T.C.
ORDU ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KONVEKS VE QUASİ - KONVEKS STOKASTİK SÜREÇLER İÇİN İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ ÜZERİNE BAZI TAHMİNLER

ŞULE ŞADİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ORDU 2019

TEZ ONAY

Ordu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü öğrencisi Şule ŞADİ tarafından hazırlanan ve Prof. Dr. Selahattin MADEN danışmanlığında yürütülen "Konveks ve Quasi-Konveks Stokastik Süreçler İçin İntegral Eşitsizlikleri Üzerine Bazı Tahminler" adlı bu tez, jürimiz tarafından 24 / 07 / 2019 tarihinde oy birliği / ~~oy çokluğu~~ ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Danışman	:	Prof. Dr. Selahattin MADEN	
Başkan	:	Prof. Dr. Selahattin MADEN Matematik, Ordu Üniversitesi	İmza :
Üye	:	Doç. Dr. Yıldıray ÇELİK Matematik, Ordu Üniversitesi	İmza :
Üye	:	Dr. Öğr. Üyesi Sercan TURHAN Matematik, Giresun Üniversitesi	İmza :

ONAY:

24. / 07 / 2019.. tarihinde enstitüye teslim edilen bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulu'nun 24 / 07 / 2019.. tarih ve 2019.. / 417 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

T.C. ORDU ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ 1923

Enstitü Müdürü

Dr. Öğr. Üyesi Mehmet Sami GÜLER

TEZ BİLDİRİMİ

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

İmza

ŞULE ŞADİ

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

KONVEKS VE QUASİ - KONVEKS STOKASTİK SÜREÇLER İÇİN İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ ÜZERİNE BAZI TAHMİNLER

Şule ŞADİ

Ordu Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı, 2018
Yüksek Lisans Tezi, 112s.

Danışman: Prof. Dr. Selahattin MADEN

Bu tez çalışması beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde eşitsizlikler, olasılık teorisi ve stokastik süreçler teorisinin tarihsel gelişimini veren bir giriş yapılmıştır. İkinci bölümde tezde kullanılan bazı tanım ve teoremler verilmiştir. Üçüncü bölümde değişik Quasi-konveks fonksiyon tipleri için Hermite-Hadamard ve Osrtowski tipli bazı eşitsizlikler verilmiştir. Dördüncü bölümde çeşitli konveks ve Quasi–konveks stokastik süreçlerle ilgili Hermite-Hadamard, Simpson ve Ostrowski tipli bazı eşitsizlikler ele alınmıştır. Beşinci bölümde sonuç ve öneriler verilmiştir.

Anahtar Sözcükler: Stokastik süreç, Konveks fonksiyon, İntegral eşitsizlikleri, İntegral ortalamaları, Hermite-Hadamard eşitsizliği, Quasi- konvekslik.

ABSTRACT

SOME ESTIMATES ON INTEGRAL INEQUALITES FOR CONVEX AND QUASI-CONVEX STOCHASTIC PROCESSES

Şule ŞADİ

University of Ordu
Institute for Graduate Studies in Science and Technology
Department of Mathematics, 2019
MSc. Thesis, 112p.

Supervisor: Prof. Dr. Selahattin MADEN

This thesis consists of five chapters. In the first chapter it is given an introduction historical development on inequalities, probabilty theory and stochastic processes. We given some definitions and theorems which are used in this thesis in the second chapter. In the chapter third, it is given Hermit-Hadamard and Ostrowski-type inequalities for Quasi- convex functions. In the chapter fourth, it is obtained some Hermite-Hadamard, Simpson and Ostrowski type inequalities concerning with convex and Quazi-convex stochastic processes It is given some result and propositions in the fifth chapter.

Key Words: Stochastic process, Convex function, Integral inequalities, Integral means, Hermite-Hadamard inequality. Quazi-convexity.

TEŞEKKÜR

Tüm çalışmalarım boyunca her zaman bilgi ve deneyimleriyle yolumu açan değerli hocam Prof. Dr. Selahattin MADEN' e içten teşekkürlerimi sunarım.

Hem bu zorlu ve uzun süreçte hem de hayatım boyunca yanımda olan ve ideallerimi gerçekleştirmemi sağlayan değerli aileme yürekten teşekkürü bir borç bilirim.

Ayrıca Lisansüstü eğitimim sırasında kendilerinden ders aldığım ve engin tecrübelerinden yararlandığım Ordu Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümündeki tüm hocalarıma teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

ŞEKİLLER LİSTESİ

SİMGELER ve KISALTMALAR

$\mathbb{N}$	: Doğal Sayılar Kümesi
$\mathbb{Q}$	: Rasyonel Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}^+$	: $(0,\infty)$ Aralığı
$\mathbb{R}_0^+$	: $[0,\infty)$ Aralığı
$\mathbb{Z}$	: Tam Sayılar Kümesi
I^0	: I kümesinin içi
$JQC(I)$	: I üzerinde Jensen - Quasi-Konveks Fonksiyonlar Sınıfı
$L(I)$	: I üzerinde Log Konveks Fonksiyonlar Sınıfı
$Q(I)$	: I üzerinde Godunova - Levin Fonksiyonlar Sınıfı
$QC(I)$	: I üzerinde Quasi - Konveks Fonksiyonlar Sınıfı
$P(I)$	: I üzerinde P- Fonksiyonlar Sınıfı
$WQC(I)$	: I üzerinde Wright - Quasi-Konveks Fonksiyonlar Sınıfı
${}_R D_{a+}^{\alpha}$	: α $-$Mertebeden Riemann Liouville Kesirli Türev
${}_H D_{a+}^{\alpha}$	: α $-$Mertebeden Hadamard Kesirli Türev
Γ	: Gamma Fonksiyonu
${}_R J^{\alpha}$	: α $-$Mertebeden Riemann Liouville Kesirli İntegral
${}_H J^{\alpha}$	: α $-$Mertebeden Hadamard Kesirli İntegral
$K_m(I)$	: I üzerinde m-Konveks Fonksiyonlar Sınıfı
$K_m^{\alpha}(I)$	: I üzerinde (α,m)- Konveks Fonksiyonlar Sınıfı
K_s^2	: İkinci Anlamda s-Konveks Fonksiyonlar Sınıfı
$L[a,b]$	: $[a,b]$ Aralığında İntegrallenebilir Fonksiyonlar Kümesi
$\beta(x,y)$	: x,y Pozitif Reel Sayılarının Beta Fonksiyonu
$X'(t_0,.)$	: $X(t,.)$ Stokastik Süurecinin t_0 noktasındaki Birinci Türevi
$X''(t_0,.)$	: $X(t,.)$ Stokastik Süurecinin t_0 noktasındaki İkinci Türevi
$X'_-(t_0,.)$	: $X(t,.)$ Stokastik Süurecinin t_0 noktasındaki Sol Türevi
$X'_+(t_0,.)$	: $X(t,.)$ Stokastik Süurecinin t_0 noktasındaki Sağ Türevi

1. GİRİŞ

Konvekslik, M. Ö. 250 yılında Archimedes' in ünlü π değerini hesaplamasına kadar uzanan basit ve bilinen bir kavramdır. Archimedes bir konveks şeklin çevre uzunluğunun onu çevreleyen diğer bir şeklin çevre uzunluğundan daha küçük olduğunu önemle ifade etmiştir. Konvekslik konusunu gerektiren matematiğin ilk konularından birisi çizgisel analizdir. İkinci türev testi konveksliğin bulunmasında bize sonucu veren güçlü bir araçtır.

Konveks fonksiyonların tarihi çok eskiye dayanmakla birlikte başlangıcı 19. yüzyılın sonları olarak gösterilebilir. 1893' te Hadamard'ın çalışmasında açıkça belirtilmese de bu türden fonksiyonların temellerinden bahsedilmektedir. Bu tarihten sonra literatürde konveks fonksiyonları ima eden sonuçlara rastlanılmasına rağmen konveks fonksiyonların ilk kez sistemli olarak 1905 ve 1906 yıllarında J.L.W.V. Jensen tarafından çalışıldığı ve Jensen' in bu öncü çalışmalarından itibaren konveks fonksiyonlar teorisinin hızlı bir gelişme gösterdiği kabul edilmektedir. Beckenbach ve Bellman (1961) ve Mitrinoviç (1970) gibi pek çok araştırmacı, konveks fonksiyonlar için eşitsizlikler konusunu kitaplarında ele almışlardır. Sadece konveks fonksiyonlar için eşitsizlikleri içeren ilk kaynak Pecaric (1987) tarafından yazılmıştır. Ayrıca Roberts ve Varberg (1973), Niculescu ve Persson (2005, 2006) gibi pek çok kişi konveks fonksiyonlar üzerinde eşitsizliklerle ilgi çok sayıda çalışma yapmışlardır. Bu çalışmaların bir kısmını integral eşitsizlikleri oluşturmaktadır.

Eşitsizlikler matematiğin hemen hemen tüm alanlarında önemli bir rol oynar. Eşitsizlikler ile ilgili ilk temel çalışma 1934'te Hardy, Littlewood ve Polya tarafından yazılan "Inequelities" adlı kitaptır (1952). Bu salt eşitsizlikler konusunu ele alan ve birçok yeni eşitsizlikler ve uygulamaları içeren ilk kaynak kitaptır. E.F. Beckenbach ve R. Bellman (1961) tarafından 1934-1960 döneminde eşitsizlikler üzerine elde edilen bazı ilginç sonuçları içeren "Inequalities" adlı ikinci kitap yazılmıştır. Mitrinoviç' in 1970' te yayınlanan "Analytic Inequalities" adlı kitabı yukarıda bahsedilen iki kitapta da yer almayan yeni konular içerir. Son yıllarda da S. S. Dragomir, V. Lakshmikantham, Ravi P. Agarwal gibi araştırmacılar tarafından eşitsizlikler konusunda pek çok kitap, makale ve monografi yazılmıştır.

Matematiksel analiz, uygulamalı matematik, olasılık teorisi ve matematiğin diğer çeşitli alanlarında doğrudan veya dolaylı olarak konveks fonksiyonların ve eşitsizliklerin birçok uygulaması vardır. Bununla birlikte konveks fonksiyonlar, eşitsizlikler teorisiyle yakından ilişkilidir ve birçok önemli eşitsizlik, konveks fonksiyonların uygulamalarının sonucudur. Örneğin; Hölder ve Minkowski eşitsizlikleri gibi genel eşitsizlikler, konveks fonksiyonlar için Jensen eşitsizliğinin sonucudur. Bu bağlamda, konveks fonksiyonlar teorisinde eşitsizliklerin özel bir yere sahip olduğu ifade edilebilir. Aslında konveks fonksiyonun kendi tanımı da bir eşitsizliktir. Benzer şekilde, konveks fonksiyonlar da eşitsizlikler teorisinde çok önemli bir yere sahiptir. 19. yüzyılın sonlarında ve 20. yüzyılın başlarında pek çok eşitsizlik bulunmuştur. Bu eşitsizliklerin bazıları konveks fonksiyonlar sınıfı için yazılan temel eşitsizlikler haline gelmiştir. 1881 yılında Hermite tarafından ifade edilen ve bugün birçok kaynakta Hermite-Hadamard eşitsizliği olarak adlandırılan eşitsizlik bunlardan bir tanesidir. Bu eşitsizlik üzerine günümüze kadar birçok çalışma yapılmıştır. Bu çalışmaların büyük bir bölümü S.S. Dragomir ve C.E.M Pearce tarafından 2000 yılında yazılmış olan ”Selected Topics on Hermite-Hadamard Inequalities and Applications” adlı kaynakta toplanmıştır.

Eşitsizlikler ve konveks fonksiyonlar matematiğin tüm alanlarında önemli bir rol oynaması ve aktif bir araştırma alanı olmasından dolayı, özellikle son yıllarda araştırmacıların ilgi odağı haline gelmiş ve bu konuda yapılan çalışmaların sayısında bir hayli artış gözlenmiştir.

Olasılık teorisi ve stokastik süreçlerden kısaca bahsedecek olursak; bilim adamlarının çoğu olasılık hesabının doğuşunu Blaise Pascal (1623-1662) ile Pierre de Fermat (1601-1665)’ in 17. yüzyıldaki yazışmalarına bağlıyor. Ancak bu dönemdeki Olasılık Teoresinin oluşumundaki en önemli rol Jacop Bernoulli’e (1654-1705) aittir. J. Bernoulli’nin elde ettiği en önemli sonuç ”Büyük Sayılar Kanunudur”. Bu kanun Olasılık Teorisinin uygulamaları için temel oluşturmaktadır. Bu kanun ilk kez Jacop Bernoulli’nin ölümünden sonra 1713 yılında yayınlanan ”Ars Conectandi (The Art of Conjecture)” isimli kitabında limit teoremi şeklinde yer almıştır. Jacop Bernoulli’den sonraki dönemlerde Olasılık Teoresinde iz bırakmış bilim adamlarından Pierre-Remond de Montmort (1678-1719), Abraham de Moivre (1667-1754), Thomas Bayes (1702-1761), Pieere Simon de Laplace (1749-1827), Carl Friedrich Gauss (1777-1855) ve Simon Denis Poisson (1781-1840) sıralamak mümkündür. 19. yüzyılın ikinci yarısından itibaren Olasılık Teorisinin temel problemlerinin incelenmesinde P. L. Chebyshev (1821-1894), A. A. Markov (1856-1922), A. M. Liapunov (1857-1918) vs. büyük rol oynadılar.

Olasılık teorisinde stokastik kavramı ilk kez bu teorinin kurucularından olan Jacop Bernoulli (1654-1705) tarafından kullanılmaya başlanmıştır. Sonra bu kavram bir süre unutulmuş olmasına rağmen ünlü olasılıkçı V. Bortkiyeviç (1868-1913) in büyük katkısıyla 20. yüzyılın başlarında yeniden kullanılmaya başlanmıştır. Stokastik süreç kavramı ise sistematik olarak A. N. Kolmogorov ve A. Y. Hinçin gibi ünlü olasılıkçılar tarafından ortaya konulmuş ve bu alanda ilk esaslı sonuçlar elde edilmeye başlanmıştır. A. N. Kolmogorov günümüzde Markov tipli süreç olarak adlandırılan stokastik süreçlerin esaslarını ortaya koyarken A. Y. Hinçin çalışmalarında stasyoner süreçler olarak adlandırdığı stokastik süreçler üzerinde çalışmalar yapmıştır.

Çağımızda stokastik süreçlere ilişkin problemlere büyük ilgi gösterilmektedir. 20. Yüzyılın ikinci yarısından sonra Stokastik Süreçler Teorisinin gelişmesinde ve derinleşmesinde büyük hizmetleri olmuş bilim adamlarından J.L. Doob, N. Winner, A. V. Skorokhod, W. Feller, E. Dinkin, E. Çınlar, T. Sarimkov, P. Levy isimlerini sıralamak mümkündür. Bu dönemde Stokastik Süreçlerin birçok yararlı uygulamaları da bilim adamları tarafından ele alınmıştır.

Olaslık teorisi, özellikle rastgele değişkenler ve stokastik süreçler, eşitsizlikler ve konveks fonksiyonların en önemli uygulama alanlarındandır. Son zamanlarda konveks fonksiyonlar için sağlanan birçok eşitsizlik konveks stokastik süreçler için de elde edilmiştir. İlk kez Nikodem (1980) konveks stokastik süreçleri tanıtmıştır. Sonra Skowronski (1992) Jensen konveks stokastik süreçlerin özelliklerini incelemiştir. Daha sonra ise Skowronski (1995) konveks stokastik süreçler için daha ileri sonuçları sunmuştur. D. Kotrys (2012) konveks ve güçlü konveks stokastik süreçler için Hermite-Hadamard eşitsizliklerini vermiştir. Maden ve ark., (2015), birinci anlamda *s*-konveks stokastik süreçleri tanımlamış ve bu süreçler için Hermite-Hadamard tipi eşitsizlikleri ispatlamışlardır. Set ve ark., (2014) ikinci anlamda *s*-konveks stokastik süreçleri ele almışlar ve bu süreçler için Hermite-Hadamard tipi eşitsizlikleri elde etmişlerdir.

2. GENEL BİLGİLER

2.1. Konveks Fonksiyonlarla İlgili Temel Kavramlar

Tanım 2.1.1 (Konveks Küme) L bir lineer uzay ve A ⊆ L olmak üzere $\forall x, y \in A$ için

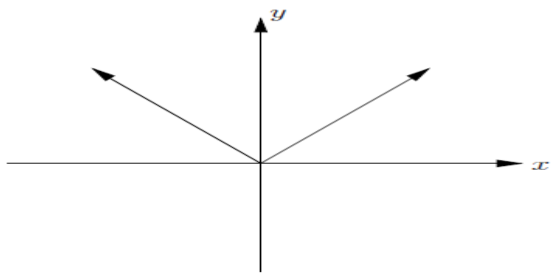
$$B = \{z \in L : z = \alpha x + (1-\alpha)y, 0 \leq \alpha \leq 1\} \subseteq A$$

ise A kümesine konveks küme denir. Eğer $z \in B$ ise $z = \alpha x + (1-\alpha)y$ eşitliğindeki x ve y nin katsayıları için $\alpha + (1-\alpha) = 1$ bağıntısı her zaman doğrudur. Bu sebeple konveks küme tanımındaki $\alpha, 1-\alpha$ yerine $\alpha + \beta = 1$şartını sağlayan ve negatif olmayan α, β reel sayıları alınabilir. Geometrik olarak B kümesi uç noktaları x ve y olan bir doğru parçasıdır. Bu durumda sezgisel olarak konveks küme, boş olmayan ve herhangi iki noktasını birleştiren doğru parçasını içeren eden kümedir(Bayraktar, 2000).

Tanım 2.1.2 (Konveks Fonksiyon) I, ℝ' de bir aralık ve $f: I \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere her $x, y \in I$ ve $\alpha \in [0,1]$ için,

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y)$$

şartı sağlanıyorsa f fonksiyonuna konveks fonksiyon denir (Bakınız Şekil 2.1). Örneğin, $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = |x|$ fonksiyonu I üzerinde bir konveks fonksiyondur.



Şekil 2.1. Bir aralıkta konveks fonksiyon ($f(x) = |x|$)

Sonuç 2.1.1 $I \subset \mathbb{R}$ olmak üzere, bir f fonksiyonunun I' da konveks olması için gerek ve yeter şart, her $x, y \in I$ için $p + q > 0$ olan $\forall p, q \geq 0$ için

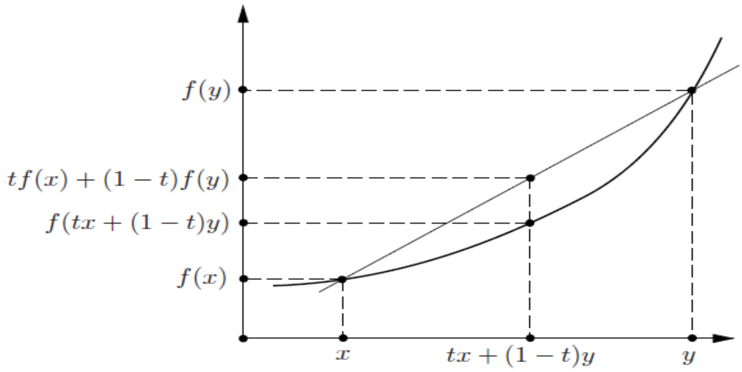
$$f\left(\frac{px+qy}{p+q}\right) \leq \frac{pf(x)+qf(y)}{p+q}$$

olmasıdır (Pecaric, Proschan ve Tong, 1992). I üzerinde tanımlı bir f fonksiyonunun kesin konveksliğinin geometrik anlamı $(x, f(x))$ ve $(y, f(y))$ noktalarını içeren I üzerindeki doğru parçasının f' nin grafiğinin üst kısmında yer almasıdır. Bunu Şekil 2.2 de görmekteyiz.

Eğer f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında tanımlı, $[a,b]$ aralığında konveks (konkav) ve x_0 noktasında diferensiyellenebilen bir fonksiyon ise $x \in (a,b)$ için,

$$f(x) - f(x_0) \leq (\geq) f'(x_0)(x - x_0)$$

eşitsizliği yazılır (Roberts ve Varberg, 1973).



Şekil 2.2. Konveks fonksiyon şekli

Teorem 2.1.1 (Young Eşitsizliği) f, $[0,c]$, $(c > 0)$, aralığı üzerinde reel değerli, artan ve sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer $f(0) = 0, a \in [0,c]$ ve $b \in [0, f(c)]$ ise,

$$\int_0^a f(x)dx + \int_0^b f^{-1}(x)dx \geq ab$$

eşitsizliği sağlanır (Young, 1912).

Tanım 2.1.3 (Süreklilik) $f: S \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x_0 \in S$ ve $\epsilon > 0$ verilmiş olsun. Eğer

$$|x - x_0| < \delta \quad olan \quad \forall x \in S \quad için \ |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa f, x_0 da süreklidir denir (Bayraktar, 2010).

Tanım 2.1.4 (Lipschitz Şartı) $f: S \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$$

olacak şekilde bir $M > 0$ sayısı varsa f, S de Lipschitz şartını sağlıyor denir (Bayraktar, 2010).

Sonuç 2.1.2 f, S de Lipschitz şartını sağlıyorsa f, S de düzgün süreklidir (Bayraktar, 2010).

Tanım 2.1.5 (Düzgün Süreklilik) $f: S \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x_0 \in S$ ve $\epsilon > 0$ verilmiş olsun.

$$x \in S \ ve \ |x_1 - x_2| < \delta \ şartını \ sağlayan \ \forall x_1, x_2 \in S \ için \ |f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa f, S' de düzgün süreklidir denir (Bayraktar, 2010).

Tanım 2.1.6 (Mutlak Süreklilik) I, $\mathbb{R}$'nin boştan farklı bir alt kümesi ve $f: I \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. I nın $\{(a_i, b_i)\}_{i=1}^{n}$ ayrık açık alt aralıklarının bir birleşimini göz önüne alalım. Eğer $\forall \epsilon > 0$ için $\sum_{i=1}^{n} |b_i - a_i| < \delta$ olduğunda $\sum_{i=1}^{n} |f(b_i) - f(a_i)| <$

ϵ olacak şekilde bir $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ sayısı varsa, f fonksiyonu I kümesinde mutlak süreklidir denir (Bayraktar, 2010).

Konvekslik, Lipschitz şartı, süreklilik ve mutlak süreklilik arasındaki ilişki aşağıdaki teorem ile verilmektedir.

Teorem 2.1.2 L lineer uzay, $U \in L$ bir açık küme ve $f: U \to \mathbb{R}$ fonksiyon olsun.

a. f, U açık kümesinde konveks olsun. Eğer f, U' da bir noktanın komşuluğunda üstten sınırlı bir fonksiyon ise f, U' da yerel Lipschitz' dir ve bu nedenle U'nun kompakt alt kümesinde Lipschitz şartını sağlar ve U' da süreklidir.

b. f, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ açık kümesi üzerinde konveks ise f, U' nun her kompakt altkümesinde Lipschitz şartını sağlar ve U' da süreklidir (Pecaric, Proschan ve Tong, 1992).

Tanım 2.1.7 (p Normu) X, $\mathbb{R}^n$' de bir küme olmak üzere μ, X' in alt kümelerinin σ-cebiri üzerinde bir ölçü ve f, X üzerinde tanımlanmış ölçülebilir bir fonksiyon olsun.

$$\|f\|_p = \begin{cases} \{\int |f|^p d\mu\}^{1/p}, & 1 \le p < \infty \\ sup|f| \quad , & p = \infty \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan ifadeye p-normu denir.

Tanım 2.1.8 (Gamma Fonksiyonu) $n > 0$ için,

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx$$

ile tanımlanan fonksiyon gamma fonksiyonu olarak tanımlanır (Jeffrey ve Dai, 2008). Bu integral $n > 0$ için yakınsaktır. Gamma fonksiyonunun bazı önemli özelliklerini aşağıdaki şekilde sıralayabiliriz:

i. $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n!$

ii. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

iii. $\int_0^\infty \frac{x^p}{1+x} dx = \Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin(p\pi)}, \; 0 < p < 1$

iv. $2^{2n-1}\Gamma(\mathrm{n})\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\Gamma(2\mathrm{n})$

Tanım 2.1.9 (Beta Fonksiyonu) $Re(x), Re(y) > 0$ için

$$\beta(x,y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon beta fonksiyonu olarak tanımlanır. Bu integral $x > 0$ ve $y > 0$ için yakınsaktır (Dragomir ve Pearce, 2000). Beta fonksiyonunun aşağıdaki özellikleri sağladığı kolayca görülebilir (Jeffrey ve Dai, 2008).

i. $\beta(x+1,y)=\frac{x}{x+y}\beta(x,y),\ x,y\in(0,\infty)$

ii. $\beta(1,y)=\frac{1}{y}$

iii. $\beta(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt=\int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}}dt\,,\ x,y>0$

iv. $\beta(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)},\ \ x,y>0$

v. $\beta(x,y)=\beta(y,x)$

2.2. Farklı Türden Bazı Konveks Fonksiyon Sınıfları

Tanım 2.2.1 (Log-Konveks Fonksiyon) I, $\mathbb{R}$ de bir aralık $f\colon I\to\mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Her $\forall x,y\in I$ ve $\alpha\in[0,1]$ için

$$f(\alpha x+(1-\alpha)y)\leq f^{\alpha}(x)f^{1-\alpha}(y)$$

eşitsizliğini sağlayan bir f fonksiyonuna Log-konveks fonksiyon denir (Prudnikov, Brychkov ve Marichev, 1981).

Tanım 2.2.2 (Godunova-Levin Fonksiyonu) $f\colon I\to\mathbb{R}$ negatif olmayan fonksiyonu $\forall x,y\in I,\lambda\in(0,1)$ için

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y)\leq\frac{f(x)}{\lambda}+\frac{f(y)}{1-\lambda}$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f ye Godunova-Levin fonksiyonu veya $Q(I)$ sınıfına aittir denir. Bu tanıma denk olarak; eğer $f\in Q(I)$ ve $x,y,z\in I$ ise bu takdirde

$$f(x)(x-y)(x-z)+f(y)(y-x)(y-z)+f(z)(z-x)(z-y)\geq 0$$

eşitsizliği sağlanır(Greenberg ve Pierskalla, 1970).

Tanım 2.2.3 (P- fonksiyonu) $f\colon I\to\mathbb{R}$ negatif olmayan bir fonksiyon olmak üzere eğer ∀x, $\forall x,y\in I,\lambda\in(0,1)$ için

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y)\leq f(x)+f(y)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonuna bir P-fonksiyonu veya $P(I)$ sınıfına aittir denir (Dragomir, Pecaric ve Persson, 1995).

Tanım 2.2.4 (Birinci Anlamda s-Konveks Fonksiyon) $f\colon\mathbb{R}_0^+\to\mathbb{R}$ ve $0<s\leq 1$ olsun. $\alpha^s+\beta^s=1$ olmak üzere her $u,v\in\mathbb{R}_0^+$ve her $\alpha,\beta\geq 0$ için

$$f(\alpha u+\beta v)\leq\alpha^s f(u)+\beta^s f(v)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonuna birinci anlamda s-konveks fonksiyon denir (Özdemir ve Yıldız, 2013).

Tanım 2.2.5 (İkinci Anlamda s-Konveks Fonksiyon) $f:\mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ ve $0 < s \leq 1$ olsun. $\alpha + \beta = 1$ olmak üzere her $u, v \in \mathbb{R}_0^+$ve her $\alpha, \beta \geq 0$ için

$$f(\alpha u + \beta v) \leq \alpha^s f(u) + \beta^s f(v)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonuna ikinci anlamda s-konveks fonksiyon denir (Hwang, 2011).

Tanım 2.2.6 (Bazı Özel Ortalamalar) Bu başlık altında a, b gibi iki pozitif reel sayı için bazı ortalamalar verilecektir (Bullen, Mitrinovic ve Vasis, 1988).

1. Aritmetik ortalama:

$$A = A(a,b) := \frac{a+b}{2}$$

2. Geometrik ortalama:

$$G = G(a,b) := \sqrt{ab}$$

3. Harmonik ortalama:

$$H = H(a,b) := \frac{2ab}{a+b}$$

4. Logaritmik ortalama:

$$L = L(a,b) := \begin{cases} a & , \quad a = b \\ \dfrac{b-a}{lnb - lna} & , \quad a \neq b \end{cases}$$

5. Identrik ortalama:

$$I = I(a,b) := \begin{cases} a & , \quad a = b \\ \dfrac{1}{e}\left(\dfrac{b^b}{a^a}\right)^{\frac{1}{b-a}} & , \quad a \neq b \end{cases}$$

6. p-logaritmik ortalama:

$$L_p = L_p(a,b) := \begin{cases} a & , \quad a = b \\ \left[\dfrac{b^{p+1} - a^{p+1}}{(p+1)(b-a)}\right]^{\frac{1}{p}} & , \quad a \neq b \end{cases}$$

ortalamaları vardır. Ayrıca, $p \in \mathbb{R}$ olmak üzere L_p nin monoton artan olduğu bilinir ve $L_0 = I$, $L_{-1} = L$ ile gösterilir. Bu ortalamalar arasındaki ilişki literatürde, aşağıdaki gibi yer almaktadır:

$$H \leq G \leq L \leq I \leq A.$$

Tanım 2.2.7 (Ağırlıklı Aritmetik Ortalama) $x_i \in [a,b], p_i > 0$ ve $P_n := \sum_{i=1}^{n} p_i > 0, (i = 1,2,\dots,n)$ olmak üzere

$$A_n(x,p) := \frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i x_i$$

şeklindeki ifadeye $x_i, (i = 1,2,\dots,n)$ sayılarının $p_i (i = 1,2,\dots,n)$ ağırlıklı aritmetik ortalaması denir (Dragomir ve Pearce, 2000).

2.3. Olasılık ve Stokastik Süreçlerle İlgili Temel Kavramlar

Tanım 2.3.1 ($\sigma -$cebir): Bir Ω kümesi üzerindeki bir U sınıfı verildiğinde, eğer

(i) $\Omega \in U$

(ii) Her $A \in U$ için $\overline{A} \in U$

(iii) Her n için $A_n \in U$ olan bir (A_n) dizisi için $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in U$

koşulları sağlanıyorsa U sınıfına Ω üzerinde $\sigma -$cebir adı verilir (Maden, 2013).

Tanım 2.3.2 (Rasgele Deney): Sonuçlarının kümesi belli, ancak gerçekleştiğinde hangi sonucun ortaya çıkacağı önceden bilinmeyen bir deneye ise rasgele deney, raslantı deneyi, stokastik deney ya da olasılık deneyi adı verilir. Bir rasgele deneyin tüm mümkün sonuçlarının kümesine örnek uzay, örnek uzaydaki her bir noktaya örnek nokta, örnek uzayın herhangi bir alt kümesine ise olay adı verilir (Maden, 2013).

Tanım 2.3.3. (Olasılık Ölçüsü): Bir E rasgele deneyi verilsin. Ω bu deney ile ilgili örnek uzay ve U bu uzay üzerinde tanımlı bir $\sigma -$cebir olsun. Bu takdirde aşağıdaki koşulları sağlayan bir P: $\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna Ω üzerinde bir olasılık ölçüsü, $P(A)$ değerine A olayının olasılığı, (Ω, U, P) üçlüsüne de bir olasılık uzayı adı verilir:

(i) $0 \leq P(A) \leq 1$,

(ii) $P(\Omega) = 1$,

(iii) Eğer $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n, \ldots.$ ikişer ikişer ayrık olaylar ise bu takdirde

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

Teorem 2.3.1 Eğer Ø mümkün olmayan olay(yani hiçbir zaman gerçekleşmeyen olay) ise bu takdirde P(Ø) = 0 dır (Maden, 2013).

Teorem 2.3.2 (Ω, U, P) bir olasılık uzayı ve $\overline{A}$ olayı A olayının bütünleyeni ise bu takdirde $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$ dir (Maden, 2013).

Teorem 2.3.3 (Ω, U, P) bir olasılık uzayı olmak üzere A ve B bu uzayda herhangi iki olay olsun. Eğer $A \subset B$ ise $P(A) \leq P(B)$ dir (Maden, 2013).

Tanım 2.3.4 (Bağımsız Olaylar) (Ω, U, P) bir olasılık uzayı olmak üzere A ve B bu uzayda herhangi iki olay olsun. Eğer $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ eşitliği sağlanıyorsa A ve B olayları bağımsızdır denir (Maden, 2013).

Tanım 2.3.5 (Rastgele Değişken) (Ω, U, P) bir olasılık uzayı olsun. Eğer $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$ fonksiyonu ölçülebilir ise *X* fonksiyonuna bir rastgele değişken denir (Maden, 2013).

Tanım 2.3.6 (Kesikli Rastgele Değişken) *X* bir rastgele değişken olmak üzere *X*' in alabileceği değerlerin kümesi sonlu yada sayılabilir sonsuz bir küme ise *X*' e bir kesikli rastgele değişken denir (Maden, 2013).

Tanım 2.3.7 (Sürekli Rastgele Değişken) *X* rastgele değişkeninin alabileceği değerlerin kümesi bir aralık yada aralıkların birleşimi şeklinde ise *X*' e sürekli rastgele değişken adı verilir (Maden, 2013).

Tanım 2.3.8 (İki Boyutlu Rastgele Değişken) *E* bir deney ve Ω de bu deneyle ilgili örnek uzay olsun. $X = X(w)$ ve $Y = Y(w)$ ise her biri her bir $w \in \Omega$ neticesine bir gerçek sayı karşılık getiren iki fonksiyon olsun. Bu durumda (*X, Y*) ikilisine iki boyutlu bir rastgele değişken (veya rastgele vektör) adı verilir (Maden, 2013).

Benzer şekilde *n* boyutlu bir rastgele değişken veya *n* boyutlu bir rastgele vektör tanımı da verilebilir.

Tanım 2.3.9 (Olasılık Fonksiyonu) X bir kesikli rasgele değişken ve bu rasgele değişkenin değer kümesi $R_X = \{x_1, x_2, ...\}$ olmak üzere $P(X = x_i) = p(x_i),\ i = 1,2,...$ olsun. Bu durumda aşağıda verilen koşulların sağlanması halinde $p : R_X \to [0,1]$ fonksiyonuna X rasgele değişkeninin olasılık fonksiyonu denir (Maden, 2013).

(i) $p(x_i) \geq 0,\ i = 1,2,...$

(ii) $\sum_{i=1}^{\infty} p(x_i) = 1$.

X ' in olasılık fonksiyonu genellikle aşağıdaki gibi bir tablo şeklinde de verilebilir:

$X = x$	x_1 x_2 x_3 . . . . x_N . . .
$p(x) = P(X = x)$	$p(x_1)$ $p(x_2)$ $p(x_3)$ . . . . $p(x_N)$ . . .

Tanım 2.3.10 (Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu) X bir sürekli rasgele değişken olsun. Genelliği sağlamak için bu X rasgele değişkenin $(-\infty, +\infty)$ aralığında değerler aldığını varsayalım. Aşağıdaki koşulları sağlayan $f(x)$ fonksiyonuna X 'in olasılık yoğunluk fonksiyonu (o.y.f.) adı verilir (Maden, 2013):

(i) $f(x) \geq 0$, $-\infty < x < \infty$

(ii) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

Tanım 2.3.11 (Kümülatif Dağılım Fonksiyonu) X kesikli veya sürekli bir rasgele değişken olsun. X in kümülatif (birikimli) dağılım fonksiyonu (kdf olarak kısaltılır) F ile gösterilir ve $F(x) = P(X \leq x)$ olarak tanımlanır (Maden, 2013). Buna göre

a) Eğer X bir kesikli rasgele değişken ise bu takdirde

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum p(x_j)$$

dır, burada toplam $x_j \leq x$ koşulunu sağlayan tüm j indisleri üzerinden alınmıştır.

b) Eğer X rasgele değişkeni f olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip sürekli bir rasgele değişken ise

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

olacaktır.

Tanım 2.3.12 (Beklenen Değer) (i) X rasgele değişkeni $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ mümkün değerlerini $p(x_i) = P(X = x_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n, \ldots$ olasılıklarıyla alan kesikli bir rasgele değişken olsun. Bu takdirde X rasgele değişkeninin $E(X)$ ile gösterilen beklenen değeri(veya matematiksel beklentisi)

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i . p(x_i)$$

olarak tanımlanır, burada $\sum_{i=1}^{\infty} x_i . p(x_i)$ serisi mutlak yakınsak, yani $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i| . p(x_i) < \infty$ olmalıdır. Bu sayıya X in ortalama değeri olarak da müracaat edilir.

(ii) X rasgele değişkeni f olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip sürekli bir rasgele değişken olsun. Bu durumda X rasgele değişkeninin beklenen değeri

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

olarak tanımlanır. Yine bu genelleştirilmiş integral yakınsak olmayabilir. Bu nedenle $E(X)$ in mevcut olması için gerek ve yeter koşul $\int_{-\infty}^{+\infty} |x| f(x)dx$ integralinin sonlu olmasıdır (Maden, 2013).

Teorem 2.3.4 (i) C bir sabit olmak üzere eğer $X = C$ ise $E(X) = C$ dir.

(ii) C ve D sabitler ve X bir rasgele değişken ise $E(CX + D) = C.E(X) + D$ dir.

(iii) X ve Y herhangi iki rasgele değişken ise $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$ dir.

(iv) Eğer X ve Y rasgele değişkenleri bağımsız ise bu takdirde $E(X.Y) = E(X).E(Y)$ dir (Maden, 2013).

Tanım 2.3.13 (Varyans) Bir X rasgele değişkeninin $V(X)$ veya σ_X^2 ile gösterilen varyansı aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$V(X) = \sigma_X^2 = E[X - E(X)]^2 .$$

Bu şekilde tanımlanan $V(X)$ sayısının pozitif kareköküne ise X rasgele değişkeninin standart sapması denir ve σ_X ile gösterilir (Maden, 2013).

Teorem 2.3.5 (i) $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$ dır.

(ii) C herhangi bir sabit olmak üzere $V(X + C) = V(X)$ dir.

(iii) C herhangi bir sabit olmak üzere $V(CX) = C^2.V(X)$ dir.

(iv) X ve Y rasgele değişkenleri bağımsız ise bu takdirde $V(X + Y) = V(X) + X(Y)$ dir (Maden, 2013).

Tanım 2.3.14 (Stokastik Süreç) Eğer her $t \in I$ için $X(t,.)$ fonksiyonu bir rastgele değişken ise $I \subset \mathbb{R}$ bir aralık olmak üzere $X: I \times \Omega \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna bir stokastik süreç denir (Kotrys, 2012a).

Tanım 2.3.15 (Olasılıkta Süreklilik) Eğer her $t_0 \in I$ için $P - \lim_{t \to t_0} X(t,.) = X(t_0,.)$ ise $X: I \times \Omega \to \mathbb{R}$ stokastik sürecine I aralığında olasılıkta sürekli denir. Burada $P - \lim$ olasılıkta limiti ifade eder (Kotrys, 2012a).

Tanım 2.3.16 (Ortalama-Kare Süreklilik) Eğer her $t_0 \in I$ için

$$P - \lim_{t \to t_0} \left[\left(\mathrm{E}\, X(t,.) = X(t_0,.) \right)^2 \right] = 0$$

ise $X: I \times \Omega \to \mathbb{R}$ stokastik sürecine I aralığında ortalama-kare sürekli denir. Burada $\mathrm{E}\, X(t,.)$ ifadesi $X(t,.)$ rastgele değişkenin beklenen değeridir (Kotrys, 2012a).

Tanım 2.3.17 (Artan-Azalan Süreç) Eğer her $u, v \in I$ öyle ki $u < v$ için,

$$X(u, \cdot) \le X(v, \cdot) , (X(u, \cdot) \ge X(v, \cdot))$$

ise bu takdirde $X: I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ stokastik sürecine artan(azalan) stokastik süreç denir. Eğer $X: I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ stokastik süreci artan veya azalansa bu durumda sürece monotondur denir (Kotrys, 2012a).

Tanım 2.3.18 (Türevlenebilir Süreç) Eğer aşağıdaki eşitliği sağlayacak şekilde bir $X': I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ rastgele değişkeni mevcut ise $X: I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ stokastik sürecine $t_0 \in I$ da türevlenebilir denir.

$$X'(t_0,.) = P - \lim_{t \to t_0} \frac{X(t,.) - X(t_0,.)}{t - t_0}$$

Eğer $X: I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ süreci I aralığındaki bütün değerlerde sürekli(türevlenebilir) ise bu durumda sürece sürekli(türevlenebilir) denir (Kotrys, 2015).

Tanım 2.3.19 (Ortalama-Kare Türevlenebilir Süreç) Eğer her $t_0 \in I$ için

$$\lim_{t \to t_0} E\left[\frac{X(t,.) - X(t_0,.)}{t - t_0} - X'(t_0,.)\right]^2 = 0$$

olacak şekilde bir X' stokastik süreci varsa $X(t,.)$ stokastik sürecine I aralığında ortalama kare türevlenebilir denir (Kotrys, 2014).

Tanım 2.3.20 (Ortalama-Kare İntegral) Her $t \in I$ için $E[X(t,.)]^2 < \infty$ olmak üzere $X: I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ bir stokastik süreç olsun. $a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots t_{n-1} < t_n = b$, $[a, b] \subset I$ nin normal parçalanış dizisi ve $k = 1,2,\ldots, n$ için $\Theta_k \in [t_{k-1}, t_k]$ olsun. Eğer $[a, b]$ aralığının her bir normal parçalanış dizisi ve her $\Theta_k \in [t_{k-1}, t_k]$, $k = 1,\ldots,n$ için

$$\lim_{n \to \infty} E\left[\left(\sum_{k=1}^{n} \mathrm{X}(\Theta_k,.)(t_k - t_{k-1}) - Y\right)^2\right] = 0$$

ise $Y: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ rastgele değişkenine X in $[a, b]$ aralığında ortalama-kare integrali denir ve $Y(.) = \int_a^b X(s,.)\, ds$ ile gösterilir.

Ortalama-kare integralin var olması için X stokastik sürecinin ortalama-kare sürekliliğini kabul etmek yeterlidir.

Tanım 2.3.21 Her $s, t \in I$ için $X(s + t,.) = X(s,.) + X(t,.)$ eşitliği sağlanıyorsa $X: I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ stokastik sürecine toplamsal denir (Skowronski, 1992).

3. QUASI-KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN BAZI EŞİTSİZLİKLER

3.1. Quasi-Konveks Fonksiyonlar

Bu kısımda Quasi-konveks fonksiyon tipleri verilerek bu tipten fonksiyonlar için bazı eşitsizlikler verilecektir. Ayrıca elde edilen bazı sonuçlar bazı sayısal niceliklerin hata sınırlarının tahminine uygulanacaktır. Son olarak bazı özel ortalamalar için bazı sınırlar tartışılacaktır.

Tanım 3.1.1 (Quasi-Konveks Fonksiyon): $f: S \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $S \subset \mathbb{R}$ boştan farklı bir konveks küme olsun. $\forall x, y \in S$ ve $\lambda \in [0,1]$ için,

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq max\{f(x), f(y)\}$$

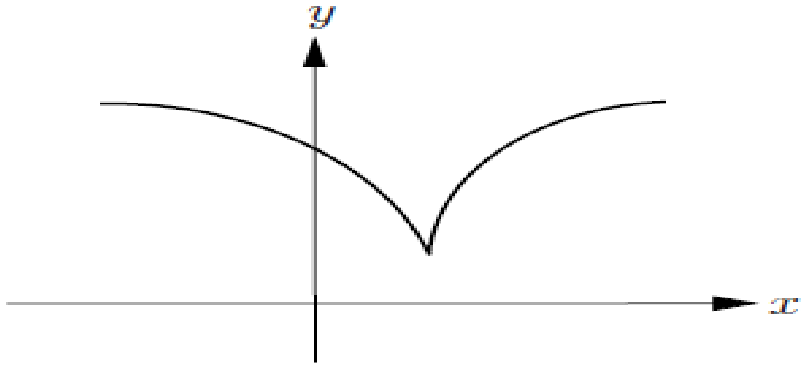
ise f' ye Quasi-konveks fonksiyon denir (Dragomir ve Pearce, 1998).

Tanım 3.1.2 f hem quasi-konveks hem de quasi-konkav ise f' ye quasi-monotonik fonksiyon denir (Greenberg ve Pierskalla, 1970).

Sonuç 3.1.1 Herhangi bir konveks fonksiyon aynı zamanda bir Quasi-konveks fonksiyondur. Fakat tersi her zaman doğru değildir. Yani Quasi-konveks olup konveks olmayan fonksiyonlar da vardır. Örneğin,

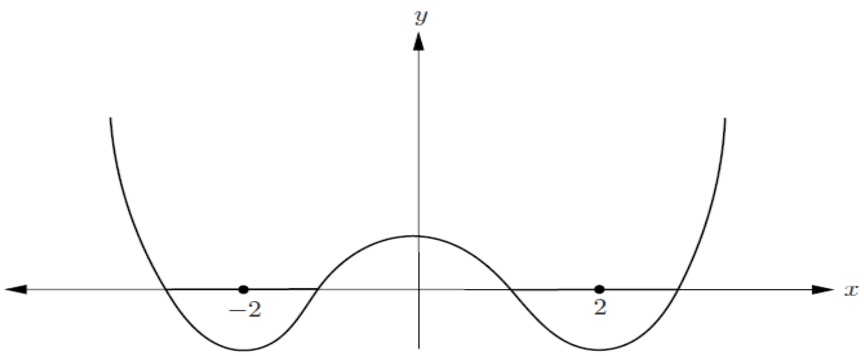
$$g(t) = \begin{cases} t & , \quad t \in [-2,-1] \\ t^2 & , \quad t \in [-1,2] \end{cases}$$

ile tanımlanan $g: [-2,2] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $[-2,2]$ aralığında konveks değildir. Fakat g fonksiyonu $[-2,2]$ aralığında Quasi-konveks fonksiyondur (Ion, 2007).



Şekil 3.1 Quasi konveks olup konveks olmayan fonksiyon

Aşağıdaki grafikte, kalın çizgi ile gösterilen aralıklarda fonksiyon Quasi-konvekstir. Ama eğrinin tamamı düşünülürse bu fonksiyon Quasi-konveks değildir (Ekinci, 2014).



Şekil 3.2. Aralıkta Quasi konveks fonksiyon $f(x) = x^4 - 10x^2 + 9$

Tanım 3.1.3 (Wright-Konveks Fonksiyon): $f: I \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $y > x, \delta > 0$ şartları altında her bir $y + \delta, x \in I$ için

$$f(x+\delta) - f(x) \leq f(y+\delta) - f(y)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f ye $I \subseteq \mathbb{R}$ de Wright-konveks fonksiyon denir (Dragomir ve Pearce, 1998).

Tanım 3.1.4 (Wright-Quasi-Konveks Fonksiyon): $f: I \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. $y > x, \delta > 0$ şartları altında $\forall x, y, y + \delta \in I$ ve $\forall t \in [0,1]$ için

$$\frac{1}{2}\left[f(tx + (1-t)y) + f\big((1-t)x + ty\big)\right] \leq max\{f(x), f(y)\}$$

veya

$$\frac{1}{2}[f(y) + f(x+\delta)] \leq max\{f(x), f(y+\delta)\}$$

eşitsizliklerinden biri sağlanıyorsa f ye $I \subseteq \mathbb{R}$ de Wright-Quasi-konveks fonksiyon denir (Dragomir ve Pearce, 1998).

Tanım 3.1.5 (J-Quasi-Konveks Fonksiyon): $f: I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu her $\forall x, y \in I$ için

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq max\{f(x), f(y)\}$$

şartını sağlıyorsa f fonksiyonuna J-Quasi-konveks fonksiyon denir (Dragomir ve Pearce, 2000).

Tanım 3.1., Tanım 3.1.4 ve Tanım 3.1.5 karşılaştırıldığında $I \subset \mathbb{R}$ kümesi üzerinde

$$QC(I) \subset WQC(I) \subset JQC(I)$$

içerme bağıntısının sağlandığı görülür.

3.2 Quasi - Konveks Fonksiyonlar için Hermite-Hadamard Eşitsizlikleri

Bu kısımda konveks fonksiyonlar ve özellikle Quasi-konveks fonksiyonlar için verilen Hermite-Hadamard, tipi bazı eşitsizliklerden bahsedilecektir.

$I \subseteq \mathbb{R}$ bir aralık, $a, b \in I^0$ ve $a < b$ olmak üzere $f: I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu I^0 üzerinde konveks bir fonksiyon olsun. Bu takdirde

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

eşitsizliği literatürde Hermite-Hadamard eşitsizliği olarak bilinir. Bu eşitsizlikle ilgili son zamanlarda çok fazla çalışma yapılmıştır ve halen artan bir ivmeyle bu çalışmalar devam etmektedir.

Ion (2007), türevlerinin mutlak değeri Quasi-konveks olan fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliğinin sağ tarafı ile ilgili iki eşitsizlik ifade etmiştir. Bu eşitsizlikleri vermeden önce bunların ispatında kullanılacak olan bir lemma verilecektir.

Lemma 3.2.1 $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ olmak üzere $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu (a, b) aralığında diferansiyellenebilir olsun. Eğer $f' \in L_1[a,b]$ ise bu takdirde

$$\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x)dx = \frac{(b-a)}{2}\int_0^1 (1-2t)f'(ta+(1-t)b))dt \tag{3.1}$$

eşitliği gerçeklenir (Ion, 20017).

İspat: Kısmi integrasyon uygulanarak

$$I = \frac{(b-a)}{2}\int_0^1 (1-2t)f'(ta+(1-t)b))dt$$

$$= \frac{f(ta+(1-t)b))}{a-b}(1-2t)\Bigg|_0^1 + 2\int_0^1 \frac{f(ta+(1-t)b))}{a-b}dt$$

olduğu görülür. Buradan $x = ta + (1-t)b$ değişken değişimi yapılarak

$$I = \frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{2}{(b-a)^2}\int_a^b f(x)dx$$

elde edilir. Böylece (3.1) eşitliği sağlanır ve ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.2.1 $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ olmak üzere $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu (a, b) aralığında diferansiyellenebilir olsun. Eğer $|f'|$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında Quasi-konveks ise bu takdirde

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x)dx\right| \leq \frac{(b-a)}{4}\max\left\{|f'(a)|,|f'(b)|\right\} \tag{3.2}$$

eşitsizliği gerçeklenir (Ion, 20017).

İspat: Lemma 3.2.1 dikkate alınırsa $|f'|$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında Quasi-konveks olduğundan basit bir integral hesabıyla

$$\begin{aligned}
\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x)dx\right| &= \left|\frac{(b-a)}{2}\int_0^1 (1-2t)f'(ta+(1-t)b))dt\right| \\
&= \frac{(b-a)}{2}\int_0^1 |(1-2t)||f'(ta+(1-t)b))|dt \\
&\leq \frac{(b-a)}{2}\int_0^1 |(1-2t)|\max\left\{|f'(a)|,|f'(b)|\right\}dt \\
&= \frac{(b-a)\max\left\{|f'(a)|,|f'(b)|\right\}}{2}\int_0^1 |(1-2t)|dt \\
&= \frac{(b-a)}{4}\max\left\{|f'(a)|,|f'(b)|\right\}
\end{aligned}$$

elde edilir ve böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.2.2 $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ olmak üzere $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu (a,b) aralığında diferansiyellenebilir olsun. Eğer $|f'|^q$, $p>1$, $q=p/(p-1)$ fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde Quasi-konveks ise bu takdirde

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x)dx\right| \leq \frac{(b-a)}{2(p+1)^{1/p}}\max\left\{|f'(a)|^q,|f'(b)|^q\right\}^{1/q} \tag{3.3}$$

eşitsizliği gerçeklenir(Ion, 20017).

İspat: Öncelikle

$$\int_0^1 |1-2t|^p\,dt = \int_0^{1/2}(1-2t)^p\,dt + \int_{1/2}^1 (2t-1)^p\,dt = 2\int_0^{1/2}(1-2t)^p\,dt = \frac{1}{p+1}$$

yazılabidiğini hatırlatalım. Burada Lemma 3.2.1 ve Hölder eşitsizliği dikkate alınırsa

$$\begin{aligned}
\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x)dx\right| &= \frac{(b-a)}{2}\int_0^1 |(1-2t)||f'(ta+(1-t)b))|dt \\
&= \frac{(b-a)}{2}\left(\int_0^1 |1-2t|^p\,dt\right)^{1/p}\left(\int_0^1 |f'(ta+(1-t)b))|^q\,dt\right)^{1/q}
\end{aligned}$$

$$\le \frac{(b-a)}{2}\left(\int_0^1 |1-2t|^p\,dt\right)^{1/p}\left(\int_0^1 \max\left\{|f'(a)|^q, |f'(b)|^q\right\}dt\right)^{1/q}$$
$$= \frac{(b-a)}{2(p+1)^{1/p}}\max\left\{|f'(a)|^q, |f'(b)|^q\right\}^{1/q}$$

elde edilir ve böylece ispat tamamlanmış olur.

2010 yılında Alomari ve arkadaşları, ikinci türevlerinin kuvvetleri Quasi-konveks olan fonksiyon sınıfları için Hermite-Hadamard sonucunun sağ tarafı ile ilgili yeni eşitsizlikler türetmişlerdir. Bu eşitsizliklerin türetilmesinde aşağıdaki lemma kullanılmıştır.

Lemma 3.2.2 $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ olmak üzere $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu (a,b) aralığında diferansiyellenebilir olsun. Eğer $f'' \in L_1[a,b]$ ise bu takdirde

$$\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x)dx = \frac{(b-a)^2}{12}\int_0^1 t(1-t) f''(ta+(1-t)b))dt \tag{3.4}$$

eşitliği gerçeklenir (Dragomir ve Pecaric 1990).

Teorem 3.2.3 $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ olmak üzere $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu (a,b) aralığında iki kez diferansiyellenebilir olsun. Bu durumda eğer $|f''|$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında Quasi-konveks ise bu takdirde

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x)dx\right| \le \frac{(b-a)^2}{12}\max\left\{|f''(a)|, |f''(b)|\right\} \tag{3.5}$$

eşitsizliği gerçeklenir (Alomari ve Ark. 2010).

İspat: Lemma 3.2.2 dikkate alınırsa $|f''|$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında Quasi-konveks olduğundan basit bir integral hesabıyla

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x)dx\right| \le \frac{(b-a)^2}{2}\int_0^1 t(1-t)\left|f''(ta+(1-t)b))\right|dt$$
$$\le \frac{(b-a)^2}{2}\int_0^1 t(1-t)\max\left\{|f''(a)|, |f''(b)|\right\}dt$$
$$= \frac{(b-a)^2}{2}\max\left\{|f''(a)|, |f''(b)|\right\}\int_0^1 t(1-t)dt$$
$$= \frac{(b-a)^2}{12}\max\left\{|f''(a)|, |f''(b)|\right\}$$

elde edilir ve böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.2.4 $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ olmak üzere $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu (a,b) aralığında iki kez diferansiyellenebilir ve f'' fonksiyonu $[a,b]$ de integrallenebilir olsun. Eğer $|f''|^q$, $p>1$, $q = p/(p-1)$ fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde Quasi-konveks ise bu takdirde

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\leq \frac{(b-a)^2}{8}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^{1/p}\left(\frac{\Gamma(1+p)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+p\right)}\right)^{1/p} \max\left\{|f''(a)|^q, |f''(b)|^q\right\}^{1/q} \tag{3.6}$$

eşitsizliği gerçeklenir (Alomari ve Ark. 2010).

İspat: Lemma 3.2.2 ve Hölder eşitsizliği dikkate alınırsa

$$\begin{aligned}
\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x)dx\right| &\leq \frac{(b-a)}{2}\int_0^1 t(1-t)\left|f''(ta+(1-t)b)\right|dt \\
&\leq \frac{(b-a)}{2}\left(\int_0^1 (t-t^2)^p dt\right)^{1/p}\left(\int_0^1 |f''(ta+(1-t)b)|^q dt\right)^{1/q} \\
&\leq \frac{(b-a)^2}{2}\left(\frac{2^{-1-2p}\sqrt{\pi}\,\Gamma(1+p)}{\Gamma(\frac{3}{2}+p)}\right)^{1/p}\left(\max\left\{|f'''(a)|^q, |f''(b)|^q\right\}\right)^{1/q} \\
&= \frac{(b-a)^2}{8}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^{1/p}\left(\frac{\Gamma(1+p)}{\Gamma(\frac{3}{2}+p)}\right)^{1/p} \max\left\{|f''(a)|^q, |f''(b)|^q\right\}^{1/q}
\end{aligned}$$

elde edilir ve böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.2.5 $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ olmak üzere $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu (a,b) aralığında iki kez diferansiyellenebilir ve f'' fonksiyonu $[a,b]$ de integrallenebilir olsun.olsun. Bu durumda eğer $|f''|^q$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında Quasi-konveks ise bu takdirde

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x)dx\right| \leq \frac{(b-a)^2}{12}\left(\max\left\{|f''(a)|^q, |f''(b)|^q\right\}\right)^{1/q} \tag{3.7}$$

eşitsizliği gerçeklenir (Alomari ve Ark. 2010).

İspat: Lemma 3.2.2 ye göre $|f''|^q$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında Quasi-konveks olduğundan basit bir integral hesabıyla

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x)dx\right| \le \frac{(b-a)^2}{2}\int_0^1 t(1-t)\left|f''(ta+(1-t)b))\right|dt$$

$$\le \frac{(b-a)^2}{2}\left(\int_0^1 t(1-t)dt\right)^{1-1/q}\left(\int_0^1 t(1-t)dt\left|f''(ta+(1-t)b))\right|dt\right)^{1/q}$$

$$\le \frac{(b-a)^2}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^{1-1/q}\left(\frac{1}{6}\max\left\{\left|f''(a)\right|,\left|f''(b)\right|\right\}\right)^{1/q}$$

$$= \frac{(b-a)^2}{12}\left(\max\left\{\left|f''(a)\right|,\left|f''(b)\right|\right\}\right)^{1/q}$$

elde edilir ve böylece ispat tamamlanmış olur.

Hermite-Hadamard eşitsizliğinin sol tarafı ile ilgili olarak ikinci türevlerinin mutlak değerleri konveks ve Quasi-konveks olan fonksiyonlar için aşağıdaki eşitsizlikler elde edilmiştir.

Lemma 3.2.3 $a,b \in I^0$, $a < b$ olmak üzere $f: I^0 \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu (a,b) aralığında diferansiyellenebilir olsun. Eğer $f' \in L_1[a,b]$ ise bu takdirde

$$\frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x)dx - f(\frac{a+b}{2}) = (b-a)\left[\int_0^{1/2} t f'(ta+(1-t)b))dt + \int_{1/2}^1 (t-1)f'(ta+(1-t)b))dt\right] \tag{3.8}$$

eşitliği gerçeklenir (Kirmaci, 2004).

İspat: Kısmi integrasyon uygulanarak

$$\int_0^{1/2} t f'(ta+(1-t)b))dt + \int_{1/2}^1 (t-1)f'(ta+(1-t)b))dt$$

$$= \frac{f(ta+(1-t)b))}{a-b}t\Big|_0^{1/2} - \int_0^{1/2}\frac{f(ta+(1-t)b))}{a-b}dt$$

$$+\frac{f(ta+(1-t)b))}{a-b}(t-1)\Big|_{1/2}^1 - \int_{1/2}^1\frac{f(ta+(1-t)b))}{a-b}dt$$

$$= \frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b f(x)dx - \frac{1}{b-a}f(\frac{a+b}{2})$$

olduğu görülür. Buradan $x = ta+(1-t)b$ değişken değişimi yapılarak (3.8) eşitliği sağlanır ve ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.2.6 $f: I^0 \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu türevlenebilir bir fonksiyon olmak üzere $a, b \in I^0$, $a < b$ olsun. Eğer $|f'|$ fonksiyonu $[a,b]$ de konveks ise bu takdirde

$$\left|\frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x)dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| \leq \frac{b-a}{8}\left[|f'(a)| + |f'(b)|\right] \tag{3.9}$$

eşitsizliği gerçeklenir(Kirmaci, 2004).

İspat: Lemma 3.2.3 ve $|f'|$ fonksiyonunun konveksliğinden

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x)dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| \\
&\quad = \left|(b-a)\left[\int_0^{1/2} t f'(ta+(1-t)b))dt + \int_{1/2}^1 (t-1)f'(ta+(1-t)b))dt\right]\right| \\
&\quad \leq (b-a)\left[\int_0^{1/2} |t||f'(ta+(1-t)b))|dt + \int_{1/2}^1 |t-1||f'(ta+(1-t)b))|dt\right] \\
&\quad \leq (b-a)\left[\int_0^{1/2} \left(t^2|f'(a)| + (1-t)^2|f'(b)|\right)dt + \int_{1/2}^1 (1-t)t|f'(a) + (1-t)^2|f'(b)||dt\right] \\
&\quad \leq \frac{(b-a)}{8}\left(|f'(a)| + |f'(b)|\right)
\end{aligned}$$

elde edilir, burada

$$\int_0^{1/2} t^2 dt = \frac{1}{24}, \quad \int_0^{1/2} (1-t)tdt = \int_{1/2}^1 (1-t)tdt = \frac{1}{12} \text{ ve } \int_{1/2}^1 (1-t)^2 dt = \frac{1}{24}$$

olduğu kolayca görülür.

Teorem 3.2.7 $f: I^0 \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu türevlenebilir bir fonksiyon olmak üzere $a, b \in I^0$, $a < b$ olsun. Eğer $|f'|^{p/(p-1)}$, $p > 1$, fonksiyonu $[a,b]$ de konveks ise bu takdirde

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x)dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| \\
&\quad \leq \frac{b-a}{16}\left(\frac{4}{p+1}\right)^{1/p}\left[\left(|f'(a)|^{p/(p-1)} + 3|f'(b)|^{p/(p-1)}\right)^{p/(p-1)}\right. \\
&\quad \left. + \left(3|f'(a)|^{p/(p-1)} + |f'(b)|^{p/(p-1)}\right)^{p/(p-1)}\right]
\end{aligned} \tag{3.10}$$

eşitsizliği gerçeklenir (Kirmaci, 2004).

İspat: Lemma 3.2.3 ve Hölder integral eşitsizliğinden $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ olmak üzere

$$\left|\frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x)dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|$$

$$\leq (b-a)\left[\int_0^{1/2} t\left|f'(ta+(1-t)b)\right|dt + \int_{1/2}^{1}|t-1|\left|f'(ta+(1-t)b)\right|dt\right]$$

$$\leq (b-a)\left[\begin{array}{l}\left(\int_0^{1/2} t^p dt\right)^{1/p}\left(\int_0^{1/2}\left|f'(ta+(1-t)b)\right|^q dt\right)^{1/q} \\ +\left(\int_{1/2}^{1}|1-t|^p dt\right)^{1/p}\left(\int_{1/2}^{1}\left|f'(ta+(1-t)b)\right|^q dt\right)^{1/q}\end{array}\right]$$

elde edilir. Buradan $|f'|^q$, $q>1$, fonksiyonunun $[a,b]$ aralığında konveks olduğu dikkate alınırsa

$$\int_0^{1/2}\left|f'(ta+(1-t)b)\right|^q dt \leq \int_0^{1/2}\left[t\left|f'(a)\right|^q+(1-t)\left|f'(b)\right|^q\right]dt = \frac{\left|f'(a)\right|^q+3\left|f'(b)\right|^q}{8} \quad (3.11)$$

ve

$$\int_{1/2}^{1}\left|f'(ta+(1-t)b)\right|^q dt \leq \int_{1/2}^{1}\left[t\left|f'(a)\right|^q+(1-t)\left|f'(b)\right|^q\right]dt = \frac{3\left|f'(a)\right|^q+\left|f'(b)\right|^q}{8} \quad (3.12)$$

olduğu görülür. Ayrıca

$$\int_0^{1/2} t^p dt = \int_{1/2}^{1}|t-1|^p dt = \int_{1/2}^{1}(1-t)^p dt = \frac{1}{(p+1)2^{p+1}} \quad (3.13)$$

olduğu kolayca görülür. (3.11)-(3.13) ifadeleri birleştirilerek istenilen sonuç elde edilir ve böylece ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 3.2.1 $f: I^0 \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu türevlenebilir bir fonksiyon olmak üzere $a,b \in I^0$, $a<b$ olsun. Eğer $|f'|^{p/(p-1)}$ fonksiyonu $[a,b]$ de konveks ise bu takdirde

$$\left|\frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x)dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| \leq \frac{b-a}{4}\left(\frac{4}{p+1}\right)^{1/p}\left[\left(\left|f'(a)\right|+\left|f'(b)\right|\right)\right] \quad (3.14)$$

eşitsizliği gerçeklenir (Kirmaci, 2004).

Lemma 3.2.4 $f: I^\circ \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu I° üzerinde iki kez türevlenebilir olmak üzere $a,b \in I^0$, $a<b$ olsun. Eğer $f'' \in L_1[a,b]$ ise bu takdirde

$$\frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x)dx - f(\frac{a+b}{2})$$
$$= \frac{(b-a)^2}{2}\int_0^1 m(t)\left[f''(ta+(1-t)b)) + f''(tb+(1-t)a))\right]dt \tag{3.15}$$

eşitliği gerçeklenir, burada

$$m(t) = \begin{cases} t^2, & t \in \left[0, \frac{1}{2}\right) \\ (1-t)^2, & t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

dir (Sarıkaya ve Ark. 2010).

Teorem 3.2.8 $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu I° üzerinde iki kez türevlenebilir, $f'' \in L_1[a,b]$, ve $|f''|$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında konveks ise bu takdirde

$$\left| \frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x)dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| \le \frac{(b-a)^2}{24}\left[\frac{|f''(a)| + |f''(b)|}{2}\right] \tag{3.16}$$

eşitsizliği gerçeklenir (Sarıkaya ve Ark. 2010).

Teorem 3.2.9 $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu I° üzerinde iki kez türevlenebilir, $f'' \in L_1[a,b]$, ve $|f''|^q$, $q > 1$, fonksiyonu $[a,b]$ aralığında konveks ise bu takdirde $q = p/(p-1)$ olmak üzere aşağıdaki eşitsizlik gerçeklenir (Sarıkaya ve Ark. 2010):

$$\left| \frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x)dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| \le \frac{(b-a)^2}{8(2p+1)^{1/p}}\left[\frac{|f''(a)|^q + |f''(b)|^q}{2}\right]^{1/q} \tag{3.17}$$

Teorem 3.2.10 $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu I° üzerinde iki kez türevlenebilir, $f'' \in L_1[a,b]$, ve $|f''|^q$, $q > 1$, fonksiyonu $[a,b]$ aralığında konveks ise bu takdirde $q = p/(p-1)$ olmak üzere aşağıdaki eşitsizlik gerçeklenir (Sarıkaya ve Ark. 2010):

$$\left| \frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x)dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| \le \frac{(b-a)^2}{24}\left[\frac{|f''(a)|^q + |f''(b)|^q}{2}\right]^{1/q} \tag{3.18}$$

Teorem 3.2.11 $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu I° üzerinde iki kez türevlenebilir, $f'' \in L_1[a,b]$, ve $|f''|$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında Quasi-konveks ise

$$\left|\frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x)dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| \le \frac{(b-a)^2}{24}\max\{|f''(a)|,|f''(b)|\} \tag{3.19}$$

eşitsizliği gerçeklenir (Sarıkaya ve Ark. 2010).

Sonuç 3.2.2 $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ I° üzerinde iki kez türevlenebilir, $f'' \in L_1[a,b]$ ve $|f''|^q$, $q = p/(p-1)$, $q > 1$, fonksiyonu $[a,b]$ aralığında Quasi-konveks ise

$$\left|\frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x)dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| \le \frac{(b-a)^2}{8(2p+1)^{1/p}}\max\left\{|f''(a)|^q,|f''(b)|^q\right\}^{1/q} \tag{3.20}$$

eşitsizliği gerçeklenir. Ayrıca bu sonucun bir genellemesi olarak

$$\left|\frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x)dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| \le \frac{(b-a)^2}{24}\max\left\{|f''(a)|^q,|f''(b)|^q\right\}^{1/q} \tag{3.21}$$

eşitsizliğinin gerçeklendiği görülür (Sarıkaya ve Ark. 2010).

3.3. Quasi - Konveks Fonksiyonlar için Ostrowski Tipli Eşitsizlikler

Bu kısımda Quasi-konveks fonksiyonlar için Ostrowski ve Ostrowski-Grüss tipinden bazı eşitsizlikler geliştirilip genelleştirilecektir. Ayrıca elde edilen bazı sonuçlar bazı sayısal niceliklerin hata sınırlarının tahminine uygulanacaktır. Son olarak bazı özel ortalamalar için bazı sınırlar tartışılacaktır.

$I \subseteq [0,\infty)$ bir aralık $a,b \in I$ ve $a < b$ olsun. $f: I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu I^0 üzerinde türevlenebilir bir fonksiyon olmak üzere $f' \in L_1[a,b]$ olsun. Eğer $\forall x \in [a,b]$ için $|f'(x)| \le M$ ise, bu takdirde $\forall x \in [a,b]$ için

$$\left|f(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right| \le \frac{M}{(b-a)}\left[\frac{(x-a)^2+(b-x)^2}{2}\right] \tag{3.22}$$

eşitsizliği gerçeklenir. Bu eşitsizlik literatürde Ostrowski eşitsizliği olarak bilinir. Bu eşitsizlikle ilgili literatürde pek çok çalışma mevcuttur.

Allomari ve Ark.(2009) birinci türevlerinin mutlak değeri Quasi-konveks olan fonksiyonlar için aşağıdaki eşitsizliği elde etmişlerdir.

Teorem 3.3.1 $I \subseteq \mathbb{R}$ bir aralık $a,b \in I$ ve $a < b$ olsun. $f: I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu I^0 üzerinde türevlenebilir bir fonksiyon olmak üzere eğer $|f'|^q$, $q > 1$, fonksiyonu $[a,b]$ aralığında Quasi-konveks ise bu takdirde

$$\left|\frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x)dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|$$
$$\leq \frac{b-a}{8}\left[\left(\max\left\{\left|f'(\frac{a+b}{2})\right|^q, |f'(b)|^q\right\}\right)^{1/q} + \left(\max\left\{\left|f'(\frac{a+b}{2})\right|^q, |f'(a)|^q\right\}\right)^{1/q}\right] \quad (3.23)$$

eşitsizliği gerçeklenir (Alomari ve Ark. 2010).

Sonuç 3.3.1 Teorem 3.3.1 in şartlarına ilaveten

i) Eğer f' fonksiyonu artan ise bu durumda

$$\left|\frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x)dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| \leq \frac{b-a}{8}\left\{\left|f'(\frac{a+b}{2})\right| + |f'(b)|\right\}$$

ii) Eğer f' fonksiyonu azalan ise bu durumda

$$\left|\frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x)dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| \leq \frac{b-a}{8}\left\{\left|f'(\frac{a+b}{2})\right| + |f'(a)|\right\}$$

iii) Eğer $f'(a) = f'(b) = 0$ ise bu durumda

$$\left|\frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x)dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| \leq \frac{b-a}{4}\left|f'(\frac{a+b}{2})\right|$$

eşitsizlikleri gerçeklenir.

Lemma 3.3.1 $I \subseteq \mathbb{R}$ bir aralık $a, b \in I$ ve $a < b$ olmak üzere $f: I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu I^0 üzerinde türevlenebilir bir fonksiyon olsun. Eğer $f' \in L_1[a,b]$ ise bu takdirde

$$f(x) - \frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(u)du = (b-a)\int_0^1 p(t) f'(ta+(1-t)b)dt \quad (3.24)$$

dir, burada her $x \in [a,b]$ için

$$p(t) = \begin{cases} t, & t \in \left[0, \dfrac{b-x}{b-a}\right] \\ t-1, & t \in \left(\dfrac{b-x}{b-a}, 1\right] \end{cases}$$

dir (Alomari ve Ark. 2010).

Teorem 3.3.2 $I \subseteq \mathbb{R}$ bir aralık $a, b \in I$ ve $a < b$ olmak üzere $f : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu I^0 üzerinde türevlenebilir bir fonksiyon ve $f' \in L_1[a,b]$ olsun. Eğer $|f'|$ fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde Quasi-konveks ise bu takdirde $\forall x \in [a,b]$ için

$$\left| f(x) - \frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(u)du \right| \\ \leq \frac{(b-x)^2}{2(b-a)} \left(\max\{|f'(x)|, |f'(b)|\} \right) + \frac{(x-a)^2}{2(b-a)} \left(\max\{|f'(x)|, |f'(b)|\} \right) \tag{3.25}$$

eşitsizliği igerçeklenir (Alomari ve Ark. 2010).

İspat: Lemma 3.3.1 e göre $|f'|$ fonksiyonu $[a,b]$ de Quasi-konveks olduğundan

$$\begin{aligned} &\left| f(x) - \frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(u)du \right| \\ &\leq (b-a) \int_0^{\frac{b-x}{b-a}} t \max\{|f'(x)|, |f'(b)|\} dt + (b-a) \int_{\frac{b-x}{b-a}}^1 (1-t) \max\{|f'(x)|, |f'(a)|\} dt \\ &\leq (b-a) \max\{|f'(x)|, |f'(b)|\} \int_0^{\frac{b-x}{b-a}} t dt + (b-a) \max\{|f'(x)|, |f'(a)|\} \int_{\frac{b-x}{b-a}}^1 (1-t) dt \\ &\leq \frac{(b-x)^2}{2(b-a)} \left(\max\{|f'(x)|, |f'(b)|\} \right) + \frac{(x-a)^2}{2(b-a)} \left(\max\{|f'(x)|, |f'(a)|\} \right) \end{aligned}$$

elde edilir ve böylece teorem ispatlanmış olur.

Sonuç 3.3.2 Teorem 3.3.2 nin şartlarına ilaveten eğer $|f'(x)| \leq M, M > 0$ ise bu takdirde (3.22) eşitsizliği sağlanır.

Sonuç 3.3.3 Teorem 3.3.2 in şartlarına ilaveten

i) Eğer $|f'|$ fonksiyonu artan ise bu durumda

$$\left| f(x) - \frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(u)du \right| \leq \frac{(b-x)^2}{2(b-a)} |f'(b)| + \frac{(x-a)^2}{2(b-a)} |f'(x)| \tag{3.26}$$

ii) Eğer $|f'|$ fonksiyonu azalan ise bu durumda

$$\left| f(x) - \frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(u)du \right| \leq \frac{(b-x)^2}{2(b-a)} |f'(x)| + \frac{(x-a)^2}{2(b-a)} |f'(a)| \tag{3.27}$$

eşitsizlikleri igerçeklenir (Alomari ve Ark. 2010).

Sonuç 3.3.4 Teorem 3.3.2 in şartları altında $x=\frac{a+b}{2}$ alınırsa bu durumda

$$\left|f(x)-\frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(u)du\right| \le \frac{(b-a)}{8}\left(\max\left\{\left|f'(\frac{a+b}{2})\right|,|f'(b)|\right\}+\max\left\{\left|f'(\frac{a+b}{2})\right|,|f'(a)|\right\}\right) \tag{3.28}$$

eşitsizliği gerçeklenir (Alomari ve Ark. 2010).

Sonuç 3.3.5 Sonuç 3.3.3 te $x=\frac{a+b}{2}$ alınırsa bu durumda

i) Eğer $|f'|$ fonksiyonu artan ise bu durumda

$$\left|f(\frac{a+b}{2})-\frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(u)du\right| \le \frac{b-a}{8}\left[|f'(b)|+\left|f'(\frac{a+b}{2})\right|\right] \tag{3.29}$$

ii) Eğer $|f'|$ fonksiyonu azalan ise bu durumda

$$\left|f(\frac{a+b}{2})-\frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(u)du\right| \le \frac{b-a}{8}\left[|f'(a)|+\left|f'(\frac{a+b}{2})\right|\right] \tag{3.30}$$

iii) Eğer $f'(a)=f'(b)=0$ ise bu durumda

$$\left|f(\frac{a+b}{2})-\frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(u)du\right| \le \frac{b-a}{4}\left|f'(\frac{a+b}{2})\right| \tag{3.31}$$

eşitsizlikleri gerçeklenir (Alomari ve Ark. 2010)..

Teorem 3.3.3 $I\subseteq\mathbb{R}$ bir aralık $a,b\in I$ ve $a<b$ olmak üzere $f:I\to\mathbb{R}$ fonksiyonu I^0 üzerinde türevlenebilir bir fonksiyon ve $f'\in L_1[a,b]$ olsun. Eğer $|f'|$ fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde Quasi-konveks ise bu takdirde $\forall x\in[a,b]$ için $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ olmak üzere

$$\begin{aligned}\left|f(x)-\frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(u)du\right| &\le \left(\frac{(b-x)^{p-1}}{(b-a)(p+1)}\right)^{1/p}\left(\max\left\{|f'(x)|^q,|f'(b)|^q\right\}\right)^{1/q}\\ &+\left(\frac{(x-a)^{p-1}}{(b-a)(p+1)}\right)^{1/p}\left(\max\left\{|f'(x)|^q,|f'(a)|^q\right\}\right)^{1/q}\end{aligned} \tag{3.32}$$

eşitsizliği igerçeklenir (Alomari ve Ark. 2010).

İspat: Lemma 3.3.1 ve Hölder eşitsizliği dikkate alınırsa

$$\left|f(x)-\frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(u)du\right|$$

$$\le (b-a)\int_0^{\frac{b-x}{b-a}} t\left|f'(ta+(1-t)b)\right|dt+(b-a)\int_{\frac{b-x}{b-a}}^{1}|t-1|\left|f'(ta+(1-t)b)\right|dt$$

$$\le (b-a)\left(\int_0^{\frac{b-x}{b-a}} t^p dt\right)^{1/p}\left(\int_0^{\frac{b-x}{b-a}} \left|f'(ta+(1-t)b)\right|^q dt\right)^{1/q}$$

$$+(b-a)\left(\int_{\frac{b-x}{b-a}}^{1} (1-t)^p dt\right)^{1/p}\left(\int_{\frac{b-x}{b-a}}^{1} \left|f'(ta+(1-t)b)\right|^q dt\right)^{1/q}$$

$$=\frac{(b-x)^{\frac{p+1}{p}}}{(b-a)^{1/p}(p+1)^{1/p}}\left(\max\left\{\left|f'(x)\right|^q,\left|f'(b)\right|^q\right\}\right)^{1/q}$$

$$+\frac{(x-a)^{\frac{p+1}{p}}}{(b-a)^{1/p}(p+1)^{1/p}}\left(\max\left\{\left|f'(x)\right|^q,\left|f'(a)\right|^q\right\}\right)^{1/q}$$

elde edilir ve böylece teorem ispatlanmış olur.

Sonuç 3.3.6 Teorem 3.3.3 nin şartlarına ilaveten eğer $\left|f'(x)\right|\le M, M>0$ ise bu takdirde (3.22) eşitsizliği sağlanır.

Sonuç 3.3.7 Teorem 3.3.3 in şartlarına ilaveten

i) Eğer $|f'|$ fonksiyonu artan ise bu durumda

$$\left|f(x)-\frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(u)du\right|\le\frac{1}{(b-a)^{1/p}(p+1)^{1/p}}\left[(b-x)^{\frac{p+1}{p}}\left|f'(b)\right|+(x-a)^{\frac{p+1}{p}}\left|f'(x)\right|\right]$$

ii) Eğer $|f'|$ fonksiyonu azalan ise bu durumda

$$\left|f(x)-\frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(u)du\right|\le\frac{1}{(b-a)^{1/p}(p+1)^{1/p}}\left[(b-x)^{\frac{p+1}{p}}\left|f'(x)\right|+(x-a)^{\frac{p+1}{p}}\left|f'(a)\right|\right]$$

eşitsizlikleri igerçeklenir.

Sonuç 3.3.9 Teorem 3.3.3 in şartları altında $x=\dfrac{a+b}{2}$ alınırsa bu durumda

$$\left|f(x)-\frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(u)du\right|$$

$$\le\frac{(b-a)}{2^{1/p}(p+1)^{1/p}}\left(\max\left\{\left|f'(\frac{a+b}{2})\right|^q,\left|f'(b)\right|^q\right\}^{1/q}+\max\left\{\left|f'(\frac{a+b}{2})\right|^q,\left|f'(a)\right|^q\right\}^{1/q}\right)$$

eşitsizliği gerçeklenir.

Sonuç 3.3.10 Sonuç 3.3.9 da

i) Eğer $|f'|$ fonksiyonu artan ise bu durumda (3.29) eşitsizliği sağlanır.

ii) Eğer $|f'|$ fonksiyonu azalan ise bu durumda (330) eşitsizliği sağlanır.

iii) Eğer $f'(a)=f'(b)=0$ ise bu durumda (3.31) eşitsizliği sağlanır.

Teorem 3.3.4 $I\subseteq \mathbb{R}$ bir aralık $a,b\in I$ ve $a<b$ olmak üzere $f:I\to\mathbb{R}$ fonksiyonu I^0 üzerinde türevlenebilir bir fonksiyon ve $f'\in L_1[a,b]$ olsun. Eğer $|f'|^q, q\geq 1$ fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde Quasi-konveks ve $|f'(x)|\leq M,\ x\in[a,b]$ ise bu takdirde $\forall x\in[a,b]$ için

$$\left|f(x)-\frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(u)du\right| \leq \frac{(b-x)^2}{2(b-a)}\left(\max\left\{|f'(x)|^q,|f'(b)|^q\right\}\right)^{1/q}+\frac{(x-a)^2}{2(b-a)}\left(\max\left\{|f'(x)|^q,|f'(a)|^q\right\}\right)^{1/q} \tag{3.33}$$

eşitsizliği igerçeklenir (Alomari ve Ark. 2010).

İspat: Lemma 3.3.1 ve power-mean eşitsizliği dikkate alınırsa

$$\begin{aligned}
&\left|f(x)-\frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(u)du\right| \\
&\leq (b-a)\int_0^{\frac{b-x}{b-a}} t\,|f'(ta+(1-t)b)|dt+(b-a)\int_{\frac{b-x}{b-a}}^1 |t-1|\,|f'(ta+(1-t)b)|dt \\
&\leq (b-a)\left(\int_0^{\frac{b-x}{b-a}} tdt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^{\frac{b-x}{b-a}} t\,|f'(ta+(1-t)b)|^q\,dt\right)^{1/q} \\
&+(b-a)\left(\int_{\frac{b-x}{b-a}}^1 (1-t)dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_{\frac{b-x}{b-a}}^1 (1-t)\,|f'(ta+(1-t)b)|^q\,dt\right)^{1/q}
\end{aligned}$$

elde edilir. $|f'|^q, q\geq 1$ fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde Quasi-konveks

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{b-x}{b-a}} t\,|f'(ta+(1-t)b)|^q\,dt &\leq \int_0^{\frac{b-x}{b-a}} t.\max\left\{|f'(x)|^q,|f'(b)|^q\right\}dt \\
&=\frac{(b-x)^2}{2(b-a)^2}\max\left\{|f'(x)|^q,|f'(b)|^q\right\}
\end{aligned}$$

ve

$$\int_{\frac{b-x}{b-a}}^{1}(1-t)\left|f'(ta+(1-t)b)\right|^{q}dt \le \int_{\frac{b-x}{b-a}}^{1}(1-t)\max\left\{\left|f'(x)\right|^{q},\left|f'(a)\right|^{q}\right\}dt$$

$$=\frac{\left(x-a\right)^{2}}{2(b-a)^{2}}\max\left\{\left|f'(x)\right|^{q},\left|f'(a)\right|^{q}\right\}$$

yazılabilir. Bu nedenle

$$\left|f(x)-\frac{1}{(b-a)}\int_{a}^{b}f(u)du\right| \le \frac{\left(b-x\right)^{2}}{2(b-a)}\left(\max\left\{\left|f'(x)\right|^{q},\left|f'(b)\right|^{q}\right\}\right)^{1/q}$$

$$+\frac{\left(x-a\right)^{2}}{2(b-a)}\left(\max\left\{\left|f'(x)\right|^{q},\left|f'(a)\right|^{q}\right\}\right)^{1/q}$$

olduğu görülür ve böylece teorem ispatlanmış olur.

Sonuç 3.3.11 Teorem 3.3.4 nin şartlarına ilaveten eğer $\left|f'(x)\right| \le M, M>0$ ise bu takdirde (3.22) eşitsizliği sağlanır.

Sonuç 3.3.12 Teorem 3.3.4 in şartlarına ilaveten

i) Eğer $|f'|$ fonksiyonu artan ise bu durumda (3.26) eşitsizliği sağlanır.

ii) Eğer $|f'|$ fonksiyonu azalan ise bu durumda (3.27) eşitsizliği sağlanır.

Sonuç 3.3.13 Teorem 3.3.4 in şartları altında $x=\frac{a+b}{2}$ alınırsa bu durumda

$$\left|f(x)-\frac{1}{(b-a)}\int_{a}^{b}f(u)du\right|$$

$$\le\frac{\left(b-a\right)}{8}\left(\max\left\{\left|f'(\frac{a+b}{2})\right|^{q},\left|f'(b)\right|^{q}\right\}^{1/q}+\max\left\{\left|f'(\frac{a+b}{2})\right|^{q},\left|f'(a)\right|^{q}\right\}^{1/q}\right)$$

eşitsizliği gerçeklenir.

Sonuç 3.3.14 Sonuç 3.3.13 de

i) Eğer $|f'|$ fonksiyonu artan ise bu durumda (3.29) eşitsizliği sağlanır.

ii) Eğer $|f'|$ fonksiyonu azalan ise bu durumda (3.30) eşitsizliği sağlanır.

iii) Eğer $f'(a)=f'(b)=0$ ise bu durumda (3.31) eşitsizliği sağlanır.

Ostrowski (1938) aşağıdaki integral eşitsizliğini ispatlamıştır.

Teorem 3.3.5 $I\subseteq\mathbb{R}$ bir aralık, I^0 ise I aralığının içi, $a,b\in I^0$ ve $a<b$ olmak üzere $f:I\to\mathbb{R}$ fonksiyonu I^0 üzerinde türevlenebilir bir fonksiyon olsun. Eğer $\forall x\in[a,b]$ için $|f'(x)|\le M$ ise, bu takdirde $\forall x\in[a,b]$ için

$$\left|f(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right| \leq \left[\frac{1}{4}+\frac{(x-(a+b)/2)^2}{(b-a)^2}\right](b-a)M \tag{3.34}$$

dir. Bu eşitsizlik $x \in [a,b]$ noktasında $f(x)$ değeri ile $(b-a)^{-1}\int_a^b f(t)dt$ integral ortalamasının farkının mutlak değeri için bir üst sınır getirmektedir.

Dragomir ve Wang (1997) bu tipten yeni bir eşitsizliği aşağıdaki şekilde vermişlerdir.

Teorem 3.3.6 Teorem 3.3.5' in varsayımları altında f' türevi $[a,b]$ aralığında integrallenebilir olmak üzere $\gamma, \Gamma \in \mathbb{R}$ keyfi sabitler ve $\forall x \in [a,b]$ için $\gamma \leq f'(x) \leq \Gamma$ olduğunu varsayalım. Bu takdirde $\forall x \in [a,b]$ için

$$\left|f(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\right| \leq \frac{1}{4}(b-a)(\Gamma-\gamma), \tag{3.35}$$

eşitsizliği gerçekleşir. Bu eşitsizlik bilinen Ostrowski eşitsizliği ile Grüss eşitsizliği arasındaki bir bağlantıdır. Eşitsizlik bazı özel ortalama ve bazı sayısal kareleme kurallarını sınırlandırmak için uygulanabilir.

Matic ve ark. (2000) Teorem 3.3.5 ve 3.3.6 yi aşağıdaki şekilde geliştirmiştir.

Teorem 3.3.7 Teorem 3.3.5' in şartları sağlansın. Bu takdirde her $x \in [a,b]$ için

$$\left|f(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\right| \leq \frac{1}{4\sqrt{3}}(b-a)(\Gamma_1-\gamma_1) \tag{3.36}$$

eşitsizliği gerçekleşir (Matic ve Ark. 2000).

Teorem 3.3.8 Teorem 3.3.6' nın şartları sağlansın. Bu takdirde her $x \in [a,b]$ için

$$\left|f(x)-\left(x-\frac{a+b}{2}\right)f'(x)+\left(\frac{1}{24}(b-a)^2+\frac{1}{2}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\right)\frac{f'(b)-f'(a)}{b-a}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right|$$
$$\leq (\Gamma_2-\gamma_2)F(a,b,x) \tag{3.37}$$

eşitsizliği gerçekleşir, burada

$$F(a,b,x)=\frac{b-a}{12\sqrt{5}}\left(\frac{1}{4}(b-a)^2+15\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\right)^{1/2} \tag{3.38}$$

dir (Matic ve Ark. 2000).

Teorem 3.3.9 Teorem 3.3.5' in şartları sağlansın. Bu takdirde her $x \in [a,b]$ için

$$\left|f(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\right| \leq \frac{1}{8}(b-a)(\Gamma_1-\gamma_1) \tag{3.39}$$

eşitsizliği gerçekleşir. Burada $1/8$ sabiti kendisinden daha küçük bir şeyle değiştirilemez anlamında keskindir (Cheng, 2001).

İspat: Öncelikle

$$f(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt-\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{1}{b-a}\int_a^b G_1(x,t)f'(t)dt \quad (3.40)$$

olduğunu belirtelim, burada

$$G_1(x,t)=\begin{cases}(t-a)-\left(x-\frac{a+b}{2}\right), & a\le t\le x\\ (t-b)-\left(x-\frac{a+b}{2}\right), & x\le t\le b\end{cases}$$

dir. Simetriklikten dolayı $a\le x\le (1/2)(a+b)$ olduğunu varsayabiliriz. Bu nedenle $t^*=x+\frac{1}{2}(b-a)$ olmak üzere

$$\begin{aligned}&G_1(x,t)\ge 0, \quad t\in[a,x)\cup(t^*,b)\\ &G_1(x,t)\le 0, \quad t\in(x,t^*]\end{aligned}$$

yazılabilir. Öte yandan

$$\begin{aligned}\int_a^b G_1(x,t)f'(t)dt&=\int_a^x G_1(x,t)f'(t)dt+\int_{t^*}^b G_1(x,t)f'(t)dt+\int_x^{t^*} G_1(x,t)f'(t)dt\\ &\le \Gamma_1\left(\int_a^x G_1(x,t)dt+\int_{t^*}^b G_1(x,t)\,dt\right)+\gamma_1\int_x^{t^*} G_1(x,t)dt\,,\end{aligned}$$

$$\int_a^x G_1(x,t)dt+\int_{t^*}^b G_1(x,t)\,dt=\frac{1}{8}(b-a)^2, \quad \int_x^{t^*} G_1(x,t)dt=-\frac{1}{8}(b-a)^2$$

olduğundan

$$\int_a^b G_1(x,t)f'(t)dt\le\frac{1}{8}(b-a)^2(\Gamma_1-\gamma_1) \quad (3.41)$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$-\int_a^b G_1(x,t)f'(t)dt\le\frac{1}{8}(b-a)^2(\Gamma_1-\gamma_1) \quad (3.42)$$

olduğu gösterilebilir. Buradan (3.40), (3.41) ve (3.42) ifadeleri (3.39) un sağlandığını gösterir ve Teorem 3.3.9 un ispatı tamamlanır. Bu ispattan $t^*=x+\frac{1}{2}(b-a)$ olmak üzere

$$f(t)=\begin{cases}\Gamma_1(t-a)\,, & a\le t\le x\\ \Gamma_1(x-a)+\gamma_1(t-x), & x\le t\le t^*\\ \Gamma_1(t-a)+\gamma_1(t^*-x)+\Gamma_1(t-t^*), & t^*\le t\le b\end{cases}$$

fonksiyonu oluşturulabilir. Bu durumda (3.39) eşitlik olarak sağlanır. Bu nedenle $1/8$ sabiti daha küçük bir sayı ile değiştirilemeyeceği anlamında keskindir. Ayrıca $x = (a+b)/2$ için belirtilenlerden daha keskin bir sınır

$$\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right| \leq \frac{1}{8}(b-a)(\Gamma_1 - \gamma_1)$$

olarak elde edilir.

Teorem 3.3.10 Teorem 3.3.6' nin şartları sağlansın. Bu takdirde her $x \in [a,b]$ için

$$\left|f(x) - \left(x - \frac{a+b}{2}\right)f'(x) + \left(\frac{1}{24}(b-a)^2 + \frac{1}{2}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2\right)\frac{f'(b)-f'(a)}{b-a} - \right.$$
$$\left.\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right| \leq (\Gamma_2 - \gamma_2)G(a,b,x) \tag{3.43}$$

eşitsizliği gerçekleşir, burada

$$G(a,b,x) = \begin{cases} \dfrac{1}{3(b-a)}\left(\begin{array}{c}\left|(x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)(b-x)\right| \\ +\left(\frac{1}{12}(b-a)^2 + \left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}\end{array}\right) & a \leq x \leq \frac{1}{3}(2a+b), \\ & \frac{1}{3}(a+2b) \leq x \leq b, \\ \dfrac{2}{3(b-a)}\left(\frac{1}{12}(b-a)^2 + \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2\right)^{3/2} & ,\frac{1}{3}(2a+b) \leq x \leq \frac{1}{3}(a+2b) \end{cases} \tag{3.44}$$

Bu durumda

$$G(a,b,x) \leq \frac{2\sqrt{15}}{9}F(a,b,x) \tag{3.45}$$

olduğu gösterilebilir (Cheng, 2001).

İspat: Bu durumda

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt - f(x) + \left(x - \frac{a+b}{2}\right)f'(x) - \left(\frac{1}{24}(b-a)^2 + \frac{1}{2}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2\right)\frac{f'(b)-f'(a)}{b-a}$$
$$= \frac{1}{b-a}\int_a^b f''(t)G_2(x,t)dt \tag{3.46}$$

eşitliği yazılabilir, burada

$$G_2(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(t-a)^2 - \left(\frac{1}{24}(b-a)^2 + \frac{1}{2}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2\right), & a \leq t \leq x \\ \frac{1}{2}(t-b)^2 - \left(\frac{1}{24}(b-a)^2 + \frac{1}{2}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2\right), & x \leq t \leq b \end{cases}$$

dir. $a \leq x \leq (1/2)(a+b)$ olduğunu varsayalım. İlk önce $a \leq x \leq \frac{(2a+b)}{3}$ durumunu göz önüne alalım. Bu durumda

$$t^{**} = b - \left(\frac{1}{12}(b-a)^2 + \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} G_2(x,t) &\leq 0, \qquad t \in [a,x) \cup [t^{**}, b] \\ G_2(x,t) &\geq 0, \qquad t \in [x, t^{**}) \end{aligned}$$

olur. Öte yandan $\forall\, x \in [a,b]$ için $\gamma_2 \leq f''(x) \leq \Gamma_2$ olacağından

$$\int_a^b G_2(x,t)\, f'(t)dt \leq \gamma_2\left(\int_a^x G_2(x,t)dt\right) + \gamma_2\left(\int_{t^{**}}^b G_2(x,t)dt\right)$$

ve

$$-\int_a^b G_2\,(x,t)f''(t)dt \leq -\int_a^x G_2\,(x,t)dt - \int_{t^{**}}^b G_2\,(x,t)dt + \gamma_2 \int_x^{t^{**}} G_2(x,t)\, dt$$

yazılabilir. Basit bir hesaplamayla

$$\int_a^x G_2(x,t)\, dt = \frac{1}{3}(x-a)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)(b-x)$$

ve

$$\int_{t^{**}}^b G_2(x,t)dt = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{12}(b-a)^2 + \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2\right)^{3/2}$$

elde edilir. Ayrıca

$$\int_a^b G_2\,(x,t)dt = 0$$

olduğundan

$$\int_x^{t^{**}} G_2(x,t)dt = -\int_a^x G_2\,(x,t)dt - \int_{t^{**}}^b G_2(x,t)dt$$

olduğu görülür. Böylece$a \leq x \leq (1/3)(2a+b)$ için iddia kolayca ispatlanmış olur. Şimdi de $(1/3)(2a+b) \leq x \leq (1/2)(a+b)$ durumunu göz önüne alalım. Bu durumda

$$t_1^{**} = a + \left(\frac{1}{12}(b-a)^2 + \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2\right)^{1/2}$$

ve

$$t_2^{**} = t^{**} = b - \left(\frac{1}{12}(b-a)^2 + \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

olmak üzere

$$G_2(x,t) \leq 0, t \in [a, t_1^{**}) \cup [t_2^{**}, b]$$
$$G_2(x,t) \geq 0, t \in [t_1^{**}, t_2^{**})$$

yazılabilir. Aynı argümanı kullanarak

$$\int_a^{t_1^{**}} G_2(x,t)\, dt = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{12}(b-a)^2 + \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2\right)^{3/2}$$

ve

$$\int_{t_2^{**}}^{b} G_2\,(x,t) dt = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{12}(b-a)^2 + \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2\right)^{3/2}$$

eşitlikleri kolayca elde edilir. Böylece Teorem 3.3.10 un ispatı tamamlanır. Bu durumda bilgisayardaki sayısal hesaplamalar ile $x = a$ ve $x = (1/2)(a+b)$ değerlerinde

$$r(x) = \frac{G(a,b,x)}{F(a,b,x)}, \quad \hat{r}(\xi) = r(a + \xi(\mathrm{b}-\mathrm{a})) = \frac{G(0,1,\xi)}{F(0,1,\xi)}, \ \xi \in [0,1]$$

ifadelerinin maksimum değere ulaştığı kolayca görülebilir. Böylece (3.45) eşitsizliği elde edilir.

Teorem 3.3.11 Teorem 3.3.5' in varsayımları sağlansın. Bu takdirde her $x \in [a,b]$ için aşağıdaki eşitsizlik gerçekleşir (Cheng, 2001):

$$\left|\frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt - \frac{(x-b)f(b)-(x-a)f(a)}{2(b-a)}\right|$$
$$\leq \frac{1}{8(b-a)}\left((x-a)^2 + (x-b)^2\right)(\Gamma_1 - \gamma_1). \tag{3.47}$$

İspat: Bu durumda

$$\frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt - \frac{(x-b)f(b)-(x-a)f(a)}{2(b-a)} = \frac{1}{b-a}\int_a^b G_3(x,t)f'(t)dt$$

eşitliği sağlanır, burada

$$G_3(x,t) = \begin{cases} (t-a) - \dfrac{1}{2}(x-a), a \leq t \leq x \\ (t-b) - \dfrac{1}{2}(x-b), x \leq t \leq b \end{cases}$$

dir. Böylece Teorem 3.3.5 teki yol izlenerek (3.47) eşitsizliğini kolayca elde edebiliriz. $x = a$ ya da $x = b$ için, aşağıdaki trapezoid eşitsizliği elde edilir:

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt - \frac{1}{2}(f(a) + f(b))\right| \leq \frac{1}{8}(b-a)(\Gamma_1 - \gamma_1) \tag{3.48}$$

Teorem 3.3.12 Teorem 3.3.6' nın varsayımları sağlansın. Bu takdirde her $x \in [a, b]$ için aşağıdaki eşitsizlik gerçekleşir (Cheng, 2001):

$$\left|f(x) - \frac{2}{3}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)f'(x) + \frac{(x-b)^2 f'(b) - (x-a)^2 f'(a)}{6(b-a)} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right|$$
$$\leq \frac{1}{18\sqrt{3(b-a)}}((x-a)^3 + (b-x)^3)(\Gamma_2 - \gamma_2). \tag{3.49}$$

İspat: Bu durumda

$$f(x) - \frac{2}{3}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)f'(x) + \frac{(x-b)^2 f'(b) - (x-a)^2 f'(a)}{6(b-a)}$$
$$-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt = \frac{1}{b-a}\int_a^b G_4(x,t) f''(t)dt$$

eşitliği sağlanır, burada

$$G_4 = \begin{cases} \frac{1}{2}(t-a)^2 - \frac{1}{6}(x-a)^2, a \leq t \leq x \\ \frac{1}{2}(t-a)^2 - \frac{1}{6}(x-a)^2, a \leq t \leq x \end{cases}$$

dir. Teorem 3.3.6 daki yol izlenerek (3.49) eşitsizliğini kolayca elde edebiliriz.

Eğer $x = (1/2)(a+b)$ ve $x = a$ veya $x = b$ alınırsa, Teorem 3.3.8' den sırasıyla

$$\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{24}(b-a)(f'(b) - f'(a)) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right|$$
$$\leq \frac{1}{72\sqrt{3}}(\Gamma_2 - \gamma_2)(b-a)^2$$

ve

$$\left|\frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{12}(b-a)(f'(b) - f'(a)) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right|$$
$$\leq \frac{1}{18\sqrt{3}}(\Gamma_2 - \gamma_2)(b-a)^2$$

eşitsizlikleri elde edilir.

Bu türden bir diğer sonuç iki kez türevlenebilir fonksiyonlar için Cerone, Dragomir ve Roumeliotis (1999) tarafından aşağıdaki şekilde verilmiştir.

Teorem 3.3.13 $I \subseteq \mathbb{R}$ bir aralık, I^0 ise I aralığının içi, $a, b \in I^0$ ve $a < b$ olmak üzere olsun. $f: I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu I^0 üzerinde iki kez türevlenebilir bir fonksiyon olmak üzere $\gamma, \Gamma \in \mathbb{R}$ keyfi sabitleri ve $\forall x \in [a, b]$ için $\gamma \leq f''(x) \leq \Gamma$ olduğunu varsayalım. Bu takdirde $\forall x \in [a, b]$ için

$$\left|f(x)-\left(x-\frac{a+b}{2}\right)f'(x)+\left[\frac{(b-a)^2}{24}+\frac{1}{2}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\right]\frac{f'(b)-f'(a)}{b-a}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right|$$

$$\leq \frac{1}{8}(\Gamma-\gamma)\left[\frac{1}{2}(b-a)+\left|x-\frac{a+b}{2}\right|\right]^2 \tag{3.50}$$

eşitsizliği gerçekleşir (Matic ve Ark., 2000).

Teorem 3.3.14 $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ iki integral edilebilir fonksiyon ve $\gamma,\Phi,\varphi,\Gamma\in\mathbb{R}$ sabitler olmak üzere $\forall x\in[a,b]$ için $\varphi\leq f(x)\leq\Phi$ ve $\gamma\leq g(x)\leq\Gamma$ olsun. Eğer;

$$T(f,g):=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)dx-\frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b f(x)dx\int_a^b g(x)dx \tag{3.51}$$

ise, bu takdirde

$$|T(f,g)|\leq\frac{1}{4}(\Phi-\varphi)(\Gamma-\gamma) \tag{3.52}$$

eşitsizliği gerçeklenir (Matic ve Ark., 2000).

Eşitsizliğin standart ispatı iki adımda elde edilebilir. Birinci adımda $T(f,f)\geq 0$, $T(g,g)\geq 0$ ve $|T(f,g)|\leq\sqrt{T(f,f)}\sqrt{T(g,g)}$ olduğu gösterilebilir. İkinci adımda ise $T(f,f)\leq\frac{1}{4}(\Phi-\varphi)^2$ ve $|T(g,g)|\leq\frac{1}{4}(\Gamma-\gamma)^2$ olduğu gösterilebilir. Bu iki adımı birleştirdiğimizde istenen sonuç elde edilir. İkinci adım sadece $T(f,f)$ terimine uygulanırsa aşağıdaki sonucun geçerli olduğu görülür.

Lemma 3.3.2 $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ integrallenebilir fonksiyonları için fg çarpımı da integrallenebilir ve $,\Phi,\varphi,\Gamma\in\mathbb{R}$ keyfi sabitler olmak üzere $\forall x\in[a,b]$ için $\gamma\leq g(x)\leq\Gamma$ olsun. Bu takdirde

$$|T(f,g)|\leq\frac{1}{2}\sqrt{T(f,f)}(\Gamma-\gamma) \tag{3.53}$$

eşitsizliği gerçekleşir (Matic ve Ark., 2000).

Lemma 3.3.3 $I\subseteq\mathbb{R}$ bir aralık olmak üzere $f:I\to\mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. f fonksiyonunun I^0 kümesi üzerinde diferansiyellenebilir ve $a,b\in I^0$, $a<b$ olduğunu varsayalım. Eğer $f^{(n)}$ fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde integrallenebilirse, bu takdirde $\forall x\in[a,b]$ için ($f^{(0)}=f$ alalım)

$$\int_a^b f(t)dt=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(b-x)^{k+1}+(-1)^k(x-a)^{k+1}}{(k+1)!}f^{(k)}(x)$$

$$+(-1)^n\int_a^b K_n(x,t)f^{(n)}(t)dt \tag{3.54}$$

eşitliği sağlanır, burada K_n:[a, b]^2 → ℝ çekirdeği aşağıdaki gibi verilir:

$$K_n(x,t) := \begin{cases} \dfrac{(t-a)^n}{n!}, & t \in [a,x), \\ \dfrac{(t-b)^n}{n!}, & t \in [x,b] \end{cases}$$

Teorem 3.3.15 Lemma 3.3.3' ün varsayımları altında γ ve Γ sabitler olmak üzere Her $x \in [a,b]$ için $\gamma \leq f^{(n)}(x) \leq \Gamma$ olsun. $x \in [a,b]$ için

$$R_n(x) = f(x) + \frac{1}{b-a}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(b-x)^{k+1}+(-1)^k(x-a)^{k+1}}{(k+1)!}f^{(k)}(x)$$

$$+\frac{(b-x)^{n+1}+(-1)^n(x-a)^{n+1}}{(n+1)!(b-a)^2}\left[f^{(n-1)}(b)-f^{(n-1)}(a)\right]-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt$$

tanımlayalım. Bu takdirde her $x \in [a,b]$ için

$$|R_n(x)| \leq \frac{1}{2}(\Gamma-\gamma)\sqrt{T\big(K_n(x,.),K_n(x,.)\big)}$$

$$= \frac{\Gamma-\gamma}{2(n!)}\left[\frac{(x-a)^{2n+1}-(x-b)^{2n+1}}{(b-a)(2n+1)}-\left(\frac{(x-a)^{n+1}-(x-b)^{n+1}}{(b-a)(n+1)}\right)^2\right]^{1/2} \tag{3.55}$$

eşitliği sağlanır (Matic ve Ark., 2000).

Sonuç 3.3.15 Teorem 3.3.15' in varsayımları ve notasyonları altında her $x \in [a,b]$

$$|R_n(x)| \leq \frac{(\Gamma-\gamma)(b-a)^n n}{2[(n+1)!]\sqrt{2n+1}} \tag{3.56}$$

dir (Matic ve Ark., 2000).

Teorem 3.3.15' de belirtilen sonucun bir neticesi olarak trapezoid eşitsizliğine benzer bir midpoint eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 3.3.16 Teorem 3.3.15' in varsayımları altında

$$\left| f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1+(-1)^k}{2}\left(\frac{b-a}{2}\right)^k\frac{f^{(k)}\left(\frac{(a+b)}{2}\right)}{(k+1)!}+\frac{1+(-1)^n}{4}\left(\frac{b-a}{2}\right)^{n-1}\frac{f^{(n-1)}(b)-f^{(n-1)}(a)}{(n+1)!}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right| \leq \frac{(\Gamma-\gamma)(b-a)^n}{n!2^{n+1}\sqrt{2n+1}}\left[1-\frac{1+(-1)^n}{2(n+1)}\right] \tag{3.57}$$

eşitsizliği geçerlidir (Matic ve Ark., 2000).

Teorem 3.3.16 Teorem 3.3.6' nın varsayımları altında $\forall x \in [a,b]$ için

$$\left|f(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\right| \leq \frac{1}{4\sqrt{3}}(b-a)(\Gamma-\gamma),$$

eşitsizliği sağlanır (Matic ve Ark., 2000).

İspat: n =1 alınırsa Teorem 3.3.15' den

$$\left|f(x)+\frac{(b-x)^2-(x-a)^2}{2(b-a)^2}[f(b)-f(a)]-\frac{1}{b-a}\int_a^a f(t)dt\right|$$

$$\leq \frac{1}{2}(\Gamma-\gamma)\sqrt{T\big((K_1(x,\cdot),K_1(x,\cdot)\big)}$$

olduğu görülür, burada (3.60) dan

$$\sqrt{T\big(K_1(x,\cdot),K_1(x,\cdot)\big)}=\sqrt{\frac{1}{3}(3\xi^2+\ell^2)-\left(\frac{1}{2}2\xi\right)^2}=\frac{\ell}{\sqrt{3}}=\frac{b-a}{2\sqrt{3}}$$

olacaktır. İspatı tamamlamak için

$$\frac{(b-x)^2-(x-a)^2}{2(b-a)^2}=\frac{a+b-2x}{2(b-a)}=-\frac{1}{b-a}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)$$

olduğunu belirtelim.

Sonuç 3.3.17 Teorem 3.3.6 nın varsayımları altında

$$\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right|\leq\frac{1}{4\sqrt{3}}(b-a)(\Gamma-\gamma) \qquad (3.58)$$

ve

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right|\leq\frac{1}{4\sqrt{3}}(b-a)(\Gamma-\gamma) \qquad (3.59)$$

eşitsizlikleri yazılır (Matic ve Ark., 2000).

4. KONVEKS ve QUASI-KONVEKS STOKASTİK SÜREÇLER İÇİN BAZI İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ

4.1. Stokastik Süreçlerin Konveksliği

Bu kısımda Stokastik süreçlerin konveksliği ile ilgili olarak bu çalışmada kullanılacak bazı temel tanım ve teoremler verilecektir.

Tanım 4.1.1 (Konveks Stokastik Süreç): Eğer her $\lambda \in (0,1)$ ve $u, v \in I$ için

$$X(\lambda u + (1-\lambda)v, .) \leq \lambda X(u, .) + (1-\lambda)X(v, .) \tag{4.1}$$

eşitsizliği sağlanırsa, bu takdirde $X: I \times \Omega \to \mathbb{R}$ stokastik sürecine konvekstir denir. Eğer yukarıdaki eşitsizlik $\lambda = \frac{1}{2}$ için geçerli ise, $X: I \times \Omega \to \mathbb{R}$ stokastik süreci Jensen- konveks veya $\frac{1}{2}-$konveksdir. Bir $X: I \times \Omega \to \mathbb{R}$ stokastik süreci konveks değilse konkavdır denir (Kotrys, 2012a).

Tanım 4.1.2 (Ω, U, P) olasılık uzayı ve $I \subset \mathbb{R}$ bir aralık olsun. $X: I \times \Omega \to \mathbb{R}$ stokastik sürecine;

(i) Eğer her $u, v \in I$ ve $\lambda \in (0,1)$ için

$$X(\lambda u + (1-\lambda)v, .) \leq \lambda X(u, .) + (1-\lambda)X(v, .)$$

ise λ-konvekstir denir. Bu tür stokastik süreçlerin sınıfı C_λ ile gösterilir.

(ii) Eğer her $u, v \in I$ ve λ $\in (0,1)$ için

$$X(\lambda u + (1-\lambda)v, .) + X((1-\lambda)u + \lambda v, .) \leq X(u, .) + X(v, .)$$

ise Wright-konvekstir denir. Bu tür stokastik süreçlerin sınıfı W ile gösterilir (Kotrys, 2012a).

Lemma 4.1.1 $A, B: \Omega \to \mathbb{R}$ rastgele değişkenleri $E[A^2] < \infty$, $E[B^2] < \infty\infty$ olmak üzere, eğer $X: I \times \Omega \to \mathbb{R}$, $X(t, .) = A(.)t + B(.)$ formunda bir stokastik süreç ve $[a, b] \subset I$ ise bu takdirde

$$\int_a^b X(t, .)\, dt = A(.)\frac{b^2 - a^2}{2} + B(.)(b-a)$$

dir (Kotrys, 2012a).

İspat. Yukarıdaki notasyon ve beklenen değerin temel özellikleri kullanılarak

$$E\left[\left(\sum_{k=1}^{n} \mathrm{X}(\Theta_k,.)\,(t_k - t_{k-1}) - A\frac{b^2-a^2}{2} + B(b-a)\right)^2\right]$$

$$= E\left[\left(A\left(\sum_{k=1}^{n} \Theta_k\,(t_k - t_{k-1}) - \frac{b^2-a^2}{2}\right) + B(\sum_{k=1}^{n}(t_k - t_{k-1}) - (b-a))\right)^2\right]$$

$$= E\left[\left(A\left(\sum_{k=1}^{n} \Theta_k\,(t_k - t_{k-1}) - \frac{b^2-a^2}{2}\right)\right)^2\right]$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n} \Theta_k\,(t_k - t_{k-1}) - \frac{b^2-a^2}{2}\right)^2 E[A^2]$$

eşitliği elde edilir. Eğer $n \to \infty$ için limit alınırsa Riemann integralin tanımından yukarıdaki ifade 0' a gidecektir. Bu ise Lemma 4.1.1 in ispatını tamamlar.

Önerme 4.1.1 $X: I \times \Omega \to \mathbb{R}$ bir konveks stokastik süreç ve $t_0 \in I^o$ olsun. Bu takdirde öyle bir $A: \Omega \to \mathbb{R}$ rastgele değişkeni vardır ki X stokastik süreci t_0 da $A(.)(t - t_0) + X(t_0,.)$ formundaki süreç tarafından desteklenir. Yani her $t \in I$ için

$$X(t,.) \geq A(.)(t - t_0) + X(t_0,.) \tag{4.2}$$

dır (Kotrys, 2012a).

İspat. $r, s, u, v, t_0 \in I^o$ sayılarını $r < s < t_0 < u < v$ olacak şekilde seçelim. Bu durumda $r < s < t_0$ için

$$s = \frac{t_0 - s}{t_0 - r} r + \frac{s - r}{t_0 - r} t_0$$

ifadesi r ve t_0 noktalarının bir konveks kombinasyonudur. Dolayısıyla $X: I \times \Omega \to \mathbb{R}$ stokastik süreci konveks olduğundan

$$X(s,.) \leq \frac{t_0 - s}{t_0 - r} X(r,.) + \frac{s - r}{t_0 - r} X(t_0,.)$$

yazabiliriz. Buradan

$$\frac{X(t_0,.) - X(r,.)}{t_0 - r} \leq \frac{X(t_0,.) - X(s,.)}{t_0 - s}$$

elde edilir. O halde, eğer $s \to t_0^-$ için limite geçilirse

$$\frac{X(t_0,.) - X(r,.)}{t_0 - r} \leq X'_-(t_0,.) \tag{4.3}$$

olacaktır. Benzer şekilde $t_0 < u < v$ için $X: I \times \Omega \to \mathbb{R}$ stokastik süreci konveks olduğu dikkate alınırsa

$$\frac{X(u,.)-X(t_0,.)}{u-t_0} \leq \frac{X(v,.)-X(t_0,.)}{v-t_0}$$

olup eğer $u \to t_0^+$ için limite geçilirse

$$X'_+(t_0,.) \leq \frac{X(v,.)-X(t_0,.)}{v-t_0} \tag{4.4}$$

sonucuna varılır. (4.3) ve (4.4) eşitsizlikleri ve Skowronski Lemmasının bir sonucu olarak

$$\frac{X(t_0,.)-X(r,.)}{t_0-r} \leq X'_-(t_0,.) \leq X'_+(t_0,.) \leq \frac{X(v,.)-X(t_0,.)}{v-t_0} \tag{4.5}$$

eşitsizliği elde edilir. Eğer $A: \Omega \to \mathbb{R}$ rastgele değişkeni $X'_-(t_0,.) \leq A(.) \leq X'_+(t_0,.)$ eşitsizliğini sağlayan herhangi bir rastgele değişkense, yukarıdaki eşitsizlikten (4.2) ifadesinin elde edilebileceği görülür.

Öte yandan iyi bilinmektedir ki $I \subset \mathbb{R}$ aralığında tanımlı Jensen-konveks, sürekli fonksiyonlar Hermite-Hadamard eşitsizliğini sağlar ve tersine olarak eğer sürekli bir fonksiyon Hermite-Hadamard eşitsizliğini sağlıyorsa konvekstir (Kuczma, 1985).

Bu kısımda stokastik süreçler için benzer sonuçlar ispatlanacaktır.

Teorem 4.1.1 $X: I \times \Omega \to \mathbb{R}$ bir Jensen-konveks ortalama-kare sürekli bir stokastik süreç olsun. Bu takdirde herhangi $u, v \in I$ için

$$X(\frac{u+v}{2},.) \leq \frac{1}{v-u}\int_u^v X(t,.)\,dt \leq \frac{X(u,.)+X(v,.)}{2}\;) \tag{4. 6}$$

dır (Kotrys, 2015).

İspat. $X: I \times \Omega \to \mathbb{R}$ stokastik süreci ortalama-kare sürekli olduğundan aynı zamanda olasılıkta süreklidir. Nikodem her Jensen-konveks ve olasılıkta sürekli stokastik sürecin konveks olduğunu ispatlamıştır. Dolayısıyla $X: I \times \Omega \to \mathbb{R}$ konvekstir, Önerme 4.1.1'den herhangi bir $t_0 \in I^0$ noktasında bu süreç bir desteğe sahiptir. $t_0 = \frac{u+v}{2}$ de bir destek alalım. Bu takdirde

$$X(t,.) \geq A(.)\left(t - \frac{u+v}{2}\right) + X\left(\frac{u+v}{2},.\right)$$

elde edilir. Lemma 4. 1' i kullanarak

$$\int_u^v X(t,.)\,dt \geq \int_u^v \left[A(.)\left(t - \frac{u+v}{2}\right) + X\left(\frac{u+v}{2},.\right)\right] dt$$

$$= \frac{A(.)}{2}(v^2 - u^2) - \frac{u+v}{2}A(.)(v-u) + X\left(\frac{u+v}{2},.\right)(v-u)$$

$$= X\left(\frac{u+v}{2},.\right)(v-u)$$

eşitsizliği yazılabilir. Sonuç olarak

$$X(\frac{u+v}{2},.) \leq \frac{1}{v-u}\int_u^v X(t,.)\,dt$$

elde edilir. Böylece ispatın birinci bölümü biter. (4.1) eşitsizliğinde eğer $t = \lambda u + (1-\lambda)v$ alınırsa $\lambda = \frac{t-v}{u-v}$ olup sürecin konveksliğinden

$$X(t,.) \leq \frac{t-v}{u-v}X(u,.) + \left(1 - \frac{t-v}{u-v}\right)X(v,.)$$

$$= \frac{X(u,.)-X(v,.)}{u-v}(t-v) + X(v,.)$$

$$= \frac{X(u,.)-X(v,.)}{u-v}t + \frac{X(v,.)(u-v)-X(u,.)v+X(v,.)v}{u-v}$$

$$= \frac{X(v,.)-X(u,.)}{u-v}t + \frac{X(v,.)u-X(u,.)v}{u-v}$$

elde edilir. Daha önce olduğu gibi Lemma 4.1.1' i kullanarak

$$\int_u^v X(t,.)dt \leq \int_u^v \left[\frac{X(v,.)-X(u,.)}{u-v}t + \frac{X(v,.)u-X(u,.)v}{u-v}\right]dt$$

$$= \frac{X(v,.)-X(u,.)}{v-u}\frac{1}{2}(v^2-u^2) - \frac{X(v,.)u-X(u,.)v}{v-u}(v-u)$$

$$= \frac{1}{2}[X(v,.)(v-u) - X(u,.)(v-u)]$$

$$= \frac{X(v,.)+X(u,.)}{2}(v-u)$$

yazılabilir. Buradan da

$$\frac{1}{v-u}\int_u^v X(t,.) \leq \frac{X(v,.)+X(u,.)}{2}dt$$

olduğu görülür.

Teoremin tersini göstermeden önce iki basit yorumdan söz edelim. Bunlardan ikincisi konkveksliğin tanımının doğrudan bir sonucu iken birincisi Schwartz eşitliğinin bir sonucudur.

Yorum 4.1.1 Eğer $X: I \times \Omega \to \mathbb{R}$ stokastik süreci I aralığında ortalama-kare sürekli ise, bu takdirde $\varphi(t) = E[X(t)]$ (X sürecinin beklenen değeri) ile tanımlı $\varphi : I \to$ R fonksiyonu da süreklidir (Kotrys, 2015).

Yorum 4.1.2 Eğer $X: I \times \Omega \to \mathbb{R}$ stokastik süreci konveks(veya konkav) ise, bu takdirde $\varphi(t) = E[X(t)]$ ile tanımlı $\varphi : I \to$ R fonksiyonu da konvekstir(veya konkav) (Kotrys, 2015).

Şimdi Hermite-Hadamard eşitsizliğinin tersini ispatlayalım.

Teorem 4.1.2 $X: I \times \Omega \to \mathbb{R}$ bir stokastik süreç ve I aralığında ortalama-kare sürekli olsun ve (4.6) eşitsizliğinin sağ veya sol tarafını sağlasın. Bu takdirde $X: I \times \Omega \to \mathbb{R}$ konvekstir (Kotrys, 2015).

İspat. Önce (4.6) eşitsizliğinin sol tarafının sağlanması durumunda teoremi ispatlayacağız. Tersine olarak X stokastik sürecinin konveks olmadığını kabul edelim. Bu takdirde her $w \in A$ için

$$X(\lambda_0 x + (1-\lambda_0)y, w) > \lambda_0 X(x,w) + (1-\lambda_0)X(y,w) \tag{4.7}$$

olacak şekilde $P(A) > 0$ olan $A \subset \Omega$ olayı ve $x, y \in I, x < y$ ve $\lambda_0 \in (0,1)$ sayıları mevcuttur.

$$\tilde{X}(t,w) = \begin{cases} X(t,w), & w \in A \\ 0, & w \notin A \end{cases}$$

sürecini tanımlayalım ve $\varphi : I \to$ R, $\varphi(t) = E[\tilde{X}(t)]$ fonksiyonunu göz önüne alalım. Yorum 4.1.1'e göre φ sürekli fakat (4. 7)' den dolayı φ, I da konveks değildir. Pales (2000)'in çalışmasındaki sonucunu kullanarak üsten yarı sürekli fonksiyon konveks değilse en az bir noktada kesin olarak konkav olacağından φ, p de kesin olarak konkav olacak şekilde bir $p \in I$ noktasının mevcut olduğu sonucuna varırız. Dolayısıyla her $t \in (p-\delta, p+\delta)\backslash\{p\}$ için

$$\varphi(t) < \varphi(p) + c(t-p) \tag{4.8}$$

olacak şekilde bir c sabiti ve bir $\delta > 0$ sayısı vardır. $p = \frac{u+v}{2}$ olmak üzere $[u,v] \subset (p-\delta, p+\delta)$ alalım. Bu takdirde Pales teoremine göre her $t \in (p-\delta, p+\delta)\backslash\{p\}$ için

$$\varphi(t) < \varphi\left(\frac{u+v}{2}\right) + c(t - \frac{u+v}{2})$$

yazılabilir. Yukarıdaki ifadenin her iki tarafının integrali alınırsa

$$\int_u^v \varphi(t)\, dt < \varphi\left(\frac{u+v}{2}\right)(v-u) + c\int_u^v \left(t - \frac{u+v}{2}\right) dt = \varphi\left(\frac{u+v}{2}\right)(v-u)$$

elde edilir. Buradan da

$$\frac{1}{(v-u)}\int_u^v \varphi(t)\, dt < \varphi\left(\frac{u+v}{2}\right)$$

elde edilir. Tekrar $\varphi(t)$ ile $E[\tilde{X}(t)]$ yi yer değştirerek

$$\frac{1}{(v-u)}\int_u^v E[\tilde{X}(t)]\, dt < E\left[\tilde{X}\left(\left(\frac{u+v}{2}\right)\right)\right] \tag{4.9}$$

eşitsizliği yazılabilir. Eğer X stokastik süreci Hermite-Hadamard eşitsizliğini sağlarsa $\tilde{X}$ nın da sağlayacağı kolayca görülür. $\tilde{X}$ ve $[u, v]$ için (4.6) eşitsizliğinin sol tarafını kullanarak

$$E\left[\tilde{X}\left(\left(\frac{u+v}{2}\right)\right)\right] < \frac{1}{(v-u)} E\left[\int_u^v \tilde{X}(t)\, dt\right] \tag{4.10}$$

olduğu görülür. (4.9) ve (4.10) eşitsizliklerinden

$$\frac{1}{(v-u)}\int_u^v E[\tilde{X}(t)]\, dt < E\left[\tilde{X}\left(\left(\frac{u+v}{2}\right)\right)\right] < \frac{1}{(v-u)} E\left[\int_u^v \tilde{X}(t)\, dt\right] \tag{4.11}$$

elde edilir. (4.11) ifadesinde integrasyon sınırını değiştirerek ve Fubini teoremini kullanarak istenilen çelişki elde edilir.

Şimdi de Hermite-Hadamard eşsitsizliğinin sağ tarafı sağlansın. Daha önce olduğu gibi tersini kabul edelim, yani X stokastik süreci konveks olmasın. Bu takdirde her $\omega \in A$ için

$$X(\lambda_0 x + (1-\lambda_0)y, w) > \lambda_0 X(x, w) + (1-\lambda_0)X(y, w) \tag{4.12}$$

olacak şekilde $P(A) > 0$ olan $A \subset \Omega$ olayı ve $x, y \in I, x < y$ ve $\lambda_0 \in (0,1)$ sayıları mevcuttur. İspatın birinci kısmında tanımlanan

$$\tilde{X}(t, w) = \begin{cases} X(t, w), & w \in A \\ 0, & w \notin A \end{cases}$$

sürecini ve $\varphi : I \to$ R, $\varphi(t) = E[\tilde{X}(t)]$ fonksiyonunu göz önüne alalım. (4.12) eşitsizliğini φ için yazar ve sürekliliği kullanarak her $\lambda \in (0, 1)$ için

$$\varphi(\lambda u + (1-\lambda)v) > \lambda\varphi(u) + (1-\lambda)\varphi(v) \tag{4.13}$$

olacak şekilde bir $[u, v] \subset I$ aralığı mevcuttur. Keyfi bir $t \in [u, v]$ alalım. Bu takdirde $\lambda = \frac{v-t}{v-u}$ olmak üzere $t = \lambda u + (1-\lambda)v$ alınırsa

$$\varphi(t) > \frac{\varphi(u)v - \varphi(v)u}{v-u} - \frac{\varphi(u)-\varphi(v)}{v-u}t$$

yazılabilir. Bu eşitsizlikten integral alınırsa

$$\int_u^v \varphi(t)\, dt > \frac{1}{2}[\varphi(u) + \varphi(v)](v-u)$$

ve buradan da

$$\frac{1}{(v-u)}\int_u^v \varphi(t)\, dt > \frac{[\varphi(u)+\varphi(v)]}{2}$$

elde edilir. ekrar $\varphi(t)$ ile $E[\tilde{X}(t)]$ yi yer değştirerek

$$\frac{1}{(v-u)}\int_u^v E[\tilde{X}(t)]\, dt > \frac{E[\tilde{X}(u)]+E[\tilde{X}(v)]}{2} \quad (4.14)$$

eşitsizliği yazılabilir. X süreci Hermite-Hadamard eşitsizliğini sağladığından $\tilde{X}$ da sağlar. $\tilde{X}$ ve $[u, v]$ için (4.6) eşitsizliğinin sağ tarafını kullanarak

$$\frac{1}{(v-u)}E\left[\int_u^v \tilde{X}(t)\, dt\right] \leq \frac{E[\tilde{X}(u)]+E[\tilde{X}(v)]}{2} \tag{4.15}$$

olduğu görülür. (4.14) ve (4.15) eşitsizliklerinden

$$\frac{1}{(v-u)}\int_u^v E[\tilde{X}(t)]\, dt \leq \frac{E[\tilde{X}(u)]+E[\tilde{X}(v)]}{2} \leq \frac{1}{(v-u)}E\left[\int_u^v \tilde{X}(t)\, dt\right] \tag{4.16}$$

elde edilir. (4.16) da integrasyon sırası değiştirilir ve Fubini teoremi kullanılırsa istenilen çelişki elde edilir.

Teorem 4.1.3 Eğer $X: I \times \Omega \to \mathbb{R}$ süreci bir monoton stokastik süreç ise bu takdirde bu süreç sayılabilir çoklukta noktalar hariç her yerde süreklidir (Skowronski, 1992).

Lemma 4.1.2 Eğer $X: I \times \Omega \to \mathbb{R}$ stokastik süreci konveks ise bu takdirde her $t \in I$ için

$$P - \lim_{u \to t^-} \frac{X(u,.) - X(t,.)}{u-t} = X'_-(t,.)$$

ve

$$P - \lim_{u \to +} \frac{X(u,.) - X(t,.)}{u-t} = X'_{+}(t,.)$$

olacak şekilde X'_{-} , $X'_{+}: I \times \Omega \to \mathbb{R}$ artan stokastik süreçleri mevcuttur. Öte yandan $t < s$ olacak şekildeki her $t, s \in I$ için

$$X'_{-}(t,.) \leq X'_{+}(t,.) \leq X'_{-}(s,.) \leq X'_{+}(s,.) \tag{4.17}$$

dir (Skowronski, 1992).

İspat. $t, s \in I$ ve $t < s$ keyfi olsun. Bu durumda $u, v \in I$ sayılarını $u < t < v < s$ olacak şekilde seçelim. Bu takdirde

$$\frac{X(t,.) - X(u,.)}{t-u} \leq \frac{X(v,.) - X(u,.)}{v-u}$$

olduğunu göstermeliyiz. Bu durumda

$$t = \frac{v-t}{v-u} u + \frac{t-u}{v-u} v$$

olduğu yani t nin u ve v noktalarının bir konveks kombinasyonu olduğu görülür. Dolayısıyla $X: I \times \Omega \to \mathbb{R}$ stokastik süreci konveks olduğundan

$$X(t,.) \leq \frac{v-t}{v-u} X(u,.) + \frac{t-v}{v-u} X(v,.)$$

yazabiliriz. Buradan da

$$\frac{X(v,.) - X(u,.)}{v-u} \leq \frac{X(v,.) - X(t,.)}{v-t}$$

eşitsizliği elde edilir. Dolayısıyla

$$\frac{X(u,.) - X(t,.)}{u-t} \leq \frac{X(v,.) - X(t,.)}{v-t} \tag{4.18}$$

olup $\frac{X(u,.) - X(t,.)}{u-t}$ fark oranı $u \in I$ ya göre artan bir stokastik süreçtir. Buradan da her

her $t \in I$ için

$$P - \lim_{u \to t^-} \frac{X(u,.) - X(t,.)}{u-t} = X'_{-}(t,.)$$

olan bir $X'_{-} : \Omega \to \mathbb{R}$ rasgele değişkeni mevcuttur. Benzer şekilde her $t \in I$ için

$$P - \lim_{u \to t^+} \frac{X(v,.) - X(t,.)}{v-t} = X'_{+}(t,.)$$

olan bir $X'_{+} : \Omega \to \mathbb{R}$ rasgele değişkeninin mevcut olduğu gösterilebilir. (4.18) den

$X'_{-}(t,.) \leq X'_{+}(t,.)$ oldğgunu kolayca elde ederiz. Öte yandan

$$\frac{X(v,.)-X(t,.)}{v-t} \leq \frac{X(s,.)-X(v,.)}{s-v}$$

elde edilir ki buradan da $X'_{+}(t,.) \leq X'_{-}(s,.)$ olduğu görülür. Böylece $t, s \in I$ keyfi olduğundan ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.1.4 Eğer $X: I \times \Omega \to \mathbb{R}$ süreci konveks ise bu takdirde bu süreç sayılabilir çoklukta nokta hariç her noktada diferansiyellenebilirdir (Skowronski, 1992).

4.2. Stokastik Süreçler İçin Konvekslik Tipleri

Bu kısımda çeşitli tipten konveks stokastik süreçleri tanıtıp bu süreçlerle ilgili bazı eşitsizlikler verilecektir.

Tanım 4.2.1 Eğer her $t, s \in I$ ve $\lambda \in [0,1]$ için

$$X\left(\frac{s+t}{2}, .\right) \leq \frac{X(s,.)-X(t,.)}{2} \tag{4.19}$$

ise $X: I \times \Omega \to \mathbb{R}$ stokastik sürecine J-konveks denir. Eğer $-X$ stokastik süreci konveks(J-konveks) ise X konkavdır(J-konkavdır) denir (Skowronski, 1992).

Lemma 4.2.1 $0 \in (a,b)$ ve $X: (a,b) \times \Omega \to \mathbb{R}$, $X(0, \cdot) = 0$ ile tanımlı bir J-konveks stokastik süreç olsun. Eğer $X + Y$ süreci J-konkav olacak şekilde 0 noktasında diferansiyellenebilir konkav bir $Y: (a,b) \times \Omega \to \mathbb{R}$, stokastik süreç varsa bu takdirde $X = A + Z$ olacak şekilde bir $A: \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}$ toplamsal stokastik süreci ve bir konveks $Z: (a,b) \times \Omega \to \mathbb{R}$ stokastik süreci vardır (Skowronski, 1992).

Teorem 4.2.1 $X: (a,b) \times \Omega \to \mathbb{R}$ süreci J-konveks stokastik süreç olsun. Bu takdirde $X + Y$ süreci J-konkav olacak şekilde bir $Y: (a,b) \times \Omega \to \mathbb{R}$ konkav stokastik sürecinin mevcut olması için gerek ve yeter koşul $A: \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}$ bir toplamsal stokastik süreç ve $Z: (a,b) \times \Omega \to \mathbb{R}$ konveks stokastik süreç olmak üzere $X = A + Z$ olmasıdır (Skowronski, 1992).

Teorem 4.2.2 Eğer $X_1, X_2: (a,b) \times \Omega \to \mathbb{R}$ stokastik süreçleri sırasıyla J-konveks ve J-konkav ise ve her $t \in (a,b)$ için $X_1(t,.) \leq X_2(t,.)$ eşitsizliği sağlanıyorsa bu takdirde Y_1 konveks Y_2 konkav A toplamsal ve $X_1 = A + Y_1$ ve $X_2 = A + Y_2$ olacak şekilde $X_1, X_2: (a, b) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ stokastik süreçleri ve $A: \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ stokastik süreci vardır (Skowronski, 1992).

Tanım 4.2.2 $C: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ bir pozitif rastgele değişken olsun. Eğer her $u, v \in I$ ve her $\lambda \in [0,1]$ için

$$X(\lambda u + (1-\lambda)v, .) \leq \lambda X(u, .) + (1-\lambda)X(v, .) + C(.)\lambda(1-\lambda)(u-v)^2 \quad (3.20)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, bu durumda $X: I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ stokastik sürecine $C(\cdot) > 0$ modülüne göre güçlü konvekstir denir. Eğer (4.20) eşitsizliği sadece $\lambda = \frac{1}{2}$ için sağlanıyorsa, bu takdirde X sürecine $C(\cdot)$ modülüne göre güçlü Jensen-konveks veya $C(\cdot)$ modülüne göre güçlü yarıkonvekstir denir. Eğer bu eşitsizlik sabit bir $\lambda \in [0,1]$ sayısı için sağlanıyorsa bu takdirde X sürecine $C(\cdot)$ modülüne göre güçlü $\lambda-$konvekstir denir (Kotrys, 2012b).

Eğer (4.20) eşitsizliğinde $C(.)\lambda(1-\lambda)(u-v)^2$ ifadesi atılırsa, Nikodem tarafından verilen konveks stokastik süreç tanımını elde edilmiş olur (Nikodem, 1980a). Diğer taraftan (4.20)' de $C(\cdot) \equiv 0$ olduğunda bir limit durum söz konusudur.

Lemma 4.2.2 X stokastik sürecinin $C(\cdot)$ modülüne göre güçlü λ-konveks(veya güçlü konveks) stokastik süreç olması gerek ve yeter şart $Y(t, .) = X(t, .) - C(.)t^2$ ile tanımlı $Y: I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ stokastik sürecinin λ-konveks(veya konveks) olmasıdır (Kotrys, 2012b).

İspat. İspatın birinci kısmında X stokastik sürecinin güçlü λ-konveks olduğunu kabul edelim. $u, v \in I$ keyfi olsun. Bu durumda güçlü λ-konvekslik tanımından

$$\begin{aligned} Y(\lambda u + (1-\lambda)v, .) &= x(\lambda u + (1-\lambda)v, .) - C(.)(\lambda u + (1-\lambda)v)^2 \\ &\leq \lambda X(u, .) + (1-\lambda)X(v, .) + C(.)\lambda[(1-\lambda)(u-v)^2 + (\lambda u + (1-\lambda)v)^2] \\ &= \lambda X(u, .) + (1-\lambda)X(v, .) - C(.)[\lambda u^2 + (1-\lambda)v^2] \\ &= \lambda(X(u, .) - C(.)u^2) + (1-\lambda)(X(v, .) - C(.)v^2) \\ &= \lambda Y(u, .) + (1-\lambda)Y(v, .) \end{aligned}$$

yazılabilir. Teoremin ikinci kısmı benzer şekilde olduğu için ihmal edilmiştir.

Sonuç 4.2.1 Eğer $X: I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ stokastik süreci $C(\cdot)$ modülüne göre güçlü konveks ise, bu takdirde her $t_0 \in I^0$ için X stokastik süreci t_0 noktasında

$$H(t,.) = C(.)(t - t_0)^2 + A(.)(t - t_0) + X(t_0,.)$$

ile tanımlanan $H: I \times \Omega \to \mathbb{R}$ süreci tarafından desteklenir (Kotrys, 2012b).

Teorem 4.2.3 $\lambda \in [0,1]$ sabit bir sayı olsun ve $X: I \times \Omega \to \mathbb{R}$ süreci $C(\cdot)$ modülüne göre güçlü λ -konveks stokastik süreç olsun. Bu takdirde *X* süreci, $C(\cdot)$ modülüne göre Jensen-konvekstir (Kotrys, 2012b).

İspat. *X* stokastik sürecinin güçlü $\lambda-$konveks olduğunu farz edelim. Lemma 4.2.2 sağlandığı için $Y(t,.) = X(t,.) - C(.)t^2$ sürecide $\lambda-$konvekstir. Skowronski lemmasına göre *Y* stokastik süreci Jensen konvekstir. Bu ise

$$Y\left(\frac{s+t}{2},.\right) \leq \frac{Y(s,.)-Y(t,.)}{2}$$

olması demektir. Bu nedenle

$$X\left(\frac{s+t}{2},.\right) - C(.)\left(\frac{s+t}{2}\right)^2 \leq \frac{X(s,.)-C(.)s^2+X(t,.)-C(.)t^2}{2}$$

olduğu ve bazı düzenlemelerden sonra

$$X\left(\frac{s+t}{2},.\right) \leq \frac{X(s,.)+X(t,.)}{2} - \frac{C(.)}{4}(u-v)^2$$

eşitsizliği elde edilmiş olur. Bu da ispatı bitirir.

Tanı 4.2.3 (*P*- Üsten Sınırlı) Bir $X: I \times \Omega \to \mathbb{R}$ stokastik süreci için

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname*{Sup}_{t\in(a,b)} \{P(w \in \Omega : X(t,w) \geq n)\} = 0$$

eşitliği sağlanırsa *X* süreci $(a,b) \in I$ aralığında *P*-üsten sınırlıdır denir (Kotrys, 2012b).

Teorem 4.2.4 Eğer $X: I \times \Omega \to \mathbb{R}$ stokastik süreci $C(\cdot)$ modülüne göre güçlü Jensen konveks bir stokastik süreç ve $(a,b) \in I$ aralığında *P*-üsten sınırlı ise bu takdirde bu süreç *I* aralığında süreklidir (Kotrys, 2012b).

İspat. *X* süreci güçlü Jensen konveks olduğundan aynı zamanda Jensen konveks stokastik süreçtir. Öte yandan *X*, *I* aralığında *P*-üsten sınırlı olduğundan süreklidir.

Teorem 4.2.5 *I* nın açık aralık olduğunu varsayalım. $C(\cdot)$ modülüne göre güçlü yarı-konveks olan bir *X* stokastik sürecinin sürekli olması için gerek ve yeter şart bu sürecin $C(\cdot)$ modülüne göre güçlü konveks olmasıdır (Kotrys, 2012b).

İspat. Gerekliliği ispatlamak için $Y(t,.) = X(t,.) - C(.)t^2$ sürecini ele alalım. Bu durumda Lemma 4.2.2' ye göre Y nin Jensen konveks olduğunu görülür. X sürekli olduğu için Y ' de süreklidir. Nikodem' in sonucunu kullanarak Y nin konveksliğini elde ederiz. Lemma 4.2.2' yi bir kez daha kullanarak; X' in $C(\cdot)$ modülüne göre güçlü konveks olduğu sonucunu çıkarırız. Yeterliliği ispatlamak için eğer X güçlü konveks ise X in aynı zamanda konveks olduğunu belirtelim. Nikodemin sonucundan, X' in sürekliliğini elde ederiz.

Sonuç 4.2.2 Eğer $X: I \times \Omega \to \mathbb{R}$ stokastik süreci sürekli ve $C(\cdot)$ modülüne göre güçlü λ-konveks bir stokastik süreç ise bu takdirde bu süreç $C(\cdot)$ modülüne göre de güçlü konvekstir (Kotrys, 2012b).

Teorem 4.2.6 Eğer $X: I \times \Omega \to \mathbb{R}$, Jensen-konveks, I aralığında ortalama-kare sürekli stokastik süreç ise bu takdirde herhangi $u, v \in I$ için

$$X\left(\frac{u+v}{2},.\right) \leq \frac{1}{v-u}\int_u^v X(t,.)dt \leq \frac{X(u,.)+X(v,.)}{2} \tag{4.21}$$

eşitsizliği gerçeklenir (Kotrys, 2012b).

Bu ifadedeki integral ortalama-kare integraldir. Ortalama kare integralin tanımı ve temel özellikleri için Sobczyk (1991) e bakılabilir. Şimdi güçlü konveks stokastik süreç için Hermite-Hadamard eşitsizliğini verebiliriz.

Teorem 4.2.7 $X: I \times \Omega \to \mathbb{R}$ süreci $C(\cdot)$ modülüne göre güçlü Jensen-konveks ve I aralığında ortalama-kare sürekli bir süreç olsun. Bu takdirde herhangi $u, v \in I$ için

$$X\left(\frac{u+v}{2},.\right) - C(.)\frac{(v-u)^2}{12} \leq \frac{1}{v-u}\int_u^v X(t,.)dt \leq \frac{X(u,.)+X(v,.)}{2} - C(.)\frac{(v-u)^2}{6} \tag{4.23}$$

eşitsizliği sağlanır (Kotrys, 2012b).

Tanım 4.2.4 (Ω, A, P) olasılık uzayı ve $I \subset \mathbb{R}$ bir aralık, $\lambda \in [0,1]$ sabit bir sayı ve $X: I \times \Omega \to \mathbb{R}$ bir stokastik süreç olsun. Eğer her $u, v \in I$ için

$$Y(\lambda u + (1-\lambda)v,.) \leq [X(u,.)]^{\lambda}[X(v,.)]^{1-\lambda} \tag{4.24}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa $X: I \times \Omega \to \mathbb{R}$ stokastik sürecine *log−konveks* stokastik süreç adı verilir (Tomar ve Ark.,2015).

Önerme 4.2.1 Eğer $X: I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ stokastik süreci log-konveks stokastik süreç ise bu takdirde X konveks stokastik süreçtir (Tomar ve Ark.,2015).

İspat. İspat (4.24)' den ve aşağıdaki aritmatik-geometrik ortalama eşitsizliğinden kolayca görülebilir. Her $u, v \in I$ ve $\lambda \in [0,1]$ için

$$[X(u,.)]^{\lambda}[X(v,.)]^{1-\lambda} \leq \leq \lambda X(u,.) + (1-\lambda)X(v,.)$$

eşitsizliği gerçeklenir.

$X: I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ bir stokastik süreç ve $u, v \in I,\ u < v$ olmak üzere

$$X\left(\frac{u+v}{2},.\right) \leq \frac{1}{v-u}\int_u^v X(t,.)dt \leq \frac{X(u,.)+X(v,.)}{2} \tag{4.25}$$

Hermite-Hadamard eşitsizliğini hatırlayalım. Bu eşitsizliği *log*−konveks stokastik süre uygularsak

$$ln\left[X\left(\frac{u+v}{2},.\right)\right] \leq \frac{1}{v-u}\int_u^v ln[X(t,.)]dt \leq \frac{ln[X(u,.)]+ln[X(v,.)]}{2} \tag{4.26}$$

veya buna denk olarak

$$X\left(\frac{u+v}{2},.\right) \leq exp\left[\frac{1}{v-u}\int_u^v ln[X(t,.)]dt\right] \leq \sqrt{X(u,.).X(v,.)} \tag{4.27}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu ise *log*−konveks stokastik süreçler için Hadamard tipi bir eşitsizliktir.

Negatif olmayan reel sayıların aritmatik ortalamasını $A(u,\ v)$ ile aynı sayıların geometrik ortalamasını ise $G(u,\ v)$ ile gösterelim. Bu durumda Hadamard tarafından verilen (4.25) eşitsizliği

$$X(A(u,v),.) \leq \frac{1}{v-u}\int_u^v A\big(X(t,.) + X(u+v-t,.)\big)dt \leq A\big(X(u,.) + X(v,.)\big)$$

şeklinde yazılabilir. Bu durum

$$\int_u^v X(t,.)dt = \int_u^v X(u+v-t,.)dt$$

alınarak kolayca gösterilebilir.

Teorem 4.2.8 $X: I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ bir *log*−konveks stokastik süreç ve $u, v \in T,\ u < v$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki eşitsizlik sağlanır (Tomar ve Ark.,2015).

$$X(A(u,v),.) \leq \frac{1}{v-u}\int_u^v G\big(X(t,.), X(u+v-t,.)\big)dt \leq G\big(X(u,.), X(v,.)\big)$$

Sonuç 4.2.3 $X: I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ bir $log-$konveks stokastik süreç ve $u, v \in T$, $u < v$ olsun. Bu takdirde

$$X\left(\frac{u+v}{2},.\right) \leq ln\left[\frac{1}{v-u}\int_u^v exp\big(X(t,.),X(u+v-t,.)\big)dt\right] \leq \frac{X(u,.)+X(v,.)}{2} \quad (4.28)$$

eşitsizliği sağlanır (Tomar ve Ark., 2015).

Teorem 4.2.9 $X: I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ bir $log-$konveks stokastik süreç ve $u, v \in T$, $u < v$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki eşitsizlik sağlanır (Tomar ve Ark.,2014):

$$\begin{aligned} X\left(\frac{u+v}{2},.\right) &\leq exp\left[\frac{1}{v-u}\int_u^v ln\big(X(t,.)\big)dt\right] \\ &\leq \frac{1}{v-u}\int_u^v G\big(X(t,.),X(u+v-t,.)\big)dt \\ &\leq \frac{1}{v-u}\int_u^v X(t,.)dt \\ &\leq L\big(X(u,.),X(v,.)\big). \end{aligned} \quad (4.29)$$

Burada eğer $p \neq q$ ise $L(p,q) = \frac{p-q}{lnp-lnq}$ ve $p \neq q$ ise $L(p,p) = p$ dir.

Sonuç 4.2.4 $X: I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ bir $log-$konveks stokastik süreç ve $u, v \in T$, $u < v$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki eşitsizliği sağlanır (Tomar ve Ark.,2014):

$$\begin{aligned} exp\left[X\left(\frac{u+v}{2},.\right)\right] &\leq exp\left[\frac{1}{v-u}\int_u^v X(t,.)dt\right] \\ &\leq \frac{1}{v-u}\int_u^v exp\left[\frac{X(t,.),X(u+v-t,.)}{2}\right]dt \\ &\leq \frac{1}{v-u}\int_u^v exp\big(X(t,.)\big)dt \\ &\leq E\big(X(u,.),X(v,.)\big). \end{aligned}$$

Burada E üstel ortalamadır, başka bir ifadeyle eğer $p \neq q$ ise $E(p,q) = \frac{exp(p)-exp(q)}{p-q}$ ve $p = q$ ise $E(p,p) = p$ dir.

Tanım 4.2.5 (Ω, A, P) olasılık uzayı ve $I \subset \mathbb{R}$ bir aralık, $\lambda \in [0,1]$ sabit bir sayı ve $X: I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ bir stokastik süreç olsun. Eğer her $u, v \in I$ için

$$Y(\lambda u + (1-\lambda)v,.) \leq [X(u,.)]^{\lambda}[X(v,.)]^{1-\lambda} - c\lambda(1-\lambda)(v-u)^2 \quad (4.30)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa $X: I \times \Omega \to \mathbb{R}$ stokastik sürecine $c > 0$ modülüne göre l*og−konveks* stokastik süreç adı verilir (Tomar ve Ark.,2014).

Teorem 4.2.10 $X: I \times \Omega \to \mathbb{R}$ süreci $c > 0$ modülüne göre güçlü $log-$konveks stokastik süreç ve $u, v \in I,\ u < v$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki eşitsizlik sağlanır (Tomar ve Ark., 2014):

$$
\begin{aligned}
X\left(\frac{u+v}{2},.\right) + c\,\frac{(v-u)^2}{12} &\leq \frac{1}{v-u}\int_u^v G\big(X(t,.), X(u+v-t,.)\big)dt \\
&\leq \frac{1}{v-u}\int_u^v X(t,.)dt \\
&\leq L\big(X(u,.), X(v,.)\big) - c\,\frac{(v-u)^2}{6} \\
&\leq A\big(X(u,.), X(v,.)\big) - c\,\frac{(v-u)^2}{6}.
\end{aligned} \tag{4.31}
$$

Tanım 4.2.6 (Birinci Anlamda $s-$Konveks Stokastik Süreç) $0 \leq s \leq 1$ olsun. Eğer her $u, v \geq 0$ ve $\alpha^s + \beta^s = 1$ için

$$X(\alpha u + \beta v,.) \leq \alpha^s X(u,.) + \beta^s X(v,.)$$

eşitsizliği geçerliyse $X: I \times \Omega \to \mathbb{R}$ stokastik sürecine birinci anlamda $s-$konveks stokastik süreç adı verilir (Maden ve ark., 2015).

Hatılatma 4.2.1 Kolaylıkla görülmektedir ki s = 1 için birinci anlamda $s-$konvekslik daha önce verilen stokastik süreçlerdeki genel konveksliğe indirgenir (Maden ve ark., 2015).

Hatılatma 4.2.2 Kolayca görülmektedir ki α = β = 1/2 için birinci anlamda $s-$kovekslik Jensen-konveksliğe indirgenir (Maden ve ark., 2015).

Teorem 4.2.11 $s \in (0,1)$ olmak üzere $X: I \times \Omega \to \mathbb{R}$ stokastik süreci birinci anlamda $s-$konveks olsun. Eğer $u, v \in I,\ u < v$ o ise bu takdirde

$$X\left(\frac{u+v}{2^{1/s}},.\right) \leq \frac{1}{v-u}\int_u^v X(t,.)dt \tag{4.32}$$

eşitsizliği geçerlidir (Maden ve ark., 2015).

Teorem 4.2.12 $s \in (0,1)$ olmak üzere $X: I \times \Omega \to \mathbb{R}$ stokastik süreci birinci anlamda $s-$konveks olsun. Bu takdirde

$$\int_0^1 X\left(tu + (1 - t^s)^{1/s} v, .\right)\Psi(t)dt \leq \frac{X(u,.) + X(v,.)}{2} \tag{4.33}$$

eşitsizliği geçerlidir, burada

$$\Psi(t)dt := \frac{1}{2}\left[1 + (1 - t^s)^{\frac{1}{s}-1} t^{s-1}\right], t \in [0,1]$$

dir (Maden ve ark., 2015).

Teorem 4.2.13 $s \in (0,1)$ olmak üzere $X: I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ stokastik süreci birinci anlamda $s-$konveks olsun. Bu takdirde

$$\begin{aligned} X\left(\frac{u+v}{2^{\frac{2}{s}-1}}, .\right) &\leq \int_0^1 X\left(\frac{u+v}{2^{\frac{1}{s}}}, .\right)\left[t^{\frac{1}{s}} + (1 - t^s)^{\frac{1}{s}}\right] dt \\ &\leq \int_0^1 \left[t^{\frac{1}{s}} u + (1 - t^s)^{\frac{1}{s}} v\right] dt \\ &\leq \frac{X(u,.) + X(v,.)}{2} \end{aligned} \tag{4.34}$$

eşitsizliği geçerlidir, burada $I \subset \mathbb{R}$ bir aralıktır (Maden ve ark., 2015).

Tanım 4.2.7 (İkinci Anlamda $s-$Konveks Stokastik Süreç) $0 < s \leq 1$ olsun. Eğer her $u, v \geq 0$ için

$$X(\lambda u + (1 - \lambda)v, .) \leq \lambda^s X(u, .) + (1 - \lambda)^s X(v, .) \tag{4.35}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa $X: I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ stokastik sürecine ikinci anlamda $s-$konveks stokastik süreç adı verilir, burada $I \subset \mathbb{R}$ bir aralıktır (Set ve ark., 2014).

Hatılatma 4.2.3 Kolaylıkla görülmektedir ki $s = 1$ olması özel durumunda ikinci anlamda $s-$konvekslik daha önceden verilen stokastik süreçlerdeki genel konveksliğe indirgenir (Set ve ark., 2014).

Teorem 4.2.14 $X: I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ stokastik süreci ikinci anlamda $s-$konveks olsun. Bu takdirde her $u, v \in I, \alpha, \beta \geq 0$ ve $\alpha + \beta \leq 1$ için

$$X(\alpha u + \beta v, .) \leq \alpha^s X(u, .) + \beta^s X(v, .) \tag{4.36}$$

eşitsizliğinin sağlanması için gerek ve yeter şart $X(0, \cdot) = 0$ olmasıdır (Set ve ark., 2014).

Teorem 4.2.15 $X: I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ stokastik süreci ikinci anlamda $s-$konveks olsun. Bu takdirde için $u, v \in I, s \in (0,1)$ olmak üzere

$$2^{s-1}X\left(\frac{u+v}{2},.\right) \leq \frac{1}{v-u}\int_u^v X(t,.)dt \leq \frac{X(u,.)+X(v,.)}{s+1} \tag{4.37}$$

eşitsizliği gerçeklenir (Set ve ark., 2014).

Tanım 4.2.8 (Harmonik−Konveks Stokastik Süreç) $I \subset \mathbb{R}\backslash\{0\}$ bir aralık olmak üzere, eğer her $u, v \in I$ ve $\lambda \in [0,1]$ için

$$X\left(\frac{uv}{\lambda u+(1-\lambda)v},.\right) \leq \lambda X(v,.) + (1 - \lambda)X(u,\cdot) \tag{4.38}$$

eşitsizliği gerçekleniyorsa, bu takdirde $X: I \times \Omega \to \mathbb{R}$ stokastik sürecine harmonik konveks stokastik süreç adı verilir (Okur ve ark., 2018).

Teorem 4.2.16 $I \subset \mathbb{R}\backslash\{0\}$ bir aralık olmak üzere $X: I \times \Omega \to \mathbb{R}$ stokastik süreci bir harmonik konveks stokastik süreç ve $u, v \in I, u < v$ olsun. Eğer $X \in L[a, b]$ ise bu takdirde

$$X\left(\frac{2uv}{u+v},.\right) \leq \frac{uv}{v-u}\int_u^v \frac{X(t,.)}{t^2}dt \leq \frac{X(u,.)+X\,v,\cdot)}{2} \tag{4.39}$$

eşitsizliği gerçeklenir (Okur ve ark., 2018).

4.3 Quasi - Konveks Stokastik Süreçler için Hermite - Hadamard Tipi Bazı İntegral Eşitsizlikleri

Bu kısımda birinci ve ikinci türevlerinin çeşitli kuvvetleri konveks veya Quasi-konveks olan konveks stokastik süreçler için Hermite-Hadamard eşitsizliğinin sağ ve sol tarafları için tahminler elde edilecektir. Bu amaçla konveks fonksiyonlar için verilen eşitsizlikler türevlerinin mutlak değerleri konveks veya Quasi-konveks olan stokastik süreçlere uyarlanacaktır.

Teorem 4.3.1 $h:(0,1)\to\mathbb{R}$ non-negatif bir fonksiyon, $h \neq 0$ ve $X: I\times\Omega\to\mathbb{R}$ non-negatif, h-convex ve ortalama-kare integrallenebilir bir stokastik süreç olsun. Bu takdirde her $a,b\in I$, $(a<b)$, için aşağıdaki eşitsizlik hemen her yerde gerçeklenir:

$$\frac{1}{2h\left(\frac{1}{2}\right)}X\left(\frac{a+b}{2},\cdot\right) \leq \frac{1}{(b-a)}\int_a^b X(t,\cdot)dt \leq \left(X(a,\cdot)+X(b,\cdot)\right)\int_0^1 h(z)dz. \tag{4.40}$$

Sonuç olarak, konveks stokastik süreçler için aşağıdaki Hermite-Hadamard tipi eşitsizlik $a,b\in I$, $a<b$, olmak üzere hemen her yerde sağlanır:

$$X\left(\frac{a+b}{2},\cdot\right)\leq\frac{1}{(b-a)}\int_a^b X(u,\cdot)du\leq\frac{X(a,\cdot)+X(b,\cdot)}{2} \tag{4.41}$$

Lemma 4.3.1 $X: I\times\Omega\to\mathbb{R}$ süreci I° aralığında ortalama-kare türevlenebilir bir stokastik süreç, $a,b\in I$ ve $a<b$ olsun. Eğer $X'(t,\cdot)$ süreci $[a,b]$ aralığında ortalama-integrallenebilirse, aşağıdaki eşitlik hemen her yerde sağlanır:

$$\frac{X(a,\cdot)+X(b,\cdot)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b X(u,\cdot)du=\frac{(b-a)}{2}\int_0^1(1-2t)X'(at+(1-t)b,\cdot)dt. \tag{4.42}$$

İspat: Eşitliğin sağ tarafında kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\int_0^1(1-2t)X'(at+(1-t)b,\cdot)dt=\frac{1}{(b-a)}\left[X(a,\cdot)+X(b,\cdot)\right]-\frac{2}{(b-a)}\int_0^1 X'(at+(1-t)b,\cdot)dt,$$

olduğu görülür. İntegralin her iki tarafı $(b-a)/2$ ile çarpıldığında

$$\frac{(b-a)}{2}\int_0^1 p(1-2t)X'(at+(1-t)b,\cdot)dt=\frac{X(a,\cdot)+X(b,\cdot)}{2}-\int_0^1 X'(at+(1-t)b,\cdot)dt,$$

elde edilir. Bu durumda eğer sağ taraftaki integralde $u=ta+(1-t)b$ alınırsa istenilen sonuç elde edilmiş olur.

Teorem 4.3.2 $X: I\times\Omega\to\mathbb{R}$ süreci I° aralığında ortalama-kare türevlenebilir bir stokastik süreç, $a,b\in I$ ve $a<b$ olsun. Eğer $|X'(t,\cdot)|$ konveks bir stokastik süreç ise aşağıdaki eşitsizlik hemen her yerde gerçeklenir:

$$\left|\frac{X(a,\cdot)+X(b,\cdot)}{2}-\frac{1}{(b-a)}\int_a^b X(u,\cdot)du\right|\leq\frac{(b-a)}{8}\left[|X'(a,\cdot)|+|X'(b,\cdot)|\right],$$

İspat: Öncelikle

$$\begin{aligned}\int_0^1|1-2t|(1-t)dt&=\int_0^{1/2}(1-2t)(1-t)dt+\int_{1/2}^1(2t-1)(1-t)dt=\frac{1}{4},\\ \int_0^1|1-2t|dt&=\int_0^{1/2}(1-2t)tdt+\int_{1/2}^1(2t-1)tdt=\frac{1}{4}\end{aligned} \tag{4.43}$$

olduğunu belirtelim. Bu durumda yukarıdaki bilgiler ve Lemma 4.3.1 kullanılırsa

$$\left|\frac{X(a,\cdot)+X(b,\cdot)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b X(u,\cdot)du\right|=\left|\frac{(b-a)}{2}\int_0^1(1-2t)X'(at+(1-t)b,\cdot)dt\right|$$

$$\leq\frac{(b-a)}{2}\int_0^1|1-2t|\left|X'(ta+(1-t)b,\cdot)\right|dt$$

$$\leq\frac{(b-a)}{2}\int_0^1|1-2t|\left[t\left|X'(a,\cdot)\right|+(1-t)\left|X'(b,\cdot)\right|\right]dt$$

$$=\frac{(b-a)}{2}\left[\left|X'(a,\cdot)\right|\int_0^1|1-2t|tdt+\left|X'(b,\cdot)\right|\int_0^1|1-2t|(1-t)dt\right]$$

$$=\frac{(b-a)}{2}\left[\frac{1}{4}\left|X'(a,\cdot)\right|+\frac{1}{4}\left|X'(b,\cdot)\right|\right]=\frac{(b-a)}{8}\left[\left|X'(a,\cdot)\right|+\left|X'(b,\cdot)\right|\right],$$

olduğu görülür.

Lemma 4.3.2 $X: I\times\Omega\to\mathbb{R}$ süreci I° aralığında ortalama-kare türevlenebilir bir stokastik süreç, $a,b\in I$ ve $a<b$ olsun. Eğer $X'(t,\cdot)$ süreci $[a,b]$ aralığında ortalama-integrallenebilirse, aşağıdaki eşitlik hemen her yerde sağlanır:

$$\frac{1}{(b-a)}\int_a^b X(u,\cdot)du-X\left(\frac{a+b}{2},\cdot\right)=(b-a)\int_0^1 K(t)X'(at+(1-t)b,\cdot)dt, \tag{4.44}$$

burada

$$K(t)=\begin{cases} t, & t\in\left[0,\dfrac{1}{2}\right], \\ t-1, & t\in\left(\dfrac{1}{2},1\right]. \end{cases} \tag{4.45}$$

dir.

İspat: Kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\int_0^1 K(t)X'(at+(1-t)b,\cdot)dt=\int_0^{1/2} tX'(at+(1-t)b,\cdot)dt+\int_{1/2}^1(t-1)X'(at+(1-t)b,\cdot)dt$$

$$=\frac{1}{(a-b)}X\left(\frac{a+b}{2},\cdot\right)-\frac{1}{(a-b)}\int_0^1 X(at+(1-t)b,\cdot)dt,$$

elde edilir. İntegralin her iki tarafı $(b-a)$ ile çarpılırsa, bu takdirde

$$(b-a)\int_0^1 K(t)X'(at+(1-t)b,\cdot)dt=\int_0^1 X(at+(1-t)b,\cdot)dt-X\left(\frac{a+b}{2},\cdot\right),$$

olduğu görülür. Sağ taraftaki integralde eğer $u=ta+(1-t)b$ değişken değişimi yapılırsa istenilen sonuç elde edilmiş olur.

Teorem 4.3.3 $X:I\times\Omega\to\mathbb{R}$ süreci I° aralığında ortalama-kare türevlenebilir bir stokastik süreç, $a,b\in I$ ve $a<b$ olsun. Eğer $\left|X'(t,\cdot)\right|$ bir konveks stokastik süreç ise, bu takdirde aşağıdaki eşitsizlik hemen her yerde gerçeklenir:

$$\left|X\left(\frac{a+b}{2},\cdot\right)-\frac{1}{(b-a)}\int_a^b X(u,\cdot)du\right|\le\frac{(b-a)}{8}\left[\left|X'(a,\cdot)\right|+\left|X'(b,\cdot)\right|\right]. \tag{4.46}$$

İspat: İlk olarak

$$\int_0^{1/2} t^2dt=\frac{1}{24},\qquad \int_0^{1/2}(1-t)^2dt=\frac{1}{24},$$

$$\int_{1/2}^{1} t(1-t)dt=\frac{1}{12},\qquad \int_0^{1/2} t(1-t)dt=\frac{1}{12}.$$

olduğunu belirtelim Lemma 4.3.2 ve Hölder integral eşitsizliği dikkate alınırsa

$$\left|X\left(\frac{a+b}{2},\cdot\right)-\frac{1}{(b-a)}\int_a^b X(u,\cdot)du\right|=\left|(b-a)\int_0^1 K(t)X'(ta+(1-t)b,\cdot)dt\right|$$

$$\le(b-a)\int_0^1\left|K(t)\right|\left|X'(at+(1-t)b,\cdot)\right|dt$$

$$\le(b-a)\left[\int_0^{1/2} t\left|X'(at+(1-t)b,\cdot)\right|dt+\int_0^{1/2}(1-t)\left|X'(at+(1-t)b,\cdot)\right|dt\right]$$

$$=(b-a)\left[\int_{1/2}^{1} t\left[t\left|X'(a,\cdot)\right|+(1-t)\left|X'(b,\cdot)\right|\right]dt+\int_{1/2}^{1}(1-t)\left[t\left|X'(a,\cdot)\right|+(1-t)\left|X'(b,\cdot)\right|\right]dt\right]$$

$$=(b-a)\left[\int_0^{1/2} t^2\left|X'(a,\cdot)\right|dt+\int_0^{1/2}(1-t)t\left|X'(b,\cdot)\right|dt+\int_{1/2}^{1}(1-t)t\left|X'(a,\cdot)\right|dt+\int_{1/2}^{1}(1-t)^2\left|X'(b,\cdot)\right|dt\right]$$

$$=(b-a)\left[\frac{1}{12}\left|X'(a,\cdot)\right|+\frac{1}{24}\left|X'(b,\cdot)\right|+\frac{1}{24}\left|X'(a,\cdot)\right|+\frac{1}{12}\left|X'(b,\cdot)\right|\right]=\frac{(b-a)}{8}\left[\left|X(a,\cdot)\right|+\left|X(b,\cdot)\right|\right],$$

olduğu görülür.

Teorem 4.3.4 $X : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ süreci I° aralığında ortalama-kare türevlenebilir bir stokastik süreç, $a, b \in I$ ve $a < b$ olsun. Eğer $\left|X'(t,\cdot)\right|$ bir konveks stokastik süreç ise, bu takdirde aşağıdaki eşitsizlik hemen her yerde gerçeklenir:

$$\left|\frac{X(a,\cdot)+X(b,\cdot)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b X(u,\cdot)du\right| \leq \frac{(b-a)}{4}\max\left\{\left|X'(a,\cdot)\right|,\left|X'(b,\cdot)\right|\right\}. \qquad (4.47)$$

İspat: Yukarıdaki bilgiler ve Lemma 4.3.1 kullanılırsa, bu takdirde

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{X(a,\cdot)+X(b,\cdot)}{2}-\frac{1}{(b-a)}\int_a^b X(u,\cdot)du\right| \\
&= \left|\frac{(b-a)}{2}\int_0^1 (1-2t)X'(ta+(1-t)b,\cdot)dt\right| \\
&\leq \frac{(b-a)}{2}\int_0^1 \left|1-2t\right|\left|X'(ta+(1-t)b,\cdot)\right|dt \leq \\
&\leq \frac{(b-a)}{2}\int_0^1 \left|1-2t\right|\max\left\{\left|X'(a,\cdot)\right|,\left|X'(b,\cdot)\right|\right\}dt \\
&= \frac{(b-a)}{2}\max\left\{\left|X'(a,\cdot)\right|,\left|X'(b,\cdot)\right|\right\}\left(\int_0^1 \left|1-2t\right|dt\right) \\
&= \frac{(b-a)}{4}\max\left\{\left|X'(a,\cdot)\right|,\left|X'(b,\cdot)\right|\right\},
\end{aligned}$$

olduğu görülür.

Şimdi yukarıdaki sonucun birinci türevinin kuvvetleri konveks olan stokastik süreçlere uyarlamasını verelim.

Teorem 4.3.5 $X : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ süreci I° aralığında ortalama-kare türevlenebilir bir stokastik süreç, $a, b \in I$ ve $a < b$ olsun. Eğer $\left|X'(t,\cdot)\right|^{p/(p-1)}$, $p > 1$, bir konveks stokastik süreç ise bu takdirde aşağıdaki eşitsizlik hemen her yerde gerçeklenir:

$$\left|\frac{X(a,\cdot)+X(b,\cdot)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b X(u,\cdot)du\right| \leq \frac{(b-a)}{2(p+1)^{1/p}}\left[\frac{\left|X'(a,\cdot)\right|^q+\left|X'(b,\cdot)\right|^q}{2}\right]^{1/q} \qquad (4.48)$$

burada $q = p/(p-1)$ dir.

İspat: Basit bir hesaplamayla

$$\int_0^1 |1-2t|^p\, dt = 2\int_0^{1/2} (1-2t)^p\, dt = \frac{1}{p+1},$$

elde edilir. Bu durumda Lemma 4.3.1 ve Hölder integral eşitsizliği dikkate alınırsa

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{X(a,\cdot)+X(b,\cdot)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b X(u,\cdot)du\right| \\
&\qquad \le \left|\frac{(b-a)}{2}\int_0^1 (1-2t)X'(ta+(1-t)b,\cdot)dt\right| \\
&\qquad \le \frac{(b-a)}{2}\int_0^1 |1-2t|\,|X'(ta+(1-t)b,\cdot)|dt \\
&\qquad \le \frac{(b-a)}{2}\left(\int_0^1 |X'(ta+(1-t)b,\cdot)|^q\, dt\right)^{1/q}\left(\int_0^1 |1-2t|^p\, dt\right)^{1/p} \\
&\qquad = \frac{(b-a)}{2}\left(\int_0^1 |X'(ta+(1-t)b,\cdot)|^q\, dt\right)^{1/q}\left(\frac{1}{p+1}\right)^{1/p} \\
&\qquad \le \frac{(b-a)}{2(p+1)^{1/p}}\left(\int_0^1 \left\{t|X'(a,\cdot)|^q + (1-t)|X'(b,\cdot)|^q\right\} dt\right)^{1/q} \\
&\qquad = \frac{(b-a)}{2(p+1)^{1/p}}\left[\frac{|X'(a,\cdot)|^q + |X'(b,\cdot)|^q}{2}\right]^{1/q}.
\end{aligned}$$

olduğu görülür.

Teorem 4.3.6 $X : I\times\Omega \to \mathbb{R}$ süreci I° aralığında ortalama-kare türevlenebilir bir stokastik süreç, $a,b\in I$ ve $a<b$ olsun. Eğer $|X'(t,\cdot)|^{p/(p-1)}$, $p>1$, bir konveks stokastik süreç ise bu takdirde aşağıdaki eşitsizlik hemen her yerde gerçeklenir:

$$\left|\frac{X(a,\cdot)+X(b,\cdot)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b X(u,\cdot)du\right| \le \frac{(b-a)}{4}\left[\frac{|X'(a,\cdot)|^q + |X'(b,\cdot)|^q}{2}\right]^{1/q}, \tag{4.49}$$

burada $q = p/(p-1)$ dir.

İspat: Aşağıdaki eşitlikler kolayca gösterilebilir:

$$\int_0^1 |1-2t|\, tdt = \int_0^{1/2} (1-2t)tdt + \int_{1/2}^1 (2t-1)tdt = \frac{1}{4},$$

$$\int_0^1 |1-2t|(1-t)dt = \int_0^{1/2} (1-2t)(1-t)dt + \int_{1/2}^1 (2t-1)(1-t)dt = \frac{1}{4}.$$

Bu nedenle Lemma 4.3.1 den

$$\left| \frac{X(a,\cdot)+X(b,\cdot)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b X(u,\cdot)du \right| = \frac{(b-a)}{2}\int_0^1 |1-2t||X'(ta+(1-t)b,\cdot)|\,dt, \qquad (4.50)$$

ve power-mean eşitsizliğinden

$$\int_0^1 |1-2t||X'(ta+(1-t)b,\cdot)|\,dt \le \left(\int_0^1 |1-2t|\,dt\right)^{1-1/q} \left(\int_0^1 |1-2t||X'(ta+(1-t)b,\cdot)|^q\,dt\right)^{1/q}.$$

olduğu gösterilebilir. Bu takdirde $|X'|$ süreci konveks olduğundan

$$\int_0^1 |1-2t||X'(ta+(1-t)b,\cdot)|^q\,dt \le \int_0^1 |1-2t|\left\{t|X'(a,\cdot)|^q + (1-t)|X'(b,\cdot)|^q\right\}dt$$
$$= |X'(a,\cdot)|^q \int_0^1 |1-2t|t\,dt + |X'(b,\cdot)|^q \int_0^1 |1-2t|(1-t)dt = \frac{|X'(a,\cdot)+X'(b,\cdot)|}{4}.$$

elde dilir. Öte yandan $\int_0^1 |1-2t|\,dt = \frac{1}{2}$, olduğundan (4.50) eşitsizliğinden

$$\left| \frac{X(a,\cdot)+X(b,\cdot)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b X(u,\cdot)du \right|$$
$$= \frac{(b-a)}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{1-1/q}\left[\frac{|X'(a,\cdot)|^q + |X'(b,\cdot)|^q}{4}\right]^{1/q}$$
$$= \frac{(b-a)}{2}\left[\frac{|X'(a,\cdot)|^q + |X'(b,\cdot)|^q}{2}\right]^{1/q}$$

elde edilir.

Hatırlatma 4.3.1 Yukarıda verilen sonuç Teorem 4.3.6 da elde edilen sonucun bir geliştirilmiş halidir. Zira $p>1$ olduğundan $2^p > p+1$ olup buradan da $\frac{1}{4} < \frac{1}{2(p+1)^{1/p}}$ olduğu görülür.

Birinci türevlerinin kuvvetleri konveks olan stokastik süreçler için Hermite-Hadamard eşitsizliğinin sol tarafı ile ilgili benzer bir sonuç elde etmek için aşağıdaki teoremi verebiliriz:

Teorem 4.3.7 $X : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ süreci I° aralığında ortalama-kare türevlenebilir bir stokastik süreç, $a, b \in I$ ve $a < b$ olsun. Eğer $|X'(t,\cdot)|^{p/(p-1)}$, $p > 1$, bir konveks stokastik süreç ise, bu takdirde $q = p/(p-1)$ olmak üzere aşağıdaki eşitsizlik hemen her yerde gerçeklenir:

$$\left| X\left(\frac{a+b}{2},\cdot\right) - \frac{1}{b-a}\int_a^b X(u,\cdot)du \right| \le \frac{(b-a)}{2(p+1)^{1/p}} \left[\frac{|X'(a,\cdot)|^q + |X'(b,\cdot)|^q}{2} \right]^{1/q} \tag{4.51}$$

İspat: Öncelikle

$$\int_0^1 |K(t)|^p \, dt = \int_0^{1/2} |t|^p \, dt + \int_{1/2}^1 |t-1|^p \, dt = \int_0^{1/2} t^p dt + \int_{1/2}^1 (1-t)^p dt = \frac{1}{(p+1)2^p}. \tag{4.52}$$

olduğunu belirtelim. Lemma 4.32 ve Hölder integral eşitsizliği göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}
\left| X\left(\frac{a+b}{2},\cdot\right) - \frac{1}{b-a}\int_a^b X(u,\cdot)du \right| &= \left| (b-a)\int_0^1 K(t) X'(ta+(1-t)b,\cdot)dt \right| \\
&\le (b-a)\int_0^1 |K(t)| \left| X'(ta+(1-t)b,\cdot) \right| dt \\
&\le (b-a)\left(\int_0^1 \left| X'(ta+(1-t)b,\cdot) \right|^q dt \right)^{1/q} \left(\int_0^1 |K(t)|^p \, dt \right)^{1/p} \\
&= (b-a)\left(\int_0^1 \left| X'(ta+(1-t)b,\cdot) \right|^q dt \right)^{1/q} \left(\frac{1}{(p+1)2^p} \right)^{1/p} \\
&\le \frac{(b-a)}{2(p+1)^{1/p}} \left(\int_0^1 \left\{ t\left| X'(a,\cdot) \right|^q + (1-t)\left| X'(b,\cdot) \right|^q \right\} dt \right)^{1/q} \\
&= \frac{(b-a)}{2(p+1)^{1/p}} \left[\frac{|X'(a,\cdot)|^q + |X'(b,\cdot)|^q}{2} \right]^{1/q},
\end{aligned}$$

olduğu görülür.

Aşağıdaki sonuç yukarıda verilen Teorem 4.3.7' nin bir gelişmiş halidir.

Teorem 4.3.8 $X : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ süreci I° aralığında ortalama-kare türevlenebilir bir stokastik süreç, $a, b \in I$ ve $a < b$ olsun. Eğer $|X'(t,\cdot)|^{p/(p-1)}$, $p > 1$, bir konveks stokastik süreç ise, bu takdirde $q = p/(p-1)$ olmak üzere, aşağıdaki eşitsizlik hemen her yerde gerçeklenir:

$$\left| X\left(\frac{a+b}{2},\cdot\right) - \frac{1}{b-a}\int_a^b X(u,\cdot)du \right| \leq \frac{(b-a)}{4}\left[\frac{|X'(a,\cdot)|^q + |X'(b,\cdot)|^q}{2}\right]^{1/q}, \qquad (4.53)$$

İspat: Öncelikle

$$\int_0^1 |K(t)| t dt = \int_0^{1/2} t^2 dt + \int_{1/2}^1 t(1-t)dt = \frac{1}{8},$$

$$\int_0^1 |K(t)|(1-t)dt = \int_0^{1/2} t(1-t)dt + \int_{1/2}^1 (1-t)^2 dt = \frac{1}{8}$$

olduğunu belirtelim. Lemma 4.3.1 den

$$\left| \frac{X(a,\cdot) + X(b,\cdot)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b X(u,\cdot)du \right| = (b-a)\int_0^1 |K(t)||X'(ta+(1-t)b,\cdot)| dt, \qquad (4.54)$$

olduğu ve power-mean eşitsizliğinden

$$\int_0^1 |1-2t||X'(ta+(1-t)b,\cdot)| dt \leq \left(\int_0^1 |1-2t| dt\right)^{1-1/q} \left(\int_0^1 |1-2t||X'(ta+(1-t)b,\cdot)|^q dt\right)^{1/q}$$

olduğu görülür. $|X'|$ süreci konveks olduğundan

$$\int_0^1 |1-2t||X'(ta+(1-t)b,\cdot)|^q dt$$

$$\leq \int_0^1 |1-2t|\left\{t|X'(a,\cdot)|^q + (1-t)|X'(b,\cdot)|^q\right\}dt$$

$$= |X'(a,\cdot)|^q \int_0^1 |1-2t| t dt + |X'(b,\cdot)|^q \int_0^1 |1-2t|(1-t)dt$$

$$= \frac{|X'(a,\cdot) + X(b,\cdot)|}{4}$$

eşitsizliği elde edilir. Öte yandan $\int_0^1 |1-2t| dt = \frac{1}{2}$, olduğundan (4.54) eşitsizliğinden

$$\left|\frac{X(a,\cdot)+X(b,\cdot)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b X(u,\cdot)du\right| = (b-a)\left(\frac{1}{4}\right)^{1-1/q}\left(\frac{|X'(a,\cdot)|^q+|X'(a,\cdot)|^q}{8}\right)^{1/q}$$
$$=\frac{(b-a)}{4}\left(\frac{|X'(a,\cdot)|^q+|X'(a,\cdot)|^q}{2}\right)^{1/q}$$

olduğu görülür.

Hatırlatma 4.3.2 Bu sonuç Teorem 4.3.7 de elde edilen sonucun geliştirilmiş halidir. Çünkü eğer $p>1$ ise bu takdirde $2^p > p+1$ ve dolayısıyla $\frac{1}{4}<\frac{1}{2(p+1)^{1/p}}$ dir.

Teorem 4.3.9 $X: I\times\Omega\to\mathbb{R}$ süreci I° aralığında ortalama-kare türevlenebilir bir stokastik süreç, $a,b\in I$ ve $a<b$ olsun. Eğer $|X'(t,\cdot)|^{p/(p-1)}$, $p>1$, bir konveks stokastik süreç ise, bu takdirde

$$\left|\frac{X(a,\cdot)+X(b,\cdot)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b X(u,\cdot)du\right| \le \frac{(b-a)}{2(p+1)^{1/p}}\max\left\{|X'(a,\cdot)|^q,|X'(b,\cdot)|^q\right\}^{1/q} \quad (4.55)$$

İspat: Yukarıdaki bilgiler ve Lemma 4.3.1 dikkate alınırsa

$$\left|\frac{X(a,\cdot)+X(b,\cdot)}{2}-\frac{1}{(b-a)}\int_a^b X(u,\cdot)du\right| = \left|\frac{(b-a)}{2}\int_0^1 (1-2t)X'(ta+(1-t)b,\cdot)dt\right|$$
$$\le \frac{(b-a)}{2}\int_0^1 |1-2t||X'(ta+(1-t)b,\cdot)|\,dt$$
$$\le \frac{(b-a)}{2}\left(\int_0^1 |X'(ta+(1-t)b,\cdot)|^q\,dt\right)^{1/q}\left(\int_0^1 |1-2t|^p\,dt\right)^{1/p}$$
$$\le \frac{(b-a)}{2}\left(\int_0^1 \max\left\{|X'(a,\cdot)|^q,|X'(b,\cdot)|^q\right\}dt\right)^{1/q}\left(\frac{1}{p+1}\right)^{1/p}$$
$$=\frac{(b-a)}{2(p+1)^{1/p}}\max\left\{|X'(a,\cdot)|^q,|X'(b,\cdot)|^q\right\}^{1/q}$$

olduğu görülür.

İkinci türevinin kuvvetleri konveks ve Quasi-konveks olan stokastik süreçler için Hermite-Hadamard eşitsizliğinin sağ tarafı için yeni eşitsizlikler türetebilmek için aşağıdaki Lemmayı verebiliriz:

Lemma 4.3.3 $X : I\times\Omega\to\mathbb{R}$ süreci I° aralığında ortalama-kare türevlenebilir bir stokastik süreç, $a,b\in I$ ve $a<b$ olsun. Eğer $X''(t,\cdot)$ süreci $[a,b]$, aralığında ortalama-kare integrallenebilir ise bu takdirde aşağıdaki eşitsizlik hemen her yerde gerçeklenir:

$$\frac{X(a,\cdot)+X(b,\cdot)}{2}-\frac{1}{(b-a)}\int_a^b X(u,\cdot)du=\frac{(b-a)^2}{2}\int_0^1 t(1-t)X''(at+(1-t)b,\cdot)dt. \quad (4.56)$$

İspat: Kısmi integral uygulanarak sağ taraftaki integralin

$$\int_0^1 (1-2t)X''(at+(1-t)b,\cdot)dt=\frac{1}{(b-a)}\int_0^1 X'(ta+(1-t)b,\cdot)dt$$
$$=\frac{1}{(b-a)^2}\left[X(a,\cdot)+X\left(b,\cdot\right)\right]-\frac{2}{(b-a)^2}\int_0^1 X(ta+(1-t)b,\cdot)dt,$$

olduğu görülür. İntegralin her iki tarafi $\left(b-a\right)^2/2$ ile çarpılırsa

$$\frac{(b-a)^2}{2}\int_0^1 t(1-t)X''(at+(1-t)b,\cdot)dt=\frac{X(a,\cdot)+X\left(b,\cdot\right)}{2}-\int_0^1 X(ta+(1-t)b,\cdot)dt,$$

elde edilir. Bu takdirde $u=ta+(1-t)b$ değişken değişimi yapılırsa istenilen sonuç elde edilmiş olur.

Teorem 4.3.10 $X : I\times\Omega\to\mathbb{R}$ süreci I° aralığında ortalama-kare türevlenebilir bir stokastik süreç, $a,b\in I$ ve $a<b$ olsun. Eğer $\left|X''(t,\cdot)\right|$ süreci bir konveks stokastik süreç ise bu takdirde aşağıdaki eşitsizlik hemen her yerde gerçeklenir:

$$\left|\frac{X(a,\cdot)+X(b,\cdot)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b X(u,\cdot)du\right|\le\frac{(b-a)}{6}\left\{\left|X''(a,\cdot)\right|+\left|X''(b,\cdot)\right|\right\}. \quad (4.57)$$

İspat: $t\in[0,1]$ olmak üzere $0\le t(t-1)^2\le(1-t)^2$ ve $0\le(1-t)t^2\le t^2$ olduğundan

$$\int_0^1 t(1-t)^2dt\le\int_0^1(1-t)^2dt=\frac{1}{3},$$

$$\int_0^1(1-t)t^2dt\le\int_0^1 t^2dt=\frac{1}{3}$$

eşitsizlikleri yazılabilir. Bu durumda yukarıdaki bilgiler ve Lemma 4.3.3 kullanılırsa

$$\left|\frac{X(a,\cdot)+X(b,\cdot)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b X(u,\cdot)du\right| = \left|\frac{(b-a)^2}{2}\int_0^1 t(1-t)X''(ta+(1-t)b,\cdot)dt\right|$$

$$\leq \frac{(b-a)^2}{2}\int_0^1 t(1-t)\left|X''(ta+(1-t)b,\cdot)\right|dt$$

$$\leq \frac{(b-a)^2}{2}\int_0^1 t(1-t)\left\{t\left|X''(a,\cdot)\right|+(1-t)\left|X''(b,\cdot)\right|\right\}dt$$

$$= \frac{(b-a)^2}{2}\int_0^1 t^2(1-t)\left|X''(a,\cdot)\right|dt+\int_0^1 t(1-t)^2\left|X''(b,\cdot)\right|dt$$

$$= \frac{(b-a)^2}{2}\left|X''(a,\cdot)\right|\int_0^1 t^2(1-t)dt+\left|X''(b,\cdot)\right|\int_0^1 t(1-t)^2dt$$

$$= \frac{(b-a)^2}{2}\left\{\frac{1}{3}\left|X''(a,\cdot)\right|+\frac{1}{3}\left|X''(b,\cdot)\right|\right\} = \frac{(b-a)^2}{6}\left\{\left|X''(a,\cdot)\right|+\left|X''(b,\cdot)\right|\right\},$$

olduğu görülür.

Teorem 4.3.11 $X: I\times\Omega\to\mathbb{R}$ süreci I° aralığında ortalama-kare türevlenebilir bir stokastik süreç, $a,b\in I$ ve $a<b$ olsun. Eğer $\left|X''(t,\cdot)\right|^{p/p-1}$ $p>1$, bir konveks stokastik süreç ise, bu takdirde $q=p/(p-1)$ olmak üzere, aşağıdaki eşitsizlik hemen her yerde gerçeklenir:

$$\left|\frac{X(a,\cdot)+X(b,\cdot)}{2}-\frac{1}{(b-a)}\int_a^b X(u,\cdot)du\right|$$

$$\leq \frac{(b-a)^2}{8}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^{1/p}\left(\frac{\Gamma(1+p)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+p\right)}\right)^{1/p}\left(\frac{\left|X''(a,\cdot)\right|^q+\left|X''(b,\cdot)\right|^q}{2}\right)^{1/q}. \tag{4.58}$$

İspat: $\Gamma(\cdot)$ Gamma fonksiyonunu göstermek üzere

$$\int_0^1\left[t(1-t)\right]^p dt = \frac{2^{-1-2p}\sqrt{\pi}\,\Gamma(1+p)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+p\right)}. \tag{4.59}$$

eşitliğinin göz önüne alalım. Bu takdirde yukarıdaki bilgiler ve Lemma 4.3.3' e göre

$$\left|\frac{X(a,\cdot)+X(b,\cdot)}{2}-\frac{1}{(b-a)}\int_a^b X(u,\cdot)du\right|=\left|\frac{(b-a)^2}{2}\int_0^1 t(1-t)X''(ta+(1-t)b,\cdot)dt\right|$$

$$\leq\frac{(b-a)^2}{2}\int_0^1 t(1-t)\left|X''(ta+(1-t)b,\cdot)\right|dt$$

$$\leq\frac{(b-a)^2}{2}\left(\int_0^1\left|X''(ta+(1-t)b,\cdot)\right|^q dt\right)^{1/q}\left(\int_0^1[t(1-t)]^p dt\right)^{1/p}$$

$$\leq\frac{(b-a)^2}{2}\left(\frac{2^{-1-2p}\sqrt{\pi}\Gamma(1+p)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+p\right)}\right)^{1/p}\left(\int_0^1 t\left|X''(a,\cdot)\right|^q+(1-t)\left|X''(b,\cdot)\right|^q dt\right)^{1/q}$$

$$=\frac{(b-a)^2}{8}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^{1/p}\left(\frac{\Gamma(1+p)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+p\right)}\right)^{1/p}\left(\frac{\left|X''(a,\cdot)\right|^q+\left|X''(b,\cdot)\right|^q}{2}\right)^{1/q},$$

elde edilmiş olur.

Teorem 4.3.12 $X:I\times\Omega\to\mathbb{R}$ süreci I° aralığında ortalama-kare türevlenebilir bir stokastik süreç, $a,b\in I$ ve $a<b$ olsun. Eğer $\left|X''(t,\cdot)\right|$ süreci bir Quasi-konveks stokastik süreç ise bu takdirde aşağıdaki eşitsizlik hemen her yerde gerçeklenir:

$$\left|\frac{X(a,\cdot)+X(b,\cdot)}{2}-\frac{1}{(b-a)}\int_a^b X(u,\cdot)du\right|\leq\frac{(b-a)^2}{12}\max\left\{\left|X''(a,\cdot)\right|,\left|X''(b,\cdot)\right|\right\}. \quad (4.60)$$

İspat: Öncelikle

$$\int_0^1 t(1-t)dt=\frac{1}{6}$$

olduğunu belirtelim. Bu nedenle Lemma 4.3.3' e göre

$$\left|\frac{X(a,\cdot)+X(b,\cdot)}{2}-\frac{1}{(b-a)}\int_a^b X(u,\cdot)du\right|=\left|\frac{(b-a)^2}{2}\int_0^1 t(1-t)X''(ta+(1-t)b,\cdot)dt\right|$$

$$\leq\frac{(b-a)^2}{2}\int_0^1 t(1-t)\left|X''(ta+(1-t)b,\cdot)\right|dt$$

$$\leq\frac{(b-a)^2}{2}\int_0^1 t(1-t)\max\left\{\left|X''(a,\cdot)\right|,\left|X''(b,\cdot)\right|\right\}dt$$

$$=\frac{(b-a)^2}{2}\max\left\{\left|X''(a,\cdot)\right|,\left|X''(b,\cdot)\right|\right\}\int_0^1 t(1-t)dt$$

$$=\frac{(b-a)^2}{12}\max\left\{\left|X''(a,\cdot)\right|,\left|X''(b,\cdot)\right|\right\},$$

oluğu elde edilmiş olur.

Teorem 4.3.13 $X: I\times\Omega\to\mathbb{R}$ süreci I° aralığında ortalama-kare türevlenebilir bir stokastik süreç, $a,b\in I$ ve $a<b$ olsun. Eğer $\left|X''(t,\cdot)\right|^{p/p-1}$ süreci bir Quasi-konveks stokastik süreç ise bu takdirde $q=p/(p-1)$ olmak üzere aşağıdaki eşitsizlik hemen her yerde gerçeklenir:

$$\left|\frac{X(a,\cdot)+X(b,\cdot)}{2}-\frac{1}{(b-a)}\int_a^b X(t,\cdot)dt\right|$$
$$\le\frac{(b-a)^2}{8}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^{1/p}\left(\frac{\Gamma(1+p)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+p\right)}\right)^{1/p}\max\left\{\left|X''(a,\cdot)\right|^q,\left|X''(b,\cdot)\right|^q\right\}^{1/q}. \tag{4.61}$$

İspat: Teorem 4.3.11' ispatında olduğu gibi, (4.59)' da verilen integrali göz önüne alalım. Bu takdirde yukarıdaki bilgiler ve Lemma 4.3.3 kullanılarak

$$\left|\frac{X(a,\cdot)+X(b,\cdot)}{2}-\frac{1}{(b-a)}\int_a^b X(t,\cdot)dt\right|=\left|\frac{(b-a)^2}{2}\int_0^1 t(1-t)X''(ta+(1-t)b,\cdot)dt\right|$$

$$\le\frac{(b-a)^2}{2}\int_0^1 t(1-t)\left|X''(ta+(1-t)b,\cdot)\right|dt$$

$$\le\frac{(b-a)^2}{2}\left(\int_0^1\left|X''(ta+(1-t)b,\cdot)\right|^q dt\right)^{1/q}\left(\int_0^1\left[t(1-t)\right]^p dt\right)^{1/p}$$

$$\le\frac{(b-a)^2}{2}\left(\frac{2^{-1-2p}\sqrt{\pi}\,\Gamma(1+p)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+p\right)}\right)^{1/p}\left(\int_0^1\max\left\{\left|X''(a,\cdot)\right|^q,\left|X''(b,\cdot)\right|^q\right\}dt\right)^{1/q}$$

$$=\frac{(b-a)^2}{8}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^{1/p}\left(\frac{\Gamma(1+p)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+p\right)}\right)^{1/p}\max\left\{\left|X''(a,\cdot)\right|^q,\left|X''(b,\cdot)\right|^q\right\}^{1/q},$$

olduğu görülür ve böylece ispat tamamlanmış olur.

4.4 Quasi - Konveks Stokastik Süreçler için Simpson Tipi Eşitsizlikler

Nümerik analizde, Simpson metodu belirli integrallerin yaklaşık değerlerini hesaplamada kullanılan bir nümerik integrasyon metodudur. $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olmak üzere Simpson kuralı f fonksiyonunun (a,b) üzerindeki integralinin değerine aşağıdaki gibi yaklaşır:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right] \tag{4.62}$$

Nümerik integrasyon sonuçlarından en iyi bilinenlerinden birisi Simpson eşitsizliğidir. Farz edelim ki $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ (a,b) aralığı üzerinde dört kez sürekli türevlenebilir bir fonksiyon ve dördüncü türevi (a,b) aralığında sınırlı, yani

$$\left\|f^{(4)}\right\|_\infty := \sup_{x\in(a,b)}\left|f^{(4)}(x)\right| < \infty$$

olsun. Bu takdirde

$$\left|\frac{1}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]-\frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x)dx\right| \le \frac{1}{2880}\left\|f^{(4)}\right\|_\infty (b-a)^5, \tag{4.63}$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizlik literatürde Simpson eşitsizliği olarak bilinir.

Şimdi $\pi: a=x_0<x_1<...<x_{n-1}<x_n=b$ $[a,b]$ aralığının bir parçalanışı ve f yukarıda verildiği gibi olsun. Bu takdirde Simpson formülü:

$$\int_a^b f(x)dx = P_S(f,\pi)+R_S(f,\pi) \tag{4.64}$$

ile verilir, burada $P_S(f,\pi)$

$$P_S(f,\pi) := \frac{1}{6}\sum_{i=0}^{n-1}\left|f(x_i)+f(x_{i+1})\right|h_i + \frac{2}{3}\sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right)h_i, \tag{4.65}$$

ve $R_S(f,\pi)$ kalan terimi ise $h_i := x_{i+1}-x_i$, $i=0,...,n-1$ olmak üzere

$$\left|R_S(f,\pi)\right| := \frac{1}{2880}\left\|f^{(4)}\right\|_\infty \sum_{i=0}^{n-1} h_i^5, \tag{4.66}$$

ile verilir.

Bu kısımda amacımız Alomari ve ark. [1]-[3] tarafından s-konveks ve Quasi-konveks fonksiyonlar için verilen eşitsizlikleri mutlak değerce s-konveks and Quasi-konveks türevlere sahip stokastik süreçlere uyarlamak ve stokastik süreçler için Simpson kuralıyla integral yaklaşımlarındaki hatayı tahmin etmek olacaktır.

Teorem 4.4.1 $X : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ ortalama-kare sürekli bir stokastik süreç ise bu takdirde $[a,b]$ üzerinde ortalama-kare integral

$$\int_a^b X(t,\cdot)dt \approx \frac{b-a}{6}\left[X(a,\cdot) + 4X\left(\frac{a+b}{2},\cdot\right) + X(b,\cdot)\right], \tag{4.67}$$

olacaktır. Bu ifade $n = 2,$ olmak üzere stokastik süreçler için Simpson kuralı olarak adlandırılır.

İspat: $X(t,\cdot)$ sürecine aşağıdaki şekilde yaklaştığımızı varsayalım:

$$P_2(t) = X(a,\cdot)\frac{(t-t_m)(t-b)}{(a-t_m)(a-b)} + X(t_m,\cdot)\frac{(t-a)(t-b)}{(t_m-a)(t_m-b)} + X(b,\cdot)\frac{(t-a)(t-t_m)}{(b-a)(b-t_m)}$$

burada $h = \dfrac{b-a}{2} = t_m - a = b - t_m$ alalım. Bu takdirde

$$P_2(t) = \frac{X(a,\cdot)}{2h^2}(t-t_m)(t-b) - \frac{X(t_m,\cdot)}{2h^2}(t-a)(t-b) + \frac{X(b,\cdot)}{2h^2}(t-a)(t-t_m)$$

yazılabilir. Buradan $[a,b]$ üzerinden integral alınırsa

$$\int_a^b P_2(t,\cdot)dt = \frac{X(a,\cdot)}{2h^2}\int_a^b (t-t_m)(t-h)dt - \frac{X(t_m,\cdot)}{h^2}\int_a^b (t-a)(t-b)dt + \frac{X(b,\cdot)}{2h^2}\int_a^b (t-a)(t-t_m)dt$$

bulunur. Şimdi

$$I_1 = \int_a^b (t-t_m)(t-b)dt\,,\ I_2 = \int_a^b (t-a)(t-b)dt\,,\ I_3 = \int_a^b (t-a)(t-t_m)dt$$

integrallerini tanımlayalım. Bu durumda

$$I_1=\int_a^b (t-t_m)(t-b)dt=(t-t_m)\frac{(t-b)^2}{2}-\frac{(t-b)^3}{6}\Bigg|_a^b$$
$$=-(a-t_m)\frac{(a-b)^2}{2}+\frac{(a-b)^3}{6}=-(-h)\frac{(-2h)^2}{2}+\frac{(-2h^3)}{6}=2h^3-\frac{4}{3}h^3=\frac{2}{3}h^3,$$

$$I_2=\int_a^b (t-a)(t-b)dt=(t-a)\frac{(t-b)^2}{2}-\frac{(t-b)^3}{6}\Bigg|_a^b=\frac{(a-b)^3}{6}=\frac{(-2h)^3}{6}=\frac{4}{3}h^3$$

ve

$$I_3=\int_a^b (t-a)(t-t_m)dt=(t-a)\frac{(t-t_m)^2}{2}-\frac{(t-t_m)^3}{6}\Bigg|_a^b$$
$$=(b-a)\frac{(b-t_m)^2}{2}+\frac{(b-t_m)^3}{6}+\frac{(a-t_m)^3}{6}=(2h)\frac{h^2}{2}-\frac{h^3}{6}+\frac{(-h)^3}{6}-h^3-\frac{h^3}{3}-\frac{2h^3}{3}.$$

olduğu görülür. Bu nedenle,

$$\int_a^b P_2(t,\cdot)dt=\frac{X(a,\cdot)}{2h^2}\left(\frac{2}{3}h^3\right)-\frac{X(t_m,\cdot)}{h^2}\left(-\frac{4}{3}h^3\right)+\frac{X(b,\cdot)}{2h^2}\left(\frac{2}{3}h^2\right)$$
$$=X(a,\cdot)\frac{h}{3}+X(t_m,\cdot)\frac{4}{3}h+X(b,\cdot)\frac{h}{3}$$
$$=\frac{h}{3}[X(a,\cdot)+4X(t_m,\cdot)+X(b,\cdot)].$$

elde edilir. $h=\dfrac{b-a}{2}$ alınırsa

$$\int_a^b X(t,\cdot)dt\approx\frac{(b-a)}{6}[X(a,\cdot)+4X(t_m,\cdot)+X(b,\cdot)]$$

olduğu gösterilmiş olur.

Lemma 4.4.1 $X:I\times\Omega\to\mathbb{R}$ süreci $[a,b]$, $a<b$ aralığında ortalama-kare sürekli ve $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu (a,b) aralığında ortalama-kare integrallenebilir monoton bir fonksiyon olsun. Bu takdirde

$$\int_a^b X(t,\cdot)f(t)dt=X(\xi,\cdot)\int_a^b f(t)dt \tag{4.68}$$

eşitliği hemen her yerde sağlanacak şekilde bir $\xi\in[a,b]$ mevcuttur.

İspat: Farz edelim ki $[a,b]$ üzerinde $f(t) \geq 0$ olsun. Bu durumda $X(t,\cdot)$ ortalama-kare sürekli bir stokastik süreç olduğundan $x \in [a,b]$ için $m(\cdot) = \inf_{t\in[a,b]} X(t,\cdot)$ ve $M(\cdot) = \sup_{t\in[a,b]} X(t,\cdot)$ rasgele değişkenleri mevcuttur. Bu takdirde $x \in [a,b]$ için $m(\cdot) \leq X(t,\cdot) \leq M(\cdot)$ eşitsizliği yazılabilir. Bu son eşitsizlik $f(x)$ ile çarpılırsa $m(\cdot) f(t) \leq X(t,\cdot) f(t) \leq M(\cdot) f(t)$ olduğu ve daha sonra da $[a,b]$ de integrallenirse, bu takdirde hemen her yerde

$$m(\cdot)\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b X(t,\cdot) f(t)dt \leq M(\cdot)\int_a^b f(t)dt, \tag{4.70}$$

olduğu görülür.

$I = \int_a^b f(t)dt$ olsun. Eğer $I = 0$ ise bu durumda hemen her yerde $\int_a^b X(t,\cdot) f(t)dt = 0,$ olacaktır. Bu nedenle her $\xi,$ için (4.69) sağlanır.

Aksi durumda, eğer $I > 0$ ise bu durumda (4.70) eşitsizliği I ile bölünürse, $X(t,\cdot)$ is $[a,b],$ üzerinde ortalama-kare sürekli olduğundan bu mümkündür, ξ

$$m(\cdot) < X(\xi,\cdot) < M(\cdot),$$

olacak şekilde ξ nın mevcut olduğu elde edilir. Sonuç olarak

$$X(\xi,\cdot) = \frac{1}{I}\int_a^b X(t,\cdot) f(t)dt,$$

ve buradan da hemen her yerde

$$\int_a^b X(t,\cdot) f(t)dt = X(\xi,\cdot)\int_a^b f(t)dt,$$

olduğu görülür.

Teorem 4.4.2 $X : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ stokastik süreci I° üzerinde dört kez ortalama-kare sürekli türevlenebilir bir stokastik süreç ve üzerinde dördüncü türevi sınırlı yani, $\left\| X^{(4)}(t,\cdot) \right\|_\infty := \sup_{t\in I^\circ} \left| X^{(4)}(t,\cdot) \right| < \infty,$ olsun. Bu takdirde

$$\left|\frac{1}{6}\left[X(a,\cdot)+4X\left(\frac{a+b}{2},\cdot\right)+X(b,\cdot)\right]-\frac{1}{(b-a)}\int_a^b X(t,\cdot)dt\right| \le \frac{1}{2880}\left\|X^{(4)}(t,\cdot)\right\|_\infty (b-a)^5, \tag{4.71}$$

eşitsizliği hemen her yerde gerçeklenir. Bu eşitsizlik stokastik süreçler için Simpson eşitsizliği olarak bilinir.

İspat: $X(t,\cdot)$ sürecinin $t_1=\frac{a+b}{2}$, civarındaki Taylor polinomunu aşağıdaki gibi göz önüne alalım:

$$X(t,\cdot)=X(t_1,\cdot)+X'(t_1,\cdot)(t-t_1)+\frac{X''(t_1,\cdot)}{2}(t-t_1)^2+\frac{X^{(3)}(t_1,\cdot)}{6}(t-t_1)^3+\frac{X^{(4)}(\xi(t),\cdot)}{24}(t-t_1)^4.$$

bu durumda eşitliğin $[a,b]$ üzerinden integrali alınırsa hemen her yerde

$$\int_a^b X(t,\cdot)dt=\left[X(t_1,\cdot)(t-t_1)\frac{X'(t_1,\cdot)}{2}(t-t_1)^2+\frac{X''(t_1,\cdot)}{6}(t-t_1)^3 + \frac{X^{(3)}(t_1,\cdot)}{24}(t-t_1)^4\right]_{t=a}^{t=b}+\int_a^b \frac{X^{(4)}(\xi(t),\cdot)}{24}(t-t_1)^4 dt,$$

elde edilir. Stokastik süreçler için integral hesabın ağırlıklı ortalama değer teoremi uygulanırsa bu takdirde $\xi\in(a,b),$ olmak üzere

$$\int_a^b \frac{X^{(4)}(\xi(t),\cdot)}{24}(t-t_1)^4 dt=\frac{X^{(4)}(\xi_1,\cdot)}{24}\int_a^b (t-t_1)^4 dt = \frac{X^{(4)}(\xi_1,\cdot)}{24}(t-t^1)^5\Big|_a^b=\frac{X^{(4)}(\xi_1,\cdot)}{24}[(b-t_1)^5-(a-t_1)^5],$$

elde edilir. Aksi takdirde $X''(t_1,\cdot)$ yi $h=\frac{(b-a)}{2}$ olmak üzere hemen her yerde

$$X''(t_1,\cdot)=\frac{1}{h^2}[X(t_1-h,\cdot)-2X(t_1,\cdot)+X(t_1+h,\cdot)]-\frac{h^2}{12}X^{(4)}(\xi,\cdot),$$

yazılabilir. Bu takdirde $\xi\in(a,b),$ olmak üzere hemen her yerde

$$X''(t_1,\cdot)=\frac{1}{h^2}[X(a,\cdot)-2X(t_1,\cdot)+X(b,\cdot)]-\frac{h^2}{12}X^{(4)}(\xi,\cdot), \tag{4.72}$$

elde edilir. dolayısıyla $h=b-t_1=t_1-a,$ alınarak hemen her yerde

$$\int_a^b X(t,\cdot)dt = X(t_1,\cdot)2h + \frac{X''(t_1,\cdot)}{6}2h^3 + \frac{X^{(4)}(\xi,\cdot)}{120}2h^5.$$

olduğu görülür. Buradan da

$$\int_a^b X(t,\cdot)dt = \frac{h}{3}[X(a,\cdot) - 4X(t_1,\cdot) + X(b,\cdot)] - \frac{h^5}{90}X^{(4)}(\xi,\cdot),$$

ve dolayısıyla hemen her yerde

$$\begin{aligned}\left|\frac{h}{3}[X(a,\cdot) - 4X(t_1,\cdot) + X(b,\cdot)] - \int_a^b X(t,\cdot)dt\right| &= \left|\frac{h^5}{90}X^{(4)}(\xi,\cdot)\right| \\ &= \left|\frac{(b-a)^5}{2880}X^{(4)}(\xi,\cdot)\right| \le \frac{(b-a)^5}{2880}\left\|X^{(4)}(\xi,\cdot)\right\|_\infty\end{aligned}$$

olduğu gösterilmiş olur.

Lemma 4.4.2 $X : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ süreci I° üzerinde ortalama-kare türevlenebilir bir stokastik süreç ve X' süreci $[a,b]$, $a,b \in I$, $a < b$, üzerinde ortalama kare integrallenebilir olsun. Eğer $X'(t,\cdot)$ süreci $[a,b]$, üzerinde ortalama kare integrallenebilir ise

$$\begin{aligned}&\frac{1}{6}\left[X(a,\cdot) + 4X\left(\frac{a+b}{2},\cdot\right) + X(b,\cdot)\right] - \frac{1}{b-a}\int_a^b X(t,\cdot)dt \\ &\qquad = (b-a)\int_a^b p(t)X'(at+(1-t)b,\cdot)dt,\end{aligned} \tag{4.73}$$

eşitliği hemen her yerde gerçeklenir, burada

$$p(t) = \begin{cases} t - \dfrac{1}{6}, & t \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right), \\ \dfrac{5}{6} - t, & t \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right). \end{cases}$$

dir.

İspat: Kısmi integrasyon uygulanarak

$$I = \int_0^1 p(t)X'(at+(1-t)b,\cdot)dt$$

$$=\int_0^{1/2}\left(t-\frac{1}{6}\right)X'(at+(1-t)b,\cdot)dt+\int_{1/2}^{1}\left(t-\frac{5}{6}\right)X'(at+(1-t)b,\cdot)dt$$

$$=\left(t-\frac{1}{6}\right)\frac{X(at+(1-t)b,\cdot)}{b-a}\Bigg|_0^{1/2}-\int_0^{1/2}\frac{X'(at+(1-t)b,\cdot)}{b-a}dt$$

$$+\left(t-\frac{5}{6}\right)\frac{X(at+(1-t)b,\cdot)}{b-a}\Bigg|_{1/2}^{1}-\int_{1/2}^{1}\frac{X'(at+(1-t)b,\cdot)}{b-a}dt$$

$$=\frac{1}{6(b-a)}\left[X(a,\cdot)+4X\left(\frac{a+b}{2},\cdot\right)+X(b,\cdot)\right]-\int_0^1\frac{X(at+(1-t)b,\cdot)}{b-a}dt, \qquad (4.74)$$

olduğu görülür. $x=at+(1-t)b,$ ve $dx=(b-a)dt,$ alınırsa

$$(b-a)I=\frac{1}{6}\left[X(a,\cdot)+4X\left(\frac{a+b}{2},\cdot\right)+X(b,\cdot)\right]-\frac{1}{b-a}\int_a^b X(t,\cdot)dt,$$

elde edilir ki bu da ispatı tamamlar.

Teorem 4.4.3 $X:I\times\Omega\to\mathbb{R}$ süreci I° üzerinde ortalama-kare türevlenebilir bir stokastik süreç ve X' süreci $[a,b]$, $a,b\in I, a<b$, üzerinde ortalama kare integrallenebilir olsun. Eğer $|X'|$ süreci keyfi bir $s\in(0,1]$, için $[a,b]$, üzerinde s-konveks ise bu takdirde aşağıdaki eşitsizlik hemen her yerde gerçeklenir:

$$\left|\frac{1}{6}\left[X(a,\cdot)+4X\left(\frac{a+b}{2},\cdot\right)+X(b,\cdot)\right]-\frac{1}{b-a}\int_a^b X(t,\cdot)dt\right|$$
$$\le(b-a)\left(\frac{6^s-9(2^s)+(5^{s+1})(6^s)+3s-12}{18(s^2+3s+2)}\right)\left[|X'(a,\cdot)|+|X'(b,\cdot)|\right]. \qquad (4.75)$$

İspat: Öncelikle

$$\int_0^{1/2}\left|t-\frac{1}{6}\right|t^s dt+\int_{1/2}^{1}\left|t-\frac{5}{6}\right|t^s dt=\int_0^{1/2}\left|\frac{1}{6}-t\right|(1-t)^s dt+\int_{1/2}^{1}\left|\frac{5}{6}-t\right|(1-t)^s dt$$
$$=\frac{6^{-s}-9(2^{-s})+(5^{s+2})(6^{-s})+3s-12}{18(s^2+3s+2)}$$

olduğunu belirtelim. Bu takdirde, Lemma 4.4.1 ve $|X'|$ sürecinin s-konveksliği göz önüne alınırsa hemen her yerde

$$\left|\frac{1}{6}\left[X(a,\cdot)+4X\left(\frac{a+b}{2},\cdot\right)+X(b,\cdot)\right]-\frac{1}{b-a}\int_a^b X(t,\cdot)dt\right|$$

$$\leq (b-a)\int_0^1 |p(t)||X'(at+(1-t)b,\cdot)|dt$$

$$\leq (b-a)\int_0^{1/2}\left|t-\frac{1}{6}\right|(t^s|X'(a,\cdot)|+(1-t)^s|X'(b,\cdot)|)dt$$

$$+(b-a)\int_{1/2}^1\left|t-\frac{5}{6}\right|(t^s|X'(a,\cdot)|+(1-t)^s|X'(b,\cdot)|)dt$$

$$\leq (b-a)|X'(a,\cdot)|\left[\int_0^{1/2}\left|t-\frac{1}{6}\right|t^s dt+\int_{1/2}^1\left|t-\frac{5}{6}\right|t^s dt\right]$$

$$+(b-a)|X'(b,\cdot)|\left[\int_0^{1/2}\left|t-\frac{1}{6}\right|(1-t)^s dt+\int_{1/2}^1\left|t-\frac{5}{6}\right|(1-t)^s dt\right],$$

$$=(b-a)\left(\frac{6^{-s}-9(2^{-s})+(5^{s+1})(6^{-s})+3s-12}{18(s^2+3s+2)}\right)\left[|X'(a,\cdot)|+|X'(b,\cdot)|\right],$$

olduğu görülür ki bu da ispatı tamamlar.

Sonuç 4.4.1 $X: I\times\Omega\to\mathbb{R}$ süreci I° üzerinde ortalama-kare türevlenebilir bir stokastik süreç ve X' süreci $[a,b]$, $a,b\in I, a<b$, üzerinde ortalama kare integrallenebilir olsun. Eğer $|X'|^{p/(p-1)}$ $p>1,$ süreci $[a,b]$ aralığında konveks ise bu takdirde aşağıdaki eşitsizlik hemen her yerde gerçeklenir:

$$\left|\frac{1}{6}\left[X(a,\cdot)+4X\left(\frac{a+b}{2},\cdot\right)+X(b,\cdot)\right]-\frac{1}{b-a}\int_a^b X(t,\cdot)dt\right| \leq \frac{5(b-a)}{72}\left[|X'(a,\cdot)|+|X'(b,\cdot)|\right]. \tag{4.76}$$

Teorem 4.4.4 $X: I\times\Omega\to\mathbb{R}$ süreci I° üzerinde ortalama-kare türevlenebilir bir stokastik süreç ve X' süreci $[a,b]$, $a,b\in I, a<b$, üzerinde ortalama kare integrallenebilir olsun. Eğer $|X'|^{p/(p-1)}$ $p>1,$ süreci $[a,b]$ aralığında keyfi bir $s\in(0,1]$ s-konveks ise bu takdirde aşağıdaki eşitsizlik hemen her yerde gerçeklenir:

$$\left|\frac{1}{6}\left[X(a,\cdot)+4X\left(\frac{a+b}{2},\cdot\right)+X(b,\cdot)\right]-\frac{1}{b-a}\int_a^b X(t,\cdot)dt\right|\leq\frac{(b-a)}{(1+s)^{1/q}}\left(\frac{1+2^{p+1}}{6^{p+1}(p+1)}\right)^{1/p}$$

$$\left[\left(|X'(a,\cdot)|^q+\left|X'\left(\frac{a+b}{2},\cdot\right)\right|^q\right)^{1/q}+\left(\left|X'\left(\frac{a+b}{2},\cdot\right)\right|^q+|X'(b,\cdot)|^q\right)^{1/q}\right].$$

İspat: Lemma 4.4.1' den

$$\left|\frac{1}{6}\left[X(a,\cdot)+4X\left(\frac{a+b}{2},\cdot\right)+X(b,\cdot)\right]-\frac{1}{b-a}\int_a^b X(t,\cdot)dt\right|$$

$$\leq(b-a)\int_0^1|p(t)||X'(at+(1-t)b,\cdot)|dt$$

$$\leq(b-a)\left[\int_0^{1/2}\left|t-\frac{1}{6}\right||X'(at+(1-t)b,\cdot)|dt+\int_{1/2}^1\left|t-\frac{5}{6}\right||X'(at+(1-t)b,\cdot)|dt\right]$$

$$\leq(b-a)\left[\begin{array}{l}\left(\int_0^{1/2}\left|t-\frac{1}{6}\right|^p\right)^{1/p}\left(\int_0^{1/2}|X'(at+(1-t)b,\cdot)|^p\,dt\right)^{1/p}\\+\left(\int_{1/2}^1\left|t-\frac{5}{6}\right|^p\right)^{1/p}\left(\int_{1/2}^1|X'(at+(1-t)b,\cdot)|^p\,dt\right)^{1/p}\end{array}\right]$$

$$\leq(b-a)\left[\left(\int_0^{1/6}\left(\frac{1}{6}-t\right)^p dt+\int_{1/6}^{1/2}\left(t-\frac{1}{6}\right)^p dt\right)^{1/p}\left(\int_0^{1/2}|X'(at+(1-t)b,\cdot)|^p\right)^{1/p}\right.$$

$$\left.+\left(\int_{1/2}^{5/6}\left(\frac{5}{6}-t\right)^p dt+\int_{5/6}^1\left(t-\frac{5}{6}\right)^p dt\right)^{1/p}\left(\int_0^{1/2}|X'(at+(1-t)b,\cdot)|^p\right)^{1/p}\right],$$

elde edilir. Öte yandan $|X'|$ süreci s-konveks olduğundan

$$\int_0^{1/2}|X'(at+(1-t)b,\cdot)|^q\,dt=\frac{1}{b-a}\int_{\frac{a+b}{2}}^b|X'(t,\cdot)|^q\,dt$$

$$\leq\frac{1}{2}\left[\frac{|X'(b,\cdot)|^q+\left|X'\left(\frac{a+b}{2},\cdot\right)\right|^q}{s+1}\right]\leq\frac{|X'(b,\cdot)|^q+\left|X'\left(\frac{a+b}{2},\cdot\right)\right|^q}{s+1},\qquad(4.77)$$

ve

$$\int_{1/2}^{1} |X'(at+(1-t)b,\cdot)|^q \, dt = \frac{1}{b-a} \int_{a}^{\frac{a+b}{2}} |X'(t,\cdot)|^q \, dt$$

$$\leq \frac{1}{4}\left[\frac{|X'(b,\cdot)|^q + \left|X'\left(\frac{a+b}{2},\cdot\right)\right|^q}{s+1}\right] \leq \frac{|X'(a,\cdot)|^q + \left|X'\left(\frac{a+b}{2},\cdot\right)\right|^q}{s+1}, \tag{4.78}$$

dir. Ayrıca,

$$\int_{0}^{1/6} \left(\frac{1}{6}-t\right)^p dt = \int_{5/6}^{1} \left(\frac{5}{6}-t\right)^p dt = \frac{1}{3}\left(\frac{3^{-p}}{p+1}\right), \tag{4.79}$$

$$\int_{1/6}^{1/2} \left(t-\frac{1}{6}\right)^p dt = \int_{1/2}^{5/6} \left(t-\frac{5}{6}\right)^p dt = \frac{1}{6}\left(\frac{6^{-p}}{p+1}\right). \tag{4.80}$$

olup (4.77)-(4.80) ifadelerinden ispat tamamlanmış olur.

Eğer Teorem 4.4.4 de $s=1$ alınırsa, bu takdirde $|X'|^{p/(p-1)}$ sürecinin $[a,b]$ konveksliği sorgulanır. Çünkü stokastik süreçler için s-konvekslik bilinen anlamda konveksliğin bir genelleştirmesidir.

Sonuç 4.4.2 $X: I\times\Omega \to \mathbb{R}$ süreci I° üzerinde ortalama-kare türevlenebilir bir stokastik süreç ve X' süreci $[a,b]$, $a,b\in I, a<b$, üzerinde ortalama kare integrallenebilir olsun. Eğer $|X'|^{p/(p-1)}$ $p>1$, süreci $[a,b]$ aralığında s-konveks ise bu takdirde aşağıdaki eşitsizlik hemen her yerde gerçeklenir:

$$\left|\frac{1}{6}\left[X(a,\cdot)+4X\left(\frac{a+b}{2},\cdot\right)+X(b,\cdot)\right]-\frac{1}{b-a}\int_a^b X(t,\cdot)dt\right|$$

$$\leq \frac{(b-a)}{2^{1/q}}\left(\frac{1+2^{p+1}}{6^{p+1}(p+1)}\right)^{1/p} \tag{4.81}$$

$$\left[\left(|X'(a,\cdot)|^q + \left|X'\left(\frac{a+b}{2},\cdot\right)\right|^q\right)^{1/q} + \left(|X'(b,\cdot)|^q + \left|X'\left(\frac{a+b}{2},\cdot\right)\right|^q\right)^{1/q}\right].$$

Teorem 4.4.5 $X: I\times\Omega \to \mathbb{R}$ süreci I° üzerinde ortalama-kare türevlenebilir bir stokastik süreç ve X' süreci $[a,b]$, $a,b\in I, a<b$, üzerinde ortalama kare

integrallenebilir olsun. Eğer $|X'|^{p/(p-1)}$ $p>1$, süreci $[a,b]$ aralığında keyfi bir $s\in(0,1]$ s-konveks ise bu takdirde aşağıdaki eşitsizlik hemen her yerde gerçeklenir:

$$\left|\frac{1}{6}\left[X(a,\cdot)+4X\left(\frac{a+b}{2},\cdot\right)+X(b,\cdot)\right]-\frac{1}{b-a}\int_a^b X(t,\cdot)dt\right|$$
$$\le \frac{(b-a)}{[216(s^2+3s+2)]^{1/q}}\left(\frac{5}{72}\right)^{1-1/q}\left\{\left(\left[\left(3^{-s}(2^{1-s})+3s(2^{1-s})+3(2^{-s})\right)\right]|X'(b,\cdot)|^q\right.\right.$$
$$\left.+\left[5^{s+2}3^s2^{1-s}-6s(2^s)-21(2^s)+6s-24\right]|X'(a,\cdot)|^q\right)^{1/q} \tag{4.82}$$
$$+\left(\left[(3^{-s})(2^{1-s})+3s(2^{1-s})+3(2^{-s})\right]|X'(a,\cdot)|^q\right.$$
$$\left.\left.+\left[5^{s+2}3^s2^{1-s}-6s(2^s)-21(2^s)+6s-24\right]|X'(b,\cdot)|^q\right)^{1/q}\right\}.$$

İspat: Lemma 4.4.2 ve power-mean eşitsizliğinden

$$\left|\frac{1}{6}\left[X(a,\cdot)+4X\left(\frac{a+b}{2},\cdot\right)+X(b,\cdot)\right]-\frac{1}{b-a}\int_a^b X(u,\cdot)du\right|$$
$$\le (b-a)\int_0^1 |s(t)||X'(tb+(1-t)a,\cdot)|dt$$
$$\le (b-a)\int_0^{1/2}\left|t-\frac{1}{6}\right||X'(tb+(1-t)a,\cdot)|dt+\int_{1/2}^1\left|t-\frac{5}{6}\right||X'(tb+(1-t)a,\cdot)|dt$$
$$\le (b-a)\left(\int_0^{1/2}\left|t-\frac{1}{6}\right|dt\right)^{1-1/q}\left(\int_0^{1/2}\left|t-\frac{1}{6}\right||X'(tb+(1-t)a,\cdot)|^q dt\right)^{1/q}$$
$$+(b-a)\left(\int_{1/2}^1\left|t-\frac{5}{6}\right|dt\right)^{1-1/q}\left(\int_{1/2}^1\left|t-\frac{5}{6}\right||X'(tb+(1-t)a,\cdot)|^q dt\right)^{1/q}.$$

elde edilir. Öte yandan $|X'|$ süreci s-*k*onveks olduğundan

$$\int_0^{1/2}\left|t-\frac{1}{6}\right||X'(tb+(1-t)a,\cdot)|^q dt\le\int_0^{1/6}\left(\frac{1}{6}-t\right)\left(t^s|X'(b,\cdot)|^q+(1-t)^s|X'(a,\cdot)|^q\right)dt$$
$$+\int_{1/6}^{1/2}\left(t-\frac{1}{6}\right)\left(t^s|X'(b,\cdot)|^q+(1-t)^s|X'(a,\cdot)|^q\right)dt$$

$$=\left[\frac{(3^{-s})(2^{1-s})+3s(2^{1-s})+3(2^{-s})}{36(s^2+3s+2)}\right]\left|X'(b,\cdot)\right|^q$$
$$+\left[\frac{(5^{s+2})(3^{-s})(2^{1-s})-6s(2^{-s})-21(2^{-s})+6s-24}{36(s^2+3s+2)}\right]\left|X'(a,\cdot)\right|^q$$

ve

$$\int_{1/2}^{1}\left|t-\frac{5}{6}\right|\left|X'(tb+(1-t)a,\cdot)\right|^q dt \le \int_{1/2}^{5/6}\left(\frac{5}{6}-t\right)\left(t^s\left|X'(b,\cdot)\right|^q+(1-t)^s\left|X'(a,\cdot)\right|^q\right)dt$$
$$+\int_{5/6}^{1}\left(t-\frac{5}{6}\right)\left(t^s\left|X'(b,\cdot)\right|^q+(1-t)^s\left|X'(a,\cdot)\right|^q\right)dt$$

$$=\left[\frac{(3^{-s})(2^{1-s})+3s(2^{1-s})+3(2^{-s})}{36(s^2+3s+2)}\right]\left|X'(a,\cdot)\right|^q$$
$$+\left[\frac{(5^{s+2})(3^{-s})(2^{1-s})-6s(2^{-s})-21(2^{-s})+6s-24}{36(s^2+3s+2)}\right]\left|X'(b,\cdot)\right|^q,$$

yazılabilir. Ayrıca

$$\int_{0}^{1/2}\left|t-\frac{1}{6}\right|dt=\int_{1/2}^{1}\left|t-\frac{5}{6}\right|dt=\frac{5}{72}.$$

olup ispat tamamlanmış olur..

Sonuç 4.4.3 $X : I\times\Omega\to\mathbb{R}$ süreci Teorem 3.6 daki gibi olsun. Bu takdirde

$$\left|\frac{1}{6}\left[X(a,\cdot)+4X\left(\frac{a+b}{2},\cdot\right)+X(b,\cdot)\right]-\frac{1}{b-a}\int_a^b X(u,\cdot)du\right|$$
$$\le\frac{(b-a)}{[216(s^2+3s+2)]^{1/q}}\left(\frac{5}{72}\right)^{1-1/q}\left(\left|X'(a,\cdot)\right|+\left|X'(b,\cdot)\right|\right)$$
$$\left[\left[(3^{-s})(2^{1-s})+3s(2^{1-s})+3(2^{-s})\right]^{1/q}+\left[(5^{s+2})(3^{-s})(2^{1-s})-6s(2^{-s})-21(2^{-s})+6s-24\right]^{1/q}\right].$$

eşitsizliği hemen her yerde gerçeklenir. Ayrıca eğer $s=1,$ alınırsa

$$\left|\frac{1}{6}\left[X(a,\cdot)+4X\left(\frac{a+b}{2},\cdot\right)+X(b,\cdot)\right]-\frac{1}{b-a}\int_a^b X(u,\cdot)du\right|$$
$$\le\frac{5}{72}\left(\frac{1668}{6480}\right)^{1-1/q}(b-a)\left(\left|X'(a,\cdot)\right|+\left|X'(b,\cdot)\right|\right)$$

olacaktır.

İspat: $p>1,\ q=p/(p-1)$ için yukarıda verilen eşitsizliği göz önüne alalım ve

$$a_1=\left[(3^{-s})(2^{1-s})+3s(2^{1-s})+3(2^{-s})\right]\left|X'(b,\cdot)\right|^q$$
$$b_1=\left[(5^{s+2})(3^{-s})(2^{1-s})-6s(2^{-s})-21(2^{-s})+6s-24\right]\left|X'(a,\cdot)\right|^q$$
$$a_2=\left[(3^{-s})(2^{1-s})-6s(2^{-s})-21(2^{-s})+6s-24\right]\left|X'(b,\cdot)\right|^q$$
$$b_2=\left[(5^{s+2})(3^{-s})(2^{1-s})-6s(2^{-s})-21(2^{-s})+6s-24\right]\left|X'(b,\cdot)\right|^q.$$

tanımlayalım, burada $0<1/q<1,\ q>1$ dir. Bu takdirde $0<r<1,\ a_1,a_2,\dots,a_n\geq 0$ ve $b_1,b_2,\dots,b_n\geq 0,$ için

$$\sum_{i=1}^{n}\left(a_i+b_i\right)^r\leq\sum_{i=1}^{n}a_i^r+\sum_{i=0}^{n}b_i^r,$$

olup buradan da

$$\left|\frac{1}{6}\left[X(a,\cdot)+4X\left(\frac{a+b}{2},\cdot\right)+X(b,\cdot)\right]-\frac{1}{b-a}\int_a^b X(u,\cdot)du\right|$$
$$\leq\frac{(b-a)}{\left[216(s^2+3s+2)\right]^{1/q}}\left(\frac{5}{72}\right)^{1-1/q}\left\{\left[(3^{-s})(2^{1-s})+3s(2^{1-s})+3(2^{-s})\right]^{1/q}\right.$$
$$\left.+\left[(5^{s+2})(3^{-s})(2^{1-s})-6s(2^{-s})-21(2^{-s})+6s-24\right]^{1/q}\right\}\left(\left|X'(a,\cdot)\right|+\left|X'(b,\cdot)\right|\right)$$

elde edilir ve böylece ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 4.4.4 $X:I\times\Omega\to\mathbb{R}$ süreci Teorem 4.4.5 deki gibi olsun ve $s=1,$ alalım. Bu takdirde konveks fonksiyonlar için aşağıdaki eşitsizlik hemen her yerde gerçeklenir:

$$\left|\frac{1}{6}\left[X'(a,\cdot)+4X'\left(\frac{a+b}{2},\cdot\right)+X'(b,\cdot)\right]-\frac{1}{b-a}\int_a^b X(t,\cdot)dt\right|$$
$$\leq\frac{(b-a)}{[1296]^{1/q}}\left(\frac{5}{72}\right)^{1-1/q}\left[\left(20\left|X'(b,\cdot)\right|^q+61\left|X'(a,\cdot)\right|^q\right)^{1/q}+\left(61\left|X'(b,\cdot)\right|^q+61\left|X'(a,\cdot)\right|^q\right)^{1/q}\right]$$

Üstelik, eğer $\left|X'\right|\leq M,\ x\in I,$ alınırsa bu durumda

$$\left|\frac{1}{6}\left[X(a,\cdot)+4X'\left(\frac{a+b}{2},\cdot\right)+X(b,\cdot)\right]-\frac{1}{b-a}\int_a^b X(t,\cdot)dt\right|\leq\frac{(b-a)}{36}M,$$

eşitsizliği gerçeklenir.

İspat: Bu durumda

$$\int_0^{1/2}\left|t-\frac{1}{6}\right|\left|X'(ta+(1-t)b,\cdot)\right|dt+\int_{1/2}^{1}\left|t-\frac{5}{6}\right|\left|X'(ta+(1-t)a,\cdot)\right|dt$$

$$\leq\int_0^{1/6}\left[\left(\frac{1}{6}-t\right)t^s\left|X'(a,\cdot)\right|^q+\left(\frac{1}{6}-t\right)(1-t)^s\left|X'(b,\cdot)\right|^q\right]dt$$

$$+\int_{1/6}^{1/2}\left[\left(t-\frac{1}{6}\right)t^s\left|X'(a,\cdot)\right|^q+\left(t-\frac{1}{6}\right)(1-t)^s\left|X'(b,\cdot)\right|^q\right]dt$$

$$+\int_{1/2}^{5/6}\left[\left(\frac{5}{6}-t\right)t^s\left|X'(a,\cdot)\right|^q+\left(\frac{5}{6}-t\right)(1-t)^s\left|X'(b,\cdot)\right|^q\right]dt$$

$$+\int_{5/6}^{1}\left[\left(t-\frac{5}{6}\right)t^s\left|X'(a,\cdot)\right|^q+\left(t-\frac{5}{6}\right)(1-t)^s\left|X'(b,\cdot)\right|^q\right]dt$$

$$=\left|X'(a,\cdot)\right|^q\left[\int_0^{1/6}\left(\frac{1}{6}-t\right)t^s dt+\int_{1/6}^{1/2}\left(t-\frac{1}{6}\right)t^s dt+\int_{1/2}^{5/6}\left(\frac{5}{6}-t\right)t^s dt+\int_{5/6}^{1}\left(t-\frac{5}{6}\right)t^s dt\right]$$

$$+\left|X'(b,\cdot)\right|^q\left[\int_0^{1/6}\left(\frac{1}{6}-t\right)(1-t)^s dt+\int_{1/6}^{1/2}\left(t-\frac{1}{6}\right)(1-t)^s dt\right.$$

$$\left.+\int_{1/2}^{5/6}\left(t-\frac{5}{6}\right)(1-t)^s dt+\int_{5/6}^{1}\left(t-\frac{5}{6}\right)(1-t)^s dt\right]$$

yazılabilir. Teorem 4.4.5' e göre $s=1$, alınırsa

$$\left|\frac{1}{6}\left[X(a,\cdot)+4X\left(\frac{a+b}{2},\cdot\right)+X(b,\cdot)\right]-\frac{1}{b-a}\int_a^b X(t,\cdot)dt\right|$$

$$\leq\frac{(b-a)}{[1296]^{1/q}}\left(\frac{5}{72}\right)^{1-1/q}\left[\left(29\left|X'(b,\cdot)\right|^q+61\left|X'(a,\cdot)\right|^q\right)^{1/q}+\left(29\left|X'(a,\cdot)\right|^q+61\left|X'(b,\cdot)\right|^q\right)^{1/q}\right]$$

olduğu görülür. Bu nedenle, eğer $X'(u,\cdot)\leq M$, $u\in I$ ise bu takdirde

$$\left|\frac{1}{6}\left[X(a,\cdot)+4X\left(\frac{a+b}{2},\cdot\right)+X(b,\cdot)\right]-\frac{1}{b-a}\int_a^b X(t,\cdot)dt\right|$$

$$\leq\frac{(b-a)}{[1296]^{1/q}}\left(\frac{5}{72}\right)^{1-1/q}\left[\left(29M^q+61M^q\right)^{1/q}+\left(29M^q+61M^q\right)^{1/q}\right]$$

$$\leq\frac{(b-a)}{[1296]^{1/q}}\left(\frac{5}{72}\right)^{1-1/q}\left[\left(90M^q\right)^{1/q}+\left(90M^q\right)^{1/q}\right]$$

$$=\frac{(b-a)}{[1296]^{1/q}}\left(\frac{5}{72}\right)^{1-1/q}\left[2(90)^{1/q}M\right]$$

$$=(b-a)\left(\frac{5}{72}\right)\left(\frac{5}{72}\right)^{-1/q}\left(2\left(\frac{5}{72}\right)^{1/q}M\right)\leq\frac{5(b-a)}{36}M$$

olduğu görülür ve böylece ispat tamamlanmış olur.

Lemma 4.4.3 $X : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ süreci I° da ortalama-kare türevlenebilir bir stokastik süreç ve X'' süreci $[a,b],$ $a,b \in I$, $a<b$ de ortalama-kare integrallenebilir olsun. Eğer $X''(t,\cdot)$ $[a,b],$ de ortalama-kare integrallenebilir ise

$$\begin{aligned}\frac{1}{b-a}\int_a^b X(t,\cdot)dt-\frac{1}{6}\left[X(a,\cdot)+4X\left(\frac{a+b}{2},\cdot\right)+X(b,\cdot)\right]\\ =(b-a)^2\int_a^b p(t)X''(at+(1-t)b,\cdot)dt,\end{aligned} \tag{4.83}$$

eşitliği hemen her yerde gerçekleşir, burada

$$p(t)=\begin{cases}\frac{1}{6}t(3t-1), & t\in\left[0,\frac{1}{2}\right],\\ \frac{1}{6}(t-1)(3t-1), & t\in\left(\frac{1}{2},1\right]\end{cases}$$

dir.

İspat: Kısmi integrasyon uygulanarak

$$\begin{aligned}I&=\int_0^1 p(t)X''(at+(1-t)b,\cdot)dt\\ &=\frac{1}{6}\int_0^{1/2} t(3t-1)X'(at+(1-t)b,\cdot)dt+\frac{1}{6}\int_{1/2}^1 (t-1)(3t-1)X'(at+(1-t)b,\cdot)dt\\ &=\frac{1}{6}t(3t-1)\frac{X(at+(1-t)b,\cdot)}{b-a}\Bigg|_0^{1/2}-\left[\frac{1}{2}t+\frac{1}{6}(3t-1)\frac{X(at+(1-t)b,\cdot)}{(b-a)^2}\Bigg|_0^{1/2}\right]\\ &\quad+\int_0^{1/2}\frac{X(at+(1-t)b,\cdot)}{(b-a)^2}dt+\frac{1}{6}(t-1)(3t-2)\frac{X(at+(1-t)b,\cdot)}{b-a}\Bigg|_{1/2}^1\\ &\quad-\left[\frac{1}{2}(t-1)+\frac{1}{6}(3t-2)\right]\frac{X(at+(1-t)b,\cdot)}{(b-a)^2}\Bigg|_{1/2}^1+\int_{1/2}^1\frac{X(at+(1-t)b,\cdot)}{(b-a)^2}dt\\ &=\frac{1}{24}\frac{X'\left(\frac{a+b}{2},\cdot\right)}{b-a}-\frac{1}{3}\frac{X'\left(\frac{a+b}{2},\cdot\right)}{(b-a)^2}-\frac{1}{6}\frac{X'(a,\cdot)}{(b-a)^2}+\int_0^{1/2}\frac{1}{24}\frac{X'(at+(1-t)b,\cdot)}{(b-a)^2}dt\\ &\quad-\frac{1}{6}\frac{X'(b,\cdot)}{(b-a)^2}-\frac{1}{24}\frac{X'\left(\frac{a+b}{2},\cdot\right)}{b-a}-\frac{1}{3}\frac{X'\left(\frac{a+b}{2},\cdot\right)}{(b-a)^2}+\int_{1/2}^1\frac{1}{24}\frac{X'(at+(1-t)b,\cdot)}{(b-a)^2}dt\\ &=\frac{1}{(b-a)^2}\int_0^1 X(at+(1-t)b,\cdot)dt-\frac{1}{6(b-a)^2}\left[X(a,\cdot)+X(b,\cdot)+4X\left(\frac{a+b}{2},\cdot\right)\right]\end{aligned} \tag{4.84}$$

olduğu görülür. $x = at + (1-t)b,$ alınırsa $dx = (b-a)dt,$ olup buradan da

$$(b-a)I = \frac{1}{b-a}\int_a^b X(t,\cdot)dt - \frac{1}{6}\left[X(a,\cdot) + 4X\left(\frac{a+b}{2},\cdot\right) + X(b,\cdot)\right],$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Aşağıda verilen teoremler Quasi-konveks stokastik süreçler için yeni tip Simpson eşitsizliklerini içermektedir.

Teorem 4.4.6 $X : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ süreci I° da ortalama-kare türevlenebilir bir stokastik süreç ve X'' süreci $[a,b],$ $a,b \in I,$ $a < b$ de ortalama-kare integrallenebilir olsun. Eğer keyfi sabit bir $s \in (0,1],$ için $|X''|$ süreci $[a,b],$ üzerinde Quasi-konveks ise bu takdirde aşağıdaki eşitsizlik hemen her yerde gerçeklenir:

$$\begin{aligned} &\left|\frac{1}{6}\left[X(a,\cdot) + 4X\left(\frac{a+b}{2},\cdot\right) + X(b,\cdot)\right] - \frac{1}{b-a}\int_a^b X(t,\cdot)dt\right| \\ &\le \frac{(b-a)^2}{162}\left[\max\left\{|X''(a,\cdot)|, \left|X''\left(\frac{a+b}{2},\cdot\right)\right|\right\} + \max\left\{|X''(b,\cdot)|, \left|X''\left(\frac{a+b}{2},\cdot\right)\right|\right\}\right]. \end{aligned} \tag{4.85}$$

İspat: Öncelikle

$$\int_0^{1/3} t(1-3t)dt = \int_{1/3}^{1} t(3t-1)dt = \int_{1/3}^{2/3} (1-t)(2-3t)dt = \int_{2/3}^{1} (1-t)(3t-2)dt = \frac{1}{54} \tag{4.86}$$

olduğunu belirtelim. Bu takdirde, Lemma 4.4.3 dikkate alınırsa $|X''|$ süreci Quasi-konveks olduğundan

$$\begin{aligned} &\left|\frac{1}{6}\left[X(a,\cdot) + 4X\left(\frac{a+b}{2},\cdot\right) + X(b,\cdot)\right] - \frac{1}{b-a}\int_a^b X(t,\cdot)dt\right| \\ &\le (b-a)^2 \int_0^1 |p(t)||X''(at+(1-t)b,\cdot)|dt \\ &\le \frac{(b-a)^2}{6}\left[\begin{array}{l} \displaystyle\int_0^{1/2} t|3t-1| \max\left\{|X''(a,\cdot)|, \left|X''\left(\frac{a+b}{2},\cdot\right)\right|\right\}dt + \\ \displaystyle + \int_{1/2}^{1} |t-1||3t-2| \max\left\{|X''(a,\cdot)|, \left|X''\left(\frac{a+b}{2},\cdot\right)\right|\right\}dt \end{array}\right] \end{aligned}$$

$$= \frac{(b-a)^2}{6} \max\left\{ \left|X''(a,\cdot)\right|, \left|X''\left(\frac{a+b}{2},\cdot\right)\right| \right\} \left[\int_0^{1/3} t(1-3t)dt + \int_{1/3}^{1/2} t(3t-1)dt \right]$$

$$+ \frac{(b-a)^2}{6} \max\left\{ \left|X''(a,\cdot)\right|, \left|X''\left(\frac{a+b}{2},\cdot\right)\right| \right\} \left[\int_{1/2}^{2/3} (1-t)(2-3t)dt + \int_{2/3}^{1} (1-t)(3t-2)dt \right]$$

$$= \frac{(b-a)^2}{162} \left[\max\left\{ \left|X''(a,\cdot)\right|, \left|X''\left(\frac{a+b}{2},\cdot\right)\right| \right\} + \max\left\{ \left|X''(b,\cdot)\right|, \left|X''\left(\frac{a+b}{2},\cdot\right)\right| \right\} \right],$$

elde edilir ve böylece ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 4.4.5 $X : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ süreci I° da ortalama-kare türevlenebilir bir stokastik süreç ve X'' süreci $[a,b]$, $a,b \in I$, $a<b$ de ortalama-kare integrallenebilir olsun. Eğer keyfi sabit bir $s \in (0,1]$, için $|X''|$ süreci $[a,b]$, üzerinde Quasi-konveks ve $X(s,\cdot) = X\left(\frac{a+b}{2},\cdot\right) = X(b,\cdot)$, ise bu takdirde

$$\left| \frac{1}{b-a} \int_a^b X(t,\cdot)dt - X\left(\frac{a+b}{2},\cdot\right) \right| \le \frac{(b-a)^2}{162} \frac{(b-a)^2}{162}$$

$$\left[\max\left\{ \left|X''(a,\cdot)\right|, \left|X''\left(\frac{a+b}{2},\cdot\right)\right| \right\} + \max\left\{ \left|X''(b,\cdot)\right|, \left|X''\left(\frac{a+b}{2},\cdot\right)\right| \right\} \right].$$

eşitsizliği hemen her yerde gerçekleşir. Özel olarak eğer , $M>0$, olmak üzere her $t \in [a,b]$ için $|X''(t,)| < M$ ise

$$\left| \frac{1}{b-a} \int_a^b X(t,\cdot)dt - X\left(\frac{a+b}{2},\cdot\right) \right| \le \frac{(b-a)^2}{162} M,$$

eşitsizliği gerçeklenir.

Teorem 4.4.7 $X : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ süreci I° da ortalama-kare türevlenebilir bir stokastik süreç ve X'' süreci $[a,b]$, $a,b \in I$, $a<b$ de ortalama-kare integrallenebilir olsun. Eğer keyfi sabit bir $s \in (0,1]$, için $|X''|$ süreci $[a,b]$, üzerinde Quasi-konveks ise bu takdirde aşağıdaki eşitsizlik hemen her yerde gerçeklenir:

$$\left|\frac{1}{6}\left[X(a,\cdot)+4X\left(\frac{a+b}{2},\cdot\right)+X(b,\cdot)\right]-\frac{1}{b-a}\int_a^b X(t,\cdot)dt\right|$$

$$\le\frac{(b-a)^2}{6}\left(\frac{\sqrt{\pi}12^{-p}\Gamma(p+1)}{6\Gamma\left(\frac{3}{2}+p\right)}+\frac{4(3^{-p})+3(2^{-p})(p-1)}{12(2+3p+p^2)}\right)^{1/p} \tag{4.87}$$

$$\left[\max\left\{\left|X''(a,\cdot)\right|^{p/(p-1)},\left|X''\left(\frac{a+b}{2},\cdot\right)\right|^{p/(p-1)}\right\}^{(p-1)/p}\right.$$

$$\left.+\max\left\{\left|X''(b,\cdot)\right|^{p/(p-1)},\left|X''\left(\frac{a+b}{2},\cdot\right)\right|^{p/(p-1)}\right\}^{(p-1)/p}\right].$$

İspat: Lemma 4.4.3 ve $|X''|$ sürecinin Quasi-konveks olduğu dikkate alınırsa

$$\left|\frac{1}{6}\left[X(a,\cdot)+4X\left(\frac{a+b}{2},\cdot\right)+X(b,\cdot)\right]-\frac{1}{b-a}\int_a^b X(t,\cdot)dt\right|$$

$$\le(b-a)\int_0^1|p(t)|\left|X''(at+(1-t)b,\cdot)\right|dt$$

$$\le\frac{(b-a)^2}{6}\left[\left(\int_0^{1/2}\left(t|3t-1|\right)^p dt\right)^{1/p}\left(\int_0^{1/2}\left|X''(at+(1-t)b,\cdot)\right|^q dt\right)^{1/q}\right.$$

$$\left.+\left(\int_{1/2}^1\left(|t-1||3t-2|\right)^p dt\right)^{1/p}\left(\int_{1/2}^1\left|X''(at+(1-t)b,\cdot)\right|^q dt\right)^{1/q}\right]$$

$$\le\frac{(b-a)^2}{6}\left[\left(\int_0^{1/3}t^p|1-3t|^p dt+\int_{1/3}^{1/2}t^p(3t-1)^p dt\right)^{1/p}\left(\int_0^{1/2}\left|X''(at+(1-t)b,\cdot)\right|^q dt\right)^{1/q}\right.$$

$$\left.+\left(\int_{1/2}^{2/3}(t-1)^p(2-3t)^p dt+\int_{2/3}^{1}(t-1)^p(3t-2)^p dt\right)^{1/p}\left(\int_{1/2}^1\left|X''(at+(1-t)b,\cdot)\right|^q dt\right)^{1/q}\right],$$

olduğu görülür. Öte yandan $|X''|$ süreci Quasi-konveks olduğundan

$$\int_0^{1/2}\left|X''(at+(1-t)b,\cdot)\right|^q dt\le\max\left\{\left|X''(a,\cdot)\right|^q,\left|X''\left(\frac{a+b}{2},\cdot\right)\right|^q\right\}, \tag{4.88}$$

$$\int_{1/2}^1\left|X''(at+(1-t)b,\cdot)\right|^q dt\le\max\left\{\left|X''(b,\cdot)\right|^q,\left|X''\left(\frac{a+b}{2},\cdot\right)\right|^q\right\} \tag{4.89}$$

elde edilir. Bunun yanında $p>1$ için

$$\int_0^{1/3} t^p(1-3t)^p dt = \int_{2/3}^{1} (t-1)^p(3t-2)^p dt = \frac{12^{-p}\sqrt{\pi}\Gamma(p+1)}{6\Gamma\left(\frac{3}{2}+p\right)}, \tag{4.90}$$

$$\int_{1/3}^{1/2} t^p(3t-1)^p dt = \int_{1/2}^{2/3} (t-1)^p(2-3t)^p dt = \frac{4(3^{-p})+3(2^{-p})(p-1)}{12(2+3p+p^2)} \tag{4.91}$$

eşitlikleri yazılabilir. (4.88)-(4.91), ifadelerinden istenen sonuç elde edilir.

Sonuç 4.4.6 $X' : I\times\Omega \to \mathbb{R}$ süreci I° da ortalama-kare türevlenebilir bir stokastik süreç ve X'' süreci $[a,b]$, $a,b\in I$, $a<b$ de ortalama-kare integrallenebilir olsun. Eğer keyfi sabit bir $s\in(0,1]$, için $|X''|$ süreci $[a,b]$, üzerinde Quasi-konveks ve $X(a,\cdot) = X\left(\frac{a+b}{2},\cdot\right) = X(b,\cdot)$, ise bu takdirde

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b X(t,\cdot)dt - X\left(\frac{a+b}{2},\cdot\right)\right| \\
&\le \frac{(b-a)^2}{6}\left(\frac{\sqrt{\pi}12^{-p}\Gamma(p+1)}{6\Gamma\left(\frac{3}{2}+p\right)} + \frac{4(3^{-p})+3(2^{-p})(p-1)}{12(2+3p+p^2)}\right)^{1/p} \\
&\quad\left[\max\left\{|X''(a,\cdot)|^{p/(p-1)}, \left|X''\left(\frac{a+b}{2},\cdot\right)\right|^{p/(p-1)}\right\}^{(p-1)/p}\right. \\
&\quad\left.+\max\left\{|X''(b,\cdot)|^{p/(p-1)}, \left|X''\left(\frac{a+b}{2},\cdot\right)\right|^{p/(p-1)}\right\}^{(p-1)/p}\right]
\end{aligned} \tag{4.92}$$

eşitsizliği hemen her yerde gerçekleşir.

Teorem 4.4.8 $X' : I\times\Omega \to \mathbb{R}$ süreci I° da ortalama-kare türevlenebilir bir stokastik süreç ve X'' süreci $[a,b]$, $a,b\in I$, $a<b$ de ortalama-kare integrallenebilir olsun. Eğer keyfi sabit bir $s\in(0,1]$, için $|X''|$ süreci $[a,b]$, üzerinde Quasi-konveks ise

$$\left|\frac{1}{6}\left[X(a,\cdot)+4X\left(\frac{a+b}{2},\cdot\right)+X(b,\cdot)\right]-\frac{1}{b-a}\int_a^b X(t,\cdot)dt\right|$$
$$\leq\frac{(b-a)^2}{162}\left[\max\left\{|X''(a,\cdot)|^q,\left|X''\left(\frac{a+b}{2},\cdot\right)\right|^q\right\}^{1/q}\right.$$
$$\left.+\max\left\{|X''(b,\cdot)|^q,\left|X''\left(\frac{a+b}{2},\cdot\right)\right|^q\right\}^{1/q}\right] \tag{4.93}$$

eşitsizliği hemen her yerde gerçekleşir.

İspat: Lemma 4.4.3 ve Power-Mean eşitsizliğinden

$$\left|\frac{1}{6}\left[X(a,\cdot)+4X\left(\frac{a+b}{2},\cdot\right)+X(b,\cdot)\right]-\frac{1}{b-a}\int_a^b X(t,\cdot)dt\right|\leq(b-a)\int_0^1|p(t)||X''(at+(1-t)b,\cdot)|dt$$
$$\leq\frac{(b-a)^2}{6}\left[\left(\int_0^{1/2}t|3t-1|dt\right)^{1-1/q}\left(\int_0^{1/2}t|3t-1||X''(at+(1-t)b,\cdot)|^q dt\right)^{1/q}\right.$$
$$\left.+\left(\int_{1/2}^1|t-1||3t-2|dt\right)^{1-1/q}\left(\int_{1/2}^1|t-1||3t-2||X''(at+(1-t)b,\cdot)|^q dt\right)^{1/q}\right]$$
$$\leq\frac{(b-a)^2}{6}\left[\left(\int_0^{1/3}t(1-3t)dt+\int_{1/3}^{1/2}t(3t-1)dt\right)^{1-1/q}\left(\int_0^{1/2}t|3t-1||X''(at+(1-t)b,\cdot)|^q dt\right)^{1/q}\right.$$
$$\left.+\left(\int_{1/2}^{2/3}(t-1)(2-3t)dt+\int_{2/3}^1(t-1)(3t-2)dt\right)^{1-1/q}\left(\int_{1/2}^1|t-1||3t-2||X''(at+(1-t)b,\cdot)|^q dt\right)^{1/q}\right],$$

yazılabilir. Öte yandan $|X''|$ süreci Quasi-konveks olduğundan

$$\int_0^{1/2}t|3t-1||X''(at+(1-t)b,\cdot)|^q dt\leq\frac{1}{27}\max\left\{|X''(a,\cdot)|^q,\left|X''\left(\frac{a+b}{2},\cdot\right)\right|^q\right\}, \tag{4.94}$$

$$\int_{1/2}^1|t-1||3t-2||X''(at+(1-t)b,\cdot)|^q dt\leq\frac{1}{27}\max\left\{|X''(b,\cdot)|^q,\left|X''\left(\frac{a+b}{2},\cdot\right)\right|^q\right\} \tag{4.95}$$

olacaktır, burada

$$\int_0^{1/3}t|3t-1|dt=\int_{1/2}^1|t-1||3t-2|dt=\frac{1}{27} \tag{4.96}$$

eşitliği kullanılmıştır. Böylece (4.94)-(4.96) ifadeleri birleştirilerek istenen sonuç elde edilmiş olur.

Sonuç 4.4.7 $X':I\times\Omega\to\mathbb{R}$ süreci I° da ortalama-kare türevlenebilir bir stokastik süreç ve X'' süreci $[a,b],\ a,b\in I,\ a<b$ de ortalama-kare integrallenebilir olsun. Eğer keyfi sabit bir $s\in(0,1]$, için $|X''|$ süreci $[a,b]$, üzerinde Quasi-konveks ve $X(a,\cdot)=X\left(\frac{a+b}{2},\cdot\right)=X(b,\cdot)$, ise bu takdirde

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b X(t,\cdot)dt-X\left(\frac{a+b}{2},\cdot\right)\right|$$
$$\leq\frac{(b-a)^2}{162}\left[\max\left\{|X''(a,\cdot)|^q,\left|X''\left(\frac{a+b}{2},\cdot\right)\right|^q\right\}^{1/q}\right. \tag{4.97}$$
$$\left.+\max\left\{|X''(b,\cdot)|^q,\left|X''\left(\frac{a+b}{2},\cdot\right)\right|^q\right\}^{1/q}\right]$$

eşitsizliği hemen her yerde gerçekleşir.

Aşağıdaki Lemma üçüncü türev kullanılarak Quasi-konveks stokastik süreçler için diğer bir sonucun elde edilmesinde oldukça kullanışlıdır.

Lemma 4.4.4 $X:I\times\Omega\to\mathbb{R}$ süreci I° üzerinde ortalama-kare türevlenebilir bir stokastik süreç ve X''' süreci $[a,b],\ a,b\in I,\ a<b$ de ortalama-kare integrallenebilir olsun. Eğer $|X'''|$ üreci $[a,b]$, üzerinde ortalama-kare integrallenebilir ise bu takdirde

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b X(t,\cdot)dt-\frac{1}{6}\left[X(a,\cdot)+4X\left(\frac{a+b}{2},\cdot\right)+X(b,\cdot)\right]$$
$$=(b-a)^4\int_a^b p(t)X'''(at+(1-t)b,\cdot)dt, \tag{4.98}$$

eşitliği hemen her yerde gerçekleşir, burada

$$p(t)=\begin{cases}\frac{1}{6}t^2\left(t-\frac{1}{2}\right), & t\in\left[0,\frac{1}{2}\right],\\ \frac{1}{6}(t-1)^2\left(t-\frac{1}{2}\right), & t\in\left(\frac{1}{2},1\right]\end{cases}$$

dir.

İspat: Kısmi integrasyon uygulanarak

$$I=\int_0^1 p(t)X'''(at+(1-t)b,\cdot)dt$$

$$=\frac{1}{6}\int_0^{1/2} t^2\left(t-\frac{1}{2}\right)X'''(at+(1-t)b,\cdot)dt+\frac{1}{6}\int_{1/2}^1 (1-t)^2\left(t-\frac{1}{2}\right)X'''(at+(1-t)b,\cdot)dt$$

$$=\frac{1}{6}t^2\left(t-\frac{1}{2}\right)\frac{X''(at+(1-t)b,\cdot)}{a-b}\Bigg|_0^{1/2}-\frac{1}{6}t(3t-1)\frac{X'(at+(1-t)b,\cdot)}{(b-a)^2}\Bigg|_0^{1/2}$$

$$+\left(t-\frac{1}{6}\right)\frac{X(at+(1-t)b,\cdot)}{(a-b)^3}\Bigg|_0^{1/2}+\int_0^{1/2}\frac{X(at+(1-t)b,\cdot)}{(a-b)^3}dt$$

$$+\frac{1}{6}(1-t)^2\left(t-\frac{1}{2}\right)\frac{X''(at+(1-t)b,\cdot)}{a-b}\Bigg|_{1/2}^{1}$$

$$-\frac{1}{6}(3t-2)(t-1)\frac{X'(at+(1-t)b,\cdot)}{(a-b)^2}\Bigg|_{1/2}^{1}$$

$$+\left(t-\frac{5}{6}\right)\frac{X''(at+(1-t)b,\cdot)}{(a-b)^3}\Bigg|_{1/2}^{1}-\int_{1/2}^{1}\frac{X''(at+(1-t)b,\cdot)}{(a-b)^3}dt$$

$$=-\frac{1}{24}\frac{X'\left(\frac{a+b}{2},\cdot\right)}{(a-b)^2}-\frac{1}{3}\frac{X'\left(\frac{a+b}{2},\cdot\right)}{(a-b)^3}+\frac{1}{6}\frac{X'(b,\cdot)}{(a-b)^3}-\int_0^{1/2}\frac{X''(at+(1-t)b,\cdot)}{(a-b)^3}dt$$

$$+\frac{1}{24}\frac{X'\left(\frac{a+b}{2},\cdot\right)}{(a-b)^2}+\frac{1}{3}\frac{X'\left(\frac{a+b}{2},\cdot\right)}{(a-b)^3}+\frac{1}{6}\frac{X'(b,\cdot)}{(a-b)^3}-\int_{1/2}^{1}\frac{X''(at+(1-t)b,\cdot)}{(a-b)^3}dt,$$

elde edilir. Eğer $s=at+(1-t)b,$ değişken değişimi yapılırsa

$$(b-a)^4 I=\int_a^b X(s,\cdot)ds-\frac{(b-a)}{6}\left[X(a,\cdot)+X(b,\cdot)+4X\left(\frac{a+b}{2},\cdot\right)\right],$$

bulunur ki bu da (4.98) ifadesini verir.

Teorem 4.4.9 $X:I\times\Omega\to\mathbb{R}$ süreci I° da ortalama-kare türevlenebilir bir stokastik süreç olmak üzere X'' süreci $[a,b],$ $a,b\in I$, $a<b$ de ortalama-kare integrallenebilir olsun. Eğer keyfi sabit bir $s\in(0,1]$, için $|X''|$ süreci $[a,b],$ üzerinde Quasi-konveks ise

$$\left|\frac{1}{6}\left[X(a,\cdot)+4X\left(\frac{a+b}{2},\cdot\right)+X(b,\cdot)\right]-\frac{1}{b-a}\int_a^b X(t,\cdot)dt\right|$$
$$\leq\frac{(b-a)^4}{1152}\left[\max\left\{|X''(a,\cdot)|,\left|X''\left(\frac{a+b}{2},\cdot\right)\right|\right\}+\max\left\{|X''(b,\cdot)|,\left|X''\left(\frac{a+b}{2},\cdot\right)\right|\right\}\right] \tag{4.99}$$

eşitsizliği hemen her yerde gerçekleşir.

İspat: Öncelikle

$$\int_0^{1/2} t^2\left(\frac{1}{2}-t\right)dt=\int_{1/2}^1 (1-t)^2\left(t-\frac{1}{2}\right)dt=\frac{1}{192}.$$

olduğunu belirtelim. Bu takdirde Lemma 4.4.4 ve $|X''|$ sürecinin Quasi-konveks olduğu dikkate alınırsa

$$\left|\frac{1}{6}\left[X(a,\cdot)+4X\left(\frac{a+b}{2},\cdot\right)+X(b,\cdot)\right]-\frac{1}{b-a}\int_a^b X(t,\cdot)dt\right|$$
$$\leq (b-a)^4\int_0^1 |p(t)||X'''(at+(1-t)b,\cdot)|dt$$
$$\leq\frac{(b-a)^4}{6}\left[\left(\int_0^{1/2} t^2\left|t-\frac{1}{2}\right|\max\left\{|X'''(a,\cdot)|,\left|X'''\left(\frac{a+b}{2},\cdot\right)\right|\right\}dt\right)\right.$$
$$\left.+\left(\int_{1/2}^1 (t-1)^2\left|\frac{1}{2}-t\right|\max\left\{|X'''(a,\cdot)|,\left|X'''\left(\frac{a+b}{2},\cdot\right)\right|\right\}dt\right)\right]$$
$$=\frac{(b-a)^4}{6}\max\left\{|X'''(a,\cdot)|,\left|X'''\left(\frac{a+b}{2},\cdot\right)\right|\right\}\left[\int_0^{1/2} t^2\left(\frac{1}{2}-t\right)dt\right]$$
$$+\frac{(b-a)^4}{6}\max\left\{|X'''(a,\cdot)|,\left|X'''\left(\frac{a+b}{2},\cdot\right)\right|\right\}\left[\int_{1/2}^1 (t-1)^2\left(t-\frac{1}{2}\right)dt\right]$$
$$=\frac{(b-a)^2}{1552}\left[\max\left\{|X'''(a,\cdot)|,\left|X'''\left(\frac{a+b}{2},\cdot\right)\right|\right\}+\max\left\{|X'''(a,\cdot)|,\left|X'''\left(\frac{a+b}{2},\cdot\right)\right|\right\}\right],$$

olduğu görülür.

Teorem 4.4.10 $X: I\times\Omega\to\mathbb{R}$ süreci I° da ortalama-kare türevlenebilir bir stokastik süreç ve X'' süreci $[a,b]$, $a,b\in I$, $a<b$ de ortalama-kare integrallenebilir olsun. Eğer keyfi sabit bir $s\in(0,1]$, için $|X''|$ süreci $[a,b]$, üzerinde Quasi-konveks ise

$$\left|\frac{1}{6}\left[X(a,\cdot)+4X\left(\frac{a+b}{2},\cdot\right)+X(b,\cdot)\right]-\frac{1}{b-a}\int_a^b X(t,\cdot)dt\right|$$

$$\leq \frac{(b-a)^2}{48(2^{1/p})}\left(\frac{\Gamma(p+1)\Gamma(2p+1)}{\Gamma(3p+2)}\right)^{1/p}\left[\max\left\{\left|X'''(a,\cdot)\right|^q,\left|X'''\left(\frac{a+b}{2},\cdot\right)\right|^q\right\}^{1/q}\right.$$

$$\left.+\max\left\{\left|X'''(b,\cdot)\right|^q,\left|X'''\left(\frac{a+b}{2},\cdot\right)\right|^q\right\}^{1/q}\right]$$

eşitsizliği hemen her yerde gerçekleşir.

İspat: Lemma 4.4.4 ve $|X'''|$ sürecinin Quasi-konveks olduğu dikkate alınırsa

$$\left|\frac{1}{6}\left[X(a,\cdot)+4X\left(\frac{a+b}{2},\cdot\right)+X(b,\cdot)\right]-\frac{1}{b-a}\int_a^b X(t,\cdot)dt\right|$$

$$\leq (b-a)\int_0^1 |p(t)|\left|X'''(at+(1-t)b,\cdot)\right|dt$$

$$\leq \frac{(b-a)^2}{6}\left[\left(\int_0^{1/2} t^2\left|t-\frac{1}{2}\right|dt\right)^{1/p}\left(\int_0^{1/2}\left|X'''(at+(1-t)b,\cdot)\right|^q dt\right)^{1/q}\right.$$

$$\left.+\left(\int_{1/2}^1 (t-1)^2\left|\frac{1}{2}-t\right|dt\right)^{1/p}\left(\int_{1/2}^1\left|X'''(at+(1-t)b,\cdot)\right|^q dt\right)^{1/q}\right]$$

$$\leq \frac{(b-a)^2}{6}\left[\left(\int_0^{1/2} t^2\left(\frac{1}{2}-t\right)dt\right)^{1/p}\left(\int_0^{1/2}\left|X'''(at+(1-t)b,\cdot)\right|^q dt\right)^{1/q}\right.$$

$$\left.+\left(\int_{1/2}^1 (t-1)^2\left(t-\frac{1}{2}\right)dt\right)^{1/q}\left(\int_{1/2}^1\left|X'''(at+(1-t)b,\cdot)\right|^q dt\right)^{1/q}\right],$$

olduğu görülür. Öte yandan $|X'''|$ süreci Quasi-konveks olduğundan

$$\int_0^{1/2}\left|X'''(at+(1-t)b,\cdot)\right|^q dt \leq \max\left\{\left|X'''(a,\cdot)\right|^q,\left|X'''\left(\frac{a+b}{2},\cdot\right)\right|^q\right\}, \tag{4.100}$$

$$\int_{1/2}^1\left|X'''(at+(1-t)b,\cdot)\right|^q dt \leq \max\left\{\left|X'''(b,\cdot)\right|^q,\left|X'''\left(\frac{a+b}{2},\cdot\right)\right|^q\right\}, \tag{4.101}$$

eşitsizlikleri yazılabilir. Bu nedenle $p>1$için aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\int_0^{1/2} t^2\left(\frac{1}{2}-t\right)dt=\int_{1/2}^1 (t-1)^2\left(t-\frac{1}{2}\right)dt=\frac{2^{-1-3p}\Gamma(p+1)\Gamma(2p+1)}{\Gamma(3p+2)} \tag{4.102}$$

4.5 Quasi - Konveks Stokastik Süreçler için Ostrowski Tipi Eşitsizlikler

Bu kısımda birinci türevleri belirli konvekslik varsayımlarını sağlayan mutlak sürekli stokastik süreçler için bazı Ostrowski tipi eşitsizlikler ifade edilecektir.

Teorem 4.5.1 $X: I \times \Omega \to \mathbb{R}$ **,** I da ortalama-kare türevlenebilir bir stokastik süreç olsun Ayrıca $a, b \in I$ ve $a < b$ olmak üzere X' süreci $[a, b]$ üzerinde ortalama kare integrallenebilir ve X' sınırlı yani, $\|X'\|_{\infty} := sup|X'(t,\cdot)| < \infty$ olsun. Eğer X süreci I üzerinde konkav ise, bu takdirde $\forall x \in I$ için aşağıdaki eşitsizlik hemen hemen her yerde gerçeklenir (Materano ve Ark., 2016):

$$\left|X(t,\cdot) - \frac{1}{b-a}\int_a^b X(u,\cdot)du\right| \leq \|X'\|_{\infty}(b-a)\left[\frac{1}{4} + \frac{\left(t_0 - \frac{a+b}{2}\right)^2}{(b-a)^2}\right] \qquad (4.103)$$

İspat: $X(t,\cdot)$ süreci I üzerinde ortalama-kare türevlenebilir konkav olduğundan $\forall t, y \in I$ için

$$\frac{X(t_0,\cdot) - X(t,\cdot)}{t_0 - t} \leq X'(t,\cdot)$$

ve dolayısıyla

$$X(t_0,\cdot) \leq X(t,\cdot) + (t - t_0)X'(t,\cdot)$$

yazılabilir. Eşitsizliğin her iki tarafından $[a, b]$ aralığında u ya göre integrasyon alınırsa,

$$(b-a)X(t_0,\cdot) \leq \int_a^b X(u,\cdot)\, du + \int_a^b (u - t_0)\, X'(u,\cdot)du$$

veya buna denk olarak

$$X(t_0,\cdot) - \frac{1}{b-a}\int_a^b X(u,\cdot)du \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b (u - t_0)\, X'(u,\cdot)du$$

eşitsizliği elde edilir. X' süreci sınırlı olduğundan

$$\left|X(t_0,\cdot) - \frac{1}{b-a}\int_a^b X(u,\cdot)du\right| \leq \left|\frac{1}{b-a}\int_a^b X'(u,\cdot)(u - t_0)du\right|$$

$$\leq \frac{1}{b-a}\int_a^b |X'(u,\cdot)|\, |u - t_0| du$$

$$\leq \frac{1}{b-a}\sup_{u\in(a,b)} |X'(u,\cdot)| \int_a^b (u - t_0)dt$$

$$\leq \frac{1}{b-a}\|X'\|_{\infty}\left[\int_0^{t_0} (t_0 - u)\, du + \int_{t_0}^b (u - t_0)du\right]$$

$$\leq \frac{1}{b-a}\|X'\|_\infty \left[\frac{1}{2}(t_0-a)^2+\frac{1}{2}(b-t_0)^2\right]$$

$$= \|X'\|_\infty (b-a)\left[\frac{1}{4}+\frac{\left(t_0-\frac{a+b}{2}\right)^2}{(b-a)^2}\right]$$

elde edilir ki bu da ispatı tamamlanmış olur.

Bir X stokastik sürecinin ortalama-kare integralleri ile birinci türevleri arasındaki ağırlıklı farkı veren bir diğer Ostrowski tipi eşitsizlik aşağıda verilmiştir:

Teorem 4.5.2 $X: I \times \Omega \to \mathbb{R}$, I üzerinde iki kez ortalama-kare türevlenebilir bir stokastik süreç, $a, b \in I$ ve $a < b$ olsun. Ayrıca X ve X' süreçlerinin (a, b) de konkav olduğunu varsayalım. Bu takdirde eğer

$$\|X'\|_\infty = \sup_{t\in(a,b)} |X'(t,\cdot)| < \infty \text{ ve } \|X''\|_\infty = \sup_{t\in(a,b)} |X''(t,\cdot)| < \infty$$

ise aşağıdaki eşitsizlik hemen hemen her yerde gerçekleşir:

$$\left|X'(t,\cdot)-\frac{1}{b-a}\int_a^b X(u,\cdot)du\right| \leq \left|\frac{X(b,\cdot)-X(a,\cdot)}{b-a}-X(t_0,\cdot)\right|$$

$$+\|X'\|_\infty\left[\frac{(t_0-a)^2+(b-t_0)^2}{2(b-a)}\right]+\|X''\|_\infty\left[\frac{(t-a)^2+(b-t)^2}{2(b-a)}\right], \quad (4.104)$$

burada $t_0, t \in (a, b)$ dir (Materano ve Ark., 2016).

İspat: $X, [a, b]$ de konkav ve $X', (a, b)\ de$ konkav olduğundan her $s, u \in (a, b)$ için

$$X(t_0,\cdot) \leq X(u,\cdot)+(t_0-u)X'(u,\cdot) \quad (4.105)$$

ve

$$X'(t,\cdot) \leq X'(s,\cdot)+(t-s)X''(s,\cdot) \quad (4.106)$$

eşitsizlikleri yazılabilir. (4.105)' in her iki tarafının $[a, b]$ aralığında u ya göre ve (4.106)' nın her iki tarafının $[a, b]$ aralığında s ye göre integralleri alınırsa sırasıyla

$$(b-a)X(t_0,\cdot) \leq \int_a^b X(u,\cdot)\,du+\int_a^b (t_0-u)\,X'(u,\cdot)du \quad (4.107)$$

ve

$$(b-a)X'(t,\cdot) \leq \int_a^b X'(s,\cdot)\,ds+\int_a^b (t-s)\,X''(s,\cdot)ds \quad (4.108)$$

olduğu görülür. (4.107) ve (4.108) ifadeleri taraf tarafa toplanırsa

$$(b-a)X'(t,\cdot)-\int_a^b X(u,\cdot)\,du \le X(b,\cdot)-X(a,\cdot)-(b-a)X(t_o,\cdot)$$

$$+\int_a^b (t_0-u)\,X'(u,\cdot)du+\int_a^b (t-s)\,X''(s,\cdot)ds \qquad (4.109)$$

bulunur. Böylelikle $\|X'\|_\infty=\sup_{t\in(a,b)}|X'(t,\cdot)|<\infty$ ve $\|X''\|_\infty=\sup_{t\in(a,b)}|X''(t,\cdot)|<\infty$ olup her $t,t_0\in(a,b)$ için

$$\left|X'(t,\cdot)-\frac{1}{b-a}\int_a^b X(u,\cdot)du\right| \le \left|\frac{X(b,\cdot)-X(a,\cdot)}{b-a}-X(t_0,\cdot)\right|$$

$$+\frac{1}{b-a}\int_a^b |t_0-u|\,|X'(u,\cdot)|du+\frac{1}{b-a}\int_a^b |t-s||X''(s,\cdot)|\,ds$$

$$\le \left|\frac{X(b,\cdot)-X(a,\cdot)}{b-a}-X(t_0,\cdot)\right|+\frac{\|X'\|_\infty}{b-a}\int_a^b |t_0-u|\,du+\frac{\|X''\|_\infty}{b-a}\int_a^b |t-s|\,ds$$

$$\le \left|\frac{X(b,\cdot)-X(a,\cdot)}{b-a}-X(t_0,\cdot)\right|+\|X'\|_\infty\left[\frac{(t-a)^2+(b-t)^2}{2(b-a)}\right]+\|X''\|_\infty\left[\frac{(t_0-a)^2+(b-t_0)^2}{2(b-a)}\right]$$

elde edilir ki bu da ispatı tamamlanır.

Teorem 4.5.3 $X: I\times\Omega\to \mathrm{R}$, I da ortalama-kare türevlenebilir bir stokastik süreç, X' ortalama-kare integrallenebilir, $a,b\in I$ ve $a<b$ olsun. Eğer $|X'|$ süreci $[a,b]$ aralığında Quasi–konveks ise $\forall t\in[a,b]$ için aşağıdaki eşitsizlik her zaman sağlanır (Materano ve Ark., 2016):

$$\left|X(t,\cdot)-\frac{1}{b-a}\int_a^b X(u,\cdot)du\right|$$

$$\le \frac{(b-t)^2}{2(b-a)}max\{|X'(t,\cdot)|,|X'(b,\cdot)|\}+\frac{(t-a)^2}{2(b-a)}max\{|X'(t,\cdot)|,|X'(a,\cdot)|\} \qquad (4.110)$$

İspat: $|X'|$ süreci Quasi–konveks olduğundan $\beta=\frac{b-t}{b-a}$ alınırsa

$$\left|X(t,\cdot)-\frac{1}{b-a}\int_a^b X(u,\cdot)du\right| \le (b-a)\int_0^\beta |y|\,|X'(ya+(1-y)b,\cdot)|dy$$

$$+(b-a)\int_\beta^1 |y-1||X'(ya+(1-y)b,\cdot)|\,dy$$

$$\le (b-a)\int_0^\beta y\,max\,\{|X'(a,\cdot)|,|X'(b,\cdot)|\}dy$$

$$+(b-a)\int_\beta^1 (1-y)max\{|X'(a,\cdot)|,|X'(b,\cdot)|\}dy$$

$$=\frac{1}{2}\frac{(b-t)^2}{(b-a)}max\{|X'(a,\cdot)|,|X'(b,\cdot)|\}+\frac{1}{2}\frac{(t-a)^2}{(b-a)}max\{|X'(a,\cdot)|,|X'(b,\cdot)|\}$$

olduğu görülür.

Sonuç 4.5.1 Teorem 4.5.1 deki verilere ek olarak, eğer X', $[a,b]$'de sınırlı ise, yani $|X'(t,\cdot)| \leq M, t \in [a,b,]$ olacak şekilde $M > 0$ mevcutsa, bu takdirde (4.103) eşitsizliği her zaman sağlanır (Materano ve Ark., 2016).

Sonuç 4.5.2 Teorem 4.5.3 de verilenlere ek olarak, eğer

1. X' süreci artansa

$$\left|X(t,\cdot) - \frac{1}{b-a}\int_a^b X(u,\cdot)du\right| \leq \frac{(b-t)^2}{2(b-a)}|X'(b,\cdot)| + \frac{(t-a)^2}{2(b-a)}|X'(t,\cdot)| \tag{4.111}$$

2. X' süreci azalansa

$$\left|X(t,\cdot) - \frac{1}{b-a}\int_a^b X(u,\cdot)du\right| \leq \frac{(b-t)^2}{2(b-a)}|X'(t,\cdot)| + \frac{(t-a)^2}{2(b-a)}|X'(a,\cdot)| \tag{4.112}$$

eşitsizlikleri gerçeklenir (Materano ve Ark., 2016).

Sonuç 4.5.3 Teorem 4.5.3' de eğer $t = \frac{a+b}{2}$ seçilirse bu takdirde

$$\left|X\left(\frac{a+b}{2},\cdot\right) - \frac{1}{b-a}\int_a^b X(u,\cdot)du\right|$$

$$\leq \frac{(b-a)}{8}\left[max\left\{\left|X'\left(\frac{a+b}{2},\cdot\right)\right|, |X'(b,\cdot)|\right\} + max\left\{\left|X'\left(\frac{a+b}{2},\cdot\right)\right|, |X'(a,\cdot)|\right\}\right]$$

eşitsizliği sağlanır. Bu nedenle

1. Eğer $|X'|$ süreci artansa

$$\left|X\left(\frac{a+b}{2},\cdot\right) - \frac{1}{b-a}\int_a^b X(u,\cdot)du\right| \leq \frac{b-a}{8}\left[|X'(b,\cdot)| + \left|X'\left(\frac{a+b}{2},\cdot\right)\right|\right] \tag{4.113}$$

2. Eğer $|X'|$ süreci azalansa

$$\left|X\left(\frac{a+b}{2},\cdot\right) - \frac{1}{b-a}\int_a^b X(u,\cdot)du\right| \leq \frac{b-a}{8}\left[|X'(a,\cdot)| + \left|X'\left(\frac{a+b}{2},\cdot\right)\right|\right] \tag{4.114}$$

olacaktır (Materano ve Ark., 2016).

Quasi–konveks stokastik süreçlerin kuvvetleri için karşılık gelen uyarlama aşağıdaki sonuçta elde edilmiştir:

Teorem 4.5.4 $X: I \times \Omega \to \mathrm{R}$, I da ortalama-kare türevlenebilir bir stokastik süreç, X' ortalama-kare integrallenebilir, $a, b \in I$ ve $a < b$ olsun. Eğer $|X'|, [a,b]$ aralığında Quasi–konveks ise $\forall t \in [a,b]$, $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$ için

$$\left|X(t,\cdot)-\frac{1}{b-a}\int_a^b X(u,\cdot)du\right| \le \left(\frac{(b-t)^{p+1}}{(b-a)(p+1)}\right)^{\frac{1}{p}}\left[max\{|X'(t,\cdot)|^q,|X'(b,\cdot)|^q\}\right]^{1/q}$$

$$+\left(\frac{(t-a)^{p+1}}{(b-a)(p+1)}\right)^{\frac{1}{p}}\left[max\{|X'(t,\cdot)|^q,|X'(a,\cdot)|^q\}\right]^{1/q} \qquad (4.115)$$

dir (Materano ve Ark., 2016)

İspat: $p>1$ olduğunu varsayalım. Bu takdirde Hölder eşitsizliği ve $\beta=\frac{b-t}{b-a}$ olduğu dikkate alınırsa

$$\left|X(t,\cdot)-\frac{1}{b-a}\int_a^b X(u,\cdot)du\right| \le (b-a)\int_0^\beta |y|\,|X'(ya+(1-y)b,\cdot)|dy$$

$$+(b-a)\int_\beta^1 |y-1|\,|X'(ya+(1-y)b,\cdot)|dy$$

$$\le (b-a)\left(\int_0^\beta |y|^p dy\right)^{1/p}\left(\int_0^\beta |X'(ya+(1-y)b,\cdot)|^q\,dy\right)^{1/q}$$

$$+(b-a)\left(\int_\beta^1 (1-y)^p dy\right)^{1/p}\left(\int_\beta^1 |X'(ya+(1-y)b,\cdot)|^q dy\right)^{1/q}$$

$$=\frac{(b-a)}{(p+1)^{\frac{1}{p}}}\left(\frac{(b-t)^{p+1}}{(b-a)^p(b-a)}\right)^{1/p}\left[max\{|X'(t,\cdot)|^q,|X'(b,\cdot)|^q\}\right]^{1/q}$$

$$+(b-a)\left(\frac{1}{p+1}\gamma^{p+1}\right)^{1/p}\left[max\{|X'(t,\cdot)|^q,|X'(a,\cdot)|^q\}\right]^{1/q}$$

$$=\frac{(b-t)^{\frac{p+1}{p}}}{(p+1)^{\frac{1}{p}}(b-a)^{\frac{1}{p}}}\left[max\{|X'(t,\cdot)|^q,|X'(b,\cdot)|^q\}\right]^{1/q}$$

$$+\frac{(t-a)^{\frac{p+1}{p}}}{(p+1)^{\frac{1}{p}}(b-a)^{\frac{1}{p}}}\left[max\{|X'(t,\cdot)|^q,|X'(a,\cdot)|^q\}\right]^{1/q}$$

olduğu görülür ve böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 4.5.4 Teorem 4.5.4 de verilenlere ek olarak eğer $|X'|$ süreci artansa

$$\left|X(t,\cdot)-\frac{1}{b-a}\int_a^b X(u,\cdot)du\right| \le \frac{1}{(p+1)^{\frac{1}{p}}(b-a)^{\frac{1}{p}}}\left[(b-t)^{\frac{p+1}{p}}|X'(b,\cdot)|+(t-a)^{\frac{p+1}{p}}|X'(t,\cdot)|\right]$$

ve $|X'|$ süreci azalansa

$$\left|X(t,\cdot)-\frac{1}{b-a}\int_a^b X(u,\cdot)du\right| \le \frac{1}{(p+1)^{\frac{1}{p}}(b-a)^{\frac{1}{p}}}\left[(b-a)^{\frac{p+1}{p}}|X'(t,\cdot)|+(t-a)^{\frac{p+1}{p}}|X'(a,\cdot)|\right]$$

eşitsizlikleri sağlanır (Materano ve Ark., 2016).

Sonuç 4.5.5 Teorem 4.5.4 de eğer $t=\frac{a+b}{2}$ seçilirse

$$\left|X\left(\frac{a+b}{2},\cdot\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b X(u,\cdot)du\right| \le \frac{(b-a)}{2^{1/p}(p+1)^{1/p}}$$

$$\left[max\left\{\left|X'\left(\frac{a+b}{2},\cdot\right)\right|^q,|X'(b,\cdot)|^q+\right\}^{1/q}+\ max\left\{\left|X'\left(\frac{a+b}{2},\cdot\right)\right|^q,|X'(a,\cdot)|^q+\right\}^{1/q}\right]$$

eşitsizliği sağlanır. Bu nedenle

1. Eğer $|X'|$ süreci artıyorsa

$$\left|X\left(\frac{a+b}{2},\cdot\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b X(u,\cdot)du\right| \le \frac{(b-a)}{2^{1/p}(p+1)^{1/p}}\left[|X'(b,\cdot)|+\left|X'\left(\frac{a+b}{2},\cdot\right)\right|\right] \quad (4.116)$$

2. Eğer $|X'|$ azalıyorsa

$$\left|X\left(\frac{a+b}{2},\cdot\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b X(u,\cdot)du\right| \le \frac{(b-a)}{2^{1/p}(p+1)^{1/p}}\left[|X'(a,\cdot)|+\left|X'\left(\frac{a+b}{2},\cdot\right)\right|\right] \quad (4.117)$$

olacaktır (Materano ve Ark., 2016).

Teorem 4.5.5 $X: I\times\Omega\to\mathbb{R}$, I aralığında ortalama-kare türevlenebilir bir stokastik süreç, X' ortalama-kare integrallenebilir, $a,b\in I$ ve $a<b$ olsun. Eğer $|X'|^q$, $[a,b]$'de bir Quasi–konveks stokastik süreç, $q\ge 1$ ve $|X'(x,\cdot)|\le M,\ x\in[a,b]$ ise bu takdirde $\forall t\in[a,b]$ içn aşağıdaki eşitsizlik her zaman sağlanır (Materano ve Ark., 2016):

$$\left|X(t,\cdot)-\frac{1}{b-a}\int_a^b X(u,\cdot)du\right| \le \frac{(t-a)^2}{2(b-a)}\left(max\{|X'(t,\cdot)|^q,|X'(a,\cdot)|^q\}\right)^{1/q}$$

$$+\frac{(b-t)^2}{2(b-a)}\left(max\{|X'(t,\cdot)|^q,|X'(b,\cdot)|^q\}\right)^{1/q} \quad (4.118)$$

İspat: $q\ge 1$ kabul edelim. Bu takdirde Power - Mean eşitsizliği ve $\beta=\frac{b-t}{b-a}$ ifadesi dikkate alınırsa

$$\left|X(t,\cdot)-\frac{1}{b-a}\int_a^b X(u,\cdot)du\right| \le (b-a)\int_0^\beta y\left|X'^{(ya+(1-y)b,\cdot)}\right|dy$$

$$+(b-a)\int_\beta^1|y-1|\,|X'(ya+(1-y)b,\cdot)|dy$$

$$\leq (b-a)\left(\int_0^\beta y dy\right)^{1-1/p}\left(\int_0^\beta y|X'(ya+(1-y)b,\cdot)|^q\,dy\right)^{1/q}$$

$$+(b-a)\left(\int_\beta^1 y dy\right)^{1-1/q}\left(\int_\beta^1 y|X'(ya+(1-y)b,\cdot)|^q dy\right)^{1/q}$$

olduğu görülür. Öte yandan $|X'|^q$ bir Quasi–konveks olduğundan

$$\int_0^\beta y|X(ya+(1-y)b,\cdot)|^q dy \leq \int_0^\beta y\, max\,\{|X'(t,\cdot)|^q,|X'(b,\cdot)|^q\}dy$$

$$=\frac{(b-t)^2}{2(b-a)^2}max\{|X'(t,\cdot)|^q,|X'(b,\cdot)|^q\}$$

ve

$$\int_0^\beta(1-y)\,|X(ya+(1-y)b,\cdot)|^q dy \leq \int_0^\beta(1-y)max\{|X'(a,\cdot)|^q,|X'(t,\cdot)|^q\}\,dy$$

$$=\frac{(t-a)^2}{2(b-a)^2}max\{|X'(a,\cdot)|^q,|X'(t,\cdot)|^q\}$$

eşitsizlikleri yazılabilir. Bu nedenle

$$\left|X(t,\cdot)-\frac{1}{b-a}\int_a^b X(u,\cdot)du\right| \leq \frac{(t-a)^2}{2(b-a)}(max\{|X'(t,\cdot)|^q,|X'(a,\cdot)|^q\})^{1/q}$$

$$+\frac{(b-t)^2}{2(b-a)}(max\{|X'(t,\cdot)|^q,|X'(b,\cdot)|^q\})^{1/q}$$

elde edilir ve böylece de istenen sonuç bulunmuş olur.

Sonuç 4.5.6 Teorem 4.5.5' te eğer

1. $|X'|$ artıyorsa bu takdirde (4.113) eşitsizliği her zaman sağlanır.

2. $|X'|$ azalıyorsa bu takdirde (4.114) eşitsizliği her zaman sağlanır.

Sonuç 4.5.7 Teorem 4.5.5' te eğer $t=\frac{a+b}{2}$ seçilirse

$$\left|X\left(\frac{a+b}{2},\cdot\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b X(u,\cdot)du\right| \leq$$

$$\frac{(b-a)}{8}\left[\left(max\left\{\left|X'\left(\frac{a+b}{2},\cdot\right)\right|^q,|X'(b,\cdot)|^q\right\}\right)^{1/q}+\left(max\left\{\left|X'\left(\frac{a+b}{2},\cdot\right)\right|^q,|X'(a,\cdot)|^q\right\}\right)^{1/q}\right]$$

elde edilir. Bu durumda

1. $|X'|$ artıyorsa bu takdirde (4.116) eşitsizliği her zaman sağlanır.

2. $|X'|$ azalıyorsa bu takdirde (4.117) eşitsizliği her zaman sağlanır.

5. SONUÇ ve ÖNERİLER

Bu tezde konveks fonksiyonlar için verilen eşitsizliklerden yola çıkarak aynı eşitsizliklerin stokastik süreçler için de sağlanıp sağlanmadığına yer verilmiştir. Ayrıca konveks, Jensen konveks, güçlü konveks, Log-konveks, güçlü log-konveks, birinci ve ikinci anlamda s-konveks, harmonik konveks ve Quasi-konveks fonksiyon ve stokastik süreç kavramları tanıtılmıştır. Quasi-konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard, Ostrowski ve Grüss tipi bazı integral eşitsizliklerinin sağlandığı gösterilmiştir. Ayrıca buna paralel olarak Quasi-konveks stokastik süreçler için Hermite-Hadamard, Ostrowski ve Simpson tipi bazı eşitsizlikler elde edilmiştir.

Bu çalışmada elde edilen sonuçlardan yola çıkarak koordinatlarda konveks, $(\alpha, m)-$konveks, $(h_1, h_2)-$ konveks $(h_1, h_2, m)-$ konveks ve benzeri tipten konveks fonsksiyonlar için sağlanan eşitsizliklerin aynı tipten stokastik süreçler için sağlanıp sağlanmadığı araştırılabilir.

6. KAYNAKLAR

Adams R.A. and C. Essex, C. (2010). Calculus A Complete Course, Pearson Canada Inc. Toronto, Ontario.

Alomari, M., Darus, M. And Dragomir, S.S. (2010). New inequalities of Hermite-Hadamard type for functions whose second derivatives absolute value are Quasi-convex, Tamking Journal on Math. 41(4):353-359

Azocar, A., Gimenez J., Nikodem, K. and Sanchez, J. L. (2011). On strongly midconvex funtions, Opuscula Math., 31(1), 15-26.

Azpeitia, A.G. (1994). Convex functions and the Hadamard inequality, Rev. Colombiana Mat., 28, 7-12.

Bagdasar, O. (2006). Inequalities and Applications, Bachelor's Degree Thesis, Babeş Bolyai University, Cluj Napoca.

Bayraktar, M., (2000). Fonksiyonel Analiz, ISBN: 975-442-035-1.

Bayraktar, M., (2010). Analiz, ISBN: 978-605-395-412-5.

Dragomir, S.S. (1992). Two functions in connection to Hadamard's inequalities, J. Math. Anal. Appl., 167, 49–56.

Dragomir, S.S. (1994). Some remarks on Hadamard's inequalities for convex functions, Extracta Math. 9 (2), 88–94.

Dragomir, S.S. (2001). Refinements of the Hermite-Hadamard integral inequality for log convex functions, The Australian Math. Soc. Gazette, 28(3), 129-133.

Dragomir, S.S. and Pearce, C.E.M. 1998. Pearce, Quasi-convex functions and Hadamard's inequality, Bull. Austral. Math. Soc., 57 (1998), 377-385.

Dragomir, S.S. and Pearce, C.E.M. (2000). Selected Topics on Hermite-Hadamard Type Inequalities and Applications, RGMIA, Monographs, Victoria University.

Dragomir, S. S., Pecaric, J. and Persson, L. E. (1995). Some inequalities of Hadamard type, Soochow Journal of Mathematics, 21, 335-341.

Cortez, M. V. and Garcia, C. (2017). Ostrowski type inequalities for functions whose derivatives are $(m, h_1, h_2) -$ Convex, Appl. Math. Inf. Sci., 11(1), 79-86.

Ekinci, A. (2014). Klasik Eşitsizlikler Yoluyla Konveks Fonksiyonlar için Integral Eşitsizlikler, Doktora Tezi, Atatürk Üniversitesi, Erzurum.

Gonzales,L., Materano, J. and Lopez, M.V., (2015). Some estimates on the Hermite-Hadamard inequality through convex and Quasi-convex stochastic processes, Mathematica Aeterna, 5(5), 745-767.

Hardy, G., Littlewood, J.E. and Polya, G. (1952). Inequalities, 2nd Ed., Cambridge Univ. Press.

Hwang, D-Y. (2011). Some inequalities for differentiable convex mapping with application to weighted trapezoidal formula and higher moments of random variables, Applied Mathematics and Computation, 217, 9598-9605.

Hwang, D.Y. and Dragomir, S.S. (2014). Comparing two integral means for absolutely continuous functions whose absolute value of the derivative are convex and applications, Applied Mathematics and Computation, 230, 259-266.

Ion, D. A. (2007). Some estimates on the Hermite-Hadamard inequality through quasi-convex functions, Annals of University of CraiovaMath. Comp. vol. 34, 82-87.

Jeffrey, A. and Dai, H.H. (2008). Handbook of Mathematical Formulas and Integrals, Elsevier Inc. 4. Edition, 589, UK.

Kadıoğlu, E. ve Kamali, M. (2013). Genel Matematik, ISBN: 978-975-8151-57-8.

Kırmacı, U.S., (2004). Inequalities for differentiable mappings and applications to specials means of real numbers and to midpoint formula, Applied Math. and Computations, 147, 137-146.

Kilbas, A. A., Srivastava, H. M. and Trujillo J. J. (2006). Theory and applications of fractional differential equations. Elsevier, Amsterdam.

Kotrys, D., (2012a). Hermite - Hadamart inequality for convex stochastic processes, Aequationes Math., 83, 143-151.

Kotrys, D., (2012b). Remarks on strongly convex stochastic processes, Aequationes Math., 86, 143-151.

Kotrys, D., (2014). Some characterizations of strongly convex stochastic processes, Mathe. Aeterna, 4(8), 855-861.

Kotrys, D., (2015). Remarks on Jensen, Hermite-Hadamard and Fejer inequalities for strongly convex stochastic processes, Math. Aeterna, 5(1), 95-104.

Kuczma, M. (1985). An Introduction to the Theory of Funtional Equations and Inequalities, Cauchy’s Equation and Jensen’s Inequality, PWN-Uniwersytet Slaski, Warszawa-Krakow-Katowice.

Kuhn, N. (1984). A note on t-convex functions, In General inequalities 4. International Schriftenreihe Numerical Mathematics, Birkhauser, Basel, 71, 269-276.

Maden, S. (2013). Olasılığa Giriş, Seçkin Yayıncılık, ISBN: 978-975-02-2413-3.

Maden, S. Tomar, M. and Set, E. (2015). Hermite-Hadamard type inequalities for s-convex stochastic processes in the first sense, Pure and Applied Mathematics Letters: 1-7.

Materano, J., Merentes, N. and Lopez, M.V. (2016). On Ostrowski’s type inequalities via convex, s-convex and Quasi-convex stochastic processes, Mathematica Aeterna, 6(1), 47-85.

Mitrinoviç, D.S. (1970). Analytic Inequalities, Springer-Verlag, Berlin.

Mitrinoviç, D.S., Pecaric, J.E. and Fink, A.M. (1993). Classical and New Inequalities in Analysis, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Niculescu, C. P. (2003). Convexity according to means, Math. Inequal. Appl. 6 (4), 571–579.

Niculescu, C.P. and Persson, L.E. (2005). Convex Functions and Their Applications, Springer, Berlin.

Niculescu, C.P. and Persson, L.E. (2006). Convex Functions and Their Applications, A Contemporary Approach, Springer Science Business Media Inc.

Nikodem, K. (1980). On convex stochastic processes, Aequationes Mathematicae, 20, 184-197.

Okur, N., İşcan, İ. And Dizdar, E.Y. (2018). Hermite-Hadamard Type Inequalities for Harmonically Convex Stochastic Processes. International Journal of Economic and Administrative Studies, 281-292.

Özdemir, M.E. (2000). A theorem on mappings with bounded derivatives with applications to quadrature rules and means, Appl. Math. Lett., 13, 19–25.

Özdemir, M. E., Yıldız, C. (2013). The Hadamard's inequality for quasiconvex functions via fractional integrals, Annals of the University of Craiova, Mathematics and Computer Science Series Volume 40(2), 167-173.

Pecaric, L., Proschan, F. and Tong, Y.L. (1992). Convex Functions, Partial Orderings and Statistical Applications, Academic Press, Inc.

Prudnikov, A. P., Brychkov, Y. A., Marichev, O. J. (1981). Integral and series, Elementary Functions, Vol. 1, Nauka, Moscow.

Roberts, A.W. and Varberg, D.E. (1973). Convex Functions, Academic Press, New York.

Set, E. (2010). Bazı Farklı Türden Konveks Fonksiyonlar İçin İntegral Eşitsizlikleri, Doktora Tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Atatürk Üniversitesi, Erzurum.

Set, E., Tomar, M. and Maden, S. (2014). Hermite-Hadamard type inequalities for s-convex stochastic processes in the second sense, Turkish Journal of Analysis and Number Theory, 2(6), 202-207.

Set, E., Sarıkaya, M.Z. and Tomar, M. (2015). Hermite-Hadamard type inequalities for coordinates convex stochastic processes, Mathematica Aeterna, 5(2), 363-382.

Shi, D.P., Xi, B.Y. and Qi, F. (2014). Hermite - Hadamard type inequalities for $(m, h_1, h_2)-$ Convex fonctions via Riemann-Liouville integrals, Turkish Journal of Analysis and Number Theory, 2(1), 23-28.

Shynk, J.J. (2013). Probability, Random Variables, and Random Processes: Theory and Signal Processing Applications, Wiley.

Skowronski, A. (1992). On some Properties of J-convex stochastic processes, Aequationes Math., 44, 249-258.

Skowronski, A. (1995). On wright-convex stochastic processes, Annales Mathematicae Silesianne, 9, 29-32.

Tomar, M., Set, E. and Maden, S. (2015). Hermite-Hadamard type inequalities for log-convex stochastic processes, New Theory, 2, 23-32.

Tunç, M. (2011). Bazı Konveks Fonksiyonlar İçin Hermite-Hadaamard Tipli Eşitsizlikler ve Uygulamaları, Doktora Tezi, Atatürk Üniversitesi, Erzurum.

Tunç, M. (2013). Ostrowski-type inequalities via h-convex functions with applications to special means, Journal Inequal. Appl., 326, 1-10.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Şule ŞADİ

Doğum Yeri : Fatsa/ORDU

Doğum Tarihi : 11.11.1989

Yabancı Dili : İngilizce

E-mail : sulesadi@gmail.com

İletişim Bilgileri : Ordu Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi

Öğrenim Durumu :

Derece	**Bölüm/ Program**	**Üniversite**	**Yıl**
Lisans	Matematik Öğretmenliği	Ondokuz Mayıs Üniversitesi	2012

İş Deneyimi:

Görev	**Görev Yeri**	**Yıl**
Öğretmen	Bayburt İmam Hatip Lisesi / BAYBURT	2013-2015
Öğretmen	Halil Gürel Anadolu Lisesi / Görele / GİRESUN	2015-2016
Öğretmen	Aybastı Fen Lisesi / Aybastı / ORDU	2016-….