T. C.

ORDU ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İDEMPOTENT MATRİSLER İÇİN BAZI RANK EŞİTLİKLERİ VE ÇEŞİTLİ UYGULAMALARI

SEMANUR GÜNEY

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ORDU 2020

TEZ BİLDİRİMİ

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan ve kullanılan intihal tespit programının sonuçlarına göre; bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

SEMANUR GÜNEY

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

İDEMPOTENT MATRİSLER İÇİN BAZI RANK EŞİTLİKLERİ VE ÇEŞİTLİ UYGULAMALARI

SEMANUR GÜNEY

ORDU ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ, 65 SAYFA

TEZ DANIŞMANI: PROF. DR. SELAHATTİN MADEN

Bu tez çalışması beş bölüm halinde düzenlenmiştir. Birinci bölümde çalışmanın amacından bahsedilerek bir giriş verilmiştir. İkinci bölümde çalışmamızda gerekli olacak temel tanım ve teoremler ifade edilmiştir. Üçüncü bölümde idempotent matrisler ele alınarak bu matrisler için çeşitli rank formülleri elde edilmiştir. İki idempotent matrisin toplam ve farkı için bazı rank formülleri verilmiş, involüt matrislerle ilgili çeşitli rank eşitlikleri sunulmuştur. Ayrıca bir idempotent matrisin rankı ve izi arasındaki ilişki ele alınmıştır. Dördüncü bölümde sonuç ve öneriler verilmiş ve beşinci bölümde ise tezde yararlanılan kaynaklar listelenmiştir.

Anahtar Sözcükler: Matris, Kare Matris, Nonsingüler Matris, İdempotent Matris, Determinant, Bir Matrisin Tersi, Bir Matrisin Sıfır Uzayı, Matris İzdüşümü, Rank.

ABSTRACT

SOME RANK EQUALITIES FOR IDEMPOTENT MATRICES AND ITS SEVERAL APPLICATIONS

SEMANUR GÜNEY

ORDU UNIVERSITY INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

MATHEMATICS

MASTER THESIS, 65 PAGES

SUPERVISOR: PROF. DR. SELAHATTİN MADEN

This thesis consists of five chapters. In the first chapter, it is given an introduction and the aim of the thesis. In the second chapter, basic definitions and theorems in this thesis stated and proved. In the third chapter, idempotent matrices are considered and some rank formulae for these matrices ate obtained. It is given some rank equalities for involute matrices. Also, some relationships between rank and trace of an idempotent matrix are considered in this chapter. In the fourth chapter, it is given some results and propositions and references that used in this thesis are listed in fifth chapter.

Keywords: Matrix, Square Matrix, Singular Matrix, Idempotent Matrix, Determinant, Inverse of a Matrix, Null Space of a Matrix, Matrix Projection, Rank.

TEŞEKKÜR

Tez konusunun belirlenmesi ve çalışmalarım boyunca her zaman engin bilgi ve deneyimleriyle yolumu aydınlatan danışman hocam Sayın Prof. Dr. Selahattin MADEN’ e içten teşekkür eder, saygılarımı sunarım.

Hem bu zorlu ve uzun süreçte hem de hayatım boyunca yanımda olan ve ideallerimi gerçekleştirmemi sağlayan değerli aileme yürekten teşekkürü bir borç bilirim.

Ayrıca Lisansüstü eğitimim sırasında kendilerinden ders aldığım ve engin tecrübelerinden yararlandığım Ordu Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümündeki tüm değerli hocalarıma teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa
TEZ BİLDİRİMİ I
ÖZET …….. II
ABSTRACT.. III
TEŞEKKÜR IV
İÇİNDEKİLER V
SİMGELER ve KISALTMALAR LİSTESİ VI
1. GİRİŞ … 1
2. GENEL BİLGİLER.. 3
2.1 Temel Kavramlar 3
2.2 Genelleştirilmiş İnversler 12
3. İDEMPOTENT MATRİSLER İÇİN BAZI RANK EŞİTLİKLERİ 15
3.1 İki İdempotent Matrisin Toplamı İçin Rank Eşitlikleri 15
3.2 İki İdempotent Matrisin Farkı İçin Rank Eşitlikleri 30
3.3 İnvolüt Matrisler İçin Rank Eşitlikleri ……………………………………… 41
3.4 Bir İdempotent Matrisin Rankı ve İzi Arasındaki Eşitlikler 45
3.5 İdempotent Matrisler İçin Yeni Bir Rank Formülü 50
4. SONUÇ ve ÖNERİLER 54
5. KAYNAKLAR 55
ÖZGEÇMİŞ 57

SİMGELER ve KISALTMALAR LİSTESİ

$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{K}$	: K cismi
$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{K}_{\boldsymbol{n}}^{\boldsymbol{m}}$	: $\mathbb{K}$ cismi üzerinde tanımlı $m \times n$ tipindeki tüm matrislerin kümesi
$\mathbb{C}_{\boldsymbol{n}}^{\boldsymbol{m}}$ **veya** $\mathbb{C}_{\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}}$	: $\mathbb{C}$ üzerinde tanımlı $m \times n$ tipindeki tüm matrislerin kümesi
$\boldsymbol{I}_{\boldsymbol{n}}$	: $n \times n$ tipindeki birim matris
$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$	: A matrisinin transpozu
$\overline{\boldsymbol{A}}$	: A matrisinin eşlenik matrisi (eş matrisi)
$\boldsymbol{A}^{*}$	: A matrisinin eşlenik transpoz matrisi (Hermitian matrisi)
$\lvert\boldsymbol{A}\rvert$	: A matrisinin determinantı
$\mathbf{Ek}(\boldsymbol{A})$	: A matrisinin ek matrisi
$\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{ij}}$	: A matrisinin bir a_{ij} elemanının kofaktörü
$\boldsymbol{A}^{-\mathbf{1}}$	: A matrisinin inversi
$\mathbf{indeks}(\boldsymbol{A})$	: A matrisinin indeksi
$\boldsymbol{r}(\boldsymbol{A})$	: A matrisinin rankı
$\boldsymbol{tr}(\boldsymbol{A})$	: A matrisinin izi
$\boldsymbol{\mathcal{N}}(\boldsymbol{A})$	: A matrisinin null (sıfır) uzayı
$\boldsymbol{\mathcal{R}}(\boldsymbol{A})$	: A matrisinin ranj (sütun) uzayı
$\boldsymbol{A}^{-}$ **veya** $\boldsymbol{A}^{(\mathbf{1})}$	: A matrisinin genelleştirilmiş inversi (iç inversi)
$\boldsymbol{A}^{(\mathbf{2})}$	: A matrisinin dış inversi
$\boldsymbol{A}_{\mathbf{0}}$ **veya** $\boldsymbol{A}^{(\mathbf{1},\mathbf{2})}$	: A matrisinin yansımalı genelleştirilmiş inversi
$\boldsymbol{A}^{\dagger}$ **veya** $\boldsymbol{A}^{+}$	: A matrisinin Moore–Penrose tipi genelleştirilmiş inversi
$\mathbf{k\ddot{o}\c{s}}(\boldsymbol{A})$	: A matrisinin köşegen elemanları
$\bigoplus$	: Direkt toplam

1. GİRİŞ

Günümüzde matris teorisi, teorik matematik, istatistik, sosyoloji, kimya, fizik eğitimi ve elektrik mühendisliği gibi çeşitli teknik alanlar içinde gerekli matematiksel temel bilginin ayrılmaz bir parçası haline gelmiştir. Matris hesabı, 19. yüzyıl ortalarından beri bilinmektedir. İngiliz matematikçi Sylvester, 1850 yılında 'matris' kavramını kullanmıştır. 1853 yılında İngiliz bilgini Hamilton '*Lineer and Vector Functions*' isimli eserinde matrislerin bazı özelliklerinden faydalanmış fakat matris ismini henüz kullanmamıştır. Yine bir İngiliz matematikçisi olan Cavley, 1858 yılında zamanında çok meşhur olan '*Memorie on the Theory of Matrices*' isimli çalışmasında matris cebirinin temel esaslarını ortaya koymuştur. Daha sonraları Fransız Laguerre ve Alman Frobenius matrislerle ilgili yeni kavram ve teoremler üzerinde çalışmışlardır.

Bir singüler matrisin inversi fikri ilk defa 1920 yılında Moore (1920, 1935) tarafından ortaya atılmıştır. Ancak, daha sonra 1955 yılına kadar bu konuda herhangi bir sistematik çalışmaya rastlanamamaktadır. 1955 yılında, önceki çalışmalardan habersiz olarak, Penrose (1955, 1956) biraz farklı bir yoldan Moore tarafından verilen invers kavramını tekrar tanımlamıştır. Penrose ile aynı zamanlarda yaşayan bilim adamlarından birisi olan Rao (1965) tarafından geliştirilen Pseuda invers, Moore ve Penrose tarafından ortaya konulan kısıtların tümünü sağlamamaktadır. Bu nedenle bu invers, Moore–Penrose inversten farklıdır. Rao, daha sonraki çalışmalarında, lineer denklemlerle ilgili problemlerinin çözümünde yeterli olacak ve Moore ve Penrose' un vermiş olduğu tanımdan daha zayıf bir tanım ortaya koymuştur. Böyle bir invers, bir genelleştirilmiş invers (g–invers) olarak adlandırılmış ve bunun uygulamaları Rao (1965)' nun birçok çalışmasında yer almıştır. Genelleştirilmiş inverslerle ilgili sistematik gelişmeler ve onların çeşitli uygulamaları *Generalized Inverse of Matrices and Its Applications* (Wiley, 1971) adlı kitapta verilmiştir.

Matrisler üzerine yapılan bu çalışmada J.J. Koliha, V. Rakoceviç ve I. Staskraba tarafından yapılan çalışmalarda ele alınan İdempotent Matrisler ve İzdüşüm Matrisleri detaylı bir biçimde ele alınmıştır. Ayrıca kompleks alan üzerinde tanımlanan idempotent matrislerin sıfırlılık derecesinin ne anlama geldiği verilmiş, A ve B gibi iki idempotent matris verildiğinde bu matrislerin bir lineer kombinasyonun da hangi durumlarda idempotent olacağı verilmiştir.

İdempotent matrislerin ve bunların uygulamalarının araştırılmasında, çoğu kez idempotent matrislerden oluşan çeşitli matris ifadeleriyle karşılaşır. Örneğin P ve Q iki idempotent matris olmak üzere $PQ, P+Q,\ \lambda_1 P+\lambda_2 Q,\ PA-AQ,\ I_m-PQ,$ $PQ \pm QP, (PQ)^2-PQ,\ AA^{+} \pm A^{+}A,\ AA^{-} \pm B^{-}B$ matrisleri göz önüne alınabilir. Öte yandan, $P_1, P_2, \dots, P_k$ idempotent matrisler olmak üzere $A=P_1+P_2,\ A=P_1P_2+P_2P_1,\ A=P_1 \dots P_k$; matris parçalanışları da dikkate alınabilir. Bu gibi durumlarda, bu matris ifadelerinin bazı elementer özelliklerinin yani sıra bu matris ifadeleri arasındaki ilişkileri vermekte ilgi çekicidir.

Bu problemler araştırılırken, matris rankının idempotent matrislerden oluşan matris ifadeleriyle başa çıkmak için çok zengin bir teknik olduğunu belirtelim.Bir matrisin rankı, matrisler için elementer matris işlemleri ve benzerlik dönüşümleri gibi bazı temel işlemler altında değişmez.

Matris rankı hakkında iyi bilinen bir gerçek şudur: aynı mertebeden iki A ve B matrisinin benzer, yani $UAV=B$ olacak şekilde iki tersinir matris U ve V matrisinin mevcut olması için gerek ve yeter şart $r(A)=r(B)$ olmasıdır. Bir matrisin sütunlarının veya sıralarının doğrusal bağımsızlığını belirlemek için en basit yöntem, matrisin elementer matris işlemleri ile satır veya sütun eşelon formlarına indirgenmesidir.

Teorik olarak, idempotent matrislerden oluşan herhangi bir matris ifadesi için, bu ifade ile ilişkili bazı rank eşitlikleri kurulabilir. Bu rank eşitliklerinden, bu ifadenin bazı temel özellikler elde edilebilir. Rank formülleri, çeşitli blok matrisler ve elementer blok matris işlemleri ile oluşturulabilir. Bazı bilinen sonuçlar aşağıda verilmiştir:

$$r\begin{bmatrix} I_m & A \\ B & I_n \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} I_m & 0 \\ 0 & I_n - BA \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} I_m - AB & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix},$$

$$r\begin{bmatrix} I_m & I_m - AB \\ B & 0 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} I_m & 0 \\ 0 & B - BAB \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} 0 & I_m - AB \\ B & 0 \end{bmatrix},$$

$$r\begin{bmatrix} A & AB \\ BA & B \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B - BAB \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} A - ABA & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}.$$

Son yıllarda, bu yöntemle birçok yeni ve önemli rank eşitlikleri elde edilmiş ve bu rank eşitliklerinden birçok sonuç çıkarılmıştır.

2. GENEL BİLGİLER

2.1 Temel Kavramlar

Tanım 2.1 Bir K cismi üzerinde n bilinmeyenli m tane lineer denklemin sistemi, genel olarak,

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \,, 1 \leq i \leq m$$

biçiminde tanımlanır, burada x_j, $1 \leq j \leq n$, ler bilinmeyenleri, a_{ij}, $1 \leq i \leq m$ ler $m.n$ tane katsayıları ve b_i ler de bilinen sayıları göstermektedir. (2.1.1) sistemi açık biçimde yazılırsa

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_n$$

elde edilir. Bu denklem matris formatında yazılınca

$$\begin{bmatrix} a_{12}, a_{12} \ldots . a_{1n} \\ a_{21}, a_{22} \ldots . a_{2n} \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ a_{m1}, a_{m2} \ldots . a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

şeklindedir (Hacısalihoğlu, 1977).

Tanım 2.2 i) $\mathbb{K}$ bir cisim olsun. $m, n \in \mathbb{N}$ ve $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ olmak üzere bütün (i, j) sıralı ikililerinin kümesi $A = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ olsun. $f: A \longrightarrow \mathbb{K}$ fonksiyonu

$$(i, j) \longrightarrow f(i, j) = a_{ij}$$

olarak tanımlansın. $a_{ij} \in \mathbb{K}$ olacak şekilde seçilen $m.n$ tane elemanın oluşturduğu sayı tablosuna $\mathbb{K}$ cismi üzerinde tanımlı $m \times n$ tipinde bir matris denir.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

matrisi kısaca $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ şeklinde gösterilir. Her bir (i, j), $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ ikilisine karşılık gelen a_{ij} elemanına A matrisinin (i, j)–yinci bileşeni denir.

ii) $m \times n$ tipinde olan ve bileşenleri bir $\mathbb{K}$ cismi üzerinden seçilen bütün $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ matrislerinin kümesi $\mathbb{K}_n^m$ veya $\mathbb{K}^{m \times n}$ ile gösterilir.

iii) $A = [a_{ij}]$ ve $B = [b_{ij}]$ $m \times n$ tipinde iki matris olmak üzere, eğer her (i, j) için $a_{ij} = b_{ij}$, $1 \leq i \leq m$ ve $1 \leq j \leq n$ ise A ve B matrislerine eşit matrisler denir.

iv) $A = [a_{ij}]$ $m \times n$ tipinde bir matris olmak üzere, her bir a_{ij} elemanı sıfıra eşitse A matrisine sıfır matris denir.

v) $A = [a_{ij}]$ ve $B = [b_{ij}]$ matrisleri $m \times n$ tipinde olmak üzere, A ve B matrislerinin toplamı, (i, j)–yinci bileşeni $a_{ij} + b_{ij}$ olan bir matris olup

$$+ :\ \mathbb{K}_n^m \times \mathbb{K}_n^m \longrightarrow \mathbb{K}_n^m$$

$$(A, B) \longrightarrow A + B = [a_{ij}] + [b_{ij}]$$

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + +b_{12} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlanır.

vi) $c \in \mathbb{K}$ bir skaler olmak üzere $cA \in \mathbb{K}_n^m$ matrisi (i, j)–yinci bileşeni ca_{ij} olan bir matristir. Başka bir deyişle

$$. :\ \mathbb{K} \times \mathbb{K}_n^m \longrightarrow \mathbb{K}_n^m$$

$$(c, A) \longrightarrow cA = \begin{bmatrix} ca_{11} & ca_{12} & \dots & ca_{1n} \\ ca_{21} & ca_{22} & \dots & ca_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ ca_{m1} & ca_{m2} & \dots & ca_{mn} \end{bmatrix}$$

olur.

vii) $A = [a_{ij}] \in \mathbb{K}_p^m$ ve $B = [b_{ij}] \in \mathbb{K}_n^p$ olmak üzere, A ve B matrislerinin çarpımı $C = [c_{ij}] \in \mathbb{K}_n^m$ şeklinde bir matris olup

$$. :\ \mathbb{K}_p^m \times \mathbb{K}_n^p \longrightarrow \mathbb{K}_n^m$$

$$(A, B) \longrightarrow A.B = C$$

$$[a_{ij}].[b_{ij}] = [c_{ij}] = \left[\sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}\right],\ 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n$$

şeklinde, yani

$$A.B=\begin{bmatrix}(a_{11}b_{11}+\cdots+a_{1p}b_{p1}) & \dots & (a_{11}b_{1n}+\cdots+a_{1p}b_{pn})\\ \dots & \dots & \dots\\ (a_{m1}b_{11}+\cdots+a_{mp}b_{p1}) & \dots & (a_{m1}b_{1n}+\cdots+a_{mp}b_{pn})\end{bmatrix}$$

olarak tanımlanır. Bu durumda matris çarpımının tanımlı olabilmesi için birinci matrisin sütun sayısı, ikinci matrisin satır sayısına eşit olmalıdır. Uygun A ve B matrislerinin çarpımı $A.B$ veya AB ile gösterilir (Hacısalihoğlu H.H., 1977).

Tanım 2.3 Eğer $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, reel sayılar kümesi olarak alınırsa, $\mathbb{K}$ cismi üzerinde tanımlı $m\times n$ tipindeki A matrisine bir reel matris ve $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, kompleks sayılar kümesi olarak alınırsa, A matrisine bir kompleks matris denir (Branson R., 1999).

Tanım 2.4 i) Bir $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ matrisinde $m = n$ ise, yani satır sayısı sütun sayısına eşitse, A matrisine kare matris denir. Bu durumda

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{bmatrix} \tag{2.2}$$

kare matrisinde $a_{11},a_{22},\dots,a_{nn}$ elemanlarına köşegen (esas köşegen) elemanları denir.

ii) Bir $A=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ kare matrisinin köşegen elemanları dışındaki tüm elemanları sıfır ise bu matrise köşegen matris denir ve $A=\text{Köş}\{a_{11},a_{22},\dots,a_{nn}\}$ ile gösterilir.

iii) Bir köşegen matriste $a_{11},a_{22},\dots,a_{nn}=\text{k}$, $\text{k}\in\mathbb{K}$ ise matrise skaler matris denir.

iv) Köşegen elemanları 1 ve diğer elemanları 0 olan $n\times n$ tipindeki bir matrise birim matris denir ve

$$I_n=\begin{bmatrix}1 & \cdots & 0\\ \vdots & & \vdots\\ 0 & \cdots & 1\end{bmatrix}$$

şeklinde gösterilir. Her hangi bir $A\in\mathbb{K}_n^m$ matrisi için, $I_mA=AI_n=A$ olur.

v) $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ matrisinden aynı numaralı satırlar ve sütunlar kendi aralarında yer değiştirilerek elde edilen $A^T=\left[a_{ij}\right]_{n\times m}$ matrisine A matrisinin transpozu denir. Buna göre A ve B uygun matrisler olmak üzere

$$(A+B)^T=A^T+B^T \quad \text{ve} \quad (AB)^T=B^TA^T$$

eşitlikleri sağlanır.

vi) A bir reel kare matris olmak üzere $A^T = A$ ise, A matrisine simetrik matris denir.

vii) A ve B kare matrisleri arasında $AB = BA$ bağıntısı varsa, bu matrislere değişmeli matrisler denir (Hacısalihoğlu H.H., 1977).

Teorem 2.1 Bir K cismi üzerinde tanımlanan $m \times n$ tipindeki tüm matrislerin kümesi K_n^m olsun. Herhangi $A, B, C \in K_n^m$ matrisleri ve herhangi $k_1, k_2 \in K$ skalerleri için

i) $(A + B) + C = A + (B + C)$

ii) $A + 0 = A$

iii) $A + (-A) = 0$

iv) $A + B = B + A$

v) $k_1(A + B) = k_1A + k_2B$

vi) $(k_1 + k_2)A = k_1A + k_2A$

vii) $(k_1k_2)A = k_1(k_2)A$

viii) $1.A = A$ ve $0.A = 0$

özellikleri sağlanır (Hacısalihoğlu H.H., 1977).

Tanım 2.5 i) $\{1,2, \dots n\}$ kümesinin kendisi üzerine bir birebir ve örten bağıntısı veya eş değer olarak $1,2, \dots n$ sayılarının yeniden bir sıralanmasına $\{1,2, \dots n\}$ kümesinin bir σ permütasyonu denir. Böyle bir permütasyon,

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ j_1 & j_2 & \dots & j_n \end{pmatrix}$$

veya

$$\sigma = j_1, j_2, \dots, j_n \quad , \; j_i = \sigma(i)$$

ile gösterilir. Bu permütasyonların tümünün kümesi S_n ile gösterilir. S_n de gelişigüzel bir σ permütasyonu, örneğin $\sigma = j_1, j_2, \dots, j_n$ düşünüldüğünde σ da çift veya tek sayıda permütasyonlar olmasına göre σ ya çift veya tek permütasyon denir. O halde bir σ nın işareti

$$sgn\sigma = \begin{cases} 1, & \text{eğer } \sigma \text{ çift ise} \\ -1, & \text{eğer } \sigma \text{ tek ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır ve $sgn\sigma$ ile gösterilir.

ii) $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ bir $\mathbb{K}$ cismi üzerinde tanımlı kare matris olsun.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

matrisinin her satırından ve her sütunundan yalnız ve yalnız bir eleman alınmak üzere n elemanın bir çarpımı düşünülsün. Böyle bir çarpım $a_{1j_1}, a_{2j_2}, \dots , a_{nj_n}$ şeklinde yazılır. Burada çarpanlar ardışık satırlardan gelir ve bu yüzden alt indisler $1, 2, \dots, n$ doğal sayı sırasındadır. Çarpanlar farklı sütunlardan geldiğinden, ikinci alt indislerin dizisi S_n de bir $\sigma = j_1, j_2, \dots, j_n$ permütasyonunu oluşturur. Tersine, S_n deki her permütasyon yukarıdaki şekilde bir çarpım tanımlar. Böylece A matrisi böyle $n!$ çarpım kapsar.

$A = [a_{ij}]_{n\times n}$ kare matrisinin determinantı det(A) veya $|A|$ şeklinde gösterilir ve yukarıdaki her çarpanı $sgn\sigma$ ile çarpılan veya $n!$ tane çarpımların toplamıdır. Yani,

$$|A| = \sum_{\sigma}(sgn\sigma)a_{1j_1}, a_{2j_2}, \dots , a_{nj_n}$$

veya

$$|A| = \sum_{\sigma\in S_n}(sgn\sigma)a_{1\sigma(1)}, a_{2\sigma(2)}, \dots , a_{n\sigma(n)}$$

şeklinde n mertebedendir.

$A = [a_{ij}]_{n\times n}$ matrisinin determinantı aşağıdaki şekilde de tanımlanmaktadır.

iii) 1×1 tipinde bir A matrisinin determinantı kendisidir. Başka bir deyişle $A = [a]$ ise, bu durumda $\det(A) = |a| = a$ olur.

iv) 2×2 tipindeki bir A matrisi için

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

olur.

v) Bir $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ matrisinin bir a_{ij} elemanının $|M_{ij}|$ şeklinde tanımlanan minörü, A matrisinden i–yinci satırın ve j–yinci sütunun atılması ile oluşan $(n-1) \times (n-1)$ tipindeki kare matrisin determinantıdır.

vi) Bir $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ matrisinin bir a_{ij} elemanının minörü $|M_{ij}|$ olsun. A matrisinin bir a_{ij} elemanının A_{ij} şeklinde gösterilen kofaktörü (işaretli minörü veya eş çarpanı),

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}.\,|M_{ij}|$$

şeklinde tanımlanır.

vii) Bir $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ matrisinin determinantı her hangi bir satır (sütun) elemanlarının kendi kofaktörleriyle çarpılıp bu çarpanların toplanmasıyla bulunur. Yani herhangi i ve j $(i, j = 1,2,3, \dots, n)$ için

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}.A_{ik} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik}|M_{ik}| \qquad (2.3)$$

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}.A_{kj} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{kj}|M_{ik}| \qquad (2.4)$$

şeklinde tanımlanır.

Her bir i için, (2.3) açılımına, A matrisinin determinantının i–yinci satıra göre açılımı, her bir j için, (2.4) açılımına ise A matrisinin determinantının j–yinci sütuna göre açılımı denir.

viii) Bir $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ matrisi için $|A| = 0$ ise, A matrisine singüler matris, $|A| \neq 0$ ise, A matrisine nonsingüler (veya regüler) matris denir (Branson R., 1999).

Tanım 2.6 i) Bir $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ matrisinde bir a_{ij} elemanının kofaktörü A_{ij} olsun.

$$\mathrm{Ek}(A) = [A_{ij}]^T = [A_{ji}]$$

matrisine A matrisinin ek matrisi denir.

$$Ek(A) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

ii) Bir $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ matrisi için $A.B = B.A = I_n$ olacak şekilde bir $B = [b_{ij}]_{n\times n}$ matrisi varsa, B matrisine A matrisinin inversi denir ve $A^{-1} = B$ ile gösterilir (Hacısalihoğlu H.H., 1977).

Teorem 2.2 Bir $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ matrisi ile bu matrisin ek matrisinin çarpımı bir skaler matris olup,

$$A.\mathrm{Ek}(A) = \mathrm{Ek}(A).A = |A| \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = |A|I_n \qquad (2.5)$$

ile verilir (Hacısalihoğlu H.H., 1977).

Teorem 2.3 Bir $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ nonsingüler matrisinin inversi,

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}.\mathrm{Ek}(A) \tag{2.6}$$

dır. (Hacısalihoğlu H.H., 1977)

Teorem 2.4 i) Bir $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ nonsingüler matrisi için A^{-1} invers matrisi tektir.

ii) A nonsingüler matris ise A^{-1} matrisi de nonsingüler olup $(A^{-1})^{-1} = A$ dır.

iii) A ve B çarpmaya uygun nonsingüler matrisler ise AB çarpımı da nonsingüler olup $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ dir.

iv) A nonsingüler matris ise A^T matrisi de nonsingüler olup $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ dir (Branson R., 1999).

İspat: i) B ve C matrisleri bir A matrisinin herhangi iki inversi olsun. Bu takdirde $AB = BA = I$ ve $AC = CA = I$ olup buradan $C = CI = C(AB) = (CA)B = IB = B$ olduğu görülür.

ii) $(A^{-1})^{-1}$ matrisi A^{-1} matrisinin inversi ve aynı zamanda A matrisi de A^{-1} matrisinin inversidir. Nonsingüler bir matrisin inversinin tekliğinden bu inversler birbirine eşittir.

iii) $(AB)^{-1}$ matrisi AB matrisinin inversidir. Ayrıca

$$B^{-1}A^{-1}(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I$$

ve

$$(AB)B^{-1}A^{-1} = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$$

olduğundan $B^{-1}A^{-1}$ matrisi de AB matrisinin inversi olur. Nonsingüler bir matrisin inversinin tekliğinden bu inversler birbirine eşittir.

iv) Öncelikle $(A^T)^{-1}$ matrisinin A^T matrisinin bir inversi olduğunu belirtelim. Ayrıca $I^T = I$ olduğundan $I = I^T = (AA^{-1})^T = (A^{-1})^T(A)^T$ olup bu $(A^{-1})^T$ matrisinin A^T matrisinin bir inversi olduğunu gösterir. Nonsingüler bir matrisin inversinin tekliğinden $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ dir.

Tanım 2.7 i) Bir $A = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ kare matrisi için eğer $A^2 = A$ ise, bu takdirde A matrisine idempotent matris denir.

ii) $\mathbb{C}$ kompleks sayılar cismi üzerinde tanımlı A matrisinin elemanlarının yerlerine bunların eşlenikleri yazılarak elde edilen matrise A matrisinin eşleniği (eş matrisi) denir ve $\overline{A}$ ile gösterilir (Branson R., 1999).

iii) $\mathbb{C}$ kompleks sayılar cismi üzerinde tanımlı bir A matrisi için eğer $\left(\overline{A}\right)^T = A$ ise A matrisine hermitian matris denir ve $A^* = \left(\overline{A}\right)^T$ ile gösterilir.

iv) Bir A matrisi için $AA^* = A^*A$ ise A matrisine normal matris denir.

v) $A = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ nonsingüler bir matris olmak üzere, $A^{-1} = A^*$ (veya buna denk olarak $AA^* = A^*A = I$) ise A matrisine birimsel (unitary) matris denir.

vi) $A = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ bir kare matris olmak üzere, eğer $A^{-1} = A^T$ ise A matrisine ortogonal matris denir (Branson R., 1999).

Teorem 2.5 A ve B uygun matrisler olmak üzere,

i) $\left(\overline{A}\right)^T = \overline{(A^T)}$.

ii) $(A^*)^* = A$.

iii) $(A+B)^* = A^* + B^*$.

iv) $(AB)^* = B^*A^*$.

eşitlikleri sağlanır (Branson R., 1999).

İspat: i) $A = \left[a_{ij}\right]$ $m \times n$ tipinde bir matris ise $\overline{A} = \left[\overline{a_{ij}}\right]$ ve $\left(\overline{A}\right)^T = \left[\overline{a_{ji}}\right]$ olur. Diğer taraftan $A^T = \left[a_{ji}\right]$ ve $\overline{(A^T)} = \left[\overline{a_{ji}}\right]$ olduğundan $\overline{(A^T)} = \left(\overline{A}\right)^T$ olduğu görülür.

ii) $A^* = \left(\overline{A}\right)^T$ olduğundan $(A^*)^* = \left(\overline{\left(\overline{A}\right)^T}\right)^T = (A^T)^T = A$ dir.

iii) Hermitian matris tanımına ve bir matrisin transpozu tanımına göre,

$$(A+B)^* = \left(\overline{A+B}\right)^T = \left(\overline{A}+\overline{B}\right)^T = \left(\overline{A}\right)^T + \left(\overline{B}\right)^T = A^* + B^*$$

olduğu görülür.

iv) Hermitian matris tanımına ve bir matrisin transpozu tanımına göre,

$$(AB)^* = \left(\overline{AB}\right)^T = \left(\overline{A}\,\overline{B}\right)^T = \left(\overline{B}\right)^T\left(\overline{A}\right)^T = B^*A^*$$

yazılabilir.

Tanım 2.8 i) $x_1, x_2, \dots x_n$ vektörler kümesi verilmiş olsun. $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$ eşitliği ancak $a_1, a_2, \dots, a_n$ skalerlerinin tümü birden sıfır olduğunda sağlanıyorsa bu durumda $x_1, x_2, \dots x_n$ vektörlerine lineer bağımsızdır denir. Aksi durumda yani, $a_1, a_2, \dots, a_n$ skalerlerinden en az biri sıfırdan farklı olmak üzere $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$ eşitliği sağlanıyorsa bu durumda $x_1, x_2, \dots x_n$ vektörlerine lineer bağımlıdır denir.

ii) A matrisi $m \times n$ tipinde herhangi bir matris olsun. A matrisinin sütun vektörlerini $A_{*1}, A_{*2}, \dots, A_{*n}$ ile, ve satır vektörlerini $A_{1*}, A_{2*}, \dots, A_{m*}$ ile gösterelim. Bu durumda A_{i*}, $i = 1, 2, \dots, m$ vektörleri arasından oluşturulan en büyük lineer bağımsız vektörler kümesinin eleman sayısına A matrisinin satır rankı ve A_{*j}, $j = 1, 2, \dots, n$ vektörleri arasından oluşturulan en büyük lineer bağımsız vektörler kümesinin eleman sayısına ise A matrisinin sütun rankı denir (Hacısalihoğlu H.H., 1977).

Teorem 2.6 Bir matrisin iki satırının kendi aralarında yer değiştirmesi o matrisin satır rankını değiştirmez (Branson R., 1999).

İspat: A matrisinin herhangi iki satırı yer değiştirdiğinde satır vektörlerinin kümesi değişmeyeceğinden bu durum matrisin satırları arasındaki lineer bağımsızlığı da değiştirmez. Yani satır rankını değiştirmez.

Teorem 2.7 i) Elemanter işlemler herhangi bir matrisin sütun rankını değiştirmez.
ii) Herhangi bir A matrisi için satır rankı sütun rankına eşittir (Branson R., 1999).

Tanım 2.9 Herhangi bir A matrisinin rankı, satır ve sütun rankı olarak tanımlanır ve $\mathrm{rank}(A)$ veya $r(A)$ şeklinde gösterilir (Branson R., 1999).

Teorem 2.8 A bir matris olmak üzere $r(A) = r(A^T)$ dir (Hacısalihoğlu H.H., 1977).

Tanım 2.10 $n \times n$ tipindeki bir A kare matrisi için eğer $r(A) = n$ ise A matrisine nonsingüler matris denir. Aksi durumda yani, $r(A) < n$ ise A matrisine singüler matris denir (Hacısalihoğlu H.H., 1977).

Tanım 2.11 Eğer A matrisi $n \times n$ tipinde nonsingüler bir matris ise $A\mathrm{X} = XA = I_n$ olacak şekilde bir X matrisi vardır. A^{-1} ile gösterilen X matrisi tektir ve bu matrise

A matrisinin tersi(inversi) denir. Bu durumda A ve B matrisleri tersleri olan aynı tipten matrisler ise

$$(\mathrm{A}^{-1})' = (\mathrm{A}')^{-1} \quad \text{v e} \quad (\mathrm{AB})^{-1} = \mathrm{B}^{-1}\mathrm{A}^{-1}$$

eşitlikleri vardır (Hacısalihoğlu H.H., 1977).

Tanım 2.12 i) $A \in \mathbb{K}_n^m$, $m \times n$ tipinde bir matris olsun. $\mathcal{N}(A) = \{x: Ax = 0\}$ kümesine A marisinin null (sıfır) uzayı veya sıfırlığı denir.

ii) $A \in \mathbb{K}_n^m$, $m \times n$ tipinde bir matris olsun. $\mathcal{R}(A) = \{y: Ax = y\}$ kümesine A matrisinin ranj (sütun) uzayı denir (Hacısalihoğlu H.H., 1977).

Teorem 2.9 Eğer A, r ranklı $m \times n$ tipinde bir matris ise, bu durumda aşağıdaki şartları sağlayan nonsingüler P ve Q matrisleri vardır. I, $r \times r$ boyutlu birim matris olmak üzere,

i) $m = n = r \Longrightarrow PAQ = I$

ii) $m = r < n \Longrightarrow PAQ = [I, 0]$

iii) $m > r,\ n > r \Longrightarrow PAQ = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

dir (Lancaster, P., 1969).

Teorem 2.10 Çarpıma uygun A ve B matrisleri için AB çarpımının rankı A ve B matrislerinin rankını geçemez. Yani,

$$r(AB) \leq \min\{r(A),\ r(B)\} \tag{2.7}$$

dir (Lancaster, P., 1969)

2.2 Genelleştirilmiş İnversler

A matrisinin kare matris olmadığı durumlarda ya da A matrisinin kare matris fakat singüler olduğu durumlarda Tanım 2.11 de verilen bilinen anlamda inversi yoktur.

Tanım 2.13 $\mathbb{C}_n^m$, kompleks sayılar cismi üzerinde tanımlı $m \times n$ tipindeki tüm matrislerin kümesini göstersin. Bir $A \in \mathbb{C}_n^m$ matrisi için aşağıdaki dört şartı (Moore–Penrose şartları) sağlayan bir G matrisine A matrisinin Moore–Penrose inversi denir ve A^+ veya $A^\dagger$ ile gösterilir.

(i) $AGA = A$,

(ii) $GAG = G$,

(iii) $(AG)^* = AG$,

(iv) $(GA)^* = GA$. (2.8)

Bu durumda eğer G matrisi sadece (i) şartını sağlıyorsa, bu G matrisine, A matrisinin bir genelleştirilmiş inversi (iç inversi) denir ve A^- veya $A^{(1)}$ ile gösterilir. Sadece (ii) şartını sağlayan G matrisine, A matrisinin bir dış inversi denir ve $A^{(2)}$ ile gösterilir. Hem (i) hem de (ii) şartını sağlayan G matrisine ise, A matrisinin bir yansımalı genelleştirilmiş inversi denir ve $A^{(1,2)}$ veya A_0 ile gösterilir.

Bir A nonsingüler matrisinin inversi olan A^{-1} matrisinin Moore–Penrose şartlarını sağlayacağı açıktır. Yani $A^{-1} = A^+$ olur. Bununla birlikte, eğer A bir singüler matris veya kare olmayan bir matris ise, bu durumda Moore–Penrose şartlarını sağlayan bir A^+ matrisinin mevcut olup olmadığı ile ilgili bir soru ortaya çıkar. Bu kısımda her A matrisi için bir A^+ matrisinin var ve tek olduğu gösterilecektir. Ayrıca bu şekilde tanımlanan Moore–Penrose inversin bir takım özellikleri verilecektir.

Teorem 2.11 Eğer A matrisi $m \times n$ tipinde sıfır matris ise, A^+ matrisi $n \times m$ tipinde sıfır matristir.

Teorem 2.12 Her A matrisi için Moore–Penrose şartlarını sağlayan bir ve yalnız bir tek A^+ matrisi vardır.

Teorem 2.13 $m \times n$ tipinde bir A matrisinin Moore–Penrose inversi $n \times m$ tipindedir.

Teorem 2.14 i) $m \times n$ tipinde bir A matrisinin tüm elemanları 1 ise, $A^+ = \frac{1}{m.n} A^*$ dir.

ii) $a,\ n \times 1$ tipinde bir sütun vektörü ise, bu durumda $a^+ = (a^*a)^{-1}a^*$ şeklindedir.

iii) $a,\ 1 \times n$ tipinde bir satır vektörü ise, bu durumda a^+, $a^+ = a^*(aa^*)^{-1}$ şeklindedir.

Teorem 2.15 A herhangi bir matris olmak üzere

$$(A^*)^+ = (A^+)^* \tag{2.9}$$

eşitliği geçerlidir.

Teorem 2.16 Bir matrisin Moore–Penrose inversinin Moore–Penrose inversi matrisin kendisine eşittir. Yani, her hangi bir A matrisi için, $(A^+)^+ = A$ olur.

Teorem 2.17 Bir matrisin Moore–Penrose inversinin rankı kendi rankına eşittir. Yani, $r(A) = r(A^+)$ dır.

Bu teoremin sonucu olarak eğer A matrisinin rankı r ise, $A^+, AA^+, A^+A, AA^+A, A^+AA^+$ matrislerinin her birinin rankının da r olduğu görülür.

Teorem 2.18 Eğer A simetrik ve idempotent bir matris ise, bu takdirde $A^+ = A$ dir.

Teorem 2.19 $B = \text{Köş}\{\mathrm{b}_{11}, \mathrm{b}_{22}, \dots, \mathrm{b}_{nn}\}$ ise, B matrisinin Moore–Penrose inversi B^+, i–yinci satırı ve i–yinci sütununda yer alan köşegen elemanı $\mathrm{b}_{ii} \neq 0$ ise b_{ii}^{-1} ve $\mathrm{b}_{ii} = 0$ ise "0" olan bir köşegen matristir.

Teorem 2.19 i) A, $m \times n$ matrisi tam satır ranklı ise, $A^+ = A^*(AA^*)^{-1}$ ve $AA^+ = I_m$,

ii) A, $m \times n$ matrisi tam sütun ranklı ise, $A^+ = (A^*A)^{-1}A^*$ ve $A^+A = I_n$ olur.

İspat: Her iki durum için verilen A^+ matrislerinin Moore–Penrose şartlarını sağladığını göstermek yeterlidir. Buna göre,

i) (i) $AA^+A = AA^*(AA^*)^{-1}A = (AA^*)(AA^*)^{-1}A = A$,

(ii) $A^+AA^+ = A^*(AA^*)^{-1}AA^*(AA^*)^{-1}$

$= A^*(AA^*)^{-1}(AA^*)(AA^*)^{-1} = A^*(AA^*)^{-1} = A^{+\dagger}$,

(iii) $(AA^+)^* = (AA^*(AA^*)^{-1})^* = ((AA^*)(AA^*)^{-1})^* = I^* = I$

$= (AA^*)(AA^*)^{-1} = AA^*(AA^*)^{-1} = AA^+$,

(iv) $(A^+A)^* = (A^*(AA^*)^{-1}A)^* = A^*(AA^*)^{-1}A = A^+A$

olur.

ii) (i) $AA^+A = A(A^*A)^{-1}A^*A = A(A^*A)^{-1}(A^*A) = A$,

(ii) $A^+AA^+ = (A^*A)^{-1}A^*A(A^*A)^{-1}A^*$

$= (A^*A)^{-1}(A^*A)(A^*A)^{-1}A^* = (A^*A)^{-1}A^* = A^+$,

(iii) $(AA^+)^* = (A(A^*A)^{-1}A^*)^* = A(A^*A)^{-1}A^* = AA^+$,

(iv) $(A^+A)^* = ((A^*A)^{-1}A^*A)^* = ((A^*A)^{-1}(A^*A))^* = I^* = I$

$= (A^*A)^{-1}(A^*A) = (A^*A)^{-1}A^*A = A^+A$

dir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

3. İDEMPOTENT MATRİSLER İÇİN BAZI RANK EŞİTLİKLERİ

3.1 İki İdempotent Matrisin Toplamı İçin Rank Eşitlikleri

Bu kısımda elementer blok matris işlemleri göz önüne alınarak, iki idempotent matrisin toplamıyla ilgili çeşitli rank eşitlikleri verilerek bununla ilgili bazı ilginç sonuçlar ve uygulamalar ele alınmıştır.

Farz edelim ki P ve Q iki idempotent matris olsun. P ve Q için iki elementer işlem $P \pm Q$ şeklinde verilmektedir. Birçok durumda, $P \pm Q$ ifadesinin çeşitli özelliklerinin bilinmesi gerekir. Örneğin, $P \pm Q$ 'un nonsigülerliği, idempotentliği, tripotentliği ve nilpotentliği gibi.

m-yinci mertebeden bir P kare matrisinin nonsigüler olması için gerek ve yeter şart $r(P) = m$ olmasıdır. $P + Q$ ifadesi için bazı rank eşitlikleri tespit edilebilirse, bu rank eşitliklerinden $P + Q$ için çeşitli özellikleri de elde edilebilir.

Teorem 3.1 P ve Q m-yinci mertebeden iki idempotent matris olsun. Bu takdirde $P + Q$ toplamı için aşağıdaki rank eşitlikleri sağlanır (Gözpınar, A., 2011):

$$r(P+Q) = r\begin{bmatrix} P & Q \\ Q & 0 \end{bmatrix} - r(Q) = r\begin{bmatrix} Q & P \\ P & 0 \end{bmatrix} - r(P), \tag{3.1}$$

$$r(P+Q) = r[P - PQ, Q] = r[Q - QP, P], \tag{3.2}$$

$$r(P+Q) = r\begin{bmatrix} P - QP \\ Q \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} Q - PQ \\ P \end{bmatrix}, \tag{3.3}$$

$$r(P+Q) = r(P - PQ - QP + QPQ) + r(Q), \tag{3.4}$$

$$r(P+Q) = r(Q - PQ - QP + PQP) + r(P). \tag{3.5}$$

İspat: Bir matrisin rankının elementer matris işlemleri altında değişmeyeceği gerçeği dikkate alınarak

$$r\begin{bmatrix} P & 0 & P \\ 0 & Q & Q \\ P & Q & 0 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} P & 0 & 0 \\ 0 & Q & 0 \\ 0 & 0 & -P-Q \end{bmatrix} = r(P) + r(Q) + r(P+Q)$$

olduğu görülür. Diğer taraftan, P ve Q matrisleri idempotent olduğundan elementer matris işlemleriyle,

$$r\begin{bmatrix} P & 0 & P \\ O & Q & Q \\ P & Q & 0 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} P & 0 & P \\ -QP & 0 & Q \\ P & Q & 0 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} 2P & 0 & P \\ 0 & 0 & Q \\ P & Q & 0 \end{bmatrix}$$

$$= r\begin{bmatrix} 2P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q \\ 0 & Q & 1/2P \end{bmatrix}$$

$$= r\begin{bmatrix} P & Q \\ Q & 0 \end{bmatrix} + r(P)$$

olduğu görülür. Yukarıdaki iki sonuç birleştirilerek (3.1) deki birinci eşitlik elde edilir. Ayrıca simetrik olma özelliğinden (3.1) 'deki ikinci eşitlik de sağlanır. Öte yandan

$$r[A, B] = r(A) + r(B - AA^{-}B) = r(B) + r(A - BB^{-}A), \tag{3.6}$$

$$r\begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} = r(A) + r(C - CA^{-}A) = r(C) + r(A - AC^{-}C), \tag{3.7}$$

$$r\begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} = r(B) + r(C) + r(I_m - BB^{-})A(I_n - C^{-}C)], \tag{3.8}$$

$$r\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} A & B - AA^{-}B \\ C - CA^{-}A & D - CA^{-}B \end{bmatrix}$$

$$= r(A) + r\begin{bmatrix} 0 & B - AA^{-}B \\ C - CA^{-}A & D - CA^{-}B \end{bmatrix} \tag{3.9}$$

eşitlikleri (3.1) de verilen matrislere uygulanırsa (3.2)-(3.5) eşitliklerinin sağlandığı kolayca görülebilir.

Her ne kadar (3.1)-(3.5) eşitlikleri bazı elementer yöntemlerle türetilmiş olsa da, P ve Q matrislerini içeren 3x3 tipindeki blok matrisin inşasında ve basitleştirilmesinde bazı matris işlemlerinin püf noktalarına ihtiyacı vardır. Öte yandan (3.1)-(3.5) eşitliklerinin önemi $P + Q$ matris toplamının rankının P ve Q matrislerini içeren diğer bazı matris ifadelerinin ranklarıyla olan ilişkisidir. Bu rank formüllerinin sağ taraflarından $P + Q$ toplamı üzerinde birçok değişik özellik elde edilebilir. Örneğin,

$$r(P + Q) \geq \max\{ r(P), r(Q)\}$$

rank eşitsizliği (3.4) ve (3.5) eşitliklerinden türetilmiştir. Benzer bir yaklaşımla P ve Q idempotent matrislerinin bir lineer birleşimi olan $\alpha P + \beta Q$ için bir rank formülü verilebilir.

Teorem 3.2 P ve Q matrisleri $m-$yinci mertebeden idempotent matrisler α ve β sıfırdan farklı skalerler olmak üzere $\alpha+\beta\neq 0$ olsun. Bu takdirde

$$r(\alpha P+\beta Q)=r(P+Q), \tag{3.10}$$

eşitliği sağlanır, yani $\alpha P+\beta Q$ matrisinin rankı $\alpha\neq 0, \beta\neq 0$ ve $\alpha+\beta\neq 0$ şartları altında değişmezdir (Tian ve Styan, 2006).

(3.10) eşitliği, iki idempotent matrisin lineer birleşimini içeren çeşitli rank eşitliklerini basitleştirmek için kullanılabilir. Burada $r(\alpha P+\beta Q)$ ifadesini içeren çeşitli rank eşitliklerini basitleştirmek için ardışık olarak (3.10) ifadesini uygulayacağız. Aşağıda P ve Q idempotent matrislerinin toplamıyla ilgili bir başka rank eşitlikleri grubu verilmiştir.

Teorem 3.3 P ve Q $m-$yinci mertebeden idempotent matrisler olsun. Bu takdirde

$$r(P+Q)=r\begin{bmatrix} P & Q & 0 \\ Q & 0 & P \end{bmatrix}-r[P,Q], \tag{3.11}$$

$$r(P+Q)=r\begin{bmatrix} P & Q \\ Q & 0 \\ 0 & P \end{bmatrix}-r\begin{bmatrix} P \\ Q \end{bmatrix}, \tag{3.12}$$

$$r\ (P+Q)=r\begin{bmatrix} P-QP \\ Q-PQ \end{bmatrix}+r(P)+r(Q)-r[P,Q], \tag{3.13}$$

$$r(P+Q)=r[P-PQ,Q-QP]+r(P)+r(Q)-r\begin{bmatrix} P \\ Q \end{bmatrix}. \tag{3.14}$$

rank eşitlikleri sağlanır (Gözpınar, A., 2011).

İspat: (3.9) eşitliği ve elementer matris işlemleri dikkate alınırsa

$$\begin{aligned} r\begin{bmatrix} P & Q & 0 \\ Q & 0 & P \end{bmatrix} &= r\begin{bmatrix} P & Q-PQ & 0 \\ Q-QP & -Q & P \end{bmatrix} \\ &= r(P)+r\begin{bmatrix} 0 & Q-PQ & 0 \\ Q-QP & -Q & P \end{bmatrix} \\ &= r(P)+r\begin{bmatrix} 0 & Q-PQ & 0 \\ Q-QP & -PQ & P \end{bmatrix} \\ &= r(P)+r\begin{bmatrix} 0 & Q-PQ & 0 \\ Q-QP & 0 & P \end{bmatrix} \\ &= r(P)+r(Q-PQ)+r[Q-QP,P] \end{aligned}$$

$$= [P,Q] + r\begin{bmatrix} Q & P \\ P & 0 \end{bmatrix} - r(P)$$

$$= r[P,Q] + r(P+Q)$$

olduğu görülür. Böylece (3.11) eşitliği elde edilir. Simetrik özelliğinden, (3.12) eşitliği de sağlanır. Öte yandan (3.6) ve (3.7) eşitlikleri sırasıyla (3.11) ve (3.12) eşitliklerine uygulanırsa (3.13) ve (3.14) eşitliklerinin sağlandığı kolayca görülür.

Teorem 3.4 P ve Q m −yinci mertebeden idempotent matrisler olsun. Bu takdirde

$$r(P+Q) = r(P) + r(Q) - m + r\left(\begin{bmatrix} I_m - P \\ I_m - Q \end{bmatrix}[I_m - P, I_m - Q]\right) \qquad (3.15)$$

rank eşitliği sağlanır (Gözpınar, A., 2011).

İspat: Elementer matris işlemleriyle

$$r\begin{bmatrix} P & 0 & I_m \\ 0 & Q & I_m \\ I_m & I_m & 0 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} 0 & 0 & I_m \\ 0 & P+Q & 0 \\ I_m & 0 & 0 \end{bmatrix} = 2m + r(P+Q)$$

ve dolayısıyla

$$r\begin{bmatrix} P & 0 & I_m \\ 0 & Q & I_m \\ I_m & I_m & 0 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} P & 0 & I_m - P \\ 0 & Q & I_m - Q \\ I_m - P & I_m - Q & -2I_m \end{bmatrix}$$

$$= r(P) + r(Q) + r\begin{bmatrix} 0 & 0 & I_m - P \\ 0 & 0 & I_m - Q \\ I_m - P & I_m - Q & -2I_m \end{bmatrix}$$

$$= r(P) + r(Q) + r\begin{bmatrix} 0 & 0 & I_m - P \\ 0 & 0 & I_m - Q \\ I_m - P & I_m - Q & I_m \end{bmatrix}$$

$$= r(P) + r(Q) + r\begin{bmatrix} I_m - P & (I_m - P)(I_m - Q) & 0 \\ (I_m - Q)(I_m - P) & I_m - Q & 0 \\ 0 & 0 & I_m \end{bmatrix}$$

$$= r(P) + r(Q) + m + r\left(\begin{bmatrix} I_m - P \\ I_m - Q \end{bmatrix}[I_m - P, I_m - Q]\right)$$

olduğu görülür ve böylece ispat tamamlanır.

(3.11)-(3.15) eşitliklerindeki blok matrislerden, iki idempotent matrisin toplamı için bazı yeni özellikler elde edilebilir. Özel olarak, P ve Q matrisleri kompleks sayılar cismi üzerinde iki ortogonal izdüşüm matrisi olduğunda (3.15) ifadesi

$$r[P+Q] = r(P) + r(Q) - m + r[I_m - P, I_m - Q], \tag{3.16}$$

veya buna denk olarak

$$r(P+Q) = r(P) + r(Q) - m + r(P^{\perp} + Q^{\perp}) \tag{3.17}$$

şeklini alır.

Sonuç 3.1. P ve Q $m-$yinci mertebeden idempotent matrisler olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler birbirine denktir (Gözpınar, A., 2011):

$(a1)$ $r\begin{bmatrix} P & Q \\ Q & 0 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} P \\ Q \end{bmatrix} + r(Q)\ ve\ r\begin{bmatrix} P \\ Q \end{bmatrix} = m.$

$(a2)$ $r\begin{bmatrix} Q & P \\ P & 0 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} Q \\ P \end{bmatrix} + r(Q)\ ve\ r\begin{bmatrix} Q \\ P \end{bmatrix} = m.$

$(a3)$ $r\begin{bmatrix} P & Q \\ Q & 0 \end{bmatrix} = r\,[P,Q] + r(Q)\ ve\ r[P,Q] = m.$

$(a4)$ $r\begin{bmatrix} Q & P \\ P & 0 \end{bmatrix} = r\,[Q,P] + r(P)\ ve\ r[Q,P] = m.$

$(a5)$ $r\begin{bmatrix} P & Q & 0 \\ Q & 0 & P \end{bmatrix} = r\,[P\,,Q\,,0\,] + r[Q\,,0\,,P]$ ve $r[P,Q] = m.$

$(a6)$ $r\begin{bmatrix} P & Q \\ Q & 0 \\ 0 & P \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} P \\ Q \\ 0 \end{bmatrix} + r\begin{bmatrix} Q \\ 0 \\ P \end{bmatrix}$ ve $r\begin{bmatrix} P \\ Q \end{bmatrix} = m.$

$(a7)$ $r\left(\begin{bmatrix} I_m & -P \\ I_m & Q \end{bmatrix}[I_m - P, I_m - Q]\right) = 2m - r(P) - r(Q).$

Bunun sonucu olarak

$$r[P,Q] = r(P) + r(Q) - \dim \mathcal{R}(P) \cap \mathcal{R}(Q), \tag{3.18}$$

$$r[P,Q] = r(P) + r(Q) \ \Leftrightarrow\ \mathcal{R}(P) \cap \mathcal{R}(Q) = \{0\}, \tag{3.19}$$

$$r\begin{bmatrix} P \\ Q \end{bmatrix} = r(P) + r(Q) - \dim \mathcal{R}(P^*) \cap \mathcal{R}(Q^*), \tag{3.20}$$

$$r\begin{bmatrix} P \\ Q \end{bmatrix} = r(P) + r(Q) \Leftrightarrow \mathcal{R}(P^*) + \mathcal{R}(Q^*) = \{0\}. \tag{3.21}$$

olduğunu hatırlayalım. Dolayısıyla, Sonuç 3.1' deki rank eşitlikleri aynı zamanda matris ranjları yardımıyla da verilebilir.

Aynı mertebeden herhangi iki idempotent matris için

$$r(P-Q) = r\begin{bmatrix} P \\ Q \end{bmatrix} + r[Q,P] - r(P) - r(Q) \tag{3.22}$$

olduğu gösterilebilir. Diğer taraftan $I_m - P$ ve $I_m - Q$ matrislerinin her ikisi de idempotent olduğundan

$$\begin{aligned} r(P-Q) &= r[(I_m - Q) - (I_m - P)] \\ &= r\begin{bmatrix} I_m - P \\ I_m - Q \end{bmatrix} + r[I_m - P, I_m - Q] - r(I_m - P) - r(I_m - Q) \\ &= r\begin{bmatrix} I_m - P \\ I_m - Q \end{bmatrix} + r[I_m - P, I_m - Q] + r(P) + r(Q) - 2m \end{aligned} \tag{3.23}$$

rank eşitliği yazılabilir. Bu durumda (3.22) ve (3.23) eşitlikleri birlikte düşünülerek

$$r\begin{bmatrix} I_m - P \\ I_m - Q \end{bmatrix} + r[I_m - P, I_m - Q] = r\begin{bmatrix} P \\ Q \end{bmatrix} + r[P,Q] + 2m - 2r(P) - 2r(Q) \tag{3.24}$$

elde edilir.

(3.1), (3.11) ve (3.12) eşitlikleri iki idempotent matristen oluşan bazı genel blok matrislerin rankını dikkate almamızı önerir.

İki idempotent matristen oluşan bir bi-köşegen blok matris için üç aşamalı formüller aşağıda verilmiştir.

Teorem 3.5 P ve Q $m-$yinci mertebeden idempotent iki matris olsun. Bu takdirde

$$r\begin{bmatrix} P & Q & & \\ & P & \ddots & \\ & & \ddots & Q \\ & & & P \end{bmatrix}_{k\times k} = (k-1)r(P+Q) + r(P), \tag{3.25}$$

$$r\begin{bmatrix} P & Q & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & P & Q \end{bmatrix}_{k\times(k+1)} = (k-1)r(P+Q) + r[P,Q], \tag{3.26}$$

$$r\begin{bmatrix} P & & & \\ Q & \ddots & & \\ & \ddots & P & \\ & & Q & \end{bmatrix}_{(k+1)\times k} = (k-1)r(P+Q) + r\begin{bmatrix} P \\ Q \end{bmatrix}, \tag{3.27}$$

rank eşitlikleri sağlanır.

Elementer matris işlemleri ve (3.6)-(3.9) eşitlikleri dikkate alınırsa, idempotent matrislerden oluşan blok matrisler için çeşitli rank eşitlikleri belirlenebilir. Bu rank eşitlikleri, blok matrisler için bazı temel özellikleri ortaya çıkarmak için kullanılabilir. Bununla ilgili olarak bazı basit ve ilginç sonuçlar aşağıda verilmiştir.

Teorem 3.6 P ve Q $m-$yinci mertebeden iki idempotent matris olsun. Bu takdirde

$$r\begin{bmatrix} P+Q & P-Q \\ P-Q & 0 \end{bmatrix} = r(P+Q) + r(P-Q), \tag{3.28}$$

$$r\begin{bmatrix} P-Q & P+Q \\ P+Q & 0 \end{bmatrix} = 2r(P+Q), \tag{3.29}$$

$$r\begin{bmatrix} P & Q & 0 \\ Q & P+Q & P \\ 0 & P & Q \end{bmatrix} = 2r(P+Q) + r(P-Q), \tag{3.30}$$

$$r\begin{bmatrix} P & Q & 0 \\ \pm Q & P & Q \\ 0 & \pm Q & P \end{bmatrix} = 2r(P+Q) + r(P-Q), \tag{3.31}$$

rank eşitlikleri sağlanır (Gözpınar, A., 2011).

İspat: P ve Q matrisleri $m-$yinci mertebeden idempotent matrisler olduğundan elementer matris işlemleri kullanılarak

$$\begin{aligned} r\begin{bmatrix} P+Q & P-Q \\ P-Q & 0 \end{bmatrix} &= r\begin{bmatrix} P & P-Q \\ P-Q & 0 \end{bmatrix} \\ &= r\begin{bmatrix} P & -Q \\ -Q & 2Q-P \end{bmatrix} \\ &= r(P) + r\begin{bmatrix} 0 & (I_m-P)Q \\ Q(I_m-P) & Q-P \end{bmatrix} \\ &= r(P) + r\begin{bmatrix} (I_m-P)Q(I_m-P) & 0 \\ 0 & Q-P \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$= r(P) + r[(I_m - P)Q(I_m - P)] + r(P - Q)$$

$$= r(P + Q) + r(P - Q) \qquad \big(by(2.5)\big),$$

eşitliği elde edilir. Öte yandan $\frac{(P+Q)(P-Q)}{2} + \frac{(P-Q)(P+Q)}{2} = P - Q$ olduğundan

$$r\begin{bmatrix} P - Q & P + Q \\ P + Q & 0 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} P - Q - \frac{1}{2(P+Q)(P-Q)} - \frac{1}{2(P-Q)(P+Q)} & P + Q \\ P + Q & 0 \end{bmatrix}$$

$$= r\begin{bmatrix} 0 & P + Q \\ P + Q & 0 \end{bmatrix} = 2r(P + Q)$$

eşitliği yazılabilir. Benzer şekilde (3.30)' da iddia edildiği gibi

$$r\begin{bmatrix} P & Q & 0 \\ Q & P + Q & P \\ 0 & P & Q \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} P & Q - PQ & 0 \\ Q - QP & 0 & P - PQ \\ 0 & P - QP & Q \end{bmatrix}$$

$$= r(P) + r(Q) + r\begin{bmatrix} 0 & Q - PQ & 0 \\ Q - QP & 0 & P - PQ \\ 0 & P - QP & Q \end{bmatrix}$$

$$= r\ (P) + r(Q) + r\begin{bmatrix} Q - PQ \\ P - QP \end{bmatrix} + r\ [Q - QP, P - PQ]$$

$$= 2r(P + Q + r\begin{bmatrix} P \\ Q \end{bmatrix} + r[P, Q] - r(P) - r(Q)$$

$$= 2r(P + Q) + r(P - Q)$$

rank eşitliği yazılabilir. Öte yandan (3.9) ifadesinden

$$r\begin{bmatrix} P & Q & 0 \\ Q & P & Q \\ 0 & Q & P \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} P & Q - PQ & 0 \\ Q - QP & P - 2Q & Q - QP \\ 0 & Q - PQ & P \end{bmatrix}$$

$$= 2r(P) + r\begin{bmatrix} 0 & Q - QP & 0 \\ Q - QP & P - 2Q & Q - QP \\ 0 & Q - PQ & 0 \end{bmatrix}$$

$$= 2r(P) + r\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & P - 2Q & Q - QP \\ 0 & Q - PQ & 0 \end{bmatrix}$$

$$= 2r(P) + \begin{bmatrix} P - 2Q & Q - QP \\ Q - PQ & 0 \end{bmatrix}$$

$$= 2r(P) + r\begin{bmatrix} P - 2Q & 0 \\ 0 & \frac{1}{2(I_m - P)Q(I_m - P)} \end{bmatrix}$$

$$= 2r(P) + r(P - 2Q) + r[(I_m - P)Q(I_m - P)]$$

$$= r(P) + 2r(P + Q) \quad \big(by(2.5)\ ve\ \ (2.10)\big),$$

ve (3.31) de belirtildiği gibi

$$r\begin{bmatrix} P & Q & 0 \\ -Q & P & Q \\ 0 & -Q & P \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} P & Q - PQ & 0 \\ -Q + QP & P + 2Q & Q - QP \\ 0 & -Q + PQ & P \end{bmatrix}$$

$$= 2r(P) + r\begin{bmatrix} 0 & Q - QP & 0 \\ -Q + QP & P + 2Q & Q - QP \\ 0 & -Q + PQ & 0 \end{bmatrix}$$

$$= 2r(P) + r\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & P + 2Q & Q - QP \\ 0 & Q - PQ & 0 \end{bmatrix}$$

$$= 2r(P) + r\begin{bmatrix} P + 2Q & Q - QP \\ Q - QP & 0 \end{bmatrix}$$

$$= 2r(P) + r(P + 2Q) + r[(I_m - P)Q(I_m - P)]$$

$$= r(P) + 2r(P + Q)$$

olduğu kolayca görülebilir.

P ve Q iki idempotent matris olsun. Bu takdirde aşağıda verilen rank eşitliklerinin sağlandığı kolayca gösterilebilir:

(i) $r\begin{bmatrix} P \pm Q & P \\ Q & P \pm Q \end{bmatrix} = 2r(P + Q),$

(ii) $r\begin{bmatrix} P & \alpha Q \\ Q & P \end{bmatrix} = 2r(P + Q)\ ,\ \alpha \neq 1,$

(iii) $r\begin{bmatrix} P & Q \\ Q & P \pm Q \end{bmatrix} = 2r(P + Q),$

(iv) $r\begin{bmatrix} P & Q & Q \\ Q & P & 0 \\ Q & 0 & P \end{bmatrix} = 3r(P + Q),$

(v) $r\begin{bmatrix} P & Q & Q \\ -Q & P & Q \\ -Q & -Q & P \end{bmatrix} = r(P) + 2r(P + Q),$

(vi) $r\begin{bmatrix} P+Q & P & 0 \\ P & P+Q & P \\ 0 & P & P+Q \end{bmatrix} = r(P) + 2r(P+Q),$

(vii) $r\begin{bmatrix} P & Q & 0 & 0 \\ Q & P & Q & 0 \\ 0 & Q & P & Q \\ 0 & 0 & Q & P \end{bmatrix} = 4r(P+Q).$

Yukarıda verilenlere paralel olarak, ortogonal izdüşümlerden oluşan blok matrisler için de çeşitli rank eşitlikleri oluşturulabilir.

Teorem 3.7 P ve Q aynı mertebeden kompleks ortogonal izdüşüm matrisleri olsun. Bu takdirde

$$r\begin{bmatrix} P+Q & PQ \\ QP & P+Q \end{bmatrix} = 2r(P+Q), \tag{3.32}$$

$$r\begin{bmatrix} P+Q & PQ & 0 \\ QP & P+Q & PQ \\ 0 & QP & P+Q \end{bmatrix} = 3r(P+Q) \tag{3.33}$$

rank eşitlikleri sağlanır (Gözpınar, A., 2011).

İspat P ve Q aynı mertebeden kompleks ortogonal izdüşüm matrisler olduğundan

$$\begin{bmatrix} P+Q & PQ \\ QP & P+Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P & Q & 0 \\ Q & 0 & P \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P & Q & 0 \\ Q & 0 & P \end{bmatrix}^*$$

eşitliği yazılabilir. Bu durumda $P+Q = [\,P,Q][P,Q]^*$ eşitliği dikkate alınırsa

$$\mathcal{R}(Q) \subseteq \mathcal{R}(P+Q) \text{ ve } r(P+Q) = r[P,Q]$$

olduğu ve buradan da

$$\begin{aligned} r\begin{bmatrix} P+Q & PQ \\ QP & P+Q \end{bmatrix} &= r\begin{bmatrix} P & Q & 0 \\ Q & 0 & P \end{bmatrix} \\ &= r\begin{bmatrix} P+Q & Q & 0 \\ P+Q & 0 & P \end{bmatrix} \\ &= r\begin{bmatrix} P+Q & 0 & 0 \\ 0 & -Q & P \end{bmatrix} \\ &= r(P+Q) + r[-Q,P] = 2r(P+Q) \end{aligned}$$

olduğu görülür. Öte yandan

$$\begin{bmatrix} P+Q & PQ & 0 \\ QP & P+Q & PQ \\ 0 & QP & P+Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P & Q & 0 & 0 \\ 0 & P & Q & 0 \\ 0 & 0 & P & Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P & Q & 0 & 0 \\ 0 & P & Q & 0 \\ 0 & 0 & P & Q \end{bmatrix}^*$$

olduğun dikkate alınırsa

$$\begin{aligned} r\begin{bmatrix} P+Q & PQ & 0 \\ QP & P+Q & PQ \\ 0 & QP & P+Q \end{bmatrix} &= r\begin{bmatrix} P & Q & 0 & 0 \\ 0 & P & Q & 0 \\ 0 & 0 & P & Q \end{bmatrix} \\ &= r\begin{bmatrix} P+Q & Q & 0 & 0 \\ P+Q & P & Q & 0 \\ P+Q & 0 & P & Q \end{bmatrix} \\ &= r\begin{bmatrix} P+Q & Q & 0 & 0 \\ 0 & P-Q & Q & 0 \\ 0 & -Q & P & Q \end{bmatrix} \\ &= r(P+Q) + r\begin{bmatrix} P-Q & Q & 0 \\ 0 & P & Q \end{bmatrix} \\ &= r(P+Q) + r\begin{bmatrix} P & Q & 0 \\ 0 & P-Q & Q \end{bmatrix} \\ &= r(P+Q) + r\begin{bmatrix} P & Q & 0 \\ 0 & P & Q \end{bmatrix} \\ &= 3r(P+Q) \end{aligned}$$

elde edilir. Benzer düşünceyle tümevarım metodu kullanılarak

$$r\begin{bmatrix} P+Q & PQ & & \\ QP & P+Q & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & PQ \\ & & QP & P+Q \end{bmatrix}_{n\times n} = nr(P+Q) \tag{3.34}$$

olduğu kolayca gösterilebilir.

Öte yandan iki idempotent P ve Q matrisi verildiğinde $P+Q$ matris toplamının rankı, $P-Q$, $PQ \pm QP$, $I_m - P - Q$ matrisleri ve benzerlerinin rankları ile yakın ilişkilidir. Bunun için aşağıdaki formüller verilebilir:

$$r(P+Q) + r(PQ-QP) = r(P-Q) + r(PQ+QP), \tag{3.35}$$

$$r(P+Q) = r(P+Q-PQ), \tag{3.36}$$

$$r(P+Q) = r(PQ+QP) - r(I_m - P - Q) + m. \tag{3.37}$$

Teorem 3.8 P ve Q matrisleri $m-$yinci mertebeden idempotent matrisler olsun. Eğer $\alpha+\beta\neq 0$ olmak üzere α ve β sıfırdan farklı iki skaler ise

$$r(PQ-QP)=r\begin{bmatrix}PQ\\QP\end{bmatrix}+r[PQ,QP]-r(PQ)-r(QP), \tag{3.38}$$

$$r(PQ+QP)=r\begin{bmatrix}PQ & QP\\QP & 0\end{bmatrix}-r(QP)=r\begin{bmatrix}QP & PQ\\PQ & 0\end{bmatrix}-r(PQ), \tag{3.39}$$

$$r(\alpha PQ+\beta QP)=r(PQ+QP) \tag{3.40}$$

rank eşitlikleri sağlanır. Buradan da,

(i) $PQ=QP \Leftrightarrow \mathcal{R}(PQ)=\mathcal{R}(QP)$ ve $\mathcal{R}[(PQ)^*]=\mathcal{R}[(QP)^*]$

(ii) $PQ+QP=0 \Leftrightarrow PQ=QP=0$

ifadelerinin doğruluğu görülür (Gözpınar, A., 2011)..

İspat: (3.38) eşitliğinin ispatını dikkate alarak öncelikle

$$r\begin{bmatrix}PQ & 0 & \alpha PQ\\0 & QP & \beta QP\\PQ & QP & 0\end{bmatrix}=r\begin{bmatrix}PQ & 0 & 0\\0 & QP & 0\\0 & 0 & -\alpha PQ-\beta QP\end{bmatrix}$$

$$=r(PQ)+r(QP)+r(\alpha PQ+\beta QP) \tag{3.41}$$

olduğunu belirtelim. Öte yandan, P ve Q matrisleri idempotent olduğundan elementer matris işlemleriyle

$$r\begin{bmatrix}PQ & 0 & \alpha PQ\\0 & QP & \beta QP\\PQ & QP & 0\end{bmatrix}=r\begin{bmatrix}PQ & 0 & \alpha PQ\\-QPQ & 0 & \beta QP\\PQ & QP & 0\end{bmatrix}$$

$$=r\begin{bmatrix}(1+\alpha\beta^{-1})PQ & 0 & \alpha PQ\\0 & 0 & \beta QP\\PQ & QP & 0\end{bmatrix}$$

$$=r\begin{bmatrix}PQ & 0 & 0\\0 & 0 & \beta QP\\0 & QP & \alpha(1+\alpha\beta^{-1})PQ\end{bmatrix}$$

$$=r\begin{bmatrix}\alpha(1+\alpha\beta^{-1})\beta PQ & QP\\QP & 0\end{bmatrix}+r(PQ)$$

$$= r\begin{bmatrix} PQ & QP \\ QP & 0 \end{bmatrix} r(PQ), \tag{3.42}$$

olduğu görülür. Ayrıca

$$r\begin{bmatrix} PQ & 0 & \alpha PQ \\ 0 & QP & \beta QP \\ PQ & QP & 0 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} PQ & QP \\ QP & 0 \end{bmatrix} + r(PQ) \tag{3.43}$$

eşitliği benzer şekilde gösterilebilir. Öte yandan (3.41)-(3.43) eşitlikleri birleştirilirse (3.39)-(3.40) eşitliklerinin sağlandığı kolayca görülür. Ayrıca

$$PQ - QP = (I_m - P)(I_m - Q) - (I_m - Q)(I_m - P)$$

olduğundan (3.38) ifadesi dikkate alınırsa

$$r(PQ - QP) = r\begin{bmatrix} (I_m - P)(I_m - Q) \\ (I_m - Q)(I_m - P) \end{bmatrix}$$

$$+ r[(I_m - P)(I_m - Q), (I_m - Q)(I_m - P)]$$

$$+ 2r(P) + 2r(Q) - 2m - r(PQ) - r(QP)$$

olduğu görülür. Bu durumda

$$r(PQ + QP) \geq \max\{r(PQ), r(QP)\}$$

rank eşitsizliği (3.39)' dan türetilmiştir.

Aynı büyüklükteki P ve Q matrisleri için

$$\min_{P^-, Q^-} r(P^- - Q^-) = r(P - Q) - r\begin{bmatrix} P \\ Q \end{bmatrix} - r[P, Q] + r(P) + r(Q)$$

olduğunu gösterilebilir. Bu nedenle, P ve Q matrislerinin aynı genelleştirilmiş inverse sahip olması için gerek ve yeter şart

$$r(P - Q) = r\begin{bmatrix} P \\ Q \end{bmatrix} - r[P, Q] + r(P) + r(Q) \tag{3.44}$$

olmasıdır. Diğer taraftan (3.44) eşitliği (3.38) e uygulandığında, uygun mertebeden P ve Q idempotent matrisleri için, PQ ve QP çarpımlarının aynı bir genelleştirilmiş inverse sahip olacağı görülür.

Sonuç 3.2 m −yinci mertebeden idempotent iki P ve Q matrisi için, $U = PQP$ ve $V = QPQ$ ve $\alpha, \beta \neq 0$ iki skaler olmak üzere $\alpha + \beta \neq 0$ olsun. Bu takdirde

$$r(U-V)=r\begin{bmatrix}U\\V\end{bmatrix}+r[U,V]-r(U)-r(V),$$

$$r(U+V)=r\begin{bmatrix}U & V\\V & 0\end{bmatrix}-r(V)=r\begin{bmatrix}V & U\\U & 0\end{bmatrix}-r(U),$$

$$r(\alpha U+\beta V)=r(U+V),$$

$$r(U+V)\geq \max\{r(U),r(V)\}.$$

ifadeleri sağlanır. Bu durumda

(a) $U=V$ olması için gerek ve yeter şart $\mathcal{R}(U)=\mathcal{R}(V)$ ve $\mathcal{R}(U^*)=\mathcal{R}(V^*)$,

(b) $U+V=0$ olması için gerek ve yeter şart $U=V=0$

olmasıdır (Gözpınar, A., 2011).

Teorem 3.9 P ve Q $m-$yinci mertebeden iki idempotent matris olsun. Bu takdirde

$$r\begin{bmatrix}P\\PQ\end{bmatrix}=r\begin{bmatrix}P\\Q\end{bmatrix}+r(QP)-r(Q), \tag{3.45}$$

$$r[P,QP]=r[P,Q]+r(PQ)-r(Q), \tag{3.46}$$

$$r\begin{bmatrix}PQ\\QP\end{bmatrix}=r\begin{bmatrix}P\\Q\end{bmatrix}+r(PQ)+r(QP)-r(P)-r(Q), \tag{3.47}$$

$$r[PQ,Q]=r[P,Q]+r(PQ)+r(QP)-r(P)-r(Q) \tag{3.48}$$

rank eşitlikleri gerçeklenir (Gözpınar, A., 2011).

İspat: İspat için öncelikle aşağıdaki iki rank eşitliğinin sağlandığını belirtelim:

$$r[(I_m-P)(I_m-Q)]=m-r(P)-r(Q)+r(PQ), \tag{3.49}$$

$$r[(I_m-Q)(I_m-P)]=m-r(P)-r(Q)+r(QP). \tag{3.50}$$

Bu durumda elemanter matris işlemleriyle,

$$r\begin{bmatrix}Q & I_m\\PQ & 0\\0 & P\end{bmatrix}=r\begin{bmatrix}0 & I_m\\P & 0\\-PQ & 0\end{bmatrix}=r\begin{bmatrix}P\\PQ\end{bmatrix}+m, \tag{3.51}$$

$$r\begin{bmatrix}P & I_m\\PQ & 0\\0 & Q\end{bmatrix}=r\begin{bmatrix}0 & I_m\\PQ & 0\\-QP & 0\end{bmatrix}=r\begin{bmatrix}PQ\\QP\end{bmatrix}+m \tag{3.52}$$

olduğu gösterilebilir. Ayrıca $\mathcal{R}(P) \cap \mathcal{R}(I_m - P) = \{0\}$ ve $\mathcal{R}(Q) \cap \mathcal{R}(I_m - Q) = \{0\}$ eşitliklerinin sağlandığını belirtelim. Böylece (3.7), (3.49) ve (3.50) eşitlikleri dikkate alınırsa

$$r\begin{bmatrix} Q & I_m \\ P & 0 \\ 0 & P \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} 0 & I_m - P \\ P & -P \\ 0 & P \end{bmatrix}$$

$$= r\begin{bmatrix} Q & (I_m - Q)(I_m - P) \\ P & 0 \end{bmatrix} + r(P)$$

$$= r\begin{bmatrix} Q \\ P \end{bmatrix} + r[(I_m - Q)(I_m - P)] + r(P)$$

$$= r\begin{bmatrix} P \\ Q \end{bmatrix} + m - r(Q) + r(QP) \tag{3.53}$$

ve

$$r\begin{bmatrix} P & I_m \\ PQ & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} P & I_m - P \\ PQ & PQ \\ 0 & Q \end{bmatrix}$$

$$= r\begin{bmatrix} P & (I_m - P)(I_m - Q) \\ PQ & 0 \end{bmatrix} + r(Q)$$

$$= r\begin{bmatrix} P \\ PQ \end{bmatrix} + r[(I_m - P)(I_m - Q)] + r(Q)$$

$$= r\begin{bmatrix} P \\ PQ \end{bmatrix} + m - r(P) + r(PQ). \tag{3.54}$$

eşitliklerinin sağlandığı görülür. Bu durumda (3.51) ve (3.53) eşitlikleri birleştirilirse (3.45) eşitliğinin sağlandığı ve (3.52), (3.54) ve (3.45) eşitlikleri birleştirilirse (3.47) eşitliğinin sağlandığı elde edilir. Öte yandan (3.46) ve (3.48)' deki iki rank eşitliği

$$\begin{bmatrix} Q & P & 0 \\ I_m & 0 & P \end{bmatrix} \text{ ve } \begin{bmatrix} P & QP & 0 \\ I_m & 0 & Q \end{bmatrix}$$

blok matrislerinden benzer yolla elde edilebilir. Bu durumda (3.47) ve (3.48) ifadeleri (3.38) ifadesinde yerlerine yazılırsa

$$r(PQ - QP) = r\begin{bmatrix} P \\ PQ \end{bmatrix} + r[P, Q] + r(PQ) + r(QP) - 2r(P) - 2r(Q)$$

olduğu görülür.

3.2 İki İdempotent Matrisin Farkı İçin Rank Eşitlikleri

Bu kısımda elementer matris işlemleri göz önüne alınarak, iki idempotent matrisin farkıyla ilgili çeşitli rank eşitlikleri verilerek bununla ilgili bazı ilginç sonuçlar ve uygulamalar ele alınmıştır.

Teorem 3.10 $P, Q \in \mathbb{C}^{m\times m}$ iki idempotent matris olsun. Bu takdirde $P - Q$ farkı için

$$r(P-Q) = r\begin{bmatrix} P \\ Q \end{bmatrix} + r[P\,, Q] - r(P) - r(Q) \tag{3.55}$$

$$= r(P-PQ) + r(PQ-Q) \tag{3.56}$$

$$= (P-QP) + r(QP-Q) \tag{3.57}$$

rank eşitlikleri sağlanır (Tian ve Styan, 2006).

İspat: Blok Gauss eliminasyon metodu ile

$$r\begin{bmatrix} -P & 0 & P \\ 0 & Q & Q \\ P & Q & 0 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} -P & 0 & 0 \\ 0 & Q & 0 \\ 0 & 0 & P-Q \end{bmatrix}$$

$$= r(P) + r(Q) + r(P-Q).$$

olduğunu görmek kolaydır. Öte yandan, P ve Q matrisleri idempotent olduğundan,

$$r\begin{bmatrix} -P & 0 & P \\ 0 & Q & Q \\ P & Q & 0 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} -P & 0 & P \\ -QP & 0 & Q \\ P & Q & 0 \end{bmatrix}$$

$$= r\begin{bmatrix} 0 & 0 & P \\ 0 & 0 & Q \\ P & Q & 0 \end{bmatrix}$$

$$= r\begin{bmatrix} P \\ Q \end{bmatrix} + r[P\,, Q]$$

yazılabilir. Yukarıdaki iki eşitlik birleştirilerek (3.55) elde edilir. Ardından sırasıyla (3.6) ve (3.7) ifadeleri (3.55) de yerlerine yazılırsa,

$$r[P, Q] = r(P) + r(Q-PQ),\ r[P, Q] = r(Q) + r(P-QP),$$

$$r\begin{bmatrix} P \\ Q \end{bmatrix} = r(P) + r(Q-PQ),\ r\begin{bmatrix} P \\ Q \end{bmatrix} = r(Q) + r(P-QP)$$

olduğu görülür.

Sonuç 3.3 $P, Q \in \mathbb{C}^{m\times m}$ iki idempotet matris olsun. Bu takdirde

(a) $PQ = 0$ veya $QP = 0$ ise $r(P - Q) = r(P\ ) + r(Q)$

(b) $PQ = 0$ ise $r(P - QP) + r(QP - Q) = r(P) + r(Q)$

(c) $QP = 0$ ise $r(P - QP) + r(PQ - Q) = r(P) + r(Q)$

(d) $r(P - Q) = r(P) - r(Q) \Leftrightarrow PQP = Q$

$\Leftrightarrow R(Q) \subseteq R(P)$ ve $R(Q^*) \subseteq R(P^*)$.

(e) $P - Q$ farkının nonsingüler olması için gerek ve yeter şart

$$r\begin{bmatrix} P \\ Q \end{bmatrix} = r[P, Q] = r(P) + r(Q) = m,$$

veya buna denk olarak $R(P) \oplus R(Q) = R(P^*) \oplus R(Q^*) = \mathbb{C}^m$ olmasıdır.

P matrisi idempotent olduğunda $I_m - P$ matrisinin de idempotent olacağı dikkate alınırsa (3.55)-(3.57) ifadelerinde P matrisi yerine $I_m - P$ matrisi yazıldığında aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Sonuç 3.4 $P, Q \in \mathbb{C}^{m\times m}$ iki idempotent matris olsun. Bu takdirde $I_m - P - Q$ için

$$r(I_m - P - Q) = r(PQ) - r(QP) - r(P) - r(Q) + m \tag{3.58}$$

$$= r(I_m - P - \mathrm{Q} + \mathrm{PQ}) + \mathrm{r(PQ)} \tag{3.59}$$

$$= r(\ I_m - P - Q + QP) + (QP) \tag{3.60}$$

rank eşitlikleri sağlanır. Ayrıca,

(a) $P + Q = I_m \Leftrightarrow PQ = QP = 0\ ve\ r(P + Q) = r(P) + r(Q) = m,$

(b) $I_m - P - Q$ $n$onsingülerdir $\Leftrightarrow r(PQ) = r(QP) = r(P) = r(Q)$

ifadeleri doğrudur (Tian ve Styan, 2006).

İspat: (3.55) eşitliğinde P matrisinin yerine I_m – P matrisi konulursa

$$r(I_m - P - Q) = r\begin{bmatrix} I_m - P \\ Q \end{bmatrix} + r[I_m - P, Q] - r(I_m - P) - r(Q)$$

elde edilir. Bu durumda (3.6) ve (3.7) ifadeleri dikkate alınırsa

$$r[I_m - P, Q] = r(I_m - P) + r[Q - (I_m - P)Q]$$

$$= m - r(P) + r(PQ)$$

ve

$$r\begin{bmatrix} I_m - P \\ Q \end{bmatrix} = r(I_m - P) + r[Q - Q(I_m - P)]$$

$$= m - r(P) + r(QP)$$

olup (3.58)' in sağlandığı görülür. Öte yandan (3.56) eşitliğinde P matrisinin yerine $I_m - P$ matrisi yazılırsa

$$r[(I_m - P) - Q] = r[(I_m - P) - \big((I_m - P)Q\big] + r[(I_m - P)Q - Q]$$

$$= r(I_m - P - Q + PQ) + r(PQ)$$

olur ki bu da (3.59) eşitliğinin sağlandığını gösterir. (3.60) rank eşitliği de benzer şekilde gösterilebilir. Ayrıca (a) ve (b)' deki ifadeler ise (3.58)-(3.60) eşitliklerinden direkt olarak görülebilir.

Teorem 3.11 $P, Q \in \mathbb{C}^{m\times m}$ iki idempotent matris olsun. Bu takdirde $P - Q$ için

$$r(P - Q) = r\begin{bmatrix} P & Q \\ Q & 0 \end{bmatrix} - r(Q) = r\begin{bmatrix} Q & P \\ P & 0 \end{bmatrix} - r(P) \tag{3.61}$$

$$= r(P - PQ - QP + QPQ) + r(Q) \tag{3.62}$$

$$= r(Q - PQ - QP + PQP) + r(P) \tag{3.63}$$

rank eşitlikleri sağlanır. Ayrıca

(a) Eğer $PQ = QP$ ise $r(P + Q) = r(P - PQ) + r(Q) = r(Q - PQ) + r(P)$
(b) Eğer $PQ = 0$ veya $QP = 0$ ise $r(P + Q) = r(P) + r(Q)$

ifadeleri doğrudur (Tian ve Styan, 2006).

Teorem 3.11 in ispatı aslında Teorem 3.10 un ispatı ile aynıdır.

Şimdi $P + Q$ toplamının nonsigülerliği için gerek ve yeter koşulları bulmak için (3.61) eşitliğini kullanabiliriz.

Sonuç 3.5 Eğer P , $Q \in \mathbb{C}^{m\times m}$ iki idempotent matris ise aşağıdaki ifadeler denktir:

(a) $P + Q$ nonsingülerdir.

(b) $r\begin{bmatrix} P \\ Q \end{bmatrix} = m$ ve $R\begin{bmatrix} P \\ Q \end{bmatrix} \cap R\begin{bmatrix} Q \\ 0 \end{bmatrix} = \{0\}$.

(c) $r[P, Q] = m$ ve $R\begin{bmatrix} P^* \\ Q^* \end{bmatrix} \cap R\begin{bmatrix} Q^* \\ 0 \end{bmatrix} = \{0\}$.

(d) $r\begin{bmatrix} Q \\ P \end{bmatrix} = m$ ve $R\begin{bmatrix} Q \\ P \end{bmatrix} \cap R\begin{bmatrix} P \\ 0 \end{bmatrix} = \{0\}$.

(e) $r[Q, P] = m$ ve $R\begin{bmatrix} Q^* \\ P^* \end{bmatrix} \cap R\begin{bmatrix} P^* \\ 0 \end{bmatrix} = \{0\}$ (Tian ve Styan, 2006).

İspat: (3.61)' den kolayca görülür ki, $P + Q$ toplamının nonsingüler olması için gerek ve yeter şart

$$r\begin{bmatrix} P & Q \\ Q & 0 \end{bmatrix} = r(Q) + m \quad \text{veya} \quad r\begin{bmatrix} Q & P \\ P & 0 \end{bmatrix} = r(P) + m \tag{3.64}$$

olmasıdır. Bu durumda (3.64) ifadesi

$$r\begin{bmatrix} P & Q \\ Q & 0 \end{bmatrix} \leq r\begin{bmatrix} P \\ Q \end{bmatrix} + r\begin{bmatrix} Q \\ 0 \end{bmatrix} \leq m + r(Q),$$

$$r\begin{bmatrix} P & Q \\ Q & 0 \end{bmatrix} \leq r[P, Q] + r[Q, 0] \leq m + r(Q),$$

$$r\begin{bmatrix} Q & P \\ P & 0 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} Q \\ P \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P \\ Q \end{bmatrix} \leq m + r(P),$$

$$r\begin{bmatrix} Q & P \\ P & 0 \end{bmatrix} \leq r[Q, P] + r[P, Q] \leq m + r(P),$$

eşitsizlikleriyle birleştirilirse (a)-(e) ifadeleri elde edilir ve böylece ispat tamamlanır.

(3.61) eşitliğinde P ve Q yerine sırasıyla $I_m - P$ ve $I_m - Q$ alınarak aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.6 P ve $Q \in \mathbb{C}^{m \times m}$ iki idempotent matris olsun. Bu takdirde

(a) $r(I_m - P - Q) = r(QPQ) - r(Q) + m$,

(b) $r(2I_m - P - Q) = r(Q - QPQ) - r(Q) + m$
$= r(P - PQP) - r(P) + m$,

(c) $r(I_m + P - Q) = m \Leftrightarrow r(QPQ) = r(Q)$,

(d) $r(2I_m - P - Q) = m \Leftrightarrow r(P - PQP) = r(P)$
$\Leftrightarrow r(Q - QPQ) = r(Q)$,

eşitlikleri sağlanır (Tian ve Styan, 2006).

Şimdi, P ve Q matrisleri idempotent olmak üzere $PQ - QP$ için bazı rank eşitliklerini verebiliriz; bu rank eşitlikleri bizi P ve Q matrislerinin değişmeli olması için bazı gerek ve yeter koşullara götürecektir.

Teorem 3.12 P ve $Q \in \mathbb{C}^{m\times m}$ iki idempotent matris olsun. Bu takdirde

$$\begin{aligned} r(PQ - QP) &= r(P - Q) + r(I_m - P - Q) - m \\ &= r(P - Q) + r(PQ) + r(QP) - r(P) - r(Q) \\ &= r\begin{bmatrix} P \\ Q \end{bmatrix} + r[P, Q] + r(PQ) - 2r(P) - 2r(Q) \\ &= r(P - PQ) + r(PQ - Q) + r(PQ) - r(QP) - r(P) - r(Q) \\ &= r(P - QP) + r(QP - Q) + r(PQ) - r(QP) - r(P) - r(Q) \end{aligned}$$

dir. Ayrıca eğer hem P hem de Q Hermitian idempotent ise, bu takdirde

$$r(PQ - QP) = 2\{r[P, Q] + r(PQ) - r(P) - r(Q)\}$$

olacaktır (Tian ve Styan, 2006).

İspat: Bu takdirde $PQ - QP = (P - Q)(P + Q - I_m)$ olduğundan

$$r(PQ - QP) = r\begin{bmatrix} I_m & P + Q - I_m \\ P - Q & 0 \end{bmatrix} - m$$

yazılabilir. Öte yandan, blok Gauss eliminasyonu ile

$$r\begin{bmatrix} I_m & P + Q - I_m \\ P - Q & 0 \end{bmatrix} = r(P - Q) + r(I_m - P - Q)$$

olduğu kolayca görülür ve böylece istenen eşitlik elde edilir.

Teorem 3.12' deki ilk eşitlik, $PQ - QP$, $P - Q$ ve $I_m - P - Q$ matrisleri arasında ilginç bir ilişkinin var olduğunu ortaya k oymaktadır.

Sonuç 3.7 $P, Q \in \mathbb{C}^{m\times m}$ iki idempotent matris olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktir (Tian ve Styan, 2006):

(a) $PQ = QP$.

(b) $r(P - Q) + r(I_m - P - Q) = m$.

(c) $r(P - Q) = r(P) + r(Q) - r(PQ) - r(QP)$.

(d) $r(P-PQ)=r(P)-r(PQ)\ ve\ r(Q-PQ)=r(Q)-r(PQ)$.

(e) $r(P-QP)=r(P)-r(QP)\ ve\ r(Q-QP)=r(Q)-r(QP)$.

Sonuç 3.8 $P,Q\in\mathbb{C}^{m\times m}$ iki idempotent matris olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktir (Tian ve Styan, 2006).

(a) $r(PQ-QP)=r(P-Q)$.

(b) $r(PQ)=r(QP)=r(P)=r(Q)$.

(c) I_m-P-Q nonsingülerdir.

İspat: (a)⟺(b) durumu Teorem 3.13' teki ikinci eşitlikten ve (b) ⟺(c) durumu ise Sonuç 3.6 (b)' den geldiğini görmek kolaydır.

Sonuç 3.9 $P,Q\in\mathbb{C}^{m\times m}$ iki idempotent matris olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktir (Tian ve Styan, 2006):

(a) $PQ-QP$ nonsigülerdir.
(b) Hem $P-Q$ hem de I_m-P-Q nonsingülerdir.
(c) $R(P)\oplus R(Q)=R(P^*)\oplus R(Q^*)=\mathbb{C}^m$ ve $r(PQ)=r(PQ)=r(P)=r(Q)$.

İspat: (a)⟺(b) durumu Teorem 3.13' teki birinci eşitlikten ve (b) ⟺(c) durumunun ise Sonuç 3.2 (e) ve Sonuç 3.3 (b)'den geldiğini görmek kolaydır.

Cochran Teoremi P ve Q iki idempotent matris olmak üzere $P+Q$ toplamının da idempotent olması için $PQ=QP=0$ olmasının gerek ve yeter şart olduğunu ve bu durumda $r(P+Q)=r(P)+r(Q)$ eşitliğinin sağlandığını ifade eder. Matrisler Hermitian olmaksızın bunu görmek için öncelikle $(P+Q)^2-(P+Q)=PQ+QP$ olduğunu belirtelim. $PQ+QP=0$ ifadesi P ile soldan çarpılırsa $P\,Q+\,Q\,P=0$ ve dolayısıyla $QP=PQP$ olduğu ve $PQ+QP=0$ ifadesi P ile sağdan çarpılırsa $PQP+QP=0$ ve böylece $PQP=-QP$ olduğu görülür. Bu nedenle $QP=0=PQ$ elde edilir.

Öte yandan iki idempotent P ve Q matrisinin $P-Q$ farkının idempotent olması için gerek ve yeter şart $PQP=Q$ veya buna denk olarak $r\,(P-Q)=r\,(P)-r\,(Q)$ rank eşitliğinin sağlanmasıdır.

Bu sonuçlar bizi P ve Q idempotent matrisler olmak üzere $(P+Q)^2-(P+Q)$ ve $(P-Q)^2-(P-Q)$ ifadelerinin rankını dikkate almaya motive eder. Bu durum ise $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$ için

$$r(A^2-A)=r(A)+r(A-I_m)-m \tag{3.65}$$

şeklindeki iyi bilinen rank formülüne dayanır. Bu durumda yukarıdaki bazı teorem ve sonuçlara dayanarak aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.13 $P,Q \in \mathbb{C}^{m\times m}$ iki idempotent matris olsun. Bu durumda $PQ+QP$ ifadesi aşağıdaki rank eşitliklerini sağlar (Tian ve Styan, 2006):

$$\begin{aligned} r(PQ+QP) &= r(P+Q)+r(I_m-P-Q)-m \\ &= r(P+Q)+r(PQ)+r(QP)-r(P)-r(Q) \\ &= r(P-PQ-QP+QPQ)+r(PQ)+r(QP)-r(P) \\ &= r(Q-PQ-QP+PQP)+r(PQ)+r(QP)-r(Q). \end{aligned}$$

İspat: (3.65) eşitliği $(P+Q)^2-(P+Q)$ ya uygulandığında ilk eşitlik ve (3.58) kullanarak ikinci eşitlik elde edilir. Diğer eşitlikler ise Teorem 3.11' den kolayca görülebilir.

Teorem 3.13' te $r(PQ+QP)$ için verilen birinci rank eşitliği ile Teorem 3.12' de $r\,(PQ-QP)$ için verilen ilk rank eşitliği birleştirildiğinde, aşağıdaki ilginç rank formülü elde edilir:

$$r(P+Q)+r(PQ-QP)=r(P-Q)+r(PQ+QP) \tag{3.66}$$

Sonuç 3.10 $P,Q \in \mathbb{C}^{m\times m}$ iki idempotent matris olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktir (Tian ve Styan, 2006):

(a) $r(PQ+QP)=r(P+Q)$.
(b) $r(I_m-P-Q)=m$.
(c) $r(PQ)=r(QP)=r(P)=r(Q)$.
(d) $r(PQ-QP)=r(P-Q)$.

İspat: (a)⟺(b) durumunun Teorem 3.13 ve (b) ⟺ (c) ⟺ (d) durumlarının ise Sonuç 3.7' den geldiğini görmek oldukça kolaydır.

Sonuç 3.11 $P, Q \in \mathbb{C}^{m\times m}$ iki idempotent matris olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktir (Tian ve Styan, 2006):

(a) $PQ + QP$ nonsingülerdir.

(b) $P + Q$ ve $I_m - P - Q$ nonsingülerdir.

İspat: Sonuç 3.11 doğrudan Teorem 3.13 ün bir sonucudur.

Sonuç 3.12 $P, Q \in \mathbb{C}^{m\times m}$ iki idempotent matris olsun. Bu durumda

$$r[(P-Q)^2 - (P-Q)] = r(I_m - P - Q) + r(P-Q) - m$$

$$= r(PQP) - r(P) + r(P-Q)$$

eşitliği sağlanır (Tian ve Styan, 2006).

İspat: Birinci eşitlik, (3.65) eşitliğinden ve ikinci eşitlikse, Sonuç 3.5 (a)' dan elde edilir..

Sonuç 3.13 $P, Q \in \mathbb{C}^{m\times m}$ iki idempotent matris olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktir (Tian ve Styan, 2006):

(a) $P - Q$ idempotenttir.

(b) $r(I_m - P - Q) = m - r(P-Q)$.

(c) $PQP = Q$.

(d) $r(P-Q) = r(P) - r(Q)$.

(e) $R(Q) \subseteq R(P)$ ve $R(Q^*) \subseteq R(P^*)$.

Şimdi $I_m - PQ$ ve $PQ - (PQ)^2$ ifadeleri için bazı rank eşitlikleri verilecek ve daha sonra bunlar PQ çarpımının idempotentliğini karakterize etmek için kullanılacaktır.

Teorem 3.14 Eğer $P, Q \in \mathbb{C}^{m\times m}$ iki idempotent matris ise bu durumda $I_m - PQ$ ifadesi aşağıdaki rank eşitliğini sağlar (Tian ve Styan, 2006):

$$r(I_m - PQ) = r(2I_m - P - Q).$$

İspat: Rank işlemi Schur bileşen üzerinde toplamsal olduğundan,

$$r\begin{bmatrix} I_m & I_m - PQ \\ Q & 0 \end{bmatrix} = m + r(Q - QPQ) \tag{3.67}$$

olduğu ve elementer satır ve sütun işlemlerini kullanılarak

$$r\begin{bmatrix} I_m & I_m - PQ \\ Q & 0 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} I_m - PQ & I_m - PQ \\ Q & 0 \end{bmatrix} = r(Q) + r(I_m - PQ)$$

elde edilir. Buradan da

$$r(I_m - PQ) = r(Q - QPQ) - r(Q) + m \tag{3.68}$$

olduğu görülür. Böylece Sonuç 3.5(b)' den istenen eşitliğin sağlandığı görülür.

Eğer (3.67) eşitliğinde P ve Q matrisleri yerine sırasıyla $I_m - P$ ve $I_m - Q$ matrisleri alınırsa aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$(P + Q) = r(P + Q - PQ) = r(P + Q - QP).$$

Sonuç 3.14 $P, Q \in \mathbb{C}^{m\times m}$ iki idempotent matris olsun. Bu durumda

$$r[PQ - (PQ)^2] = r(2I_m - P - Q) + r(PQ) - m \tag{3.69}$$

eşitliği sağlanır (Tian ve Styan, 2006).

İspat: (3.65)' eşitliğinin $PQ - (PQ)^2$ ifadesine uygulanması

$$r\,[PQ - (PQ)^2] = r(I_m - P) + r\,(PQ) - m \tag{3.70}$$

değerini verir. Eğer (3.67) ifadesi (3.70) de yerine yazılırsa (3.69) elde edilir.

Sonuç 3.14 iki idempotent matrisin PQ çarpımının idempotent olması için gerek ve yeter şartın $r(2I_m - P - Q) = m - r(PQ)$ olduğunu gösterir.

Sonuç 3.15 $P, Q \in \mathbb{C}^{m\times m}$ iki idempotent matris olsun. Bu durumda

(a) $r(P - P^*) = 2r[P, P^*] - 2r(P).$

(b) $r(I_m - P - P^*) = r(I_m + P - P^*) = m.$

(c) $r(P + P^*) = r(PP^* + P^*P) = r[P, P^*].$

(d) $R(P) \subseteq R(P + P^*)\ ve\ R(P^*) \subseteq R(P + P^*).$

(e) $r(PP^* - P^*P) = r(P - P^*).$

(f) $r(I_m - P^*P) = r(2I_m - P - P^*)$

ifadeleri doğrudur (Tian ve Styan, 2006).

Yukarıdaki Teoremler ve Sonuçlarda verilen ifadeler, skaler-potent matrislere yani, $\lambda \neq 0$ ve $\mu \neq 0$ olmak üzere $P^2 = \lambda P$ ve $Q^2 = \mu Q$ özelliklerini sağlayan matrislere kolayca genişletilebilir. Gerçekten

$$\left(\frac{1}{\lambda}P\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2}P^2 = \frac{1}{\lambda}P \text{ ve } \left(\frac{1}{\mu}Q\right)^2 = \frac{1}{\mu^2}Q^2 = \frac{1}{\mu}Q$$

olup P/λ ve Q/μ matrisleri idempotenttir. Böylece skaler-potent matrisler için aşağıdaki rank eşitlikleri verilebilir:

$$r(\mu P - \lambda Q) = r\begin{bmatrix} P \\ Q \end{bmatrix} + r[P, Q] - r(P) - r(Q),$$

$$r(\mu P + \lambda Q) = r\begin{bmatrix} P & Q \\ Q & 0 \end{bmatrix} - r(Q) = r\begin{bmatrix} Q & P \\ Q & 0 \end{bmatrix} - r(P),$$

$$r(\lambda\mu I_m - \mu P - \lambda Q) = r(PQ) + r(QP) - r(P) - r(Q) + m,$$

$$r(PQ - QP) = r(\mu P - \lambda Q) + r(\lambda\mu I_m - \mu P - \lambda Q) - m,$$

$$r(PQ + QP) = r(\mu P + \lambda Q) + r(\lambda\mu I_m - \mu P - \lambda Q) - m,$$

$$r(\lambda\mu I_m - PQ) = r(2\lambda\mu I_m - \mu P - \lambda Q).$$

Bu kısmın sonunda hem P hem de Q idempotent olmak üzere $PA - AQ$ matris farkı için bazı rank eşitlikleri verilecektir. Bu eşitlikler, bir P idempotent matrisi ile keyfi bir A matrisinin değişmeli olduğunu ifade eder.

Teorem 3.15 $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ olmak üzere $P \in \mathbb{C}^{m\times m}$, $Q \in \mathbb{C}^{n\times n}$ iki idempotent matris olsun. Bu takdirde $PA - AQ$ matrisi için

$$r(PA - AQ) = r\begin{bmatrix} PA \\ Q \end{bmatrix} + r[AQ, P] - r(P) - r(Q) \tag{3.71}$$

$$= r(PA - PAQ) + r(PAQ - AQ). \tag{3.72}$$

rank eşitliği sağlanır. Ayrıca,

(a) Eğer $PAQ = 0$ ise $r(PA - AQ) = r(PA) + r(AQ)$.
(b) $PA = AQ \Leftrightarrow R(AQ) \subseteq R(P)$ ve $R[(PA)^*] \subseteq R(Q^*)$.
(c) Eğer $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$ ise $PA = AP \Leftrightarrow R(AP) \subseteq R(P)$ ve $R[(PA)^*] \subseteq R(P^*)$

dir (Tian ve Styan, 2006).

İspat: Blok Gauss eliminasyon yöntemiyle

$$r\begin{bmatrix} -P & 0 & PA \\ 0 & Q & Q \\ P & AQ & 0 \end{bmatrix} = r(P) + r(Q) + r(PA - AQ) \tag{3.73}$$

ve

$$r\begin{bmatrix}-P & 0 & PA\\ 0 & Q & Q\\ P & AQ & 0\end{bmatrix} = r\begin{bmatrix}0 & PAQ & PA\\ 0 & Q & Q\\ P & AQ & 0\end{bmatrix}$$

$$= r\begin{bmatrix}0 & 0 & PA\\ 0 & 0 & Q\\ P & AQ & 0\end{bmatrix}$$

$$= r\begin{bmatrix}PA\\ Q\end{bmatrix} + r[AQ, P] \tag{3.74}$$

olduğu kolayca görülebilir. Bu durumda (3.73) ve (3.74) eşitlikleri birleştirilerek (3.71) elde edilir. Teorem 3.10 un sonuçları (3.71)' deki $[AQ, P]$ ve $\begin{bmatrix}PA\\ Q\end{bmatrix}$ matrislerine uygulanırsa (3.72) ifadesi elde edilir. Öte yandan (b) ve (c)' deki sonuçlar ise (3.71) ve (3.72)' nin doğal sonuçlarıdır.

Hem P hem de Q idempotent olmak üzere eğer Teorem 3.15 $PQ - QP$ ifadesine uygulanırsa $PQ - QP$ matrisinin rankı için bazı yeni formüller elde edilir.

Sonuç 3.16 $P, Q \in \mathbb{C}^{m\times m}$ iki idempotent matris olsun. Bu takdirde

$$r(PQ - QP) = r\begin{bmatrix}PQ\\ P\end{bmatrix} + r[QP, P] - 2r(P)$$

$$= r\begin{bmatrix}QP\\ Q\end{bmatrix} + r[PQ, Q] - 2r(Q)$$

$$= r(PQ - PQP) + r(PQP - QP)$$

$$= r(QP - QPQ) + r(QPQ - QP) = r(QP - PQ)$$

eşitliği sağlanır (Tian ve Styan, 2006). Öte yandan eğer hem P hem de Q matrisi Hermitian idempotent ise, bu takdirde

$$r(PQ - QP) = 2r(PQ - PQP) = 2r(QP - QPQ)$$

ve dolayısıyla

$$r(PQ - PQP) = r(PQ) + r[P, Q] - r(P) - r(Q)$$

$$= r(PQ) + r(Q - PQ) - r(Q)$$

$$= r(QP) + r(P - PQ) - r(P). \tag{3.75}$$

olduğu görülür.

Sonuç 3.17 $P, Q \in \mathbb{C}^{m\times m}$ iki idempotent matris olsun. Bu takdirde

$$r(P-Q) = r[(P-PQ)+\alpha(PQ-Q)] \tag{3.76}$$

$$= r[(Q-QP)+\alpha(QP-P)] \tag{3.77}$$

rank eşitliği her $\alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha \neq 0$ için sağlanır. Özellikle

$$r(\,P-Q) = r(P+Q-2PQ) = r(P+Q-2QP) \tag{3.78}$$

dir (Tian ve Styan, 2006).

İspat: Her $\alpha \in \mathbb{C}$ için

$$P - PQ + \ \alpha(PQ-Q) = P(P+\alpha Q) - (P+\alpha Q)Q$$

olduğunu belirtelim. O halde (3.71) kullanılarak, $\alpha \neq 0$ için

$$r[P-PQ+\ \alpha(PQ-Q)] = r\begin{bmatrix} P(P+\alpha Q) \\ Q \end{bmatrix} + r[(P+\alpha Q)Q, P] - r(P) - r(Q)$$

$$= r\begin{bmatrix} P \\ Q \end{bmatrix} + r[\alpha Q, P] - r(P) - r(Q)$$

$$= r\begin{bmatrix} P \\ Q \end{bmatrix} + r[P, Q] - r(P) - r(Q).$$

elde edilir. Son eşitliğin Teorem 3.11 ile birleştirilmesi (3.76) ifadesini ve P ile Q nun yer değiştirmesi ise (3.77) ifadesini verir. (3.76) ve (3.77) eşitliklerinde $\alpha = -1$ alındığında (3.78) elde edilir. (3.76) da P yerine $I_m - P$ alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.18 $P, Q \in \mathbb{C}^{m\times m}$ iki idempotent matris olsun. Bu takdirde

$$r(I_m - P - Q + \ \alpha PQ) = r(I_m - P - Q)$$

eşitliği her $\alpha \ \neq 1, \alpha \ \in \ \mathbb{C}$ için gerçeklenir (Tian ve Styan, 2006).

3.3 İnvolüt Matrisler İçin Rank Eşitlikleri

Bir matris $A \in \mathbb{C}^{mxm}$ matrisi için A nın karesi birim matris ise yani $A^2 = I_m$ ise A matrisine involüt matris denildiğini hatırlayalım. Aslında bir involüt matris bir nonsingular tripotent matristir. İnvolüt matrislerle idempotent matrislerin yakından bağlantılı olduğu bilinmektedir.

Gerçekten herhangi bir involüt A matrisi için, $\frac{1}{2}(I_m + A)$ ve $\frac{1}{2}(I_m - A)$ matrisleri idempotenttir. Ayrıca herhangi bir P idempotent matrisi için, $\pm(I_m - 2P)$ $m$atrisleri involüttür. Bu nedenle, önceki kısımda idempotent matrisler verilen tüm özellikleri involüt matrisler için de sağlayabiliriz.

Teorem 3.16 $A, B \in \mathbb{C}^{mxm}$ iki involüt matris olsun. Bu takdirde $A + B$ toplamının rankı için

$$r(A+B) = r\begin{bmatrix} I_m + A \\ I_m - B \end{bmatrix} + r[I_m + A, I_m - B] - r(I_m + A) - r(I_m - B), \quad (3.79)$$

$$r(A+B) = r[(I_m + A)(I_m - B)] + r[(I_m + A)(I_m - B)] \quad (3.80)$$

eşitlikleri sağlanır (Tian ve Ark. 2001).

İspat: A ve B matrisleri involüt matrisler olduğunda hem $P = \frac{1}{2}(I_m + A)$ ve hem de $Q = \frac{1}{2}(I_m - B)$ matrisleri idempotent olduğundan

$$r(P - Q) = r[\tfrac{1}{2}(I_m + A) - \tfrac{1}{2}(I_m - B)] = r(A + B),$$

ve

$$r\begin{bmatrix} P \\ Q \end{bmatrix} + r[P, Q] - r(P) - r(Q) = r\begin{bmatrix} I_m + A \\ I_m - B \end{bmatrix} + r[I_m + A, I_m - B]$$
$$-r(I_m + A) - r(I_m - B)$$

eşitlikleri yazılabilir. Ayrıca

$$r(P - PQ) = r[(I_m + A)(I_m - \tfrac{1}{2}(I_m - B))] = r[(I_m + A)(I_m - B\ )],$$

$$r(PQ - Q) = r\left[\left(\tfrac{1}{2}(I_m + A) - I_m\right)(I_m - B)\right] = r[(I_m - A)(I_m - B)]$$

eşitlikleri sağlanır. Böylece ispat tamamlanmış olur.

B matrisi involüt matris olduğunda $-B$ de involüt matris olacaktır. Böylece (3.79) ve (3.80) de B yerine $-B$ alınarak iki involüt matrisin farkı olarak $A - B$ için rank eşitlikleri verilebilir.

Teorem 3.17 $A, B \in \mathbb{C}^{mxm}$ iki involüt matris olsun. Bu takdirde $A + B$ ve $A - B$ için aşağıdaki rank eşitlikleri sağlanır (Tian ve Ark. 2001):

$$r(A+B) = r[(I_m+A)(I_m-B)] + r[(I_m+B)(I_m+A)]$$
$$-r(I_m+A) - r(I_m+B) + m, \quad (3.81)$$
$$r(A-B) = r[(I_m+A)(I_m-B)] + r(I_m-B)(I_m+A)]$$
$$-r(I_m+A) - r(I_m-B) + m. \quad (3.82)$$

İspat: (3.58) eşitliğinde $P = \frac{1}{2}(I_m + A)$ ve $Q = \frac{1}{2}(I_m + B)$ alınırsa (3.81) elde edilir. (3.81) de B yerine $-B$ alınırsa (3.82) eşitliğinin sağlandığı görülür.

(3.80) ile (3.81) eşitlikleri birleştirilerek, A ve B involüt matrisleri için

$$r[(I_m+B)(I_m+A)] = r(I_m+B) + r(I_m+A) - m$$
$$+r[(I_m-A)(I_m+B)]$$

ilginç rank eşitliğine ulaşılır.

Teorem 3.18 $A, B \in \mathbb{C}^{mxm}$ iki involüt matris olsun. Bu takdirde

$$r(AB-BA) = r(A+B) + r(A-B) - m, \quad (3.83)$$

ve dolayısıyla

$$AB = BA \Leftrightarrow r(A+B) + r(A-B) = m \quad (3.84)$$

ifadesi sağlanır (Tian ve Ark. 2001).

İspat: Teorem 3.16' nın ilk eşitliğinde $P = \frac{1}{2}(I_m + A)$ ve $Q = \frac{1}{2}(I_m - B)$ alınıp gerekli sadeleştirme yapılırsa istenen sonuç elde edilir.

(3.79)-(3.82) eşitlikleri (3.83) te yerine yazılırsa, $AB - BA$ için daha farklı rank eşitliklerinin sağlanabileceği görülür.

Teorem 3.19 $A \in \mathbb{C}^{mxm}$ bir involüt matris olsun. Bu takdirde

$$r(A-A^*) = 2r[I_m + A\,, I_m + A^*] - 2r(I_m + A) \quad (3.85)$$
$$= 2r[I_m - A\,, I_m - A^*] - 2r(I_m - A), \quad (3.86)$$
$$r(A+A^*) = m, \quad (3.87)$$
$$r(AA^* - A^*A) = r(A-A^*) \quad (3.88)$$

eşitlikleri gerçeklenir (Tian ve Ark. 2001).

İspat: Sonuç 3.14 ifadesinde $P = \frac{1}{2}(I_m \pm A)$ ve $P^* = \frac{1}{2}(I_m \pm A^*)$ alınarak gerekli sadeleştirmeler yapılırsa (3.85)-(3.88) eşitlikleri elde edilir.

Teorem 3.20 $A \in \mathbb{C}^{mxm}$ ve $B \in \mathbb{C}^{nxn}$ herhangi iki involüt matris olmak üzere $X \in \mathbb{C}^{mxn}$ olsun. Bu durumda $AX - XB$ farkı

$$r(AX - XB) = r\begin{bmatrix}(I_m + A)X \\ I_n + B\end{bmatrix} + r[X(I_n + B), (I_m + A) - r(I_m + A) - r(I_n + B),$$

$$= r[(I_m + A)X(I_n - B)] + r[(I_m + A)X(I_n + B)] \quad (3.89)$$

rank eşitliklerini sağlar. Özellikle

$$AX - XB \Leftrightarrow (I_m + A)X(I_n - B) = 0 \text{ ve } (I_m - A)X(I_n + B) = 0$$

dir (Tian ve Ark. 2001).

İspat: (3.71) ve (3.72) eşitliklerinde $P = \frac{1}{2}(I_m + A)$ ve $Q = \frac{1}{2}(I_m + B)$ alınırsa (3.89) ifadesi elde edilir.

Bu kısımda idempotent matrisler için çeşitli rank eşitlikleri verilmiştir. Bu rank eşitliklerinden faydalanarak, iki idempotent matrisin toplam, fark ve çarpımları için birçok yeni özellik elde edilebilir. Elde edilen rank eşitlikleri involüt matrislere uygulanmıştır. Bunun matris teorisinde farklı uygulamalarının da olduğu gösterilebilir. Örneğin, $A \in \mathbb{C}^{mxm}$ matrisi için A^+ Moore-Penrose olmak üzere

$$r(AA^+ - A^+A) = 2r[A, A^*] - 2r(A), \quad (3.90)$$

yazılabilir. (3.90) eşitliği A ve A^+ matrislerinin değişimli olduğunu göstermek için de kullanılabilir. Öte yandan (3.71) eşitliği kullanılarak

$$r(A^kA^+ - A^+A^k) = r\begin{bmatrix}A^k \\ A^*\end{bmatrix} + r[A^k, A^*] - 2r(A),$$

olduğu gösterilebilir ki bu da A^k ve A^+ matrislerinin değişimli olduğunu karakterize etmek için kullanılabilir.

3.4 Bir İdempotent Matrisin Rankı ve İzi Arasındaki Eşitlikler

Bu kısımda başka herhangi bir özelliğine ihtiyaç duymaksızın, sadece idempotentliğini kullanarak, idempotent bir matrisin rankı ve izi arasındaki bazı eşitlikler ele alınacaktır. Herhangi bir matrisin rankının genel özelliğinden yararlanarak böyle bir ispatı elde edebileceği gösterilecektir. Bu özelliğin orijinal ispatı bir parçalı matrisin Moore-Penrose inversinin elde edilmesinde kullanılan bir formülden sağlanmıştır. Ayrıca idempotent bir matrisin rankı ve izi arasındaki durum hakkında bir dizi yeni sonuçlar verilecektir.

Lemma 3.3 $A \in \mathbb{C}_{n,n}$ matrisi r ranklı bir matris olsun. Bu durumda öyle bir $U \in \mathbb{C}_{n,n}$ matrisi vardır ki

$$A = U\begin{pmatrix} \sum K & \sum K \\ 0 & 0 \end{pmatrix}U^*,$$

dir, burada $\sum = diag(\sigma_1 I_{r1}, \dots, \sigma_t I_t)$ A nin singüler değerlerinin köşegem matrisi, $\sigma_1 > \sigma_2 > \cdots > \sigma_t > 0,\ r_1 + r_2 + \cdots + r_t = r$, ve $K \in \mathbb{C}_{r,r},\ \ L \in \mathbb{C}_{r,n-r}$ olmak üzere $KK^* + LL^* = I_r$ dir (Baksalary ve Ark. 2010).

Bu Lemma ya göre A matrisiyle ilgili birkaç faydalı karakterizasyon türetilebilir. Örneğin, doğrudan hesaplamalarla gösterilebilir ki A matrisi:

(i) İdempotenttir $\Leftrightarrow$ $\sum K = I_r$ dir.

(ii) $A^+A = AA^+$ veya buna denk olarak $\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(A^*)$dir $\Leftrightarrow L = 0$ dir.

(iii) Ortagonal izdüşümdür yani, $A^2 = A = A^*$ dir $\Leftrightarrow L = 0, \sum = I_r, K = I_r$ dir.

(iv) Nilpotenttir, yani $A^2 = 0 \Leftrightarrow K = 0$ dir

Aşağıdaki teorem, literatürde bilinen temel bir rank özelliğini ifade eder. İspat bir parçalı matrisin Moore-Penrose inversi için verilen genel bir formüle dayanmaktadır.

Teorem 3.21 $A \in \mathbb{C}_{m,n}$ olsun. Bu takdirde

$$r(A) = tr(AA^+) \qquad (3.91)$$

olacaktır (Baksalary ve Ark. 2010).

İspat: İspat, n sayısı sütun sayısı üzerinden matematiksel indüksiyona dayanmaktadır. Eğer $n = 1$ ise A, bir sütun vektörü olup $A = a$ yazılabilir. Bu durumda $a \neq 0$ olduğuna $a^+ = \frac{a^*}{a^*a}$ ve $a^+ = 0$ olduğunda ise $a = 0$ olacaktır. Her iki durumda da $r(a) = tr(aa^+)$ olacaktır.

Şimdi A'nın n sütunlu bir matris olduğunu ve (3.91) eşitliğinin sağlandığını varsayalım. B matrisi $B = (A\colon a)$ şeklinde sütununa göre parçalanmış bir matris olmak üzere $r(B) = tr(BB^+)$ olduğunu göstereceğiz. Bu matris için formülün uygulanması Moore-Penrose invers formülünü bu matrise uygulayarak

$$B^+ = \begin{pmatrix} A^+ - db^* \\ b^* \end{pmatrix} \tag{3.92}$$

olduğu görülür, burada

$$b^* = \begin{cases} c^+ \quad , & \text{eğer } c \neq 0 \\ \gamma d^* A^+, & \text{eğer } c = 0 \end{cases} \tag{3.93}$$

$$d = A^+a, \quad c = (I_m - AA^+)a \;\text{ ve }\; \gamma = (1 + d^*d)^{-1} \tag{3.94}$$

dir. (3.93) 'de verilen b vektörünün iki özelliği ile BB^+ matrisini ayrı ayrı belirleyelim. Bunlardan ilkinde, $c \neq 0$ olduğunda, (3.94)' de ortadaki koşuldan $a \notin \mathcal{R}(A)$ yazılır, yani

$$BB^+ = (A\colon a)\begin{pmatrix} A^+ - dc^+ \\ c^+ \end{pmatrix} = AA^+ - AA^+ac^+ + ac^+$$

$$= AA^+ + (I_m - AA^+)ac^+ = AA^+ + cc^+$$

olduğu görülür. Bu nedenle $tr(BB^+) = tr(AA^+) + tr(cc^+)$ olacaktır. Öte yandan $tr(cc^+) = 1$ olduğundan indüksiyon hipotezine göre, $tr(AA^+) = r(A)$ olduğu görülür. Böylece $tr(BB^+) = r(A) + 1 = r(B)$ olur ki buradaki son eşitlik $a \notin \mathcal{R}(A)$ varsayımın bir sonucudur.

İkinci durumda, $c = 0$ olduğunda veya buna denk olarak, $a \in \mathcal{R}(A)$ olduğunda,

$$BB^+ = (A\colon a)\begin{pmatrix} A^+ - \gamma dd^*A^+ \\ \gamma d^*A^+ \end{pmatrix} = AA^+ - \gamma dd^*A^+ + \gamma d^*A^+$$

olur. Öte yandan, uygun mertebeden matrislerin çarpımının izi bu matrislerin döngüsel permütasyonlarına göre sabit, yani $A^{+}Ad = A^{+}a = d$ altında değişmez kalacağından, (3.94)' deki ilk koşuldan

$$tr(BB^{+}) = tr(AA^{+}) - \gamma d^{*}A^{+}Ad + \gamma d^{*}A^{+}a$$

$$= tr(AA^{+}) - \gamma d^{*}d + \gamma d^{*}d = tr(AA^{+})$$

olduğu görülür. Sonuç olarak, indüksiyon hipotezine göre $tr(BB^{+}) = r(A)$ olduğu elde edilmiş olur. $a \in \mathcal{R}(A)$ olması $r(B) = r(A)$ olduğunu gösterir ki bu da bizi $tr(BB^{+}) = r(B)$ ye götürür.

Aşağıdaki iki sonuç, literatürde bilinen bazı önemli gerçekleri hatırlatır.

Sonuç 3.19 $A \in \mathbb{C}_{n,n}$ bir idempotent olsun. Bu takdirde $r(A) = tr(A)$ dir.

İspat: İz özelliğinden $tr(A) = tr(AA^{+}A) = tr(A^{2}A^{+})$ yazılabilir. Böylece A matrisi idempotent olduğundan, $tr\ (A) = tr\ (AA^{+})$ olup istenen sonuç elde edilir.

Sonuç 3.20 $A \in \mathbb{C}_{m,n}$ olsun. Bu takdirde $r(A) = r(A^{*}) = r(A^{+}) = r(AA^{*})$ dir.

İspat: Öncelikle

$$r(A) = tr(AA^{+}) = tr(A^{+}A) = tr[(A^{+}A)^{*}] = tr[A^{*}(A^{+})^{*}]$$

olduğunu belirtelim. Bu nedenle $(A^{+})^{*} = (A^{*})^{+}$ olup $r(A) = tr[A^{*}(A^{*})^{+}] = r(A^{*})$ yazılabir. Ayrıca, $(A^{+})^{+} = A$ olduğu göz önüne alınırsa

$$r(A) = tr(AA^{+}) = tr[A^{+}(A^{+})^{+}] = r(A^{+})$$

elde edilir. Son olarak $A^{+} = A^{*}(AA^{*})^{+}$ olduğu dikkate alınırsa

$$r(A) = tr(AA^{+}) = tr(AA^{*}(AA^{*})^{+} = r(AA^{*}),$$

olduğu görülür ve böylece ispatı tamamlamış oluruz.

Teorem 3.22 $A \in \mathbb{C}_{n,n}$ olsun. Bu durumda A matrisinin idempotent olması için gerek ve yeter şart aşağıdaki şartların sağlamasıdır (Baksalary ve Ark. 2010):

(i) $r(A) = tr(A)$ ve $r(I_n - A) = tr(I_n - A)$,

(ii) $s, t \in \mathbb{N}, s \neq t,$ olmak üzere $r(A) = tr(A)$ ve $A^{s} = A^{t}$,

(iii) $r(A) \leq tr(A)$ ve $r(I_n - A) \leq tr(I_n - A)$.

İspat: (i) Bunun için ilk önce A' nın idempotentliğinin $I_n - A$ 'nın idempotentliğine eşdeğer olduğunu hatırlayalım. Böylece, (i) nin gerekliliği doğrudan görülür. Yeterliliği için ise (i) maddesinde verilen

$$r(I_n - A) = tr(I_n - A) = n - tr(A) = n - r(A)$$

eşitliği sağlansın. Bu takdirde $r(I_n - A) = n - r(A)$ eşitliği $A^2 = A$ olması için gerek ve yeter şart olduğundan, ispatın mevcut kısmı tamamlanır.

Yukarıdaki bilgilere göre, sadece önermenin (iii) kısmında verilen koşulların yeterliliği gösterilmelidir. Bunun ispatında ise Lemma 3.3 deki ayrışım kullanılır. $r(A) \leq tr(A)$ eşitsizliği $r \leq tr \sum K$ olduğunu gösterirken $r(I_n - A) \leq tr(I_n - A)$ eşitsizliği ise $r(I_r - \sum K) + n - r \leq n - tr(\sum K)$ olduğu anlamına gelir. Bunun sonucu olarak $r(I_r - \sum K) \leq r - tr(\sum K)$ olup bu eşitsizliğin sağ tarafı ya negatif ya da sıfır olduğundan $r(I_r - \sum K) = 0$ elde edilir. Sonuç olarak $\sum K = I_r$ olup bu da A matrisinin idempotent olduğu anlamına gelir.

Teorem 3.23 $A \in \mathbb{C}_{n,n}$ olsun. Bu takdirde

(i) A idempotenttir $\Leftrightarrow r(A) + tr(A^2A^+A^*) = 2Re[tr(A)]$ dir.

(ii) A bir ortogonal izdüşümdür $\Leftrightarrow A^+A = AA^+$ ve $r(A) + tr(A^*A) = 2Re[tr(A)]$ dir, burada $Re[tr(A)]$ $tr(A)'$ nin reel kısmını gösterir (Baksalary ve Ark. 2010).

İspat: İspat Lemma 3.3 te verilen gösterime dayanmaktadır. Bu durumda

$$A^* = U\begin{pmatrix} K^*\Sigma & 0 \\ L^*\Sigma & 0 \end{pmatrix} \text{ ve } A^+ = U\begin{pmatrix} K^*\Sigma^{-1} & 0 \\ L^*\Sigma^{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

olup buradan da

$$A^*A = U\begin{pmatrix} K^*\Sigma^2K & K^*\Sigma^2L \\ L^*\Sigma^2K & L^*\Sigma^2L \end{pmatrix} U^* \text{ ve } AA^+ = U\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^*$$

olduğu görülür. İz özellikleri kullanılarak $tr(A^2A^+A^*) = tr(AA^+A^*A) = tr(K^*\Sigma^2K)$ yazılabilir. Böylece, (i) denkliğinin sağ tarafındaki eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter şart

$$r + tr(K^*\Sigma^2K) = 2Re[tr(\Sigma K)] \tag{3.95}$$

olmasıdır. Bu durumda $tr[(I_r - \Sigma K)(I_r - \Sigma K)^*] = 0$ olması için gerek ve yeter şart $\Sigma K = I_r$ olmasıdır. Bu ise (3.95) in $A^2 = A$' ya eşdeğer olduğunu gösterir.

Teorem 3.22' nin kanıtında verilen matrislerin karakterizasyonu göz önüne alındığında, (ii) denkliğinin sağ tarafındaki bağlantının sağlanması için gerek ve yeter şart (3.95) in yanında L = 0 olmasıdır. Teoremin (i) şartından A matrisinin hem $A^{+}A = AA^{+}$ şartını sağladığı hem de idempotent olduğu, veya bir başka deyişle, A' nın bir ortogonal izdüşüm olduğu anlamına gelir. Teorem 3.23' ün her iki ifadesinde de görülen $2Re[tr(A)]$ 'nin $2Re[tr(A)] = tr(A + A^{*})$ eşitliğinin sağladığını belirtelim.

Öte yandan $A \in \mathbb{C}_{n,n}$ olduğunda $r(A) = tr\ (A)$ ise $r(A) \leq tr\ (A^{2}A^{+}A^{*})$ olduğu ve eşitliğin ancak ve ancak $A^{2} = A$ ise geçerli olduğu söylenebilir.

Sonuç 3.21 $A \in \mathbb{C}_{n,n}$ olsun. Bu durumda

A idempotenttir $\Leftrightarrow r(A) = tr(A)$ ve $r(A) = tr(A^{2}A^{+}A^{*})$ dir.

Bu sonuçlar Hermitian idempotent matrisler veya başka bir deyişle ortogonal izdüşümlerle ile ilgili bazı ilginç sonuçlar ortaya koymaktadır. Öncelikle belirtelim ki A idempotent olduğunda, $r(A) = tr(A^{+})$ ve $tr(AA^{*}) = tr(A)$ eşitliklerinin her biri, $r(A) = tr(A)$ koşulunun modifiyeli versiyonları olarak görülebilir, ki bu da A' nın bir ortogonal izdüşüm olması gerekliliğine eşdeğerdir.

Şimdi $P, Q \in \mathbb{C}_{n,n}$ iki ortogonal izdüşüm olsun. Bilindiği gibi, $tr(PQ) \leq r(PQ)$ dir eşitlik ancak ve ancak PQ bir ortogonal izdüşüm ise veya buna denk olarak $PQ = QP$ ise sağlanır. Eğer izdüşümlerden biri, örneğin Q, nonsingüler ($Q = I_{n}$ anlamına gelir) ise, $r(P) = tr\ (P)$ olacaktır. $tr(PQ)$ için bir başka üst sınır

$$tr(PQ) \leq \{tr(P), tr(Q)\} \tag{3.96}$$

olarak verilebilir. Bu durumda (3.96) da eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter şart $P - Q$ veya $Q - P$ matrisinin bir ortogonal izdüşüm olmasıdır.

Teorem 3.24 $A \in \mathbb{C}_{n,n}$ olsun. B u takdirde

(i) A, EP dir, yani $A^{+}A = AA^{+} \Leftrightarrow r(A) = tr(PQ)$ dır.

(ii) A nilpotenttir $\Leftrightarrow tr(PQ) = 0$ dir, burada $P = AA^{+}$ve $Q = A^{+}A$ dir (Baksalary ve Ark. 2010).

Bu son yorumlar, bilinen matris sınıflarının daha farkı karekterizasyonlarını verebilmemizi sağlar. $A \in \mathbb{C}_{n,n}$ olsun. Bu durumda $tr[(A^* - A^+)(A^* - A^+)^*] \geq 0$ olduğundan,

$$2r(A) \leq [tr(A^*A) + tr(A^*A)^\dagger], \tag{3.97}$$

elde edilir ki bu da A nın rankı için yeni bir üst sınır sağlar. (3.97) deki eşitlik ancak ve ancak A bir kısmi izometri olduğuna yani $A^* = A^+$ olduğunda sağlanır. Benzer şekilde, Q ve P ortogonal izdüşüm olmak üzere $tr[(PQ - QP)(PQ - QP)^*] > 0$ olması $tr(PQPQ) \leq tr(PQ)$ eşitsizliğini sağlar ki burada eşitlik ancak ve ancak $PQ = QP$ olduğunda doğrudur. Son olarak, $P = AA^+$ ve $Q = A^+A$ olduğunda $PQ = QP$ olduğunu belirtmek mümkündür.

3.5 İdempotent Matrisler İçin Yeni Bir Rank Formülü

Bu kısımda A idempotent bir matris, $[P; Q]$ tam satır ranklı ve $P^*Q = 0$ olmak üzere

$$r(P^*AQ) = r(P^*A) + r(AQ) - r(A)$$

rank eşitliğinin sağlandığı gösterilerek bu formülün matrislerin genelleştirilmiş inverslerine bazı uygulamaları verilecektir. 2000 yılında Drury, Liu, Lu, Puntanen ve Styan tarafından yapılan bir çalışmada, ortogonal izdüşüm matrisleri için aşağıdaki rank formülünü kurmuşlardır:

$$r(P^*AA^+Q) = r(AP) + r(AQ) - r(A),$$

burada, $A \in \mathbb{C}^{nxn}$ Hermitian bir matris, $P \in \mathbb{C}^{nxp}$ ve $Q \in \mathbb{C}^{nxp}$ ise $[P; Q]$ tam satır ranklı ve $PQ = 0$ olacak şekilde matrislerdir. Bu formül, X ve Y uygun şekilde seçildiğinde blok matrisler ve ortogonal izdüşümler için bazı yararlı rank eşitliği oluşturmaya yardımcı olabilir. Bu kısımda, A idempotent bir matris, $[P; Q]$ tam satır ranklı ve $P^*Q = 0$ olmak üzere P^*AQ matrisinin rankını genel durumda ele alacağız. Bunu yapmak için aşağıdaki sonuca ihtiyacımız vardır.

Lemma 3.4 $A \in \mathbb{C}^{mxn}, B \in \mathbb{C}^{nxk}$ ve $C \in \mathbb{C}^{kxl}$ matrisleri verilmiş olsun. Bu takdirde

$$r(ABC) = r(AB) + r(BC) - r(B) \tag{3.98}$$

eşitliğinin sağlanması için gerek ve yeter şart $BCX + YAB = B$ olacak şekilde X ve Y matrislerinin mevcut olmasıdır (Yang ve Ark, 2002).

Gerçekten $AX + YB = C$ denkleminin tutarlı olabilmesi için

$$r\begin{bmatrix} C & A \\ B & 0 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{bmatrix}$$

eşitliğinin sağlanmasının gerek ve yeter şart olduğu bilinmektedir. Bu sonuç $BCX + YAB = B$ denklemine uygulanırsa Lemma 3.3 elde edilir.

Şimdi teorem ve ana sonuçlarımız aşağıda verilmiştir:

Teorem 3.25 $A \in \mathbb{C}^{mxm}$ idempotent bir matris, $P \in \mathbb{C}^{mxp}$ ve $Q \in \mathbb{C}^{mxq}$, $[P; Q]$ tam satır ranklı ve $P^*Q = 0$ olacak şekilde iki matris olsun. Bu takdirde

$$r(P^*AQ) = r(P^*A) + r(AQ) - r(A) \tag{3.99}$$

eşitliği sağlanır.

İspat: $[P; Q]$ tam satır ranklı ve $P^*Q = 0$ olduğundan

$$[P\,, Q]^+ = \begin{bmatrix} P^+ \\ Q^+ \end{bmatrix} \text{ ve } [P; Q][P\,, Q]^+ = PP^+ + QQ^+ = I_m$$

yazılabilir. $X = Q^+A$ ve $Y = A(P^+)^*$ olsun. Bu takdirde

$$AQX + YP^*A = AQQ^+A + A(P^+)^*P^*A^* = A(I_m - PP^+)A + APP^+A = A$$

elde edilir.

Şimdi $P = \begin{bmatrix} I_m \\ 0 \end{bmatrix}$ ve $Q = \begin{bmatrix} 0 \\ I_k \end{bmatrix}$ olsun. Bu takdirde $[P; Q]$ tam satır ranklı ve $P^*Q = 0$ olacaktır. Buradan aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.22 $A_{11} \in \mathbb{C}^{mxm}$, $A_{12} \in \mathbb{C}^{mxk}$, $A_{21} \in \mathbb{C}^{kxm}$, $A_{22} \in \mathbb{C}^{kxk}$ olmak üzere $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$ matrisi idempotent bir matris olsun. Bu takdirde

$$r(A) = r\begin{bmatrix} A_{12} \\ A_{22} \end{bmatrix} + r[A_{11}, A_{12}] - r(A_{12}) \tag{3.100}$$

ve

$$r(A) = r\begin{bmatrix} A_{11} \\ A_{21} \end{bmatrix} + r[A_{21}, A_{22}] - r(A_{21}). \tag{3.101}$$

dir (Yang ve Ark, 2002).

Bunun sonucu olarak

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1p} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{p1} & A_{p2} & \cdots & A_{p} \end{bmatrix}, \ A_{ij} \in \mathbb{C}^{t_i x t_j}, 1 \leq i,j \leq p$$

matrisi idempotent ise

$$r(A) = r(Q_{1i}) + r\left(Q_{i+1,p}\right) - r\left(Q_{i+1,i}\right), i = 1,2\,, \dots, p-1, \tag{3.102}$$

rank eşitliği sağlanır, burada

$$Q_{ij} = \begin{bmatrix} A_{i1} & \cdots & A_{ij} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{p1} & \cdots & A_{pj} \end{bmatrix}, 1 \leq i,j \leq p$$

dir. (3.102)' deki rank formülleri (3.101)' den türetilebilir. Sonuç 3.21 deki A matrisi ortogonal bir izdüşüm ise (3.100) eşitliği

$$r(A) = r(A_{11}) + r(A_{22}) - r(A_{12})$$

şeklini alır. Eğer (3.100) eşitliğindeki A idempotent matrisi yerine $I_{m+k} - A$ idempotent matrisi alınırsa ve $r(I_{m+k} - A) = m + k - r(A)$ eşitliği kullanılırsa bu durumda (3.100) ifadesi

$$r(A) = m + k + r(A_{12}) - r[I_m - A_{11}, A_{12}) - r\begin{bmatrix} A_{12} \\ I_k - A_{22} \end{bmatrix}$$

şeklini alır. $indeks(A) = k$ olan bir A kare matrisinin Drazin inversi, A^D

$$(i)\ A^k X A = A^k\,, \quad (ii)\ XAX = X\ , \quad (iii)\ AX = XA.$$

koşullarını sağlayan tek türlü olarak mevcut olan bir matristir. $indek(A) = 1$, yani $rank(A^2) = rank(A)$ olduğunda, A^D matrisi A matrisinin grup inversi olarak adlandırılır ve $A^\#$ ile gösterilir. $A^D A A^D = A^D$ olduğundan $AA^D AA^D = AA^D$ olduğunu görülür. Bu nedenle AA^D idempotenttir. Ayrıca $r(A^D) = r(AA^D) = r(A^k)$ dir. Bu durumda, Teorem 3.25 yi $P^* AA^D Q$ ve $P^* AA^\# Q$ matrislerine uygulayarak aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Sonuç 3.23 $A \in \mathbb{C}^{mxm}$, $indeks(A) = k$, $P \in \mathbb{C}^{mxp}$ ve $Q \in \mathbb{C}^{mxq}$ olmak üzere $[P; Q]$ tam satır ranklı ve $PQ = 0$ olsun. Bu takdirde

$$r(P^*AA^DQ) = r(P^*A^k) + r(A^kQ) - r(A^k) \tag{3.103}$$

eşitliği sağlanır.

$$r(P^*AA^\#Q) = r(P^*A) + r(AQ) - r(A) \tag{3.104}$$

dir. Sonuç 3.22 de $P = \begin{bmatrix} I_m \\ 0 \end{bmatrix}$ ve $Q = \begin{bmatrix} 0 \\ I_k \end{bmatrix}$ alındığında aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.24 $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, A_{11} \in \mathbb{C}^{mxm}, A_{12} \in \mathbb{C}^{mxk}, A_{21} \in \mathbb{C}^{kxm}, A_{22} \in \mathbb{C}^{kxk}$ olsun. $indeks(A) = 1$ ve $(AA^\#)_{12}$ ile $AA^\#$ izdüşüm matrisinin mxk tipindeki üst sağ bloğunu gösterelim. Bu takdirde

$$r(AA^\#)_{12} = r\begin{bmatrix} A_{12} \\ A_{22} \end{bmatrix} + r[A_{11}, A_{12}] - r(A) \tag{3.105}$$

eşitliği sağlanır (Yang ve Ark, 2002).

$A^3 = A$ ise A kare matrisi tripotent olarak adlandırılır. Tripotent bir A matrisi için, $A^\# = A$ olacaktır. Eğer (10) eşitliği tripotent A matrisine uygulanır ve

$$(AA^\#)_{12} = (A^2)_{12} = [A_{11}, A_{12}]\begin{bmatrix} A_{12} \\ A_{22} \end{bmatrix},$$

olduğu dikkate alınırsa aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Sonuç 3.25 Farz edelim ki $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, A_{11} \in \mathbb{C}^{mxm}, A_{12} \in \mathbb{C}^{mxk}, A_{21} \in \mathbb{C}^{kxm}, A_{22} \in \mathbb{C}^{kxk}$ olsun. Bu takdirde

$$r(A) = r[A_{11}, A_{12}] + r\begin{bmatrix} A_{12} \\ A_{22} \end{bmatrix} - r\left([A_{11}, A_{12}]\begin{bmatrix} A_{12} \\ A_{22} \end{bmatrix}\right),$$

ve

$$r(A) = r[A_{21}, A_{22}] + r\begin{bmatrix} A_{11} \\ A_{21} \end{bmatrix} - r\left([A_{21}, A_{22}]\begin{bmatrix} A_{11} \\ A_{21} \end{bmatrix}\right),$$

eşitlikleri sağlanır (Yang ve Ark, 2002).

4. SONUÇ ve ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında birinci bölümde Matris Cebirinin tarihsel gelişimi ve kullanım alanından kısaca söz edilmiştir. İkinci bölüm Matris ve Matris Uzayları ile ilgili temel bilgilerden oluşmakta olup bu bölümdeki teoremler ispatsız olarak verilmiştir. Üçüncü bölümde idempotent matrisler ele alınarak bu matrisler için çeşitli rank formülleri elde edilmiştir. İki idempotent matrisin toplam ve farkı için bazı rank formülleri verilmiş involüt matrislerle ilgili çeşitli rank eşitlikleri sunulmuştur. Ayrıca bir idempotent matrisn rankı ve izi arasındaki ilişki ele alınmıştır.

Yapılan çalışmalara benzer olarak üç veya daha fazla idempotent matrisin lineer kombinasyonu ile ilgili idempotentlik durumları ve rank eşitlikleri elde edilerek bunların özellikle ekonometri, istatistik ve mühendislik alanlarına uygulanabilirliği araştırılabilir.

5. KAYNAKLAR

Baksalary, J.K. and Baksalary, O.M. 2004, Nonsigularity of Linear combinations of idempotent matrices, Linear Algebra and its applications, 388, 25-29

Baksalary, O.M. Bernstein, D.S. and Trenkler, G., 2010, On the equality between rank and trace of an idempotent matrix, Applied Mathematics and Computation, 217, 4076-4080

Ben-Israel, A., Charnes, A., 1963, Contributions to the theory of generalized inverses. SIAM J. Appl. Math., Vol. 11, 667-699 s.

Bjerhammer, A., 1958, A generalized matrix algebra, Kungl. Tekn. Hogsk. Handl. Stockholm. No. 124, 1-32 s.

Bott, R., Duffin, R. J., 1953, On the algebra of Networks. Trans. Amer. Math. Soc.. Vol. 74, 99-109 s.

Branson, R., 1999 Matris İşlemleri, Schaum Serisi. (Editor: H. Hilmi Hacısalihoğlu) Nobel Yayın Dağıtım, Ankara, 212 s.

Deniz, A, 2006. İdempotent Matrisler ve İdempotent Matrislerin Lineer kombinasyonlarının Nonsingülerliği, Yüksek Lisans Tezi, Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 37 syf.

Ehrhardt, T., Rabanovich, V., Samoilenko, Yu. and Silbermann,B. 2001. On the decomposition of the identity into a sum of idempotents, Methods Funct. Anal. Topology 7, 1–6 s.

Gözpınar, A., 2011. İdempotent matrislerin lineer kombinasyonları ve izdüşümler hakkında bir genel çalışma, Yüksek Lisans Tezi, Ordu Üniversitesi, 59 s.

Grob, J., Trenkler, G, 1999. Nonsingularity of the Difference of two Oblique Projektors, SIAM J.Matrix Anal. Appl. 21, 390-395.

Hacısalihoğlu H.H., 1977. *Lineer Cebir*. Matbaa Teknisyenleri Koll. Şti., İstanbul, 716 s.

Koliha, J.J. and Rakocevic, V. 2002. Invertibility of the sum of idempotents, Linear and Multilinear Algebra 50, 285–292 s.

Koliha, J.J. and Rakocevic, V., 2003. Invertibility of the difference of idempotents, Linear and Multilinear Algebra 51, 97–110 s.

Koliha, J.J., Rakocevic, V. and Staskraba, I., 2004. The difference and sum of projectors, Linear Algebra and its applications, 388, 279-288.

Lancaster, P., 1969. Theory of matrices, Academic Pres, New York, 570 s.

Laurie, C., Mathes, B. and Radjavi,H., 1994. Sums of idempotents, Linear Algebra Appl. 208/209, 175–197 s.

Marsaglia, G. and Styan, G.P.H., 1974. Equalities and inequalities for ranks of matrices, Linear and Multilinear Algebra 2, 269–292 s.

Mitra, S. K., Rao, C. R., 1968. A note on a previous lemma in the theory of least squares and some further results. Sankhya Ser. A. Vol. 30, 245-252 s.

Moore, E. H., 1920, On the reciprocal of the general algebraic matrix (abstract), Bull. Amer. Math. Soc., Vol. 26, 394-395 s.

Moore, E. H., 1935. *General Analysis,* American Philosophical Society, Philadelphia.

Penrose, R., 1955, A generalized inverse for matrices, Proc. Cambridge Philos. Soc., Vol. 51, 406-413 s.

Penrose, R., 1956. On best approximate solutions of linear matrix equations, Proc. Cambridge Philos. Soc., Vol. 52, 17-19 s.

Radjavi, H. and Rosenthal, P. 2002. On commutators of idempotents, Linear and Multilinear Algebra 50, 121–124 s.

Rao, R. C., 1965, Linear Statistical Inference and its Applications, New York, Wiley.

Tian, Y. 2002. The minimal rank of the matrix expression $A - BX - YC$, Missouri J. Math. Sci. 14, 40–48 s.

Tian, Y. and Styan, G.P.H. 2001. Some rank equalities for idempotent and involutory matrices, Linear Algebra Appl. 335, 101–117 s.

Tian, Y. and Styan, G.P.H. 2002. A new rank formula for idempotent matrices with applications, Comment. Math. Univ. Carolin. 43, 379–384 s.

Tian, Y. and Styan, G.P.H. 2006. Rank equalities for idempotent matrices with applications, Journal of computational and applied mathematics, 191, 77-97 s.

Zuo, K., 2010. Nonsingularity of the Difference and sum of two idempotent matrices, Linear Algebra and its applications 433, 476-482.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler	
Adı Soyadı	Semanur GÜNEY
Doğum Yeri	Trabzon
Doğum Tarihi	01.12.1993
Uyruğu	■ T.C. ❐ Diğer:
Telefon	05382733264
E-Posta Adresi	sema_guney61@hotmail.com_

Eğitim Bilgileri	
Lisans	
Üniversite	Ordu Üniversitesi
Fakülte	Fen Edebiyat Fakültesi
Bölümü	Matematik Bölümü
Mezuniyet Yılı	26.06.2018