



T. C.

ORDU ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BİPOLAR BULANIK ESNEK GRAFLAR ÜZERİNE BİR
ÇALIŞMA

BEKİR YÜNKÜL

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

ORDU 2022

TEZ BİLDİRİMİ

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan ve kullanılan intihal tespit programının sonuçlarına göre; bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

BEKİR YÜNKÜL

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

BİPOLAR BULANIK ESNEK GRAFLAR ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA

BEKİR YÜNKÜL

ORDU ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ, 36 SAYFA

(TEZ DANIŞMANI: DOÇ. DR. YILDIRAY ÇELİK)

Bu tezin amaçlarından birisi bipolar bulanık esnek graflar üzerinde bazı ikili işlemler vererek, bunlara ait temel özellikleri araştırmak ve elden edilen sonuçları ortaya koymaktır. Bu tezin amaçlarından bir diğeri ise bipolar bulanık esnek grafların çok kriterli karar verme problemleri üzerinde ki uygulamasını araştırmaktır.

Bu çalışma üç ana bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde çalışmamızda temel olan bulanık küme, bipolar bulanık küme, bulanık esnek küme, bipolar bulanık esnek küme, graf, bulanık graf, bipolar bulanık graf ve bulanık esnek graf kavramları ile ilgili tanımlara yer verilmiştir. İkinci bölümde bipolar bulanık esnek graflar üzerinde bir takım işlemler verilerek bunlara ait özellikler araştırılmıştır. Üçüncü bölümde bipolar bulanık esnek grafların çok kriterli bir karar verme problem üzerindeki uygulaması değerlendirilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Bipolar Bulanık Küme, Bipolar Bulanık Esnek Küme, Bulanık Graf, Bipolar Bulanık Graf, Bipolar Bulanık Esnek Graf.

ABSTRACT

A STUDY ON BIPOLAR FUZZY SOFT GRAPHS

BEKİR YÜNKÜL

**ORDU UNIVERSITY INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED
SCIENCES**

MATHEMATICS

MASTER THESIS, 36 PAGES

(SUPERVISOR: ASSOC. PROF. YILDIRAY ÇELİK)

One of the aims of this thesis is to give some binary operations on bipolar fuzzy soft graphs, to investigate their basic properties and to present the results obtained. Another aim of this thesis is to investigate the application of bipolar fuzzy soft graphs on multicriteria decision making problems.

This study consists of three main parts. In the first part, definitions of fuzzy set, bipolar fuzzy set, fuzzy soft set, bipolar fuzzy soft set, graph, fuzzy graph and fuzzy soft graph are given. In the second part, some new operations on bipolar fuzzy soft graphs are given and their properties are investigated. In the third part, the an application of bipolar fuzzy soft graphs in an multicriteria decision making problem are evaluated.

Keywords: Bipolar Fuzzy set, Bipolar Fuzzy Soft Set, Fuzzy Graph, Bipolar Fuzzy Graph, Bipolar Fuzzy Soft Graph.

TEŐEKKÖR

Tez konunun belirlenmesi, çalıőmanın yűrűtűlmesi ve yazımı esnasında desteklerini esirgemeyen baőta danıőman hocam Sayın Doç. Dr. Yıldıray ÇELİK olmak űzere Ordu Ŭniversitesi Matematik Bűlűmű Őđretim Ŭyelerine teőekkűr ederim.

Aynı zamanda, manevi desteklerini her an űzerimde hissettiđim annem, babam ve eőime de teőekkűrű bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
TEZ BİLDİRİMİ	I
ÖZET	II
ABSTRACT	III
TEŞEKKÜR	IV
İÇİNDEKİLER	V
ŞEKİL LİSTESİ	VI
ÇİZELGE LİSTESİ	VII
SİMGELER ve KISALTMALAR LİSTESİ	VIII
1. GİRİŞ...	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	4
2.1. Bulanık Küme, Bipolar Bulanık Küme, Bulanık Esnek Küme ve Bipolar Bulanık Esnek Küme.....	4
2.2. Graf, Bulanık Graf, Bipolar Bulanık Graf ve Bulanık Esnek Graf.....	5
3. BİPOLAR BULANIK ESNEK GRAFLAR ÜZERİNDE BAZI İŞLEMLER.. 8	
4. BİPOLAR BULANIK ESNEK GRAFLARIN BİR KARAR VERME PROBLEMİ ÜZERİNDEKİ UYGULAMASI	19
5. SONUÇ ve ÖNERİLER	23
6. KAYNAKLAR	24
ÖZGEÇMİŞ	28

ŞEKİL LİSTESİ

	<u>Sayfa</u>
Şekil 2.1 $\varphi(e_1)$ bulanık grafi	7
Şekil 2.2 $\varphi(e_2)$ bulanık grafi	7
Şekil 2.3 $\varphi(e_3)$ bulanık grafi	7
Şekil 3.1 \tilde{G} bipolar bulanık esnek grafi.....	9
Şekil 3.2 \tilde{G}_1 bipolar bulanık grafi.....	10
Şekil 3.3 \tilde{G} güçlü bipolar bulanık esnek grafi.....	11
Şekil 3.4 \tilde{G} bipolar bulanık esnek grafi.....	12
Şekil 3.5 \tilde{G} bipolar bulanık esnek grafi.....	12
Şekil 3.6 \tilde{G}_1 ve \tilde{G}_2 bipolar bulanık esnek grafları.....	13
Şekil 3.7 \tilde{G}_1 ve \tilde{G}_2 nin kartezyen çarpımı.....	14
Şekil 3.8 \tilde{G}_1 ve \tilde{G}_2 nin güçlü çarpımı	16
Şekil 3.9 \tilde{G}_1 ve \tilde{G}_2 nin bileşkesi	18
Şekil 4.1 \tilde{G} bipolar bulanık esnek grafi.....	21
Şekil 4.2 $\varphi(e_1) \cap \varphi(e_2) \cap \varphi(e_3)$ bipolar bulanık grafi.....	21

ÇİZELGE LİSTESİ

	<u>Sayfa</u>
Çizelge 3.1 \tilde{G} bipolar bulanık esnek grafi.....	9
Çizelge 4.1 Normalleştirilmiş değerler tablosu	22

SİMGELER ve KISALTMALAR LİSTESİ

G^*	:	Basit Graf
\widetilde{G}_E	:	Bulanık Esnek Graf
\tilde{G}	:	Bipolar Bulanık Esnek Graf
\times	:	Kartezyen Çarpım
\otimes	:	Güçlü Çarpım
\circ	:	Bileşke

1. GİRİŞ

Belirsizlik içeren problemlerin matematiksel modellemesi, analizi ve hesaplanması, ekonomi, mühendislik çevre bilimi, tıp bilimi ve sosyal bilimler gibi pek çok alanda ele alınan en önemli konulardandır. Çeşitli nedenlerden kaynaklanan belirsizliğin çok farklı bir doğası olduğunu ve tek bir matematiksel çerçeve içinde ele alınamayacağını belirtmekte fayda vardır. İlk kez Zadeh (1965) tarafından tanımlanan bulanık küme kavramı bu amaçla ortaya atılmıştır. Klasik kümelerde elemanların üyelik değerleri iki değerli şarta bağlı olarak 0 ve 1 ile ifade edilirdi. Klasik kümeleri kabaca ifade etmek gerekirse bir küme içerisinde bir elemanın varlık - yokluk durumunu ifade etmeye yarayan küme tipidir. Buna karşın kümedeki elemanların üyeliğinin dereceli olarak değerlendirilmesini sağlayan küme ise bulanık kümedir. Bu değerlendirme üyelik fonksiyonu yardımı ile yapılır. Bir bulanık küme, evrensel kümedeki elemanları $[0, 1]$ aralığından üyelik derecesi olarak atayan bir fonksiyondur. Bulanık kümeler, bilgilerin yetersiz ya da kesin olmadığı durumlarda, belirsizlik içeren problemlere çözüm geliştirmesi açısından önemlidir. Bellman ve Zadeh (1970) bulanık kümeleri karar verme problemlerine uyguladılar. Maiers ve Sherif (1985) bulanık kümeler üzerine yaptıkları farklı uygulamaları yayınladılar. Young (1996) bulanık altküme kavramını ortaya atarken Yao (1998) bulanık kümeler ile kaba kümelerin karşılaştırılmasını yaptı. Ramot ve ark. (2002) karmaşık bulanık kümeleri tanımladılar.

Belirsizliğe farklı bir yaklaşım olan esnek küme teorisi ise ilk olarak Molodtsov (1999) tarafından ortaya konuldu. Esnek kümeler belirsizlik içeren problemlerin çözümü noktasında zengin bir uygulama potansiyeline sahiptir. Bu uygulamalardan birkaç tanesi Molodtsov (2004) tarafından ele alındı. Maji ve ark. (2002) bir karar verme probleminde esnek kümelerin uygulamasını yaptılar ve esnek kümeler üzerinde bazı yeni işlemler tanımladılar. Ali ve ark. (2009) esnek kümeler üzerinde yeni ikili işlemler vererek bu işlemlere bağlı bazı yeni tanımlamalar yaptılar. Maji ve ark. (2001) bulanık kümeleri ve esnek kümeleri birleştirerek bulanık esnek küme kavramını ortaya koydular. Birçok araştırmacı bu kavramı kullanarak bulanık esnek kümeler ile ilgili uygulamalar yaptılar. Yang ve ark. (2007) bulanık esnek kümeler üzerinde yeni işlemler tanımladılar. Neog ve Sut (2012) bulanık esnek kümeler üzerinde yeni ikili işlemleri ortaya koydular ve bunlara ait özellikleri araştırdılar. Bazı araştırmacılar ise karar verme problemleri için bulanık esnek kümelerin uygulanabilir bir yaklaşımını sundular (Kong ve ark., 2009; Feng ve ark., 2010). Majumdar ve Samanta (2010) genelleştirilmiş bulanık esnek küme kavramını verdiler.

Zhang (1994) bipolar bulanık küme kavramını tanımladı. Bipolar bulanık kümelerde, üyelik derecesi aralığı $[-1,1]$ olup bulanık kümelerin genişletilmiş bir halidir. Bir bipolar bulanık kümede, bir elemanın üyelik derecesinin 0 olması elemanın ilgili özelliği sağlamadığı, bir elemanın üyelik derecesinin $(0,1)$ olması elemanın ilgili özelliği bir şekilde sağladığı ve bir elemanın üyelik derecesinin $[-1,0)$ olması ise bu elemanın karşıt özelliği tam olarak sağladığı anlamına gelir. Böyle bir tanımlamanın ardında yatan fikir, verilen küme hakkında iki kutuplu bilginin (örneğin, pozitif bilgi ve negatif bilgi) varlığı ile bağlantılıdır. Pozitif bilgi mümkün olan durumu ifade ederken, negatif bilgi ise mümkün olmayan durumu ifade etmektedir. Aslında, çok çeşitli insan karar verme süreçleri, olumlu bir taraf ve olumsuz bir taraf olmak üzere iki kutuplu yargılayıcı düşünce temeline dayanır. Örneğin, işbirliği ve rekabet, dostluk ve düşmanlık, ortak çıkarlar ve çıkar çatışması, etki ve yan etki, olasılık ve ihtimal dışılık, ileri besleme ve geri bildirim vb. durumlar karar ve koordinasyonda genellikle iki taraftır. Böylece bipolar bulanık kümelerin gerçekten de yapay zeka, bilgisayar bilimi, bilgi bilimi, bilişsel bilim, karar bilimi, yönetim bilimi, ekonomi, tıp bilimi ve sosyal bilim dahil olmak üzere birçok alanda potansiyel etkileri vardır. Son yıllarda bipolar bulanık kümeler üzerinde çeşitli çalışmalar mevcuttur. Lee ve Hur (2019) bipolar bulanık bağıntılar kavramını vermişlerdir ve bağıntılar arasındaki ilişkiyi araştırmışlardır. Muhammad ve ark. (2021) kompleks bipolar bulanık küme yapısını vermişler ve bu yapı üzerinde yeni ikili işlemler tanımlamışlardır. Yiarayong (2021) aralık değerli bipolar bulanık küme, aralık değerli bipolar bulanık alt yarı grup (sol ideal, sağ ideal) kavramlarını vermiş ve bunlara ait özellikleri araştırmıştır.

Aslam ve ark. (2014) bipolar bulanık esnek küme kavramını verdiler. Abdullah ve ark. (2014) bipolar bulanık esnek kümeler üzerinde yeni işlemler verdiler ve bunlara ait bazı yeni özellikler elde ettiler. Ayrıca bipolar bulanık esnek kümeleri kullanarak karar verme problemleri için bir algoritma geliştirdiler. Naz ve Shabir (2014) bulanık bipolar esnek küme yapısını verdiler ve bu yapı üzerinde bazı işlemler tanımladılar. Ayrıca bulanık bipolar esnek kümelerin cebirsel özelliklerini tartışmışlardır. Riaz ve Tehrim (2020) bipolar bulanık esnek topoloji kavramını ve kavrama ait özellikleri ortaya koymuşlardır. Çelik (2017) bipolar bulanık esnek Γ -yarı grup ve bipolar bulanık esnek Γ -ideal kavramlarını vermiş onlara ait bazı cebirsel özellikleri araştırmıştır.

Graf teori (Euler, 1736) günlük hayatta karşılaşılan birçok problemi mantık çerçevesinde kurduğu ilişkiler ile çözen bir ağ yapısıdır. Temel bilimlerde problemi çizim yoluyla görselleştiren, yol

güzergahlarında navigasyonun geliştirilmesini sağlayan ve mühendisliğin çeşitli dallarında devreler ve ağlar ile kolaylık sağlayan matematiksel bir araçtır. Kullanım alanlarından bazıları yukarıda belirtilen graf teori ayrıca verilen bir kümenin elemanları arasındaki ilişkiyi ifade etmek için de kullanılır. Graf teorisinin olasılıktaki uygulamaları Erdős (1959) tarafından yayınlandı. Leeuwen (1990) graf algoritmalarını ve Schaeffer (2007) graf kümelerini tanımladılar.

Geniş bir bilimsel alanın temelini atan Euler'in çalışmalarını takiben Rosenfeld (1975) bulanık graf kavramını ortaya atıp düşünme süreçleri üzerinde değerlendirmeler yaptı. Aynı yıllarda Bhattacharya (1987) ile Mordeson ve Peng (1994) bulanık graflar üzerine bazı yeni özellikler tanımladılar. Yine bulanık graflarla alakalı farklı çalışmalar da mevcuttur. (Gani ve Radha, 2008; Akram, 2011; Pathinathan ve ark., 2015; Samanta ve ark., 2016; Li ve Yi, 2017; Mythili ve ark., 2017; Sitara ve ark., 2019; Koam ve ark., 2020)

Bulanık esnek graf kavramı ise ilk olarak Mohinta ve Samanta (2015) tarafından ele alındı. Daha sonra Akram ve Nawaz (2015) bulanık esnek graflara ait değişik uygulamalar üzerinde çalıştılar ve bunlara ait yeni sonuçlar elde ettiler. Masarwah ve Qamar (2018) bulanık esnek graf yapısı üzerinde bazı yeni kavramları değerlendirdiler. Çelik (2018) bipolar bulanık esnek küme yapısını graf yapısı üzerinde ele alarak, bipolar bulanık esnek graf kavramını verdi ve bu kavrama ait bazı özellikleri ortaya koydu.

Bu tez çalışması üç ana bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde, bulanık küme, bulanık esnek küme, bipolar bulanık küme, bipolar bulanık esnek küme, graf, bulanık graf, bipolar bulanık graf kavramları verilerek bunlara ait temel özelliklerden bahsedilmiştir. İkinci bölümde, bipolar bulanık esnek graf yapısı tanıtılmış, bu yapı üzerinde kartezyen çarpım, güçlü çarpım ve bileşke gibi bazı yeni ikili işlemler verilerek bunlara ait temel özellikler araştırılmıştır. Üçüncü bölümde, bipolar bulanık esnek grafların çok kriterli bir karar verme problemi üzerindeki uygulaması ele alınmıştır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1 Bulanık Küme, Bipolar Bulanık Küme, Bulanık Esnek Küme ve Bipolar Bulanık Esnek Küme

Tanım 2.1.1 (Zadeh, 1965) $X \neq \emptyset$ bir küme olsun. $\mu : X \rightarrow [0, 1]$ fonksiyonuna X 'in bulanık altkümesi denir ve $\mu = \left\{ (x, \mu(x)) : x \in X, \mu(x) \in [0, 1] \right\}$ şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.1.2 (Zadeh, 1965) μ ve ν X in bulanık alt kümeleri olsun. Her $x \in X$ için $\mu(x) \leq \nu(x)$ ise ν 'ye μ 'yü kapsıyor denir ve bu durum $\mu \leq \nu$ şeklinde ifade edilir.

$(\mu \vee \nu)(x) = \mu(x) \vee \nu(x) = \max\{\mu(x), \nu(x)\}$ ve $(\mu \wedge \nu)(x) = \mu(x) \wedge \nu(x) = \min\{\mu(x), \nu(x)\}$ ile verilen bulanık alt kümelere sırasıyla μ ve ν 'nün birleşimi ve arakesiti denir.

Tanım 2.1.3 (Zhang, 1994) $X \neq \emptyset$ bir küme olsun. Bir A bipolar bulanık kümesi X üzerinde $A = \{(x, \mu_A^+(x), \mu_A^-(x)) | x \in X\}$ kümesi olarak tanımlanır ve $A = (\mu_A^+, \mu_A^-)$ şeklinde gösterilir. Burada $\mu_A^+ : X \rightarrow [0, 1]$ ve $\mu_A^- : X \rightarrow [-1, 0]$ dır.

Tanım 2.1.4 (Zhang, 1994) $X \neq \emptyset$ bir küme olsun. $A = (\mu_A^+, \mu_A^-) : X \times X \rightarrow [0, 1] \times [-1, 0]$ dönüşümüne X üzerinde bipolar bulanık bağıntı denir. Burada her $(x, y) \in X \times X$ için $\mu_A^+(x, y) \in [0, 1]$ ve $\mu_A^-(x, y) \in [-1, 0]$ dir.

Tanım 2.1.5 (Zhang, 1994) $A = (\mu_A^+, \mu_A^-)$ ve $B = (\mu_B^+, \mu_B^-)$ X üzerinde bipolar bulanık kümeler olsun. Eğer her $x, y \in X$ için $\mu_A^+(x, y) \leq \min(\mu_B^+(x), \mu_B^+(y))$ ve $\mu_A^-(x, y) \geq \max(\mu_B^-(x), \mu_B^-(y))$ ise $A = (\mu_A^+, \mu_A^-)$ ya $B = (\mu_B^+, \mu_B^-)$ üzerinde bipolar bulanık bağıntı denir.

Tanım 2.1.6 (Maji ve ark., 2001) $X \neq \emptyset$ bir küme, E parametreler kümesi, $A \subseteq E$ olsun ve $B(X)$, X üzerindeki bütün bulanık alt kümelerinin kümesi olsun. $F : A \rightarrow B(X)$ ile verilen (F, A) ikilisine X üzerinde bulanık esnek küme denir.

Tanım 2.1.7 (Aslam ve ark., 2014) $X \neq \emptyset$ bir küme, E parametrelerin bir kümesi ve $BE(X)$ X üzerindeki bütün bipolar bulanık kümelerin kümesi olsun. $\phi : A \rightarrow BE(X)$ dönüşümü ile verilen (ϕ, A) ikilisine X üzerinde bipolar bulanık esnek küme denir. Her $a \in A$ için $\phi(a)$ (ϕ, A) nın a-yaklaşımlı elemanların kümesi olarak adlandırılır ve $\phi(a) = \{(\mu^+ \phi_{(a)}(x), \mu^- \phi_{(a)}(x)) | x \in X, a \in A\}$ şeklinde tanımlanır. Burada $\mu^+ \phi_{(a)}(x)$ a parametresine göre x in derecesini ve $\mu^- \phi_{(a)}(x)$ a parametresin karşıt özelliğini sağlayan x in derecesini ifade etmektedir.

Tanım 2.1.8 (Aslam ve ark., 2014) (ϕ, A) ve (ψ, B) X üzerinde iki bipolar bulanık esnek küme olsun. Eğer $A \subseteq B$ ve her $a \in A$ için $\phi(a) \leq \psi(a)$ ise (ϕ, A) ya (ψ, B) nin bipolar bulanık esnek alt kümesi denir.

Tanım 2.1.9 (ϕ, A) X üzerinde bipolar bulanık esnek küme olsun. (ϕ, A) nın tümleyeni $(\phi, A)^t$ ile gösterilir ve $(\phi, A)^t = \{(x, 1 - \mu^+(\phi(a)(x)), -1 - \mu^-(\phi(a)(x)) | x \in X, a \in A\}$ şeklinde tanımlanır.

2.2 Graf, Bulanık Graf, Bipolar Bulanık Graf ve Bulanık Esnek Graf

Tanım 2.2.1 (Euler, 1736) Bir G^* grafi $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ köşe elemanları kümesi ve $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ kenar elemanları kümesi olmak üzere $G^* = (V, E)$ şeklinde gösterilir. Eğer $e = uv$, G^* grafına ait bir kenar ise u ve v köşe noktalarının bağlantılı olduğunu söyleriz.

Tanım 2.2.2 (Euler, 1736) Bir grafta birden çok kenar iki köşeyi birleştiriyor ise bu kenarlara çoklu kenar denir. Çoklu kenar içeren graflara da çoklu graf denir. Çoklu kenar içermeyen graflara basit graf denir. Bir G^* grafının alt grafi, bütün köşe noktaları ve kenarları G^* tarafından kapsanan bir graftır.

Tanım 2.2.3 (Imrich ve ark., 2008) $G_1^* = (V_1, E_1)$ ve $G_2^* = (V_2, E_2)$ iki basit graf olsun. G_1^* ve G_2^* nin kartezyen çarpımı ve bileşkesi sırasıyla aşağıdaki şekilde tanımlanır.

- i) $G_1^* \times G_2^* = (V, E) = (V_1 \times V_2, E = \{(uv_1, uv_2) | u \in V_1, v_1v_2 \in E_2\} \cup \{(u_1v, u_2v) | v \in V_2, u_1u_2 \in E_1\})$.
- ii) $G_1^* \circ G_2^* = (V, E) = (V_1 \times V_2, E = \{(uv_1, uv_2) | u \in V_1, v_1v_2 \in E_2\} \cup \{(u_1v, u_2v) | v \in V_2, u_1u_2 \in E_1\} \cup \{(u_1v_1, u_2v_2) | u_1u_2 \in E_1, v_1 \neq v_2\})$.

Tanım 2.2.4 (Rosenfeld, 1975) $V \neq \emptyset$ bir küme, $\mu : V \rightarrow [0, 1]$ ve $\nu : V \times V \rightarrow [0, 1]$ olsun. Eğer her $x, y \in V$ için $\nu(x, y) \leq \min\{\mu(x), \mu(y)\}$ eşitsizliği sağlanıyorsa $G = (\mu, \nu)$ ye V üzerinde bir bulanık graf denir.

Burada μ ve ν dönüşümleri sırasıyla bulanık grafın köşelerini ve kenarlarını temsil eder.

Tanım 2.2.5 (Rosenfeld, 1975) $H = (\gamma, \rho)$ ve $G = (\mu, \nu)$ V üzerinde iki bulanık graf olsun. Eğer her $x, y \in V$ için $\gamma(x) \leq \mu(x)$ ve $\rho(x, y) \leq \nu(x, y)$ ise H ya G nin bulanık alt grafi denir.

Tanım 2.2.6 (Akram, 2011) $G^* = (V, E)$ bir basit graf olsun. $A = (\mu_A^+, \mu_A^-)$ V üzerinde, $B = (\mu_B^+, \mu_B^-)$ E üzerinde bipolar bulanık kümeler olsun. Eğer her $\{x, y\} \in E$ için $\mu_B^+(x, y) \leq \min(\mu_A^+(x), \mu_A^+(y))$ ve $\mu_B^-(x, y) \geq \max(\mu_A^-(x), \mu_A^-(y))$ oluyorsa $G = (A, B)$ ye bipolar bulanık graf denir. Burada A ve B sırasıyla bipolar bulanık köşe ve bipolar bulanık kenar olarak adlandırılır.

Bundan sonraki kısımlarda bir E kenarının bir $\{x, y\}$ elemanı için xy notasyonunu kullanacağız.

Tanım 2.2.7 (Mohinta ve Samanta, 2015) Bir $\tilde{G}_E = (G^*, \phi, \psi, A)$ dörtlüsü aşağıdaki koşulları sağlıyor ise \tilde{G}_E ye bulanık esnek graf denir.

- i) $A \neq \emptyset$ bir parametre kümesidir
- ii) (ϕ, A) V üzerinde bir bulanık esnek kümedir
- iii) (ψ, A) E üzerinde bir bulanık esnek kümedir
- iv) Her $e \in A$ için $\varphi(e) = (\phi(e), \psi(e))$, $G^* = (V, E)$ basit grafının bir bulanık alt grafıdır. Yani her $e \in A$ ve $xy \in V$ için $\psi(e)(xy) \leq \min\{\phi(e)(x), \phi(e)(y)\}$ dir. Açıkca bir bulanık esnek graf, bulanık grafların parametreleştirilmiş bir ailesidir.

Örnek 2.2.1 $V = \{x_1, x_2, x_3\}$ ve $E = \{x_1x_2, x_1x_3, x_2x_3\}$ olmak üzere $G^* = (V, E)$ basit grafını gözönüne alalım. $A = \{e_1, e_2, e_3\}$ bir parametre kümesi olsun. $\phi : A \rightarrow B(V)$ ve $\psi : A \rightarrow B(E)$ dönüşümleri ile verilen (ϕ, A) ve (ψ, A) bulanık esnek kümeleri aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$\phi(e_1) = \{ \langle x_1, 0.5 \rangle, \langle x_2, 0.5 \rangle, \langle x_3, 0.3 \rangle \}$$

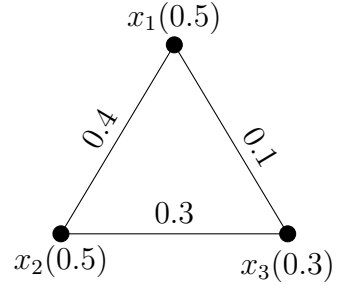
$$\phi(e_2) = \{ \langle x_1, 0.3 \rangle, \langle x_2, 0.4 \rangle, \langle x_3, 0.4 \rangle \}$$

$$\phi(e_3) = \{ \langle x_1, 0.8 \rangle, \langle x_2, 0.7 \rangle, \langle x_3, 0.3 \rangle \}$$

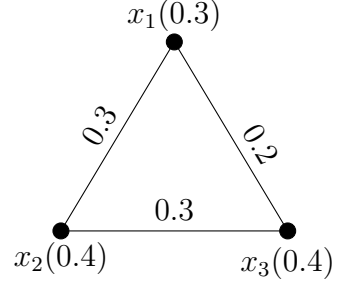
$$\psi(e_1) = \{ \langle x_1x_2, 0.4 \rangle, \langle x_1x_3, 0.1 \rangle, \langle x_2x_3, 0.3 \rangle \}$$

$$\psi(e_2) = \{ \langle x_1x_2, 0.3 \rangle, \langle x_1x_3, 0.2 \rangle, \langle x_2x_3, 0.3 \rangle \}$$

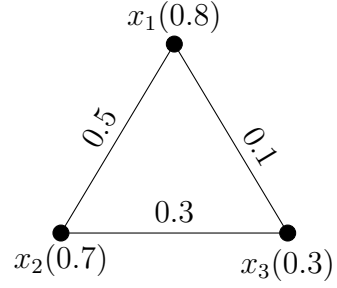
$$\psi(e_3) = \{ \langle x_1x_2, 0.5 \rangle, \langle x_1x_3, 0.1 \rangle, \langle x_2x_3, 0.3 \rangle \}$$



Şekil 2.1: $\varphi(e_1)$ bulanık grafi



Şekil 2.2: $\varphi(e_2)$ bulanık grafi



Şekil 2.3: $\varphi(e_3)$ bulanık grafi

Açıkça $\tilde{G}_E = (G^*, \phi, \psi, A)$ bir bulanık esnek graftır.

3. BİPOLAR BULANIK ESNEK GRAFLAR ÜZERİNDE BAZI İŞLEMLER

Tanım 3.0.1 (Çelik, 2018) Bir $\tilde{G} = (G^*, \phi, \psi, A)$ dördlüsü aşağıdaki koşulları sağlıyor ise \tilde{G} 'ye bipolar bulanık esnek graf denir.

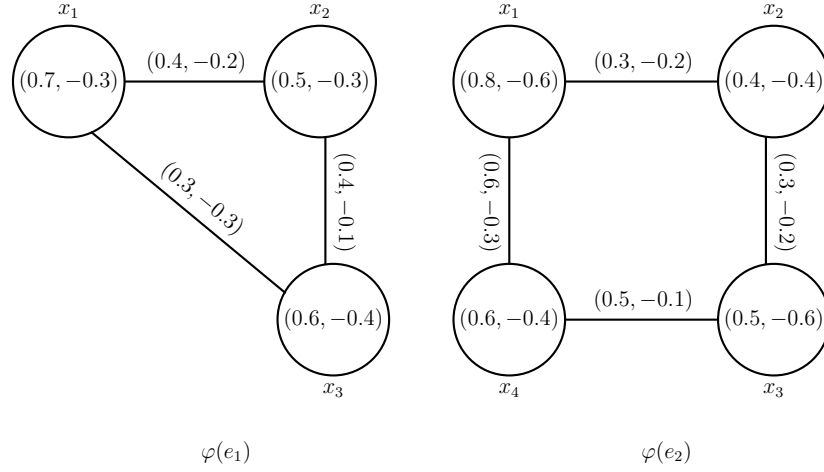
- i. $A \neq \emptyset$ bir parametre kümesi
- ii. (ϕ, A) V üzerinde bipolar bulanık esnek küme
- iii. (ψ, A) E üzerinde bipolar bulanık esnek küme
- iv. Her $e \in A$ için $(\phi(e), \psi(e))$ bipolar bulanık graftır. Yani Her $\{xy\} \in E$ için $\mu_{\psi(e)}^+(xy) \leq \min(\mu_{\phi(e)}^+(x), \mu_{\phi(e)}^+(y))$ ve $\mu_{\psi(e)}^-(xy) \geq \max(\mu_{\phi(e)}^-(x), \mu_{\phi(e)}^-(y))$ dir.

Burada (ϕ, A) ya bipolar bulanık esnek köşe ve (ψ, A) ya bipolar bulanık esnek kenar denir. Bu tezde $G^* = (V, E)$ ile basit grafı, $\varphi(e) = (\phi(e), \psi(e))$ ile bipolar bulanık grafı göstereceğiz.

Örnek 3.0.1 $V = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ ve $E = \{x_1x_2, x_2x_3, x_3x_1, x_3x_4, x_4x_1\}$ olmak üzere $G^* = (V, E)$ basit grafını ele alalım. $A = \{e_1, e_2\}$ bir parametre kümesi olsun. (ϕ, A) ve (ψ, A) bipolar bulanık esnek kümeleri V ve E üzerinde sırasıyla aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$\begin{aligned} \phi(e_1) &= \{(x_1, 0.7, -0.3), (x_2, 0.5, -0.3), (x_3, 0.6, -0.4)\} \\ \phi(e_2) &= \{(x_1, 0.8, -0.6), (x_2, 0.4, -0.4), (x_3, 0.5, -0.6), (x_4, 0.6, -0.4)\} \\ \psi(e_1) &= \{(x_1x_2, 0.4, -0.2), (x_2x_3, 0.4, -0.1), (x_3x_1, 0.3, -0.3)\} \\ \psi(e_2) &= \{(x_1x_2, 0.3, -0.2), (x_2x_3, 0.3, -0.2), (x_3x_4, 0.5, -0.2), (x_4x_1, 0.6, -0.3)\} \end{aligned}$$

Açıkça $\varphi(e_1) = (\phi(e_1), \psi(e_1))$ ve $\varphi(e_2) = (\phi(e_2), \psi(e_2))$ sırasıyla e_1 ve e_2 parametresine karşılık gelen bipolar bulanık graflardır. Üstelik $\tilde{G} = (G^*, \phi, \psi, A)$ bipolar bulanık esnek graftır.



Şekil 3.1: \tilde{G} bipolar bulanık esnek grafi

Tablo 3.1: \tilde{G} bipolar bulanık esnek grafi

ϕ	x_1	x_2	x_3	x_4
e_1	(0.7,0.3)	(0.5,0.3)	(0.6,0.4)	(0,0,1)
e_2	(0.8,0.6)	(0.4,0.4)	(0.5,0.6)	(0.6,0.4)

ψ	(x_1x_2)	(x_2x_3)	(x_3x_1)	(x_3x_4)	(x_4x_1)
e_1	(0.4,0.2)	(0.4,0.1)	(0.3,0.3)	(0,1,1)	(0,1,1)
e_2	(0.3,0.2)	(0.3,0.2)	(0,1,1)	(0.5,0.1)	(0.6,0.3)

Tanım 3.0.2 $\tilde{G}_1 = (G^*, \phi, \psi, A)$ ve $\tilde{G}_2 = (G^*, \phi_1, \psi_1, B)$ bipolar bulanık esnek graflar olsun. \tilde{G}_1 grafına \tilde{G}_2 grafının bipolar bulanık esnek alt grafi denir. \iff

i. $A \subseteq B$

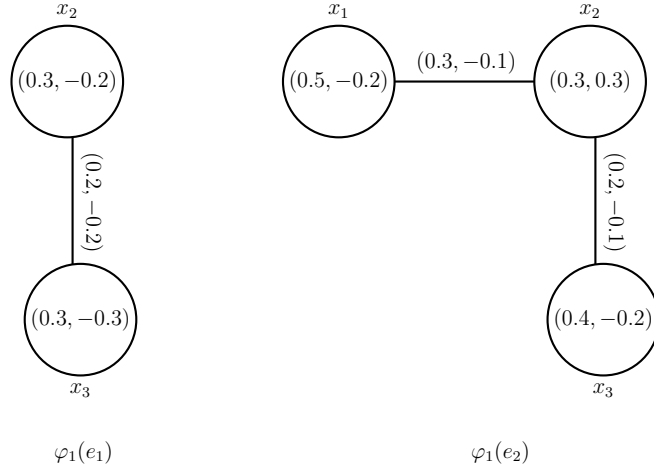
ii. Her $e \in A$ için $\varphi(e) = (\phi(e), \psi(e))$, $\varphi_1(e) = (\phi_1(e), \psi_1(e))$ nin bipolar bulanık alt grafidir.

Örnek 3.0.2 $\tilde{G} = (G^*, \phi, \psi, A)$ bipolar bulanık esnek grafi Örnek 3.0.1 deki gibi verilsin.

$B = \{e_1, e_2\}$ bir parametre kümesi olsun. (ϕ_1, B) ve (ψ_1, B) bipolar bulanık esnek kümeleri V ve E üzerinde sırasıyla aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$\begin{aligned}
 \phi_1(e_1) &= \{(x_2, 0.3, -0.2), (x_3, 0.3, -0.3)\} \\
 \phi_1(e_2) &= \{(x_1, 0.5, -0.2), (x_2, 0.3, 0.3), (x_3, 0.4, -0.2)\} \\
 \psi_1(e_1) &= \{(x_2x_3, 0.2, -0.2)\} \\
 \psi_1(e_2) &= \{(x_1x_2, 0.3, 0.1), (x_2x_3, 0.2, 0.1)\}
 \end{aligned}$$

Açıkça $\varphi(e_1) = (\phi(e_1), \psi(e_1))$ ve $\varphi_1(e_2) = (\phi_1(e_2), \psi_1(e_2))$ sırasıyla e_1 ve e_2 parametrelerine karşılık gelen bipolar bulanık graflardır.



Şekil 3.2: \widetilde{G}_1 bipolar bulanık esnek grafi

Üstelik $\widetilde{G}_1 = (G^*, \phi_1, \psi_1, B)$ bipolar bulanık esnek graftır ve \widetilde{G} nin bipolar bulanık esnek alt grafidir.

Tanım 3.0.3 $\widetilde{G} = (G^*, \phi, \psi, A)$ grafına güçlü bipolar bulanık esnek graf denir. \Leftrightarrow Her $e \in A$ ve $xy \in E$ için

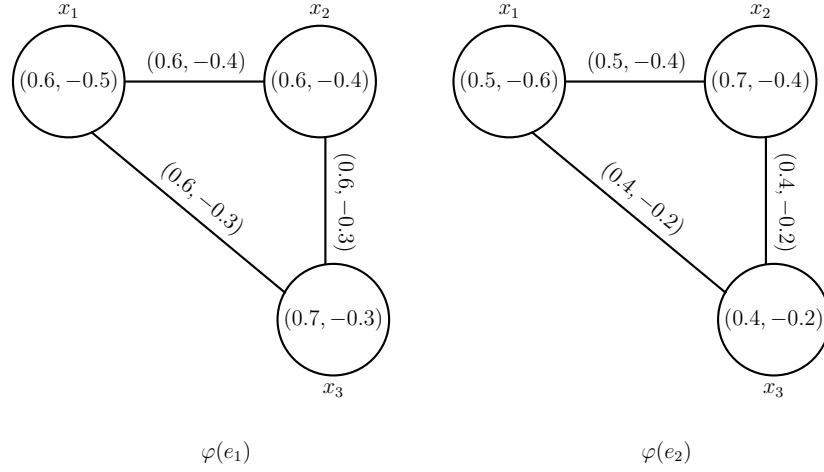
$$\begin{aligned}\mu_{\psi(e)}^+(xy) &= \min(\mu_{\phi(e)}^+(x), \mu_{\phi(e)}^+(y)) \\ \mu_{\psi(e)}^-(xy) &= \max(\mu_{\phi(e)}^-(x), \mu_{\phi(e)}^-(y))\end{aligned}$$

Örnek 3.0.3 $V = \{x_1, x_2, x_3\}$ ve $E = \{x_1x_2, x_2x_3, x_3x_1\}$ ile verilen $G^* = (V, E)$ basit grafini ele alalım.

$A = \{e_1, e_2\}$ bir parametre kümesi olmak üzere (ϕ, A) ve (ψ, A) bipolar bulanık esnek kümeleri sırasıyla V ve E üzerinde aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$\begin{aligned}\phi(e_1) &= \{(x_1, 0.6, -0.5), (x_2, 0.6, -0.4), (x_3, 0.7, -0.3)\} \\ \phi(e_2) &= \{(x_1, 0.5, -0.6), (x_2, 0.7, -0.4), (x_3, 0.4, -0.2)\} \\ \psi(e_1) &= \{(x_1x_2, 0.6, -0.4), (x_2x_3, 0.6, -0.3), (x_3x_1, 0.6, -0.3)\} \\ \psi(e_2) &= \{(x_1x_2, 0.5, -0.4), (x_2x_3, 0.4, -0.2), (x_3x_1, 0.4, -0.2)\}\end{aligned}$$

Açıkça, $\varphi(e_1) = (\phi(e_1), \psi(e_1))$ ve $\varphi(e_2) = (\phi(e_2), \psi(e_2))$ bipolar bulanık graflardır. Üstelik $\widetilde{G} = (G^*, \phi, \psi, A)$ G^* üzerinde güçlü bipolar bulanık esnek graftır.



Şekil 3.3: \tilde{G} güçlü bipolar bulanık esnek grafi

Tanım 3.0.4 $\tilde{G} = (G^*, \phi, \psi, A)$ $G^* = (V, E)$ üzerinde bipolar bulanık esnek graf olsun. \tilde{G} nin tümleyeni $\bar{\tilde{G}} = (G^*, \bar{\phi}, \bar{\psi}, \bar{A})$ şeklinde gösterilir ve aşağıdaki gibi tanımlanır.

i. $\bar{A} = A$

ii. Her $x, y \in V$ ve $e \in A$ için $\mu_{\bar{\phi}(e)}^-(x) = \mu_{\phi(e)}^+(x)$

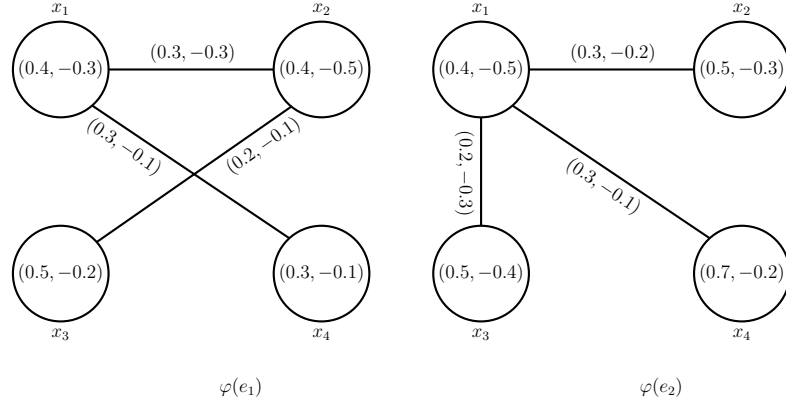
iii.
$$\mu_{\bar{\psi}(e)}^+(xy) = \begin{cases} \mu_{\phi(e)}^+(x) \wedge \mu_{\phi(e)}^+(y) - \mu_{\psi(e)}^+(xy), & \mu_{\psi(e)}^+(xy) > 0 \\ 0, & \mu_{\psi(e)}^+(xy) = 0 \end{cases}$$

$$\mu_{\bar{\psi}(e)}^-(xy) = \begin{cases} \mu_{\phi(e)}^-(x) \wedge \mu_{\phi(e)}^-(y) - \mu_{\psi(e)}^-(xy), & \mu_{\psi(e)}^-(xy) < 0 \\ 0, & \mu_{\psi(e)}^-(xy) = 0 \end{cases}$$

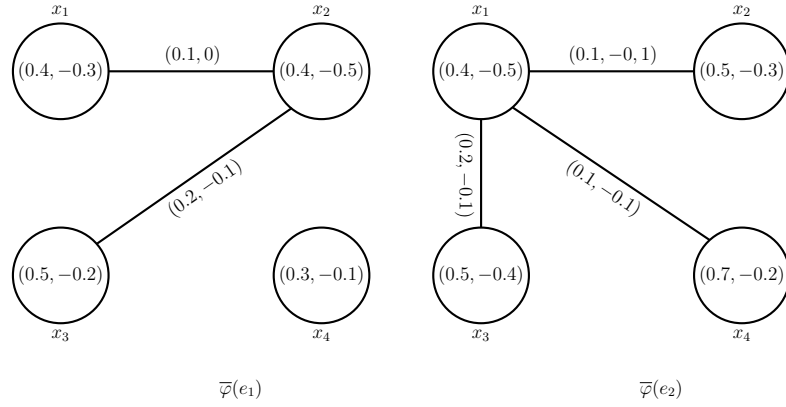
Örnek 3.0.4 $V = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ ve $E = \{x_1x_2, x_2x_3, x_1x_3, x_1x_4\}$ ile verilen $G^* = (V, E)$ basit grafini ele alalım. $A = \{e_1, e_2\}$ bir parametre kümesi olsun. (ϕ, A) ve (ψ, A) bipolar bulanık esnek kümeleri V ve E üzerinde sırasıyla aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$\begin{aligned} \phi(e_1) &= \{(x_1, 0.4, -0.3), (x_2, 0.4, -0.5), (x_3, 0.5, -0.2), (x_4, 0.3, -0.1)\} \\ \phi(e_2) &= \{(x_1, 0.4, -0.5), (x_2, 0.5, -0.3), (x_3, 0.5, -0.4), (x_4, 0.7, -0.2)\} \\ \psi(e_1) &= \{(x_1x_2, 0.3, -0.3), (x_2x_3, 0.2, -0.1), (x_1x_4, 0.3, -0.1)\} \\ \psi(e_2) &= \{(x_1x_2, 0.3, -0.2), (x_1x_3, 0.2, -0.3), (x_1x_4, 0.3, -0.1)\} \end{aligned}$$

Açıkça $\varphi(e_1) = (\phi(e_1), \psi(e_1))$ ve $\varphi(e_2) = (\phi(e_2), \psi(e_2))$ sırasıyla e_1 ve e_2 parametresine karşılık gelen bipolar bulanık graflardır. Üstelik $\tilde{G} = (G^*, \phi, \psi, A)$ bipolar bulanık esnek graftır.



Şekil 3.4: \tilde{G} bipolar bulanık esnek grafi



Şekil 3.5: \tilde{G} bipolar bulanık esnek grafi

Tanım 3.0.5 $\tilde{G}_1 = (G_1^*, \phi_1, \psi_1, A)$ ve $\tilde{G}_2 = (G_2^*, \phi_2, \psi_2, B)$ sırasıyla $G_1^* = (V_1, E_1)$ ve $G_2^* = (V_2, E_2)$ üzerinde bipolar bulanık esnek graflar olsun. \tilde{G}_1 ve \tilde{G}_2 nin kartezyen çarpımı $G^* = (V_1 \times V_2, E_1 \times E_2)$ olmak üzere $\tilde{G}_1 \times \tilde{G}_2 = (G^*, \phi, \psi, A \times B)$ şeklinde gösterilir ve her $e_1 \in A$ ve $e_2 \in B$ için aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \text{Her } (x_1, x_2) \in V_1 \times V_2 \\
 \left\{ \begin{array}{l}
 (\mu_{\phi_1(e_1)}^+ \times \mu_{\phi_2(e_2)}^+)_{(x_1, x_2)} = \min(\mu_{\phi_1(e_1)}^+(x_1), \mu_{\phi_2(e_2)}^+(x_2)) \\
 (\mu_{\phi_1(e_1)}^- \times \mu_{\phi_2(e_2)}^-)_{(x_1, x_2)} = \max(\mu_{\phi_1(e_1)}^-(x_1), \mu_{\phi_2(e_2)}^-(x_2))
 \end{array} \right. \\
 \\
 \text{Her } x \in V_1 \text{ ve } (x_2, y_2) \in E_2 \text{ için} \\
 \left\{ \begin{array}{l}
 (\mu_{\psi_1(e_1)}^+ \times \mu_{\psi_2(e_2)}^+)_{((x, x_2)(x, y_2))} = \min(\mu_{\psi_1(e_1)}^+(x), \mu_{\psi_2(e_2)}^+(x_2, y_2)) \\
 (\mu_{\psi_1(e_1)}^- \times \mu_{\psi_2(e_2)}^-)_{((x, x_2)(x, y_2))} = \max(\mu_{\psi_1(e_1)}^-(x), \mu_{\psi_2(e_2)}^-(x_2, y_2))
 \end{array} \right. \\
 \\
 \text{Her } z \in V_2 \text{ ve } (x_1, y_1) \in E_1 \text{ için} \\
 \left\{ \begin{array}{l}
 (\mu_{\psi_1(e_1)}^+ \times \mu_{\psi_2(e_2)}^+)_{((x_1, z)(y_1, z))} = \min(\mu_{\psi_1(e_1)}^+(x_1, y_1), \mu_{\psi_2(e_2)}^+(z)) \\
 (\mu_{\psi_1(e_1)}^- \times \mu_{\psi_2(e_2)}^-)_{((x_1, z)(y_1, z))} = \max(\mu_{\psi_1(e_1)}^-(x_1, y_1), \mu_{\psi_2(e_2)}^-(z))
 \end{array} \right.
 \end{array} \right.$$

Örnek 3.0.5 $V_1 = \{x_1, y_1, z_1, t_1\}$, $E_1 = \{x_1y_1, z_1t_1\}$, $V_2 = \{x_2, y_2, z_2\}$ ve $E_2 = \{x_2y_2, y_2z_2\}$ olmak üzere $G_1^* = (V_1, E_1)$ ve $G_2^* = (V_2, E_2)$ basit graflarını gözönüne alalım.

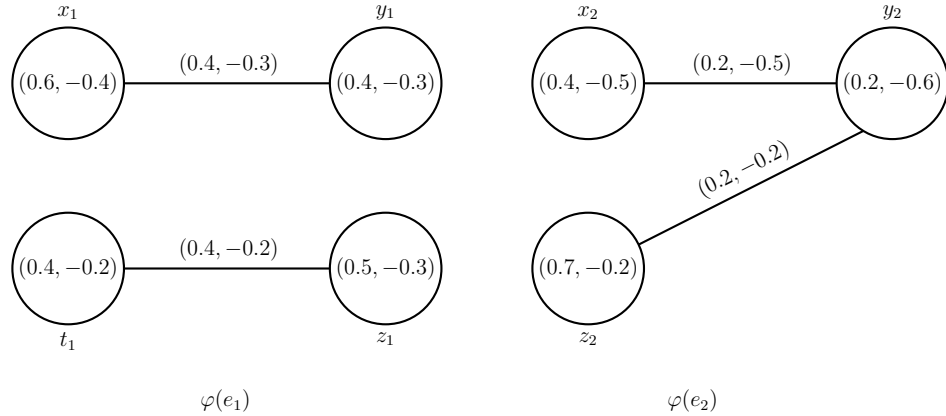
$A = \{e_1\}$ bir parametre kümesi olsun. (ϕ_1, A) ve (ψ_1, A) bipolar bulanık esnek kümeleri V_1 ve E_1 üzerinde aşağıda ki gibi verilsin.

$$\begin{aligned}\phi_1(e_1) &= \{(x_1, 0.6, -0.4), (y_1, 0.4, -0.3), (z_1, 0.5, -0.3), (t_1, 0.4, -0.2)\} \\ \psi_1(e_1) &= \{(x_1y_1, 0.4, -0.3), (z_1t_1, 0.4, -0.2)\}\end{aligned}$$

Şimdi $B = \{e_2\}$ başka bir parametre kümesi olsun. (ϕ_2, B) ve (ψ_2, B) bipolar bulanık esnek kümeleri V_2 ve E_2 üzerinde aşağıda ki gibi verilsin.

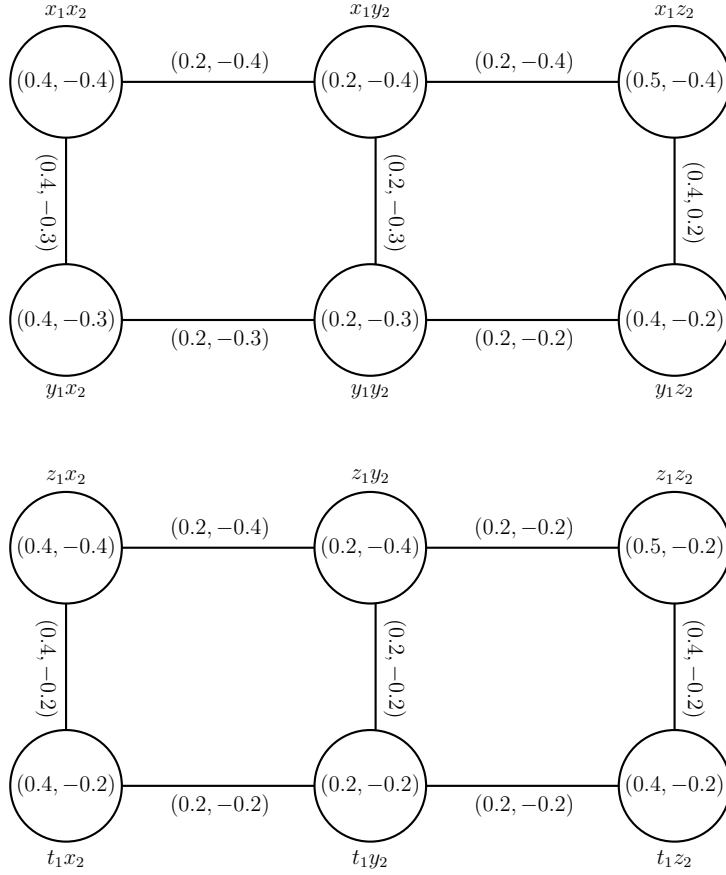
$$\begin{aligned}\phi_2(e_2) &= \{(x_2, 0.4, -0.5), (y_2, 0.2, -0.6), (z_2, 0.7, -0.2)\} \\ \psi_2(e_2) &= \{(x_2y_2, 0.2, -0.5), (y_2z_2, 0.2, -0.2)\}\end{aligned}$$

Açıkça görülür ki $\varphi(e_1) = (\phi_1(e_1), \psi_1(e_1))$ ve $\varphi(e_2) = (\phi_2(e_2), \psi_2(e_2))$ bipolar bulanık graflardır. Üstelik $\widetilde{G}_1 = (G_1^*, \phi_1, \psi_1, A)$ ve $\widetilde{G}_2 = (G_2^*, \phi_2, \psi_2, B)$ sırasıyla G_1^* ve G_2^* üzerinde bipolar bulanık esnek graflardır.



Şekil 3.6: \widetilde{G}_1 ve \widetilde{G}_2 bipolar bulanık esnek grafları

\widetilde{G}_1 ve \widetilde{G}_2 nin kartezyen çarpımı aşağıdaki gibi elde edilir.



Şekil 3.7: \widetilde{G}_1 ve \widetilde{G}_2 nin kartezyen çarpımı

Teorem 3.0.1 Eğer \widetilde{G}_1 ve \widetilde{G}_2 iki bipolar bulanık esnek graf ise $\widetilde{G}_1 \times \widetilde{G}_2$ kartezyen çarpımı da bipolar bulanık esnek graftır.

İspat. $\widetilde{G}_1 = (G_1^*, \phi_1, \psi_1, A)$ ve $\widetilde{G}_2 = (G_2^*, \phi_2, \psi_2, B)$ sırasıyla $G_1^* = (V_1, E_1)$ ve $G_2^* = (V_2, E_2)$ üzerinde bipolar bulanık esnek graflar olsun.

Tanım 3.0.5 yardımıyla her $e_1 \in A$ ve her $e_2 \in B$ için aşağıdaki üç durumdan bahsedebiliriz.

Durum 1. Eğer $x_1 \in V_1$ ve $x_2 \in V_2$ ise

$$\begin{aligned} (\mu_{\psi_1(e_1)}^+ \times \mu_{\psi_2(e_2)}^+)_{(x_1, x_2)} &= \min(\mu_{\phi_1(e_1)}^+(x_1), \mu_{\phi_2(e_2)}^+(x_2)) \\ &= \min[(\mu_{\phi_1(e_1)}^+ \times \mu_{\phi_2(e_2)}^+)_{(x_1)}, (\mu_{\phi_1(e_1)}^+ \times \mu_{\phi_2(e_2)}^+)_{(x_2)}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\mu_{\psi_1(e_1)}^- \times \mu_{\psi_2(e_2)}^-)_{(x_1, x_2)} &= \max(\mu_{\phi_1(e_1)}^-(x_1), \mu_{\phi_2(e_2)}^-(x_2)) \\
&= \max[(\mu_{\phi_1(e_1)}^- \times \mu_{\phi_2(e_2)}^-)_{(x_1)}, (\mu_{\phi_1(e_1)}^- \times \mu_{\phi_2(e_2)}^-)_{(x_2)}]
\end{aligned}$$

Durum 2. Eğer $x \in V_1$ ve $(x_2, y_2) \in E_2$ ise

$$\begin{aligned}
(\mu_{\psi_1(e_1)}^+ \times \mu_{\psi_2(e_2)}^+)_{((x, x_2)(x, y_2))} &= \min(\mu_{\phi_1(e_1)}^+(x), \mu_{\psi_2(e_2)}^+(x_2, y_2)) \\
&\leq \min[\mu_{\phi_1(e_1)}^+(x), \min(\mu_{\phi_2(e_2)}^+(x_2), \mu_{\phi_2(e_2)}^+(y_2))] \\
&= \min[\min(\mu_{\phi_1(e_1)}^+(x), \mu_{\phi_2(e_2)}^+(x_2)), \min(\mu_{\phi_1(e_1)}^+(x), \mu_{\phi_2(e_2)}^+(y_2))] \\
&= \min[(\mu_{\phi_1(e_1)}^+ \times \mu_{\phi_2(e_2)}^+)_{(x, x_2)}, (\mu_{\phi_1(e_1)}^+ \times \mu_{\phi_2(e_2)}^+)_{(x, y_2)}]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\mu_{\psi_1(e_1)}^- \times \mu_{\psi_2(e_2)}^-)_{((x, x_2)(x, y_2))} &= \max(\mu_{\phi_1(e_1)}^-(x), \mu_{\psi_2(e_2)}^-(x_2, y_2)) \\
&\geq \max[\mu_{\phi_1(e_1)}^-(x), \max(\mu_{\phi_2(e_2)}^-(x_2), \mu_{\phi_2(e_2)}^-(y_2))] \\
&= \max[\max(\mu_{\phi_1(e_1)}^-(x), \mu_{\phi_2(e_2)}^-(x_2)), \max(\mu_{\phi_1(e_1)}^-(x), \mu_{\phi_2(e_2)}^-(y_2))] \\
&= \max[(\mu_{\phi_1(e_1)}^- \times \mu_{\phi_2(e_2)}^-)_{(x, x_2)}, (\mu_{\phi_1(e_1)}^- \times \mu_{\phi_2(e_2)}^-)_{(x, y_2)}]
\end{aligned}$$

Durum 3. Eğer $x \in V_2$ ve $(x_1, y_1) \in E_1$ ise

$$\begin{aligned}
(\mu_{\psi_1(e_1)}^+ \times \mu_{\psi_2(e_2)}^+)_{((x_1, z)(y_1, z))} &= \min(\mu_{\psi_1(e_1)}^+(x_1, y_1), \mu_{\phi_2(e_2)}^+(z)) \\
&\leq \min[\mu_{\phi_2(e_2)}^+(z), \min(\mu_{\phi_1(e_1)}^+(x_1), \mu_{\phi_1(e_1)}^+(y_1))] \\
&= \min[\min(\mu_{\phi_1(e_1)}^+(x_1), \mu_{\phi_2(e_2)}^+(z)), \min(\mu_{\phi_1(e_1)}^+(y_1), \mu_{\phi_2(e_2)}^+(z))] \\
&= \min[(\mu_{\phi_1(e_1)}^+ \times \mu_{\phi_2(e_2)}^+)_{(x_1, z)}, (\mu_{\phi_1(e_1)}^+ \times \mu_{\phi_2(e_2)}^+)_{(y_1, z)}]
\end{aligned}$$

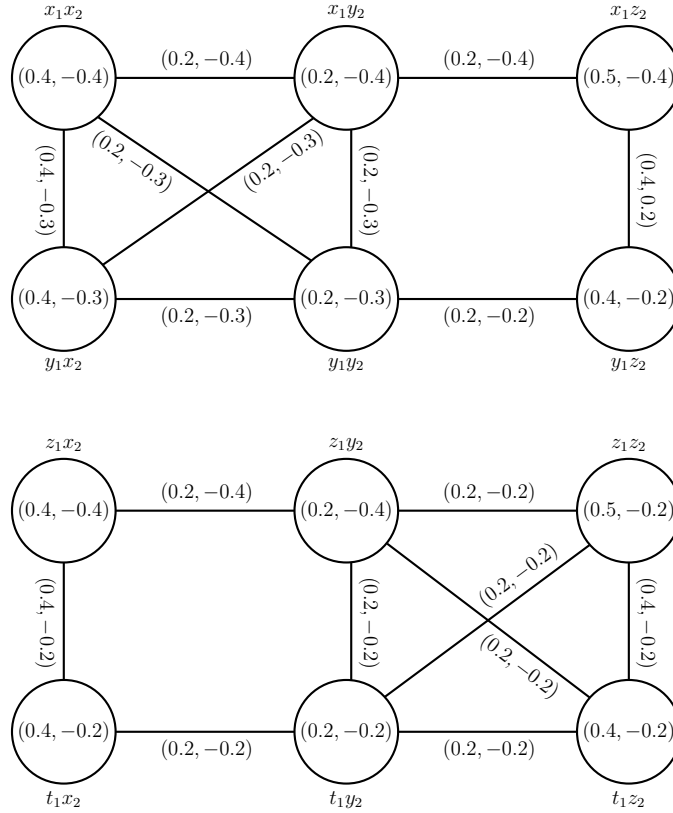
$$\begin{aligned}
(\mu_{\psi_1(e_1)}^- \times \mu_{\psi_2(e_2)}^-)_{((x_1, z)(y_1, z))} &= \max(\mu_{\psi_1(e_1)}^-(x_1, y_1), \mu_{\phi_2(e_2)}^-(z)) \\
&\geq \max[\mu_{\phi_2(e_2)}^-(z), \max(\mu_{\phi_1(e_1)}^-(x_1), \mu_{\phi_1(e_1)}^-(y_1))] \\
&= \max[\max(\mu_{\phi_1(e_1)}^-(x_1), \mu_{\phi_2(e_2)}^-(z)), \max(\mu_{\phi_1(e_1)}^-(y_1), \mu_{\phi_2(e_2)}^-(z))] \\
&= \max[(\mu_{\phi_1(e_1)}^- \times \mu_{\phi_2(e_2)}^-)_{(x_1, z)}, (\mu_{\phi_1(e_1)}^- \times \mu_{\phi_2(e_2)}^-)_{(y_1, z)}]
\end{aligned}$$

Her bir durum için açıkça görülür ki $\widetilde{G}_1 \times \widetilde{G}_2$ kartezyen çarpımı bipolar bulanık esnek graftır.

Tanım 3.0.6 $\widetilde{G}_1 = (G_1^*, \phi_1, \psi_1, A)$ ve $\widetilde{G}_2 = (G_2^*, \phi_2, \psi_2, B)$ sırasıyla $G_1^* = (V_1, E_1)$ ve $G_2^* = (V_2, E_2)$ üzerinde bipolar bulanık esnek graflar olsun. \widetilde{G}_1 ve \widetilde{G}_2 nin güçlü çarpımı $\widetilde{G}_1 \otimes \widetilde{G}_2 = (G^*, \phi, \psi, A \times B)$ şeklinde gösterilir ve her $e_1 \in A$ ve $e_2 \in B$ için aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\left\{ \begin{array}{l}
\text{Her } (x_1, x_2) \in V_1 \times V_2 \text{ için} \\
\left\{ \begin{array}{l}
(\mu_{\phi_1(e_1)}^+ \otimes \mu_{\phi_2(e_2)}^+)(x_1, x_2) = \min(\mu_{\phi_1(e_1)}^+(x_1), \mu_{\phi_2(e_2)}^+(x_2)) \\
(\mu_{\phi_1(e_1)}^- \otimes \mu_{\phi_2(e_2)}^-)(x_1, x_2) = \max(\mu_{\phi_1(e_1)}^-(x_1), \mu_{\phi_2(e_2)}^-(x_2))
\end{array} \right. \\
\\
\text{Her } x \in V_1 \text{ ve } (x_2, y_2) \in E_2 \text{ için} \\
\left\{ \begin{array}{l}
(\mu_{\psi_1(e_1)}^+ \otimes \mu_{\psi_2(e_2)}^+)((x, x_2)(x, y_2)) = \min(\mu_{\phi_1(e_1)}^+(x), \mu_{\psi_2(e_2)}^+(x_2, y_2)) \\
(\mu_{\psi_1(e_1)}^- \otimes \mu_{\psi_2(e_2)}^-)((x, x_2)(x, y_2)) = \max(\mu_{\phi_1(e_1)}^-(x), \mu_{\psi_2(e_2)}^-(x_2, y_2))
\end{array} \right. \\
\\
\text{Her } z \in V_2 \text{ ve } (x_1, y_1) \in E_1 \text{ için} \\
\left\{ \begin{array}{l}
(\mu_{\psi_1(e_1)}^+ \otimes \mu_{\psi_2(e_2)}^+)((x_1, z)(y_1, z)) = \min(\mu_{\psi_1(e_1)}^+(x_1, y_1), \mu_{\phi_2(e_2)}^+(z)) \\
(\mu_{\psi_1(e_1)}^- \otimes \mu_{\psi_2(e_2)}^-)((x_1, z)(y_1, z)) = \max(\mu_{\psi_1(e_1)}^-(x_1, y_1), \mu_{\phi_2(e_2)}^-(z))
\end{array} \right. \\
\\
\text{Her } (x_1, y_1) \in E_1 \text{ ve } (z_1, z_2) \in E_2 \text{ için} \\
\left\{ \begin{array}{l}
(\mu_{\psi_1(e_1)}^+ \otimes \mu_{\psi_2(e_2)}^+)((x_1, z_1)(y_1, z_2)) = \min(\mu_{\psi_1(e_1)}^+(x_1, y_1), \mu_{\psi_2(e_2)}^+(z_1, z_2)) \\
(\mu_{\psi_1(e_1)}^- \otimes \mu_{\psi_2(e_2)}^-)((x_1, z_1)(y_1, z_2)) = \max(\mu_{\psi_1(e_1)}^-(x_1, y_1), \mu_{\psi_2(e_2)}^-(z_1, z_2))
\end{array} \right.
\end{array} \right.$$

Örnek 3.0.6 Örnek 3.0.5 de verilen $\widetilde{G}_1 = (G_1^*, \phi_1, \psi_1, A)$ ve $\widetilde{G}_2 = (G_2^*, \phi_2, \psi_2, B)$ bipolar bulanık esnek graflarını gözönüne alalım. \widetilde{G}_1 ve \widetilde{G}_2 nin güçlü çarpımı aşağıdaki gibi elde edilir.



Şekil 3.8: \widetilde{G}_1 ve \widetilde{G}_2 nin güçlü çarpımı

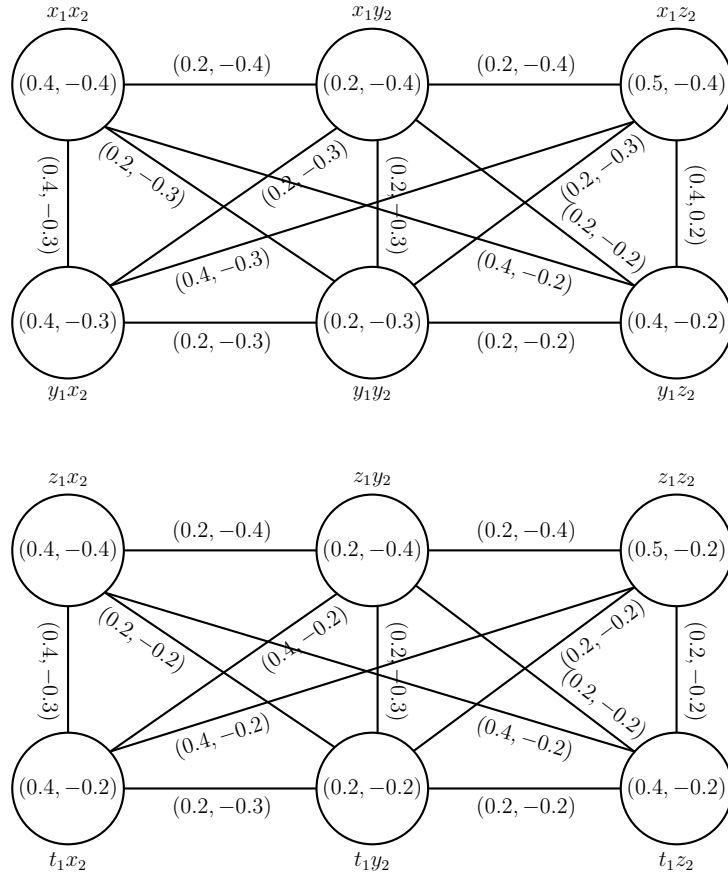
Teorem 3.0.2 Eğer \widetilde{G}_1 ve \widetilde{G}_2 bipolar bulanık esnek graflar ise $\widetilde{G}_1 \otimes \widetilde{G}_2$ güçlü çarpımı da bipolar bulanık esnek graftır.

İspat. Teorem 3.0.1 in ispatına benzer şekilde yapılır.

Tanım 3.0.7 $\widetilde{G}_1 = (G_1^*, \phi_1, \psi_1, A)$ ve $\widetilde{G}_2 = (G_2^*, \phi_2, \psi_2, B)$ sırasıyla $G_1^* = (V_1, E_1)$ ve $G_2^* = (V_2, E_2)$ üzerinde bipolar bulanık esnek graflar olsun. \widetilde{G}_1 ve \widetilde{G}_2 nin bileşkesi $\widetilde{G}_1 \circ \widetilde{G}_2 = (G^*, \phi, \psi, A \times B)$ şeklinde gösterilir ve her $e_1 \in A$ ve her $e_2 \in B$ için aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Her } (x_1, x_2) \in V_1 \times V_2 \text{ için} \\ \left\{ \begin{array}{l} (\mu_{\phi_1(e_1)}^+ \circ \mu_{\phi_2(e_2)}^+)_{(x_1, x_2)} = \min(\mu_{\phi_1(e_1)}^+(x_1), \mu_{\phi_2(e_2)}^+(x_2)) \\ (\mu_{\phi_1(e_1)}^- \circ \mu_{\phi_2(e_2)}^-)_{(x_1, x_2)} = \max(\mu_{\phi_1(e_1)}^-(x_1), \mu_{\phi_2(e_2)}^-(x_2)) \end{array} \right. \\ \\ \text{Her } x \in V_1 \text{ ve } (x_2, y_2) \in E_2 \text{ için} \\ \left\{ \begin{array}{l} (\mu_{\psi_1(e_1)}^+ \circ \mu_{\psi_2(e_2)}^+)_{((x, x_2)(x, y_2))} = \min(\mu_{\psi_1(e_1)}^+(x), \mu_{\psi_2(e_2)}^+(x_2, y_2)) \\ (\mu_{\psi_1(e_1)}^- \circ \mu_{\psi_2(e_2)}^-)_{((x, x_2)(x, y_2))} = \max(\mu_{\psi_1(e_1)}^-(x), \mu_{\psi_2(e_2)}^-(x_2, y_2)) \end{array} \right. \\ \\ \text{Her } z \in V_2 \text{ ve } (x_1, y_1) \in E_1 \text{ için} \\ \left\{ \begin{array}{l} (\mu_{\psi_1(e_1)}^+ \circ \mu_{\psi_2(e_2)}^+)_{((x_1, z)(y_1, z))} = \min(\mu_{\psi_1(e_1)}^+(x_1, y_1), \mu_{\psi_2(e_2)}^+(z)) \\ (\mu_{\psi_1(e_1)}^- \circ \mu_{\psi_2(e_2)}^-)_{((x_1, z)(y_1, z))} = \max(\mu_{\psi_1(e_1)}^-(x_1, y_1), \mu_{\psi_2(e_2)}^-(z)) \end{array} \right. \\ \\ \text{Her } (x_1, y_1) \in E_1 \text{ ve } (z_1, z_2) \in E_2 \text{ için} \\ \left\{ \begin{array}{l} (\mu_{\psi_1(e_1)}^+ \circ \mu_{\psi_2(e_2)}^+)_{((x_1, z_1)(y_1, z_2))} = \min(\mu_{\psi_1(e_1)}^+(x_1, y_1), \mu_{\psi_2(e_2)}^+(z_1, z_2)) \\ (\mu_{\psi_1(e_1)}^- \circ \mu_{\psi_2(e_2)}^-)_{((x_1, z_1)(y_1, z_2))} = \max(\mu_{\psi_1(e_1)}^-(x_1, y_1), \mu_{\psi_2(e_2)}^-(z_1, z_2)) \end{array} \right. \\ \\ \text{Her } (x_1, y_1) \in E_1 \text{ ve } z_1, z_2 \in V_2, z_1 \neq z_2 \text{ için} \\ \left\{ \begin{array}{l} (\mu_{\psi_1(e_1)}^+ \circ \mu_{\psi_2(e_2)}^+)_{((x_1, z_1)(y_1, z_2))} = \min(\mu_{\phi_2(e_2)}^+(z_1), \mu_{\phi_2(e_2)}^+(z_2), \mu_{\psi_1(e_1)}^+(x_1, y_1)) \\ (\mu_{\psi_1(e_1)}^- \circ \mu_{\psi_2(e_2)}^-)_{((x_1, z_1)(y_1, z_2))} = \max(\mu_{\phi_2(e_2)}^-(z_1), \mu_{\phi_2(e_2)}^-(z_2), \mu_{\psi_1(e_1)}^-(x_1, y_1)) \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Örnek 3.0.7 Örnek 3.0.5 de verilen $\widetilde{G}_1 = (G_1^*, \phi_1, \psi_1, A)$ ve $\widetilde{G}_2 = (G_2^*, \phi_2, \psi_2, B)$ bipolar bulanık esnek graflarını gözönüne alalım. \widetilde{G}_1 ve \widetilde{G}_2 nin bileşkesi aşağıdaki gibi elde edilir.



Şekil 3.9: \widetilde{G}_1 ve \widetilde{G}_2 nin bileşkesi

Teorem 3.0.3 Eğer \widetilde{G}_1 ve \widetilde{G}_2 bipolar bulanık esnek graflar ise $\widetilde{G}_1 \circ \widetilde{G}_2$ bileşkesi de bipolar bulanık esnek graftır.

İspat. Teorem 3.0.1 in ispatına benzer şekilde yapılır.

4. BİPOLAR BULANIK ESNEK GRAFLARIN BİR KARAR VERME PROBLEMİ ÜZERİNDEKİ UYGULAMASI

Çocuklarda bipolar bozukluk, her zamankinden daha mutlu, stresli, enerjik ve tembel olma gibi farklı ruh hali değişikliklerine neden olan ciddi bir nörolojik hastalıktır. Çocuklarda bipolar bozukluğun tespiti ve teşhisi, normal çocuk davranışlarına benzemesi ve doktorların herhangi bir laboratuvar testi kullanmaması nedeniyle zordur. Bipolar bulanık esnek graflar, bir çocuğun okulda, evde, oyun oynarken, ebeveynlerinin yanında ve arkadaşları ile birlikte olduğu zamanlardaki kaygı, işbirliği içerisinde hareket etme ve davranış durumlarını kullanarak bipolar bozukluğu tespit etmek için kullanılabilir. Bir çocukta bipolar bozukluğun saptanması için uygulanacak yöntemin algoritması aşağıda verilmiştir.

Algoritma

1. Çocuğun $A = \{e_1, e_2, \dots, e_k\}$ parametre kümesi belirlenir.
2. Parametrelere bağlı olarak (ϕ, A) ve (ψ, A) bipolar bulanık esnek kümeleri oluşturulur.
3. $\varphi(e_1) \cap \varphi(e_2) \cap \dots \cap \varphi(e_k)$ bipolar bulanık grafi belirlenir.
4. $\mu_{x'} = \sqrt{(\mu_{x^+})^2 + (-1 - \mu_{x^-})^2}$ formülü yardımıyla bütün köşelerin normalleştirilmiş değerleri hesaplanır.
5. Bütün normalleştirilmiş değerlerin ortalama değeri bulunur.
6. Eğer ortalama değer 1 den büyük ise çocuğun bipolar bozukluğa sahip olduğu sonucuna varılır.

Durum Çalışması

Bir çocuk davranış geçmişi örneğini ele alalım:

$A = \{e_1 = \text{işbirliği}, e_2 = \text{davranış}, e_3 = \text{kaygı}\}$ parametre kümesi olsun. Varsayalım $V = \{v_1 = \text{ev}, v_2 = \text{okul}, v_3 = \text{oyun}, v_4 = \text{arkadaşlar}, v_5 = \text{aile}\}$ çocuğun zamanını geçirdiği beş durumun kümesi olsun.

V üzerinde tanımlı (ϕ, A) bipolar bulanık esnek kümesi aşağıdaki gibi verilsin. Burada (ϕ, A) sırasıyla $\{e_1 = \text{işbirliği}, e_2 = \text{davranış}, e_3 = \text{kaygı}\}$ parametrelerine göre çocuğun durumunu tanımlar.

$$\begin{aligned}\phi(e_1) &= \{(v_1, 0.6, -0.3), (v_2, 0.5, -0.2), (v_3, 0.6, -0.2), (v_4, 0.8, -0.1), (v_5, 0.7, -0.4)\} \\ \phi(e_2) &= \{(v_1, 0.5, -0.4), (v_2, 0.5, -0.3), (v_3, 0.6, -0.3), (v_4, 0.7, -0.4), (v_5, 0.6, -0.5)\} \\ \phi(e_3) &= \{(v_1, 0.9, -0.2), (v_2, 0.8, -0.1), (v_3, 0.8, -0.1), (v_4, 0.7, -0.4), (v_5, 0.8, -0.3)\}\end{aligned}$$

$E = \{v_1v_2, v_2v_5, v_5v_4, v_4v_1, v_1v_5, v_4v_2, v_4v_3\}$ üzerinde (ψ, A) bipolar bulanık esnek kümesi aşağıdaki gibi verilsin. Burada (ψ, A) her parametreye göre iki durumu karşılaştırarak elde edilen değeri tanımlar.

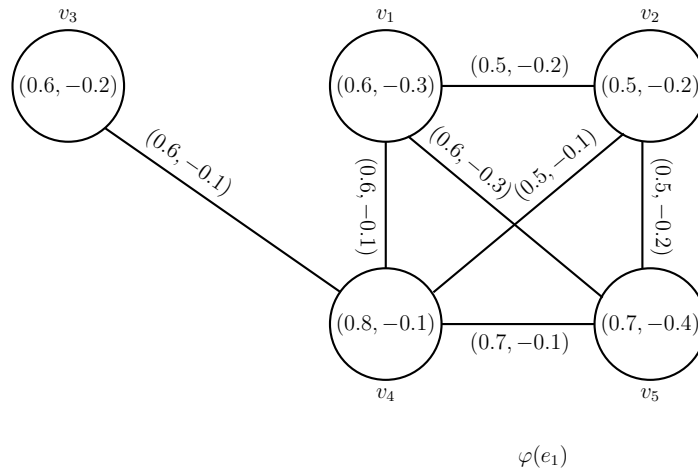
$$\begin{aligned}\psi(e_1) &= \{(v_1v_2, 0.5, -0.2), (v_2v_5, 0.5, -0.2), (v_5v_4, 0.7, -0.1), (v_4v_1, 0.6, -0.1), (v_1v_5, 0.6, -0.3) \\ &\quad (v_4v_2, 0.5, -0.1), (v_4v_3, 0.6, -0.2)\}\end{aligned}$$

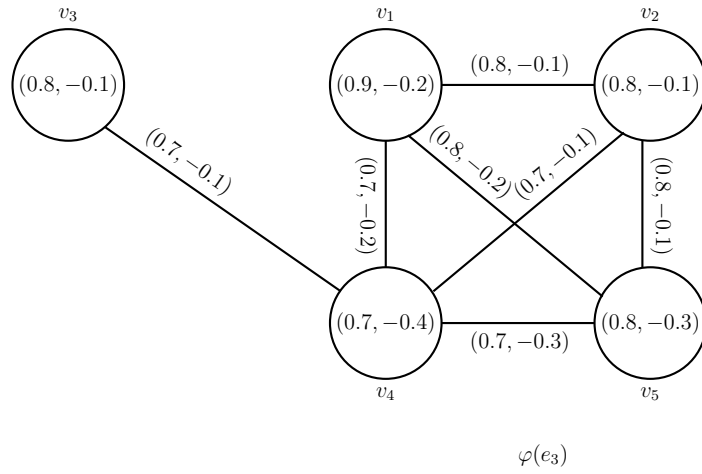
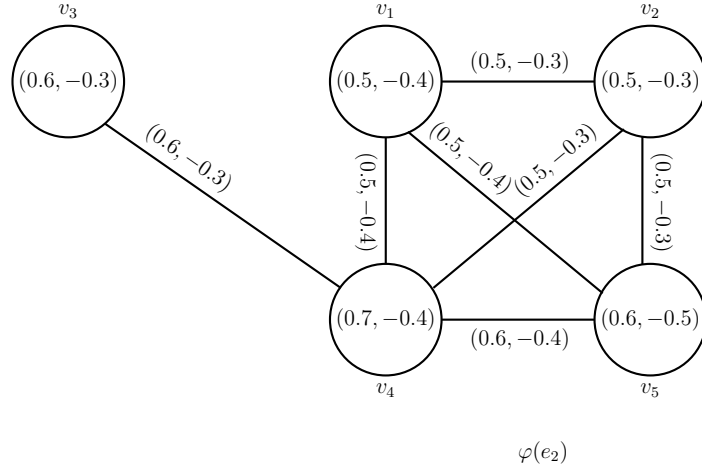
$$\begin{aligned}\psi(e_2) &= \{(v_1v_2, 0.5, -0.3), (v_2v_5, 0.5, -0.3), (v_5v_4, 0.6, -0.4), (v_4v_1, 0.5, -0.4), (v_1v_5, 0.5, -0.4) \\ &\quad (v_4v_2, 0.5, -0.3), (v_4v_3, 0.6, -0.3)\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\psi(e_3) &= \{(v_1v_2, 0.8, -0.1), (v_2v_5, 0.8, -0.1), (v_5v_4, 0.7, -0.3), (v_4v_1, 0.7, -0.2), (v_1v_5, 0.8, -0.2) \\ &\quad (v_4v_2, 0.7, -0.1), (v_4v_3, 0.7, -0.1)\}\end{aligned}$$

e_1, e_2 ve e_3 parametrelerine göre $\varphi(e_1) = (\phi(e_1), \psi(e_1))$, $\varphi(e_2) = (\phi(e_2), \psi(e_2))$ ve $\varphi(e_3) = (\phi(e_3), \psi(e_3))$ bipolar bulanık grafları şekil 4.1 deki gibi oluşturulur.

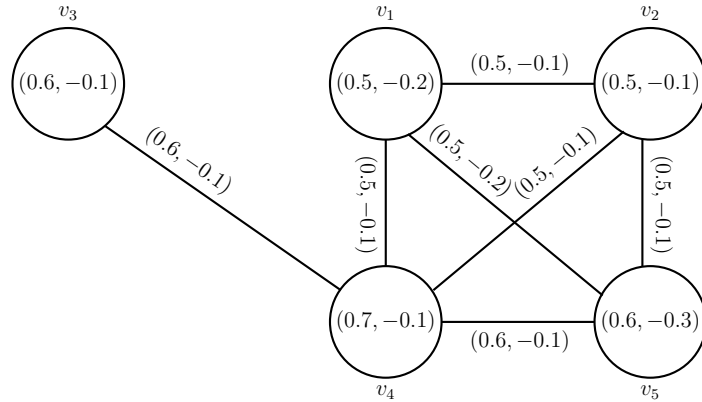
$\varphi(e_1)$ deki her bir köşenin üyelik derecesi çocuğun evde, okulda ve oyun oynarken geçirdiği sürelerde ebeveynleri ve arkadaşlarıyla olan işbirliği ve tembelliğinin derecesini temsil eder. $\varphi(e_2)$ deki her bir köşenin üyelik derecesi çocuğun normal ve anormal davranışının derecesini temsil eder. $\varphi(e_3)$ deki her bir köşenin üyelik derecesi çocuğun kaygı ve mutluluğunun derecesini temsil eder.





Şekil 4.1: $\tilde{G} = (G^*, \phi, \psi, A)$ bipolar bulanık esnek grafi

$\varphi(e_1) \cap \varphi(e_2) \cap \varphi(e_3)$ bipolar bulanık grafi şekil 4.2 de gösterilmiştir.



Şekil 4.2: $\varphi(e_1) \cap \varphi(e_2) \cap \varphi(e_3)$ bipolar bulanık grafi

Tüm köşelerin normalleştirilmiş değerleri hesaplanırsa aşağıdaki tablo elde edilir.

Tablo 4.1: Normalleştirilmiş değerler tablosu

x	x'
v_1	0,9433
v_2	1,0295
v_3	1,0816
v_4	1,1401
v_5	0,9219

Tüm normalleştirilmiş değerlerin ortalama değeri hesaplanırsa 1,0232 bulunur. Bu durum bize çocuğun bipolar bozukluğu olduğunu gösterir.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez öncelikle belirsizlik içeren problemlere çözüm geliştirmekte faydalanılan önemli matematiksel yaklaşımlar olan bipolar bulanık esnek kümeleri ve graf teorii ele almaktadır. Ayrıca bipolar bulanık esnek graf kavramını vermek suretiyle yeni tanımlar ve sonuçlar elde etmeye yöneliktir.

Bu tezde bipolar bulanık esnek graf yapısı üzerinde yeni cebirsel işlemler verilerek bunlara ait özellikler incelenmiş ve elde edilen sonuçlar değerlendirilmiştir. Ayrıca bipolar bulanık esnek grafların çok kriterli bir karar verme problemi üzerindeki uygulaması ele alınmış ve geliştirilen algoritma yardımıyla problemin çözümü noktasında bir yöntem sunulmuştur. Sonuç olarak bipolar bulanık esnek grafların hem teorik anlamda hem de uygulama anlamında önemli sonuçlar ortaya koyduğu gösterilmiştir.

Bu sonuçlar ışığında farklı bulanık esnek küme yapıları graf teorii üzerinde yeniden ele alınıp, oluşturulan yeni yapılara ait özellikler incelenebilir. Bu şekilde oluşturulan farklı matematiksel yaklaşımlar belirsizlik içeren problemlere hem teorik hemde uygulama anlamında katkı sağlayabilir. Ayrıca bilgisayar programları ile desteklenerek, uygulanabilirlik anlamında geliştirilmesi hedeflenebilir.

KAYNAKLAR

- [1] Abdullah, S., Aslam, M. & Ullah, K. (2014). Bipolar fuzzy soft sets and its applications in decision making problem, *Journal of Intelligent and Fuzzy Systems*, 27(2), 729–742.
- [2] Akram, M. & Nawaz, S. (2015). Operations on Soft Graphs, *Fuzzy Information and Engineering*, 7(4), 423–449.
- [3] Akram, M. (2011). Bipolar fuzzy graphs, *Inform. Sci.*, 181, 5548–5564
- [4] Ali, MI., Feng, F., Liu, X., Min, WK. & Shabir, M. (2009). On some new operations in soft set theory, *Computers and Mathematics with Applications*, 57(9): 1547–1553.
- [5] Aslam, M., Abdullah, S. & Ullah, K. (2014). Bipolar fuzzy soft sets and its application in decision making problem, *J. Intel.Fuzzy Sys.*, 27(2), 729–742
- [6] Bhattacharya, P. (1987). Some Remarks on Fuzzy Graphs, *Pattern Recognition Letters*, 6(5), 297–302.
- [7] Bellman, RE. & Zadeh, LA. (1970). Decision-Making in a Fuzzy Environment, *Management Science*, 17(4), 141–164.
- [8] Çelik, Y. (2017). Bipolar fuzzy soft sets in Γ -semirings, *Annals of Mathematics and Informatics*, 13(1), 29–46.
- [9] Çelik, Y. (2018). On bipolar fuzzy soft graphs, *Creative Mathematics and Informatics*, 27(2), 123–132.
- [10] Erdős, P. (1959). Graph Theory and Probability, *Canadian Journal of Mathematics*, 11, 34–38.
- [11] Euler, L. (1736). Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis, *Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae*, 8, 128–140.
- [12] Feng, F., Jun, YB., Liu, X. & Li, L. (2010). An adjustable approach to fuzzy soft set based decision making, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 234, 10–20.

- [13] Gani, AN. & Radha, K. (2008). On Regular Fuzzy Graphs, *Journal of Physical Sciences*, 12, 33–40.
- [14] Imrich, W., Klavzar, S. & Rall, F. (2008). Topics in Graph Theory. Graphs and Their Cartesian Products. 219 pp.
- [15] Koam, ANA., Akram, M. & Liu, p. (2020). Decision-Making Analysis Based on Fuzzy Graph Structures, *Mathematical Problems in Engineering*, doi: 10.1155/2020/6846257.
- [16] Kong, Z., Gao, L. & Wang, L. (2009). Comment on "A fuzzy soft set theoretic approach to decision making problems", *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 223, 540–542.
- [17] Lee, JG. & Hur, K. (2019). Bipolar Fuzzy Realitons, *Mathematics*, doi: 10.3390/math7111044.
- [18] Leeuwen, JV. (1990). Graph Algorithms, *In Handbook of Theoretical Computer Science*, 525–631, doi.org/10.1016/B978-0-444-88071-0.50015-1.
- [19] Li, X. & Yi, H. (2017). Structural Properties of Fuzzy Graphs, *Iranian Journal of Fuzzy Systems* , 14(1), 131–144.
- [20] Maiers, J. & Sherif, YS. (1985). Applications of Fuzzy Set Theory, *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, SMC15(1), 175–189.
- [21] Maji, PK. & Roy, AR. (2002). An Application of Soft Sets in A Decision Making Problem, *Computers and Mathematics with Applications*, 44(2002), 1077–1083.
- [22] Maji, PK., Biswas R. & Roy AR. (2001). Fuzzy Soft Sets, *The Journal of Fuzzy Mathematics*, 9: 589-602.
- [23] Majumdar, P. & Samanta, SK. (2010). Generalised Fuzzy Soft Sets, *Computers and Mathematics with Applications*, 59(4), 1425–1432.
- [24] Masarwah, A. & Qamar, MA. (2018). Some new concepts of fuzzy soft graphs, *Fuzzy Information and Engineering*, 8, 427–438.
- [25] Mohinta, S. & Samanta, TK. (2015). An Introduction to Fuzzy Soft Graph, *Mathematica Moravica*, 19(2), 35–48.

- [26] Molodtsov, D. (1999). Soft set theory - first results, *Comput. Math. Appl.*, 37, 19–31.
- [27] Molodtsov, D. (2004). *The Theory of Soft Sets*. URSS Publishers, Moscow.
- [28] Mordeson, JN. & Peng, CS. (1994). Operations on Fuzzy Graphs, *Information Sciences*, 79(3-4), 159–170.
- [29] Muhammad, G., Naveed, Y., Ahmad, E. & Jawdat, A. (2021). Complex bipolar fuzzy sets: An application in a transport’s company, *Journal of Intelligent and Fuzzy Systems*, 40(3), 3981–3997.
- [30] Mythili, V., Kaliyappan, M. & Hariharan, S. (2017). A Review of Fuzzy Graph Theory, *Inter national Journal of Pure and Applied Mathematics*, 13(12), 187–195.
- [31] Naz, M. & Shabir, M. (2014). On fuzzy bipolar soft sets, their algebraic structures and applications, *J. Intel. Fuzzy Sys.*, 26(4), 1645–1656.
- [32] Neog, TJ. & Sut, DK. (2012). Some new operations of fuzzy soft sets, *Journal of Mathematics and Computer Sciences*, 5(2), 1186–1199.
- [33] Pathinathan, T., Arockiaraj, JJ. and & Rosline, JJ. (2015). Hesitancy Fuzzy Graphs, *Indian Journal of Science and Technology*, 8(35), 1–5.
- [34] Ramot, D., Milo, R., Friedman, M. & Kandel, A. (2002). Complex Fuzzy Sets, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 10(2), 171–186.
- [35] Riaz, M. & Tehrim, ST. (2020). On bipolar fuzzy soft topology with decision-making, *Soft Computing*, doi: 10.1007/s00500-020-05342-4.
- [36] Rosenfeld, A. (1975). Fuzzy Graphs, *Fuzzy Sets and Their Applications to Cognitive and Decision Processes*, Academic Press, 77–95, doi.org/10.1016/B978-0-12-775260-0.50008-6.
- [37] Samanta, S., Sarkar, B., Shin, D. & Pal, M. (2016). Completeness and regularity of generalized fuzzy graphs, *SpringerPlus*, doi: 10.1186/s40064-016-3558-6.
- [38] Schaeffer, SE. (2007). Graph Clustering, *Computer Science Review*, 1(1), 27–64.

- [39] Sitara, M., Akram, M. & Bhatti, MY. (2019). Fuzzy Graph Structures with Application, *Mathematics*, 7(63), 1–22.
- [40] Yang, X., Yu, D., Yang, J., & Wu, C. (2007). Generalization of soft set theory: from crisp to fuzzy case. *Fuzzy Information and Engineering: Proceedings of ICFIE 2007, Advances in Soft Computing*, Springer, 40, 345–355.
- [41] Yao, YY. (1998). A comparative study of fuzzy sets and rough sets, *Information Sciences*, 109(1-4), 227–242.
- [42] Yiarayong, P. (2021). A new approach of bipolar valued fuzzy set theory applied on semigroups, *International Journal of Intelligent Systems*, doi: 10.1002/int.22465.
- [43] Young, VR. (1996). Fuzzy Subsethood, *Fuzzy Sets and Systems*, 77(3), 371–384.
- [44] Zadeh, LA. (1965). Fuzzy Sets. *Inform and Control*, 8, 338–353.
- [45] Zhang, WR. (1994). Bipolar fuzzy sets, *Proceedings of FUZZ-IEEE*, 835–840.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler	
Adı Soyadı	Bekir YÜNKÜL
Doğum Yeri	
Doğum Tarihi	
Uyruğu	<input checked="" type="checkbox"/> T.C. <input type="checkbox"/> Diğer:
Telefon	
E-Posta Adresi	
Eğitim Bilgileri	
Lisans	
Üniversite	Fırat Üniversitesi
Fakülte	Fen Edebiyat Fakültesi
Bölümü	Matematik Bölümü
Mezuniyet Yılı	12.07.2004
Lisans	
Üniversite	Bayburt Üniversitesi
Fakülte	Bayburt Eğitim Fakültesi
Bölümü	İlköğretim Matematik Öğretmenliği
Mezuniyet Yılı	24.05.2019
Yüksek Lisans	
Üniversite	Fırat Üniversitesi
Enstitü Adı	Fen Bilimleri Enstitüsü
Programı	Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanlar Eğitimi (Tezsiz)
Mezuniyet Yılı	19.08.2006