bağıntısından λ_N açılım açısının kuaterniyonik ifadesi

$$\begin{aligned}
\lambda_N &= h(\vec{d}(s), \vec{N}(s)) \\
&= \frac{1}{2} \left(\vec{d}(s) \times \vec{N}(s) + \vec{N}(s) \times \vec{d}(s) \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(-(\vec{T}(s) \oint \tau(s) ds + \vec{B}(s) \oint \kappa(s) ds) \right. \\
&\quad \left. \times \vec{N}(s) + \vec{N}(s) \times (-\vec{T}(s) \oint \tau(s) ds - \vec{B}(s) \oint \kappa(s) ds) \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(-\underbrace{(\vec{T}(s) \times \vec{N}(s))}_{\vec{B}(s)} \oint \tau(s) ds - \underbrace{(\vec{B}(s) \times \vec{N}(s))}_{-\vec{T}(s)} \oint \kappa(s) ds \right. \\
&\quad \left. - \underbrace{(\vec{N}(s) \times \vec{T}(s))}_{-\vec{B}(s)} \oint \tau(s) ds - \underbrace{(\vec{N}(s) \times \vec{B}(s))}_{\vec{T}(s)} \oint \kappa(s) ds \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(-\vec{B}(s) \oint \tau(s) ds + \vec{T}(s) \oint \kappa(s) ds + \vec{B}(s) \oint \tau(s) ds - \vec{T}(s) \oint \kappa(s) ds \right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

şeklinde olur. Bu yüzeyin açılım uzunluğu l_N ile gösterilsin. (4.1.13) bağıntısından l_N açılım uzunluğunun kuaterniyonik ifadesi

$$\begin{aligned}
l_N &= h\left(\oint d\vec{\alpha}(s), \vec{N}(s)\right) \\
&= h\left(\oint \vec{T}(s)ds, \vec{N}(s)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\vec{T}(s) \oint ds \times \vec{N}(s) + \vec{N}(s) \times \overline{\vec{T}(s) \oint ds}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(-\underbrace{(\vec{T}(s) \times \vec{N}(s))}_{\vec{B}(s)} \oint ds - \underbrace{(\vec{N}(s) \times \vec{T}(s))}_{-B} \oint ds\right) \\
&= \frac{1}{2}(-\vec{B}(s) \oint ds + \vec{B}(s) \oint ds) \\
&= 0
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Böylece şu sonuç verilebilir:

Sonuç 4.1.2 Herhangi bir eğrinin asli normal vektörünün oluşturduğu kapalı regle yüzey ile uzaysal kuarterniyonik eğrinin asli normal vektörünün oluşturduğu kapalı regle yüzeyin dağılma parametresi, açılım açısı ve açılım uzunluğu eşittir.

4.1.6 Binormal Vektörün Çizdiği Uzaysal Kuaterniyonik Regle Yüzeyin İntegral İnvaryantları

$\varphi = \varphi(s, v)$ yüzeyinde anadoğru olarak α kuaterniyonik eğrisinin binormal vektörü alınırsa yüzeyin parametrik denklemi

$$\vec{\varphi}_B(s, v) = \vec{\alpha}(s) + v\vec{B}(s)$$

şeklinde yazılır. Bu yüzeyin dağılma parametresinin kuaterniyonik ifadesi

$$P_B = \frac{h(\vec{B}(s) \times \vec{B}'(s), \vec{\alpha}'(s))}{\mathbf{N}(\vec{B}'(s))^2}$$

şeklindedir. Pay ve paydadaki ifadeler ayrı ayrı hesaplanırsa

$$\begin{aligned} h(\vec{B}(s) \times \vec{B}'(s), \vec{T}(s)) &= \frac{1}{2} \left((\vec{B}(s) \times \vec{B}'(s)) \times \vec{T}(s) + \vec{T}(s) \times \overline{(\vec{B}(s) \times \vec{B}'(s))} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(-(\vec{B}(s) \times \vec{B}'(s)) \times T + \vec{T}(s) \times (\overline{\vec{B}'(s)} \times \overline{\vec{B}(s)}) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(-(\vec{B}(s) \times (-\tau(s)\vec{N}(s))) \times \vec{T}(s) + \vec{T}(s) \times (\overline{\vec{B}'(s)} \times \overline{\vec{B}(s)}) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\tau(s) \underbrace{(\vec{B}(s) \times \vec{N}(s))}_{-\vec{T}(s)} \times \vec{T}(s) - \vec{T}(s) \times (\tau(s)\vec{N}(s) \times \vec{B}(s)) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h(\vec{B}(s) \times \vec{B}'(s), \vec{T}(s)) &= \frac{1}{2} \left(\tau(s) - \tau(s) \vec{T}(s) \times \underbrace{(\vec{N}(s) \times \vec{B}(s))}_{\vec{T}(s)} \right) \\
&= \tau(s)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\mathbf{N}(\vec{B}'(s))^2 &= h(\vec{B}'(s), \vec{B}'(s)) \\
&= \vec{B}'(s) \times \overline{\vec{B}'(s)} \\
&= -\tau(s) \vec{N}(s) \times \tau(s) \vec{N}(s) \\
&= \tau(s)^2
\end{aligned}$$

olur. Bulunan bu değerler P_B de yerine yazılırsa dağılma parametresi

$$P_B = \frac{h(\vec{B}(s) \times \vec{B}'(s), \vec{\alpha}'(s))}{\mathbf{N}(\vec{B}'(s))^2} = \frac{1}{\tau(s)}$$

şeklinde bulunur. Burada $\tau(s) \neq 0$. φ_B yüzeyinin açılım açısı λ_B ile gösterilsin. (4.1.14) bağıntısından λ_B açılım açısının kuaterniyonik ifadesi

$$\begin{aligned}
\lambda_B &= h(\vec{d}(s), \vec{B}(s)) \\
&= \frac{1}{2} \left(\vec{d}(s) \times \vec{B}(s) + \vec{B}(s) \times \vec{d}(s) \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(-\vec{d}(s) \times \vec{B}(s) + \vec{B}(s) \times \vec{d}(s) \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(-(\vec{T}(s) \oint \tau(s) ds + \vec{B}(s) \oint \kappa(s) ds) \times \vec{B}(s) + \vec{B}(s) \right. \\
&\quad \left. \times (-\vec{T}(s) \oint \tau(s) ds - \vec{B}(s) \oint \kappa(s) ds) \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(-\underbrace{(\vec{T}(s) \times \vec{B}(s))}_{-\vec{B}(s)} \oint \tau(s) ds - (\vec{B}(s) \times \vec{B}(s)) \oint \kappa(s) ds \right. \\
&\quad \left. - \underbrace{(\vec{B}(s) \times \vec{T}(s))}_{\vec{B}(s)} \oint \tau(s) ds - (\vec{B}(s) \times \vec{B}(s)) \oint \kappa(s) ds \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\vec{B}(s) \oint \tau(s) ds + \oint \kappa(s) ds - \vec{B}(s) \oint \tau(s) ds + \oint \kappa(s) ds \right) \\
&= \oint \kappa(s) ds
\end{aligned}$$

şeklinde olur. Bu yüzeyin açılım uzunluğu l_B ile gösterilsin. (4.1.13) bağıntısından l_B açılım uzunluğunun kuaterniyonik ifadesi

$$\begin{aligned}
l_B &= h\left(\oint d\vec{\alpha}(s), \vec{B}(s)\right) \\
&= h\left(\oint \vec{T}(s) ds, \vec{B}(s)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\vec{T}(s) \oint ds \times \vec{B}(s) + \vec{B}(s) \times \overline{\vec{T}(s) \oint ds}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(-\underbrace{(\vec{T}(s) \times \vec{B}(s))}_{-\vec{N}(s)} \oint ds - \underbrace{(\vec{B}(s) \times \vec{T}(s))}_{\vec{N}(s)} \oint ds\right) \\
&= \frac{1}{2}(\vec{N}(s) \oint ds - \vec{N}(s) \oint ds) \\
&= 0
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Böylece şu sonuç verilebilir:

Sonuç 4.1.3 Herhangi bir eğrinin binormal vektörünün oluşturduğu kapalı regle yüzey ile uzaysal kuaterniyonik eğrinin binormal vektörünün oluşturduğu kapalı regle yüzeyin dağılma parametresi, açılım açısı ve açılım uzunluğu eşittir.

4.2 Regle Yüzeyin Dual Uzaysal Kuaterniyonik İfadesi

Study tekabül prensibine göre birim dual kürenin dual noktaları \mathbb{R}^3 de yönlü doğrulara birebir karşılık gelir ve bu doğrular ailesi bir regle yüzey oluşturur. Bu bölümde dayanak eğrisi uzaysal kuaterniyonik alındığında bu eğriden elde edilen Frenet vektörlerin oluşturduğu kapalı regle yüzeylerin dual ifadeleri verildi. Daha sonra elde edilen yüzeylerin integral invaryantları kuaterniyonik olarak yeniden hesaplandı.

Dayanak eğrisi uzaysal kuaterniyonik olan bir eğri üzerinde hareket eden $\vec{x}(s)$ doğrusunun meydana getirdiği kapalı regle yüzeyin denklemi

$$\vec{\varphi}(s, v) = \vec{\alpha}(s) + v\vec{x}(s) \quad (4.2.1)$$

şeklinde yazılır. $\vec{x}^*(s)$ vektörel moment vektörünün kuaterniyonik ifadesi $\vec{\alpha}(s)$ ile $\vec{x}(s)$ in kuaterniyon çarpımından

$$\begin{aligned} \vec{\alpha}(s) \times \vec{x}(s) &= \underbrace{-\langle \vec{\alpha}(s), \vec{x}(s) \rangle}_{=0} + \underbrace{\vec{\alpha}(s) \wedge \vec{x}(s)}_{\vec{x}^*(s)} \\ \vec{x}^*(s) &= \vec{\alpha}(s) \times \vec{x}(s) \end{aligned}$$

şeklinde bulunur. $\vec{x}(s)$ ile $\vec{x}^*(s)$ vektörlerinin kuaterniyon çarpımı yapılırsa $\vec{x}^*(s) \times \vec{x}(s)$

$$\begin{aligned} \vec{x}^*(s) = \vec{\alpha}(s) \times \vec{x}(s) &\Rightarrow \vec{x}^*(s) \times \vec{x}(s) = \vec{\alpha}(s) \times \underbrace{(\vec{x}(s) \times \vec{x}(s))}_{=-1} \\ &\Rightarrow \vec{x}^*(s) \times \vec{x}(s) = -\alpha(s) \end{aligned}$$

olur. (3.4.2) bağıntısından $\vec{x}(s) \times \vec{x}^*(s)$

$$\begin{aligned}
\vec{x}(s) \times \vec{x}^*(s) &= -\langle \vec{x}(s), \vec{x}^*(s) \rangle + \vec{x}(s) \wedge \vec{x}^*(s) \\
&= \vec{x}(s) \wedge \vec{x}^*(s)
\end{aligned}$$

olur. $\vec{x}(s) \times \vec{x}^*(s)$ ve $\vec{x}^*(s) \times \vec{x}(s)$ yazılışlarından

$$\vec{x}(s) \times \vec{x}^*(s) = -\vec{x}^*(s) \times \vec{x}(s) = \alpha$$

bulunur. Bu ifade (4.2.1) yüzey denkleminde yerine yazılırsa regle yüzeyin dual uzaysal kuaterniyonik ifadesi

$$\vec{\varphi}(s, v) = \vec{x}(s) \times \vec{x}^*(s) + v\vec{x}(s) \quad (4.2.2)$$

şeklinde bulunur. Bu yüzey birim dual küre üzerinde bir dual eğridir. $\vec{V}_1(s) = \vec{X}(s)$ olmak üzere

$$\vec{V}_1(s) = \vec{X}(s), \vec{V}_2(s) = \frac{\vec{X}'(s)}{\|\vec{X}(s)\|}, \vec{V}_3(s) = \vec{V}_1(s) \wedge \vec{V}_2(s)$$

şeklinde alalım. Bu vektörler ile bunların türev vektörleri arasında

$$\begin{bmatrix} d\vec{V}_1(s) \\ d\vec{V}_2(s) \\ d\vec{V}_3(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \Psi_3(s) & -\Psi_2(s) \\ -\Psi_3(s) & 0 & \Psi_1(s) \\ \Psi_2(s) & -\Psi_1(s) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{V}_1(s) \\ \vec{V}_2(s) \\ \vec{V}_3(s) \end{bmatrix} \quad (4.2.3)$$

bağıntısı vardır [15]. Bu vektörlere bağlı ani dual Pfaff vektörü $\Psi(s) = \psi(s) + \varepsilon\psi^*(s)$ ile gösterilirse bu vektör

$$\Psi(s) = \Psi_1(s)\vec{V}_1(s) + \Psi_2(s)\vec{V}_2(s) + \Psi_3(s)\vec{V}_3(s)$$

şeklinde yazılır. Dual Steiner vektörü $\vec{D}(s)$ ile gösterilirse bu vektör

$$\begin{aligned} \vec{D}(s) &= \oint \Psi(s) \\ &= \vec{V}_1(s) \oint \Psi_1(s) + \vec{V}_2(s) \oint \Psi_2(s) + \vec{V}_3(s) \oint \Psi_3(s) \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

şeklinde yazılır. ID-modülde iki ortonormal çatı

$$\{\vec{V}_1(s), \vec{V}_2(s), \vec{V}_3(s)\}, \{\vec{N}_1(s), \vec{N}_2(s), \vec{N}_3(s)\}$$

alınırsa bu çatılar arasında

$$\begin{bmatrix} \vec{V}_1(s) \\ \vec{V}_2(s) \\ \vec{V}_3(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \cos \Phi & -\sin \Phi & 0 \\ \sin \Phi & \cos \Phi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{N}_1(s) \\ \vec{N}_2(s) \\ \vec{N}_3(s) \end{bmatrix}$$

bağıntısı vardır [15]. Burada türev alınıp gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$d\vec{V}_2(s) = -d\Phi\vec{V}_3(s), \quad d\vec{V}_3(s) = d\Phi\vec{V}_2(s).$$

bulunur. Buradan dual kuaterniyonik iç çarpım yapılırsa

$$d\Phi = -H(d\vec{V}_2(s), \vec{V}_3(s)) = H(\vec{V}_2(s), d\vec{V}_3(s))$$

olur. (4.2.3) bağıntısından $d\vec{V}_2(s)$ ve $d\vec{V}_3(s)$ ifadeleri çekilip ve $d\Phi$ ifadesinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
H(d\vec{V}_2(s), \vec{V}_3(s)) &= \frac{1}{2}(d\vec{V}_2(s) \times \overline{\vec{V}_3(s)} + \vec{V}_3(s) \times d\overline{\vec{V}_2(s)}) \\
&= \frac{1}{2}((-\Psi_3(s)\vec{V}_1(s) + \Psi_1(s)\vec{V}_3(s)) \times \overline{\vec{V}_3(s)} \\
&\quad + \vec{V}_3(s) \times \overline{(-\Psi_3(s)\vec{V}_1(s) + \Psi_1(s)\vec{V}_3(s))}) \\
&= \frac{1}{2}(-\Psi_3(s)(\vec{V}_1(s) \times \overline{\vec{V}_3(s)} + \Psi_1(s)(\vec{V}_3(s) \times \overline{\vec{V}_3(s)}) \\
&\quad - \Psi_3(s)(\vec{V}_3(s) \times \overline{\vec{V}_1(s)}) + \Psi_1(s)(\vec{V}_3(s) \times \overline{\vec{V}_3(s)})) \\
&= \frac{1}{2}(2\Psi_1(s)(\vec{V}_3(s) \times \overline{\vec{V}_3(s)}) - \Psi_3(s)(\vec{V}_1(s) \times \overline{\vec{V}_3(s)}) \\
&\quad - \Psi_3(s)(\vec{V}_3(s) \times \overline{\vec{V}_1(s)})) \\
&= \frac{1}{2}(2\Psi_1(s)(\vec{V}_3(s) \times \overline{\vec{V}_3(s)}) + \Psi_3(s)(\vec{V}_1(s) \times \vec{V}_3(s)) \\
&\quad + \Psi_3(s)(\vec{V}_3(s) \times \vec{V}_1(s))) \\
&= -\frac{1}{2}[2\Psi_1(s)(\vec{V}_3(s) \times \overline{\vec{V}_3(s)}) + \Psi_3(s)(-\underbrace{\langle \vec{V}_1(s), \vec{V}_3(s) \rangle}_0 \\
&\quad + \underbrace{\vec{V}_1(s) \wedge \vec{V}_3(s)}_{-\vec{V}_2(s)} + \Psi_3(s)(-\underbrace{\langle \vec{V}_3(s), \vec{V}_1(s) \rangle}_0 + \underbrace{\vec{V}_3(s) \wedge \vec{V}_1(s)}_{\vec{V}_2(s)})] \\
&= \Psi_1(s),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-H(d\vec{V}_3(s), \vec{V}_2(s)) &= -\frac{1}{2}(d\vec{V}_3(s) \times \overline{\vec{V}_2(s)} + \vec{V}_2(s) \times \overline{d\vec{V}_3(s)}) \\
&= -\frac{1}{2}((\Psi_2 \vec{V}_1(s) - \Psi_1(s) \vec{V}_2(s)) \times \overline{\vec{V}_2(s)}) \\
&\quad + \vec{V}_2(s) \times \overline{(\Psi_2 \vec{V}_1(s) - \Psi_1(s) \vec{V}_2(s))}) \\
&= -\frac{1}{2}(\Psi_2(\vec{V}_1(s) \times \overline{\vec{V}_2(s)}) - \Psi_1(s)(\vec{V}_2(s) \times \overline{\vec{V}_2(s)})) \\
&\quad + \Psi_2(\vec{V}_2(s) \times \overline{\vec{V}_1(s)}) - \Psi_1(s)(\vec{V}_2(s) \times \overline{\vec{V}_2(s)}) \\
&= -\frac{1}{2}(-\Psi_2(\underbrace{-\langle \vec{V}_1(s), \vec{V}_2(s) \rangle}_0 + \underbrace{\vec{V}_1(s) \wedge \vec{V}_2(s)}_{\vec{V}_3(s)}) + \Psi_1(\vec{V}_2(s) \times \vec{V}_2(s))) \\
&\quad \Psi_2(\underbrace{-\langle \vec{V}_2(s), \vec{V}_1(s) \rangle}_0 + \underbrace{\vec{V}_2(s) \wedge \vec{V}_1(s)}_{-\vec{V}_3(s)}) + \Psi_1(s)(\vec{V}_2(s) \times \vec{V}_2(s))) \\
&= -\frac{1}{2}(2\Psi_1(s)(\vec{V}_2(s) \times \vec{V}_2(s))) \\
&= \Psi_1(s)
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$H(d\vec{V}_2(s), \vec{V}_3(s)) = -H(d\vec{V}_3(s), \vec{V}_2(s)) = \Psi_1(s)$$

olur. $\vec{X}(s)$ in oluşturduğu regle yüzeyin dual açılım açısı Λ_X ile gösterilirse

$$\begin{aligned}
\Lambda_X &= \oint d\Phi \\
&= -\oint \Psi_1(s) \\
&= -H(\vec{D}(s), \vec{X}(s))
\end{aligned} \tag{4.2.5}$$

X in oluşturduğu regle yüzeyin dual açılım uzunluğu L_X ile gösterilirse

$$\begin{aligned}
L_X &= h\left(\oint(\psi^*(s) + \psi(s) \wedge \alpha(s)), \vec{x}(s)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\oint(\psi^*(s) + \psi(s) \wedge \alpha(s)) \times \vec{x}(s) + \vec{x}(s) \times \overline{\oint(\psi^*(s) + \psi(s) \wedge \alpha(s))}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\oint \psi^*(s) \times \vec{x}(s) + \vec{x}(s) \times \overline{\oint \psi^*(s)}\right) + \frac{1}{2}\left(\oint \psi(s) \wedge \alpha(s) \times \vec{x}(s) \right. \\
&\quad \left. + \vec{x}(s) \times \overline{\oint \psi(s) \wedge \alpha(s)}\right) \\
&= h\left(\oint \psi^*(s), \vec{x}(s)\right) + h\left(\oint \psi(s) \wedge \alpha(s), \vec{x}(s)\right) \\
&= h\left(\oint \psi^*(s), \vec{x}(s)\right) + h\left(\oint \psi(s), \vec{x}^*(s)\right)
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. (3.4.3) ve (4.2.5) bağıntıları dikkate alınrsa açılım uzunluğunun dual kuatareniyonik ifadesi

$$L_X = h(\vec{d}^*(s), \vec{x}(s)) + h(\vec{d}(s), \vec{x}^*(s)) \quad (4.2.6)$$

şeklinde elde edilir. Böylece şu teorem verilebilir:

Teorem 4.2.1 $\vec{X}(s) = \vec{x}(s) + \varepsilon \vec{x}^*(s)$ dual eğrisine Öklid uzayında karşılık gelen regle yüzeyin dual açılım açısı ve dual açılım uzunluğunun kuaterniyonik ifadeleri sırasıyla

$$\Lambda_X = -H(\vec{D}(s), \vec{X}(s)),$$

$$L_X = h(\vec{d}^*(s), \vec{x}(s)) + h(\vec{d}(s), \vec{x}^*(s))$$

bağıntısı ile verilir.

4.2.1 Dual Uzaysal Kuaterniyonik Gösterge Eğrilerine Karşılık Gelen Kapalı Uzaysal Kuaterniyonik Regle Yüzeylerin İntegral İnvaryantları

φ regle yüzeyinin dayanak eğrisinin Frenet vektörleri $\{\vec{T}(s), \vec{N}(s), \vec{B}(s)\}$, bu vektörlerin vektörel momentleri sırasıyla $\vec{T}^*(s), \vec{N}^*(s), \vec{B}^*(s)$ vektörleri olursa $\mathbb{H}\mathbb{D}$ -modülde birim dual vektör olur. Study tekabül prensibine göre,

$$\vec{\tilde{T}}(s) = \vec{T}(s) + \varepsilon \vec{T}^*(s), \quad \vec{\tilde{N}}(s) = \vec{N}(s) + \varepsilon \vec{N}^*(s), \quad \vec{\tilde{B}}(s) = \vec{B}(s) + \varepsilon \vec{B}^*(s)$$

dual vektörleri birim dual küre üzerinde birer dual eğri çizerler. Bu vektörler ani dual Pfaff vektörü etrafında bir dönme hareketi yaparlar [15]. Bu dual vektörlere bağlı ani dual Pfaff vektörü $\vec{\tilde{W}}(s)$ ile gösterilirse bu vektör

$$\begin{aligned}
\vec{T}' &= \vec{W} \times \vec{T} \\
\vec{N}' &= \vec{W} \times \vec{N} \\
\vec{B}' &= \vec{W} \times \vec{B}
\end{aligned}$$

bağıntısını sağlar. Bu vektörü

$$\vec{W}(s) = a_1(s)\vec{T}(s) + a_2(s)\vec{N}(s) + a_3(s)\vec{B}(s) \quad (4.2.7)$$

şeklinde alalım. Her iki taraf $\vec{T}(s)$ vektörü ile sağdan kuarterniyonik çarpılırsa

$$\begin{aligned}
\vec{W}(s) \times \vec{T}(s) &= -a_1(s) + a_2(s)(\vec{N}(s) \times \vec{T}(s)) + a_3(s)(\vec{B}(s) \times \vec{T}(s)) \\
&= -a_1(s) - a_2(s)\vec{B}(s) + a_3(s)\vec{N}(s)
\end{aligned} \quad (4.2.8)$$

olur. Diğer taraftan (3.4.2) bağıntısından

$$\begin{aligned}
\vec{W}(s) \times \vec{T}(s) &= -\langle \vec{W}(s), \vec{T}(s) \rangle + \vec{W}(s) \wedge \vec{T}(s) \\
&= -a_1(s) + \vec{W}(s) \wedge \vec{T}(s) = -a_1(s) + d\vec{T}(s) \\
&= -a_1(s) + \hat{\kappa}(s)\vec{N}(s)
\end{aligned} \quad (4.2.9)$$

yazılır. (4.2.8) ve (4.2.9) bağıntılarından

$$a_2(s) = 0, \quad a_3(s) = \hat{\kappa}(s)$$

şeklinde bulunur. Benzer şekilde (4.2.7) bağıntısı $\vec{N}(s)$ vektörü ile sağdan kuaterniyonik çarpılırsa

$$\begin{aligned}\vec{W}(s) \times \vec{N}(s) &= a_1(s)(\vec{T}(s) \times \vec{N}(s)) + a_2(s)(\vec{N}(s) \times \vec{N}(s)) + a_3(s)(\vec{B}(s) \times \vec{N}(s)) \\ &= a_1(s)\vec{B}(s) - a_2(s) - a_3(s)\vec{T}(s)\end{aligned}\quad (4.2.10)$$

olur. Diğer taraftan

$$\begin{aligned}\vec{W}(s) \times \vec{N}(s) &= -\langle \vec{W}(s), \vec{N}(s) \rangle + \vec{W}(s) \wedge \vec{N}(s) \\ &= -a_2(s) + d\vec{N}(s) \\ &= -a_2(s) - \hat{\kappa}(s)\vec{T}(s) + \hat{\tau}(s)\vec{B}(s)\end{aligned}\quad (4.2.11)$$

yazılır. (4.2.10) ve (4.2.11) bağıntılarından

$$a_2(s) = \hat{\tau}(s), \quad a_3(s) = \hat{\kappa}(s)$$

şeklinde bulunur. Bulunan katsayılar (4.2.7) bağıntısında yerine yazılırsa

$$\vec{W}(s) = \hat{\tau}(s)\vec{T} + \hat{\kappa}(s)\vec{B}(s)$$

bulunur.

(4.2.4) bağıntısından $\vec{D}(s)$ Steiner vektörü

$$\vec{D}(s) = \vec{T} \oint \hat{\tau}(s) + \vec{B}(s) \oint \hat{\kappa}(s)$$

bulunur. Bu ifade reel ve dual bileşenlerine ayrılırsa

$$\begin{aligned} \vec{D}(s) &= \vec{d}(s) + \varepsilon \vec{d}^*(s) = \vec{T}(s) \oint \tau(s) + \vec{B}(s) \oint \kappa(s) + \varepsilon \left(\vec{T}^*(s) \oint \tau(s) + \vec{T}(s) \oint \tau^*(s) \right. \\ &\quad \left. + \vec{B}^*(s) \oint \kappa(s) + \vec{B}(s) \oint \kappa^*(s) \right) \end{aligned}$$

şeklinde olur. Burada \vec{d} ve \vec{d}^* vektörleri

$$\vec{d}(s) = \vec{T}(s) \oint \tau(s) + \vec{B}(s) \oint \kappa(s)$$

$$\vec{d}^*(s) = \vec{T}^*(s) \oint \tau(s) + \vec{T}(s) \oint \tau^*(s) + \vec{B}^*(s) \oint \kappa(s) + \vec{B}(s) \oint \kappa^*(s)$$

şeklindedir.

4.2.1.1 Birim Dual Teğetler Göstergesine Karşılık Gelen Dual Regle Yüzeyin İntegral İnvaryantları

Birim dual küre üzerinde $\vec{\hat{T}}(s) = \vec{T}(s) + \varepsilon \vec{T}^*(s)$ dual eğrisine Öklid uzayında karşılık gelen regle yüzeyin parametrik denklemi (4.2.2) bağıntısından

$$\varphi_{\hat{T}}(s, v) = \vec{T}(s) \times \vec{T}^*(s) + v \vec{T}(s)$$

şeklinde yazılır. (4.1.8) bağıntısından $P_{\hat{T}}$ dağılma parametresinin dual kuaterniyonik ifadesi

$$P_{\hat{T}} = \frac{h(\vec{T}(s) \times \vec{T}'(s), (\vec{T}(s) \times \vec{T}^*(s))')}{\mathbf{N}(\vec{T}'(s))^2}$$

şeklindedir. Pay ve paydadaki ifadeler ayrı ayrı hesaplanırsa

$$\begin{aligned}
& h(\vec{T}(s) \times \vec{T}'(s), (\vec{T}(s) \times \vec{T}^*(s))') = h(\vec{T}(s) \times \vec{T}'(s), \vec{T}'(s) \times \vec{T}^*(s)) \\
& + h(\vec{T}(s) \times \vec{T}'(s), \vec{T}(s) \times \vec{T}^{*'}(s)) \\
= & h(\vec{T}(s) \times \kappa(s)\vec{N}(s), \kappa(s)\vec{N}(s) \times \vec{T}^*) \\
& + h(\vec{T}(s) \times \kappa(s)\vec{N}(s), \vec{T}(s) \times \kappa(s)\vec{N}^*(s)) \\
= & h(\kappa(s)(\vec{T}(s) \times \vec{N}(s)), \kappa(s)(\vec{N}(s) \times \vec{T}^*(s))) \\
& + h(\kappa(s)(\vec{T}(s) \times \vec{N}(s)), \kappa(s)(\vec{T}(s) \times \vec{N}^*(s))) \\
= & h(\kappa(s) \overbrace{(\vec{T}(s) \times \vec{N}(s))}^{\vec{B}(s)}, \kappa(s)(\vec{N}(s) \times \vec{T}^*(s))) \\
& + h(\kappa(s) \overbrace{(\vec{T}(s) \times \vec{N}(s))}^{\vec{B}(s)}, \kappa(s)(\vec{T}(s) \times \vec{N}^*(s))) \\
= & \frac{1}{2}(\kappa(s)\vec{B}(s) \times \kappa(s)\overline{(\vec{N}(s) \times \vec{T}^*(s))}) \\
& + \frac{1}{2}(\kappa(s)(\vec{N}(s) \times \vec{T}^*(s)) \times \kappa(s)\overline{\vec{B}(s)}) \\
& + \frac{1}{2}(\kappa(s)\vec{B}(s) \times \kappa(s)\overline{(\vec{T}(s) \times \vec{N}^*(s))}) \\
& + \frac{1}{2}(\kappa(s)(\vec{T}(s) \times \vec{N}^*(s)) \times \kappa(s)\overline{\vec{B}(s)})
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\mathbf{N}(\vec{T}'(s))^2 &= h(\kappa(s)\vec{N}(s), \kappa(s)\vec{N}(s)) \\
&= \frac{1}{2}((\kappa(s)\vec{N}(s) \times \overline{\kappa(s)\vec{N}} + \overline{\kappa(s)\vec{N}} \times \kappa(s)\vec{N}(s)) \\
&= \kappa^2(s)
\end{aligned}$$

bulunur. Bulunan değerler $P_{\hat{T}}$ ifadesinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
P_{\hat{T}} &= \vec{B}(s) \times \overline{(\vec{N}(s) \times \vec{T}^*(s))} + (\vec{N}(s) \times \vec{T}^*(s)) \times \vec{B}(s) \\
&\quad + \vec{B}(s) \times \overline{(\vec{T}(s) \times \vec{N}^*(s))} + (\vec{T}(s) \times \vec{N}^*(s)) \times \vec{B}(s) \\
&= \vec{B}(s) \times \overline{(-\langle \vec{N}(s), \vec{T}^*(s) \rangle + \vec{N}(s) \wedge \vec{T}^*(s))} \\
&\quad -(-\langle \vec{N}(s), \vec{T}^*(s) \rangle + \vec{N}(s) \wedge \vec{T}^*(s)) \times \vec{B}(s) \\
&\quad + \vec{B}(s) \times \overline{(-\langle \vec{T}(s), \vec{N}^*(s) \rangle + \vec{T}(s) \wedge \vec{N}^*(s))} \\
&\quad -(-\langle \vec{T}(s), \vec{N}^*(s) \rangle + \vec{T}(s) \wedge \vec{N}^*(s)) \times \vec{B}(s)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_{\hat{T}} &= \vec{B}(s) \times (-\langle \vec{N}(s), \vec{T}^*(s) \rangle - \vec{N}(s) \wedge \vec{T}^*(s)) \\
&\quad - (-\langle \vec{N}(s), \vec{T}^*(s) \rangle + \vec{N}(s) \wedge \vec{T}^*(s)) \times \vec{B}(s) \\
&\quad + \vec{B}(s) \times (-\langle \vec{T}(s), \vec{N}^*(s) \rangle - \vec{T}(s) \wedge \vec{N}^*(s)) \\
&\quad - (-\langle \vec{T}(s), \vec{N}^*(s) \rangle + \vec{T}(s) \wedge \vec{N}^*(s)) \times \vec{B}(s) \\
&= \vec{B}(s) \times (-\langle \vec{N}(s), \vec{T}^*(s) \rangle - \vec{N}(s) \wedge (\vec{\alpha}(s) \wedge \vec{T}(s))) \\
&\quad - (-\langle \vec{N}(s), \vec{T}^*(s) \rangle + \vec{N}(s) \wedge (\vec{\alpha}(s) \wedge \vec{T}(s))) \times \vec{B}(s) \\
&\quad + \vec{B}(s) \times (-\langle \vec{T}(s), \vec{N}^*(s) \rangle - \vec{T}(s) \wedge (\vec{\alpha}(s) \wedge \vec{N}(s))) \\
&\quad - (-\langle \vec{T}(s), \vec{N}^*(s) \rangle + \vec{T}(s) \wedge (\vec{\alpha}(s) \wedge \vec{N}(s))) \times \vec{B}(s) \\
&= \vec{B}(s) \times \left(-\langle \vec{N}(s), \vec{T}^*(s) \rangle - \underbrace{\langle \vec{N}(s), \vec{T}(s) \rangle}_{0} \vec{\alpha}(s) - \langle \vec{\alpha}(s), \vec{N}(s) \rangle \vec{T}(s) \right) \\
&\quad - \left(-\langle \vec{N}(s), \vec{T}^*(s) \rangle + \underbrace{\langle \vec{N}(s), \vec{T}(s) \rangle}_{0} \vec{\alpha}(s) - \langle \vec{\alpha}(s), \vec{N}(s) \rangle \vec{T}(s) \right) \times \vec{B}(s) \\
&\quad + \vec{B}(s) \times \left(-\langle \vec{T}(s), \vec{N}^*(s) \rangle - \underbrace{\langle \vec{T}(s), \vec{N}(s) \rangle}_{0} \vec{\alpha}(s) - \langle \vec{\alpha}(s), \vec{T}(s) \rangle \vec{N}(s) \right) \\
&\quad - \left(-\langle \vec{T}(s), \vec{N}^*(s) \rangle + \underbrace{\langle \vec{T}(s), \vec{N}(s) \rangle}_{0} \vec{\alpha}(s) - \langle \vec{\alpha}(s), \vec{T}(s) \rangle \vec{N}(s) \right) \times \vec{B}(s)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_{\widehat{T}} &= \vec{B}(s) \times (- \langle \vec{N}(s), \vec{T}^*(s) \rangle + \langle \vec{\alpha}(s), \vec{N}(s) \rangle \vec{T}(s)) - (- \langle \vec{N}(s), \vec{T}^*(s) \rangle \\
&\quad - \langle \vec{\alpha}(s), \vec{N}(s) \rangle \vec{T}(s)) \times \vec{B}(s) + \vec{B}(s) \times (- \langle \vec{T}(s), \vec{N}^*(s) \rangle + \langle \vec{\alpha}(s), \vec{T}(s) \rangle \vec{N}(s)) \\
&\quad - (- \langle \vec{T}(s), \vec{N}^*(s) \rangle - \langle \vec{\alpha}(s), \vec{T}(s) \rangle \vec{N}(s)) \times \vec{B}(s) \\
&= -\vec{B}(s) \langle \vec{N}(s), \vec{T}^*(s) \rangle + \langle \vec{\alpha}(s), \vec{N}(s) \rangle (\vec{B}(s) \times \vec{T}(s)) + \langle \vec{N}(s), \vec{T}^*(s) \rangle \vec{B}(s) \\
&\quad + \langle \vec{\alpha}(s), \vec{N}(s) \rangle (\vec{T}(s) \times \vec{B}(s)) - \vec{B}(s) \langle \vec{T}(s), \vec{N}^*(s) \rangle + \langle \vec{\alpha}(s), \vec{T}(s) \rangle (\vec{B}(s) \times \vec{N}(s)) \\
&\quad + \langle \vec{T}(s), \vec{N}^*(s) \rangle \vec{B}(s) + \langle \vec{\alpha}(s), \vec{T}(s) \rangle (\vec{N}(s) \times \vec{B}(s)) \\
&= 0
\end{aligned}$$

olur. $\varphi_{\widehat{T}}$ yüzeyinin dual açılım açısı $\Lambda_{\widehat{T}}$ ile gösterilsin. (4.2.5) bağıntısından $\Lambda_{\widehat{T}}$ açılım açısının kuaterniyonik ifadesi

$$\begin{aligned}
\Lambda_{\widehat{T}} &= -H(\vec{D}(s), \vec{\widehat{T}}) = -\frac{1}{2} \left(\vec{D}(s) \times \vec{\widehat{T}}(s) + \vec{\widehat{T}}(s) \times \vec{D}(s) \right) \\
&= -\frac{1}{2} \left(\left(\vec{T}(s) \oint \tau(s) ds + \vec{B}(s) \oint \kappa(s) ds + \varepsilon(\vec{T}^*(s) \oint \tau(s) ds \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \vec{T}(s) \oint \tau^*(s) ds + \vec{B}^*(s) \oint \kappa(s) ds + \vec{B}(s) \oint \kappa^*(s) ds \right) \right. \\
&\quad \times \overline{(\vec{T}(s) + \varepsilon \vec{T}^*(s))} + (\vec{T}(s) + \varepsilon \vec{T}^*(s)) \times \overline{\left(\vec{T}(s) \oint \tau(s) ds \right.} \\
&\quad \left. \left. + \vec{B}(s) \oint \kappa(s) ds + \varepsilon(\vec{T}^*(s) \oint \tau(s) ds + \vec{T}(s) \oint \tau^*(s) ds \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \vec{B}^*(s) \oint \kappa(s) ds + \vec{B}(s) \oint \kappa^*(s) ds \right) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Lambda_{\hat{T}} = & -\frac{1}{2} \left((\vec{T}(s) \times \vec{T}(s)) \oint \tau(s) ds + \varepsilon (\vec{T}(s) \times \vec{T}^*(s)) \oint \tau(s) ds \right. \\
& + (\vec{B}(s) \times \vec{T}(s)) \oint \kappa(s) ds + \varepsilon (\vec{B}(s) \times \vec{T}^*(s)) \oint \kappa(s) ds \\
& + \varepsilon (\vec{T}^*(s) \times \vec{T}(s)) \oint \tau(s) ds + \varepsilon^2 (\vec{T}^*(s) \times \vec{T}^*(s)) \oint \tau(s) ds \\
& + \varepsilon (\vec{T}(s) \times \vec{T}(s)) \oint \tau^*(s) ds + \varepsilon^2 (\vec{T}(s) \times \vec{T}^*(s)) \oint \tau^*(s) ds \\
& + \varepsilon (\vec{B}^*(s) \times \vec{T}(s)) \oint \kappa(s) ds + \varepsilon^2 (\vec{B}^*(s) \times \vec{T}^*(s)) \oint \kappa(s) ds \\
& + \varepsilon (\vec{B}(s) \times \vec{T}(s)) \oint \kappa^*(s) ds + \varepsilon^2 (\vec{B}(s) \times \vec{T}^*(s)) \oint \kappa^*(s) ds \\
& + (\vec{T}(s) \times \vec{T}(s)) \oint \tau(s) ds + (\vec{T}(s) \times \vec{B}(s)) \oint \kappa(s) ds \\
& + \varepsilon (\vec{T}(s) \times \vec{T}^*(s)) \oint \tau(s) ds + \varepsilon (\vec{T}(s) \times \vec{T}(s)) \oint \tau^*(s) ds \\
& + \varepsilon (\vec{T}(s) \times \vec{B}^*(s)) \oint \kappa(s) ds + \varepsilon (\vec{T}(s) \times \vec{B}(s)) \oint \kappa^*(s) ds \\
& + \varepsilon (\vec{T}^*(s) \times \vec{T}(s)) \oint \tau(s) ds + \varepsilon (\vec{T}^*(s) \times \vec{B}(s)) \oint \kappa(s) ds \\
& + \varepsilon^2 \vec{T}^*(s) \times (\vec{T}^*(s)) \oint \tau(s) ds + \vec{T}(s) \oint \tau^*(s) ds \\
& \left. + \vec{B}^*(s) \oint \kappa(s) ds + \vec{B}(s) \oint \kappa^*(s) ds \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Lambda_{\hat{T}} &= -\frac{1}{2} \left(2 \oint \tau(s) ds + 2\varepsilon \oint \tau^*(s) ds - \varepsilon(\vec{T}(s) \times \vec{T}^*(s)) \oint \tau(s) ds \right. \\
&\quad - \varepsilon(\vec{T}(s) \times \vec{T}^*(s)) \oint \tau(s) ds - \varepsilon(\vec{B}(s) \times \vec{T}^*(s)) \oint \kappa(s) ds \\
&\quad - \varepsilon(\vec{B}^*(s) \times \vec{T}(s)) \oint \kappa(s) ds - \varepsilon(\vec{T}(s) \times \vec{B}^*(s)) \oint \kappa(s) ds \\
&\quad - \varepsilon(\vec{T}^*(s) \times \vec{T}(s)) \oint \tau(s) ds - \varepsilon(\vec{T}^*(s) \times \vec{T}(s)) \oint \tau(s) ds \\
&\quad \left. - \varepsilon(\vec{T}^*(s) \times \vec{B}(s)) \oint \kappa(s) ds \right) \\
&= -\frac{1}{2} \left(2 \oint \tau(s) ds + 2\varepsilon \oint \tau^*(s) ds - \varepsilon(\vec{T}(s) \wedge \vec{T}^*(s)) \oint \tau(s) ds \right. \\
&\quad - \varepsilon(\vec{T}(s) \wedge \vec{T}^*(s)) \oint \tau(s) ds - \varepsilon(-\langle \vec{B}(s), \vec{T}^*(s) \rangle \\
&\quad - \langle \vec{\alpha}(s), \vec{B}(s) \rangle \vec{T}(s)) \oint \kappa(s) ds - \varepsilon(-\langle \vec{B}^*(s), \vec{T}(s) \rangle \\
&\quad + \langle \vec{\alpha}(s), \vec{T}(s) \rangle \vec{B}(s)) \oint \kappa(s) ds - \varepsilon(-\langle \vec{T}(s), \vec{B}^*(s) \rangle \\
&\quad - \langle \vec{\alpha}(s), \vec{T}(s) \rangle \vec{B}(s)) \oint \kappa(s) ds - \varepsilon(\vec{T}^*(s) \wedge \vec{T}(s)) \oint \tau(s) ds \\
&\quad - \varepsilon(\vec{T}^*(s) \wedge \vec{T}(s)) \oint \tau(s) ds - \varepsilon(-\langle \vec{T}^*(s), \vec{B}(s) \rangle \\
&\quad \left. + \langle \vec{\alpha}(s), \vec{B}(s) \rangle \vec{T}(s)) \oint \kappa(s) ds \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Lambda_{\hat{T}} &= -\frac{1}{2} \left(2 \oint \tau(s) ds + 2\varepsilon \oint \tau^*(s) ds + \varepsilon \langle \vec{B}(s), \vec{T}^*(s) \rangle \oint \kappa(s) ds \right. \\
&\quad + \varepsilon \langle \vec{\alpha}, \vec{B}(s) \rangle \vec{T}(s) \oint \kappa(s) ds + \varepsilon \langle \vec{B}^*(s), \vec{T}(s) \rangle \oint \kappa(s) ds \\
&\quad - \varepsilon \langle \vec{\alpha}(s), \vec{T}(s) \rangle \vec{B}(s) \oint \kappa(s) ds + \varepsilon \langle \vec{T}(s), \vec{B}^*(s) \rangle \oint \kappa(s) ds \\
&\quad + \varepsilon \langle \vec{\alpha}(s), \vec{T}(s) \rangle \vec{B}(s) \oint \kappa(s) ds + \varepsilon \langle \vec{T}^*(s), \vec{B}(s) \rangle \oint \kappa(s) ds \\
&\quad \left. - \varepsilon \langle \vec{\alpha}(s), \vec{B}(s) \rangle \vec{T}(s) \oint \kappa(s) ds \right) \\
&= - \oint \tau(s) ds - \varepsilon \oint \tau^*(s) ds
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. (4.2.6) bağıntısı ve kuaterniyonik iç çarpım dikkate alınırsa $\varphi_{\hat{T}}$ yüzeyinin dual açılım uzunluğunun kuaterniyonik ifadesi

$$\begin{aligned}
L_{\hat{T}} &= h(\vec{d}(s), \vec{T}^*(s)) + h(\vec{d}^*(s), \vec{T}(s)) \\
&= \frac{1}{2} \left(\vec{d}(s) \times \vec{T}^*(s) + \vec{T}^*(s) \times \vec{d}(s) \right) + \frac{1}{2} \left(\vec{d}^*(s) \times \vec{T}(s) + \vec{T}(s) \times \vec{d}^*(s) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_{\hat{T}} &= \frac{1}{2} \left(\left(\vec{T}(s) \oint \tau(s) ds + \vec{B}(s) \oint \kappa(s) ds \right) \times \overline{\vec{T}^*(s)} + \vec{T}^*(s) \times \left(-\vec{T}(s) \oint \tau(s) ds \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \vec{B}(s) \oint \kappa(s) ds \right) + \left(\vec{T}^*(s) \oint \tau(s) ds + \vec{T}(s) \oint \tau^*(s) ds + \vec{B}^*(s) \oint \kappa(s) ds \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \vec{B}(s) \oint \kappa^*(s) ds \right) \times \overline{\vec{T}(s)} + \vec{T}(s) \times \overline{\left(\vec{T}^*(s) \oint \tau(s) ds + \vec{T}(s) \oint \tau^*(s) ds \right.} \right. \\
&\quad \left. \left. + \vec{B}^*(s) \oint \kappa(s) ds + \vec{B}(s) \oint \kappa^*(s) ds \right) \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\left(-2\vec{T}(s) \times \vec{T}^*(s) - 2\vec{T}^*(s) \times \vec{T}(s) \right) \oint \tau(s) ds + \left(-\vec{B}(s) \times \vec{T}^*(s) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \vec{T}^*(s) \times \vec{B}(s) - \vec{B}^*(s) \times \vec{T}(s) - \vec{T}(s) \times \vec{B}^*(s) \right) \oint \kappa(s) ds \right. \\
&\quad \left. + \left(-2\vec{T}(s) \times \vec{T}(s) \right) \oint \tau^*(s) ds + \left(-\vec{B}(s) \times \vec{T}(s) - \vec{T}(s) \times \vec{B}(s) \right) \oint \kappa^*(s) ds \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\left(\langle \vec{B}(s), \vec{T}^*(s) - \vec{B}(s) \wedge \vec{T}^*(s) \rangle + \langle \vec{T}^*(s), \vec{B}(s) - \vec{T}^*(s) \wedge \vec{B}(s) \rangle + \langle \vec{B}^*(s), \vec{T}(s) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \vec{B}^*(s) \wedge \vec{T}(s) + \langle \vec{T}(s), \vec{B}^*(s) - \vec{T}(s) \wedge \vec{B}^*(s) \rangle \right) \oint \kappa(s) ds + 2 \oint \tau^*(s) ds \right)
\end{aligned}$$

$$L_{\hat{T}} = \oint \tau^*(s) ds$$

şeklinde elde edilir. Böylece şu sonuç verilebilir:

Sonuç 4.2.1 Bir eğrinin teğet vektörü ve onun vektörel moment vektör çifti ile kuaterniyonik eğrinin teğet vektörü ve onun vektörel moment vektör çiftinin birim dual küre üzerinde çizdikleri dual eğrilere Öklid uzayında karşılık gelen regle yüzeylerin dağılma parametresi, dual açılım açısı ve dual açılım uzunluğu eşittir.

4.2.1.2 Birim Dual Asli Normaller Göstergesine Karşılık Gelen Dual Regle Yüzeyin İntegral İnvaryantları

Birim dual küre üzerinde $\vec{N}(s) = \vec{N}(s) + \varepsilon \vec{N}^*(s)$ dual eğrisine Öklid uzayında karşılık gelen regle yüzeyin parametrik denklemi (4.2.2) bağıntısından

$$\varphi_{\hat{N}}(s, v) = \vec{N}(s) \times \vec{N}^*(s) + v \vec{N}(s)$$

şeklinde yazılır. (4.1.8) bağıntısından $P_{\hat{N}}$ dağılma parametresinin kuaterniyonik ifadesi

$$P_{\hat{N}} = \frac{h\left(\vec{N}(s) \times \vec{N}'(s), (\vec{N}(s) \times \vec{N}^*(s))'\right)}{\mathbf{N}(\vec{N}'(s))^2}$$

şeklinde dir. Pay ve paydadaki ifadeler ayrı ayrı hesaplanırsa

$$\begin{aligned}
& h\left(\vec{N}(s) \times \vec{N}'(s), (N(s) \times \vec{N}^*(s))'\right) \\
&= h\left(\vec{N}(s) \times (-\kappa(s)\vec{T}(s) + \tau(s)\vec{B}(s)), \vec{N}'(s) \times \vec{N}^*(s) + \vec{N}(s) \times \vec{N}^{*\prime}(s)\right) \\
&= h\left(-\kappa(s)\overbrace{(\vec{N}(s) \times \vec{T}(s))}^{-\vec{B}(s)} + \tau(s)\overbrace{(\vec{N}(s) \times \vec{B}(s))}^{\vec{T}(s)}, -\kappa(s)(\vec{T}(s) \times \vec{N}^*(s))\right. \\
&\quad \left. + \tau(s)(\vec{B}(s) \times \vec{N}^*(s)) + \vec{N}(s) \times (\vec{B}(s) - \kappa(s)\vec{T}^*(s) + \tau(s)\vec{B}^*(s))\right) \\
&= h\left(\kappa(s)\vec{B}(s) + \tau(s)\vec{T}(s), -\kappa(s)(\vec{T}(s) \times \vec{N}^*(s)) + \tau(s)(\vec{B}(s) \times \vec{N}^*(s))\right. \\
&\quad \left. + \vec{T}(s) - \kappa(s)(\vec{N}(s) \times \vec{T}^*(s)) + \tau(s)(\vec{N}(s) \times \vec{B}^*(s))\right) \\
&= h\left(\kappa(s)\vec{B}(s) + \tau(s)\vec{T}(s), \kappa(s)\langle\vec{T}(s), \vec{N}^*(s)\rangle + \kappa(s)\langle\vec{\alpha}(s), \vec{T}(s)\rangle\vec{N}(s)\right. \\
&\quad \left. - \tau(s)\langle\vec{B}(s), \vec{N}^*(s)\rangle - \tau(s)\langle\vec{\alpha}(s), \vec{B}(s)\rangle\vec{N}(s) + \vec{T}(s) + \kappa(s)\langle N(s), \vec{T}^*(s)\rangle\right. \\
&\quad \left. \kappa(s)\langle\vec{\alpha}(s), \vec{N}(s)\rangle\vec{T}(s) - \tau(s)\langle\vec{N}(s), \vec{B}^*(s)\rangle - \tau(s)\langle\vec{\alpha}(s), \vec{N}(s)\rangle\vec{B}(s)\right) \\
&= h\left(\kappa(s)\vec{B}(s) + \tau(s)\vec{T}(s), \kappa(s)\langle\vec{\alpha}(s), \vec{T}(s)\rangle\vec{N}(s) + \kappa(s)\langle\vec{\alpha}(s), \vec{N}(s)\rangle\vec{T}(s)\right. \\
&\quad \left. - \tau(s)\langle\vec{\alpha}(s), \vec{B}(s)\rangle\vec{N}(s) - \tau(s)\langle\vec{\alpha}(s), \vec{N}(s)\rangle\vec{B}(s) + \vec{T}(s)\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \left[(\kappa(s)\vec{B}(s) + \tau(s)\vec{T}(s)) \times (\kappa(s)\langle \vec{\alpha}(s), \vec{T}(s) \rangle \vec{N}(s) + \kappa(s)\langle \vec{\alpha}(s), \vec{N}(s) \rangle \vec{T}(s)) \right. \\
&\quad - \tau(s)\langle \vec{\alpha}(s), \vec{B}(s) \rangle \vec{N}(s) - \tau(s)\langle \vec{\alpha}(s), \vec{N}(s) \rangle \vec{B}(s) + \vec{T}(s) \\
&\quad + (\kappa(s)\langle \vec{\alpha}(s), \vec{T}(s) \rangle \vec{N}(s) + \kappa(s)\langle \vec{\alpha}(s), \vec{N}(s) \rangle \vec{T}(s) - \tau(s)\langle \vec{\alpha}(s), \vec{B}(s) \rangle \vec{N}(s) \\
&\quad \left. - \tau(s)\langle \vec{\alpha}(s), \vec{N}(s) \rangle \vec{B}(s) + \vec{T}(s)) \times (\kappa(s)\vec{B}(s) + \tau(s)\vec{T}(s)) \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[-\kappa(s)^2 \langle \vec{\alpha}(s), \vec{T}(s) \rangle (\vec{B}(s) \times \vec{N}(s)) - \kappa(s)^2 \langle \vec{\alpha}(s), \vec{T}(s) \rangle (\vec{N}(s) \times \vec{B}(s)) \right. \\
&\quad - \kappa(s)^2 \langle \vec{\alpha}(s), \vec{N}(s) \rangle (\vec{B}(s) \times \vec{T}(s)) - \kappa(s)^2 \langle \vec{\alpha}(s), \vec{N}(s) \rangle (\vec{T}(s) \times \vec{B}(s)) \\
&\quad + \kappa(s)\tau(s)\langle \vec{\alpha}(s), \vec{B}(s) \rangle (\vec{B}(s) \times \vec{N}(s)) + \kappa(s)\tau(s)\langle \vec{\alpha}(s), \vec{B}(s) \rangle (\vec{N}(s) \times \vec{B}(s)) \\
&\quad + \kappa(s)\tau(s)\langle \vec{\alpha}(s), \vec{N}(s) \rangle (\vec{B}(s) \times \vec{B}(s)) - \kappa(s)\tau(s)\langle \vec{\alpha}(s), \vec{N}(s) \rangle (\vec{T}(s) \times \vec{T}(s)) \\
&\quad - \kappa(s)\tau(s)\langle \vec{\alpha}(s), \vec{T}(s) \rangle (\vec{T}(s) \times \vec{N}(s)) - \kappa(s)\tau(s)\langle \vec{\alpha}(s), \vec{T}(s) \rangle (\vec{N}(s) \times \vec{T}(s)) \\
&\quad - \kappa(s)\tau(s)\langle \vec{\alpha}(s), \vec{N}(s) \rangle (\vec{T}(s) \times \vec{T}(s)) + \kappa(s)\tau(s)\langle \vec{\alpha}(s), \vec{N}(s) \rangle (\vec{B}(s) \times \vec{B}(s)) \\
&\quad + \tau(s)^2 \langle \vec{\alpha}(s), \vec{B}(s) \rangle (\vec{T}(s) \times \vec{N}(s)) + \tau(s)^2 \langle \vec{\alpha}(s), \vec{B}(s) \rangle (\vec{N}(s) \times \vec{T}(s)) \\
&\quad + \tau(s)^2 \langle \vec{\alpha}(s), \vec{N}(s) \rangle (\vec{T}(s) \times \vec{B}(s)) + \tau(s)^2 \langle \vec{\alpha}(s), \vec{N}(s) \rangle (\vec{B}(s) \times \vec{T}(s)) \\
&\quad \left. - \kappa(s)(\vec{T}(s) \times \vec{B}(s)) - \kappa(s)(\vec{B}(s) \times \vec{T}(s)) - \tau(s)(\vec{T}(s) \times \vec{T}(s)) + \tau(s) \right]
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\mathbf{N}(\vec{N}'(s))^2 &= h(-\kappa(s)T(s) + \tau(s)\vec{B}(s), -\kappa(s)T(s) + \tau(s)\vec{B}(s)) \\
&= \frac{1}{2} \left(((-\kappa(s)T(s) + \tau(s)\vec{B}(s)) \times \overline{(-\kappa(s)T(s) + \tau(s)\vec{B}(s))}) \right. \\
&\quad \left. + \overline{(-\kappa(s)T(s) + \tau(s)\vec{B}(s))} \times (-\kappa(s)T(s) + \tau(s)\vec{B}(s)) \right) \\
&= \kappa^2(s) + \tau(s)^2
\end{aligned}$$

bulunur. Bulunan değerler $P_{\widehat{N}}$ de yerine yazılırsa dağılma parametresi

$$P_{\widehat{N}} = \frac{\tau(s)}{\kappa(s)^2 + \tau(s)^2}$$

olur. $\varphi_{\widehat{N}}$ yüzeyinin dual açılım açısı $\Lambda_{\widehat{N}}$ ile gösterilsin. (4.2.5) bağıntısından $\Lambda_{\widehat{N}}$ açısının kuaterniyonik ifadesi

$$\begin{aligned}
\Lambda_{\widehat{N}} &= -H(\vec{D}(s), \vec{N}(s)) \\
&= -\frac{1}{2} \left(D(s) \times \overline{\vec{N}(s)} + \vec{N}(s) \times \overline{D(s)} \right) \\
&= -\frac{1}{2} \left(\left(\vec{T}(s) \oint \tau(s)ds + \vec{B}(s) \oint \kappa(s)ds + \varepsilon(\vec{T}^*(s) \oint \tau(s)ds + \vec{T}(s) \oint \tau^*(s)ds \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \vec{B}^*(s) \oint \kappa(s)ds + \vec{B}(s) \oint \kappa^*(s)ds \right) \times \overline{(\vec{N}(s) + \varepsilon\vec{N}^*(s))} + (\vec{N}(s) + \varepsilon\vec{N}^*(s)) \right. \\
&\quad \left. \times \overline{(\vec{T}(s) \oint \tau(s)ds + \vec{B}(s) \oint \kappa(s)ds + \varepsilon(\vec{T}^*(s) \oint \tau(s)ds + \vec{T}(s) \oint \tau^*(s)ds \right.} \\
&\quad \left. \left. + \vec{B}^*(s) \oint \kappa(s)ds + \vec{B}(s) \oint \kappa^*(s)ds) \right) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Lambda_{\vec{N}} = & -\frac{1}{2} \left((\vec{T}(s) \times \vec{N}(s)) \oint \tau(s) ds + \varepsilon (\vec{T}(s) \times \vec{N}^*(s)) \oint \tau(s) ds \right. \\
& + (\vec{B}(s) \times \vec{N}(s)) \oint \kappa(s) ds + \varepsilon (\vec{B}(s) \times \vec{N}^*(s)) \oint \kappa(s) ds \\
& + \varepsilon (\vec{T}^*(s) \times \vec{N}(s)) \oint \tau(s) ds + \varepsilon^2 (\vec{T}^*(s) \times \vec{N}^*(s)) \oint \tau(s) ds \\
& + \varepsilon (\vec{T}(s) \times \vec{N}^*(s)) \oint \tau^*(s) ds + \varepsilon^2 (\vec{T}(s) \times \vec{N}^*(s)) \oint \tau^*(s) ds \\
& + \varepsilon (\vec{B}^*(s) \times \vec{N}(s)) \oint \kappa(s) ds + \varepsilon^2 (\vec{B}^*(s) \times \vec{N}^*(s)) \oint \kappa(s) ds \\
& + \varepsilon (\vec{B}(s) \times \vec{N}^*(s)) \oint \kappa^*(s) ds + \varepsilon^2 (\vec{B}(s) \times \vec{N}^*(s)) \oint \kappa^*(s) ds \\
& + (N(s) \times \vec{T}(s)) \oint \tau(s) ds + (\vec{N}(s) \times \vec{B}(s)) \oint \kappa(s) ds \\
& + \varepsilon (\vec{N}(s) \times \vec{T}^*(s)) \oint \tau(s) ds + \varepsilon (\vec{N}(s) \times \vec{T}(s)) \oint \tau^*(s) ds \\
& + \varepsilon (\vec{N}(s) \times \vec{B}^*(s)) \oint \kappa(s) ds + \varepsilon (\vec{N}(s) \times \vec{B}(s)) \oint \kappa^*(s) ds \\
& + \varepsilon (\vec{N}^*(s) \times \vec{T}(s)) \oint \tau(s) ds + \varepsilon (\vec{N}^*(s) \times \vec{B}(s)) \oint \kappa(s) ds \\
& + \varepsilon^2 \vec{N}^*(s) \times \vec{T}^*(s) \oint \tau(s) ds + \vec{T}(s) \oint \tau^*(s) ds + \vec{B}^*(s) \oint \kappa(s) ds \\
& \left. + \vec{B}(s) \oint \kappa^*(s) ds \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Lambda_{\vec{N}} &= -\frac{1}{2} \left((\vec{T}(s) \times \vec{N}(s)) \oint \tau(s) ds + (\vec{N}(s) \times \vec{T}(s)) \oint \tau(s) ds \right. \\
&\quad + (\vec{B}(s) \times \vec{N}(s)) \oint \kappa(s) ds + (\vec{N}(s) \times \vec{B}(s)) \oint \kappa(s) ds \\
&\quad + \varepsilon (\vec{B}(s) \times \vec{N}^*(s)) \oint \kappa(s) ds + \varepsilon (\vec{T}^*(s) \times \vec{N}(s)) \oint \tau(s) ds \\
&\quad + \varepsilon (\vec{T}(s) \times \vec{N}(s)) \oint \tau^*(s) ds + \varepsilon (\vec{N}(s) \times \vec{T}(s)) \oint \tau^*(s) ds \\
&\quad + \varepsilon (\vec{B}(s) \times \vec{N}(s)) \oint \kappa^*(s) ds + \varepsilon (\vec{B}^*(s) \times \vec{N}(s)) \oint \kappa(s) ds \\
&\quad + \varepsilon (\vec{T}(s) \times \vec{N}^*(s)) \oint \tau(s) ds + \varepsilon (\vec{N}(s) \times \vec{T}^*(s)) \oint \tau(s) ds \\
&\quad + \varepsilon (\vec{N}(s) \times \vec{B}^*(s)) \oint \kappa(s) ds + \varepsilon (\vec{N}(s) \times \vec{B}(s)) \oint \kappa^*(s) ds \\
&\quad \left. + \varepsilon (\vec{N}^*(s) \times \vec{T}(s)) \oint \tau(s) ds + \varepsilon (\vec{N}^*(s) \times \vec{B}(s)) \oint \kappa(s) ds \right) \\
&= -\frac{1}{2} \left(-\varepsilon (- \langle \vec{B}(s), \vec{N}^*(s) \rangle - \langle \vec{\alpha}(s), \vec{B}(s) \rangle \vec{N}(s) - \langle \vec{B}^*(s), \vec{N}(s) \rangle \right. \\
&\quad + \langle \vec{\alpha}(s), \vec{N}(s) \rangle \vec{B}(s) - \langle \vec{N}(s), \vec{B}^*(s) \rangle - \langle \vec{\alpha}(s), \vec{N}(s) \rangle \vec{B}(s) \\
&\quad - \langle \vec{N}^*(s), \vec{B}(s) \rangle + \langle \vec{\alpha}(s), \vec{B}(s) \rangle \vec{N}(s)) \oint \kappa(s) ds \\
&\quad - \varepsilon (- \langle \vec{T}^*(s), \vec{N}(s) \rangle + \langle \vec{\alpha}(s), \vec{N}(s) \rangle \vec{T}(s) - \langle \vec{T}(s), \vec{N}^*(s) \rangle \\
&\quad - \langle \vec{\alpha}(s), \vec{T}(s) \rangle \vec{N}(s) - \langle \vec{N}(s), \vec{T}^*(s) \rangle - \langle \vec{\alpha}(s), \vec{N}(s) \rangle \vec{T}(s) \\
&\quad \left. - \langle \vec{N}^*(s), \vec{T}(s) \rangle + \langle \vec{\alpha}(s), \vec{T}(s) \rangle \vec{N}(s)) \oint \tau(s) ds \right)
\end{aligned}$$

$$\Lambda_{\widehat{N}} = 0$$

şeklinde bulunur. (4.2.6) bağıntısı ve kuaterniyonik iç çarpım dikkate alınırsa $\varphi_{\widehat{N}}$ yüzeyinin dual açılım uzunluğunun kuaterniyonik ifadesi

$$\begin{aligned}
L_{\widehat{N}} &= h(\vec{d}(s), \vec{N}^*(s)) + h(\vec{d}^*(s), \vec{N}(s)) \\
&= \frac{1}{2} \left(\vec{d}(s) \times \overline{\vec{N}^*(s)} + \vec{N}^*(s) \times \vec{d}(s) \right) + \frac{1}{2} \left(\vec{d}^*(s) \times \overline{\vec{N}(s)} + \vec{N}(s) \times \vec{d}^*(s) \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\left(\vec{T}(s) \oint \tau(s) ds + \vec{B}(s) \oint \kappa(s) ds \right) \times \overline{\vec{N}^*(s)} + \vec{N}^*(s) \right. \\
&\quad \times \left(-\vec{T}(s) \oint \tau(s) ds - \vec{B}(s) \oint \kappa(s) ds \right) + \left(\vec{T}^*(s) \oint \tau(s) ds \right. \\
&\quad \left. + \vec{T}(s) \oint \tau^*(s) ds + \vec{B}^*(s) \oint \kappa(s) ds + \vec{B}(s) \oint \kappa^*(s) ds \right) \times \overline{\vec{N}(s)} \\
&\quad \left. + \vec{N}(s) \times \overline{\left(\vec{T}^*(s) \oint \tau(s) ds + \vec{T}(s) \oint \tau^*(s) ds \right.} \right. \\
&\quad \left. \left. \overline{\vec{B}^*(s) \oint \kappa(s) ds + \vec{B}(s) \oint \kappa^*(s) ds} \right) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_{\hat{N}} &= \frac{1}{2} \left(\left(-2\vec{B}(s) \times \vec{N}^*(s) - 2\vec{B}^*(s) \times \vec{N}(s) \right) \oint \kappa(s) ds + \left(-\vec{T}(s) \times \vec{N}^*(s) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \vec{N}^*(s) \times \vec{T}(s) - \vec{T}^*(s) \times \vec{N}(s) - \vec{N}(s) \times \vec{T}^*(s) \right) \oint \tau(s) ds \right. \\
&\quad \left. + \left(-\vec{T}(s) \times \vec{N}(s) - \vec{N}(s) \times \vec{T}(s) \right) \oint \tau^*(s) ds + \left(-\vec{B}(s) \times \vec{N}(s) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \vec{N}(s) \times \vec{B}(s) \right) \oint \kappa^*(s) ds \right. \\
&= 0
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Böylece şu sonuç verilebilir:

Sonuç 4.2.2 Bir eğrinin asli normal vektörü ve onun vektörel moment vektör çifti ile kuaterniyonik eğrinin asli normal vektörü ve onun vektörel moment vektör çiftinin birim dual küre üzerinde çizdikleri dual eğrilere Öklid uzayında karşılık gelen regle yüzeylerin dağılma parametresi, dual açılım açısı ve dual açılım uzunluğu eşittir.

4.2.1.3 Birim Dual Binormaller Göstergesine Karşılık Gelen Dual Regle Yüzeyin İntegral İnvaryantları

Birim dual küre üzerinde $\vec{\tilde{B}}(s) = \vec{B}(s) + \varepsilon \vec{B}^*(s)$ dual eğrisine karşılık gelen regle yüzeyin parametrik denklemi (4.2.2) bağıntısından

$$\varphi_{\hat{B}}(s, v) = \vec{B}(s) \times \vec{B}^*(s) + v\vec{B}(s)$$

şeklinde yazılır. (4.1.8) bağıntısından $P_{\hat{B}}$ dağılma parametresinin kuaterniyonik ifadesi

$$P_{\hat{B}} = \frac{h\left(\vec{B}(s) \times \vec{B}'(s), (\vec{B}(s) \times \vec{B}^*(s))\right)}{\mathbf{N}(B'(s))^2}$$

şeklinde dir. Pay ve paydadaki ifadeler ayrı ayrı hesaplanırsa

$$\begin{aligned}
& h\left(\vec{B}(s) \times \vec{B}'(s), (\vec{B}(s) \times \vec{B}^*(s))\right) \\
&= h\left(\vec{B}(s) \times \vec{B}'(s), \vec{B}'(s) \times \vec{B}^*(s)\right) + h\left(\vec{B}(s) \times \vec{B}'(s), \vec{B}(s) \times \vec{B}^*(s)\right) \\
&= h\left(\vec{B}(s) \times (-\tau(s)\vec{N}(s)), -\tau(s)\vec{N}(s) \times \vec{B}^*(s)\right) \\
&\quad + h\left(\vec{B}(s) \times (-\tau(s)\vec{N}(s)), \vec{B}(s) \times (-\vec{N}(s) - \tau(s)\vec{N}^*(s))\right) \\
&= h\left(\tau(s)\vec{T}(s), -\tau(s)(\vec{N}(s) \times \vec{B}^*(s))\right) + h\left(\tau(s)\vec{T}(s), -\vec{B}(s) \times \vec{N}(s) \right. \\
&\quad \left. -\tau(s)(\vec{B}(s) \times \vec{N}^*(s))\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\tau(s)\vec{T}(s) \times \overline{(-\tau(s)(\vec{N}(s) \times \vec{B}^*(s)))} - \tau(s)(\vec{N}(s) \times \vec{B}^*(s)) \times \tau(s)\vec{T}(s) \right. \\
&\quad \left. +\tau(s)\vec{T}(s) \times \vec{T}(s) + \vec{T}(s) \times \tau(s)\vec{T}(s) + \tau(s)\vec{T}(s) \times \overline{(-\tau(s)(\vec{B}(s) \times \vec{N}^*(s)))} \right. \\
&\quad \left. -\tau(s)(\vec{B}(s) \times \vec{N}^*(s)) \times \tau(s)\vec{T}(s)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(-\tau(s)^2\vec{T}(s) \times (-\langle\vec{N}(s), \vec{B}^*(s)\rangle + \langle\vec{\alpha}(s), \vec{N}(s)\rangle\vec{B}(s)) \right. \\
&\quad \left. +\tau(s)^2(-\langle\vec{N}(s), \vec{B}^*(s)\rangle - \langle\vec{\alpha}(s), \vec{N}(s)\rangle\vec{B}(s)) \times \vec{T}(s) + 2\tau(s) \right. \\
&\quad \left. -\tau(s)^2\vec{T}(s) \times (-\langle\vec{B}(s), \vec{N}^*(s)\rangle + \langle\vec{\alpha}(s), \vec{B}(s)\rangle\vec{N}(s)) \right. \\
&\quad \left. +\tau(s)^2(-\langle\vec{B}(s), \vec{N}^*(s)\rangle - \langle\vec{\alpha}(s), \vec{B}(s)\rangle\vec{N}(s)) \times \vec{T}(s)\right)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\mathbf{N}(\vec{B}'(s))^2 &= h(-\tau(s)\vec{N}(s), -\tau(s)\vec{N}(s)) \\
&= \frac{1}{2}(((-\tau(s)\vec{N}(s)) \times \overline{(-\tau(s)\vec{N}(s))}) \\
&\quad + \overline{(-\tau(s)\vec{N}(s)}) \times (-\tau(s)\vec{N}(s))) \\
&= \tau(s)^2
\end{aligned}$$

bulunur. Bulunan bu değerler $P_{\hat{B}}$ de yerine yazılırsa

$$P_{\hat{B}} = \frac{1}{\tau(s)}$$

olur. Burada $\tau(s) \neq 0$. $\varphi_{\hat{B}}$ yüzeyinin dual açılım açısı $\Lambda_{\hat{B}}$ ile gösterilsin.(4.2.5) bağıntısından dual açılım açısının kuaterniyonik ifadesi

$$\begin{aligned}
\Lambda_{\hat{B}} &= -H(\vec{D}(s), \vec{B}(s)) \\
&= -\frac{1}{2}(\vec{D}(s) \times \vec{B}(s) + \vec{B}(s) \times \vec{D}(s)) \\
&= -\frac{1}{2}\left(\left(\vec{T}(s) \oint \tau(s)ds + \vec{B}(s) \oint \kappa(s)ds + \varepsilon(\vec{T}^*(s) \oint \tau(s)ds \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \vec{T}(s) \oint \tau^*(s)ds + \vec{B}^*(s) \oint \kappa(s)ds + \vec{B}(s) \oint \kappa^*(s)ds\right) \right. \\
&\quad \left. \times (\overline{\vec{B}(s) + \varepsilon\vec{B}^*(s)}) + (\vec{B}(s) + \varepsilon\vec{B}^*(s)) \times (\overline{\vec{T}(s) \oint \tau(s)ds + \vec{B}(s) \oint \kappa(s)ds} \right. \\
&\quad \left. \left. + \varepsilon(\overline{\vec{T}^*(s) \oint \tau(s)ds + \vec{T}(s) \oint \tau^*(s)ds + \vec{B}^*(s) \oint \kappa(s)ds + \vec{B}(s) \oint \kappa^*(s)ds})\right) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Lambda_{\hat{B}} = & -\frac{1}{2} \left((\vec{T}(s) \times \vec{B}(s)) \oint \tau(s) ds + \varepsilon (\vec{T}(s) \times \vec{B}^*(s)) \oint \tau(s) ds \right. \\
& + (\vec{B}(s) \times \vec{B}(s)) \oint \kappa(s) ds + \varepsilon (\vec{B}(s) \times \vec{B}^*(s)) \oint \kappa(s) ds \\
& + \varepsilon (\vec{T}^*(s) \times \vec{B}(s)) \oint \tau(s) ds + \varepsilon^2 (\vec{T}^*(s) \times \vec{B}^*(s)) \oint \tau(s) ds \\
& + \varepsilon (\vec{T}(s) \times \vec{B}(s)) \oint \tau^*(s) ds + \varepsilon^2 (\vec{T}(s) \times \vec{B}^*(s)) \oint \tau^*(s) ds \\
& + \varepsilon (\vec{B}^*(s) \times \vec{B}(s)) \oint \kappa(s) ds + \varepsilon^2 (\vec{B}^*(s) \times \vec{B}^*(s)) \oint \kappa(s) ds \\
& + \varepsilon (\vec{B}(s) \times \vec{B}(s)) \oint \kappa^*(s) ds + \varepsilon^2 (\vec{B}(s) \times \vec{B}^*(s)) \oint \kappa^*(s) ds \\
& + (\vec{B}(s) \times \vec{T}(s)) \oint \tau(s) ds + (\vec{B}(s) \times \vec{B}(s)) \oint \kappa(s) ds \\
& + \varepsilon (\vec{B}(s) \times \vec{T}^*(s)) \oint \tau(s) ds + \varepsilon (\vec{B}(s) \times \vec{T}(s)) \oint \tau^*(s) ds \\
& + \varepsilon (\vec{B}(s) \times \vec{B}^*(s)) \oint \kappa(s) ds + \varepsilon (\vec{B}(s) \times \vec{B}(s)) \oint \kappa^*(s) ds \\
& + \varepsilon (\vec{B}^*(s) \times \vec{T}(s)) \oint \tau(s) ds + \varepsilon (\vec{B}^*(s) \times \vec{B}(s)) \oint \kappa(s) ds \\
& + \varepsilon^2 \left((\vec{B}^*(s) \times \vec{T}^*(s)) \oint \tau(s) ds + (\vec{B}^*(s) \times \vec{T}(s)) \oint \tau^*(s) ds \right. \\
& \left. + (\vec{B}^*(s) \times \vec{B}^*(s)) \oint \kappa(s) ds + (\vec{B}^*(s) \times \vec{B}(s)) \oint \kappa^*(s) ds \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Lambda_{\widehat{B}} &= -\frac{1}{2} \left(2 \oint \kappa(s) ds + 2\varepsilon \oint \kappa^*(s) ds - \varepsilon(\vec{B}(s) \times \vec{B}^*(s)) \oint \kappa(s) ds \right. \\
&\quad - \varepsilon(\vec{B}^*(s) \times \vec{B}(s)) \oint \kappa(s) ds - \varepsilon(\vec{T}(s) \times \vec{B}^*(s)) \oint \tau(s) ds \\
&\quad - \varepsilon(\vec{T}^*(s) \times \vec{B}(s)) \oint \tau(s) ds - \varepsilon(\vec{B}(s) \times \vec{T}^*(s)) \oint \tau(s) ds \\
&\quad - \varepsilon(\vec{B}(s) \times \vec{B}^*(s)) \oint \kappa(s) ds - \varepsilon(\vec{B}^*(s) \times \vec{B}(s)) \oint \kappa(s) ds \\
&\quad \left. - \varepsilon(\vec{B}^*(s) \times \vec{T}(s)) \oint \tau(s) ds \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(2 \oint \kappa(s) ds + 2\varepsilon \oint \kappa^*(s) ds - 2\varepsilon(\vec{B}(s) \times \vec{B}^*(s)) \oint \kappa(s) ds \right. \\
&\quad - 2\varepsilon(\vec{B}^*(s) \times \vec{B}(s)) \oint \kappa(s) ds - \varepsilon(-\langle \vec{T}, \vec{B}^*(s) \rangle - \langle \vec{\alpha}(s), \vec{T} \rangle \vec{B}(s)) \oint \tau(s) ds \\
&\quad - \varepsilon(-\langle \vec{T}^*(s), \vec{B}(s) \rangle + \langle \vec{\alpha}(s), \vec{B}(s) \rangle \vec{T}) \oint \tau(s) ds - \varepsilon(-\langle \vec{B}(s), \vec{T}^*(s) \rangle \\
&\quad - \langle \vec{\alpha}(s), \vec{B}(s) \rangle \vec{T}) \oint \tau(s) ds - \varepsilon(-\langle \vec{B}^*(s), \vec{T} \rangle + \langle \vec{\alpha}(s), \vec{T} \rangle \vec{B}(s)) \oint \tau(s) ds \left. \right) \\
&= -\frac{1}{2} \left(2 \oint \kappa(s) ds + 2\varepsilon \oint \kappa^*(s) ds + \varepsilon \langle \vec{T}(s), \vec{B}^*(s) \rangle \oint \tau(s) ds \right. \\
&\quad + \varepsilon \langle \vec{\alpha}(s), \vec{T}(s) \rangle \vec{B}(s) \oint \tau(s) ds + \varepsilon \langle \vec{T}^*(s), \vec{B}(s) \rangle \oint \tau(s) ds \\
&\quad - \varepsilon \langle \vec{\alpha}(s), \vec{B}(s) \rangle \vec{T}(s) \oint \tau(s) ds + \varepsilon \langle \vec{B}(s), \vec{T}^*(s) \rangle \oint \tau(s) ds \\
&\quad + \langle \vec{\alpha}(s), \vec{B}(s) \rangle \vec{T}(s) \oint \tau(s) ds + \varepsilon \langle \vec{B}^*(s), \vec{T} \rangle \oint \tau(s) ds \\
&\quad \left. - \varepsilon \langle \vec{\alpha}(s), \vec{T}(s) \rangle \vec{B}(s) \oint \tau(s) ds \right)
\end{aligned}$$

$$\Lambda_{\hat{B}} = - \oint \kappa(s) ds - \varepsilon \oint \kappa^*(s) ds$$

şeklinde bulunur. (4.2.6) bağıntısı ve kuaterniyonik iç çarpım dikkate alınırsa $\varphi_{\hat{B}}$ yüzeyinin dual açılım uzunluğunun kuaterniyonik ifadesi

$$\begin{aligned}
L_{\hat{B}} &= h(\vec{d}(s), \vec{B}^*(s)) + h(\vec{d}^*(s), \vec{B}(s)) \\
&= \frac{1}{2} \left(\vec{d}(s) \times \overline{\vec{B}^*(s)} + \vec{B}^*(s) \times \vec{d}(s) \right) + \frac{1}{2} \left(\vec{d}^*(s) \times \overline{\vec{B}(s)} + \vec{B}(s) \times \vec{d}^*(s) \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\left(\vec{T}(s) \oint \tau(s) ds + \vec{B}(s) \oint \kappa(s) ds \right) \times \overline{\vec{B}^*(s)} + \vec{B}^*(s) \times \left(-\vec{T}(s) \oint \tau(s) ds \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \vec{B}(s) \oint \kappa(s) ds \right) + \left(\vec{T}^*(s) \oint \tau(s) ds + \vec{T}(s) \oint \tau^*(s) ds + \vec{B}^*(s) \oint \kappa(s) ds \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \vec{B}(s) \oint \kappa^*(s) ds \right) \times \overline{\vec{B}(s)} + \vec{B}(s) \times \overline{\left(\vec{T}^*(s) \oint \tau(s) ds + \vec{T}(s) \oint \tau^*(s) ds \right.} \right. \\
&\quad \left. \left. + \vec{B}^*(s) \oint \kappa(s) ds + \vec{B}(s) \oint \kappa^*(s) ds \right) \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\left(-2\vec{B}(s) \times \vec{B}^*(s) - 2\vec{B}^*(s) \times \vec{B}(s) \right) \oint \kappa(s) ds + \left(-\vec{T}(s) \times \vec{B}^*(s) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \vec{B}^*(s) \times \vec{T}(s) - \vec{T}^*(s) \times \vec{B}(s) - \vec{B}(s) \times \vec{T}^*(s) \right) \oint \tau(s) ds \right. \\
&\quad \left. + \left(-2\vec{B}(s) \times \vec{B}(s) \right) \oint \kappa^*(s) ds + \left(-\vec{T}(s) \times \vec{B}(s) - \vec{B}(s) \times \vec{T}(s) \right) \oint \tau^*(s) ds \right) \\
&= \oint \kappa^*(s) ds
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Böylece şu sonuç verilebilir:

Sonuç 4.2.3 Bir eğrinin binormal vektörü ve onun vektörel moment vektör çifti ile kuaterniyonik eğrinin binormal vektörü ve onun vektörel moment vektör çiftinin birim dual küre üzerinde çizdikleri dual eğrilere Öklid uzayında karşılık gelen regle yüzeylerin dağılma parametresi, dual açılım açısı ve dual açılım uzunluğu eşittir.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tezde ilk olarak herhangi bir regle yüzeyin uzaysal (pure) kuaterniyonik ifadesi verildi. Daha sonra yüzeyin striksiyon eğrisi ve dağılma parametresi kuaterniyon işlemleri kullanılarak yeniden ifade edildi. Yüzeyin kapalı olması durumunda açılım açısı ve açılım uzunluğunun kuaterniyonik ifadesi verildi. Dayanak eğrisi kuaterniyonik eğri alındığında elde edilen regle yüzeylerin integral invaryantları arasındaki bağıntılar yeniden hesaplandı. Study tekabül prensibinden hareketle regle yüzeyin dual ifadesi kuaterniyonik olarak verildi. Son olarak yüzeyin kapalı olması durumunda integral invaryantları yeniden hesaplandı.

Kuaterniyonlar kullanılarak yüzeyin Şekil operatörü, Gauss eğriliği, ortalama eğriliği, Christoffel sembolleri, temel formları gibi özellikler incelenebilir. Benzer çalışma aynı yöntemler kullanılarak Lorentz ve dual Lorentz uzaylarında da çalışılabilir.

KAYNAKLAR

- [1] Anonim, (2020). Quaternion plaque on Brougham Bridge, Dublin. <https://en.wikipedia.org/wiki/Quaternion> (Erişim tarihi: 04.07.2019).
- [2] Aslan, S. (2017). Kuaterniyonların diferensiyel geometrisi. Doktora Tezi, Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Ankara.
- [3] Bharathi, K. & Nagaraj, M. (1987). Quaternion valued function of a real variable Serret-Frenet formula. *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics*, 18(6), 507-511.
- [4] Biran, L. (1981). Diferensiyel geometri dersleri. AR-Yayın Dağıtım, İstanbul, 128s.
- [5] Blaschke, W. (1949). Diferansiyel geometri dersleri (Çeviren: Kerim Erim). İstanbul Üniversitesi Yayınları, No:433, İstanbul.
- [6] Chen, J. & Li, J. (2005), Quaternionic maps and minimal surfaces. *Annali Della Scuola Normale Superiore di Pisa-Classe di Scienze*, 4(3), 375-388.
- [7] Çöken, A. C. & Tuna, A. (2004). On the quaternionic inclined curves in the semi-Euclidean space \mathbb{E}_2^4 . *Applied Mathematics and Computation*, 155(2), 373-389.
- [8] Çöken, A., Ekici, C., Kocayusufoğlu, İ. & Görgülü, A. (2009). Formulas for dual-split quaternionic curves. *Kuwait Journal of Science and Engineering*, 36(1A), 1-14.
- [9] Dlab, V. & Ringel, C. M. (1977). Normal forms of real matrices with respect to complex similarity. *Linear Algebra and Its Applications*, 17(2), 107-124.
- [10] Doğan, B. (2018). Kuaterniyonik normal eğriler. Yüksek Lisans Tezi, Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Bilecik.
- [11] Do Carmo, M. P. (1976). Differential geometry of curves and surfaces. Prentice Hall, Englewood Cliffs.

- [12] Girard, P. R. (1984). The quaternion group and modern physics. *European Journal of Physics*, 5, 25-32.
- [13] Gürsoy, O. (1990). The dual angle of pitch of a closed ruled surface. *Mechanism and Machine Theory*, 25(2), 131-140.
- [14] Güven, İ.A. (2010). Dual küresel eğriler ve regle yüzeyler. Doktora Tezi, Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Ankara.
- [15] Hacısalihoğlu, H. H. (1983). Hareket geometrisi ve kuaterniyonlar teorisi. Gazi Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Yayınları, 2, Ankara, 338s.
- [16] Hacısalihoğlu, H. H. (1983). Diferensiyel geometri. İnönü Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi Yayınları, Mat. No. 2.
- [17] Hacısalihoğlu, H. H. (1972). On the pitch of a closed ruled surface. *Mechanism and Machine Theory*, 7, 291-305.
- [18] Hamilton, W. R. (1899). Elements of quaternions. I, II and III, Chelsea, New York.
- [19] Hanson, J. A. & Ma, H. (1995). Quaternion frame approach to streamline visualization. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 1(2), 164-174.
- [20] Karadağ, M. & Sivridağ, A.İ. (1997). Tek değişkenli kuaterniyon değerli fonksiyonlar ve eğilim çizgileri. *Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Fen Bilimleri Dergisi*, 13(1-2), 23-36.
- [21] Kızıltuğ, S. & Yaylı, Y. (2015). On the quaternionic Mannheim curves of $Aw(k)$ -type in Euclidean space \mathbb{E}^3 . *Kuwait Journal of Science*, 42(2), 128-140.
- [22] Kou, K. I. & Xia, Y. H. (2018). Linear quaternion differential equations: Basic theory and fundamental results. *Studies in Applied Mathematics*, 141(1), 3-45.
- [23] O’neill, B. (2006). Elementary differential geometry. Revised Second Edition, Elsevier, Los Angeles.

- [24] Sabuncuođlu, A. (2006). Diferansiyel geometri. Nobel Yayın Dağıtım, Ankara, 440s.
- [25] Shoemake, K. (1985). Animating rotation with quaternion curves. *ACM SIGGRAPH Computer Graphics*, 9(3), 245-254.
- [26] Sivridağ, A. İ., Güneş, R. & Keleş, S. (1994). The Serret-Frenet formulae for dual quaternion-valued functions of a single real variable. *Mechanism and Machine Theory*, 29(5), 749-754.
- [27] Soyfidan, T. (2011). Kuaterniyonik involüt-evolüt eğri çiftleri. Yüksek Lisans Tezi, Sakarya Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Sakarya.
- [28] Şemin, F. (1983). Diferansiyel geometri I. İstanbul Üniversitesi Yayınları, İstanbul, 591s.
- [29] Şenatalar, M. (1978). Diferansiyel geometri (eğriler ve yüzeyler teorisi). İstanbul Devlet Mühendislik ve Mimarlık Akademisi Yayınları, Sayı 151, İstanbul, 349s.
- [30] Şenyurt, S., Cevahir, C. & Altun, Y. (2017). On spatial quaternionic involute curve a new view. *Advances in Applied Clifford Algebras*, 27, 1815-1824.
- [31] Şenyurt, S. & Çalışkan, M. (2014). Parallel ruled surfaces and some their characteristic properties. *Bulletin of Pure and Applied Sciences*, 33E(2), 113-124.
- [32] Tuncer, O., Çanakcı, Z., Gök, İ. & Yaylı, Y. (2018), Circular surfaces with split quaternionic representations in Minkowski 3-space. *Advances in Applied Clifford Algebras*, 28(3), 63.
- [33] Ünal, T. (2011). Kuaterniyonlar ve kuaterniyon matrisleri. Yüksek Lisans Tezi, Dumlupınar Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Kütahya.
- [34] Veldkamp, G.R. (1976). On the use of dual numbers vectors and matrices in instantaneous spatial kinematics. *Mechanism and Machine Theory*, 11, 141-156.
- [35] Vince, J. (2011). Quaternions for computer graphics, Springer-Verlag.
- [36] Yaylı, Y. and Aslan, S. (2015). Canal surfaces with quaternions. *Advances in Applied Clifford Algebras*, 26(1), 31-38.

ÖZGEÇMİŞ

- Adı-Soyadı** : Abdussamet ÇALIŞKAN
Doğum Yeri : Van
Doğum Tarihi : 25.09.1988
Medeni Hali : Evli
Bildiği Yabancı Dil : İngilizce
İletişim Bilgileri : Ordu Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü
a.caliskan@odu.edu.tr,abdussamet65@gmail.com
Lise : Yalova Lisesi
Lisans : Ordu Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü 2008
Yüksek Lisans : Ordu Üniversitesi 2014

İş deneyimi		
Görev	Görev Yeri	Yıl
Araştırma Görevlisi	Ordu Üniversitesi	2013-2020
Yazı İşleri Müdür Yardımcılığı	Ordu Üniversitesi Bilim ve Teknoloji Dergisi	2013-2015
Tez İnceleme Komisyon Üyesi	Ordu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü	2015-2020

Yayınlar

1. Şenyurt, S. and Çalışkan, A., “Curves and ruled surfaces according to alternative frame in dual space”, Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1 Mathematics and Statistics, 69(1) 684-698, (2020).
2. Şenyurt, S. and Çalışkan, A., “The dual spatial quaternionic expression of ruled surfaces”, Thermal Science, 23(1) 403-411, (2019).

3. Şenyurt, S. and Çalışkan, A., “The quaternionic expression of ruled surfaces”, *Filomat*, 32(16) 5753-5766, (2018).
4. Kılıçoğlu, Ş., Şenyurt, S. and Çalışkan, A., “On the tangent vector fields of striction curves along the involutive and Bertrandian Frenet ruled surfaces”, *International Journal of Mathematical Combinatorics*, 2 33-43, (2018).
5. Şenyurt, S. and Çalışkan, A., “Principal normal vectors belonging to striction curves of Frenet and Bertrandian Frenet Ruled Surfaces”, *AIP Conference Proceedings*, 1833, doi:10.1063/1.4981704, (2017).
6. Şenyurt, S., Çalışkan, A., and Kılıçoğlu, Ş., “A new approach on the striction curves belonging to Bertrandian Frenet ruled surfaces”, *International Journal of Mathematical Combinatorics*, 2 1-10, (2017).
7. Şenyurt, S. and Çalışkan, A., “Smarandache curves of Mannheim curve couple according to Frenet frame”, *Mathematical Sciences and Applications E-notes*, 5(1), 122-136, (2017).
8. Şenyurt, S. and Çalışkan, A., “A new approach on the striction curves along Bertrandian Darboux Frenet ruled surface”, *AIP Conference Proceedings*, 1726, (2016).
9. Şenyurt, S. and Çalışkan, A., “B-Scroll Weingarten surface”, *Ordu University Journal of Science and Tecnology*, 6(2), 220-231, (2016).
10. Şenyurt, S. and Çalışkan, A., “Smarandache curves in terms of Sabban frame of fixed pole curve”, *Boletim da Sociedade Paranaense de Matematica*, 34(2), 53-62, (2016).
11. Şenyurt, S., Sivas, S. and Çalışkan, A., “ N^*C^* – Smarandache curve of involute-evolute curve couple according to Frenet frame”, *Algebras Groups and Geomteries*, 33(2) 153-163, (2016).
12. Şenyurt, S., Çalışkan, A. and Çelik, Ü., “ N^*C^* – Smarandache curve of Bertrand curves pair according to Frenet frame”, *International Journal of Mathematical Combinatorics*, 1, 1-7, (2016).
13. Kılıçoğlu, Ş. Şenyurt, S. and Çalışkan, A., “On the striction curves of involutive Frenet ruled surfaces in E^3 ”, *Konuralp Journal of Mathematics*, 4(2) 282-289, (2016).
14. Kılıçoğlu, Ş., Şenyurt, S. and Çalışkan, A., “On the striction curves along the involutive and Bertrandian Darboux ruled surfaces based on the tangent vector fields”, *New Trends in Mathematical Sciences*, 4(4), 128-136, (2016).

15. Şenyurt, S. and Çalışkan, A., “An application according to spatial quaternionic Smarandache curve”, Applied Mathematical Sciences, 9(5), 219-228, (2015).
16. Şenyurt, S. and Çalışkan, A., “Smarandache curves in terms of Sabban frame of spherical indicatrix curves”, General Mathematical Notes, 31(2), 1-15, (2015).
17. Şenyurt, S. and Çalışkan, A., “ N^*C^* – Smarandache curves of Mannheim curve couple according to Frenet frame”, International Journal of Mathematical Combinatorics, 1 1-13, (2015).
18. Şenyurt, S. and Çalışkan, A., “Spinor formulation of Sabban frame of Curve on S^2 ”, Pure Mathematical Sciences, 4(1) 37-42, (2015).

Konferans ve Sempozyumlar

1. Smarandache curves in terms of Sabban frame of spherical indicatrix curves (01.07.2013 -05.07.2013), Yayın Yeri: XI. Geometri Sempozyumu, 2013.
2. An Examination on the striction curves along Bertrandian Frenet ruled surfaces based on tangent vector fields in E^3 , (05.11.2015 -07.11.2015), Yayın: International conference on Advancement in Mathematical sciences, 2015.
3. An examination on the striction curves of involutive and Bertrandian Frenet ruled surfaces based on tangent vector Fields in E^3 (05.11.2015 -07.11.2015), Yayın Yeri: International conference on Advancement in Mathematical sciences, 2015.
4. B-Scroll Weingarten surface (27.07.2015 -30.07.2015), Yayın Yeri: 13. Gemoetri Sempozyumu, 2015.
5. Smarandache curves of involute evolute curve couple according to Frenet frame (31.08.2015 -03.09.2015), Yayın Yeri: 4th International Eurasian Conference on Mathematical Sciences and Applications, Athens, 2015.
6. Smarandache curves of Mannheim curve couple according to Frenet frame (31.08.2015 -03.09.2015), Yayın Yeri: 4th International Eurasian Conference on Mathematical Sciences and Applications, Athens, 2015.
7. A new approach on the striction curves along Bertrandian Darboux Frenet ruled surface (21.04.2016 -23.04.2016), Yayın Yeri: International Conference on Advances in Natural and Applied Sciences, Antalya, 2016.

8. N^*C^* – Smarandache curve of Bertrand curve pair according to Frenet frame (25.05.2016 -28.05.2016) , Yayın Yeri: 14th International Geometry Symposium, 2016.
9. A new approach on the striction curves along Bertrandian Frenet ruled surfaces (16.08.2016- 19.08.2016), Yayın Yeri: 5th International Eurasian Conference on Mathematical Sciences and Applications Belgrade, 2016.
10. Smarandache curves of Bertrand curve pair according to Frenet frame (16.08.2016-19.08.2016) , Yayın Yeri:5th International Eurasian Conference on Mathematical Sciences and Applications Belgrade, 2016.
11. On the striction curves of involutive Frenet ruled surfaces in E^3 , (16.08.2016 - 19.08.2016), Yayın Yeri:5th International Eurasian Conference on Mathematical Sciences and Applications Belgrade, 2016.
12. The quaternionic expression of ruled surfaces (18.04.2017 -21.04.2017) , Yayın Yeri: 2nd International Conference on Advances in Natural and Applied Sciences, Antalya, 2017.
13. Principal normal vectors belonging to striction curves of Frenet and Bertrandian Frenet ruled surfaces, (18.04.2017 -21.04.2017), Yayın Yeri: 2nd International Conference on Advances in Natural and Applied Sciences, Antalya, 2017.
14. The dual spatial quaternionic expression of ruled surfaces (27.06.2018 -29.06.2018), Yayın Yeri: International Conference on Mathematics and Mathematics Education, 2018.
15. A new approach on dual spherical curves and surfaces (04.07.2018 -07.07.2018), Yayın Yeri: 16th International Geometry Symposium, 2018.
16. Curves and ruled surfaces according to alternative frame in dual space (11.09.2018 -13.09.2018), Yayın Yeri: 2nd International Conference on Pure and Applied Mathematics, 2018.
17. Dual pole indicatrix curve and surface (11.09.2018 -13.09.2018), Yayın Yeri: 2nd International Conference on Pure and Applied Mathematics, 2018.