T. C.

ORDU ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BEZİER EĞRİLERİ VE BAZI UYGULAMALARI

ŞULE ALTUNORDU

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ORDU 2021

TEZ BİLDİRİMİ

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan ve kullanılan intihal tespit programının sonuçlarına göre; bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

ŞULE ALTUNORDU

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

BEZİER EĞRİLERİ VE BAZI UYGULAMALARI

ŞULE ALTUNORDU

ORDU ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ, 105 SAYFA

TEZ DANIŞMANI: DR. ÖĞR. ÜYESİ SÜLEYMAN ŞENYURT

Bu çalışma dört bölüm halinde düzenlenmiştir. Giriş bölümünde Bezier eğrileri hakkında genel bilgiler verilerek bu alanda yapılan literatür çalışmalarına yer verildi.

Genel bilgiler bölümünde, 3-boyutlu Öklid uzayına ait kavramlara, alternatif çatı hakkında temel bilgilere ve alternatif Darboux vektörüne yer verildi. Daha sonra Bezier eğrisinin nasıl oluşturulduğu verilerek kuadratik, kübik Bezier eğrileri hakkında temel kavramlar ve genel Bezier eğrisinin denklemi verildi. Son olarak control noktaları verilen Bezier eğrisinin Frenet vektörleri ve eğrilikleri verildi.

Bulgular ve Tartışma bölümü çalışmamızın orjinal kısmını oluşturmaktadır. Bu bölümde ilk olarak, $P_0 = (0,0,0)$, $P_1 = (1,0,0)$, $P_2 = (0,1,0)$, $P_3 = (0,0,1)$ kontrol noktaları esas alınarak elde edilen P(t) kübik Bezier eğrisi oluşturuldu. Oluşturulan bu eğrinin Frenet vektörleri ve Darboux vektörü hesaplandı. Daha sonra Darboux vektörü kullanılarak eğri üzerinde ortonormal çatı olan $\mathrm{N}, \mathrm{C}, \mathrm{W}$ alternatif çatı vektörleri oluşturuldu. Son olarak elde edilen bu eğrilerin Frenet çatıları ile alternatif çatı vektörlerinden elde edilen Smarandache eğrileri tanımlanarak her bir Smarandache eğrisi için Frenet ve alternatif çatı vektörleri, eğrilik ve burulmaları ayrı ayrı hesaplandı. Maple ve Word programları kullanlarak elde edilen eğrilerin çizimleri yapıldı.

Anahtar Sözcükler: Alternatif çatı, Bernstein polinomları, Bezier eğrisi, Kübik Bezier eğrisi, Smarandache eğrisi.

ABSTRACT

BEZIER CURVES AND SOME APPLICATIONS

ŞULE ALTUNORDU

ORDU UNIVERSITY INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

MATHEMATICS

MASTER THESIS, 105 PAGES

SUPERVISOR: DR. ÖĞR. ÜYESİ SÜLEYMAN ŞENYURT

This study is organized in four parts. In the introduction, the literature in this field is given for general information about Bezier curves.

In the general information section, the concepts of 3-dimensional Euclidean space, basic information about the alternative frame and the alternative Darboux vector are given. Then, by giving how the Bezier curve is formed, the basic concepts about quadratic, cubic Bezier curves and the general equation of the Bezier curve are given. Finally, the Frenet vectors and curvatures of the Bezier curve with control points are given.

Findings and Discussion section constitutes the original part of our study. In this section, firstly, the cubic Bezier curve P(t) obtained based on the control points $P_0 = (0,0,0)$, $P_1 = (1,0,0)$, $P_2 = (0,1,0)$, $P_3 = (0,0,1)$ is defined. Frenet vectors and Darboux vector of the defined curve are calculated. Then, using the Darboux vector, alternative frame vectors with orthonormal frame $\mathrm{N}, \mathrm{C}, \mathrm{W}$ on the curve were created. Finally Frenet roofs of this curve we obtained and Smarandache curves obtained from alternative roof vectors were defined and Frenet and alternative roof vectors were calculated separately for each Smarandache curve. At last the curves we obtained are drawn using the Maple and Word programs.

Keywords: Alternative frame, Bernstein polynomial, Bezier curves, cubic Bezier curves, Smarandache curves.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans danışmanlığımı üstlenip özenle çalışmalarımı takip eden, her zaman engine bilgi ve deneyimleriyle yolumu açan değerli hocam sayın Dr. Öğr. Üyesi Süleyman ŞENYURT' a en samimi duygularım ile teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca Matematik Bölümümüzdeki değerli hocalarıma ve her zaman yakın desteğini gördüğüm sevgili aileme ve arkadaşlarıma sonsuz teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

ŞEKİL LİSTESİ

SİMGELER VE KISALTMALAR

$\mathbf{E^3}$	:	3-Boyutlu Öklid Uzayı
$\lVert\ .\ \rVert$	:	Norm
$\wedge$	:	Vektörel Çarpım
$\mathbf{P(t)}$	:	Kübik Bezier Eğrisi
$\mathbf{T}$	:	Teğet vektör
$\mathbf{N}$	:	Aslinormal vektör
$\mathbf{B}$	:	Binormal vektör
$\mathbf{W}$	:	Birim Darboux vektör
$\mathbf{C}$	:	$W \wedge N$-birim vektör
$\bar{\mathbf{D}}$	:	Alternatif Darboux vektör
$\delta_{\mathbf{1}}$	:	δ_1 Bezier-Smarandache Eğrisi
$\delta_{\mathbf{2}}$	:	δ_2 Bezier-Smarandache Eğrisi
$\delta_{\mathbf{3}}$	:	δ_3 Bezier-Smarandache Eğrisi
$\delta_{\mathbf{4}}$	:	δ_4 Bezier-Smarandache Eğrisi
$\alpha_{\mathbf{1}}$	:	α_1 Bezier-Smarandache Eğrisi
$\alpha_{\mathbf{2}}$	:	α_2 Bezier-Smarandache Eğrisi
$\alpha_{\mathbf{3}}$	:	α_3 Bezier-Smarandache Eğrisi
$\alpha_{\mathbf{4}}$	:	α_4 Bezier-Smarandache Eğrisi

1. GİRİŞ

Bezier eğrileri, bilgisayar grafiklerinde, Bigisayar Destekli Tasarım(CAD) uygulamalarında ve diğer bir çok ilgili alanda düz yüzeylerin modellenmesinde sıklıkla kullanılan parametrik bir eğri biçimidir.

Şekil 1.1: Pierre Etienne Bezier, Paul De Casteljau

Bezier eğrileri ve yüzeyleri ilk olarak (1958−1960) yılları arasında otomotiv sektöründe Fransız bir mühendis olan Pierre Etienne Bezier ve Fransız bir matematikçi Paul de Faget de Casteljau tarafından farklı zamanlarda geliştirilmiştir.

Pierre Etienne Bezier makine ve endüstri mühendisidir.1933 yılında Renault firmasında mekanik yöntem ve planlama bölümünde çalışmaya başlamıştır.1960 yılından itibaren de araç gövde ve tasarım bölümüne geçip, araç tasarımı üzerine çalışmıştır. Uzun yıllar bu firmada çalışan Pierre Etienne Bezier'in adıyla anılır hale gelen polinom eğri ve yüzeylerinin Bernstein formunda ifadesiyle gelişen Bezier eğri ve yüzeyleri teorisi otomobil kaporta yüzeylerinin az sayıda parametreyle değiştirilerek kontrol edilebilen eğrilerle tanımlanabilmesi için Pierre Bezier tarafından 1960'da geliştirilmiştir.

Dişibüyük (2005), "Rasyonel Bezier Eğrileri" isimli tez çalışmasında q-Bernstein Bezier polinomlarını kullanarak rasyonel Bezier eğrilerini genelleştirmiştir. Bu eğrileri genelleştirilmiş de Casteljau algoritması kullanarak elde etmiştir ve q-Bernstin Bezier eğrilerini matris formunda göstermiştir.

Yılmaz (2009), "Bezier Eğrileri Ve Bezier Yüzeyleri" isimli tez çalışmasında Bezier yüzeylerinin eğriliklerinin ve şekil operatörünün kontrol noktaları cinsinden incelenmiştir. Bezier yüzeylerinin eğriliklei ve şekil operatörü araştırılmıştır.

Saraç (2016), "q-Tomurcuk Fonksiyonu ve q-Bezier Eğrileri"isimli tez çalışmasında Bernstein taban fonksiyonlarının Bezier eğrilerinin şekli üzerindeki etkisini örnek vererek göstermiştir.Sonrasında, q-Bernstein taban fonksiyonu kullanılarak tanımlanan q-Bezier eğrileri ve özellikleri vermiştir.Daha sonra sahip olduğu kontrol(Bezier) noktaları ile Bezier eğrisinin genel olarak uygulama alanındaki öneminden ve bu eğrilerin q parametresinden nasıl etkilendiğinden bahsetmiştir.

Şimşek (2016), "Bezier Eğrileri İle Deforme El Modelinin geliştirilmesi" isimli tez çalışmasında Bezier eğrilerinin, tıp alanında kullanımını gösteren önceki çalışmaları özetlemiştir. Bezier eğrileri ve B-Spline eğrileri yardımıyla C++ ve Autocad programlarında el modelleri çizmiş ve elde edilen modeller arasında karşılaştırma yapmıştır ve bu modellerin matematiksel denklemlerini vermiştir.

Özmen (2017), "Kübik Bezier Eğrileri İle Yüz İfadesi Tanıma" isimli tez çalışmasında resimlerden yüz ifadesi tanıma işlemi gerçekleştirmiştir. Çalışmasında gülen,üzgün, şaşkın, korkmuş, kızgın, iğrenme, ve doğal olmak üzere 7 farklı duygu tespitinde kübik Bezier eğrilerini kullanmıştır.

Yılmaz Luzum (2018), "R^3 deki Yüzey Eğrilerinin Bezier Eğrileri ve Matlab Uygulamaları" isimli tez çalışmasında yüzey üzerinde bir eğri ve bu eğrinin ikiden fazla nokta almıştır ve buna ait Bezier eğrisini hesaplamıştır.R^3 deki yüzey eğrilerinin Bezier eğrilerini incelemiştir.

Erkan (2019), "Öklid Düzleminde Ve Öklid Uzayında Bezier Eğrileri" isimli tez çalışmasında Öklid düzleminde ve Öklid uzayında Bezier eğrisinin Serret-Frenet elemanlarını incelemiştir. Daha sonra , bir algoritma tanımı vererek Bezier eğrilerinin algoritmik tanımına yer vermiş ve bu tanımı kullanarak eğrinin her noktasında Serret-Frenet elemanları düzlemsel ve uzaysal olarak incelemiştir.

Kılıçoğlu ve Şenyurt (2019), "On The Cubic Bezier Curves In E^3 " isimli çalışmada E^3 de kontrol noktalarına bağlı matris formlu kübik Bezier eğrisini incelemişlerdir. Ayrıca herhangi bir kübik Bezier eğrisinin kontrol noktalarını bulmanın basit bir yolunu vermişlerdir.

Kılıçoğlu ve Şenyurt (2020), "On the Involute of the Cubic Bezier Curve by Using Matrix Representation in E^3 " isimli çalışmalarnda E^3 de kontrol noktalarına bağlı matris formlu kübik Bezier eğrisinin involütünü incelemişlerdir.Ayrıca Frenet vektör alanları ve kübik bezier eğrisinin involütünün eğriliklerini E^3'teki ilk kübik Bezier eğrisinin Frenet aparatına dayalı olarak incelemişlerdir.

Bu çalışmada, özel olarak $P_0 = (0,0,0)$, $P_1 = (1,0,0)$, $P_2 = (0,1,0)$, $P_3 = (0,0,1)$ kontrol noktaları esas alınarak $P(t)$ kübik Bezier eğrisi oluşturuldu. Daha sonra oluşturulan eğrinin Frenet vektörleri ile Darboux vektörü hesaplandı. Darboux vektörü kullanılarak eğri üzerinde ortanormal çatı olan N, C, W alternatif çatı vektörleri ifade edildi. Son olarak elde edilen eğrinin Frenet çatıları ile alternatif çatı vektörlerinden elde edilen Smarandache eğrileri tanımlanarak her bir Smarandache eğrisi için Frenet ve alternatif çatı vektörleri ayrı ayrı hesaplandı.

2. GENEL BİLGİLER

2.1 Öklid Uzayı

Bu bölümde, 3-boyutlu Öklid Uzayı ile ilgili temel kavramlara yer verilmiştir. A boştan farklı bir cümle ve V de K cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun.

$$f : A \times A \to V$$

fonksiyonu aşağıdaki aksiyomları sağlarsa A ya V ile birleştirilmiş bir afin uzay denir:

$$A_1 : \forall P, Q, R \in A \quad \text{için } f(P,Q) + f(Q,R) = f(P,R)$$

$$A_2 : \forall P \in A, \forall \alpha \in V \quad \text{için } f(P,Q) = \alpha$$

olacak şekilde bir tek $Q \in A$ noktası vardır. A, V ile birleşen bir afin uzay olsun. $P_0, P_1, P_2, P_3 \in A$ noktaları için $\{P_0P_1, P_0P_2, P_0P_3\}$ cümlesi V nin bir bazı ise $\{P_0, P_1, P_2, P_3\}$ nokta 4-lüsüne bir afin çatısı denir. Burada P_0 noktasına çatının başlangıç noktası , $P_i, 1 \leq i \leq 3$, noktalarına da çatının birim noktaları denir. $boyV = 3$ ise A ya 3-boyutlu bir afin uzay denir.

$$\langle , \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$$

şeklinde tanımlı fonksiyon aşağıdaki aksiyomları sağlarsa bu fonksiyona bir iç çarpım fonksiyonu denir: $\forall\, x, y, z \in V$, $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$ için

a. Bilineerlik Aksiyomu;

$$\langle ax + by, z\rangle = a\langle x, z\rangle + b\langle y, z\rangle,$$

$$\langle x, ay + bz\rangle = a\langle x, y\rangle + b\langle x, z\rangle,$$

b. Simetri Aksiyomu;

$$\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle,$$

c. Pozitif Tanımlılık (kararlılık) Aksiyomu;

$$\langle x, x\rangle \geq 0, \qquad \langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

$\mathbb{R}^3$ afin uzay, $\forall\ X, Y \in \mathbb{R}^3$ olsun.

$$\langle , \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \langle X, Y \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$

şeklinde tanımlı fonksiyon bir iç çarpım fonksiyonudur. Bu fonksiyona standart iç çarpım veya Öklid iç çarpımı denir. Üzerinde Öklid iç çarpımı tanımlı $\mathbb{R}^3$ afin uzayına Öklid uzayı denir ve $\mathbb{E}^3$ ile gösterilir.

$X = (x_1, x_2, x_3)$, $Y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ olmak üzere,

$$d : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \qquad d(X, Y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{3}(x_i - y_i)^2}$$

şeklinde tanımlanan d fonksiyonuna uzaklık fonksiyonu , $d(X, Y)$ reel sayısına da X ve Y noktaları arasındaki uzaklık denir.

$\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $\alpha(s) = (\alpha_1(s), \alpha_2(s), \alpha_3(s))$ diferensiyellenebilir fonksiyona $\mathbb{R}^3$ te bir eğri denir. Burada I aralığına α eğrisinin parametre aralığı, $s \in I$ değişkenine de α eğrisinin parametresi denir. α eğrisinin yay parametresine göre teğet, aslinormal ve binormal vektörleri sırasıyla

$$T(s) = \alpha'(s), \quad N(s) = \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|}, \quad B(s) = T(s) \wedge N(s)$$

verilir. Bu vektörlere eğrinin Frenet vektörleri adı verilir. α birim hızlı eğri değil ise Frenet vektörleri

$$T(s) = \frac{\alpha'(s)}{\|\alpha'(s)\|}, \quad N(s) = B(s) \wedge N(s), \qquad B(s) = \frac{\alpha'(s) \wedge \alpha''(s)}{\|\alpha'(s) \wedge \alpha''(s)\|} \tag{2.1.1}$$

şeklinde verilir (Hacısalihoğlu, 1983). α eğrisinin eğrilik ve torsiyonu sırasıyla

$$\kappa(s) \quad = \quad \frac{\|\alpha'(s) \wedge \alpha''(s)\|}{\|\alpha'(s)\|^3}, \quad \tau(s) = \frac{\det(\alpha'(s), \alpha''(s), \alpha'''(s))}{\|\alpha'(s) \wedge \alpha''(s)\|^2} \tag{2.1.2}$$

bağıntısıyla verilir, (Sabuncuoğlu, 2014). Eğer α eğrisi yay parametresiyle verilirse eğrilik

$\kappa(s) = \alpha''(s)$ ve torsiyon $\tau(s) = -\langle B'(s), N(s)\rangle$ şeklindedir. Yay parametresiyle verilen eğrinin Frenet vektörleri ile bunların türev vektörleri arasında

$$\begin{aligned} T'(s) &= \kappa(s)N(s), \\ N'(s) &= -\kappa(s)T(s) + \tau(s)B(s), \\ B'(s) &= -\tau(s)N(s) \end{aligned} \tag{2.1.3}$$

bağıntısı vardır. Bu bağıntıya eğrinin Frenet formülleri adı verilir, (Hacısalihoğlu, 1983). α eğrisi Frenet vektörlerine bağlı olarak

$$\alpha(s) = f(s)T(s) + g(s)N(s) + h(s)B(s) \tag{2.1.4}$$

şeklinde yazılır. Burada f, g, h katsayıları

$$f^{'}(s) = 1 + g(s)\kappa(s), \quad g^{'}(s) = h(s)\tau(s) - f(s)\kappa(s), \quad h^{'}(s) = -g(s)\tau(s). \tag{2.1.5}$$

şeklinde birer fonksiyondur (Chen, 2001).

2.2 Öklid Uzayında Alternatif Çatı

α eğrisinin Frenet vektörleri parametreye bağlı olarak bir eksen etrafında dönme hareketi yapar. Bu eksene üzerindeki vektör $\bar{W}$ ile gösterilirse

$$T' = \bar{W} \wedge T, \quad N' = \bar{W} \wedge N, \quad B' = \bar{W} \wedge B \tag{2.2.1}$$

bağıntısını sağlar. Buradan gerekli işlemler yapıldığında $\bar{W}$

$$\bar{W} = \tau T + \kappa B$$

şeklinde bulunur. Bu vektöre Darboux vektörü denir. Darboux ekseni üzerindeki birim vektöre ise birim Darboux vektörü denir ve

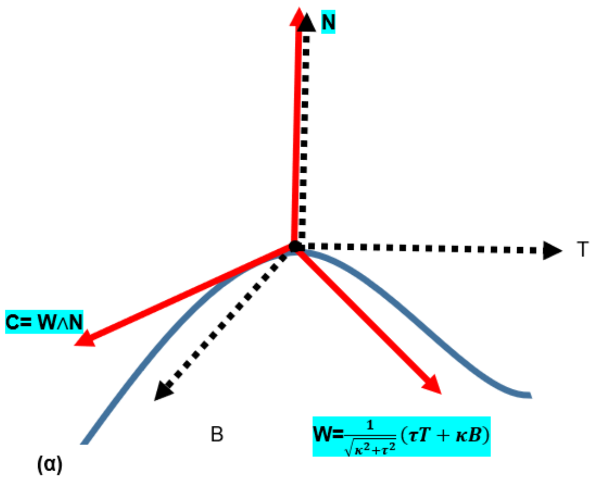
$$W = \frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} T + \frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} B \tag{2.2.2}$$

şeklinde yazılır $(Fenchel, 1951)$, $(Gray, 1997)$. α eğrisinin N normal vektörü ile W birim

Darboux vektörü vektörel çarpılırsa

$$C = W \wedge N = -\frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}T + \frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}B \tag{2.2.3}$$

birim vektörü elde edilir. Bu şekilde elde edilen $\{N, C, W\}$ sistemine Alternatif çatı denir, (Kaya ve Önder, 2017).



Şekil 2.1: Alternatif çatı

(2.2.2) ve (2.2.3) bağıntılarında gerekli işlemler yapıldığında alternatif çatı ile Frenet çatısı arasında

$$\begin{aligned} N &= N, \\ C &= -\frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}T + \frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}B, \\ W &= \frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}T + \frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}B \end{aligned} \tag{2.2.4}$$

veya

$$\begin{aligned} T &= -\frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}C + \frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}W, \\ N &= N, \\ B &= \frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}C + \frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}W \end{aligned}$$

bağıntısı vardır. Bu bağıntıda $\beta = \sqrt{\kappa^2 + \tau^2}$, $\bar{\kappa} = \dfrac{\kappa}{\beta}$ *ve* $\bar{\tau} = \dfrac{\tau}{\beta}$ alınırsa çatılar arasındaki bağıntı

$$\begin{aligned} N &= N, \\ C &= -\bar{\kappa}T + \bar{\tau}B, \\ W &= \bar{\tau}T + \bar{\kappa}B \end{aligned} \tag{2.2.5}$$

veya

$$\begin{aligned} T &= -\bar{\kappa}C + \bar{\tau}W, \\ N &= N, \\ B &= \bar{\tau}C + \bar{\kappa}W \end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

Teorem 2.2.1 Alternatif çatı vektörleri ile bunların türev vektörleri arasında

$$N' = \beta C, \qquad C' = -\beta N + \gamma W, \quad W' = -\gamma C \tag{2.2.6}$$

bağıntısı vardır. Burada $\gamma = \dfrac{\kappa^2}{\kappa^2 + \tau^2}\left(\dfrac{\tau}{\kappa}\right)'$ şeklinde bir katsayıdır.

İspat. (2.1.3) ve (2.2.5) bağıntılarından

$$\begin{aligned} N' &= -\kappa T + \tau B \\ &= -\kappa(-\bar{\kappa}C + \bar{\tau}W) + \tau(\bar{\tau}C + \bar{\kappa}W) \\ &= \kappa\bar{\kappa}C - \kappa\bar{\tau}W + \tau\bar{\tau}C + \tau\bar{\kappa}W \\ &= \frac{\kappa^2 + \tau^2}{\beta}C \end{aligned}$$

bulunur.

$\beta = \sqrt{\kappa^2 + \tau^2}$ eşitliği yerine yazılırsa

$$N' = \beta C$$

bağıntısı elde edilir. (2.2.5) bağıntısında C vektörünün türevi alınırsa

$$C' = -\bar{\kappa}'T - \bar{\kappa}T' + \bar{\tau}'B + \bar{\tau}B'$$

olur. (2.1.3) ve (2.2.5) eşitlikleri yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
C' &= -(\bar{\kappa})'T - \bar{\kappa}\kappa N + (\bar{\tau})'B + \bar{\tau}(-\tau)N \\
&= -(\bar{\kappa}\kappa + \bar{\tau}\tau)N - (\bar{\kappa})'T + (\bar{\tau})'B \\
&= -\beta N - (\bar{\kappa})'(-\bar{\kappa}C + \bar{\tau}W) + (\bar{\tau})'(\bar{\tau}C + \bar{\kappa}W) \\
&= -\beta N + \underbrace{((\bar{\kappa})'\bar{\kappa} + (\bar{\tau})'\bar{\tau})}_{0} C + (-(\bar{\kappa})'\bar{\tau} + (\bar{\tau})'\bar{\kappa})W \\
&= -\beta N + \frac{\kappa^2}{\kappa^2 + \tau^2}(\frac{\tau}{\kappa})'W
\end{aligned}$$

bulunur. W vektörünün katsayısı

$$\gamma = \frac{\kappa^2}{\kappa^2 + \tau^2}(\frac{\tau}{\kappa})' \tag{2.2.7}$$

olarak alınırsa C' vektörü

$$C' = -\beta N + \gamma W$$

şeklinde bulunur. (2.2.5) bağıntısında W vektörünün türevi alınırsa

$$W' = (\bar{\tau})'T + \bar{\tau}T' + (\bar{\kappa})'B + \bar{\kappa}B'$$

olur. (2.1.3), (2.2.5) ve (2.2.7) bağıntılarından W' vektörü

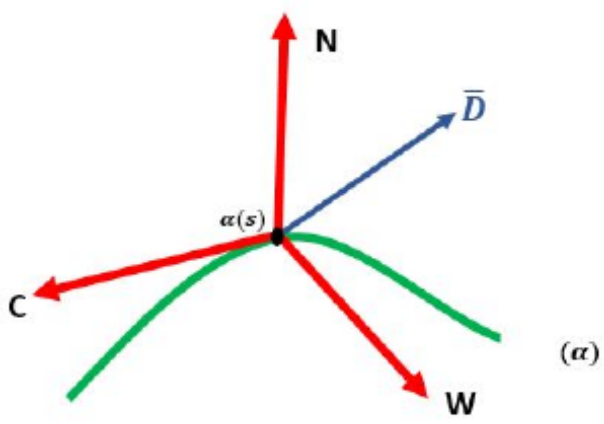
$$
\begin{aligned}
W' &= (\bar{\tau})'T + \bar{\tau}\kappa N + (\bar{\kappa})'B + \bar{\kappa}(-\tau N) \\
&= (\bar{\tau}\kappa - \bar{\kappa}\tau)N + (\bar{\tau})'T + (\bar{\kappa})'B \\
&= \underbrace{(\bar{\tau}\kappa - \bar{\kappa}\tau)}_{0} N + (\bar{\tau})'(-\bar{\kappa}C + \bar{\tau}W) + (\bar{\kappa})'(\bar{\tau}C + \bar{\kappa}W) \\
&= ((\bar{\kappa})'\bar{\tau} - (\bar{\tau})'\bar{\kappa})C + \underbrace{((\bar{\tau})'\bar{\tau} + (\bar{\kappa})'\bar{\kappa})}_{0} W \\
&= ((\bar{\kappa})'\bar{\tau} - (\bar{\tau})'\bar{\kappa})C \\
&= -\gamma C
\end{aligned}
$$

şeklinde elde edilir.

Teorem 2.2.2 α eğrisinin alternatif çatı vektörleri N, C, W olsun. Bu çatıya göre Darboux vektörü

$$\bar{D} = \gamma N + \beta W \tag{2.2.8}$$

şeklinde verilir, (Şenyurt, 2018).



Şekil 2.2: $\bar{D}$ alternatif Darboux vektörü

İspat. Darboux vektörü N, C, W vektörlerine bağlı olarak (Şekil 3.2) den

$$\bar{D} = aN + bC + cW \tag{2.2.9}$$

yazılır. $\bar{D}$ vektörü (2.2.1) bağıntısına benzer olarak sırasıyla N, C, W vektörleriyle vektörel çarpılırsa

$$\begin{aligned} N' = \bar{D} \wedge N \quad &\Rightarrow \quad \beta C = (aN + bC + cW) \wedge N \\ &\Rightarrow \quad \beta C = -bW + cC \\ &\Rightarrow \quad b = 0, \quad c = \beta. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C' = \bar{D} \wedge C \quad &\Rightarrow \quad -\beta N + \gamma W = (aN + bC + cW) \wedge C \\ &\Rightarrow \quad -\beta N + \gamma W = aW - cN \\ &\Rightarrow \quad a = \gamma, \quad c = \beta. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W' = \bar{D} \wedge W \quad &\Rightarrow \quad -\gamma C = (aN + bC + cW) \wedge W \\ &\Rightarrow \quad -\gamma C = -aC - bN \\ &\Rightarrow \quad a = \gamma, \quad b = 0. \end{aligned}$$

bulunur. a, b, c katsayıları (2.2.9) de yerine yazılırsa $\bar{D}$ alternatif Darboux vektörü

$$\bar{D} = \gamma N + \beta W$$

şeklinde olur.

Birim hızlı bir α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki alternatif çatısı $\{N, C, W\}$ olsun. α eğrisi (2.1.4) deki bağıntıya benzer olarak çatı vektörleri cinsinden ifadesi

$$\alpha(s) = f_1(s)N(s) + g_1(s)C(s) + h_1(s)W(s) \tag{2.2.10}$$

şeklinde yazılır. Burada f_1, g_1, h_1 fonksiyonları arasında

$$f_1'(s) = g_1(s)\beta(s), \quad g_1'(s) = h_1(s)\gamma(s) - f_1(s)\beta(s) - \bar{\kappa}, \quad h_1'(s) = \bar{\tau} - g_1(s)\gamma(s) \tag{2.2.11}$$

bağıntısı vardır. Bunu görmek için $\alpha(s)$ eğrisinin (2.2.5) ve (2.2.6) bağıntıları dikkate alınırsa

$$\alpha'(s) = f_1'(s)N(s) + f_1(s)N'(s) + g_1'(s)C(s) + g_1(s)C'(s) + h_1'(s)W(s) + h_1(s)W'(s) \ ,$$

$$-\bar{\kappa}C + \bar{\tau}W \ = \ (f_1' - g_1\beta)N + (g_1' + f_1\beta - h_1\gamma)C + (h_1' + g_1\gamma)W$$

olur.

2.3 Öklid Uzayında Smarandache Eğrileri

Tanım 2.3.1 Konum vektörü, herhangi bir α eğrisinin Frenet vektörleri olan ve bu vektörler tarafından çizilen regüler eğriye Smarandache eğrisi denir (Turgut ve Yılmaz, 2008).
Bu tanım şu şekilde de verilebilir:

Tanım 2.3.2 $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ birim hızlı regüler eğrinin Frenet çatısı $\{T, N, B\}$ olsun.

$$\beta(s) = \frac{a(s)T(s) + b(s)N(s) + c(s)B(s)}{\sqrt{a(s)^2 + b(s)^2 + c(s)^2}} \tag{2.3.1}$$

vektörünün çizdiği regüler eğriye Smarandache eğrisi denir (Şenyurt, 2013).

Tanım 2.3.3 $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ birim hızlı regüler eğrinin Frenet çatısı $\{T, N, B\}$ olsun. $TN-$ Smarandache eğrisi

$$\beta_{TN} = \frac{1}{\sqrt{2}}(T + N)$$

şeklinde tanımlanır (Ali, 2010).

Teorem 2.3.1 $TN-$ Smarandache eğrisinin $\kappa_{\beta_{TN}}$ eğriliği ve $\tau_{\beta_{TN}}$ torsiyonu sırasıyla,

$$\kappa_{\beta_{TN}} = \sqrt{2}\frac{\sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}}{(2\kappa^2 + \tau^2)^2},$$

$$\tau_{\beta_{TN}} = \frac{\sqrt{2}((\kappa^2 + \tau^2 - \kappa')(\kappa q_3 + \tau q_1) + \kappa(\kappa\tau + \tau')(q_2 - q_1) + (\kappa^2 + \kappa')(\kappa q_3 - \tau q_2))}{(\tau(2\kappa^2 + \tau^2) + \kappa\tau' - \kappa'\tau)^2 + (\kappa'\tau - \kappa\tau')^2 + (2\kappa^3 + \kappa\tau^2)^2}$$

şeklinde verilir. Burada p_1, p_2, p_3, q_1, q_2 ve q_3

$$\begin{aligned}
p_1 &= -(\kappa^2(2\kappa^2+\tau^2)+\tau(\tau\kappa'-\kappa\tau')),\\
p_2 &= -(\kappa^2(2\kappa^2+3\tau^2)+\tau(\tau^3-\tau\kappa'+\kappa\tau')),\\
p_3 &= \kappa(\tau(2\kappa^2+\tau^2)-2(\tau\kappa'-\kappa\tau')),\\
q_1 &= \kappa^3+\kappa(\tau^2-3\kappa')-\kappa'',\\
q_2 &= -\kappa^3-\kappa(\tau^2+3\kappa')-3\tau\tau'+\kappa'',\\
q_3 &= -\kappa^2\tau-\tau^3+2\tau\kappa'+\kappa\tau'+\tau''
\end{aligned}$$

şeklinde birer katsayılardır, (Ali, 2010).

İspat. TN-Smarandache eğrisinin $s_{\beta_{TN}}$ yay parametresine göre türevi alınırsa

$$T_{\beta_{TN}}\frac{ds_{\beta_{TN}}}{ds}=\frac{(-\kappa T+\kappa N+\tau B)}{\sqrt{2}}$$

olur ve norm alınırsa $\dfrac{ds_{\beta_{TN}}}{ds}$ ifadesi

$$\frac{ds_{\beta_{TN}}}{ds}=\sqrt{\frac{2\kappa^2+\tau^2}{2}}$$

şeklinde bulunur. Bu ifade yerine yazılırsa β_{TN} eğrisinin teğet vektörü

$$T_{\beta_{TN}}(s)=\frac{-\kappa T+\kappa N+\tau B}{\sqrt{2\kappa^2+\tau^2}}$$

olur. Buradan tekrar türev alınırsa $T'_{\beta_{TN}}$ türevi

$$T'_{\beta_{TN}}(s)=\frac{\sqrt{2}}{(2\kappa^2+\tau^2)^2}(p_1T+p_2N+p_3B)$$

şeklinde bulunur. β_{TN} eğrisinin eğriliği $\kappa_{\beta_{TN}}$ ile gösterilsin. Bu durumda $\kappa_{\beta_{TN}}$ eğriliği

$$\begin{aligned}
\kappa_{\beta_{TN}} &= \|T'_{\beta_{TN}}\|\\
&= \sqrt{2}\frac{\sqrt{p_1^2+p_2^2+p_3^2}}{(2\kappa^2+\tau^2)^2}
\end{aligned}$$

olur.

β_{TN} eğrisinin aslinormali $N_{\beta_{TN}}$ ile gösterlilirse

$$\begin{aligned} N_{\beta_{TN}} &= \frac{T'_{\beta_{TN}}}{\|T'_{\beta_{TN}}\|} \\ &= \frac{p_1 T + p_2 N + p_3 B}{\sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}} \end{aligned}$$

şeklinde bulunur. $B_{\beta_{TN}} = T_{\beta_{TN}} \wedge N_{\beta_{TN}}$ olduğundan $B_{\beta_{TN}}$ vektörü

$$B_{\beta_{TN}} = \frac{(\kappa p_3 - \tau p_2)T + (\kappa p_3 + \tau p_1)N + (-\kappa p_2 - \kappa p_1)B}{\sqrt{(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)(2\kappa^2 + \tau^2)}}$$

olur. β_{TN} eğrisinin ikinci ve üçüncü türevleri sırasıyla

$$\beta''_{TN} = \frac{-(\kappa^2 + \kappa')T + (\kappa' - \kappa^2 - \tau^2)N + (\kappa\tau + \tau')B}{\sqrt{2}},$$

$$\beta'''_{TN} = \frac{q_1 T + q_2 N + q_3 B}{\sqrt{2}}$$

şeklinde bulunur. β_{TN} eğrisinin torsiyonu $\tau_{\beta_{TN}}$ ile gösterilirse $\tau_{\beta_{TN}}$ torsiyonu

$$\tau_{\beta_{TN}} = \frac{det(\beta'_{TN}, \beta''_{TN}, \beta'''_{TN})}{\|\beta'_{TN} \wedge \beta''_{TN}\|^2} \ ,$$

$$\tau_{\beta_{TN}} = \frac{\sqrt{2}((\kappa^2 + \tau^2 - \kappa')(\kappa q_3 + \tau q_1) + \kappa(\kappa\tau + \tau')(q_2 - q_1) + (\kappa^2 + \kappa')(\kappa q_3 - \tau q_2))}{(\tau(2\kappa^2 + \tau^2) + \kappa\tau' - \kappa'\tau)^2 + (\kappa'\tau - \kappa\tau')^2 + (2\kappa^3 + \kappa\tau^2)^2}$$

olur.

Tanım 2.3.4 $\alpha : I \to \mathbb{E}^3$ birim hızlı regüler eğrinin Frenet çatısı $\{T, N, B\}$ olsun. $NB-$ Smarandache eğrisi

$$\beta_{NB} = \frac{1}{\sqrt{2}}(N + B)$$

şeklinde tanımlanır (Ali, 2010).

Teorem 2.3.2 $NB-$ Smarandache eğrisinin $\kappa_{\beta_{NB}}$ eğriliği $\tau_{\beta_{NB}}$ torsiyonu sırasıyla,

$$\kappa_{\beta_{NB}} = \sqrt{2}\frac{\sqrt{p_4^2 + p_5^2 + p_6^2}}{(2\tau^2 + \kappa^2)^2},$$

$$\tau_{\beta_{NB}} = \frac{\sqrt{2}(2\tau^3 q_4 + 2\tau^2\kappa\pi + \tau\kappa^2 q_4 + \kappa^3 q_6 - \kappa'\tau g - \kappa'\tau q_5 + \kappa\tau' q_6 + \kappa\tau' q_5)}{(\tau(2\tau^2 + \kappa^2))^2 + (-\tau\kappa' + \kappa\tau')^2 + (2\tau^2\kappa + \kappa^3 - \kappa'\tau + \kappa\tau')^2}$$

dır. Burada p_4, p_5, p_6, q_4, q_5 ve q_6

$$\begin{aligned}
p_4 &= \tau(2\tau^2\kappa + \kappa^3 - 2\kappa'\tau + 2\kappa\tau'), \\
p_5 &= -2\tau^4 - 3\tau^2\kappa^2 - \kappa^4 + \kappa'\tau\kappa - \kappa^2\tau', \\
p_6 &= -2\tau^4 - \tau^2\kappa^2 - \kappa'\tau\kappa + \kappa^2\tau', \\
q_4 &= -\tau^3\kappa + \kappa^3 + \kappa'\tau + 2\kappa\tau' - \kappa'', \\
q_5 &= \tau^3 + \tau\kappa^2 - 3\kappa\kappa' + 3\tau^2\tau' - \tau'', \\
q_6 &= \tau^3 + \tau\kappa^2 - 3\tau\tau' - \tau\tau''
\end{aligned}$$

şeklinde birer katsayılardır (Şenyurt, 2013).

İspat. NB-Smarandache eğrisinin $s_{\beta_{NB}}$ yay parametresine göre türevi alınırsa

$$T_{\beta_{NB}}\frac{ds_{\beta_{NB}}}{ds} = \frac{(-\kappa T - \tau N + \tau B)}{\sqrt{2}}$$

olur. Norm alınırsa $\dfrac{ds_{\beta_{NB}}}{ds}$ ifadesi

$$\frac{ds_{\beta_{NB}}}{ds} = \sqrt{\frac{2\tau^2 + \kappa^2}{2}}$$

şeklinde bulunur. Bu ifade yerine yazılırsa β_{NB} eğrisinin teğet vektörü

$$T_{\beta_{NB}}(s) = \frac{-\kappa T - \tau N + \tau B}{\sqrt{2\tau^2 + \kappa^2}}$$

olur. Bu ifadenin tekrar türevi alınırsa $T'_{\beta_{NB}}(s)$ türevi

$$T'_{\beta_{NB}}(s) = \frac{\sqrt{2}}{(2\tau^2+\kappa^2)^2}(p_4T + p_5N + p_6B)$$

şeklinde bulunur. β_{NB} eğrisinin eğriliği $\kappa_{\beta_{NB}}$ ile gösterilirse $\kappa_{\beta_{NB}}$ eğriliği

$$\begin{aligned} \kappa_{\beta_{NB}} &= \|T'_{\beta_{NB}}\| \\ &= \sqrt{2}\frac{\sqrt{p_4^2+p_5^2+p_6^2}}{(2\tau^2+\kappa^2)^2} \end{aligned}$$

olur. β_{NB} eğrisinin aslinormali $N_{\beta_{NB}}$ ile gösterlilirse

$$\begin{aligned} N_{\alpha_2} &= \frac{T'_{\beta_{NB}}}{\|T'_{\beta_{NB}}\|} \\ &= \frac{p_4T + p_5N + p_6B}{\sqrt{p_4^2+p_5^2+p_6^2}} \end{aligned}$$

şeklinde bulunur. $B_{\beta_{NB}} = T_{\beta_{NB}} \wedge N_{\beta_{NB}}$ olduğundan $B_{\beta_{NB}}$ vektörü

$$B_{\beta_{NB}} = \frac{(-\tau p_6 - \tau p_5)T + (\kappa p_6 + \tau p_4)N + (-\kappa p_5 + \tau p_4)B}{\sqrt{(p_4^2+p_5^2+p_6^2)(2\tau^2+\kappa^2)}}$$

olur. β_{NB} eğrisinin ikinci ve üçüncü türevleri sırasıyla

$$\beta''_{NB} = \frac{(\kappa' + \kappa\tau)T + (\kappa^2 - \tau' - \tau^2)N + (-\tau^2 + \tau')B}{\sqrt{2}} \ ,$$

$$\beta'''_{NB} = \frac{q_4T + q_5N + q_6B}{\sqrt{2}}$$

dır. β_{NB} eğrisinin torsiyonu $\tau_{\beta_{NB}}$ ile gösterilirse $\tau_{\beta_{NB}}$ torsiyonu

$$\tau_{\beta_{NB}} = \frac{det(\beta'_{NB}, \beta''_{NB}, \beta'''_{NB})}{\|\beta'_{NB} \wedge \beta''_{NB}\|^2} \ ,$$

$$\tau_{\beta_{NB}} = \frac{\sqrt{2}(2\tau^3 q_4 + 2\tau^2\kappa q_6 + \tau\kappa^2 q_4 + \kappa^3 q_6 - \kappa'\tau q_6 - \kappa'\tau q_5 + \kappa\tau' q_6 + \kappa\tau' q_5)}{(\tau(2\tau^2+\kappa^2))^2 + (-\tau\kappa' + \kappa\tau')^2 + (2\tau^2\kappa + \kappa^3 - \kappa'\tau + \kappa\tau')^2}$$

şeklinde bulunur.

Tanım 2.3.5 $\alpha : I \to \mathbb{E}^3$ birim hızlı regüler eğrinin Frenet çatısı $\{T, N, B\}$ olsun. $TB-$ Smarandache eğrisi

$$\beta_{TB} = \frac{1}{\sqrt{2}}(T + B)$$

şeklinde tanımlanır (Ali, 2010).

Teorem 2.3.3 $TB-$ Smarandache eğrisinin $\kappa_{\beta_{TB}}$ eğriliği $\tau_{\beta_{TB}}$ torsiyonu sırasıyla,

$$\kappa_{\beta_{TB}} = \frac{\sqrt{2(\kappa^2+\tau^2)}}{\kappa - \tau},$$

$$\tau_{\beta_{TB}} = \frac{\sqrt{2}(\kappa^3 q_9 - 2\kappa^2\tau q_9 + \kappa^2\tau q_7 + \kappa\tau^2 q_9 - 2\kappa\tau^2 q_7 + \tau^3 q_7)}{(\tau(\kappa-\tau)^2)^2 + (\kappa(\kappa-\tau)^2)^2}$$

dır. Burada q_7, q_8 ve q_9

$$\begin{aligned} q_7 &= -3\kappa\kappa' + 2\kappa\tau' + \kappa'\tau, \\ q_8 &= \kappa^3 + \tau\kappa^2 - \kappa\tau^2 + \tau^3 + \kappa'' - \tau'', \\ q_9 &= \kappa\tau' + 2\kappa'\tau - 3\tau\tau' \end{aligned}$$

şeklinde birer katsayılardır (Ali, 2010).

İspat. TB-Smarandache eğrisinin $s_{\beta_{TB}}$ yay parametresine göre türevi alınırsa

$$T_{\beta_{TB}} \frac{ds_{\beta_{TB}}}{ds} = \frac{(\kappa-\tau)N}{\sqrt{2}}$$

olur. Norm alınırsa $\dfrac{ds_{\beta_{TB}}}{ds}$ ifadesi

$$\frac{ds_{\beta_{TB}}}{ds} = \sqrt{\frac{(\kappa-\tau)^2}{2}}$$

şeklinde bulunur. Bu ifade yerine yazılırsa β_{TB} eğrisinin teğet vektörü

$$T_{\beta_{TB}}(s) = N$$

olur. Bu ifadenin tekrar türevi alınırsa

$$T'_{\beta_{TB}}(s) = \frac{\sqrt{2}}{\kappa - \tau}(-\kappa T + \tau B)$$

şeklinde bulunur. β_{TB} eğrisinin eğriliği $\kappa_{\beta_{TB}}$ ile gösterilirse $\kappa_{\beta_{TB}}$ eğriliği

$$\begin{aligned}\kappa_{\beta_{TB}} &= \|T'_{\beta_{TB}}\| \\ &= \frac{\sqrt{2(\kappa^2+\tau^2)}}{\kappa - \tau}\end{aligned}$$

olur. β_{TB} eğrisinin aslinormali $N_{\beta_{TB}}$ ile gösterlilirse

$$\begin{aligned}N_{\beta_{TB}} &= \frac{T'_{\beta_{TB}}}{\|T'_{\beta_{TB}}\|} \\ &= \frac{-\kappa T + \tau B}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. $B_{\beta_{TB}} = T_{\beta_{TB}} \wedge N_{\beta_{TB}}$ olduğundan $B_{\beta_{TB}}$ vektörü

$$B_{\beta_{TB}} = \frac{\tau T + \kappa B}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}$$

olur. β_{TB} eğrisinin ikinci ve üçüncü türevleri sırasıyla

$$\beta''_{TB} = \frac{(-\kappa^2 + \tau\kappa)T + (\kappa' - \tau')N + (\kappa\tau - \tau^2)B}{\sqrt{2}} \ ,$$

$$\beta'''_{TB} = \frac{q_7 T + q_8 N + q_9 B}{\sqrt{2}}$$

şeklinde bulunur. β_{TB} eğrisinin torsiyonu $\tau_{\beta_{TB}}$ ile gösterilirse $\tau_{\beta_{TB}}$ torsiyonu

$$\tau_{\beta_{TB}} = \frac{det(\beta'_{TB}, \beta''_{TB}, \beta'''_{TB})}{\|\beta'_{TB} \wedge \beta''_{TB}\|^2} \ ,$$

$$\tau_{\beta_{TB}} = \frac{\sqrt{2}(\kappa^3 q_9 - 2\kappa^2\tau q_9 + \kappa^2\tau q_7 + \kappa\tau^2 q_9 - 2\kappa\tau^2 q_7 + \tau^3 q_7)}{(\tau(\kappa-\tau)^2)^2 + (\kappa(\kappa-\tau)^2)^2}$$

olur.

Tanım 2.3.6 $\alpha : I \to \mathbb{E}^3$ birim hızlı regüler eğrinin Frenet çatısı $\{T, N, B\}$ olsun. $TNB-$ Smarandache eğrisi

$$\beta_{TNB} = \frac{1}{\sqrt{3}}(T + N + B)$$

şeklinde tanımlanır (Ali, 2010).

Teorem 2.3.4 $TNB-$ Smarandache eğrisinin $\kappa_{\beta_{TNB}}$ eğriliği ve $\tau_{\beta_{TNB}}$ torsiyonu sırasıyla,

$$\kappa_{\beta_{TNB}} = \frac{\sqrt{3}\sqrt{p_7^2 + p_8^2 + p_9^2}}{2(\kappa^2 + \tau^2 - \kappa\tau)^2},$$

$$\tau_{\beta_{TNB}} = \frac{\begin{array}{l}\sqrt{3}\Big(2\kappa^3 q_{12} - 2\kappa^2\tau q_{12} + 2\kappa^2\tau q_{10} + 2\kappa\tau^2 q_{12} - 2\kappa\tau^2 q_{10} + 2\tau^3 q_{10} + \kappa\tau' q_{12} - \kappa'\tau q_{12} \\ +\kappa\tau' q_{11} + \kappa\tau' q_{10} - \kappa'\tau q_{11} - \kappa'\tau q_{10}\Big)\end{array}}{\begin{array}{l}\big(2\kappa\tau(\kappa - \tau) + 2\tau^3 + \kappa\tau' - \kappa'\tau\big)^2 + \big(2\kappa^3 - 2\kappa\tau(\kappa - \tau) + \kappa\tau' - \kappa'\tau\big)^2 \\ +(\kappa\tau' - \kappa'\tau)^2\end{array}}$$

dır. Burada p_7, p_8, p_9, q_{10}, q_{11} ve q_{12}

$$\begin{aligned}
p_7 &= 2\tau^3\kappa - 4\tau^2\kappa^2 + 4\tau\kappa^3 - 2\kappa^4 - 2\kappa'\tau^2 + \kappa'\tau\kappa + 2\tau\kappa\tau' - \kappa^2\tau', \\
p_8 &= -2\tau^4 + 2\tau^3\kappa - 4\tau^2\kappa^2 + 2\tau\kappa^3 - 2\kappa^4 + \kappa'\tau^2 + \kappa'\tau\kappa - \kappa^2\tau' - \tau\kappa\tau', \\
p_9 &= -2\tau^4 + 4\tau^3\kappa - 4\tau^2\kappa^2 + 2\tau\kappa^3 + \kappa'\tau^2 - 2\kappa'\tau\kappa - \tau\kappa\tau' + 2\kappa^2\tau', \\
q_{10} &= -\kappa'' + \kappa^3 - 3\kappa\kappa' + 2\tau'\kappa + \tau\kappa' + \tau^2\kappa, \\
q_{11} &= -3\kappa\kappa' + \kappa'' - \tau'' - \kappa^3 - \kappa\tau^2 + \tau\kappa^2 + \tau^3 - 3\tau\tau', \\
q_{12} &= -\kappa^2\tau + 2\kappa'\tau - 3\tau\tau' + \kappa\tau' + \tau'' - \tau^3
\end{aligned}$$

şeklinde birer katsayılardır (Şenyurt, 2013).

İspat. TNB-Smarandache eğrisinin $s_{\beta_{TNB}}$ yay parametresine göre türevi alınırsa

$$T_{\beta_{TNB}}\frac{ds_{\beta_{TNB}}}{ds} = \frac{-\kappa T + (\kappa - \tau)N + \tau B}{\sqrt{3}}$$

olur. Norm alınırsa $\dfrac{ds_{\beta_{TNB}}}{ds}$ ifadesi

$$\frac{ds_{\beta_{TNB}}}{ds} = \sqrt{\frac{2(\kappa^2 + \tau^2 - \kappa\tau)}{3}}$$

şeklinde bulunur. Bu ifade yerine yazılırsa β_{TNB} eğrisinin teğet vektörü

$$T_{\beta_{TNB}}(s) = \frac{-\kappa T + (\kappa - \tau)N + \tau B}{\sqrt{2(\kappa^2 + \tau^2 - \kappa\tau)}}$$

olur. Tekrar türev alınırsa $T'_{\beta_{TNB}}(s)$ türevi

$$T'_{\beta_{TNB}}(s) = \frac{\sqrt{3}}{2(\kappa^2 + \tau^2 - \kappa\tau)^2}(p_7 T + p_8 N + p_9 B)$$

şeklinde bulunur. β_{TNB} eğrisinin eğriliği $\kappa_{\beta_{TNB}}$ ile gösterilirse $\kappa_{\beta_{TNB}}$ eğriliği

$$\begin{aligned} \kappa_{\beta_{TNB}} &= \|T'_{\beta_{TNB}}\| \\ &= \frac{\sqrt{3}\sqrt{p_7^2 + p_8^2 + p_9^2}}{2(\kappa^2 + \tau^2 - \kappa\tau)^2} \end{aligned}$$

olur. β_{TNB} eğrisinin aslinormali $N_{\beta_{TNB}}$ ile gösterlilirse

$$\begin{aligned} N_{\beta_{TNB}} &= \frac{T'_{\beta_{TNB}}}{\|T'_{\beta_{TNB}}\|} \\ &= \frac{p_7 T + p_8 N + p_9 B}{\sqrt{p_7^2 + p_8^2 + p_9^2}} \end{aligned}$$

şeklinde bulunur. $B_{\beta_{TNB}} = T_{\beta_{TNB}} \wedge N_{\beta_{TNB}}$ olduğundan $B_{\beta_{TNB}}$ vektörü

$$B_{\beta_{TNB}} = \frac{((\kappa - \tau)p_9 - \tau p_8)T + (\kappa p_9 + \tau p_7)N + (-\kappa p_8 - (\kappa - \tau)p_7)B}{\sqrt{2(\kappa^2 + \tau^2 - \kappa\tau)(p_7^2 + p_8^2 + p_9^2)}}$$

olur. β_{TNB} eğrisinin ikinci ve üçüncü türevleri sırasıyla

$$\beta''_{TNB} = \frac{(-\kappa' - \kappa^2 + \tau\kappa)T + (-\kappa^2 + \kappa' - \tau' - \tau^2)N + (\kappa\tau - \tau^2 + \tau')B}{\sqrt{3}},$$

$$\beta'''_{TNB} = \frac{q_{10}T + q_{11}N + q_{12}B}{\sqrt{3}}$$

şeklinde bulunur. β_{TNB} eğrisinin torsiyonu $\tau_{\beta_{TNB}}$ ile gösterilirse $\tau_{\beta_{TNB}}$ torsiyonu

$$\tau_{\beta_{TNB}} = \frac{det(\beta'_{TNB}, \beta''_{TNB}, \beta'''_{TNB})}{\|\beta'_{TNB} \wedge \beta''_{TNB}\|^2} \ ,$$

$$\tau_{\beta_{TNB}} = \frac{\sqrt{3}\Big(2\kappa^3 q_{12} - 2\kappa^2\tau q_{12} + 2\kappa^2\tau q_{10} + 2\kappa\tau^2 q_{12} - 2\kappa\tau^2 q_{10} + 2\tau^3 q_{10} + \kappa\tau' q_{12} - \kappa'\tau q_{12} + \kappa\tau' q_{11} + \kappa\tau' q_{10} - \kappa'\tau q_{11} - \kappa'\tau q_{10}\Big)}{(2\kappa\tau(\kappa-\tau) + 2\tau^3 + \kappa\tau' - \kappa'\tau)^2 + (2\kappa^3 - 2\kappa\tau(\kappa-\tau) + \kappa\tau' - \kappa'\tau)^2 + (\kappa\tau' - \kappa'\tau)^2}$$

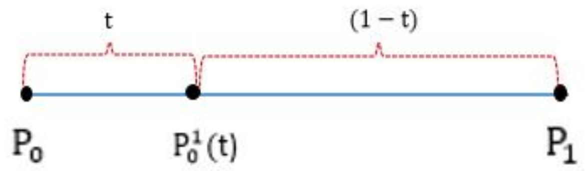
şeklinde elde edilir.

2.4 Öklid Uzayında Bezier Eğrisi

Tanım 2.4.1 E^3 Öklid uzayında $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ ve $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ kontrol noktaları verilsin. Bu noktaların oluşturduğu

$$P(t) = (1-t) \cdot P_0 + t \cdot P_1; t \in [0,1] \tag{2.4.1}$$

$P(t)$ eğrisine lineer Bezier eğrisi denir. (Şekil 2.3)



Şekil 2.3: Lineer Bezier eğrisi

Burada;

${P_0}^1(t)$ noktası $\overline{P_0P_1}$ doğru parçası üzerinde herhangi bir nokta ve

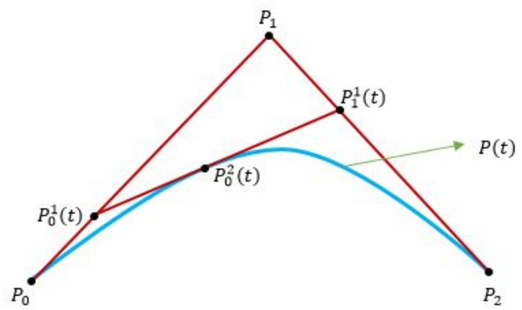
$$\begin{aligned} {B_0}^1(t) &= (1-t)\ , \\ {B_1}^1(t) &= t \end{aligned}$$

ise 1. dereceden Bernstein polinomlarıdır.

Tanım 2.4.2 E^3 Öklid uzayında $P_0 = (x_0, y_0, z_0), P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ ve $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ kontrol noktaları verilsin. Bu noktaların oluşturduğu

$$\begin{aligned} P(t) &= (1-t)^2.P_0 + 2.(1-t).t.P_1 + t^2.P_2 \\ &= \sum_{i=0}^{2} P_i.{B_i}^2(t) \end{aligned} \tag{2.4.2}$$

$P(t)$ eğrisine kuadratik Bezier eğrisi , kontrol noktalarının oluşturduğu doğru parçaları ile elde edilen üçgene kontrol poligonu denir (Kaplan ve Mann 2006 ; Marsh 2005).
(Bknz. Şekil 2.4)



Şekil 2.4: Kuadratik Bezier eğrisi

(Şekil 2.4)' den görüldüğü gibi;

$\overline{P_0P_1}$ doğru parçası üzerinde herhangi bir nokta ${P_0}^1(t)$, $\overline{P_1P_2}$ doğru parçası üzerinde herhangi bir nokta ${P_1}^1(t)$, $\overline{{P_0}^1(t){P_1}^1(t)}$ doğru parçası üzerinde herhangi bir nokta ${P_0}^2(t)$ ile gösterilmiştir.

(2.4.2) eşitliğindeki Bernstein polinomları

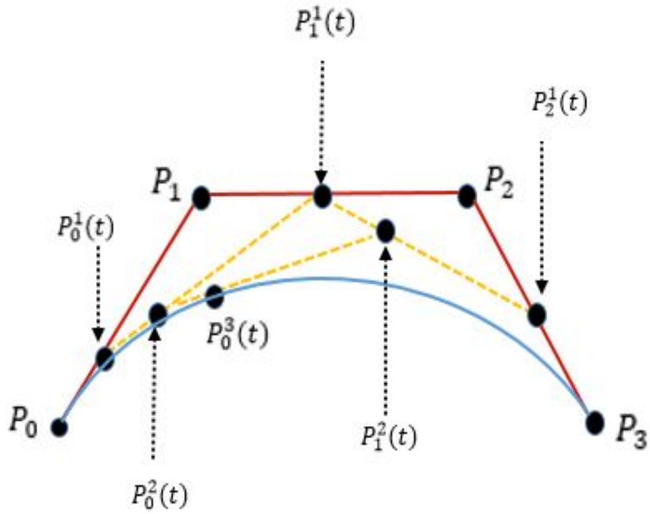
$$\begin{aligned} B_0{}^2(t) &= (1-t)^2 \ , \\ B_1{}^2(t) &= 2(1-t)t \ , \\ B_2{}^2(t) &= t^2 \end{aligned}$$

şeklinde yazılır. Bu fonksiyonlar 2. dereceden Bernstein polinomları olarak adlandırılır.

Tanım 2.4.3 E^3 Öklid uzayında $P_0 = (x_0, y_0, z_0), P_1 = (x_1, y_1, z_1), P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ ve $P_3 = (x_3, y_3, z_3)$ kontrol noktaları verilsin. Bu noktaların oluşturduğu

$$\begin{aligned} P(t) &= (1-t)^3.P_0 + 3.(1-t)^2.t.P_1 + 3.(1-t)t^2.P_2 + t^3.P_3 \\ &= \sum_{i=0}^{3} P_i.B_i{}^3(t) \end{aligned} \tag{2.4.3}$$

$P(t)$ eğrisine kübik Bezier eğrisi , kontrol noktalarının oluşturduğu doğru parçaları ile elde edilen poligona kontrol poligonu denir (Kaplan ve Mann 2006, Marsh 2005). denir. (Bknz. Şekil 2.5)



Şekil 2.5: Kübik Bezier eğrisi

Şekilden görüldüğü gibi;

$\overline{P_0P_1}$ doğru parçası üzerinde herhangi bir nokta $P_0{}^1(t)$, $\overline{P_1P_2}$ doğru parçası üzerinde bir nokta $P_1{}^1(t)$, $\overline{P_2P_3}$ doğru parçası üzerinde bir nokta $P_2{}^1(t)$, $\overline{P_0{}^1(t)P_1{}^1(t)}$ doğru parçası üzerinde bir nokta $P_0{}^2(t)$, $\overline{P_1{}^1(t)P_2{}^1(t)}$ doğru parçası üzerinde bir nokta $P_1{}^2(t)$ ve $\overline{P_0{}^2(t)P_1{}^2(t)}$ doğru parçası üzerinde herhangi bir $P_0{}^3(t)$ ile gösterilmiştir.

(2.4.3) eşitliğindeki Bernstein polinomları;

$$\begin{aligned} {B_0}^3(t) &= (1-t)^3 \ , \\ {B_1}^3(t) &= 3(1-t)^2 t \ , \\ {B_2}^3(t) &= 3(1-t)t^2 \ , \\ {B_3}^3(t) &= t^3 \end{aligned}$$

şeklinde yazılır. Bu polinomlara 3. dereceden Bernstein polinomları denir.

Tanım 2.4.4 E^3 Öklid uzayında (n+1) kontrol noktası verilsin.Bu kontrol noktaları $P_0 = (x_0, y_0, z_0), P_1 = (x_1, y_1, z_1), P_2 = (x_2, y_2, z_2), ..., P_n = (x_n, y_n, z_n)$ olsun. Bu noktaların oluşturduğu

$$P(t) = \sum_{i=0}^{n} P_i.{B_i}^n(t) \tag{2.4.4}$$

$P(t)$ eğrisine n.dereceden Bezier eğrisi denir.
Burada;

$${B_i}^n(t) = \binom{n}{i}(1-t)^{n-i}t^i \ ; \ 0 \leq i \leq n \ , \tag{2.4.5}$$

şeklinde tanımlı ${B_i}^n(t)$ ifadesi n. dereceden Bernstein polinomudur.
$P_0, P_1, P_2, ..., P_n$ kontrol noktalarının oluşturduğu doğru parçaları yardımıyla elde edilen poligona kontrol poligonu denir(David,2006; Marsh, 2005).

2.4.1 Bernstein Polinomlarının Özellikleri

Bezier eğrisinin tanımlanmasında kullanılan (2.4.5) eşitliği ile ifade edilen Bernstein polinomlarına ait bazı sonuçlar aşağıda verilmiştir.

Sonuç 2.4.1 n.dereceden Bernstein polinomlarının toplamı 1' dir. Bu özelliğe birim bölüntü özelliği de denir (Marsh, 2005; Farin, 1997).

İspat. (2.4.5) eşitliği ile verilen Bernstein polinomu $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned}(x+y)^n &= \binom{n}{0} x^n y^0 \binom{n}{1} x^{n-1} y^1 + ... + \binom{n}{n} x^0 y^n \\ &= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^{n-i} y^i; 0 \leq i \leq n\end{aligned}$$

şeklinde yazılır. Binom teoreminin uygulanmasından,

$$\begin{aligned}(t+(1-t)) = 1 \ &\Rightarrow \ (t+(1-t))^n = 1^n \\ &\Rightarrow \ \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i = 1 \\ &\Rightarrow \ \sum_{i=0}^{n} B_i{}^n(t) = 1\end{aligned}$$

bulunur.

Sonuç 2.4.2 Bernstein polinomları, $[0,1]$ aralığında pozitiftir.

İspat.

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{(n-i)!i!} > 0,$$

$t \geq 0$ ve $(1-t) \geq 0$ olduğundan $B_i{}^n(t)$ polinomu

$$B_i{}^n(t) = \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i$$

şeklinde bulunur.

Sonuç 2.4.3 (2.4.5) eşitliği ile verilen n. dereceden Bernstein polinomları için;

$$B_{n-i}{}^n(t) = B_i{}^n(1-t) \tag{2.4.6}$$

bağıntısı vardır (Kaplan, 2005).

İspat. n. dereceden Bernstein polinomu (2.4.5) eşitliği ile verilmişti. Buradan;

$$B_i{}^n(t) = \binom{n}{n-i}(1-t)^i t^{n-i} \ , \tag{2.4.7}$$

$$B_i{}^n(1-t) = \binom{n}{i}(t)^{n-i}(1-t)^i \tag{2.4.8}$$

yazılır. (2.4.7) ve (2.4.8) ifadelerinin sağ tarafları eşit olduğundan sol tarafları da eşittir. Bu nedenle

$$B_{n-i}{}^n(t) = B_i{}^n(1-t)$$

olur.

Sonuç 2.4.4 n. dereceden Bernstein polinomları, (n-1) dereceli polinomlar cinsinden

$$B_i{}^n(t) = (1-t)B_i{}^{n-1}(t) + tB_{i-1}{}^{n-1}(t) \tag{2.4.9}$$

şeklinde verilir. Diğer bir ifadeyle Bernstein polinomları yinelemeli olarak elde edilebilir. Burada; $i = 0$ için $B_{-1}{}^{n-1}(t) = 0$ ve $i = n$ için $B_n{}^{n-1}(t) = 0$ dır (Farin 1997 ; Marsh, 2005).

İspat. (2.4.5) eşitliği kullanılarak,

$$B_i{}^{n-1}(t) = \binom{n-1}{i}(1-t)^{n-1-i}t^i \ , \tag{2.4.10}$$

$$B_{i-1}{}^{n-1}(t) = \binom{n-1}{i-1}(1-t)^{n-i}t^{i-1} \tag{2.4.11}$$

yazılabilir.(2.4.5) eşitliğinde i=0 yazılırsa,

$$\begin{aligned} B_0{}^n(t) &= \binom{n}{0}(1-t)^{n-0}t^0 \\ &= (1-t)^n \\ &= (1-t)(1-t)^{n-1} \\ &= (1-t)B_0{}^{n-1}(t) + tB_{-1}{}^{n-1}(t) \end{aligned}$$

olur.

Benzer şekilde ${B_n}^{n-1}(t)$ olduğundan (2.4.5) eşitliğinde i=n yazılırsa,

$$\begin{aligned}
{B_n}^n(t) &= \binom{n}{n}(1-t)^{n-n}t^n \\
&= (1-t)^0 t^n \\
&= t^n \\
&= (1-t)\,0 + t\,t^{n-1} \\
&= (1-t){B_n}^{n-1}(t) + t{B_{n-1}}^{n-1}(t)
\end{aligned}$$

bulunur. $1 \leq i \leq n$ için, (2.4.10) eşitliği $(1-t)$ ve (2.4.11) eşitliği t ile sırasıyla çarpılır ve çarpım ifadeleri de (2.4.5) bağıntısında yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
(1-t){B_i}^n(t) + t{B_{i-1}}^{n-1}(t) &= (1-t)\binom{n-1}{i}(1-t)^{n-1-i}t^i + t\binom{n-1}{i-1}(1-t)^{n-i}t^{i-1} \\
&= \left(\binom{n-1}{i} + \binom{n-1}{i-1}\right)(1-t)^{n-i}t^i \qquad (2.4.12)
\end{aligned}$$

olur.

$$\binom{n}{i} + \binom{n}{i+1} = \binom{n+1}{i+1}$$

olduğundan

$$\binom{n-1}{i} + \binom{n-1}{i-1}$$

olur. Bu ifade (2.4.12) de yerine yazılır ve sonra da (2.4.5) dikkate alınırsa

$$\begin{aligned}
(1-t){B_i}^n(t) + t{B_{i-1}}^{n-1}(t) &= \binom{n}{i}(1-t)^{n-i}t^i \\
&= {B_i}^n(t)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 2.4.1 E^3 Öklid uzayında birim hızlı olmayan kübik Bezier eğrisinin Frenet vektörleri T, N, B olsun. Bu vektörler sırasıyla

$$T(t) = \frac{(1-t)^2 \Delta^1 P_0 + 2(1-t)t \Delta^1 P_1 + t^2 \Delta^1 P_2}{\|(1-t)^2 \Delta^1 P_0 + 2(1-t)t \Delta^1 P_1 + t^2 \Delta^1 P_2\|} ,$$

$$N(t) = \frac{\begin{array}{l} (1-t)^4\big((\Delta^1 P_0 \wedge \Delta^1 P_1) \wedge \Delta^1 P_0\big) + 2(1-t)^3 t\big((\Delta^1 P_0 \wedge \Delta^1 P_1) \wedge \Delta^1 P_1\big) \\ +(1-t)^2 t^2\big((\Delta^1 P_0 \wedge \Delta^1 P_1) \wedge \Delta^1 P_2\big) + (1-t)^3 t\big((\Delta^1 P_0 \wedge \Delta^1 P_2) \wedge \Delta^1 P_0\big) \\ +2(1-t)^2 t^2\big((\Delta^1 P_0 \wedge \Delta^1 P_2) \wedge \Delta^1 P_1\big) + (1-t)t^3\big((\Delta^1 P_0 \wedge \Delta^1 P_2) \wedge \Delta^1 P_2\big) \\ +(1-t)^2 t^2\big((\Delta^1 P_1 \wedge \Delta^1 P_2) \wedge \Delta^1 P_0\big) + 2(1-t)t^2\big((\Delta^1 P_1 \wedge \Delta^1 P_2) \wedge \Delta^1 P_1\big) \\ +t^4\big((\Delta^1 P_1 \wedge \Delta^1 P_2) \wedge \Delta^1 P_2\big) \end{array}}{\begin{array}{l} \|(1-t)^2(\Delta^1 P_0 \wedge \Delta^1 P_1)(1-t)t(\Delta^1 P_0 \wedge \Delta^1 P_2) + t^2(\Delta^1 P_1 \wedge \Delta^1 P_2)\| \\ \|(1-t)^2(\Delta^1 P_0) + 2(1-t)t \Delta^1 P_1 + t^2 \Delta^1 P_2\| \end{array}} ,$$

$$B(t) = \frac{(1-t)^2\big(\Delta^1 P_0 \wedge \Delta^1 P_1\big) + (1-t)t\big(\Delta^1 P_0 \wedge \Delta^1 P_2\big) + t^2\big(\Delta^1 P_1 \wedge \Delta^1 P_2\big)}{\|(1-t)^2(\Delta^1 P_0 \wedge \Delta^1 P_1) + (1-t)t(\Delta^1 P_1 \wedge \Delta^1 P_2) + t^2(\Delta^1 P_2 \wedge \Delta^1 P_2)\|}$$

bağıntısıyla verilir. Burada

$$\begin{aligned} \Delta^1 P_0 &= P_1 - P_0 , \\ \Delta^1 P_1 &= P_2 - P_1 , \\ \Delta^1 P_2 &= P_3 - P_2 \end{aligned}$$

olup ileri fark operatörü olarak adlandırılır (Erkan, 2019).

Teorem 2.4.2 E^3 Öklid uzayında birim hızlı olmayan kübik Bezier eğrisinin eğriliği κ ve torsiyonu τ olsun.Bu vektörler sırasıyla

$$\kappa = \frac{2(\|(1-t)^2(\Delta^1 P_0 \wedge \Delta^1 P_1) + (1-t)t(\Delta^1 P_0 \wedge \Delta^1 P_2) + t^2(\Delta^1 P_1 \wedge \Delta^1 P_2)\|)}{3(\|(1-t)^2 \Delta^1 P_0 + 2(1-t)t \Delta^1 P_1 + t^2 \Delta^1 P_2\|^3)}$$

$$\tau = \frac{\left(\begin{array}{l} (1-t)^2\langle \Delta^1 P_0, \Delta^1 P_1 \wedge \Delta^1 P_2\rangle - 2(1-t)t\langle \Delta^1 P_1, \Delta^1 P_0 \wedge \Delta^1 P_2\rangle \\ +t^2\langle \Delta^1 P_2, \Delta^1 P_0 \wedge \Delta^1 P_1\rangle \end{array}\right)}{3(\|(1-t)^2(\Delta^1 P_0 \wedge \Delta^1 P_1) + (1-t)t(\Delta^1 P_1 \wedge \Delta^1 P_2) + t^2(\Delta^1 P_2 \wedge \Delta^1 P_2)\|^2)}$$

bağıntısıyla verilir (Erkan, 2019).

3. BULGULAR ve TARTIŞMA

Bu bölümde, kontrol noktaları $P_0 = (0,0,0)$, $P_1 = (1,0,0)$, $P_2 = (0,1,0)$ ve $P_3 = (0,0,1)$ şeklinde alındı. Bu noktalar kullanılarak $P(t)$ kübik Bezier eğrisi tanımlandı. İlk olarak tanımlanan kübik Bezier eğrisinin Frenet vektörleri, eğrilikleri ve Darboux vektörü hesaplandı. Daha sonra Darboux vektörü kullanılarak eğri üzerinde N, C, W ortanormal alternatif çatı vektörleri oluşturuldu.

Son olarak elde edilen bu eğrinin Frenet çatıları ile alternatif çatı vektörlerinden elde edilen Smarandache eğrileri tanımlanarak her bir Smarandache eğrisi için Frenet ve alternatif çatı vektörleri ayrı ayrı hesaplandı. Elde edilen bulguların maple programıyla çizimleri yapıldı.

3.1 $P(t)$ Kübik Bezier Eğrisinin Frenet Vektörlerinden Elde Edilen Smarandache Eğrileri

E^3 Öklid uzayında $P_0 = (0,0,0)$, $P_1 = (1,0,0)$, $P_2 = (0,1,0)$, $P_3 = (0,0,1)$ noktaları kontrol noktaları olarak alındığında kübik Bezier eğrisi (2.4.3) bağıntısından;

$$\begin{aligned} P(t) &= (1-t)^3(0,0,0) + 3(1-t)^2 t(1,0,0) + 3(1-t)t^2(0,1,0) + t^3(0,0,1) \\ &= (3t^3 - 6t^2 + 3t, -3t^3 + 3t^2, t^3) \end{aligned}$$

şeklinde yazılır.

Teorem 3.1.1 $P(t)$ kübik Bezier eğrisinin Frenet vektörleri T, N, B olsun. Bu vektörler sırasıyla

$$\begin{aligned} T(t) &= \frac{(3t^2 - 4t + 1, -3t^2 + 2t, t^2)}{\sqrt{19t^4 - 36t^3 + 26t^2 - 8t + 1}}, \\ N(t) &= \frac{(11t^4 - 16t^3 + 9t^2 - 2t, 8t^4 - 21t^3 + 18t^2 - 7t + 1, -9t^4 + 13t^3 - 6t^2 + t)}{\sqrt{266t^8 - 922t^7 + 1460t^6 - 1374t^5 + 841t^4 - 342t^3 + 90t^2 - 14t + 1}}, \\ B(t) &= \frac{(t^2, 2t^2 - t, 3t^2 - 3t + 1)}{\sqrt{14t^4 - 22t^3 + 16t^2 - 6t + 1}}, \end{aligned}$$

şeklinde verilir.

İspat. $P(t)$ eğrisinin türevi alınırsa

$$\begin{aligned} P'(t) &= (9t^2 - 12t + 3, -9t^2 + 6t, 3t^2) \\ &= 3(3t^2 - 4t + 1, -3t^2 + 2t, t^2) \end{aligned}$$

bulunur. Buradan norm alınırsa

$$\begin{aligned} \|P'(t)\| &= \frac{1}{3\sqrt{(3t^2 - 4t + 1)^2 + (-3t^2 + 2t)^2 + (t^2)^2}} \\ &= \frac{1}{3\sqrt{19t^4 - 36t^3 + 26t^2 - 8t + 1}} \end{aligned}$$

olur. Bu ifade (2.1.1) de yerine yazılırsa $P(t)$ kübik Bezier eğrisinin $T(t)$ teğet vektörü

$$T(t) = \frac{3t^2 - 4t + 1, -3t^2 + 2t, t^2}{\sqrt{19t^4 - 36t^3 + 26t^2 - 8t + 1}}$$

şeklinde olur.$P'(t)$ den tekrar türev alınırsa $P''(t)$ vektörü

$$\begin{aligned} P''(t) &= (3(3t^2 - 4t + 1, -3t^2 + 2t, t^2))' \\ &= 3(6t - 4, -6t + 2, 2t) \end{aligned}$$

olur. $P'(t)$ ve $P''(t)$ vektörleri vektörel çarpılırsa

$$P'(t) \wedge P''(t) = 18(t^2, 2t^2 - 18t, 3t^2 - 3t + 1)$$

şeklinde bulunur. Norm alınırsa

$$\begin{aligned} \|P'(t) \wedge P''(t)\| &= 18\sqrt{\left(t^2, 2t^2 - t, 3t^2 - 3t + 1\right)^2} \\ &= 18\sqrt{(t^2)^2 + (2t^2 - t)^2 + (3t^2 - 3t + 1)^2} \\ &= 18\sqrt{\left(14t^4 - 22t^3 + 16t^2 - 6t + 1\right)} \end{aligned}$$

olur. $P(t)$ kübik Bezier eğrisinin $B(t)$ binormal vektörü

$$
\begin{aligned}
B(t) &= \frac{P'(t) \wedge P''(t)}{\|P'(t) \wedge P''(t)\|} \\
&= \frac{(t^2, 2t^2 - t, 3t^2 - 3t + 1)}{\sqrt{\left(14t^4 - 22t^3 + 16t^2 - 6t + 1\right)}}
\end{aligned}
$$

bulunur. $P(t)$ eğrisinin $N(t)$ aslinormal vektörü

$$
\begin{aligned}
N(t) &= B(t) \wedge T(t) \\
&= \frac{(11t^4 - 16t^3 + 9t^2 - 2t, 8t^4 - 21t^3 + 18t^2 - 7t + 1, -9t^4 + 13t^3 - 6t^2 + t)}{\sqrt{\left(266t^8 - 922t^7 + 1460t^6 - 1374t^5 + 841t^4 - 342t^3 + 90t^2 - 14t + 1\right)}}
\end{aligned}
$$

şeklinde elde edilir.

Teorem 3.1.2 $P(t)$ eğrisinin κ eğriliği ve τ burulması sırasıyla

$$
\begin{aligned}
\kappa &= \frac{2\sqrt{14t^4 - 22t^3 + 16t^2 - 6t + 1}}{3(\sqrt{19t^4 - 36t^3 + 26t^2 - 8t + 1})^3}, \\
\tau &= \frac{1}{3(14t^4 - 22t^3 + 16t^2 - 6t + 1)}
\end{aligned}
$$

bağıntısıyla verilir.

İspat. (2.1.2) bağıntısından $\kappa(t)$ eğriliği

$$
\begin{aligned}
\kappa(t) &= \frac{\|P'(t) \wedge P''(t)\|}{\|P'(t)\|^3} \\
&= \frac{2\sqrt{14t^4 - 22t^3 + 16t^2 - 6t + 1}}{3(\sqrt{19t^4 - 36t^3 + 26t^2 - 8t + 1})^3}
\end{aligned}
$$

bulunur. $P''(t)$ vektörünün türevi alınırsa

$$P'''(t) = (18, -18, 6)$$

olur. $P'(t)$, $P''(t)$ ve $P'''(t)$ vektörlerinin determinantı hesaplanırsa

$$det(P', P'', P''') \;=\; 108$$

bulunur. (2.1.2) bağıntısından $\tau(t)$ burulması

$$\begin{aligned}\tau(t) &= \frac{\det(P'(t), P''(t), P'''(t))}{\|P'(t) \wedge P''(t)\|^2} \\ &= \frac{1}{3(14t^4 - 22t^3 + 16t^2 - 6t + 1)}\end{aligned}$$

şeklinde hesaplanmış olur.

Şimdi $P(t)$ kübik Bezier eğrisinin Frenet vektörlerinden Smarandache eğrileri tanımlanacak ve tanımlanan her bir eğrini Frenet vektörleri, eğrilik ve torsyonları hesaplanacaktır.

Tanım 3.1.1 $P(t)$ kübik Bezier eğrisinin teğet vektörü T ve aslinormal vektörü N verilsin.

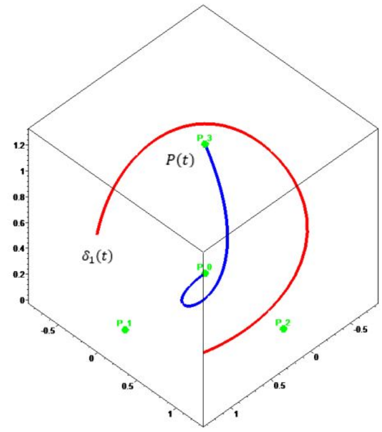
$$\delta_1(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(T + N)$$

şeklinde tanımlı $\delta_1(t)$ vektörünün çizdiği regüler eğriye δ_1- Bezier Smarandache eğrisi denir.

Bu tanımda T ve N vektörlerinin yerine Teorem 3.1.1 'den karşılıkları yazılırsa $\delta_1(t)$-Smarandache eğrisinin ifadesi

$$\begin{aligned}\delta_1(t) \;=\; &\Bigg(\frac{\begin{array}{l}11t^4 - 16t^3 + 9t^2 + 3t^2\sqrt{14t^4 - 22t^3 + 16t^2 - 6t + 1} \\ -4t\sqrt{14t^4 - 22t^3 + 16t^2 - 6t + 1} + \sqrt{14t^4 - 22t^3 + 16t^2 - 6t + 1}\end{array}}{\sqrt{2\Big(266t^8 - 922t^7 + 1460t^6 - 1374t^5 + 841t^4 - 342t^3 + 90t^2 - 14t + 1\Big)}}, \\ &-\frac{\begin{array}{l}8t^4 + 21t^3 - 18t^2 + 7t - 1 + 3t^2\sqrt{14t^4 - 22t^3 + 16t^2 - 6t + 1} \\ -2t\sqrt{14t^4 - 22t^3 + 16t^2 - 6t + 1}\end{array}}{\sqrt{2\Big(266t^8 - 922t^7 + 1460t^6 - 1374t^5 + 841t^4 - 342t^3 + 90t^2 - 14t + 1\Big)}}, \\ &\frac{-9t^4 + 13t^3 - 6t^2 + t + t^2\sqrt{14t^4 - 22t^3 + 16t^2 - 6t + 1}}{\sqrt{2\Big(266t^8 - 922t^7 + 1460t^6 - 1374t^5 + 841t^4 - 342t^3 + 90t^2 - 14t + 1\Big)}} \Bigg)\end{aligned}$$

şeklinde olur. Eğriye ait grafik Şekil 3.1 de verilmiştir. Burada yeşil noktalar kontrol noktalarıdır. Mavi olan eğri $P(t)$ kübik Bezier eğrisi, kırmızı olan eğri ise $\delta_1(t)$-Bezier Smarandache eğrisidir.



Şekil 3.1: δ_1-Bezier Smarandache eğrisi

Teorem 3.1.3 $\delta_1(t)$-Bezier Smarandache eğrisinin Frenet vektörleri $T_{\delta_1}, N_{\delta_1}, B_{\delta_1}$ olsun. Bu vektörler sırasıyla

$$T_{\delta_1}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\kappa^2+\tau^2}}(-\kappa T + \kappa N + \tau B),$$

$$N_{\delta_1}(t) = \frac{\big(a_3\kappa\tau + a_1\tau^2 + a_2\kappa^2 + a_1\kappa^2\big)T + \big(-a_3\kappa\tau + a_2\tau^2 + a_2\kappa^2 a_1\kappa^2\big)N + \big(2a_3\kappa^2 - a_2\kappa\tau + a_1\kappa\tau\big)B}{\sqrt{(2\kappa^2+\tau^2)\Big(\big(a_1^2+a_2^2+2a_3^2+2a_1a_2\big)\kappa^2 + \big(a_1^2+a_2^2\big)\tau^2 + \big(2a_1a_3 - 2a_2a_3\big)\kappa\tau\Big)}},$$

$$B_{\delta_1}(t) = \frac{\big(a_3\kappa - a_2\tau\big)T + \big(a_3\kappa + a_1\tau\big)N + \big(-a_2\kappa - a_1\kappa\big)B}{\sqrt{\big(a_1^2+a_2^2+2a_3^2+2a_1a_2\big)\kappa^2 + \big(a_1^2+a_2^2\big)\tau^2 + \big(2a_1a_3 - 2a_2a_3\big)\kappa\tau}}$$

şeklinde verilir. Burada a_1, a_2, a_3

$$
\begin{aligned}
a_1 &= -\kappa' - \kappa^2 \\
&= -\frac{4(14\,t^4 - 22\,t^3 + 16\,t^2 - 6\,t + 1)}{9\,(19\,t^4 - 36\,t^3 + 26\,t^2 - 8\,t + 1)^3} \\
&\quad -\frac{56\,t^3 - 66\,t^2 + 32\,t - 6}{3\sqrt{14\,t^4 - 22\,t^3 + 16\,t^2 - 6\,t + 1}\,(19\,t^4 - 36\,t^3 + 26\,t^2 - 8\,t + 1)^{\frac{3}{2}}} \\
&\quad +\frac{\sqrt{14\,t^4 - 22\,t^3 + 16\,t^2 - 6\,t + 1}\,(76\,t^3 - 108\,t^2 + 52\,t - 8)}{(19\,t^4 - 36\,t^3 + 26\,t^2 - 8\,t + 1)^{\frac{5}{2}}},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a_2 &= -\kappa^2 - \tau^2 + \kappa' \\
&= -\frac{1}{9\big(14t^4 - 22t^3 + 16t^2 - 6t + 1\big)^2} - \frac{4\big(14t^4 - 22t^3 + 16t^2 - 6t + 1\big)}{9\big(19t^4 - 36t^3 + 26t^2 - 8t + 1\big)^3} \\
&\quad +\frac{56t^3 - 66t^2 + 32t - 6}{3\sqrt{14t^4 - 22t^3 + 16t^2 - 6t + 1}\big(19t^4 - 36t^3 + 26t^2 - 8t + 1\big)^{\frac{3}{2}}} \\
&\quad -\frac{\sqrt{14t^4 - 22t^3 + 16t^2 - 6t + 1}\big(76t^3 - 108t^2 + 52t - 8\big)}{\big(19t^4 - 36t^3 + 26t^2 - 8t + 1\big)^{\frac{5}{2}}},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a_3 &= \kappa\tau + \tau' \\
&= \frac{2}{9\sqrt{14t^4 - 22t^3 + 16t^2 - 6t + 1}\big(19t^4 - 36t^3 + 26t^2 - 8t + 1\big)^{\frac{3}{2}}} \\
&\quad -\frac{56t^3 - 66t^2 + 32t - 6}{3\big(14t^4 - 22t^3 + 16t^2 - 6t + 1\big)^2}
\end{aligned}
$$

şeklinde birer katsayıdır.

İspat. δ_1 eğrisinin türevi alınır ve sonra da norm hesaplanırsa

$$
\delta_1'(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(-\kappa T + \kappa N + \tau B\big)\ ,
$$

$$
\|\delta_1'(t)\| = \sqrt{\frac{2\kappa^2 + \tau^2}{2}}
$$

olur. Bu ifade (2.1.1) de yerine yazılırsa $\delta_1(t)$-Bezier Smarandache eğrisinin T_{δ_1} teğet vektörü

$$T_{\delta_1}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\kappa^2+\tau^2}}(-\kappa T + \kappa N + \tau B)$$

şeklinde olur. $\delta_1'(t)$ 'den tekrar türev alınırsa $\delta_1''(t)$ vektörü

$$\begin{aligned}
\delta_1''(t) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\big(-\kappa' T - \kappa T' + \kappa' N + \kappa N' + \tau' B + \tau B'\big)\\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\big(-\kappa' T - \kappa(\kappa N) + \kappa' N + \kappa\big(-\kappa T + \tau B\big) + \tau' B + \tau(-\tau N)\big)\\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\big(-\kappa' T - \kappa^2 N + \kappa' N + -\kappa^2 T + \kappa\tau B + \tau' B - \tau^2 N\big)\\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big((-\kappa' - \kappa^2)T + (-\kappa^2 - \tau^2 + \kappa')N + (\kappa\tau + \tau')B\Big)
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Burada çatı vektörlerinin katsayıları

$$a_1 = -\kappa' - \kappa^2\ , \quad a_2 = -\kappa^2 - \tau^2 + \kappa'\ , \quad a_3 \;=\; \kappa\tau + \tau'$$

şeklinde alınırsa $\delta_1''(t)$ türev vektörü

$$\delta_1''(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(a_1 T + a_2 B + a_3 B\big)$$

şeklinde yazılır. $\delta_1'(t)$ ve $\delta_1''(t)$ vektörleri vektörel çarpılırsa

$$\delta_1'(t) \wedge \delta_1''(t) \;=\; \frac{1}{2}\Big((a_3\kappa - a_2\tau)T + (a_3\kappa + a_1\tau)N + (-a_2\kappa - a_1\kappa)B\Big)$$

olur. Norm alınırsa

$$\|\delta_1'(t) \wedge \delta_1''(t)\| = \frac{1}{2}\sqrt{(a_3\kappa - a_2\tau)^2 + (a_3\kappa + a_1\tau)^2 + (-a_2\kappa - a_1\kappa)^2}$$

bulunur. $\delta_1(t)$ eğrisinin $B_{\delta_1}(t)$ binormal vektörü ve $N_{\delta_1}(t)$ aslinormal vektörü sırasıyla

$$
\begin{aligned}
B_{\delta_1}(t) &= \frac{\delta_1'(t)\wedge\delta_1''(t)}{\|\delta_1'(t)\wedge\delta_1''(t)\|}\\
&= \frac{\big(a_3\kappa-a_2\tau\big)T+\big(a_3\kappa+a_1\tau\big)N+\big(-a_2\kappa-a_1\kappa\big)B}{\sqrt{\big(a_1^2+a_2^2+2a_3^2+2a_1a_2\big)\kappa^2+\big(a_1^2+a_2^2\big)\tau^2+\big(2a_1a_3-22a_2a_3\big)\kappa\tau}},\\
N_{\delta_1}(t) &= B_{\delta_1}(t)\wedge T_{\delta_1}(t)\\
&= \frac{\begin{array}{c}\big(a_3\kappa\tau+a_1\tau^2+a_2\kappa^2+a_1\kappa^2\big)T+\big(-a_3\kappa\tau+a_2\tau^2+a_2\kappa^2a_1\kappa^2\big)N\\ +\big(2a_3\kappa^2-a_2\kappa\tau+a_1\kappa\tau\big)B\end{array}}{\sqrt{(2\kappa^2+\tau^2)\Big(\big(a_1^2+a_2^2+2a_3^2+2a_1a_2\big)\kappa^2+\big(a_1^2+a_2^2\big)\tau^2+\big(2a_1a_3-2a_2a_3\big)\kappa\tau\Big)}}
\end{aligned}
\tag{3.1.1}
$$

şeklinde bulunur.

Teorem 3.1.4 $\delta_1(t)$-Bezier Smarandache eğrisinin κ_{δ_1} eğriliği ve τ_{δ_1} burulması sırasıyla

$$
\kappa_{\delta_1} = \frac{\sqrt{2\Big(\big(a_1^2+a_2^2+2a_3^2+2a_1a_2\big)\kappa^2+\big(a_1^2+a_2^2\big)\tau^2+\big(2a_1a_3-2a_2a_3\big)\kappa\tau\Big)}}{\big(2\kappa^2+\tau^2\big)^{\frac{3}{2}}}
$$

,

$$
\tau_{\delta_1} = \frac{\begin{array}{l}\sqrt{2}\Big((a_3\kappa-a_2\tau)(a_1'-a_2\kappa)+(a_3\kappa+a_1\tau)(a_1\kappa+a_2'-a_3\tau)+\\ (-a_2\kappa-a_1\kappa)(a_2\tau+a_3')\Big)\end{array}}{\big(a_1^2+a_2^2+2a_3^2+2a_1a_2\big)\kappa^2+\big(a_1^2+a_2^2\big)\tau^2+\big(2a_1a_3-2a_2a_3\big)\kappa\tau},
$$

şeklinde verilir.

İspat. $\delta_1(t)$-Bezier Smarandache eğrisinin κ_{δ_1} eğriliği (2.1.2) bağıntısından

$$
\begin{aligned}
\kappa_{\delta_1}(t) &= \frac{\|\delta_1'(t)\wedge\delta_1''(t)\|}{\|\delta_1'(t)\|^3}\\
&= \frac{\sqrt{2\Big(\big(a_1^2+a_2^2+2a_3^2+2a_1a_2\big)\kappa^2+\big(a_1^2+a_2^2\big)\tau^2+\big(2a_1a_3-2a_2a_3\big)\kappa\tau\Big)}}{\big(2\kappa^2+\tau^2\big)^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}
$$

olur. $\delta_1''(t)$ vektörünün türevi alınırsa

$$\begin{aligned}
\delta_1'''(t) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(a_1'T + a_1T' + a_2'N + a_2N' + a_3'B + a_3B'\Big) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(a_1'T + a_1(\kappa N) + a_2'N + a_2(-\kappa T + \tau B) + a_3'B + a_3(-\tau N)\Big) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big((a_1' - a_2\kappa)T + (a_1\kappa + a_2' - a_3\tau)N + (a_2\tau + a_3')B\Big)
\end{aligned}$$

olur. $\delta_1'(t)$, $\delta_1''(t)$ ve $\delta_1'''(t)$ vektörlerinin determinantı hesaplanırsa

$$\begin{aligned}
det(\delta_1', \delta_1'', \delta_1''') &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\Bigg((a_3\kappa - a_2\tau)(a_1' - a_2\kappa) + (a_3\kappa + a_1\tau)(a_1\kappa + a_2' - a_3\tau) \\
&\quad + (-a_2\kappa - a_1\kappa)(a_2\tau + a_3')\Bigg)
\end{aligned}$$

bulunur. (2.1.2) bağıntısından $\delta_1(t)$-Bezier Smarandache eğrisinin $\tau_{\delta_1}(t)$ burulması

$$\tau_{\delta_1} = \frac{\sqrt{2}\Big((a_3\kappa - a_2\tau)(a_1' - a_2\kappa) + (a_3\kappa + a_1\tau)(a_1\kappa + a_2' - a_3\tau) + (-a_2\kappa - a_1\kappa)(a_2\tau + a_3')\Big)}{\big(a_1^2 + a_2^2 + 2a_3^2 + 2a_1a_2\big)\kappa^2 + \big(a_1^2 + a_2^2\big)\tau^2 + \big(2a_1a_3 - 2a_2a_3\big)\kappa\tau}$$

şeklinde elde edilir.

Tanım 3.1.2 $P(t)$ kübik Bezier eğrisinin aslinormal vektörü N ve binormal vektörü B verilsin.

$$\delta_2(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(N + B)$$

şeklinde tanımlı $\delta_2(t)$ vektörünün çizdiği regüler eğriye δ_2- Bezier Smarandache eğrisi denir.

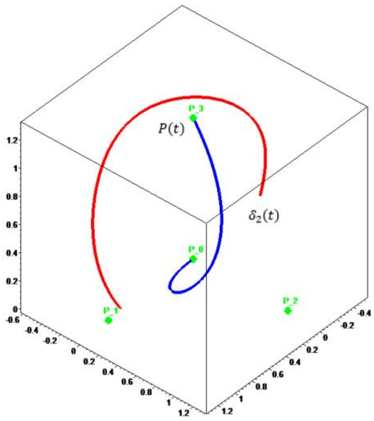
Bu tanımda N ve B vektörlerinin yerine Teorem 3.1.1' den karşılıkları yazılırsa $\delta_2(t)$-Smarandache eğrisinin ifadesi

$$\delta_2(t) = \left(\frac{11t^4 - 16t^3 + 9t^2 - 2t + t^2\sqrt{19t^4 - 36t^3 + 26t^2 - 8t + 1}}{\sqrt{2\left(266t^8 - 922t^7 + 1460t^6 - 1374t^5 + 841t^4 - 342t^3 + 90t^2 - 14t + 1\right)}}, \right.$$

$$\frac{\begin{array}{l} 8t^4 - 21t^3 + 18t^2 - 7t + 1 + 2t^2\sqrt{19t^4 - 36t^3 + 26t^2 - 8t + 1} \\ -t\sqrt{19t^4 - 36t^3 + 26t^2 - 8t + 1} \end{array}}{\sqrt{2\left(266t^8 - 922t^7 + 1460t^6 - 1374t^5 + 841t^4 - 342t^3 + 90t^2 - 14t + 1\right)}},$$

$$\left. \frac{\begin{array}{l} -9t^4 + 13t^3 - 6t^2 + t + 3t^2\sqrt{19t^4 - 36t^3 + 26t^2 - 8t + 1} \\ -3t\sqrt{19t^4 - 36t^3 + 26t^2 - 8t + 1} + \sqrt{19t^4 - 36t^3 + 26t^2 - 8t + 1} \end{array}}{\sqrt{2\left(266t^8 - 922t^7 + 1460t^6 - 1374t^5 + 841t^4 - 342t^3 + 90t^2 - 14t + 1\right)}} \right)$$

şeklinde olur. Eğriye ait grafik Şekil 3.2 de verilmiştir.



Şekil 3.2: δ_2-Bezier Smarandache eğrisi

Burada yeşil noktalar kontrol noktalarıdır. Mavi olan eğri $P(t)$ kübik Bezier eğrisi, kırmızı olan eğri ise $\delta_2(t)$-Bezier Smarandache eğrisidir.

Teorem 3.1.5 $\delta_2(t)$ Smarandache eğrisinin Frenet vektörleri $T_{\delta_2}, N_{\delta_2}, B_{\delta_2}$ olsun. Bu vektörler sırasıyla

$$T_{\delta_2}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\kappa^2 + 2\tau^2}}(-\kappa T - \tau N + \tau B),$$

$$N_{\delta_2}(t) = \frac{\begin{array}{c}\big(a_6\kappa\tau + 2a_4\tau^2 - a_5\kappa\tau\big)T + \big(a_5\kappa^2 - a_4\kappa\tau + a_6\tau^2 + a_5\tau^2\big)N \\ +\big(a_6\tau^2 + a_5\tau^2 + a_6\kappa^2 + a_4\kappa\tau\big)B\end{array}}{\sqrt{(\kappa^2+2\tau^2)\Big(\big(a_5^2+a_6^2\big)\kappa^2 + \big(2a_4^2+a_5^2+a_6^2+2a_5a_6\big)\tau^2 + \big(2a_4a_6-2a_4a_5\big)\kappa\tau\Big)}},$$

$$B_{\delta_2}(t) = \frac{\big(-a_6\tau - a_5\tau\big)T + \big(a_6\kappa + a_4\tau\big)N + \big(-a_5\kappa + a_4\tau\big)B}{\sqrt{\big(a_5^2+a_6^2\big)\kappa^2 + \big(2a_4^2+a_5^2+a_6^2+2a_5a_6\big)\tau^2 + \big(2a_4a_6-2a_4a_5\big)\kappa\tau}}$$

şeklinde verilir. Burada a_4, a_5 ve a_6

$$\begin{aligned} a_4 &= -\kappa' + \kappa\tau \\ &= \frac{2(3192t^7 - 9423t^6 + 12780t^5 - 10316t^4 + 5310t^3 - 1723t^2 + 322t - 26)}{9\sqrt{14t^4 - 22t^3 + 16t^2 - 6t + 1}\big(19t^4 - 36t^3 + 26t^2 - 8t + 1\big)^{\frac{5}{2}}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_5 &= -\kappa^2 - \tau' - \tau^2 \\ &= -\frac{1}{9\big(14t^4 - 22t^3 + 16t^2 - 6t + 1\big)^2} - \frac{4\big(14t^4 - 22t^3 + 16t^2 - 6t + 1\big)}{9\big(19t^4 - 36t^3 + 26t^2 - 8t + 1\big)^3} \\ &\quad + \frac{56t^3 - 66t^2 + 32t - 6}{3(14t^4 - 22t^3 + 16t^2 - 6t + 1)^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_6 &= -\tau^2 + \tau' \\ &= -\frac{168t^3 - 198t^2 + 96t - 17}{9\big(14t^4 - 22t^3 + 16t^2 - 6t + 1\big)^2} \end{aligned}$$

şeklinde birer katsayıdır.

İspat. δ_2 eğrisinin türevi alınır ve sonra da norm hesaplanırsa

$$\delta_2'(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(-\kappa T - \tau N + \tau B\big)\ ,$$

$$\|\delta_2'(t)\| = \sqrt{\frac{\kappa^2+2\tau^2}{2}}$$

olur. Bu ifade (2.1.1) de yerine yazılırsa $\delta_2(t)$-Bezier Smarandache eğrisinin T_{δ_2} teğet vektörü

$$T_{\delta_2}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\kappa^2+2\tau^2}}(-\kappa T - \tau N + \tau B)$$

şeklinde olur. $\delta_2'(t)$ den tekrar türev alınırsa $\delta_2''(t)$ vektörü

$$\begin{aligned}
\delta_2''(t) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\big(-\kappa' T - \kappa T' - \tau' N - \tau N' + \tau' B + \tau B'\big)\\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\big(-\kappa' T - \kappa(\kappa N) - \tau' N - \tau\big(-\kappa T + \tau B\big) + \tau' B + \tau(-\tau N)\big)\\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\big(-\kappa' T - \kappa^2 N - \tau' N + \kappa\tau T - \tau^2 B + \tau' B - \tau^2 N\big)\\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big((-\kappa' + \kappa\tau)T + (-\kappa^2 - \tau' - \tau^2)N + (-\tau^2 + \tau')B\Big)
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Burada çatı vektörlerinin katsayıları

$$a_4 = -\kappa' + \kappa\tau \ , \quad a_5 = -\kappa^2 - \tau' - \tau^2 \ , \quad a_6 = -\tau^2 + \tau'$$

şeklinde alınırsa $\delta_2''(t)$ vektörü

$$\delta_2''(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(a_4 T + a_5 B + a_6 B\big)$$

olur. $\delta_2'(t)$ ve $\delta_2''(t)$ vektörleri vektörel çarpılır ve norm hesaplanırsa

$$\delta_2'(t) \wedge \delta_2''(t) = \frac{1}{2}\Big((-a_6\tau - a_5\tau)T + (a_6\kappa + a_4\tau)N + (-a_5\kappa + a_4\tau)B\Big) \ ,$$

$$\|\delta_2'(t) \wedge \delta_2''(t)\| = \frac{1}{2}\sqrt{(a_5^2 + a_6^2)\kappa^2 + (2a_4^2 + a_5^2 + a_6^2 + 2a_5a_6)\tau^2 + (2a_4a_6 - 2a_4a_5)\kappa\tau}$$

bulunur. $\delta_2(t)$ eğrisinin $B_{\delta_2}(t)$ binormal vektörü ve $N_{\delta_2}(t)$ aslinormal vektörü sırasıyla

$$\begin{aligned}
B_{\delta_2}(t) &= \frac{\delta_2'(t)\wedge\delta_2''(t)}{\|\delta_2'(t)\wedge\delta_2''(t)\|}\\
&= \frac{\big(-a_6\tau-a_5\tau\big)T+\big(a_6\kappa+a_4\tau\big)N+\big(-a_5\kappa+a_4\tau\big)B}{\sqrt{\big(a_5^2+a_6^2\big)\kappa^2+\big(2a_4^2+a_5^2+a_6^2+2a_5a_6\big)\tau^2+\big(2a_4a_6-2a_4a_5\big)\kappa\tau}}\ ,\\
N_{\delta_2}(t) &= B_{\delta_2}\wedge T_{\delta_2}\\
&= \frac{\begin{array}{c}\big(a_6\kappa\tau+2a_4\tau^2-a_5\kappa\tau\big)T+\big(a_5\kappa^2-a_4\kappa\tau+a_6\tau^2+a_5\tau^2\big)N\\ +\big(a_6\tau^2+a_5\tau^2+a_6\kappa^2+a_4\kappa\tau\big)B\end{array}}{\sqrt{(\kappa^2+2\tau^2)\Big(\big(a_5^2+a_6^2\big)\kappa^2+\big(2a_4^2+a_5^2+a_6^2+2a_5a_6\big)\tau^2+\big(2a_4a_6-2a_4a_5\big)\kappa\tau\Big)}}
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

Teorem 3.1.6 $\delta_2(t)$-Bezier Smarandache eğrisinin κ_{δ_2} eğriliği ve τ_{δ_2} burulması sırasıyla

$$\kappa_{\delta_2} = \frac{\sqrt{2\Big(\big(a_5^2+a_6^2\big)\kappa^2+\big(2a_4^2+a_5^2+a_6^2+2a_5a_6\big)\tau^2+\big(2a_4a_6-2a_4a_5\big)\kappa\tau\Big)}}{\big(\kappa^2+2\tau^2\big)^{\frac{3}{2}}}\ ,$$

$$\tau_{\delta_2} = \frac{\begin{array}{c}\sqrt{2}\Big((-a_6\tau-a_5\tau)(a_4'-a_5\kappa)+(a_6\kappa+a_4\tau)(a_4\kappa+a_5'-a_6\tau)+\\ (-a_5\kappa+a_4\tau)(a_5\tau+a_6')\Big)\end{array}}{\big(a_5^2+a_6^2\big)\kappa^2+\big(2a_4^2+a_5^2+a_6^2+2a_5a_6\big)\tau^2+\big(2a_4a_6-2a_4a_5\big)\kappa\tau}$$

bağıntısıyla verilir.

İspat. (2.1.2) bağıntısından $\delta_2(t)$-Bezier Smarandache eğrisinin κ_{δ_2} eğriliği

$$\kappa_{\delta_2}(t) = \frac{\|\delta_2'(t) \wedge \delta_2''(t)\|}{\|\delta_2'(t)\|^3}$$

$$= \frac{\sqrt{2\Big(\big(a_5^2 + a_6^2\big)\kappa^2 + \big(2a_4^2 + a_5^2 + a_6^2 + 2a_5a_6\big)\tau^2 + \big(2a_4a_6 - 2a_4a_5\big)\kappa\tau\Big)}}{\big(\kappa^2 + 2\tau^2\big)^{\frac{3}{2}}}$$

olur. $\delta_2''(t)$ vektörünün türevi alınırsa

$$\begin{aligned}
\delta_2'''(t) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(a_4'T + a_4T' + a_5'N + a_5N' + a_6'B + a_6B'\Big) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(a_4'T + a_4(\kappa N) + a_2'N + a_5'N + a_5(-\kappa T + \tau B) + a_6'B + a_6(-\tau N)\Big) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big((a_4' - a_5\kappa)T + (a_4\kappa + a_5' - a_6\tau)N + (a_5\tau + a_6')B\Big)
\end{aligned}$$

bulunur. $\delta_2'(t)$, $\delta_2''(t)$ ve $\delta_2'''(t)$ vektörlerinin determinantı hesaplanırsa

$$\begin{aligned}
det(\delta_2', \delta_2'', \delta_2''') &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\Bigg((-a_6\tau - a_5\tau)(a_4' - a_5\kappa) + (a_6\kappa + a_4\tau)(a_4\kappa + a_5' - a_6\tau) \\
&\quad +(-a_5\kappa + a_4\tau)(a_5\tau + a_6')\Bigg)
\end{aligned}$$

olur. (2.1.2) bağıntısından $\delta_2(t)$-Bezier Smarandache eğrisinin $\tau_{\delta_2}(t)$ burulması

$$\begin{aligned}
\tau_{\delta_2}(t) &= \frac{\det(\delta_2'(t), \delta_2''(t), \delta_2'''(t))}{\|\delta_2'(t) \wedge \delta_2''(t)\|^2} \\
&= \frac{\sqrt{2}\Big((-a_6\tau - a_5\tau)(a_4' - a_5\kappa) + (a_6\kappa + a_4\tau)(a_4\kappa + a_5' - a_6\tau) + (-a_5\kappa + a_4\tau)(a_5\tau + a_6')\Big)}{\big(a_5^2 + a_6^2\big)\kappa^2 + \big(2a_4^2 + a_5^2 + a_6^2 + 2a_5a_6\big)\tau^2 + \big(2a_4a_6 - 2a_4a_5\big)\kappa\tau}
\end{aligned}$$

hesaplanmış olur.

Tanım 3.1.3 $P(t)$ kübik Bezier eğrisinin teğet vektörü T ve binormal vektörü B verilsin.

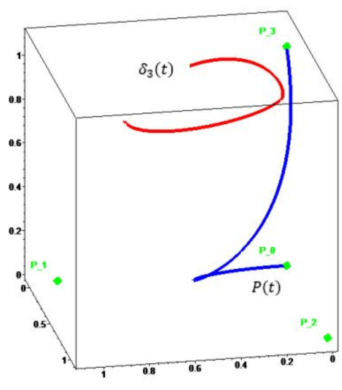
$$\delta_3(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(T + B)$$

şeklinde tanımlı $\delta_3(t)$ vektörünün çizdiği regüler eğriye δ_3- Bezier Smarandache eğrisi denir.

Bu tanımda T ve B vektörlerinin yerine Teorem 3.1.1' den karşılıkları yazılırsa $\delta_3(t)$-Smarandache eğrisinin ifadesi

$$\begin{aligned}\delta_3(t) \quad = \quad & \left(\frac{(3t^2-4t+1)\sqrt{14t^4-22t^3+16t^2-6t+1}+t^2\sqrt{19t^4-36t^3+26t^2-8t+1}}{\sqrt{2\Big(266t^8-922t^7+1460t^6-1374t^5+841t^4-342t^3+90t^2-14t+1\Big)}}, \right. \\ & \frac{(-3t^2-2t)\sqrt{14t^4-22t^3+16t^2-6t+1}+(2t^2-t)\sqrt{19t^4-36t^3+26t^2-8t+1}}{\sqrt{2\Big(266t^8-922t^7+1460t^6-1374t^5+841t^4-342t^3+90t^2-14t+1\Big)}}, \\ & \left. \frac{t^2\sqrt{14t^4-22t^3+16t^2-6t+1}+(3t^2-3t+1)\sqrt{19t^4-36t^3+26t^2-8t+1}}{\sqrt{2\Big(266t^8-922t^7+1460t^6-1374t^5+841t^4-342t^3+90t^2-14t+1\Big)}} \right)\end{aligned}$$

şeklinde olur. Eğriye ait grafik Şekil 3.3 de verilmiştir.



Şekil 3.3: δ_3-Bezier Smarandache eğrisi

Burada yeşil noktalar kontrol noktalarıdır. Mavi olan eğri $P(t)$ kübik Bezier eğrisi, kırmızı olan eğri ise $\delta_3(t)$-Bezier Smarandache eğrisidir.

Teorem 3.1.7 $\delta_3(t)$ Smarandache eğrisinin Frenet vektörleri $T_{\delta_3}, N_{\delta_3}, B_{\delta_3}$ olsun. Bu vektörler sırasıyla

$$\begin{aligned}
T_{\delta_3}(t) &= \frac{\kappa-\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}N, \\
N_{\delta_3}(t) &= \frac{\kappa-\tau}{\sqrt{(a_7^2+a_9^2)(\kappa^2+\tau^2)}}(a_7T+a_9B), \\
B_{\delta_3}(t) &= \frac{1}{\sqrt{a_7^2+a_9^2}}(a_9T-a_7B)
\end{aligned}$$

şeklinde verilir. Burada a_7, a_9

$$\begin{aligned}
a_7 &= -\kappa^2+\kappa\tau \\
&= \frac{2}{9\sqrt{14t^4-22t^3+16t^2-6t+1}(19t^4-36t^3+26t^2-8t+1)^{\frac{3}{2}}} \\
&\quad -\frac{4(14t^4-22t^3+16t^2-6t+1)}{9(19t^4-36t^3+26t^2-8t+1)^3},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_9 &= \kappa\tau-\tau^2 \\
&= -\frac{1}{9\big(14t^4-22t^3+16t^2-6t+1\big)^2} \\
&\quad +\frac{2}{9\sqrt{14t^4-22t^3+16t^2-6t+1}\big(19t^4-36t^3+26t^2-8t+1\big)^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}$$

şeklinde birer katsayıdır.

İspat. δ_3 eğrisinin türevi alınır ve sonra da norm hesaplanırsa

$$\delta_3'(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\kappa - \tau\big)N$$

$$\|\delta_3'(t)\| = \sqrt{\frac{\kappa^2+\tau^2}{2}}$$

olur. Bu ifade (2.1.1) de yerine yazılırsa $\delta_3(t)$-Bezier Smarandache eğrisinin T_{δ_3} teğet vektörü

$$T_{\delta_3}(t) = \frac{\kappa - \tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}N$$

şeklinde olur. $\delta_3'(t)$' den tekrar türev alınırsa $\delta_3''(t)$ vektörü

$$\begin{aligned}
\delta_3''(t) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\kappa' N + \kappa N' - \tau' N - \tau N'\big) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\kappa' N + \kappa\big(-\kappa T + \tau B\big) - \tau' N - \tau\big(-\kappa T + \tau B\big)\big) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\kappa' N - \kappa^2 T + \kappa\tau B - \tau' N + \kappa\tau T - \tau^2 B\big) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big((-\kappa^2+\kappa\tau)T + (\kappa'-\tau')N + (\kappa\tau-\tau^2)B\Big)
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Burada çatı vektörlerinin katsayıları

$$a_7 = -\kappa^2 + \kappa\tau\ , \quad a_8 = -\kappa' - \tau'\ , \quad a_9 \;=\; \kappa\tau - \tau^2$$

şeklinde alınırsa $\delta_3''(t)$ vektörünün ifadesi

$$\delta_3''(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(a_7 T + a_8 B + a_9 B\big)$$

olur. $\delta_3'(t)$ ve $\delta_3''(t)$ vektörleri vektörel çarpılır ve norm alınırsa

$$\delta_3'(t) \wedge \delta_3''(t) \;=\; \frac{1}{2}\Big(a_9(\kappa-\tau)T - a_7(\kappa-\tau)B\Big)\ ,$$

$$\|\delta_3'(t) \wedge \delta_3''(t)\| = \frac{(\kappa-\tau)}{2}\sqrt{a_7^2 + a_9^2}$$

olur. $\delta_3(t)$ eğrisinin $B_{\delta_3}(t)$ binormal vektörü

$$\begin{aligned} B_{\delta_3}(t) &= \frac{\delta_3'(t) \wedge \delta_3''(t)}{\|\delta_3'(t) \wedge \delta_3''(t)\|} \\ &= \frac{1}{\sqrt{a_7^2 + a_9^2}}(a_9 T - a_7 B) \end{aligned}$$

şeklinde olur. $\delta_3(t)$ eğrisinin $N_{\delta_3}(t)$ aslinormal vektörü

$$\begin{aligned} N_{\delta_3} &= B_{\delta_3} \wedge T_{\delta_3} \\ &= \frac{\kappa - \tau}{\sqrt{(a_7^2 + a_9^2)(\kappa^2 + \tau^2)}}(a_7 T + a_9 B) \end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

Teorem 3.1.8 $\delta_3(t)$-Bezier Smarandache eğrisinin κ_{δ_3} eğriliği ve τ_{δ_3} burulması sırasıyla

$$\begin{aligned} \kappa_{\delta_3} &= \frac{\big(\kappa - \tau\big)\sqrt{2(a_7^2 + a_9^2)}}{\big(\kappa^2 + \tau^2\big)^{\frac{3}{2}}}, \\ \tau_{\delta_3} &= \frac{\sqrt{2}\Big(a_9(a_7' - a_8\kappa) - a_7(a_8\tau + a_9')\Big)}{(\kappa - \tau)(a_7^2 + a_9^2)} \end{aligned}$$

şeklinde verilir.

İspat. (2.1.2) bağıntısından $\delta_3(t)$-Bezier Smarandache eğrisinin κ_{δ_3} eğriliği

$$\begin{aligned} \kappa_{\delta_3}(t) &= \frac{\|\delta_3'(t) \wedge \delta_3''(t)\|}{\|\delta_3'(t)\|^3} \\ &= \frac{\big(\kappa - \tau\big)\sqrt{2(a_7^2 + a_9^2)}}{\big(\kappa^2 + \tau^2\big)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

şeklinde bulunur. $\delta_3''(t)$ vektörünün türevi alınırsa

$$\begin{aligned}
\delta_3'''(t) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(a_7'T + a_7T' + a_8'N + a_8N' + a_9'B + a_9B'\Big) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(a_7'T + a_7(\kappa N) + a_8'N + a_8(-\kappa T + \tau B) + a_9'B + a_9(-\tau N)\Big) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big((a_7' - a_8\kappa)T + (a_7\kappa + a_8' - a_9\tau)N + (a_8\tau + a_9')B\Big)
\end{aligned}$$

olur. $\delta_3'(t)$, $\delta_3''(t)$ ve $\delta_3'''(t)$ vektörlerinin determinantı hesaplanırsa

$$det(\delta_3', \delta_3'', \delta_3''') = \frac{1}{2\sqrt{2}}(\kappa - \tau)\Bigg(a_9(a_7' - a_8\kappa) - a_7(a_8\tau + a_9')\Bigg)$$

şeklinde bulunur. (2.1.2) bağıntısından $\delta_3(t)$-Bezier Smarandache eğrisinin $\tau_{\delta_3}(t)$ burulması

$$\begin{aligned}
\tau_{\delta_3}(t) &= \frac{\det(\delta_3'(t), \delta_3''(t), \delta_3'''(t))}{\|\delta_3'(t) \wedge \delta_3''(t)\|^2} \\
&= \frac{\sqrt{2}\Bigg(a_9(a_7' - a_8\kappa) - a_7(a_8\tau + a_9')\Bigg)}{(\kappa - \tau)(a_7^2 + a_9^2)}
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

Tanım 3.1.4 $P(t)$ kübik Bezier eğrisinin teğet vektörü T aslinormal vektörü N ve binormal vektörü B verilsin.

$$\delta_4(t) = \frac{1}{\sqrt{3}}(T + N + B)$$

şeklinde tanımlı $\delta_4(t)$ vektörünün çizdiği regüler eğriye δ_4- Bezier Smarandache eğrisi denir.

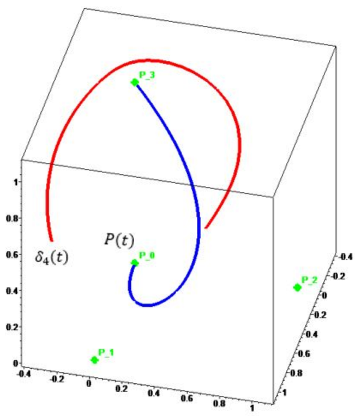
Bu tanımda T , N ve B vektörlerinin yerine Teorem 3.1.1' den karşılıkları yazılırsa $\delta_4(t)$-Smarandache eğrisinin ifadesi

$$\delta_4(t) = \left(\frac{\begin{array}{l} 11t^4 - 16t^3 + 9t^2 - 2t + t^2\sqrt{19t^4 - 36t^3 + 26t^2 - 8t + 1} \\ +3t^2\sqrt{14t^4 - 22t^3 + 16t^2 - 6t + 1} - 4t\sqrt{14t^4 - 22t^3 + 16t^2 - 6t + 1} \\ +\sqrt{14t^4 - 22t^3 + 16t^2 - 6t + 1} \end{array}}{\sqrt{3\Big(266t^8 - 922t^7 + 1460t^6 - 1374t^5 + 841t^4 - 342t^3 + 90t^2 - 14t + 1\Big)}}, \right.$$

$$\frac{\begin{array}{l} 8t^4 - 21t^3 + 18t^2 - 7t + 1 + 2t^2\sqrt{19t^4 - 36t^3 + 26t^2 - 8t + 1} \\ -3t^2\sqrt{14t^4 - 22t^3 + 16t^2 - 6t + 1} \\ -t\sqrt{19t^4 - 36t^3 + 26t^2 - 8t + 1} + 2t\sqrt{14t^4 - 22t^3 + 16t^2 - 6t + 1} \end{array}}{\sqrt{3\Big(266t^8 - 922t^7 + 1460t^6 - 1374t^5 + 841t^4 - 342t^3 + 90t^2 - 14t + 1\Big)}},$$

$$\left. \frac{\begin{array}{l} -9t^4 + 13t^3 - 6t^2 + t + 3t^2\sqrt{19t^4 - 36t^3 + 26t^2 - 8t + 1} \\ +t^2\sqrt{14t^4 - 22t^3 + 16t^2 - 6t + 1} \\ -3t\sqrt{19t^4 - 36t^3 + 26t^2 - 8t + 1} + \sqrt{19t^4 - 36t^3 + 26t^2 - 8t + 1} \end{array}}{\sqrt{3\Big(266t^8 - 922t^7 + 1460t^6 - 1374t^5 + 841t^4 - 342t^3 + 90t^2 - 14t + 1\Big)}} \right)$$

şeklinde olur. Eğriye ait grafik Şekil 3.4 de verilmiştir.



Şekil 3.4: δ_4-Bezier Smarandache eğrisi

Burada yeşil noktalar kontrol noktalarıdır.Mavi olan eğri $P(t)$ kübik Bezier eğrisi, kırmızı olan eğri ise $\delta_4(t)$-Bezier Smarandache eğrisidir.

Teorem 3.1.9 $\delta_4(t)$ Smarandache eğrisinin Frenet vektörleri $T_{\delta_4}, N_{\delta_4}, B_{\delta_4}$ olsun. Bu vektörler sırasıyla

$$T_{\delta_4}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\kappa^2 + 2\tau^2 - 2\kappa\tau}}(-\kappa T + (\kappa - \tau)N + \tau B),$$

$$N_{\delta_4}(t) = \frac{\begin{array}{l} \big((a_{10} + a_{11})\kappa^2 + 2a_{10}\tau^2 - (2a_{10} + a_{11})\kappa\tau\big)T \\ +\big((a_{10} + a_{11})\kappa^2 + (a_{11} + a_{12})\tau^2 - (a_{10} + a_{12})\kappa\tau\big)N \\ +\big(2a_{12}\kappa^2 + (a_{11} + a_{12})\tau^2 + (a_{10} - a_{11} - 2a_{12})\kappa\tau\big)B \end{array}}{\sqrt{\left(\begin{array}{l} \big(a_{11}^2 + a_{12}^2\big)\kappa^2 + \big(a_{10}^2 + a_{11}^2\big)\tau^2 + \big(2a_{10}a_{12}\big)\kappa\tau \\ +\big(2a_{10}a_{11}\kappa - 2a_{11}a_{12}\tau\big)(\kappa - \tau) + \big(a_{10}^2 + a_{12}^2\big)(\kappa - \tau)^2 \end{array}\right)(2\kappa^2 + 2\tau^2 - 2\kappa\tau)}},$$

$$B_{\delta_4}(t) = \frac{\big(a_{12}(\kappa - \tau) - a_{11}\tau\big)T + \big(a_{12}\kappa + a_{10}\tau\big)N + \big(-a_{11}\kappa - a_{10}(\kappa - \tau)\big)B}{\sqrt{\begin{array}{l} \big(a_{11}^2 + a_{12}^2\big)\kappa^2 + \big(a_{10}^2 + a_{11}^2\big)\tau^2 + 2a_{10}a_{12}\kappa\tau \\ +\big(2a_{10}a_{11}\kappa - 2a_{11}a_{12}\tau\big)(\kappa - \tau) + \big(a_{10}^2 + a_{12}^2\big)\big(\kappa - \tau\big)^2 \end{array}}}$$

şeklinde verilir. Burada a_{10}, a_{11}, a_{12}

$$\begin{aligned} a_{10} &= -\kappa' - \kappa^2 + \kappa\tau \\ &= \frac{2}{9\sqrt{14t^4 - 22t^3 + 16t^2 - 6t + 1}\big(19t^4 - 36t^3 + 26t^2 - 8t + 1\big)^{\frac{3}{2}}} \\ &\quad - \frac{4\big(14t^4 - 22t^3 + 16t^2 - 6t + 1\big)}{9\big(19t^4 - 36t^3 + 26t^2 - 8t + 1\big)^3} - \frac{56t^3 - 66t^2 + 32t - 6}{3\sqrt{14t^4 - 22t^3 + 16t^2 - 6t + 1}\big(19t^4 - 36t^3 + 26t^2 - 8t + 1\big)^{\frac{3}{2}}} \\ &\quad + \frac{\sqrt{14t^4 - 22t^3 + 16t^2 - 6t + 1}\big(76t^3 - 108t^2 + 52t - 8\big)}{\big(19t^4 - 36t^3 + 26t^2 - 8t + 1\big)^{\frac{5}{2}}} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
a_{11} &= -\kappa^2+\kappa'-\tau'-\tau^2 \\
&= -\frac{1}{9\left(14t^4-22t^3+16t^2-6t+1\right)^2}-\frac{4\left(14t^4-22t^3+16t^2-6t+1\right)}{9\left(19t^4-36t^3+26t^2-8t+1\right)^3} \\
&\quad+\frac{56t^3-66t^2+32t-6}{3\sqrt{14t^4-22t^3+16t^2-6t+1}\left(19t^4-36t^3+26t^2-8t+1\right)^{\frac{3}{2}}} \\
&\quad-\frac{\sqrt{14t^4-22t^3+16t^2-6t+1}\left(76t^3-108t^2+52t-8\right)}{\left(19t^4-36t^3+26t^2-8t+1\right)^{\frac{5}{2}}} \\
&\quad+\frac{56t^3-66t^2+32t-6}{3\left(14t^4-22t^3+16t^2-6t+1\right)^2},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a_{12} &= \kappa\tau-\tau^2+\tau' \\
&= -\frac{1}{9\left(14t^4-22t^3+16t^2-6t+1\right)^2} \\
&\quad+\frac{2}{9\sqrt{14t^4-22t^3+16t^2-6t+1}\left(19t^4-36t^3+26t^2-8t+1\right)^{\frac{3}{2}}} \\
&\quad-\frac{56t^3-66t^2+32t-6}{3\left(14t^4-22t^3+16t^2-6t+1\right)^2}
\end{aligned}
$$

şeklinde birer katsayıdır.

İspat. δ_4 eğrisinin türevi alınır ve sonra da norm hesaplanırsa

$$\delta_4'(t)=\frac{1}{\sqrt{3}}\big(-\kappa T+(\kappa-\tau)N+\tau B\big)\ ,$$

$$\|\delta_4'(t)\|=\sqrt{\frac{2\kappa^2+2\tau^2-\kappa\tau}{3}}$$

olur. Bu ifadeler (2.1.1) de yerine yazılırsa $\delta_4(t)$-Bezier Smarandache eğrisinin T_{δ_4} teğet vektörü

$$T_{\delta_4}(t)=\frac{1}{\sqrt{2\kappa^2+2\tau^2-2\kappa\tau}}(-\kappa T+(\kappa-\tau)N+\tau B)$$

şeklinde olur. $\delta_4'(t)$' den tekrar türev alınırsa $\delta_4''(t)$ vektörü

$$\begin{aligned}
\delta_4''(t) &= \frac{1}{\sqrt{3}}\big(-\kappa'T-\kappa T'+(\kappa'-\tau')N+(\kappa-\tau)N'+\tau'B+\tau B'\big)\\
&= \frac{1}{\sqrt{3}}\big(-\kappa'T-\kappa(\kappa N)+(\kappa'-\tau')N+(\kappa-\tau)\big(-\kappa T+\tau B\big)+\tau'B+\tau(-\tau N)\big)\\
&= \frac{1}{\sqrt{3}}\big(-\kappa'T-\kappa^2N+(\kappa'-\tau')N-\kappa^2T+\kappa\tau B-\tau^2B+\tau'B-\tau^2N\big)\\
&= \frac{1}{\sqrt{3}}\Big((-\kappa'-\kappa^2+\kappa\tau)T+(-\kappa^2+\kappa'-\tau'-\tau^2)N+(\kappa\tau-\tau^2+\tau')B\Big)
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Burada çatı vektörlerinin katsayıları

$$a_{10}=-\kappa'-\kappa^2+\kappa\tau\ , \quad a_{11}=-\kappa^2+\kappa'-\tau'-\tau^2\ , \quad a_{12} \ = \ \kappa\tau-\tau^2+\tau'$$

şeklinde alınırsa $\delta_4''(t)$ vektörünün ifadesi

$$\delta_4''(t)=\frac{1}{\sqrt{3}}\big(a_{10}T+a_{11}B+a_{12}B\big)$$

olur. $\delta_4'(t)$ ve $\delta_4''(t)$ vektörleri vektörel çarpılır ve sonra da norm hesaplanırsa

$$\delta_4'(t)\wedge\delta_4''(t) \ = \ \frac{1}{3}\Big((a_{12}(\kappa-\tau)-a_{11}\tau)T+(a_{12}\kappa+a_{10}\tau)N+(-a_{11}\kappa-a_{10}(\kappa-\tau))B\Big)$$

olur.

$$\|\delta_4'(t)\wedge\delta_4''(t)\|=\frac{1}{3}\sqrt{\begin{array}{l}(a_{11}^2+a_{12}^2)\kappa^2+(a_{10}^2+a_{11}^2)\tau^2+(a_{10}^2+a_{12}^2)(\kappa-\tau)^2\\ +(2a_{10}a_{11}\kappa-2a_{11}a_{12}\tau)(\kappa-\tau)+2a_{10}a_{12}\kappa\tau\end{array}}$$

olur. $\delta_4(t)$ eğrisinin $B_{\delta_4}(t)$ binormal vektörü

$$\begin{aligned}
B_{\delta_4}(t) &= \frac{\delta_4'(t)\wedge\delta_4''(t)}{\|\delta_4'(t)\wedge\delta_4''(t)\|}\\
&= \frac{\big(a_{12}(\kappa-\tau)-a_{11}\tau\big)T+\big(a_{12}\kappa+a_{10}\tau\big)N+\big(-a_{11}\kappa-a_{10}(\kappa-\tau)\big)B}{\sqrt{\begin{array}{l}\big(a_{11}^2+a_{12}^2\big)\kappa^2+\big(a_{10}^2+a_{11}^2\big)\tau^2+2a_{10}a_{12}\kappa\tau\\ +\big(2a_{10}a_{11}\kappa-2a_{11}a_{12}\tau\big)(\kappa-\tau)+\big(a_{10}^2+a_{12}^2\big)\big(\kappa-\tau\big)^2\end{array}}}
\end{aligned}$$

şeklinde olur. $\delta_4(t)$ eğrisinin $N_{\delta_4}(t)$ aslinormal vektörü

$$N_{\delta_4}(t) = \frac{\begin{array}{l}\big((a_{10}+a_{11})\kappa^2+2a_{10}\tau^2-(2a_{10}+a_{11})\kappa\tau\big)T \\ +\big((a_{10}+a_{11})\kappa^2+(a_{11}+a_{12})\tau^2-(a_{10}+a_{12})\kappa\tau\big)N \\ +\big(2a_{12}\kappa^2+(a_{11}+a_{12})\tau^2+(a_{10}-a_{11}-2a_{12})\kappa\tau\big)B\end{array}}{\sqrt{\left(\begin{array}{l}\big(a_{11}^2+a_{12}^2\big)\kappa^2+\big(a_{10}^2+a_{11}^2\big)\tau^2+\big(2a_{10}a_{12}\big)\kappa\tau \\ +\big(2a_{10}a_{11}\kappa-2a_{11}a_{12}\tau\big)(\kappa-\tau)+\big(a_{10}^2+a_{12}^2\big)(\kappa-\tau)^2\end{array}\right)(2\kappa^2+2\tau^2-2\kappa\tau)}}$$

elde edilir.

Teorem 3.1.10 $\delta_4(t)$-Bezier Smarandache eğrisinin κ_{δ_4} eğriliği ve τ_{δ_4} burulması sırasıyla

$$\kappa_{\delta_4} = \frac{\sqrt{\begin{array}{l}3\Big(\big(a_{11}^2+a_{12}^2\big)\kappa^2+\big(a_{10}^2+a_{11}^2\big)\tau^2+\big(a_{10}^2+a_{12}^2\big)\big(\kappa-\tau\big)^2 \\ +\big(2a_{10}a_{11}\kappa-2a_{11}a_{12}\tau\big)(\kappa-\tau)+2a_{10}a_{12}\kappa\tau\Big)\end{array}}}{\big(2\kappa^2+2\tau^2-2\kappa\tau\big)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\tau_{\delta_4} = \frac{\begin{array}{l}\sqrt{3}\Big((a'_{10}-a_{11}\kappa)(a_{12}(\kappa-\tau)-a_{11}\tau)+(a_{12}\kappa+a_{10}\tau)(a_{10}\kappa+a'_{11}-a_{12}\tau) \\ +\big(-a_{11}\kappa-a_{10}(\kappa-\tau)\big)(-a_{11}\tau+a'_{12})\Big)\end{array}}{\left(\begin{array}{l}(a_{11}^2+a_{12}^2)\kappa^2+(a_{10}^2+a_{11}^2)\tau^2+2a_{10}a_{12}\kappa\tau+(2a_{10}a_{11}\kappa-2a_{11}a_{12}\tau)(\kappa-\tau) \\ +(a_{10}^2+a_{12}^2)(\kappa-\tau)^2\end{array}\right)}$$

şeklinde verilir.

İspat. (2.1.2) bağıntısından $\delta_4(t)$-Bezier Smarandache eğrisinin κ_{δ_4} eğriliği

$$\begin{aligned}
\kappa_{\delta_4}(t) &= \frac{\|\delta_4'(t)\wedge\delta_4''(t)\|}{\|\delta_4'(t)\|^3}\\
&= \frac{\sqrt{\begin{array}{l}3\Big(\big(a_{11}^2+a_{12}^2\big)\kappa^2+\big(a_{10}^2+a_{11}^2\big)\tau^2+\big(a_{10}^2+a_{12}^2\big)\big(\kappa-\tau\big)^2\\ +\big(2a_{10}a_{11}\kappa-2a_{11}a_{12}\tau\big)(\kappa-\tau)+2a_{10}a_{12}\kappa\tau\Big)\end{array}}}{\big(2\kappa^2+2\tau^2-2\kappa\tau\big)^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}$$

olur. $\delta_4''(t)$ vektörünün türevi alınırsa

$$\begin{aligned}
\delta_4'''(t) &= \frac{1}{\sqrt{3}}\Big(a_{10}'T+a_{10}T'+a_{11}'N+a_{11}N'+a_{12}'B+a_{12}B'\Big)\\
&= \frac{1}{\sqrt{3}}\Big(a_{10}'T+a_{10}(\kappa N)+a_{11}'N+a_{11}(-\kappa T+\tau B)+a_{12}'B+a_{12}(-\tau N)\Big)\\
&= \frac{1}{\sqrt{3}}\Big((a_{10}'-a_{11}\kappa)T+(a_{10}\kappa+a_{11}'-a_{12}\tau)N+(-a_{11}\tau+a_{12}')B\Big)
\end{aligned}$$

bulunur. $\delta_4'(t)$, $\delta_4''(t)$ ve $\delta_4'''(t)$ vektörlerinin determinantı hesaplanırsa

$$det(\delta_4',\delta_4'',\delta_4''') = \frac{1}{3\sqrt{3}}\left(\begin{array}{l}(a_{10}'-a_{11}\kappa)(a_{12}(\kappa-\tau)-a_{11}\tau)\\ +(a_{12}\kappa+a_{10}\tau)(a_{10}\kappa+a_{11}'-a_{12}\tau)\\ +(-a_{11}\kappa-a_{10}(\kappa-\tau))(-a_{11}\tau+a_{12}')\end{array}\right)$$

şeklinde bulunur. (2.1.2) bağıntısından $\delta_4(t)$-Bezier Smarandache eğrisinin $\tau_{\delta_4}(t)$ burulması

$$\begin{aligned}
\tau_{\delta_4}(t) &= \frac{\det(\delta_4'(t),\delta_4''(t),\delta_4'''(t))}{\|\delta_4'(t)\wedge\delta_4''(t)\|^2}\\
&= \frac{\begin{array}{l}\sqrt{3}\Big((a_{10}'-a_{11}\kappa)(a_{12}(\kappa-\tau)-a_{11}\tau)+(a_{12}\kappa+a_{10}\tau)(a_{10}\kappa+a_{11}'-a_{12}\tau)\\ +\big(-a_{11}\kappa-a_{10}(\kappa-\tau)\big)(-a_{11}\tau+a_{12}')\Big)\end{array}}{\left(\begin{array}{l}(a_{11}^2+a_{12}^2)\kappa^2+(a_{10}^2+a_{11}^2)\tau^2+2a_{10}a_{12}\kappa\tau+(2a_{10}a_{11}\kappa-2a_{11}a_{12}\tau)(\kappa-\tau)\\ +(a_{10}^2+a_{12}^2)(\kappa-\tau)^2\end{array}\right)}
\end{aligned}$$

elde edilir.

3.2 $P(t)$ Kübik Bezier Eğrisinin Alternatif Vektörlerinden Elde Edilen Smarandache Eğrileri

Bu bölümde $P(t)$ kübik Bezier eğrisinin alternatif çatı vektörleri oluşturulacak ve sonra da Smarandache eğrileri tanımlanacaktır. Daha sonra her bir Smarandache eğrisinin Frenet vektörleri ve eğrilikleri hesaplanacaktır.

Teorem 3.2.1 $P(t)$ eğrisinin alternatif çatı vektörleri N, C, W olsun. Bu vektörler sırasıyla

$$N(t) = \frac{(11t^4 - 16t^3 + 9t^2 - 2t, 8t^4 - 21t^3 + 18t^2 - 7t + 1, -9t^4 + 13t^3 - 6t^2 + t)}{\sqrt{\left(266t^8 - 922t^7 + 1460t^6 - 1374t^5 + 841t^4 - 342t^3 + 90t^2 - 14t + 1\right)}}|$$

$$C(t) = \frac{\dfrac{(3t^2 - 4t + 1, -3t^2 + 2t, t^2)}{\sqrt{19t^4 - 36t^3 + 26t^2 - 8t + 1}} + (2t^2, 4t^2 - 2t, -6t + 2)}{\sqrt{\dfrac{4(14t^4 - 22t^3 + 16t^2 - 6t + 1)^3 + (19t^4 - 36t^3 + 26t^2 - 8t + 1)^3}{(19t^4 - 36t^3 + 26t^2 - 8t + 1)^3(14t^4 - 22t^3 + 16t^2 - 6t + 1)^2}}}$$

$$W(t) = \frac{\begin{array}{c}\left(14t^4 - 22t^3 + 16t^2 - 6t + 1)^2(19t^4 - 36t^3 + 26t^2 - 8t + 1)^3\right) \\ \cdot\left(\dfrac{\left(3t^2 - 4t + 1, -3t^2 + 2t, t^2\right)}{\sqrt{19t^4 - 36t^3 + 26t^2 - 8t + 1}} + \dfrac{2(t^2, 2t^2 - t, 3t^2 - 3t + 1)}{(19t^4 - 36t^3 + 26t^2 - 8t + 1)^3}\right)\end{array}}{\sqrt{(19t^4 - 36t^3 + 26t^2 - 8t + 1)^3 + 4(14t^4 - 22t^3 + 16t^2 - 6t + 1)^3}}$$

bağıntısıyla verilir.

İspat. N , P(t) kübik Bezier eğrisinin aslinormal vektörüdür. (2.2.5) bağıntısı, Teorem 3.1.1 ve Teorem 3.1.2' den C ve W vektörleri sırasıyla

$$C(t) = -\frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}T + \frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}B$$

$$= \frac{\dfrac{(3t^2 - 4t + 1, -3t^2 + 2t, t^2)}{\sqrt{19t^4 - 36t^3 + 26t^2 - 8t + 1}} + (2t^2, 4t^2 - 2t, -6t + 2)}{\sqrt{\dfrac{4(14t^4 - 22t^3 + 16t^2 - 6t + 1)^3 + (19t^4 - 36t^3 + 26t^2 - 8t + 1)^3}{(19t^4 - 36t^3 + 26t^2 - 8t + 1)^3(14t^4 - 22t^3 + 16t^2 - 6t + 1)^2}}},$$

olur. Benzer şekilde

$$W(t) = \frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}T + \frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}B$$

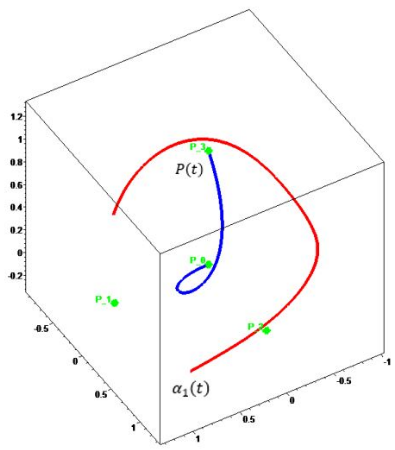
$$= \frac{\left(14t^4-22t^3+16t^2-6t+1)^2(19t^4-36t^3+26t^2-8t+1\right)^3 \cdot \left(\frac{\left(3t^2-4t+1,-3t^2+2t,t^2\right)}{\sqrt{19t^4-36t^3+26t^2-8t+1}} + \frac{2(t^2,2t^2-t,3t^2-3t+1)}{(19t^4-36t^3+26t^2-8t+1)^3}\right)}{\sqrt{(19t^4-36t^3+26t^2-8t+1)^3+4(14t^4-22t^3+16t^2-6t+1)^3}}$$

şeklinde bulunur.

Tanım 3.2.1 Kübik Bezier eğrisinin alternatif çatı vektörleri $\{N, C, W\}$ olsun.

$$\alpha_1(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(N+C)$$

şeklinde tanımlı $\alpha_1(t)$ vektörünün çizdiği regüler eğriye α_1-Bezier Smarandache eğrisi denir. Eğriye ait grafik Şekil 3.5 de verilmiştir.



Şekil 3.5: α_1-Bezier Smarandache eğrisi

Şekildeki yeşil noktalar kontrol noktaları, mavi olan eğri $P(t)$ kübik Bezier eğrisi ve kırmızı olan eğri ise $\alpha_1(t)$-Bezier Smarandache eğrisidir.

Teorem 3.2.2 $\alpha_1(t)$ Smarandache eğrisinin Frenet vektörleri $T_{\alpha_1}, N_{\alpha_1}, B_{\alpha_1}$ olsun. Bu vektörler sırasıyla

$$T_{\alpha_1}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\beta^2+\gamma^2}}(-\beta N + \beta C + \gamma W),$$

$$N_{\alpha_1}(t) = \frac{\begin{array}{l}\big((\gamma^2+\beta^2)\sigma_1 + \beta^2\sigma_2 + \sigma\beta\sigma_3\big)N \\ +\big(\beta^2\sigma_1 + (\gamma^2+\beta^2)\sigma_2 - \gamma\beta\sigma_3\big)C \\ +\big(2\beta^2\sigma_3 + \gamma\beta(\sigma_1-\sigma_2)\big)W\end{array}}{\sqrt{(2\beta^2+\gamma^2)\Big((\beta\sigma_3-\gamma\sigma_2)^2 + (\beta\sigma_3+\gamma\sigma_1)^2 + \beta^2(\sigma_1+\sigma_2)^2\Big)}}$$

$$B_{\alpha_1}(t) = \frac{\big(\beta\sigma_3-\gamma\sigma_2\big)N + \big(\beta\sigma_3+\gamma\sigma_1\big)C - \beta\big(\sigma_1+\sigma_2\big)W}{\sqrt{\big(\beta\sigma_3-\gamma\sigma_2\big)^2 + \big(\beta\sigma_3+\gamma\sigma_1\big)^2 + \beta^2\big(\sigma_1+\sigma_2\big)^2}}$$

şeklinde verilir. Burada γ , β, σ_1, σ_2 ve σ_3

$$\begin{aligned}\gamma &= \frac{\kappa^2}{\kappa^2+\tau^2}\Big(\frac{\tau}{\kappa}\Big)' \\ &= \frac{\begin{array}{l}4(28\,t^3-33\,t^2+16\,t-3)(14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1)^{\frac{3}{2}} \\ (19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^{\frac{5}{2}}\end{array}}{\begin{array}{l}(1064\,t^7-3141\,t^6+4260\,t^5-3445\,t^4+1782\,t^3-583\,t^2+110\,t-9) \\ (17835\,t^{12}-90732\,t^{11}+220974\,t^{10}-337000\,t^9+356175\,t^8-274008\,t^7+157308\,t^6 \\ -68064\,t^5+22125\,t^4-5300\,t^3+894\,t^2-96t+5)\end{array}},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta &= \sqrt{\kappa^2+\tau^2} \\ &= \frac{\begin{array}{l}(17835\,t^{12}-90732\,t^{11}+220974\,t^{10}-337000\,t^9+356175\,t^8-274008\,t^7+157308\,t^6 \\ -68064\,t^5+22125\,t^4-5300\,t^3+894\,t^2-96\,t+5)\end{array}}{3\sqrt{(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^3(14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1)^2}}\end{aligned}$$

$$\sigma_1 = (-\beta' - \beta^2)$$

$$= -\frac{1}{9((14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1)^2)} - \frac{4(14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1)}{9(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^3}$$

$$+\frac{\left(\begin{array}{c}\dfrac{2(56\,t^3-66\,t^2+32\,t-6)}{(14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1)^3} - \dfrac{4(56\,t^3-66\,t^2+32\,t-6)}{(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^3}\\ +\dfrac{12(14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1)(76\,t^3-108\,t^2+52\,t-8)}{(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^4}\end{array}\right)}{6\sqrt{\dfrac{(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^3+4(14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1)^3}{(14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1)^2(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^3}}}$$

$$\sigma_2 = (\beta' - \beta^2 - \gamma^2)$$

$$= -\frac{1}{9(14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1)^2} - \frac{4(14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1)}{9(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^3}$$

$$-\frac{16(56\,t^3-66\,t^2+32\,t-6)^2}{\left(\begin{array}{l}729(14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1)^2(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^6\\ \cdot\left(\dfrac{1}{9(14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1)^2}+\dfrac{4(14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1)}{9(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^3}\right)^2\\ \cdot\left(\dfrac{56\,t^3-66\,t^2+32\,t-6}{3\sqrt{14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1}(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^{\frac{3}{2}}}\right.\\ \left.-\dfrac{\sqrt{14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1}(76\,t^3-108\,t^2+52\,t-8)}{(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^{\frac{5}{2}}}\right)^2\end{array}\right)}$$

$$+\frac{\left(\begin{array}{c}-\dfrac{2(56\,t^3-66\,t^2+32\,t-6)}{(14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1)^3} + \dfrac{4(56\,t^3-66\,t^2+32\,t-6)}{(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^3}\\ -\dfrac{12(14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1)(76\,t^3-108\,t^2+52\,t-8)}{(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^4}\end{array}\right)}{6\sqrt{\dfrac{(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^3+4(14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1)^3}{(14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1)^2(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^3}}}$$

$$\sigma_3 = (\beta\gamma + \gamma')$$

$$= \frac{-4\sqrt{\frac{1}{(14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1)^2}+\frac{4(14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1)}{(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^3}}\cdot\big(56\,t^3-66\,t^2+32\,t-6\big)}{\left(\begin{array}{l}81(14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1)(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^3\\ \cdot\left(\frac{1}{9(14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1)^2}+\frac{4(14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1)}{9(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^3}\right)\\ \cdot\left(\frac{56\,t^3-66\,t^2+32\,t-6}{3\sqrt{14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1}(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^{\frac{3}{2}}}\right.\\ \quad\left.-\frac{\sqrt{14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1}(76\,t^3-108\,t^2+52\,t-8)}{(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^{\frac{5}{2}}}\right)\end{array}\right)}$$

$$+\frac{4(56\,t^3-66\,t^2+32\,t-6)^2}{\left(\begin{array}{l}27(14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1)^2(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^3\\ \cdot\left(\frac{1}{9(14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1)^2}+\frac{4(14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1)}{9(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^3}\right)\\ \cdot\left(\frac{56\,t^3-66\,t^2+32\,t-6}{3\sqrt{14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1}(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^{\frac{3}{2}}}\right.\\ \quad\left.-\frac{\sqrt{14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1}(76\,t^3-108\,t^2+52\,t-8)}{(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^{\frac{5}{2}}}\right)\end{array}\right)}$$

$$+\frac{4(56\,t^3-66\,t^2+32\,t-6)(76\,t^3-108\,t^2+52\,t-8)}{\left(\begin{array}{l}9(14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1)(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^4\\ \cdot\left(\frac{1}{9(14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1)^2}+\frac{4(14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1)}{9(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^3}\right)\\ \cdot\left(\frac{56\,t^3-66\,t^2+32\,t-6}{3\sqrt{14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1}(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^{\frac{3}{2}}}\right.\\ \quad\left.-\frac{\sqrt{14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1}(76\,t^3-108\,t^2+52\,t-8)}{(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^{\frac{5}{2}}}\right)\end{array}\right)}$$

$$
- \frac{4(168\,t^2 - 132\,t + 32)}{\left(\begin{array}{l} 27(14\,t^4 - 22\,t^3 + 16\,t^2 - 6\,t + 1)(19\,t^4 - 36\,t^3 + 26\,t^2 - 8\,t + 1)^3 \\ \cdot \left(\dfrac{1}{9(14\,t^4 - 22\,t^3 + 16\,t^2 - 6\,t + 1)^2} + \dfrac{4(14\,t^4 - 22\,t^3 + 16\,t^2 - 6\,t + 1)}{9(19\,t^4 - 36\,t^3 + 26\,t^2 - 8\,t + 1)^3} \right) \\ \cdot \left(\dfrac{56\,t^3 - 66\,t^2 + 32\,t - 6}{3\sqrt{14\,t^4 - 22\,t^3 + 16\,t^2 - 6\,t + 1}(19\,t^4 - 36\,t^3 + 26\,t^2 - 8\,t + 1)^{\frac{3}{2}}} \right. \\ \quad \left. - \dfrac{\sqrt{14\,t^4 - 22\,t^3 + 16\,t^2 - 6\,t + 1}(76\,t^3 - 108\,t^2 + 52\,t - 8)}{(19\,t^4 - 36\,t^3 + 26\,t^2 - 8\,t + 1)^{\frac{5}{2}}} \right) \end{array} \right)}
$$

$$
+ \frac{\left(\begin{array}{l} 4(56\,t^3 - 66\,t^2 + 32\,t - 6)\left(- \dfrac{2(56\,t^3 - 66\,t^2 + 32\,t - 6)}{9(14\,t^4 - 22\,t^3 + 16\,t^2 - 6\,t + 1)^3} \right. \\ + \dfrac{4(56\,t^3 - 66\,t^2 + 32\,t - 6)}{9(19\,t^4 - 36\,t^3 + 26\,t^2 - 8\,t + 1)^3} \\ \left. - \dfrac{4(14\,t^4 - 22\,t^3 + 16\,t^2 - 6\,t + 1)(76\,t^3 - 108\,t^2 + 52\,t - 8)}{3(19\,t^4 - 36\,t^3 + 26\,t^2 - 8\,t + 1)^4} \right) \end{array} \right)}{\left(\begin{array}{l} 27(14\,t^4 - 22\,t^3 + 16\,t^2 - 6\,t + 1)(19\,t^4 - 36\,t^3 + 26\,t^2 - 8\,t + 1)^3 \\ \cdot \left(\dfrac{1}{9(14\,t^4 - 22\,t^3 + 16\,t^2 - 6\,t + 1)^2} + \dfrac{4(14\,t^4 - 22\,t^3 + 16\,t^2 - 6\,t + 1)}{9(19\,t^4 - 36\,t^3 + 26\,t^2 - 8\,t + 1)^3} \right)^2 \\ \cdot \left(\dfrac{56\,t^3 - 66\,t^2 + 32\,t - 6}{3\sqrt{14\,t^4 - 22\,t^3 + 16\,t^2 - 6\,t + 1}(19\,t^4 - 36\,t^3 + 26\,t^2 - 8\,t + 1)^{\frac{3}{2}}} \right. \\ \quad \left. - \dfrac{\sqrt{14\,t^4 - 22\,t^3 + 16\,t^2 - 6\,t + 1}(76\,t^3 - 108\,t^2 + 52\,t - 8)}{(19\,t^4 - 36\,t^3 + 26\,t^2 - 8\,t + 1)^{\frac{5}{2}}} \right) \end{array} \right)}
$$

$$
+\frac{\left(\begin{array}{l}
4(56\,t^3-66\,t^2+32\,t-6)\Bigg(-\dfrac{(56\,t^3-66\,t^2+32\,t-6)^2}{6\big((14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1)(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)\big)^{\frac{3}{2}}} \\
-\dfrac{(56\,t^3-66\,t^2+32\,t-6)(76\,t^3-108\,t^2+52\,t-8)}{\sqrt{14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1}(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^{\frac{5}{2}}} \\
+\dfrac{168\,t^2-132\,t+32}{3\sqrt{14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1}(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^{\frac{3}{2}}} \\
+\dfrac{5\sqrt{14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1}(76\,t^3-108\,t^2+52\,t-8)^2}{2(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^{\frac{7}{2}}} \\
-\dfrac{\sqrt{14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1}(228\,t^2-216\,t+52)}{(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^{\frac{5}{2}}}\Bigg)
\end{array}\right)}{\left(\begin{array}{l}
27(14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1)(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^3 \\
\cdot\left(\dfrac{1}{9(14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1)^2}+\dfrac{4(14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1)}{9(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^3}\right) \\
\cdot\Bigg(\dfrac{56\,t^3-66\,t^2+32\,t-6}{3\sqrt{14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1}(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^{\frac{3}{2}}} \\
-\dfrac{\sqrt{14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1}(76\,t^3-108\,t^2+52\,t-8)}{(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^{\frac{5}{2}}}\Bigg)^2
\end{array}\right)}
$$

şeklinde birer katsayıdır.

İspat. α_1 eğrisinin türevi alınırsa

$$\alpha_1'(t)=\frac{1}{\sqrt{2}}\big(-\beta N+\beta C+\gamma W\big)$$

bulunur. Buradan norm alınırsa

$$\|\alpha_1'(t)\|=\sqrt{\frac{2\beta^2+\gamma^2}{2}}$$

olur. Bu ifade (2.1.1) de yerine yazılırsa $\alpha_1(t)$-Bezier Smarandache eğrisinin T_{α_1} teğet vektörü

$$T_{\alpha_1}(t)=\frac{1}{\sqrt{2\beta^2+\gamma^2}}(-\beta N+\beta C+\gamma W)$$

şeklinde bulunur. $\alpha_1'(t)$' den tekrar türev alınır ve sonra (2.2.6) bağıntısı yerine yazılırsa $\alpha_1''(t)$ vektörü

$$\begin{aligned}
\alpha_1''(t) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\big(-\beta' N - \beta N' + \beta' C + \beta C' + \gamma' W + \gamma W'\big) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\big(-\beta' N - \beta\beta C + \beta' C + \beta\big(-\beta N + \gamma W\big) + \gamma' W + \gamma\gamma C\big) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\big(-\beta' N - \beta^2 C + \beta' C + -\beta^2 N + \beta\gamma W + \gamma' W + \gamma^2 C\big) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big((-\beta' - \beta^2)N + (\beta' - \beta^2 - \gamma^2)C + (\beta\gamma + \gamma')W\Big)
\end{aligned}$$

şeklinde olur. Burada çatı vektörlerinin katsayıları

$$\sigma_1 = -\beta' - \beta^2, \qquad \sigma_2 = \beta' - \beta^2 - \gamma^2, \quad \sigma_3 = \beta\gamma + \gamma'$$

şeklinde alınırsa $\alpha_1''(t)$ vektörünün

$$\alpha_1''(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\sigma_1 N + \sigma_2 C + \sigma_3 W\big)$$

olur. $\alpha_1'(t)$ ve $\alpha_1''(t)$ vektörleri vektörel çarpılırsa

$$\alpha_1'(t) \wedge \alpha_1''(t) = \frac{1}{2}\Big((\beta\sigma_3 - \gamma\sigma_2)N + (\beta\sigma_3 + \gamma\sigma_1)C - \beta(\sigma_1 + \sigma_2)W\Big)$$

şeklinde bulunur. Norm alınırsa

$$\|\alpha_1'(t) \wedge \alpha_1''(t)\| = \frac{1}{2}\sqrt{(\beta\sigma_3 - \gamma\sigma_2)^2 + (\beta\sigma_3 + \gamma\sigma_1)^2 + (-\beta(\sigma_1 + \sigma_2))^2}$$

olur. $\alpha_1(t)$ eğrisinin $B_{\alpha_1}(t)$ binormal vektörü ve $N_{\alpha_1}(t)$ aslinormal vektörü sırasıyla

$$\begin{aligned}
B_{\alpha_1}(t) &= \frac{\alpha_1'(t) \wedge \alpha_1''(t)}{\|\alpha_1'(t) \wedge \alpha_1''(t)\|} \\
&= \frac{\big(\beta\sigma_3 - \gamma\sigma_2\big)N + \big(\beta\sigma_3 + \gamma\sigma_1\big)C - \beta\big(\sigma_1 + \sigma_2\big)W}{\sqrt{\big(\beta\sigma_3 - \gamma\sigma_2\big)^2 + \big(\beta\sigma_3 + \gamma\sigma_1\big)^2 + \beta^2\big(\sigma_1 + \sigma_2\big)^2}}
\end{aligned}$$

$$N_{\alpha_1} = B_{\alpha_1} \wedge T_{\alpha_1}$$

$$= \frac{\begin{array}{l}\big(\gamma^2+\beta^2\big)\sigma_1+\beta^2\sigma_2+\sigma\beta\sigma_3\big)N \\ +\big(\beta^2\sigma_1+\big(\gamma^2+\beta^2\big)\sigma_2-\gamma\beta\sigma_3\big)C \\ +\big(2\beta^2\sigma_3+\gamma\beta\big(\sigma_1-\sigma_2\big)\big)W\end{array}}{\sqrt{(2\beta^2+\gamma^2)\Big((\beta\sigma_3-\gamma\sigma_2)^2+(\beta\sigma_3+\gamma\sigma_1)^2+\beta^2(\sigma_1+\sigma_2)^2\Big)}} \qquad (3.2.1)$$

şeklinde bulunur.

Teorem 3.2.3 $\alpha_1(t)$-Bezier Smarandache eğrisinin κ_{α_1} eğriliği ve τ_{α_1} burulması sırasıyla

$$\kappa_{\alpha_1} = \frac{\sqrt{2\Big(\big(\beta\sigma_3-\gamma\sigma_2\big)^2+\big(\beta\sigma_3+\gamma\sigma_1\big)^2+\beta^2\big(\sigma_1+\sigma_2\big)^2\Big)}}{(2\beta^2+\gamma^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\tau_{\alpha_1} = \frac{\sqrt{2}\Big((\beta\sigma_3-\gamma\sigma_2)(\sigma_1'-\beta\sigma_2)+(\beta\sigma_3+\gamma\sigma_1)(\beta\sigma_1+\sigma_2'-\gamma\sigma_3)-\beta(\sigma_1+\sigma_2)(\gamma\sigma_2+\sigma_3')\Big)}{\big(\beta\sigma_3-\gamma\sigma_2\big)^2+\big(\beta\sigma_3+\gamma\sigma_1\big)^2+\beta^2\big(\sigma_1+\sigma_2\big)^2},$$

bağıntısıyla verilir.

İspat. (2.1.2) bağıntısından $\alpha_1(t)$-Bezier Smarandache eğrisinin κ_{α_1} eğriliği

$$\begin{aligned}\kappa_{\alpha_1}(t) &= \frac{\|\alpha_1'(t)\wedge\alpha_1''(t)\|}{\|\alpha_1'(t)\|^3} \\ &= \frac{\sqrt{2\Big(\big(\beta\sigma_3-\gamma\sigma_2\big)^2+\big(\beta\sigma_3+\gamma\sigma_1\big)^2+\beta^2\big(\sigma_1+\sigma_2\big)^2\Big)}}{(2\beta^2+\gamma^2)^{\frac{3}{2}}}\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. $\alpha_1''(t)$ vektörünün tekrar türevi alınırsa

$$
\begin{aligned}
\alpha_1'''(t) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\sigma_1' N + \sigma_1 N' + \sigma_2' C + \sigma_2 C' + \sigma_3' W + \sigma_3 W'\Big) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\sigma_1' N + \sigma_1(\beta C) + \sigma_2' C + \sigma_2(-\beta N + \gamma W) + \sigma_3' W + \sigma_3(-\gamma C)\Big) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\sigma_1' N + \sigma_1\beta C + \sigma_2' C + -\sigma_2\beta N + \sigma_2\gamma W + \sigma_3' W - \sigma_3\gamma C\Big) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big((\sigma_1' - \beta\sigma_2)N + (\beta\sigma_1 + \sigma_2' - \gamma\sigma_3)C + (\gamma\sigma_2 + \sigma_3')W\Big)
\end{aligned}
$$

olur. $\alpha_1'(t)$, $\alpha_1''(t)$ ve $\alpha_1'''(t)$ vektörlerinin determinantı hesaplanırsa

$$
\begin{aligned}
det(\alpha_1', \alpha_1'', \alpha_1''') &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\Bigg(\big((\beta\sigma_3 - \gamma\sigma_2)(\sigma_1' - \beta\sigma_2) + (\beta\sigma_3 + \gamma\sigma_1)(\beta\sigma_1 + \sigma_2' - \gamma\sigma_3) \\
&\quad -\beta(\sigma_1 + \sigma_2)(\gamma\sigma_2 + \sigma_3')\Bigg)
\end{aligned}
$$

şeklinde bulunur. (2.1.2) bağıntısından $\alpha_1(t)$-Bezier Smarandache eğrisinin $\tau_{\alpha_1}(t)$ burulması

$$
\begin{aligned}
\tau_{\alpha_1}(t) &= \frac{\det(\alpha_1'(t), \alpha_1''(t), \alpha_1'''(t))}{\|\alpha_1'(t) \wedge \alpha_1''(t)\|^2} \\
&= \frac{\sqrt{2}\begin{pmatrix} \beta\sigma_3 - \gamma\sigma_2)(\sigma_1' - \beta\sigma_2) + (\beta\sigma_3 + \gamma\sigma_1)(\beta\sigma_1 + \sigma_2' - \gamma\sigma_3) \\ -\beta(\sigma_1 + \sigma_2)(\gamma\sigma_2 + \sigma_3') \end{pmatrix}}{\big(\beta\sigma_3 - \gamma\sigma_2\big)^2 + \big(\beta\sigma_3 + \gamma\sigma_1\big)^2 + \beta^2\big(\sigma_1 + \sigma_2\big)^2}
\end{aligned}
$$

elde edilir.

Teorem 3.2.4 α_1 eğrisinin alternatif çatı vektörleri $N_{\alpha_1}, C_{\alpha_1}, W_{\alpha_1}$ olsun. Bu vektörler sırasıyla

$$N_{\alpha_1}(t) = \frac{\begin{array}{l}\big(\gamma^2+\beta^2\big)\sigma_1+\beta^2\sigma_2+\sigma\beta\sigma_3\big)N \\ +\big(\beta^2\sigma_1+\big(\gamma^2+\beta^2\big)\sigma_2-\gamma\beta\sigma_3\big)C \\ +\big(2\beta^2\sigma_3+\gamma\beta\big(\sigma_1-\sigma_2\big)\big)W\end{array}}{\sqrt{(2\beta^2+\gamma^2)\Big((\beta\sigma_3-\gamma\sigma_2)^2+(\beta\sigma_3+\gamma\sigma_1)^2+\beta^2(\sigma_1+\sigma_2)^2\Big)}},$$

$$\begin{aligned} C_{\alpha_1}(t) = & \frac{1}{\sqrt{\kappa_{\alpha_1}^2+\tau_{\alpha_1}^2}(x_1y_1)}\Big(\big(\kappa_{\alpha_1}y_1\beta+\tau_{\alpha_1}x_1(\beta\sigma_3-\gamma\sigma_2)\big)N \\ & +\big(\tau_{\alpha_1}x_1(\beta\sigma_3+\gamma\sigma_1)-\kappa_{\alpha_1}y_1\beta\big)C \\ & -\big(\kappa_{\alpha_1}y_1\gamma+\tau_{\alpha_1}x_1\beta(\sigma_1+\sigma_2)\big)W\Big),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{\alpha_1}(t) = & \frac{1}{\sqrt{\kappa_1^2+\tau_1^2}(x_1y_1)}\Big(\big(\kappa_{\alpha_1}x_1(\beta\sigma_3-\gamma\sigma_2)-\tau_{\alpha_1}y_1\beta\big)N \\ & +\big(\tau_{\alpha_1}y_1\beta+\kappa_{\alpha_1}x_1(\beta\sigma_3+\gamma\sigma_1)\big)C \\ & +\big(\tau_{\alpha_1}y_1\gamma-\kappa_{\alpha_1}x_1\beta(\sigma_1+\sigma_2)\big)W\Big)\end{aligned}$$

bağıntısıyla verilir.

İspat. (2.2.5) bağıntısına benzer olarak C_{α_1} vektörü

$$C_{\alpha_1}(t) = -\frac{\kappa_{\alpha_1}}{\sqrt{\kappa_{\alpha_1}^2+\tau_{\alpha_1}^2}}T_{\alpha_1}+\frac{\tau_{\alpha_1}}{\sqrt{\kappa_{\alpha_1}^2+\tau_{\alpha_1}^2}}B_{\alpha_1}$$

$$= \frac{\kappa_{\alpha_1} y_1 \beta + \tau_{\alpha_1} x_1 (\beta\sigma_3 - \gamma\sigma_2)}{x_1 y_1 \sqrt{\kappa_{\alpha_1}^2 + \tau_{\alpha_1}^2}} N$$

$$+ \frac{\left(\tau_{\alpha_1} x_1 (\beta\sigma_3 + \gamma\sigma_1) - \kappa_{\alpha_1} y_1 \beta\right)}{x_1 y_1 \sqrt{\kappa_{\alpha_1}^2 + \tau_{\alpha_1}^2}} C$$

$$- \frac{\kappa_{\alpha_1} y_1 \gamma + \tau_{\alpha_1} x_1 \beta (\sigma_1 + \sigma_2)}{x_1 y_1 \sqrt{\kappa_{\alpha_1}^2 + \tau_{\alpha_1}^2}} W$$

şeklinde bulunur. Burada x_1 ve y_1 katsayıları

$$x_1 = \sqrt{2\beta^2 + \gamma^2}$$

$$y_1 = \sqrt{\left(\beta\sigma_3 - \gamma\sigma_2\right)^2 + \left(\beta\sigma_3 + \gamma\sigma_1\right)^2 + \beta^2\left(\sigma_1 + \sigma_2\right)^2}$$

şeklindedir. Benzer olarak $W_{\alpha_1}(t)$ vektörü

$$W_{\alpha_1}(t) = \frac{\tau_{\alpha_1}}{\sqrt{\kappa_{\alpha_1}^2 + \tau_{\alpha_1}^2}} T_{\alpha_1} + \frac{\kappa_{\alpha_1}}{\sqrt{\kappa_{\alpha_1}^2 + \tau_{\alpha_1}^2}} B_{\alpha_1}$$

$$= \frac{\kappa_{\alpha_1} x_1 (\beta\sigma_3 - \gamma\sigma_2) - \tau_{\alpha_1} y_1 \beta}{(x_1 y_1)\sqrt{\kappa_1^2 + \tau_1^2}} N$$

$$+ \frac{\tau_{\alpha_1} y_1 \beta + \kappa_{\alpha_1} x_1 (\beta\sigma_3 + \gamma\sigma_1)}{(x_1 y_1)\sqrt{\kappa_1^2 + \tau_1^2}} C$$

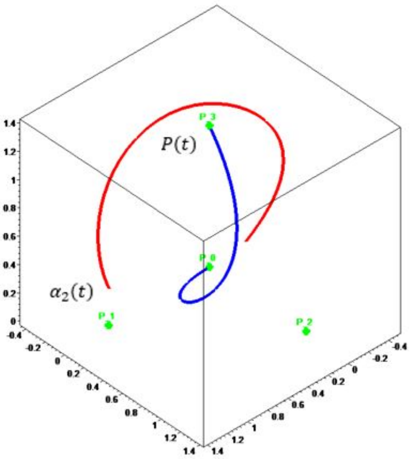
$$+ \frac{\tau_{\alpha_1} y_1 \gamma - \kappa_{\alpha_1} x_1 \beta (\sigma_1 + \sigma_2)}{(x_1 y_1)\sqrt{\kappa_1^2 + \tau_1^2}} W$$

şeklinde hesaplanmış olur.

Tanım 3.2.2 Kübik Bezier eğrisinin alternatif çatı vektörleri $\{N, C, W\}$ olsun.

$$\alpha_2(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(N + W)$$

şeklinde tanımlı $\alpha_2(t)$ vektörünün çizdiği regüler eğriye α_2-Bezier Smarandache eğrisi denir. Eğriye ait grafik Şekil 3.6 de verilmiştir.



Şekil 3.6: α_2-Bezier Smarandache eğrisi

Burada yeşil noktalar kontrol noktalarıdır. Mavi olan eğri $P(t)$ kübik Bezier eğrisi, kırmızı olan eğri ise $\alpha_1(t)$-Bezier Smarandache eğrisidir.

Teorem 3.2.5 $\alpha_2(t)$ Smarandache eğrisinin Frenet vektörleri $T_{\alpha_2}, N_{\alpha_2}, B_{\alpha_2}$ olsun. Bu vektörler sırasıyla

$$
\begin{aligned}
T_{\alpha_2}(t) &= C, \\
N_{\alpha_2}(t) &= \frac{\sigma_4}{\sqrt{\sigma_4^2+\sigma_6^2}}N + \frac{\sigma_6}{\sqrt{\sigma_4^2+\sigma_6^2}}W, \\
B_{\alpha_2}(t) &= \frac{\sigma_6}{\sqrt{\sigma_4^2+\sigma_6^2}}N - \frac{\sigma_4}{\sqrt{\sigma_4^2+\sigma_6^2}}W
\end{aligned}
$$

şeklinde verilir. Burada σ_4, σ_5 ve σ_6 katsayıları

$$
\begin{aligned}
\sigma_4 &= (-\beta^2+\beta\gamma)\\
&= -\frac{1}{9((14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1)^2)}-\frac{4(14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1)}{9(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^3}\\
&\quad -\frac{\left(\begin{array}{l} 4\sqrt{\dfrac{1}{(14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1)^2}+\dfrac{4(14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1)}{(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^3}}\\ \cdot(56\,t^3-66\,t^2+32\,t-6)\end{array}\right)}{81(14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1)(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^3}\\
&\quad \cdot\left(\frac{1}{9(14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1)^2}+\frac{4(14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1)}{9(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^3}\right)\cdot\\
&\quad \cdot\left(\frac{56\,t^3-66\,t^2+32\,t-6}{3\sqrt{14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1}(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^{\frac{3}{2}}}\right.\\
&\quad\quad \left.-\frac{\sqrt{14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1}(76\,t^3-108\,t^2+52\,t-8)}{(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^{\frac{5}{2}}}\right),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sigma_5 &= (\beta-\gamma)'\\
&= \frac{\left(\begin{array}{l} -\dfrac{2(56\,t^3-66\,t^2+32\,t-6)}{(14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1)^3}+\dfrac{4(56\,t^3-66\,t^2+32\,t-6)}{(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^3}\\ -\dfrac{12(14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1)(76\,t^3-108\,t^2+52\,t-8)}{(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^4}\end{array}\right)}{6\sqrt{\dfrac{(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^3+4(14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1)^3}{(14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1)^2(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^3}}}
\end{aligned}
$$

$$
-\frac{4(56\,t^3-66\,t^2+32\,t-6)^2}{\left(\begin{array}{l}27(14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1)^2(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^3\\ \cdot\left(\frac{1}{9(14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1)^2}+\frac{4(14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1)}{9(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^3}\right)\\ \cdot\left(\frac{56\,t^3-66\,t^2+32\,t-6}{3\sqrt{14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1}(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^{\frac{3}{2}}}\right.\\ \quad\left.-\frac{\sqrt{14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1}(76\,t^3-108\,t^2+52\,t-8)}{(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^{\frac{5}{2}}}\right)\end{array}\right)}
$$

$$
-\frac{4(56\,t^3-66\,t^2+32\,t-6)(76\,t^3-108\,t^2+52\,t-8)}{\left(\begin{array}{l}9(14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1)(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^4\\ \cdot\left(\frac{1}{9(14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1)^2}+\frac{4(14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1)}{9(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^3}\right)\\ \cdot\left(\frac{56\,t^3-66\,t^2+32\,t-6}{3\sqrt{14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1}(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^{\frac{3}{2}}}\right.\\ \quad\left.-\frac{\sqrt{14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1}(76\,t^3-108\,t^2+52\,t-8)}{(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^{\frac{5}{2}}}\right)\end{array}\right)}
$$

$$
+\frac{4(168\,t^2-132\,t+32)}{\left(\begin{array}{l}27(14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1)(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^3\\ \cdot\left(\frac{1}{9(14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1)^2}+\frac{4(14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1)}{9(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^3}\right)\\ \cdot\left(\frac{56\,t^3-66\,t^2+32\,t-6}{3\sqrt{14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1}(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^{\frac{3}{2}}}\right.\\ \quad\left.-\frac{\sqrt{14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1}(76\,t^3-108\,t^2+52\,t-8)}{(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^{\frac{5}{2}}}\right)\end{array}\right)}
$$

$$-\frac{\left(\begin{array}{l} 4(56\,t^3-66\,t^2+32\,t-6)\Bigl(-\frac{2(56\,t^3-66\,t^2+32\,t-6)}{9(14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1)^3} \\ \quad +\frac{4(56\,t^3-66\,t^2+32\,t-6)}{9(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^3} \\ \quad -\frac{4(14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1)(76\,t^3-108\,t^2+52\,t-8)}{3(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^4}\Bigr) \end{array}\right)}{\left(\begin{array}{l} 27(14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1)(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^3 \\ \cdot\Bigl(\frac{1}{9(14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1)^2}+\frac{4(14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1)}{9(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^3}\Bigr)^2 \\ \cdot\Bigl(\frac{56\,t^3-66\,t^2+32\,t-6}{3\sqrt{14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1}(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^{\frac{3}{2}}} \\ \quad -\frac{\sqrt{14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1}(76\,t^3-108\,t^2+52\,t-8)}{(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^{\frac{5}{2}}}\Bigr) \end{array}\right)}$$

$$-\frac{\begin{array}{l} 4(56\,t^3-66\,t^2+32\,t-6)\Bigl(-\frac{(56\,t^3-66\,t^2+32\,t-6)^2}{6\bigl((14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1)(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)\bigr)^{\frac{3}{2}}} \\ \quad -\frac{(56\,t^3-66\,t^2+32\,t-6)(76\,t^3-108\,t^2+52\,t-8)}{\sqrt{14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1}(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^{\frac{5}{2}}} \\ \quad +\frac{168\,t^2-132\,t+32}{3\sqrt{14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1}(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^{\frac{3}{2}}} \\ \quad +\frac{5\sqrt{14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1}(76\,t^3-108\,t^2+52\,t-8)^2}{2(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^{\frac{7}{2}}} \\ \quad -\frac{\sqrt{14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1}(228\,t^2-216\,t+52)}{(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^{\frac{5}{2}}}\Bigr) \end{array}}{\left(\begin{array}{l} 27(14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1)(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^3 \\ \cdot\Bigl(\frac{1}{9(14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1)^2}+\frac{4(14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1)}{9(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^3}\Bigr) \\ \cdot\Bigl(\frac{56\,t^3-66\,t^2+32\,t-6}{3\sqrt{14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1}(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^{\frac{3}{2}}} \\ \quad -\frac{\sqrt{14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1}(76\,t^3-108\,t^2+52\,t-8)}{(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^{\frac{5}{2}}}\Bigr)^2 \end{array}\right)},$$

$$
\begin{aligned}
\sigma_6 &= (\beta\gamma - \gamma^2) \\
&\quad 4\sqrt{\frac{1}{(14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1)^2}+\frac{4(14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1)}{(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^3}} \\
&= -\frac{\cdot(56\,t^3-66\,t^2+32\,t-6)}{\left(\begin{array}{l} 81(14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1)(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^3 \\ \cdot\left(\dfrac{1}{9(14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1)^2}+\dfrac{4(14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1)}{9(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^3}\right) \\ \cdot\left(\dfrac{56\,t^3-66\,t^2+32\,t-6}{3\sqrt{14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1}(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^{\frac{3}{2}}}\right. \\ \quad\left.-\dfrac{\sqrt{14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1}(76\,t^3-108\,t^2+52\,t-8)}{(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^{\frac{5}{2}}}\right), \end{array}\right)} \\
&\quad -\frac{16(56\,t^3-66\,t^2+32\,t-6)^2}{\left(\begin{array}{l} 729(14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1)^2(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^6 \\ \cdot\left(\dfrac{1}{9(14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1)^2}+\dfrac{4(14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1)}{9(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^3}\right)^2 \\ \cdot\left(\dfrac{56\,t^3-66\,t^2+32\,t-6}{3\sqrt{14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1}(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^{\frac{3}{2}}}\right. \\ \quad\left.-\dfrac{\sqrt{14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1}(76\,t^3-108\,t^2+52\,t-8)}{(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^{\frac{5}{2}}}\right)^2 \end{array}\right)}
\end{aligned}
$$

şeklinde birer katsayıdır.

İspat. α_2 eğrisinin türevi alınır ve norm hesaplanırsa

$$\alpha_2'(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\beta - \gamma\big)C$$

olur.

$$\|\alpha_2'(t)\| = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\beta - \gamma\big)$$

bulunur. Bu ifade (2.1.1) de yerine yazılırsa $\alpha_2(t)$-Bezier Smarandache eğrisinin T_{α_2} teğet vektörü

$$T_{\alpha_2}(t) = C$$

şeklinde olur. $\alpha_2'(t)$' den tekrar türev alınır ve (2.2.6) bağıntısı yerine yazılırsa $\alpha_2''(t)$ vektörü

$$\begin{aligned}
\alpha_2''(t) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\big((\beta-\gamma)'C + (\beta-\gamma)C'\big) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\big((\beta-\gamma)'C + (\beta-\gamma)(-\beta N + \gamma W)\big) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\big(-\beta(\beta-\gamma)N + (\beta-\gamma)'C + \gamma(\beta-\gamma)W\big) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big((-\beta^2+\beta\gamma)N + (\beta-\gamma)'C + (\beta\gamma-\gamma^2)W\Big)
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Burada çatı vektörlerinin katsayıları

$$\sigma_4 = (-\beta^2+\beta\gamma)\ ,\sigma_5 = (\beta-\gamma)'\ ,\sigma_6 = (\beta\gamma-\gamma^2)$$

şeklinde alınırsa $\alpha_2''(t)$ vektörünün ifadesi

$$\alpha_2''(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\sigma_4 N + \sigma_5 C + \sigma_6 W\big)$$

olur. $\alpha_2'(t)$ ve $\alpha_2''(t)$ vektörleri vektörel çarpılır ve norm alınırsa

$$\begin{aligned}
\alpha_2'(t)\wedge\alpha_2''(t) &= \frac{1}{2}\Big(\sigma_6(\beta-\gamma)N + \sigma_4(\gamma-\beta)W\Big) \\
\|\alpha_2'(t)\wedge\alpha_2''(t)\| &= \frac{1}{2}\sqrt{(\beta-\gamma)^2(\sigma_4^2+\sigma_6^2)}
\end{aligned}$$

bulunur. $\alpha_2(t)$ eğrisinin $B_{\alpha_2}(t)$ binormal ve $N_{\alpha_2}(t)$ aslinormal vektörü

$$\begin{aligned}
B_{\alpha_2}(t) &= \frac{\alpha_2'(t)\wedge\alpha_2''(t)}{\|\alpha_2'(t)\wedge\alpha_2''(t)\|} \\
&= \frac{\sigma_6 N - \sigma_4 W}{\sqrt{\sigma_4^2+\sigma_6^2}}\ , \\
N_{\alpha_2} &= B_{\alpha_2}\wedge T_{\alpha_2} \\
&= \frac{\sigma_4 N + \sigma_6 W}{\sqrt{\sigma_4^2+\sigma_6^2}}
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

Teorem 3.2.6 $\alpha_2(t)$-Bezier Smarandache eğrisinin κ_{α_2} eğriliği ve τ_{α_2} burulması sırasıyla

$$\begin{aligned} \kappa_{\alpha_2} &= \frac{\sqrt{2(\sigma_4^2+\sigma_6^2)}}{(\beta-\gamma)^2}, \\ \tau_{\alpha_2} &= \frac{\sqrt{2}\Big(\sigma_6(\beta-\gamma)(\sigma_4'-\sigma_5\beta)+\sigma_4(\gamma-\beta)(\sigma_5\gamma+\sigma_6')\Big)}{(\beta-\gamma)^2(\sigma_4^2+\sigma_6^2)}, \end{aligned}$$

şeklinde verilir.

İspat. (2.1.2) bağıntısından $\alpha_2(t)$-Bezier Smarandache eğrisinin κ_{α_2} eğriliği

$$\begin{aligned} \kappa_{\alpha_2}(t) &= \frac{\|\alpha_2'(t)\wedge\alpha_2''(t)\|}{\|\alpha_2'(t)\|^3} \\ &= \frac{\sqrt{2(\sigma_4^2+\sigma_6^2)}}{(\beta-\gamma)^2} \end{aligned}$$

olur. $\alpha_2''(t)$ vektörünün türevi alınırsa

$$\begin{aligned} \alpha_2'''(t) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\sigma_4'N+\sigma_4N'+\sigma_5'C+\sigma_5C'+\sigma_6'W+\sigma_6W'\Big) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\sigma_4'N+\sigma_4(\beta C)+\sigma_5'C+\sigma_5(-\beta N+\gamma W)+\sigma_6'W+\sigma_6(-\gamma C)\Big) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\sigma_4'N+\sigma_4\beta C+\sigma_5'C+-\sigma_5\beta N+\sigma_5\gamma W+\sigma_6'W-\sigma_6\gamma C\Big) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big((\sigma_4'-\beta\sigma_5)N+(\beta\sigma_4+\sigma_5'-\gamma\sigma_6)C+(\gamma\sigma_5+\sigma_6')W\Big) \end{aligned}$$

bulunur. $\alpha_2'(t)$, $\alpha_2''(t)$ ve $\alpha_2'''(t)$ vektörlerinin determinantı hesaplanırsa

$$det(\alpha_2',\alpha_2'',\alpha_2''') = \frac{1}{2\sqrt{2}}\Bigg(\sigma_6(\beta-\gamma)(\sigma_4'-\sigma_5\beta)+\sigma_4(\gamma-\beta)(\sigma_5\gamma+\sigma_6')\Bigg)$$

olur. (2.1.2) bağıntısından $\alpha_2(t)$-Bezier Smarandache eğrisinin $\tau_{\alpha_2}(t)$ burulması

$$\begin{aligned}\tau_{\alpha_2}(t) &= \frac{\det(\alpha_2'(t), \alpha_2''(t), \alpha_2'''(t))}{\|\alpha_2'(t) \wedge \alpha_2''(t)\|^2} \\ &= \frac{\sqrt{2}\Big(\sigma_6(\beta-\gamma)(\sigma_4' - \sigma_5\beta) + \sigma_4(\gamma-\beta)(\sigma_5\gamma + \sigma_6')\Big)}{(\beta-\gamma)^2(\sigma_4^2 + \sigma_6^2)}\end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 3.2.7 α_2 eğrisinin alternatif çatı vektörleri $N_{\alpha_2}, C_{\alpha_2}, W_{\alpha_2}$ olsun. Bu vektörler sırasıyla

$$N_{\alpha_2}(t) = \frac{\sigma_4 N + \sigma_6 W}{x_2},$$

$$C_{\alpha_2}(t) = \frac{1}{x_2\sqrt{\kappa_{\alpha_2}^2 + \tau_{\alpha_2}^2}}\Big(\tau_{\alpha_2}\sigma_6 N - \kappa_{\alpha_2} x_2 C - \tau_{\alpha_2}\sigma_4 W\Big),$$

$$W_{\alpha_2}(t) = \frac{1}{x_2\sqrt{\kappa_{\alpha_2}^2 + \tau_{\alpha_2}^2}}\Big(\kappa_{\alpha_2}\sigma_6 N + \tau_{\alpha_2} x_2 C - \kappa_{\alpha_2}\sigma_4 W\Big)$$

şeklinde verilir.

İspat. (2.2.5) bağıntısına benzer olarak $C_{\alpha_2}(t)$ ve W_{α_2} vektörleri sırasıyla

$$\begin{aligned}C_{\alpha_2}(t) &= -\frac{\kappa_{\alpha_2}}{\sqrt{\kappa_{\alpha_2}^2 + \tau_{\alpha_2}^2}} T_{\alpha_2} + \frac{\tau_{\alpha_2}}{\sqrt{\kappa_{\alpha_2}^2 + \tau_{\alpha_2}^2}} B_{\alpha_2} \\ &= \frac{1}{x_2\sqrt{\kappa_{\alpha_2}^2 + \tau_{\alpha_2}^2}}\Big(\tau_{\alpha_2}\sigma_6 N - \kappa_{\alpha_2} x_2 C - \tau_{\alpha_2}\sigma_4 W\Big),\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
W_{\alpha_2}(t) &= \frac{\tau_{\alpha_2}}{\sqrt{\kappa_{\alpha_2}^2+\tau_{\alpha_2}^2}}T_{\alpha_2}+\frac{\kappa_{\alpha_2}}{\sqrt{\kappa_{\alpha_2}^2+\tau_{\alpha_2}^2}}B_{\alpha_2}\\
&= \frac{1}{\sqrt{\kappa_{\alpha_2}^2+\tau_{\alpha_2}^2}}\Big(\frac{\kappa_{\alpha_2}\sigma_6 N+\tau_{\alpha_2}x_2 C-\kappa_{\alpha_2}\sigma_4 W}{x_2}\Big)
\end{aligned}
$$

şeklinde elde edilir. Burada x_2 ifadesi

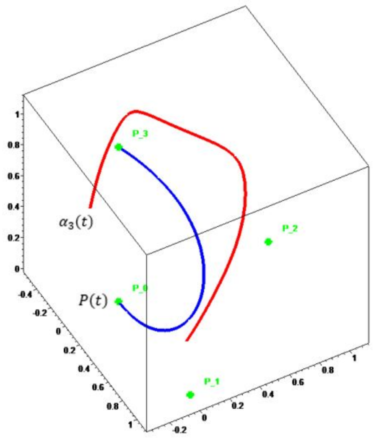
$$x_2=\sqrt{\sigma_4^2+\sigma_6^2}$$

şeklinde bir katsayıdır.

Tanım 3.2.3 Kübik Bezier eğrisinin alternatif çatı vektörleri $\{N, C, W\}$ olsun.

$$\alpha_3(t)=\frac{1}{\sqrt{2}}(C+W)$$

şeklinde tanımlı $\alpha_3(t)$ vektörünün çizdiği regüler eğriye α_3-Bezier Smarandache eğrisi denir. Eğriye ait grafik Şekil 3.7 de verilmiştir.



Şekil 3.7: α_3-Bezier Smarandache eğrisi

Burada yeşil noktalar kontrol noktalarıdır.Mavi olan eğri $P(t)$ kübik Bezier eğrisi, kırmızı olan eğri ise $\alpha_3(t)$-Bezier Smarandache eğrisidir.

Teorem 3.2.8 $\alpha_3(t)$ Smarandache eğrisinin Frenet vektörleri $T_{\alpha_3}, N_{\alpha_3}, B_{\alpha_3}$ olsun. Bu vektörler sırasıyla

$$T_{\alpha_3}(t) = \frac{-\beta N - \gamma C + \gamma W}{\sqrt{\beta^2 + 2\gamma^2}},$$

$$N_{\alpha_3}(t) = \frac{\begin{array}{c}\big(2\gamma^2\sigma_7 + \gamma\beta(\sigma_9 - \sigma_8)\big)N + \big(\gamma^2(\sigma_8+\sigma_9) + \beta^2\sigma_8 - \beta\gamma\sigma_7\big)C \\ + \big(\gamma^2(\sigma_8+\sigma_9) + \beta^2\sigma_9 + \beta\gamma\sigma_7\big)W\end{array}}{\sqrt{(2\gamma^2+\beta^2)\big(\gamma^2\sigma_7^2 + (\gamma^2+\beta^2)(\sigma_9^2+\sigma_8^2) + 2\beta\gamma(\sigma_9\sigma_7 - \sigma_8\sigma_7) + 2\gamma^2\sigma_9\sigma_8\big)}},$$

$$B_{\alpha_3}(t) = \frac{-\gamma(\sigma_8+\sigma_9)N + (\gamma\sigma_7 + \beta\sigma_9)C + (\gamma\sigma_7 - \beta\sigma_8)W}{\sqrt{\gamma^2\sigma_7^2 + (\gamma^2+\beta^2)(\sigma_9^2+\sigma_8^2) + 2\beta\gamma(\sigma_9\sigma_7 - \sigma_8\sigma_7) + 2\gamma^2\sigma_9\sigma_8}}$$

şeklinde verilir. Burada $\sigma_7, \sigma_8, \sigma_9$

$$\sigma_7 = -\beta' + \gamma\beta$$

$$= -\frac{\begin{array}{c}\left(4\sqrt{\dfrac{1}{(14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1)^2} + \dfrac{4(14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1)}{(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^3}} \right. \\ \left. .\big(56\,t^3-66\,t^2+32\,t-6\big)\right)\end{array}}{\left(\begin{array}{l}81(14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1)(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^3 \\ \cdot\left(\dfrac{1}{9(14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1)^2} + \dfrac{4(14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1)}{9(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^3}\right) \\ \cdot\left(\dfrac{56\,t^3-66\,t^2+32\,t-6}{3\sqrt{14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1}(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^{\frac{3}{2}}}\right. \\ \left. -\dfrac{\sqrt{14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1}(76\,t^3-108\,t^2+52\,t-8)}{(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^{\frac{5}{2}}}\right)\end{array}\right)}$$

$$+\frac{\left(\begin{array}{l}\dfrac{2(56\,t^3-66\,t^2+32\,t-6)}{(14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1)^3} - \dfrac{4(56\,t^3-66\,t^2+32\,t-6)}{(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^3} \\ +\dfrac{12(14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1)(76\,t^3-108\,t^2+52\,t-8)}{(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^4}\end{array}\right)}{6\sqrt{\dfrac{(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^3 + 4(14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1)^3}{(14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1)^2(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^3}}},$$

$$
\begin{aligned}
\sigma_8 &= -\beta^2-\gamma'-\gamma^2 \\
&= -\frac{1}{9(14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1)^2}-\frac{4(14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1)}{9(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^3} \\
&\quad -\frac{16(56\,t^3-66\,t^2+32\,t-6)^2}{\left(\begin{array}{l} 729(14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1)^2(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^6 \\ \cdot\left(\dfrac{1}{9(14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1)^2}+\dfrac{4(14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1)}{9(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^3}\right)^2 \\ \cdot\left(\dfrac{56\,t^3-66\,t^2+32\,t-6}{3\sqrt{14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1}(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^{\frac{3}{2}}}\right. \\ \qquad\left.-\dfrac{\sqrt{14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1}(76\,t^3-108\,t^2+52\,t-8)}{(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^{\frac{5}{2}}}\right)^2 \end{array}\right)} \\
&\quad -\frac{4(56\,t^3-66\,t^2+32\,t-6)^2}{\left(\begin{array}{l} 27(14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1)^2(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^3 \\ \cdot\left(\dfrac{1}{9(14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1)^2}+\dfrac{4(14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1)}{9(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^3}\right) \\ \cdot\left(\dfrac{56\,t^3-66\,t^2+32\,t-6}{3\sqrt{14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1}(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^{\frac{3}{2}}}\right. \\ \qquad\left.-\dfrac{\sqrt{14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1}(76\,t^3-108\,t^2+52\,t-8)}{(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^{\frac{5}{2}}}\right) \end{array}\right)} \\
&\quad -\frac{4(56\,t^3-66\,t^2+32\,t-6)(76\,t^3-108\,t^2+52\,t-8)}{\left(\begin{array}{l} 9(14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1)(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^4 \\ \cdot\left(\dfrac{1}{9(14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1)^2}+\dfrac{4(14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1)}{9(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^3}\right) \\ \cdot\left(\dfrac{56\,t^3-66\,t^2+32\,t-6}{3\sqrt{14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1}(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^{\frac{3}{2}}}\right. \\ \qquad\left.-\dfrac{\sqrt{14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1}(76\,t^3-108\,t^2+52\,t-8)}{(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^{\frac{5}{2}}}\right) \end{array}\right)}
\end{aligned}
$$

$$+\frac{4(168\,t^2-132\,t+32)}{\left(\begin{array}{l}27(14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1)(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^3\\ \cdot\Big(\frac{1}{9(14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1)^2}+\frac{4(14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1)}{9(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^3}\Big)\\ \cdot\Big(\frac{56\,t^3-66\,t^2+32\,t-6}{3\sqrt{14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1}(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^{\frac{3}{2}}}\\ \quad-\frac{\sqrt{14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1}(76\,t^3-108\,t^2+52\,t-8)}{(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^{\frac{5}{2}}}\Big)\end{array}\right)}$$

$$-\frac{\left(\begin{array}{l}4(56\,t^3-66\,t^2+32\,t-6)\Big(-\frac{2(56\,t^3-66\,t^2+32\,t-6)}{9(14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1)^3}\\ \quad+\frac{4(56\,t^3-66\,t^2+32\,t-6)}{9(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^3}\\ \quad-\frac{4(14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1)(76\,t^3-108\,t^2+52\,t-8)}{3(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^4}\Big)\end{array}\right)}{\left(\begin{array}{l}27(14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1)(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^3\\ \cdot\Big(\frac{1}{9(14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1)^2}+\frac{4(14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1)}{9(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^3}\Big)^2\\ \cdot\Big(\frac{56\,t^3-66\,t^2+32\,t-6}{3\sqrt{14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1}(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^{\frac{3}{2}}}\\ \quad-\frac{\sqrt{14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1}(76\,t^3-108\,t^2+52\,t-8)}{(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^{\frac{5}{2}}}\Big)\end{array}\right)}$$

$$
-\frac{\begin{pmatrix} 4(56\,t^3-66\,t^2+32\,t-6)\cdot\Bigg(-\dfrac{(56\,t^3-66\,t^2+32\,t-6)^2}{6\big((14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1)(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)\big)^{\frac{3}{2}}} \\ -\dfrac{(56\,t^3-66\,t^2+32\,t-6)(76\,t^3-108\,t^2+52\,t-8)}{\sqrt{14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1}(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^{\frac{5}{2}}} \\ +\dfrac{168\,t^2-132\,t+32}{3\sqrt{14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1}(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^{\frac{3}{2}}} \\ +\dfrac{5\sqrt{14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1}(76\,t^3-108\,t^2+52\,t-8)^2}{2(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^{\frac{7}{2}}} \\ -\dfrac{\sqrt{14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1}(228\,t^2-216\,t+52)}{(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^{\frac{5}{2}}}\Bigg) \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 27(14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1)(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^3 \\ \cdot\left(\dfrac{1}{9(14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1)^2}+\dfrac{4(14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1)}{9(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^3}\right) \\ \cdot\Bigg(\dfrac{56\,t^3-66\,t^2+32\,t-6}{3\sqrt{14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1}(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^{\frac{3}{2}}} \\ -\dfrac{\sqrt{14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1}(76\,t^3-108\,t^2+52\,t-8)}{(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^{\frac{5}{2}}}\Bigg)^2 \end{pmatrix}},
$$

$$
\begin{aligned}
\sigma_9 &= -\gamma^2+\gamma' \\
&= -\frac{16(56\,t^3-66\,t^2+32\,t-6)^2}{\begin{pmatrix} 729(14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1)^2(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^6 \\ \cdot\left(\dfrac{1}{9(14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1)^2}+\dfrac{4(14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1)}{9(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^3}\right)^2 \\ \cdot\Bigg(\dfrac{56\,t^3-66\,t^2+32\,t-6}{3\sqrt{14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1}(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^{\frac{3}{2}}} \\ -\dfrac{\sqrt{14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1}(76\,t^3-108\,t^2+52\,t-8)}{(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^{\frac{5}{2}}}\Bigg)^2 \end{pmatrix}}
\end{aligned}
$$

$$+\frac{4(56\,t^3-66\,t^2+32\,t-6)^2}{\begin{pmatrix}27(14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1)^2(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^3\\ \cdot\left(\frac{1}{9(14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1)^2}+\frac{4(14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1)}{9(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^3}\right)\\ \cdot\left(\frac{56\,t^3-66\,t^2+32\,t-6}{3\sqrt{14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1}(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^{\frac{3}{2}}}\right.\\ \left.-\frac{\sqrt{14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1}(76\,t^3-108\,t^2+52\,t-8)}{(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^{\frac{5}{2}}}\right)\end{pmatrix}}$$

$$+\frac{4(56\,t^3-66\,t^2+32\,t-6)(76\,t^3-108\,t^2+52\,t-8)}{\begin{pmatrix}9(14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1)(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^4\\ \cdot\left(\frac{1}{9(14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1)^2}+\frac{4(14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1)}{9(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^3}\right)\\ \cdot\left(\frac{56\,t^3-66\,t^2+32\,t-6}{3\sqrt{14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1}(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^{\frac{3}{2}}}\right.\\ \left.-\frac{\sqrt{14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1}(76\,t^3-108\,t^2+52\,t-8)}{(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^{\frac{5}{2}}}\right)\end{pmatrix}}$$

$$-\frac{4(168\,t^2-132\,t+32)}{\begin{pmatrix}27(14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1)(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^3\\ \cdot\left(\frac{1}{9(14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1)^2}+\frac{4(14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1)}{9(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^3}\right)\\ \cdot\left(\frac{56\,t^3-66\,t^2+32\,t-6}{3\sqrt{14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1}(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^{\frac{3}{2}}}\right.\\ \left.-\frac{\sqrt{14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1}(76\,t^3-108\,t^2+52\,t-8)}{(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^{\frac{5}{2}}}\right)\end{pmatrix}}$$

$$
+\frac{\left(4(56\,t^3-66\,t^2+32\,t-6)\left(-\frac{2(56\,t^3-66\,t^2+32\,t-6)}{9(14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1)^3}+\frac{4(56\,t^3-66\,t^2+32\,t-6)}{9(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^3}-\frac{4(14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1)(76\,t^3-108\,t^2+52\,t-8)}{3(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^4}\right)\right)}{\left(27(14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1)(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^3\cdot\left(\frac{1}{9(14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1)^2}+\frac{4(14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1)}{9(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^3}\right)^2\cdot\left(\frac{56\,t^3-66\,t^2+32\,t-6}{3\sqrt{14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1}(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^{\frac{3}{2}}}-\frac{\sqrt{14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1}(76\,t^3-108\,t^2+52\,t-8)}{(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^{\frac{5}{2}}}\right)\right)}
$$

$$
+\frac{4(56\,t^3-66\,t^2+32\,t-6)\cdot\left(-\frac{(56\,t^3-66\,t^2+32\,t-6)^2}{6\big((14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1)(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)\big)^{\frac{3}{2}}}-\frac{(56\,t^3-66\,t^2+32\,t-6)(76\,t^3-108\,t^2+52\,t-8)}{\sqrt{14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1}(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^{\frac{5}{2}}}+\frac{168\,t^2-132\,t+32}{3\sqrt{14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1}(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^{\frac{3}{2}}}+\frac{5\sqrt{14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1}(76\,t^3-108\,t^2+52\,t-8)^2}{2(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^{\frac{7}{2}}}-\frac{\sqrt{14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1}(228\,t^2-216\,t+52)}{(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^{\frac{5}{2}}}\right)}{\left(27(14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1)(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^3\cdot\left(\frac{1}{9(14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1)^2}+\frac{4(14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1)}{9(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^3}\right)\cdot\left(\frac{56\,t^3-66\,t^2+32\,t-6}{3\sqrt{14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1}(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^{\frac{3}{2}}}-\frac{\sqrt{14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1}(76\,t^3-108\,t^2+52\,t-8)}{(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^{\frac{5}{2}}}\right)^2\right)}
$$

şeklinde birer katsayıdır.

İspat. α_3 eğrisinin türevi alınırsa

$$\alpha_3'(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(-\beta N - \gamma C + \gamma W\big)$$

bulunur. Buradan norm hesaplanırsa

$$\|\alpha_3'(t)\| = \sqrt{\frac{\beta^2 + 2\gamma^2}{2}}$$

olur. Bu ifade (2.1.1) de yerine yazılırsa $\alpha_3(t)$-Bezier Smarandache eğrisinin T_{α_3} teğet vektörü

$$T_{\alpha_3}(t) = \frac{-\beta N - \gamma C + \gamma W}{\sqrt{\beta^2 + 2\gamma^2}}$$

şeklinde olur. $\alpha_3'(t)$' den tekrar türev alınır ve (2.2.6) bağıntısı yerine yazılırsa $\alpha_3''(t)$ vektörü

$$\begin{aligned}
\alpha_3''(t) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\big(-\beta N - \gamma C + \gamma W\big)' \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\big(-\beta' N - \beta N' - \gamma' C - \gamma C' - \gamma' W + \gamma W'\big) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\big(-\beta' N - \beta(\beta C) - \gamma' C - \gamma(-\beta N + \gamma W) + \gamma' W + \gamma(-\gamma C)\big) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\big(-\beta' N - \beta^2 C - \gamma' C + \gamma\beta N - \gamma^2 W + \gamma' W - \gamma^2 C\big) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\Bigg((-\beta' + \gamma\beta)N + (-\beta^2 - \gamma' - \gamma^2)C + (-\gamma^2 + \gamma')W \Bigg)
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Burada çatı vektörlerinin katsayıları

$$\sigma_7 = -\beta' + \gamma\beta \ , \sigma_8 = -\beta^2 - \gamma' - \gamma^2 \ , \sigma_9 = -\gamma^2 + \gamma'$$

şeklinde alınırsa $\alpha_3''(t)$ vektörünün

$$\alpha_3''(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\sigma_7 N + \sigma_8 C + \sigma_9 W\big)$$

olur. $\alpha_3'(t)$ ve $\alpha_3''(t)$ vektörleri vektörel çarpılırsa

$$\alpha_3'(t) \wedge \alpha_3''(t) = \frac{1}{2}\big(-\gamma(\sigma_8 + \sigma_9)N + (\gamma\sigma_7 + \beta\sigma_9)C + (\gamma\sigma_7 - \beta\sigma_8)W\big)$$

şeklinde bulunur. Norm alınırsa

$$\|\alpha_3'(t) \wedge \alpha_3''(t)\| = \frac{1}{2}\sqrt{\gamma^2\sigma_7^2 + (\gamma^2+\beta^2)(\sigma_9^2+\sigma_8^2) + 2\beta\gamma(\sigma_9\sigma_7 - \sigma_8\sigma_7) + 2\gamma^2\sigma_9\sigma_8} \quad (3.2.2)$$

olur. $\alpha_3(t)$ eğrisinin $B_{\alpha_3}(t)$ binormal ve $N_{\alpha_3}(t)$ aslinormal vektörleri

$$\begin{aligned} B_{\alpha_3}(t) &= \frac{\alpha_3'(t) \wedge \alpha_3''(t)}{\|\alpha_3'(t) \wedge \alpha_3''(t)\|} \\ &= \frac{-\gamma(\sigma_8+\sigma_9)N + (\gamma\sigma_7 + \beta\sigma_9)C + (\gamma\sigma_7 - \beta\sigma_8)W}{\sqrt{\gamma^2\sigma_7^2 + (\gamma^2+\beta^2)(\sigma_9^2+\sigma_8^2) + 2\beta\gamma(\sigma_9\sigma_7 - \sigma_8\sigma_7) + 2\gamma^2\sigma_9\sigma_8}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_{\alpha_3}(t) &= B_{\alpha_3}(t) \wedge T_{\alpha_3}(t) \\ &= \frac{\begin{array}{c}\big(2\gamma^2\sigma_7 + \gamma\beta(\sigma_9-\sigma_8)\big)N + \big(\gamma^2(\sigma_8+\sigma_9) + \beta^2\sigma_8 - \beta\gamma\sigma_7\big)C \\ +\big(\gamma^2(\sigma_8+\sigma_9) + \beta^2\sigma_9 + \beta\gamma\sigma_7\big)W\end{array}}{\sqrt{(2\gamma^2+\beta^2)\big(\gamma^2\sigma_7^2 + (\gamma^2+\beta^2)(\sigma_9^2+\sigma_8^2) + 2\beta\gamma(\sigma_9\sigma_7 - \sigma_8\sigma_7) + 2\gamma^2\sigma_9\sigma_8\big)}} \end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

Teorem 3.2.9 $\alpha_3(t)$-Bezier Smarandache eğrisinin κ_{α_3} eğriliği ve τ_{α_3} burulması sırasıyla

$$\kappa_{\alpha_3} = \frac{\sqrt{2\Big(\gamma^2\sigma_7^2 + (\gamma^2+\beta^2)(\sigma_8^2+\sigma_9^2) + 2\beta\gamma\sigma_7(\sigma_9-\sigma_8) + 2\gamma^2\sigma_9\sigma_8\Big)}}{(\beta^2+2\gamma^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\tau_{\alpha_3} = \frac{\begin{array}{c}\sqrt{2}\Bigg((-\gamma\sigma_9 - \gamma\sigma_8)(\sigma_7' - \sigma_8\beta) + (\beta\sigma_9 + \gamma\sigma_7)(\sigma_7\beta + \sigma_8' - \sigma_9\gamma) \\ +\big((-\beta\sigma_8 + \gamma\sigma_7)(\sigma_8\gamma + \sigma_9')\Bigg)\end{array}}{\gamma^2\sigma_7^2(\gamma^2+\beta^2)(\sigma_9^2+\sigma_8^2) + 2\beta\gamma(\sigma_9\sigma_7 - \sigma_8\sigma_7) + 2\gamma^2\sigma_9\sigma_8}$$

şeklinde verilir.

İspat. (2.1.2) bağıntısından $\alpha_3(t)$-Bezier Smarandache eğrisinin κ_{α_3} eğriliği

$$\begin{aligned}\kappa_{\alpha_3}(t) &= \frac{\|\alpha_3'(t)\wedge\alpha_3''(t)\|}{\|\alpha_3'(t)\|^3}\\ &= \frac{\sqrt{2\Big(\gamma^2\sigma_7^2+(\gamma^2+\beta^2)(\sigma_8^2+\sigma_9^2)+2\beta\gamma\sigma_7(\sigma_9-\sigma_8)+2\gamma^2\sigma_9\sigma_8\Big)}}{(\beta^2+2\gamma^2)^{\frac{3}{2}}}\end{aligned}$$

olur. $\alpha_3''(t)$ vektörünün türevi alınırsa

$$\begin{aligned}\alpha_3'''(t) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\sigma_7'N+\sigma_7N'+\sigma_8'C+\sigma_8C'+\sigma_9'W+\sigma_9W'\Big)\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\sigma_7'N+\sigma_7(\beta C)+\sigma_8'C+\sigma_8(-\beta N+\gamma W)+\sigma_9'W+\sigma_9(-\gamma C)\Big)\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\sigma_7'N+\sigma_7\beta C+\sigma_8'C+-\sigma_8\beta N+\sigma_8\gamma W+\sigma_9'W-\sigma_9\gamma C\Big)\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big((\sigma_7'-\beta\sigma_8)N+(\beta\sigma_7+\sigma_8'-\gamma\sigma_9)C+(\gamma\sigma_8+\sigma_9')W\Big)\end{aligned}$$

bulunur. $\alpha_3'(t)$, $\alpha_3''(t)$ ve $\alpha_3'''(t)$ vektörlerinin determinantı hesaplanırsa

$$\begin{aligned}det(\alpha_3',\alpha_3'',\alpha_3''') &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\Big((-\gamma\sigma_9-\gamma\sigma_8)(\sigma_7'-\sigma_8\beta)+(\beta\sigma_9+\gamma\sigma_7)(\sigma_7\beta\sigma_8'-\sigma_9\gamma)\\ &\quad+(-\beta\sigma_8\gamma\sigma_7)(\sigma_8\gamma+\sigma_9')\Big)\end{aligned}$$

olur. (2.1.2) bağıntısından $\alpha_3(t)$-Bezier Smarandache eğrisinin $\tau_{\alpha_3}(t)$ burulması

$$\begin{aligned}\tau_{\alpha_3}(t) &= \frac{\det(\alpha_3'(t),\alpha_3''(t),\alpha_3'''(t))}{\|\alpha_3'(t)\wedge\alpha_3''(t)\|^2}\\ &= \frac{\sqrt{2}\Bigg((-\gamma\sigma_9-\gamma\sigma_8)(\sigma_7'-\sigma_8\beta)+(\beta\sigma_9+\gamma\sigma_7)(\sigma_7\beta+\sigma_8'-\sigma_9\gamma)\\ +\big((-\beta\sigma_8+\gamma\sigma_7)(\sigma_8\gamma+\sigma_9')\Bigg)}{\gamma^2\sigma_7^2(\gamma^2+\beta^2)(\sigma_9^2+\sigma_8^2)+2\beta\gamma(\sigma_9\sigma_7-\sigma_8\sigma_7)+2\gamma^2\sigma_9\sigma_8}\end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 3.2.10 α_3 eğrisinin alternatif çatı vektörleri $N_{\alpha_3}, C_{\alpha_3}, W_{\alpha_3}$ olsun. Bu vektörler sırasıyla

$$N_{\alpha_3}(t) = \frac{\begin{array}{c}\big(2\gamma^2\sigma_7 + \gamma\beta(\sigma_9 - \sigma_8)\big)N + \big(\gamma^2(\sigma_8+\sigma_9) + \beta^2\sigma_8 - \beta\gamma\sigma_7\big)C \\ +\big(\gamma^2(\sigma_8+\sigma_9) + \beta^2\sigma_9 + \beta\gamma\sigma_7\big)W\end{array}}{\sqrt{(2\gamma^2+\beta^2)\big(\gamma^2\sigma_7^2 + (\gamma^2+\beta^2)(\sigma_9^2+\sigma_8^2) + 2\beta\gamma(\sigma_9\sigma_7 - \sigma_8\sigma_7) + 2\gamma^2\sigma_9\sigma_8\big)}},$$

$$\begin{aligned} C_{\alpha_3}(t) &= \frac{1}{\sqrt{\kappa_{\alpha_3}^2 + \tau_{\alpha_3}^2}(x_3 y_3)}\Bigg(\big(\kappa_{\alpha_3}\beta y_3 - \tau_{\alpha_3}\gamma x_3(\sigma_8+\sigma_9)\big)N \\ &\quad +\big(\kappa_{\alpha_3}\gamma y_3 + \tau_{\alpha_3} x_3(\gamma\sigma_7 + \beta\sigma_9)\big)C \\ &\quad +\big(-\kappa_{\alpha_3}\gamma y_3 + \tau_{\alpha_3} x_3(\gamma\sigma_7 - \beta\sigma_8)\big)W\Bigg), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{\alpha_3}(t) &= \frac{1}{\sqrt{\kappa_{\alpha_3}^2 + \tau_{\alpha_3}^2}(x_3 y_3)}\Bigg(-\big(\tau_{\alpha_3}\beta y_3 + \kappa_{\alpha_3}\gamma x_3(\sigma_8+\sigma_9)\big)N \\ &\quad +\big(\kappa_{\alpha_3} x_3(\gamma\sigma_7 + \beta\sigma_9) - \tau_{\alpha_3}\gamma y_3\big)C \\ &\quad +\big(\tau_{\alpha_3}\gamma y_3 + \kappa_{\alpha_3} x_3(\gamma\sigma_7 - \beta\sigma_8)\big)W\Bigg) \end{aligned}$$

şeklinde verilir.

İspat. (2.2.5) bağıntısına benzer olarak $C_{\alpha_3}(t)$ vektörü

$$C_{\alpha_3}(t) = -\frac{\kappa_{\alpha_3}}{\sqrt{\kappa_{\alpha_3}^2 + \tau_{\alpha_3}^2}}T_{\alpha_3} + \frac{\tau_{\alpha_3}}{\sqrt{\kappa_{\alpha_3}^2 + \tau_{\alpha_3}^2}}B_{\alpha_3}$$

yazılır. Teorem 3.2.8 den T_{α_3} ve B_{α_3} vektörleri burada yerine yazılırsa $C_{\alpha_3}(t)$ vektörü

$$
\begin{aligned}
C_{\alpha_3}(t) &= \frac{\kappa_{\alpha_3}\beta y_3 - \tau_{\alpha_3}\gamma x_3(\sigma_8+\sigma_9)}{(x_3y_3)\sqrt{\kappa_{\alpha_3}^2+\tau_{\alpha_3}^2}}N \\
&\quad + \frac{\kappa_{\alpha_3}\gamma y_3 + \tau_{\alpha_3}x_3(\gamma\sigma_7+\beta\sigma_9)}{(x_3y_3)\sqrt{\kappa_{\alpha_3}^2+\tau_{\alpha_3}^2}}C \\
&\quad + \frac{-\kappa_{\alpha_3}\gamma y_3 + \tau_{\alpha_3}x_3(\gamma\sigma_7-\beta\sigma_8)}{(x_3y_3)\sqrt{\kappa_{\alpha_3}^2+\tau_{\alpha_3}^2}}W
\end{aligned}
$$

şeklinde bulunur. Burada x_3 ve y_3 ifadeleri

$$
\begin{aligned}
x_3 &= \sqrt{\beta^2+2\gamma^2}\ , \\
y_3 &= \sqrt{\gamma^2\sigma_7^2+(\gamma^2+\beta^2)(\sigma_8^2+\sigma_9^2)+2\beta\gamma(\sigma_9\sigma_7-\sigma_8\sigma_7)+2\gamma^2\sigma_9\sigma_8}
\end{aligned}
$$

şeklinde birer katsayıdır. (2.2.5) bağıntısına benzer olarak $W_{\alpha_3}(t)$ vektörü

$$
W_{\alpha_3}(t) = \frac{\tau_{\alpha_3}}{\sqrt{\kappa_{\alpha_3}^2+\tau_{\alpha_3}^2}}T_{\alpha_3} + \frac{\kappa_{\alpha_3}}{\sqrt{\kappa_{\alpha_3}^2+\tau_{\alpha_3}^2}}B_{\alpha_3}
$$

olur. T_{α_3} ve B_{α_3} vektörleri burada yerine yazılırsa $W_{\alpha_3}(t)$ vektörü

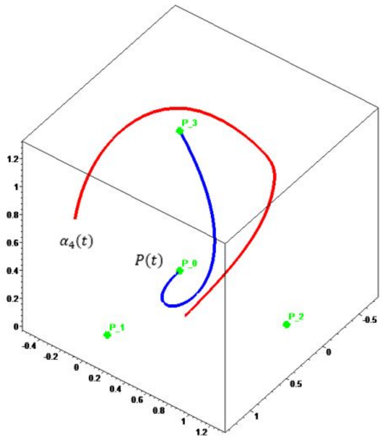
$$
\begin{aligned}
W_{\alpha_3}(t) &= \frac{1}{(x_3y_3)\sqrt{\kappa_{\alpha_3}^2+\tau_{\alpha_3}^2}}\Big(-\big(\tau_{\alpha_3}\beta y_3 + \kappa_{\alpha_3}\gamma x_3(\sigma_8+\sigma_9)\big)N \\
&\quad +\big(\kappa_{\alpha_3}x_3(\gamma\sigma_7+\beta\sigma_9) - \tau_{\alpha_3}\gamma y_3\big)C \\
&\quad +\big(\tau_{\alpha_3}\gamma y_3 + \kappa_{\alpha_3}x_3(\gamma\sigma_7-\beta\sigma_8)\big)W\Big)
\end{aligned}
$$

şeklinde elde edilir.

Tanım 3.2.4 Kübik Bezier eğrisinin alternatif çatı vektörleri $\{N, C, W\}$ olsun.

$$
\alpha_4(t) = \frac{1}{\sqrt{3}}(N+C+W)
$$

şeklinde tanımlı $\alpha_4(t)$ vektörünün çizdiği regüler eğriye α_4-Bezier Smarandache eğrisi denir. Eğriye ait grafik Şekil 3.8 de verilmiştir.



Şekil 3.8: α_4-Bezier Smarandache eğrisi

Burada yeşil noktalar kontrol noktalarıdır.Mavi olan eğri $P(t)$ kübik Bezier eğrisi, kırmızı olan eğri ise $\alpha_4(t)$-Bezier Smarandache eğrisidir.

Teorem 3.2.11 $\alpha_4(t)$-Bezier Smarandache eğrisinin Frenet vektörleri $T_{\alpha_4}, N_{\alpha_4}, B_{\alpha_4}$ olsun. Bu vektörler sırasıyla

$$T_{\alpha_4}(t) = \frac{-\beta N + (\beta-\gamma)C + \gamma W}{\sqrt{2\beta^2+2\gamma^2-2\beta\gamma}},$$

$$N_{\alpha_4}(t) = \frac{\begin{array}{c}\Big(\beta^2(\sigma_{10}+\sigma_{11}) + \gamma\beta(\sigma_{12}-\sigma_{11}-2\sigma_{10}) + 2\gamma^2\sigma_{10}\Big)N \\ +\Big(\gamma^2(\sigma_{11}+\sigma_{12}) + \beta^2(\sigma_{10}+\sigma_{11}) - \beta\gamma(\sigma_{10}+\sigma_{12})\Big)C \\ +\Big(\gamma^2(\sigma_{11}+\sigma_{12}) + \beta\gamma(\sigma_{10}-\sigma_{11}) + 2\beta^2\sigma_{12} - 2\beta\gamma\sigma_{12}\Big)W\end{array}}{\begin{array}{c}\Bigg((2\beta^2+2\gamma^2-2\beta\gamma)\Big((\gamma^2+2\beta^2)(\sigma_{11}^2+\sigma_{12}^2) - 2\beta\gamma(\sigma_{10}^2+\sigma_{12}^2+\sigma_{11}\sigma_{12} \\ -\sigma_{10}\sigma_{12}+\sigma_{10}\sigma_{11}) + \sigma_{11}(2\gamma^2\sigma_{12}+2\beta^2\sigma_{10}) + 2\gamma^2\sigma_{10}^2\Big)\Bigg)^{\frac{1}{2}}\end{array}},$$

$$B_{\alpha_4}(t) = \frac{(\beta\sigma_{12}-\gamma\sigma_{12}-\gamma\sigma_{11})N + (\beta\sigma_{12}+\gamma\sigma_{10})C + (-\beta\sigma_{11}-\beta\sigma_{10}+\gamma\sigma_{10})W}{\begin{array}{c}\Big((\gamma^2+2\beta^2)(\sigma_{11}^2+\sigma_{12}^2) - 2\beta\gamma(\sigma_{10}^2+\sigma_{12}^2+\sigma_{11}\sigma_{12}-\sigma_{10}\sigma_{12}+\sigma_{10}\sigma_{11}) \\ +\sigma_{11}(2\gamma^2\sigma_{12}+2\beta^2\sigma_{10}) + 2\gamma^2\sigma_{10}^2\Big)^{\frac{1}{2}}\end{array}}$$

şeklinde verilir. Burada σ_7, σ_8 ve σ_9

$$\begin{aligned}
\sigma_{10} &= -\beta' - \beta^2 + \beta\gamma \\
&= -\frac{1}{9((14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1)^2)} - \frac{4(14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1)}{9(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^3} \\
&\quad - \frac{\begin{array}{c} 4\sqrt{\dfrac{1}{(14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1)^2} + \dfrac{4(14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1)}{(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^3}} \\ \cdot\big(56\,t^3-66\,t^2+32\,t-6\big) \end{array}}{\left(\begin{array}{l} 81(14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1)(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^3 \\ \cdot\left(\dfrac{1}{9(14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1)^2} + \dfrac{4(14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1)}{9(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^3}\right) \\ \cdot\left(\dfrac{56\,t^3-66\,t^2+32\,t-6}{3\sqrt{14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1}(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^{\frac{3}{2}}}\right. \\ \quad \left. - \dfrac{\sqrt{14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1}(76\,t^3-108\,t^2+52\,t-8)}{(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^{\frac{5}{2}}}\right) \end{array}\right)} \\
&\quad + \frac{\left(\begin{array}{l} \dfrac{2(56\,t^3-66\,t^2+32\,t-6)}{(14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1)^3} - \dfrac{4(56\,t^3-66\,t^2+32\,t-6)}{(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^3} \\ + \dfrac{12(14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1)(76\,t^3-108\,t^2+52\,t-8)}{(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^4} \end{array}\right)}{6\sqrt{\dfrac{(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^3+4(14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1)^3}{(14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1)^2(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^3}}},
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\sigma_{11} &= -\beta^2+\beta'-\gamma'-\gamma^2 \\
&= -\frac{1}{9((14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1)^2)}-\frac{4(14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1)}{9(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^3}
\end{aligned}
$$

$$
-\frac{16(56\,t^3-66\,t^2+32\,t-6)^2}{\left(\begin{array}{l}729(14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1)^2(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^6 \\ \cdot\left(\frac{1}{9(14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1)^2}+\frac{4(14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1)}{9(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^3}\right)^2 \\ \cdot\left(\frac{56\,t^3-66\,t^2+32\,t-6}{3\sqrt{14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1}(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^{\frac{3}{2}}}\right. \\ \qquad\left.-\frac{\sqrt{14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1}(76\,t^3-108\,t^2+52\,t-8)}{(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^{\frac{5}{2}}}\right)^2\end{array}\right)}
$$

$$
+\frac{\left(\begin{array}{l}-\frac{2(56\,t^3-66\,t^2+32\,t-6)}{(14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1)^3}+\frac{4(56\,t^3-66\,t^2+32\,t-6)}{(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^3} \\ -\frac{12(14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1)(76\,t^3-108\,t^2+52\,t-8)}{(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^4}\end{array}\right)}{6\sqrt{\frac{(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^3+4(14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1)^3}{(14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1)^2(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^3}}}
$$

$$
-\frac{4(56\,t^3-66\,t^2+32\,t-6)^2}{\left(\begin{array}{l}27(14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1)^2(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^3 \\ \cdot\left(\frac{1}{9(14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1)^2}+\frac{4(14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1)}{9(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^3}\right) \\ \cdot\left(\frac{56\,t^3-66\,t^2+32\,t-6}{3\sqrt{14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1}(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^{\frac{3}{2}}}\right. \\ \qquad\left.-\frac{\sqrt{14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1}(76\,t^3-108\,t^2+52\,t-8)}{(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^{\frac{5}{2}}}\right)\end{array}\right)}
$$

$$
- \frac{4(56\,t^3 - 66\,t^2 + 32\,t - 6)(76\,t^3 - 108\,t^2 + 52\,t - 8)}{\left(\begin{array}{l} 9(14\,t^4 - 22\,t^3 + 16\,t^2 - 6\,t + 1)(19\,t^4 - 36\,t^3 + 26\,t^2 - 8\,t + 1)^4 \\ \cdot \left(\frac{1}{9(14\,t^4 - 22\,t^3 + 16\,t^2 - 6\,t + 1)^2} + \frac{4(14\,t^4 - 22\,t^3 + 16\,t^2 - 6\,t + 1)}{9(19\,t^4 - 36\,t^3 + 26\,t^2 - 8\,t + 1)^3} \right) \\ \cdot \left(\frac{56\,t^3 - 66\,t^2 + 32\,t - 6}{3\sqrt{14\,t^4 - 22\,t^3 + 16\,t^2 - 6\,t + 1}(19\,t^4 - 36\,t^3 + 26\,t^2 - 8\,t + 1)^{\frac{3}{2}}} \right. \\ \quad \left. - \frac{\sqrt{14\,t^4 - 22\,t^3 + 16\,t^2 - 6\,t + 1}(76\,t^3 - 108\,t^2 + 52\,t - 8)}{(19\,t^4 - 36\,t^3 + 26\,t^2 - 8\,t + 1)^{\frac{5}{2}}} \right) \end{array} \right)}
$$

$$
+ \frac{4(168\,t^2 - 132\,t + 32)}{\left(\begin{array}{l} 27(14\,t^4 - 22\,t^3 + 16\,t^2 - 6\,t + 1)(19\,t^4 - 36\,t^3 + 26\,t^2 - 8\,t + 1)^3 \\ \cdot \left(\frac{1}{9(14\,t^4 - 22\,t^3 + 16\,t^2 - 6\,t + 1)^2} + \frac{4(14\,t^4 - 22\,t^3 + 16\,t^2 - 6\,t + 1)}{9(19\,t^4 - 36\,t^3 + 26\,t^2 - 8\,t + 1)^3} \right) \\ \cdot \left(\frac{56\,t^3 - 66\,t^2 + 32\,t - 6}{3\sqrt{14\,t^4 - 22\,t^3 + 16\,t^2 - 6\,t + 1}(19\,t^4 - 36\,t^3 + 26\,t^2 - 8\,t + 1)^{\frac{3}{2}}} \right. \\ \quad \left. - \frac{\sqrt{14\,t^4 - 22\,t^3 + 16\,t^2 - 6\,t + 1}(76\,t^3 - 108\,t^2 + 52\,t - 8)}{(19\,t^4 - 36\,t^3 + 26\,t^2 - 8\,t + 1)^{\frac{5}{2}}} \right) \end{array} \right)}
$$

$$
- \frac{\left(\begin{array}{l} 4(56\,t^3 - 66\,t^2 + 32\,t - 6) \left(- \frac{2(56\,t^3 - 66\,t^2 + 32\,t - 6)}{9(14\,t^4 - 22\,t^3 + 16\,t^2 - 6\,t + 1)^3} \right. \\ \quad + \frac{4(56\,t^3 - 66\,t^2 + 32\,t - 6)}{9(19\,t^4 - 36\,t^3 + 26\,t^2 - 8\,t + 1)^3} \\ \quad \left. - \frac{4(14\,t^4 - 22\,t^3 + 16\,t^2 - 6\,t + 1)(76\,t^3 - 108\,t^2 + 52\,t - 8)}{3(19\,t^4 - 36\,t^3 + 26\,t^2 - 8\,t + 1)^4} \right) \end{array} \right)}{\left(\begin{array}{l} 27(14\,t^4 - 22\,t^3 + 16\,t^2 - 6\,t + 1)(19\,t^4 - 36\,t^3 + 26\,t^2 - 8\,t + 1)^3 \\ \cdot \left(\frac{1}{9(14\,t^4 - 22\,t^3 + 16\,t^2 - 6\,t + 1)^2} + \frac{4(14\,t^4 - 22\,t^3 + 16\,t^2 - 6\,t + 1)}{9(19\,t^4 - 36\,t^3 + 26\,t^2 - 8\,t + 1)^3} \right)^2 \\ \cdot \left(\frac{56\,t^3 - 66\,t^2 + 32\,t - 6}{3\sqrt{14\,t^4 - 22\,t^3 + 16\,t^2 - 6\,t + 1}(19\,t^4 - 36\,t^3 + 26\,t^2 - 8\,t + 1)^{\frac{3}{2}}} \right. \\ \quad \left. - \frac{\sqrt{14\,t^4 - 22\,t^3 + 16\,t^2 - 6\,t + 1}(76\,t^3 - 108\,t^2 + 52\,t - 8)}{(19\,t^4 - 36\,t^3 + 26\,t^2 - 8\,t + 1)^{\frac{5}{2}}} \right) \end{array} \right)}
$$

$$
- \frac{\left(\begin{aligned} & 4(56\,t^3 - 66\,t^2 + 32\,t - 6)\cdot\Bigg(- \frac{(56\,t^3-66\,t^2+32\,t-6)^2}{6\big((14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1)(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)\big)^{\frac{3}{2}}} \\ & - \frac{(56\,t^3-66\,t^2+32\,t-6)(76\,t^3-108\,t^2+52\,t-8)}{\sqrt{14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1}(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^{\frac{5}{2}}} \\ & + \frac{168\,t^2-132\,t+32}{3\sqrt{14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1}(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^{\frac{3}{2}}} \\ & + \frac{5\sqrt{14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1}(76\,t^3-108\,t^2+52\,t-8)^2}{2(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^{\frac{7}{2}}} \\ & - \frac{\sqrt{14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1}(228\,t^2-216\,t+52)}{(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^{\frac{5}{2}}}\Bigg) \end{aligned}\right)}{\left(\begin{aligned} & 27(14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1)(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^3 \\ & \cdot\left(\frac{1}{9(14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1)^2} + \frac{4(14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1)}{9(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^3}\right) \\ & \cdot\Bigg(\frac{56\,t^3-66\,t^2+32\,t-6}{3\sqrt{14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1}(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^{\frac{3}{2}}} \\ & - \frac{\sqrt{14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1}(76\,t^3-108\,t^2+52\,t-8)}{(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^{\frac{5}{2}}}\Bigg)^2 \end{aligned}\right)},
$$

$$
\begin{aligned}
\sigma_{12} &= \beta\gamma - \gamma^2 + \gamma' \\
&= - \frac{\begin{aligned} & 4\sqrt{\frac{1}{(14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1)^2} + \frac{4(14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1)}{(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^3}} \\ & \cdot\big(56\,t^3-66\,t^2+32\,t-6\big) \end{aligned}}{\left(\begin{aligned} & 81(14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1)(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^3 \\ & \cdot\left(\frac{1}{9(14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1)^2} + \frac{4(14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1)}{9(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^3}\right) \\ & \cdot\Bigg(\frac{56\,t^3-66\,t^2+32\,t-6}{3\sqrt{14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1}(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^{\frac{3}{2}}} \\ & - \frac{\sqrt{14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1}(76\,t^3-108\,t^2+52\,t-8)}{(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^{\frac{5}{2}}}\Bigg) \end{aligned}\right)}
\end{aligned}
$$

$$-\frac{16(56\,t^3-66\,t^2+32\,t-6)^2}{\left(\begin{array}{l}729(14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1)^2(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^6\\ \cdot\left(\frac{1}{9(14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1)^2}+\frac{4(14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1)}{9(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^3}\right)^2\\ \cdot\left(\frac{56\,t^3-66\,t^2+32\,t-6}{3\sqrt{14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1}(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^{\frac{3}{2}}}\right.\\ \quad\left.-\frac{\sqrt{14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1}(76\,t^3-108\,t^2+52\,t-8)}{(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^{\frac{5}{2}}}\right)^2\end{array}\right)}$$

$$+\frac{4(56\,t^3-66\,t^2+32\,t-6)^2}{\left(\begin{array}{l}27(14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1)^2(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^3\\ \cdot\left(\frac{1}{9(14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1)^2}+\frac{4(14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1)}{9(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^3}\right)\\ \cdot\left(\frac{56\,t^3-66\,t^2+32\,t-6}{3\sqrt{14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1}(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^{\frac{3}{2}}}\right.\\ \quad\left.-\frac{\sqrt{14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1}(76\,t^3-108\,t^2+52\,t-8)}{(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^{\frac{5}{2}}}\right)\end{array}\right)}$$

$$+\frac{4(56\,t^3-66\,t^2+32\,t-6)(76\,t^3-108\,t^2+52\,t-8)}{\left(\begin{array}{l}9(14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1)(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^4\\ \cdot\left(\frac{1}{9(14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1)^2}+\frac{4(14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1)}{9(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^3}\right)\\ \cdot\left(\frac{56\,t^3-66\,t^2+32\,t-6}{3\sqrt{14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1}(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^{\frac{3}{2}}}\right.\\ \quad\left.-\frac{\sqrt{14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1}(76\,t^3-108\,t^2+52\,t-8)}{(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^{\frac{5}{2}}}\right)\end{array}\right)}$$

$$
- \frac{4(168\,t^2 - 132\,t + 32)}{\left(\begin{aligned} &27(14\,t^4 - 22\,t^3 + 16\,t^2 - 6\,t + 1)(19\,t^4 - 36\,t^3 + 26\,t^2 - 8\,t + 1)^3 \\ &\cdot\left(\frac{1}{9(14\,t^4 - 22\,t^3 + 16\,t^2 - 6\,t + 1)^2} + \frac{4(14\,t^4 - 22\,t^3 + 16\,t^2 - 6\,t + 1)}{9(19\,t^4 - 36\,t^3 + 26\,t^2 - 8\,t + 1)^3}\right) \\ &\cdot\left(\frac{56\,t^3 - 66\,t^2 + 32\,t - 6}{3\sqrt{14\,t^4 - 22\,t^3 + 16\,t^2 - 6\,t + 1}(19\,t^4 - 36\,t^3 + 26\,t^2 - 8\,t + 1)^{\frac{3}{2}}} \right. \\ &\left. \quad - \frac{\sqrt{14\,t^4 - 22\,t^3 + 16\,t^2 - 6\,t + 1}(76\,t^3 - 108\,t^2 + 52\,t - 8)}{(19\,t^4 - 36\,t^3 + 26\,t^2 - 8\,t + 1)^{\frac{5}{2}}}\right) \end{aligned}\right)}
$$

$$
+ \frac{\begin{aligned} &4(56\,t^3 - 66\,t^2 + 32\,t - 6) \cdot \left(- \frac{2(56\,t^3 - 66\,t^2 + 32\,t - 6)}{9(14\,t^4 - 22\,t^3 + 16\,t^2 - 6\,t + 1)^3} \right. \\ &\quad + \frac{4(56\,t^3 - 66\,t^2 + 32\,t - 6)}{9(19\,t^4 - 36\,t^3 + 26\,t^2 - 8\,t + 1)^3} \\ &\left. \quad - \frac{4(14\,t^4 - 22\,t^3 + 16\,t^2 - 6\,t + 1)(76\,t^3 - 108\,t^2 + 52\,t - 8)}{3(19\,t^4 - 36\,t^3 + 26\,t^2 - 8\,t + 1)^4}\right) \end{aligned}}{\left(\begin{aligned} &27(14\,t^4 - 22\,t^3 + 16\,t^2 - 6\,t + 1)(19\,t^4 - 36\,t^3 + 26\,t^2 - 8\,t + 1)^3 \\ &\cdot\left(\frac{1}{9(14\,t^4 - 22\,t^3 + 16\,t^2 - 6\,t + 1)^2} + \frac{4(14\,t^4 - 22\,t^3 + 16\,t^2 - 6\,t + 1)}{9(19\,t^4 - 36\,t^3 + 26\,t^2 - 8\,t + 1)^3}\right)^2 \\ &\cdot\left(\frac{56\,t^3 - 66\,t^2 + 32\,t - 6}{3\sqrt{14\,t^4 - 22\,t^3 + 16\,t^2 - 6\,t + 1}(19\,t^4 - 36\,t^3 + 26\,t^2 - 8\,t + 1)^{\frac{3}{2}}} \right. \\ &\left. \quad - \frac{\sqrt{14\,t^4 - 22\,t^3 + 16\,t^2 - 6\,t + 1}(76\,t^3 - 108\,t^2 + 52\,t - 8)}{(19\,t^4 - 36\,t^3 + 26\,t^2 - 8\,t + 1)^{\frac{5}{2}}}\right) \end{aligned}\right)}
$$

$$4(56\,t^3-66\,t^2+32\,t-6)\Bigg(-\frac{(56\,t^3-66\,t^2+32\,t-6)^2}{6\big((14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1)(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)\big)^{\frac{3}{2}}}$$

$$-\frac{(56\,t^3-66\,t^2+32\,t-6)(76\,t^3-108\,t^2+52\,t-8)}{\sqrt{14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1}(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^{\frac{5}{2}}}$$

$$+\frac{168\,t^2-132\,t+32}{3\sqrt{14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1}(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^{\frac{3}{2}}}$$

$$+\frac{5\sqrt{14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1}(76\,t^3-108\,t^2+52\,t-8)^2}{2(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^{\frac{7}{2}}}$$

$$-\frac{\sqrt{14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1}(228\,t^2-216\,t+52)}{(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^{\frac{5}{2}}}\Bigg)$$

$$+\ \Big/\ \left(\begin{aligned}&27(14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1)(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^3\\ &\cdot\left(\frac{1}{9(14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1)^2}+\frac{4(14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1)}{9(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^3}\right)\\ &\cdot\Bigg(\frac{56\,t^3-66\,t^2+32\,t-6}{3\sqrt{14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1}(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^{\frac{3}{2}}}\\ &\quad-\frac{\sqrt{14\,t^4-22\,t^3+16\,t^2-6\,t+1}(76\,t^3-108\,t^2+52\,t-8)}{(19\,t^4-36\,t^3+26\,t^2-8\,t+1)^{\frac{5}{2}}}\Bigg)^2\end{aligned}\right)$$

şeklinde birer katsayıdır.

İspat. α_4 eğrisinin türevi alınırsa

$$\alpha_4'(t)=\frac{1}{\sqrt{3}}\big(-\beta N+(\beta-\gamma)C+\gamma W\big)$$

bulunur. Buradan norm hesaplanırsa

$$\|\alpha_4'(t)\|=\sqrt{\frac{2\beta^2+2\gamma^2-2\beta\gamma}{3}}$$

olur. Bu ifade (2.1.1) de yerine yazılırsa $\alpha_4(t)$-Bezier Smarandache eğrisinin T_{α_4} teğet vektörü

$$T_{\alpha_4}(t)=\frac{-\beta N+(\beta-\gamma)C+\gamma W}{\sqrt{2\beta^2+2\gamma^2-2\beta\gamma}}$$

şeklinde olur. $\alpha_4''(t)$ den tekrar türev alınır ve (2.2.6) bağıntısı yerine yazılırsa $\alpha_4''(t)$ vektörü

$$\begin{aligned}
\alpha_4''(t) &= \frac{1}{\sqrt{3}}\big(-\beta N + (\beta-\gamma)C + \gamma W\big)' \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}}\big(-\beta' N - \beta N' + (\beta-\gamma)'C + (\beta-\gamma)C' - \gamma' W + \gamma W'\big) \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}}\big(-\beta' N - \beta(\beta C) + (\beta'-\gamma')C + (\beta-\gamma)(-\beta N + \gamma W) + \gamma' W + \gamma(-\gamma C)\big) \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}}\big(-\beta' N - \beta^2 C + \beta' C - \gamma' C - \beta^2 N + \beta\gamma W + \beta\gamma N - \gamma^2 W + \gamma' W - \gamma^2 C\big) \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}}\Big((-\beta' - \beta^2 + \beta\gamma)N + (-\beta^2 + \beta' - \gamma' - \gamma^2)C + (\beta\gamma - \gamma^2 + \gamma')W\Big)
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Burada çatı vektörlerinin katsayıları

$$\begin{aligned}
\sigma_{10} &= -\beta' - \beta^2 + \beta\gamma, \\
\sigma_{11} &= -\beta^2 + \beta' - \gamma' - \gamma^2, \\
\sigma_{12} &= \beta\gamma - \gamma^2 + \gamma'
\end{aligned}$$

şeklinde alınırsa $\alpha_4''(t)$ vektörünün ifadesi

$$\alpha_4''(t) = \frac{1}{\sqrt{3}}\big(\sigma_{10}N + \sigma_{11}C + \sigma_{12}W\big)$$

olur. $\alpha_4'(t)$ ve $\alpha_4''(t)$ vektörleri vektörel çarpılırsa

$$\alpha_4'(t) \wedge \alpha_4''(t) = \frac{1}{3}\Big(\big(\beta\sigma_{12} - \gamma\sigma_{11}\big)N + \big(\beta\sigma_{12} + \gamma\sigma_{10}\big)C + \big(-\beta\sigma_{11} - \sigma_{10}(\beta-\gamma)\big)W\Big)$$

şeklinde bulunur. Norm alınırsa

$$\|\alpha_4'(t) \wedge \alpha_4''(t)\| = \frac{1}{3}\sqrt{\begin{array}{l}(\gamma^2 + 2\beta^2)(\sigma_{11}^2 + \sigma_{12}^2) - 2\beta\gamma(\sigma_{10}^2 + \sigma_{12}^2 + \sigma_{11}\sigma_{12} - \sigma_{10}\sigma_{12} + \sigma_{10}\sigma_{11}) \\ +\sigma_{11}(2\gamma^2\sigma_{12} + 2\beta^2\sigma_{10}) + 2\gamma^2\sigma_{10}^2\end{array}}$$

olur. $\alpha_4(t)$ eğrisinin $B_{\alpha_4}(t)$ binormal ve $N_{\alpha_4}(t)$ aslinormal vektörleri

$$
\begin{aligned}
B_{\alpha_4}(t) &= \frac{\alpha_4'(t)\wedge\alpha_4''(t)}{\|\alpha_4'(t)\wedge\alpha_4''(t)\|}\\
&= \frac{\big(\beta\sigma_{12}-\gamma\sigma_{12}-\gamma\sigma_{11}\big)N+\big(\beta\sigma_{12}+\gamma\sigma_{10}\big)C+\big(-\beta\sigma_{11}-\beta\sigma_{10}+\gamma\sigma_{10}\big)W}{\sqrt{\begin{array}{l}(\gamma^2+2\beta^2)\big(\sigma_{11}^2+\sigma_{12}^2\big)-2\beta\gamma(\sigma_{10}^2+\sigma_{12}^2+\sigma_{11}\sigma_{12}-\sigma_{10}\sigma_{12}+\sigma_{10}\sigma_{11})\\ +\sigma_{11}(2\gamma^2\sigma_{12}+2\beta^2\sigma_{10})+2\gamma^2\sigma_{10}^2\end{array}}}\ ,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
N_{\alpha_4}(t) &= B_{\alpha_4}\wedge T_{\alpha_4}\\
&= \frac{\begin{array}{l}\Big(\beta^2(\sigma_{10}+\sigma_{11})+\gamma\beta(\sigma_{12}-\sigma_{11}-2\sigma_{10})+2\gamma^2\sigma_{10}\Big)N\\ +\Big(\gamma^2(\sigma_{11}+\sigma_{12})+\beta^2(\sigma_{10}+\sigma_{11})-\beta\gamma(\sigma_{10}+\sigma_{12})\Big)C\\ +\Big(\gamma^2(\sigma_{11}+\sigma_{12})+\beta\gamma(\sigma_{10}-\sigma_{11})+2\beta^2\sigma_{12}-2\beta\gamma\sigma_{12}\Big)W\end{array}}{\sqrt{\begin{array}{l}(2\beta^2+2\gamma^2-2\beta\gamma)\Big((\gamma^2+2\beta^2)(\sigma_{11}^2+\sigma_{12}^2)-2\beta\gamma(\sigma_{10}^2+\sigma_{12}^2+\sigma_{11}\sigma_{12}-\sigma_{10}\sigma_{12}\\ +\sigma_{10}\sigma_{11})+\sigma_{11}(2\gamma^2\sigma_{12}+2\beta^2\sigma_{10})+2\gamma^2\sigma_{10}^2\Big)\end{array}}}
\end{aligned}
$$

şeklinde bulunur.

Teorem 3.2.12 $\alpha_4(t)$-Bezier Smarandache eğrisinin κ_{α_4} eğriliği ve τ_{α_4} burulması sırasıyla

$$
\kappa_{\alpha_4} = \frac{\sqrt{\begin{array}{l}3\Big((\gamma^2+2\beta^2)(\sigma_{11}^2+\sigma_{12}^2)-2\beta\gamma(\sigma_{10}^2+\sigma_{12}^2+\sigma_{11}\sigma_{12}-\sigma_{10}\sigma_{12}+\sigma_{10}\sigma_{11})\\ +\sigma_{11}(2\gamma^2\sigma_{12}+2\beta^2\sigma_{10})+2\gamma^2\sigma_{10}^2\Big)\end{array}}}{\big(2\beta^2+2\gamma^2-2\beta\gamma\big)^{\frac{3}{2}}},
$$

$$
\tau_{\alpha_4} = \frac{\begin{array}{l}\sqrt{3}\Big((\beta\sigma_{12}-\gamma\sigma_{12}-\gamma\sigma_{11})(\sigma_{10}'-\beta\sigma_{11})(\beta\sigma_{12}+\gamma\sigma_{10})(\beta\sigma_{10}+\sigma_{11}'-\gamma\sigma_{12})\\ +(-\beta\sigma_{11}-\beta\sigma_{10}+\gamma\sigma_{10})(\gamma\sigma_{11}+\sigma_{12}')\Big)\end{array}}{\begin{array}{l}\Big((\gamma^2+2\beta^2)(\sigma_{11}^2+\sigma_{12}^2)-2\beta\gamma(\sigma_{10}^2+\sigma_{12}^2+\sigma_{11}\sigma_{12}-\sigma_{10}\sigma_{12}+\sigma_{10}\sigma_{11})\\ +(-\beta\sigma_{11}-\beta\sigma_{10}+\gamma\sigma_{10})(\gamma\sigma_{11}+\sigma_{12}')\Big)\end{array}}
$$

şeklinde verilir.

İspat. (2.1.2) bağıntısından $\alpha_4(t)$-Bezier Smarandache eğrisinin κ_{α_4} eğriliği

$$\begin{aligned}
\kappa_{\alpha_4}(t) &= \frac{\|\alpha_4'(t)\wedge\alpha_4''(t)\|}{\|\alpha_4'(t)\|^3}\\
&= \frac{\sqrt{\begin{array}{l}3\Big((\gamma^2+2\beta^2)(\sigma_{11}^2+\sigma_{12}^2)-2\beta\gamma(\sigma_{10}^2+\sigma_{12}^2+\sigma_{11}\sigma_{12}-\sigma_{10}\sigma_{12}+\sigma_{10}\sigma_{11})\\ +\sigma_{11}(2\gamma^2\sigma_{12}+2\beta^2\sigma_{10})+2\gamma^2\sigma_{10}^2\Big)\end{array}}}{\left(2\beta^2+2\gamma^2-2\beta\gamma\right)^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}$$

olur. $\alpha_4''(t)$ vektörünün türevi alınırsa

$$\begin{aligned}
\alpha_4'''(t) &= \frac{1}{\sqrt{3}}\Big(\sigma_{10}'N+\sigma_{10}N'+\sigma_{11}'C+\sigma_{11}C'+\sigma_{12}'W+\sigma_{12}W'\Big)\\
&= \frac{1}{\sqrt{3}}\Big(\sigma_{10}'N+\sigma_{10}(\beta C)+\sigma_{11}'C+\sigma_{11}(-\beta N+\gamma W)+\sigma_{12}'W+\sigma_{12}(-\gamma C)\Big)\\
&= \frac{1}{\sqrt{3}}\Big(\sigma_{10}'N+\sigma_{10}\beta C+\sigma_{11}'C+-\sigma_{11}\beta N+\sigma_{11}\gamma W+\sigma_{12}'W-\sigma_{12}\gamma C\Big)\\
&= \frac{1}{\sqrt{3}}\Big((\sigma_{10}'-\beta\sigma_{11})N+(\beta\sigma_{10}+\sigma_{11}'-\gamma\sigma_{12})C+(\gamma\sigma_{11}+\sigma_{12}')W\Big)
\end{aligned}$$

bulunur. $\alpha_4'(t)$, $\alpha_4''(t)$ ve $\alpha_4'''(t)$ vektörlerinin determinantı hesaplanırsa

$$\begin{aligned}
det(\alpha_4',\alpha_4'',\alpha_4''') &= \frac{1}{3\sqrt{3}}\Big((\beta\sigma_{12}-\gamma\sigma_{12}-\gamma\sigma_{11})(\sigma_{10}'-\beta\sigma_{11})\\
&\quad +(\beta\sigma_{12}+\gamma\sigma_{10})(\beta\sigma_{10}+\sigma_{11}'-\gamma\sigma_{12})\\
&\quad +(-\beta\sigma_{11}-\beta\sigma_{10}+\gamma\sigma_{10})(\gamma\sigma_{11}+\sigma_{12}')\Big)
\end{aligned}$$

olur. (2.1.2) bağıntısından $\alpha_4(t)$-Bezier Smarandache eğrisinin $\tau_{\alpha_4}(t)$ burulması

$$\tau_{\alpha_4}(t) = \frac{\det(\alpha_4'(t), \alpha_4''(t), \alpha_4'''(t))}{\|\alpha_4'(t) \wedge \alpha_4''(t)\|^2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}\Big((\beta\sigma_{12} - \gamma\sigma_{12} - \gamma\sigma_{11})(\sigma_{10}' - \beta\sigma_{11})(\beta\sigma_{12} + \gamma\sigma_{10})(\beta\sigma_{10} + \sigma_{11}' - \gamma\sigma_{12}) + (-\beta\sigma_{11} - \beta\sigma_{10} + \gamma\sigma_{10})(\gamma\sigma_{11} + \sigma_{12}')\Big)}{\Big((\gamma^2 + 2\beta^2)(\sigma_{11}^2 + \sigma_{12}^2) - 2\beta\gamma(\sigma_{10}^2 + \sigma_{12}^2 + \sigma_{11}\sigma_{12} - \sigma_{10}\sigma_{12} + \sigma_{10}\sigma_{11}) + (-\beta\sigma_{11} - \beta\sigma_{10} + \gamma\sigma_{10})(\gamma\sigma_{11} + \sigma_{12}')\Big)}$$

elde edilir.

Teorem 3.2.13 α_4 eğrisinin alternatif çatı vektörleri $N_{\alpha_4}, C_{\alpha_4}, W_{\alpha_4}$ olsun. Bu vektörler sırasıyla

$$N_{\alpha_4}(t) = \frac{\Big(\beta^2(\sigma_{10} + \sigma_{11}) + \gamma\beta(\sigma_{12} - \sigma_{11} - 2\sigma_{10}) + 2\gamma^2\sigma_{10}\Big)N + \Big(\gamma^2(\sigma_{11} + \sigma_{12}) + \beta^2(\sigma_{10} + \sigma_{11}) - \beta\gamma(\sigma_{10} + \sigma_{12})\Big)C + \Big(\gamma^2(\sigma_{11} + \sigma_{12}) + \beta\gamma(\sigma_{10} - \sigma_{11}) + 2\beta^2\sigma_{12} - 2\beta\gamma\sigma_{12}\Big)W}{\sqrt{(2\beta^2 + 2\gamma^2 - 2\beta\gamma)\Big((\gamma^2 + 2\beta^2)(\sigma_{11}^2 + \sigma_{12}^2) - 2\beta\gamma(\sigma_{10}^2 + \sigma_{12}^2 + \sigma_{11}\sigma_{12} - \sigma_{10}\sigma_{12} + \sigma_{10}\sigma_{11}) + \sigma_{11}(2\gamma^2\sigma_{12} + 2\beta^2\sigma_{10}) + 2\gamma^2\sigma_{10}^2\Big)}},$$

$$C_{\alpha_4}(t) = \frac{\kappa_{\alpha_4}\beta y_4 + \tau_{\alpha_4}x_4(\beta\sigma_{12} - \gamma\sigma_{12} - \gamma\sigma_{11})}{(x_4y_4)\sqrt{\kappa_{\alpha_4}^2 + \tau_{\alpha_4}^2}}N + \frac{\kappa_{\alpha_4}y_4(\gamma - \beta) + \tau_{\alpha_4}x_4(\beta\sigma_{12} + \gamma\sigma_{10})}{(x_4y_4)\sqrt{\kappa_{\alpha_4}^2 + \tau_{\alpha_4}^2}}C + \frac{-\kappa_{\alpha_4}\gamma y_4 + \tau_{\alpha_4}x_4(-\beta\sigma_{11} - \beta\sigma_{10} + \gamma\sigma_{10})}{(x_4y_4)\sqrt{\kappa_{\alpha_4}^2 + \tau_{\alpha_4}^2}}W,$$

$$
\begin{aligned}
W_{\alpha_4}(t) &= \frac{\kappa_{\alpha_4} x_4(\beta\sigma_{12} - \gamma\sigma_{12} - \gamma\sigma_{11}) - \tau_{\alpha_4}\beta y_4}{(x_4 y_4)\sqrt{\kappa_{\alpha_4}^2 + \tau_{\alpha_4}^2}} N \\
&+ \frac{\kappa_{\alpha_4} x_4(\beta\sigma_{12} + \gamma\sigma_{10}) + \tau_{\alpha_4}(\beta - \gamma) y_4}{(x_4 y_4)\sqrt{\kappa_{\alpha_4}^2 + \tau_{\alpha_4}^2}} C \\
&+ \frac{\kappa_{\alpha_4} x_4(-\beta\sigma_{11} - \beta\sigma_{10} + \gamma\sigma_{10}) + \tau_{\alpha_4} y_4}{(x_4 y_4)\sqrt{\kappa_{\alpha_4}^2 + \tau_{\alpha_4}^2}} W
\end{aligned}
$$

şeklinde verilir.

İspat. (2.2.5) bağıntısına benzer olarak $C_{\alpha_4}(t)$ vektörü

$$
C_{\alpha_4}(t) = -\frac{\kappa_{\alpha_4}}{\sqrt{\kappa_{\alpha_4}^2 + \tau_{\alpha_4}^2}} T_{\alpha_4} + \frac{\tau_{\alpha_4}}{\sqrt{\kappa_{\alpha_4}^2 + \tau_{\alpha_4}^2}} B_{\alpha_4}
$$

şeklinde yazılır. Teorem 3.2.11 den T_{α_4} ve B_{α_4} vektörleri burada yerine yazılırsa $C_{\alpha_4}(t)$ vektörü

$$
\begin{aligned}
C_{\alpha_4}(t) &= \frac{\kappa_{\alpha_4}\beta y_4 + \tau_{\alpha_4} x_4(\beta\sigma_{12} - \gamma\sigma_{12} - \gamma\sigma_{11})}{(x_4 y_4)\sqrt{\kappa_{\alpha_4}^2 + \tau_{\alpha_4}^2}} N \\
&+ \frac{\kappa_{\alpha_4} y_4(\gamma - \beta) + \tau_{\alpha_4} x_4(\beta\sigma_{12} + \gamma\sigma_{10})}{(x_4 y_4)\sqrt{\kappa_{\alpha_4}^2 + \tau_{\alpha_4}^2}} C \\
&+ \frac{-\kappa_{\alpha_4}\gamma y_4 + \tau_{\alpha_4} x_4(-\beta\sigma_{11} - \beta\sigma_{10} + \gamma\sigma_{10})}{(x_4 y_4)\sqrt{\kappa_{\alpha_4}^2 + \tau_{\alpha_4}^2}} W
\end{aligned}
$$

şeklinde bulunur.Burada x_4 ve y_4

$$
x_4 = \sqrt{2\beta^2 + 2\gamma^2 - 2\beta\gamma}
$$

$$
y_4 = \sqrt{\begin{array}{l} (\gamma^2 + 2\beta^2)\big(\sigma_{11}^2 + \sigma_{12}^2\big) - 2\beta\gamma(\sigma_{10}^2 + \sigma_{12}^2 + \sigma_{11}\sigma_{12} - \sigma_{10}\sigma_{12} + \sigma_{10}\sigma_{11}) \\ +\sigma_{11}(2\gamma^2\sigma_{12} + 2\beta^2\sigma_{10}) + 2\gamma^2\sigma_{10}^2 \end{array}}
$$

şeklinde katsayılardır.(2.2.5) bağıntısına benzer olarak $W_{\alpha_4}(t)$ vektörü

$$
W_{\alpha_4}(t) = \frac{\tau_{\alpha_4}}{\sqrt{\kappa_{\alpha_4}^2 + \tau_{\alpha_4}^2}} T_{\alpha_4} + \frac{\kappa_{\alpha_4}}{\sqrt{\kappa_{\alpha_4}^2 + \tau_{\alpha_4}^2}} B_{\alpha_4}
$$

olur. T_{α_4} ve B_{α_4} vektörleri burada yerine yazılırsa $W_{\alpha_4}(t)$ vektörü

$$
\begin{aligned}
W_{\alpha_4}(t) \quad = \quad & \frac{\kappa_{\alpha_4} x_4(\beta\sigma_{12} - \gamma\sigma_{12} - \gamma\sigma_{11}) - \tau_{\alpha_4}\beta y_4}{(x_4 y_4)\sqrt{\kappa_{\alpha_4}^2 + \tau_{\alpha_4}^2}} \; N \\
& + \frac{\kappa_{\alpha_4} x_4(\beta\sigma_{12} + \gamma\sigma_{10}) + \tau_{\alpha_4}(\beta - \gamma) y_4}{(x_4 y_4)\sqrt{\kappa_{\alpha_4}^2 + \tau_{\alpha_4}^2}} \; C \\
& + \frac{\kappa_{\alpha_4} x_4(-\beta\sigma_{11} - \beta\sigma_{10} + \gamma\sigma_{10}) + \tau_{\alpha_4} y_4}{(x_4 y_4)\sqrt{\kappa_{\alpha_4}^2 + \tau_{\alpha_4}^2}} \; W
\end{aligned}
$$

şeklinde elde edilir.

4. SONUÇ ve ÖNERİLER

Bu tezde elde edilen sonuçlar bulgular bölümünde şekillerle açıklanmıştır.Burada ilk olarak, $P_0 = (0, 0, 0)$, $P_1 = (1, 0, 0)$, $P_2 = (0, 1, 0)$, $P_3 = (0, 0, 1)$ kontrol noktaları esas alınarak elde edilen $P(t)$ kübik Bezier eğrisi tanımlandı. Bu noktalar özel olarak bir ortanormal birim çatı vektörlerini oluşturan noktalardır.Bu noktalar alınarak tanımlanan eğrinin Frenet vektörleri ve Darboux vektörü hesaplandı. Sonra Darboux vektörü kullanılarak eğri üzerinde ortanormal çatı olan N, C, W alternatif çatı vektörleri oluşturuldu.

Son olarak bu eğrinin Frenet çatıları ile alternatif çatı vektörlerinden elde edilen Smarandache eğrileri tanımlanarak her bir Smarandache eğrisi için Frenet ve alternatif çatı vektörleri ayrı ayrı hesaplandı.

Benzer çalışma başka ortanormal çatı vektörleri oluşturacak şekilde kontrol noktaları seçilerek ve o çatıdan geçen başka bir eğri oluşturularak çatılar arasındaki geçişler, eğriler arasındaki geçişlerle ilişkilendirilebilir.

Bezier Smarandache eğrileri dayanak eğrisi alınarak bunlar üzerine regle yüzeyler inşa edilip her bir yüzeyin bazı karakteristlik özellikleri hesaplanabilir. Elde edilen her bir yüzeylerin minimal yüzey olma ve açılabilir yüzey olma özelliği incelenebilir.

5. KAYNAKLAR

1. Ali A. T. (2010). Special Smarandache Curves in the Euclidean Space. *International Journal of Mathematical Combinatorics*, 2, 30-36.

2. Chen, B-Y. (2001). Constant ratio Hypersurface, *Soochow J.Math.*, 27(4), 353-362.

3. David, S. (2006). Curves and Surfaces for Computer Graphics. Springer Science+Business Media, Inc., USA, 460s.

4. Farin, G. (1997). Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design. Academic Press, USA, 429s.

5. Erkan, E. (2019). Öklid Düzleminde ve Öklid Uzayında Bezier Eğrileri. Doktora Tezi, Yıldız Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, İstanbul.

6. Fenchel, W. (1951). On The Differential Geometry of Closed Space Curves, *Bulletin of American Mathematical Society*, 57(44-54).

7. Gray, A., (1997). Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica, 2nd ed. Boca Raton, FL: CRC Press, 205s.

8. Hacısalihoglu, H.H., (1983). Diferensiyel Geometri, İnönü Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Yayınları, Malatya, Mat. no.7, 270s.

9. Kaplan, C.S & Mann, S. (2006). Introduction to Computer Graphics. Lecture notes CS 488/688 of University of Waterloo, 245s.

10. Kaya, O. and Önder, M. (2017). New Partner Curves in the Euclidean 3-Space E^3, *International Journal of Geometry*, 6(2), 41-50.

11. Kılıçoğlu, Ş. & Şenyurt, S. (2019). On the Cubic Bezier Curves In E^3. *Ordu Üniversitesi Bilim ve Teknoloji Dergisi*, 9(2), 83-97.

12. Kılıçoğlu, Ş. & Şenyurt, S. (2020). On the Involute of the Cubic Bezier Curve by Using Matrix Representation in E^3. *European Journal of Pure and Applied Mathematics*, 13(2), 216-226.

13. Marsh, D. (2005). Applied Geometry for Computer Graphics and CAD. Springer-Verlag London Berlin Heidelberg, London, 350s.

14. Sabuncuoğlu, A., (2014). Diferensiyel Geometri, Nobel Yayınları, 440s.

15. S.Şenyurt & S. Sivas, (2013). Smarandache eğrilerine ait bir uygulama, *Ordu Üniversitesi Bilim ve Teknoloji Dergisi*, 3(1), 46-60.

16. Şenyurt, S. (2018). D-Smarandache Curves According to the Sabban Frame of the Spherical Indicatrix Curve, *Turk. J. Math. Comput. Sci*, 9(39-49).

ÖZGEÇMİŞ

Adı-Soyadı	:	Şule ALTUNORDU
Doğum Yeri	:	
Doğum Tarihi	:	
Medeni Hali	:	
Bildiği Yabancı Dil	:	İngilizce
İletişim Bilgileri	:	Ordu Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü
Lise	:	Ordu Anadolu Lisesi-2015
Lisans	:	Ordu Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü-2019