T. C.

ORDU ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

STEFFENSEN TİPLİ EŞİTSİZLİKLER VE UYGULAMALARI

EMRE KARAMAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ORDU 2024

TEZ BİLDİRİMİ

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan ve kullanılan intihal tespit programının sonuçlarına göre; bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

EMRE KARAMAN

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

STEFFENSEN TİPLİ EŞİTSİZLİKLER VE UYGULAMALARI

EMRE KARAMAN

ORDU ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ, 46 SAYFA

(TEZ DANIŞMANI: PROF. DR. ERHAN SET)

Dört ana bölümden oluşmakta olan bu tezin birinci bölümünde Steffensen eşitsizliğinin tarihsel süreci ile ilgili bilgiler yer almaktadır. İkinci bölümde ise temel tanımlara, teoremlere, Steffensen eşitsizliği ile birlikte ilgili sonuçlara ve bazı uygulamalara yer verilmiştir. Üçüncü bölüm olan bulgular kısmında ise sırasıyla η-konveks fonksiyon ve P −fonksiyonu için yeni Steffen tipli eşitsizlikler sunulmuştur. Son bölümde ise sonuç ve önerilere yer verilmiştir.

Anahtar Kelimeler:, s-konveks fonksiyon, η- konveks fonksiyon, P −fonksiyonu, Steffensen eşitsizliği.

ABSTRACT

STEFFENSEN TYPE INEQUALITIES AND APPLICATIONS

EMRE KARAMAN

ORDU UNIVERSITY INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

MATHEMATICS

MASTER THESIS, 46 PAGES

(SUPERVISOR: PROF. DR. ERHAN SET)

The first part of this thesis, which consists of four main chapters, contains information about the historical process of Steffensen inequality. In the second chapter, basic definitions, theorems, results and some applications of Steffensen's inequality are given. In the third part, the main results section, new Steffensen-type inequalities for η-convex function and P-function are presented respectively. In the last section, conclusions and recommendations are given.

Keywords: s-convex function, η- convex function, $P-$function, Steffensen inequality.

TEŞEKKÜR

Lisans ve yüksek lisans eğitimi boyunca bana destek olan, yapmış olduğum çalışmalarımda yol gösteren, değerli danışman hocam Prof. Dr. Erhan SET'e ve tez yazım aşamasında desteklerini esirgemeyen Sayın Dr. Barış ÇELİK'e en içten dileklerimle teşekkür ederim. Ayrıca çalışmalarım boyunca bana yardımcı olan Ordu Üniversitesi Matematik Bölümü öğretim üyelerine teşekkür eder, saygılarımı sunarım.

Benden desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen her an yanımda olduklarını hissettiğim, bugünlere gelmemde büyük emeği olan aileme sonsuz sevgi ve teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER ve KISALTMALAR LİSTESİ

$\boldsymbol{K_s^1}$	:	Birinci Anlamda s-Konveks Fonksiyon Sınıfı
$\boldsymbol{K_s^2}$	:	İkinci Anlamda s-Konveks Fonksiyon Sınıfı
$\mathbb{R}$	:	Reel Sayılar Kümesi
$\boldsymbol{I}$	:	Reel Sayılar Kümesinde Bir Aralık
$\boldsymbol{I}°$	:	I' nın içi
$\boldsymbol{P(I)}$	:	P-fonksiyon Sınıfı

1. GİRİŞ

Eşitsizlik teorisi matematiğin hemen hemen bütün dallarında geniş bir uygulama alanına sahip sürekli gelişmekte olan bir teoridir. Eşitsizliklerin analizdeki kullanımından başka, yaklaşım teorisi, ortalamalar teorisi, nümerik analiz gibi matematiğin diğer alanlarının yanı sıra mühendislik ve fizik gibi alanlarda da kullanımı mevcuttur. Eşitsizliklerin bu alanlardaki kullanımları ile yeni uygulamalar ortaya çıkmış olup, günümüze kadar uzanan bir gelişme göstermiştir.

Literatürde Hölder, Minkowski, Young, Cauchy, Bernoulli, Chebyshev, Grüss, Hermite-Hadamard, Simpson, Ostrowski eşitsizlikleri gibi birçok eşitsizlik önemli bir yere sahiptir. Bu eşitsizliklerden bir tanesi de 1918 yılında J.F. Steffensen tarafından ispatlanan ve literatürde Steffensen eşitsizliği olarak bilinen aşağıdaki eşitsizliktir:

f ve g, (a,b) aralığı üzerinde tanımlı iki integrallenebilir fonksiyon, f azalan ve $\forall \nu \in (a,b)$ için $0 \leq g(t) \leq 1$ olsun. Bu taktirde

$$\lambda = \int_a^b g(\nu) d\nu$$

olmak üzere

$$\int_{b-\lambda}^b f(\nu) d\nu \leq \int_a^b f(\nu) g(\nu) d\nu \leq \int_a^{a+\lambda} f(\nu) d\nu$$

eşitsizliği geçerlidir.

Steffensen'in bu ünlü eşitsizliği ile ilgili olarak birçok farklı araştırmacı tarafından yeni çalışmalar literatürde yer almaktadır. 1919 yılında T. Hayashi, Steffensen eşitsizliğinde A pozitif bir sabit olmak üzere $g(\nu)$ yerine $g(\nu)/A$ alarak Steffensen eşitsizliğinin basit bir genelleştirmesini elde etmiştir. Bu eşitsizlikte literatürde Hayashi eşitsizliği olarak bilinmektedir. Daha sonra 1953 yılında Apery Steffensen eşitsizliğinin sonsuz aralıktaki bir genişlemesini ispatlamıştır. Bellman ise [5], 1959 yılındaki çalışmasında Steffensen eşitsizliğinin yeni bir genelleştirmesini aşağıdaki gibi literatüre kazandırmıştır.

f, $[a,b]$ aralığında negatif olmayan monoton azalan bir fonksiyon ve $f \in L_p[a,b]$ olsun. $[a,b]$ aralığında $g(\nu) \geq 0$ ve $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere $\displaystyle\int_a^b g(\nu)^q d\nu \leq 1$ ise

$$\lambda = \left(\int_a^b g(\nu) d\nu \right)^p$$

olmak üzere

$$\left(\int_a^b f(\nu)g(\nu)d\nu\right)^p < \int_a^{a+\lambda} f(\nu)^p d\nu,$$

eşitsizliği sağlanır.

1979 yılında Milovanović ve Pečarić [12], n. mertebeden konveks fonksiyonlar için Steffensen eşitsizliğini, 1982 yılında Pečarić [24], Steffensen eşitsizliğinin bazı yeni genelleştirmelerini, 2000 yılında Mercer [19], Steffensen eşitsizliğinin yeni genişlemelerini, 2001 yılında Cerone [7], herhangi iki alt aralığı içeren sınırlara izin verecek şekilde Steffensen eşitsizliğinin genelleştirmelerini elde etmişlerdir.

Ayrıca 2005 ve 2007 yılında Liu [17, 18] Steffensen eşitsizliğinin bazı genelleştirmelerini ve genişlemelerini, Wu and Srivastava [31] Steffensen integral eşitsizliğinin genelleştirmesi ile ilgili ilginç sonuçları, 2010 yılında Jamei ve arkadaşları [16] özel bir fonksiyonun özelliklerini kullanarak Steffensen eşitsizliğini yeni bir genelleştirmesini, 2013 yılında Pečarić ve arkadaşları [25] Steffensen eşitsizlikleri ile ilgili bazı genellemeler ve iyileştirmeler için daha zayıf koşulları, 2014 yılında Pečarić ve arkadaşları [26] Cerone nin herhangi iki alt aralığı içeren sınırlarla ilgili Steffensen eşitsizliğinin genelleştirilmesi ile ilgili çalışmasından motive olarak Steffensen eşitsizliğinin yeni genelleştirmelerini, Alomari [2], 2015 yılında Taylor formülü yardımıyla Steffensen eşitsizliğini genelleştirmelerini, Pečarić ve arkadaşları [27–29] konveks fonksiyonları içeren Steffensen tipli eşitsizlikleri, 2017 yılında Alomari ve arkadaşları [3] sınırlı varyasyonlu, Lipschitz, monoton azalmayan, mutlak sürekli fonksiyonlar yardımıyla yeni Steffensen tipli eşitsizlikler, 2022 yılında Alomari ve Bakula [4] Steffensen eşitsizliğinin önemli bir genelleştirmesi olan Hayashi eşitsizliğinin diferensiyellenebilen fonksiyonlar için Ostrowski ve trapezoid tipli eşitsizliklere uygulamalarını, El-Khatib ve arkadaşları [11] uyumlu kesirli integraller yardımıyla Cerone ve Belmann tarafından elde edilen Steffensen tipli eşitsizliklerin geneleştirmelerini, Pečarić ve arkadaşları [30] Taylor formülü aracılığıyla Steffensen eşitsizliğinin genelleştirmelerini kullanarak $(n+2)$-konveks fonksiyonlar için ağırlıklı Hermite-Hadamard tipi eşitsizlikleri literatüre kazandırmışlardır.

Bu tezde ilk olarak Steffensen tipli eşitsizliklerin tarihsel gelişim süreci ile ilgili bilgiler sunulmuştur. Daha sonra Steffensen eşitsizliği ile birlikte diferensiyellenbilen fonksiyonlar ve $s-$konveks fonksiyonlar için elde edilmiş olan Steffensen tipli eşitsizlikler verilmiştir. Son olarak da farklı fonksiyon sınıfları için yeni Steffensen tipli eşitsizlikler elde edilmiştir.

2. LİTERATÜR TARAMASI

2.1 Bazı Tanım ve Teoremler

Matematiğin tarihsel sürecinde birçok fonksiyon sınıfı tanımlanmıştır ve bu fonksiyon sınıflarından biri de konveks fonksiyonlar sınıfıdır. Bu fonksiyon sınıfında birçok farklı fonksiyon tanımlanmış ve bu fonksiyon sınıfı matematikçilere yeni uygulama alanları sunmuştur. Üzerinde yapılan çalışmalarla birçok yeni sonucun elde edilmesine olanak sağlayan ve bu nedenle matematikçilerin ilgisini çeken bu fonksiyon sınıfının tanımı aşağıdaki gibidir.

Tanım 2.1.1 $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. Her $x_1, x_2 \in I$ ve $\nu \in [0, 1]$ olmak üzere

$$f(\nu x_1 + (1 - \nu)x_2) \leq \nu f(x_1) + (1 - \nu)f(x_2) \tag{2.1.1}$$

ise f ye konveks fonksiyon denir. (2.1.1)'de eşitsizlik yön değiştirirse f ye konkav fonksiyon denir [21]. Konveks fonksiyonlar için elde edilen en önemli sonuçlardan biri, literatürde Hermite-Hadamard eşitsizliği olarak bilinen ve aşağıda verilen eşitsizliktir.

Teorem 2.1.1 $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bir konveks fonksiyon, $x_1, x_2 \in I$ ve $x_1 < x_2$ olsun. Bu taktirde

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} f(\nu)d\nu \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \tag{2.1.2}$$

eşitsizliği geçerlidir [23].

Tanım 2.1.2 $f : \mathbb{R}_+ = [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon, $0 < s \leq 1$ ve $\gamma_1^s + \gamma_2^s = 1$ olmak üzere her $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+$ ve $\gamma_1, \gamma_2 \geq 0$ için

$$f(\gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2) \leq \gamma_1^s f(x_1) + \gamma_2^s f(x_2)$$

oluyorsa f ye birinci anlamda s-konvex fonksiyon denir ve bu fonksiyonların sınıfı K_s^1 ile gösterilir [22].

Tanım 2.1.3 $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. $\gamma_1, \gamma_2 \geq 0$, $\gamma_1 + \gamma_2 = 1$ ve $s \in (0, 1]$ koşulları altında $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+$ için

$$f(\gamma_1 x_1 + \beta x_2) \leq \gamma_1^s f(x_1) + \gamma_2^s f(x_2)$$

oluyorsa f ye ikinci anlamda s-konveks fonksiyon denir ve bu fonksiyonların sınıfı K_s^2 ile gösterilir [6]. Bu tanımda $[0,\infty)$ aralığında $s=1$ alınırsa $s-$konveksliğin klasik konveksliğe indirgendiği görülür.

Örnek 2.1.1 $s \in (0,1)$ ve $x,y,z \in \mathbb{R}$ olmak üzere $f:[0,\infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$f(t) = \begin{cases} x, & t=0 \\ yt^s + z, & t>0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. O halde

(a) $y \geq 0$ ve $0 \leq z \leq x$ ise $f \in K_s^2$,

(b) $y > 0$ ve $z < 0$ ise $f \notin K_s^2$ [15] olur.

Hermite-Hadamard eşitsizliği Dragomir ve Fitzpatrick [9] tarafından ikinci anlamda s-konveks fonksiyonları kullanarak aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

Teorem 2.1.2 $f:[0,\infty) \to \mathbb{R}$ ikinci anlamda $s-$konveks fonksiyon, $s \in (0,1)$, $x_1, x_2 \in$ $[0,\infty$ olsun. $f \in L_1[x_1,x_2]$ olmak üzere

$$2^{s-1} f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leq \frac{1}{x_2-x_1}\int_{x_1}^{x_2} f(\nu)d\nu \leq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{s+1}. \tag{2.1.3}$$

eşitsizliği geçerlidir.

Konveks fonksiyonlar sınıfında tanımlanan fonksiyonlardan biri de $\eta-$konveks fonksiyondur. Gordji ve arkadaşları [13]'de sıradan konveks fonksiyonların genelleştirilmesi olarak $\eta-$konveks fonksiyonlar fikrini ortaya atmış ve fonksiyonların $\eta-$konveksliği için aşağıdaki tanımı vermişlerdir.

Tanım 2.1.4 $f:[x_1,x_2] \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. $\eta: f([x_1,x_2]) \times f([x_1,x_2]) \to \mathbb{R}$ tanımlı bir fonksiyon olmak üzere $\forall x,y \in [x_1,x_2]$ ve $\nu \in [0,1]$ için

$$f(tx+(1-t)y) \leq f(y) + t\eta(f(x),f(y))$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonuna $\eta-$konveks denir. Bu tanımda $\eta(x,y) = x-y$ olarak alınırsa, konveks bir fonksiyonun klasik tanımını doğrudan elde edilir.

Hermite-Hadamard eşitsizliği Gordji ve arkadaşları tarafından η-konveks fonksiyon kullanılarak aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

Teorem 2.1.3 $f:[x_1,x_2]\to\mathbb{R}$, $\eta-$konveks fonksiyon ve η ise $f([x_1,x_2])\times f([x_1,x_2])$ üstten sınırlı bir fonksiyon olmak üzere

$$\begin{aligned} f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)-\frac{M_\eta}{2} &\le \frac{1}{x_2-x_1}\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx \qquad (2.1.4)\\ &\le \frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]+\frac{1}{4}[\eta(f(x_1),f(x_2))+\eta(f(x_2),f(x_1))]\\ &\le \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}+\frac{M_\eta}{2}\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada M_η η'nın üst sınırıdır [13].

Literatürde yer alan diğer bir fonksiyon türü de aşağıdaki gibi tanımlanan $P-$fonksiyon sınıfıdır:

Tanım 2.1.5 $f:I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ negatitf olmayan bir fonksiyon, $x_1,x_2\in I$ ve $\nu\in[0,1]$ olmak üzere

$$f(\nu x_1+(1-\nu)x_2)\le f(x_1)+f(x_2)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f'ye P fonksiyonu denir ve P fonksiyonlar sınıfı $P(I)$ ile gösterilir [10].

Hermite-Hadamard eşitsizliği Dragomir ve arkadaşları tarafından P-fonksiyonu kullanılarak aşağıdaki gibi literatüre kazandırılmıştır.

Teorem 2.1.4 $I=[x_1,x_2]$, $f\in P(I)$ integrallenebilir bir fonksiyon olmak üzere

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\le\frac{2}{x_2-x_1}\int_{x_1}^{x_2} f(\nu)d\nu\le 2\left(f(x_1)+f(x_2)\right) \qquad (2.1.5)$$

eşitsizliği geçerlidir [8, 10].

2.2 Bazı Özel Ortalamalar

$\gamma, \Gamma > 0$ olmak üzere

$A(\gamma,\Gamma) = \dfrac{\gamma+\Gamma}{2}$, aritmetik ortalama

$G(\gamma,\Gamma) = \sqrt{\gamma+\Gamma}$, geometrik ortalama

$H(\gamma,\Gamma) = \dfrac{2}{(\frac{1}{\gamma}) + (\frac{1}{\Gamma})}$, harmonik ortalama

$L(\gamma,\Gamma) = \dfrac{\Gamma-\gamma}{ln\Gamma - ln\gamma}$, logaritmik ortalama $(\gamma \neq \Gamma)$,

$I(\gamma,\Gamma) = \dfrac{1}{e}(\dfrac{\Gamma^{\Gamma}}{\gamma^{\gamma}})^{1/(\Gamma-\gamma)}$, özdeş ortalama $(\gamma \neq \Gamma)$,

$L_p(\gamma,\Gamma) = [\dfrac{\Gamma^{p+1}-\gamma^{p+1}}{(p+1)(\Gamma-\gamma}]^{1/p}$, genelleştirilmiş logaritmik ortalama $(\gamma \neq \Gamma)$, $p \neq -1, 0.$

şeklinde tanımlanır.

2.3 Steffensen Eşitsizliği ve İlgili Eşitsizlikler

Teorem 2.3.1 $f(\nu)$ ve $g(\nu)$, (a,b) aralığı üzerinde tanımlı iki integrallenebilir fonksiyon, $f(\nu)$ artmayan bir fonksiyon ve (a,b) aralığında $0 \leq g(\nu) \leq 1$ olsun. Bu taktirde

$$\lambda = \int_a^b g(\nu)d\nu$$

olmak üzere

$$\int_{b-\lambda}^{b} f(\nu)d\nu \leq \int_a^b f(\nu)g(\nu)d\nu \leq \int_a^{a+\lambda} f(\nu)d\nu \tag{2.3.1}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. (2.3.1)'deki ikinci eşitsizlik

$$
\begin{aligned}
&\int_a^{a+\lambda} f(\nu)d\nu - \int_a^b f(\nu)g(\nu)d\nu \\
= \ & \int_a^{a+\lambda} [1-g(\nu)]f(\nu)d\nu - \int_{a+\lambda}^b f(\nu)g(\nu)d\nu \\
\geq \ & f(a+\lambda)\int_a^{a+\lambda} [1-g(\nu)]d\nu - \int_{a+\lambda}^b f(\nu)g(\nu)d\nu \\
= \ & f(a+\lambda)[\lambda - \int_a^{a+\lambda} g(\nu)d\nu] - \int_{a+\lambda}^b f(\nu)g(\nu)d\nu \\
= \ & f(a+\lambda)[\int_a^b g(\nu)d\nu - \int_a^{a+\lambda} g(\nu)d\nu] - \int_{a+\lambda}^b f(\nu)g(\nu)d\nu \\
= \ & f(a+\lambda)\int_{a+\lambda}^b g(\nu)d\nu - \int_{a+\lambda}^b f(\nu)g(\nu)d\nu \\
= \ & \int_{a+\lambda}^b g(\nu)[f(a+\lambda] - f(\nu)]d\nu \\
\geq \ & 0
\end{aligned}
$$

şeklinde elde edilir. (2.3.1)'deki birinci eşitsizlik benzer şekilde elde edilebilir. Öte yandan (2.3.1)'deki ikinci eşitsizlikten birinci eşitsizliğin geçerli olduğu görülebilir. Gerçekten de $G(\nu) = 1 - g(\nu)$ ve $\Lambda = \int_a^b G(\nu)d\nu$ olarak alınırsa (a,b) aralığında $0 \leq g(\nu) \leq 1$ iken $0 \leq G(\nu) \leq 1$ olur. Buradan $b-a = \lambda + \Lambda$ olur. Kabul edelim (2.3.1)'deki ikinci eşitsizlik sağlansın. Bu taktirde

$$\int_a^b f(\nu)G(\nu)d\nu \leq \int_a^{a+\Lambda} f(\nu)d\nu$$

veya

$$\int_a^b f(\nu)[1-g(\nu)]d\nu \leq \int_a^{b-\lambda} f(\nu)d\nu$$

veya

$$\int_a^b f(\nu)d\nu - \int_a^{b-\lambda} f(\nu)d\nu \leq \int_a^b f(\nu)g(\nu)d\nu$$

veya

$$\int_{b-\Lambda}^b f(\nu)d\nu \leq \int_a^b f(\nu)g(\nu)d\nu$$

elde edilir. Böylece (2.3.1)'deki birinci eşitsizlik elde edilmiş olur.

T.Hayashi [14, 20], Steffensen eşitsizliğinin genelleştirmesini aşağıdaki gibi vermiştir.

Teorem 2.3.2 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $[a,b]$ üzerinde artmayan bir fonksiyon ve $g : [a,b] \to \mathbb{R}$, $[a,b]$ aralığında integrallenebilir bir fonksiyon olsun. $\forall\ \nu \in [a,b]$ için

$$0 \leq g(\nu) \leq A \quad \text{ve} \quad \lambda = \frac{1}{A}\int_a^b g(\nu)d\nu$$

olmak üzere

$$A\int_{b-\lambda}^{b} f(\nu)d\nu \leq \int_a^b f(\nu)g(\nu)d\nu \leq A\int_a^{a+\lambda} f(\nu)d\nu \qquad (2.3.2)$$

eşitsizliği geçerlidir.

Dragomir ve Agarwal, Hayashi tarafından elde edilen (2.3.2) eşitsizliğini kullanarak aşağıdaki eşitsizlikleri literatüre kazandırmışlardır:

Teorem 2.3.3 $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ I°'de diferensiyellenebilir bir fonksiyon ve $[a,b] \subset I^\circ$ olmak üzere $M = sup_{x\in[a,b]}\ f'(x) < \infty$, $m = inf_{x\in[a,b]}\ f'(x) > -\infty$ ve $M > m$ olsun. Bu taktirde f', $[a,b]$ aralığında integrallenebilirse

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx - \frac{f(a)+f(b)}{2}\right| \\
\leq\ & \frac{[f(b)-f(a)-m(b-a)][M(b-a)-f(b)+f(a)]}{2(M-m)(b-a)} \\
\leq\ & \frac{(M-m)(b-a)}{8} \qquad (2.3.3)
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir [1].

İspat. $f(x) = a - x$ ve $g(x) = f'(x) - m$ olarak seçilirse Hayashi eşitsizliği kullanılarak

$$(M-m)\int_{b-\lambda}^{b}(a-x)dx \leq I \leq (M-m)\int_a^{a+\lambda}(a-x)dx, \qquad (2.3.4)$$

yazılır. Burada

$$I = \int_a^b (a-x)(f'(x)-m)dx$$

ve

$$\lambda = \frac{1}{M-m}\int_a^b (f'(x)-m)dx = \frac{f(b)-f(a)-m(b-a)}{M-m}$$

dir. Buradan

$$\int_{b-\lambda}^{b}(a-x)dx=\frac{1}{2}[(b-a-\lambda)^2-(b-a)^2]$$

ve

$$\int_{a}^{a+\lambda}(a-x)dx=-\frac{\lambda^2}{2}$$

olduğundan (2.3.4) eşitsizliği

$$l_1\equiv(M-m)\left[\frac{(b-a-\lambda)^2-(b-a)^2}{2}\right]\leq I\leq(M-m)\left[-\frac{\lambda^2}{2}\right]\equiv l_2$$

şeklinde yazılabilir. Daha sonra

$$\begin{aligned}\frac{l_1+l_2}{2} &= \frac{M-m}{2}\left[-\frac{\lambda^2}{2}+\frac{(b-a-\lambda)^2}{2}-\frac{(b-a)^2}{2}\right]\\ &= \frac{(M-m)[-\lambda(b-a)]}{2}\\ &= \frac{m(b-a)^2}{2}-\frac{(b-a)(f(b)-f(a))}{2}\end{aligned}$$

ve

$$I=\int_a^b f(x)dx-(b-a)f(b)+m\frac{(b-a)^2}{2}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}&\left|I-\frac{l_1+l_2}{2}\right| \qquad (2.3.5)\\ &= \left|\int_a^b f(x)dx-(b-a)f(b)+\frac{m(b-a)^2}{2}-\frac{m(b-a)^2}{2}+\frac{(b-a)(f(b)-f(a))}{2}\right|\\ &= \left|\int_a^b f(x)dx-(b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}\right|\end{aligned}$$

yazılır. Ayrıca

$$\begin{aligned}\left|I-\frac{l_1+l_2}{2}\right| &\leq \frac{l_1-l_2}{2}\\ &= \frac{M-m}{2}\left[-\frac{\lambda^2}{2}-\frac{(b-a-\lambda)^2}{2}+\frac{(b-a)^2}{2}\right]\\ &= \frac{M-m}{2}[-\lambda^2+(b-a)\lambda]\end{aligned}$$

$$= \frac{[f(b)-f(a)-m(b-a)][M(b-a)-f(b)+f(a)]}{2(M-m)} \tag{2.3.6}$$

yazılır. Böylece (2.3.5) ve (2.3.6) birleştirilerek (2.3.3)'deki birinci eşitsizlik elde edilir. (2.3.3)'deki ikinci eşitsizliği ispatlamak için, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(\nu) = -\nu^2 + (b-a)\nu$ dönüşümü tanımlanırsa $\forall \nu \in \mathbb{R}$ için

$$g(\nu) \leq g\left(\frac{b-a}{2}\right) = \frac{(b-a)^2}{4} \tag{2.3.7}$$

yazılır.

$$\nu = \lambda = \frac{f(b)-f(a)-m(b-a)}{M-m}$$

olarak seçilirse

$$\frac{M-m}{2} g(\lambda) = \frac{[f(b)-f(a)-m(b-a)][M(b-a)-f(b)+f(a)]}{2(M-m)} \tag{2.3.8}$$

olur. (2.3.7) ve (2.3.8)'den,

$$\frac{M-m}{2} g(\lambda) \leq \frac{(M-m)(b-a)^2}{8}$$

elde edilir ve böylece (2.3.3)'deki ikinci eşitsizliğin ispatı tamamlanmış olur.

Sonuç 2.3.1 Teorem 2.3.3 nin koşulları altında, $\| f' \|_\infty = sup_{x\in[a,b]} \mid f' \mid < \infty$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx - \frac{f(a)+f(b)}{2} \right| &\leq \frac{\| f' \|_\infty^2 \left[(b-a)^2 - (f(b)-f(a))^2\right]}{4 \| f' \|_\infty (b-a)} \\ &\leq \frac{\| f' \|_\infty (b-a)}{4} \end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir [1].

İspat. Teorem 2.3.3'den $m = - \| f' \|_\infty$ ve $M = \| f' \|_\infty$ olarak seçilirse istenen sonuç elde edilir.

Konveks fonksiyonlar için Teorem 2.3.3'den aşağıdaki önemli sonuç elde edilir.

Sonuç 2.3.2 $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I° de türevlenebilir bir konveks fonksiyon ve $[a,b] \subset I^\circ$ ve $f'(b) \neq f'(a)$ olsun. Bu taktirde

$$0 \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$$

$$\leq \frac{[f(b)-f(a)-f'(a)(b-a)][f'(b)(b-a)-f(b)+f(a)]}{2(f'(b)-f'(a))(b-a)}$$

$$\leq \frac{(f'(b)-f'(a))(b-a)}{8}$$

eşitsizliği geçerlidir [1].

İspat. Teorem 2.3.3'den $m = f'(a)$ ve $M = f'(b)$ olarak seçilirse istenilen sonuç elde edilir.

Agarwal ve Dragomir, Sonuç 2.3.2 kullanarak özel ortalamalar için aşağıdaki uygulamaları vermişlerdir:

Önerme 2.3.1 $p \geq 1$ ve $0 \leq a \leq b$ olsun. Bu taktirde

$$\begin{aligned} 0 \leq A(a^p, b^p) - L_p^p(a,b) &\leq \frac{p}{2(p-1)} \frac{[L_{p-1}^{p-1}(a,b) - a^{p-1}][b^{p-1} - L_{p-1}^{p-1}(a,b)]}{L_{p-2}^{p-2}(a,b)} \\ &\leq \frac{p(p-1)}{8}(b-a)^2 L_{p-2}^{p-2}(a,b) \end{aligned}$$

eşitsizliği yazılır [1].

İspat. Sonuç (2.3.2)'de $f(x) = x^p, p \geq 1$ konveks fonksiyonu kullanılarak

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{a^p + b^p}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b x^p dx \\ &\leq \frac{[b^p - a^p - p\ a^{p-1}(b-a)][p\ b^{p-1}(b-a) - b^p + a^p]}{2p(b^{p-1} - a^{p-1})(b-a)} \\ &\leq \frac{p(b^{p-1} - a^{p-1}(b-a)}{8} \end{aligned}$$

yazılır. Burada

$$b^p - a^p = p(b-a)L_{p-1}^{p-1}(a,b)$$

ve

$$b^{p-1} - a^{p-1} = (p-1)(b-a)L_{p-2}^{p-2}(a,b)$$

olduğu göz önüne alınmıştır.

Önerme 2.3.2 $0 < a < b$ olmak üzere

$$0 \leq L(a,b) - H(a,b) \leq L(a,b)\left(\frac{b-a}{a+b}\right)^2 \leq L(a,b)\frac{(b-a)^2}{4ab} \qquad (2.3.9)$$

eşitsizliği yazılır [1].

İspat. Sonuç (2.3.2)'de $[a,b] \subset (0,\infty)$ aralığında tanımlı $f(x) = 1/x$ konveks fonksiyonu kullanılarak

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{1/a + 1/b}{2} - \frac{lnb - lna}{b-a} \\ &\leq \frac{[1/b - 1/a + ((b-a)/a^2)][-((b-a)/b^2) - 1/b + 1/a)]}{2(1/a^2 - 1/b^2)(b-a)} = R \\ &\leq \frac{(1/a^2 - 1/b^2)(b-a)}{8} \end{aligned}$$

eşitsizliği yazılır. Burada

$$\frac{1}{b} - \frac{1}{a} + \frac{b-a}{a^2} = \frac{(b-a)^2}{a^2 b}$$

ve

$$-\frac{b-a}{b^2} - \frac{1}{b} + \frac{1}{a} = \frac{(b-a)^2}{ab^2}$$

olduğundan $R = \dfrac{(b-a)^2}{2ab(a+b)}$ olur. Dolayısıyla

$$0 \leq H^{-1}(a,b) - L^{-1}(a,b) \leq \frac{(b-a)^2}{2ab(a+b)} \leq \frac{(b-a)^2(a+b)}{8a^2b^2}$$

olur ki böylece istenilen eşitsizlik elde edilir.

Önerme 2.3.3 $0 < a < b$ olmak üzere

$$\begin{aligned} 0 &\leq \ln I(a,b) - \ln G(a,b) \\ &\leq \frac{ab[\ln(a/b) + ((b-a)/a][\ln(b/a) - ((b-a)/b)]}{2(b-a)^2} \\ &\leq \frac{(b-a)^2}{8ab} \end{aligned}$$

eşitsizliği yazılır [1].

İspat. Sonuç (2.3.2)'de $f(x) = -\ln x$ konveks fonksiyonu kullanılırsa istenilen sonuç elde edilir.

Şimdi Steffensen tipli eşitsizlikleri elde etmek için kullanılan aşağıdaki lemmayı verelim.

Lemma 2.3.1 $f, g : [a,b] \subset \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ olcak şekilde integrallenebilir fonksiyonlar, $\forall \nu \in [a,b]$ için $0 \leq g(t) \leq 1$ ve $\int_a^b g(\nu) f'(\nu) d\nu$ integrali var olsun. Bu taktirde

$$\lambda := \int_a^b g(\nu) d\nu$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} & \int_a^{a+\lambda} f(\nu) d\nu - \int_a^b f(\nu) g(\nu) d\nu \\ = & -\int_a^{a+\lambda} \left(\int_a^x (1 - g(\nu)) d\nu \right) f'(x) dx - \int_{a+\lambda}^b \left(\int_x^b g(\nu) d\nu \right) f'(x) dx \qquad (2.3.10) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} & \left| \int_a^b f(\nu) g(\nu) d\nu - \int_{b-\lambda}^b f(\nu) d\nu \right| \\ = & -\int_a^{b-\lambda} \left(\int_a^x g(\nu) d\nu \right) f'(x) dx - \int_{b-\lambda}^b \left(\int_x^b (1 - g(\nu)) d\nu \right) f'(x) dx \qquad (2.3.11) \end{aligned}$$

eşitlikleri geçerlidir [20].

İspat. Kısmi integrasyon kullanılarak

$$\begin{aligned} & -\int_a^{a+\lambda} \left(\int_a^x (1 - g(\nu)) d\nu \right) f'(x) dx - \int_{a+\lambda}^b \left(\int_x^b 1 - g(\nu) d\nu \right) f'(x) dx \\ = & -\left(\int_a^{a+\lambda} (1 - g(\nu)) d\nu \right) f(a+\lambda) + \int_a^{a+\lambda} f(x) d\left(\int_a^x (1 - g(\nu)) d\nu \right) \\ & + \left(\int_{a+\lambda}^b g(\nu) d\nu \right) f(a+\lambda) - \int_{a+\lambda}^b f(x) d\left(\int_x^b g(\nu) d\nu \right) \\ = & -\left(\int_a^{a+\lambda} (1 - g(\nu)) d\nu \right) f(a+\lambda) + \int_a^{a+\lambda} f(x)(1 - g(x)) dx \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\left(\int_{a+\lambda}^{b} g(\nu)d\nu\right)f(a+\lambda)-\int_{a+\lambda}^{b} f(x)g(x)dx \\
=\;& -\lambda f(a+\lambda)+f(a+\lambda)\int_{a}^{a+\lambda} g(\nu)d\nu+\int_{a}^{a+\lambda} f(x)dx \\
&-\int_{a}^{a+\lambda} f(x)g(x)dx+f(a+\lambda)\int_{a+\lambda}^{b} g(\nu)d\nu-\int_{a+\lambda}^{b} f(x)g(x)dx \\
=\;& -\lambda f(a+\lambda)+f(a+\lambda)\int_{a}^{a+\lambda} g(\nu)d\nu+f(a+\lambda)\int_{a+\lambda}^{b} g(\nu)d\nu \\
&+\int_{a}^{a+\lambda} f(x)dx-\int_{a}^{b} f(x)g(x)dx \\
=\;& \int_{a}^{a+\lambda} f(x)dx-\int_{a}^{b} f(x)g(x)dx
\end{aligned}
$$

yazılır ve böylece (2.3.10)'daki eşitlik elde edilir. (2.3.11) eşitlik benzer şekilde kısmi integrasyon kullanılarak ispatlanabilir.

Alomari ve arkadaşları, ilgili fonksiyonların çeşitli varsayımları altında (2.3.10) ve (2.3.11)'deki özdeşliklerini kullanarak bazı Steffensen tipi eşitsizlikler elde etmişlerdir. Bunlardan bazıları aşağıdaki gibidir:

Teorem 2.3.4 $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ iki integrallenebilir fonksiyon ve $\forall t \in [a, b]$ için $0 \le g(\nu) \le 1$ olmak üzere $\int_a^b g(\nu)f(\nu)d\nu$ var olsun. Bu taktirde f fonksiyonu $[a, b]$ aralığı üzerinde $L-$Lipschitz şartını sağlayan bir fonksiyon ise

$$\left|\int_{a}^{a+\lambda} f(\nu)d\nu-\int_{a}^{b} f(\nu)g(\nu)d\nu\right| \le \frac{L}{2}[(b-a-\lambda)^2+\lambda^2]$$

ve

$$\left|\int_{a}^{b} f(\nu)g(\nu)d\nu-\int_{b-\lambda}^{b} f(\nu)d\nu\right| \le \frac{L}{2}[(b-a-\lambda)^2+\lambda^2]$$

eşitsizliği geçerlidir ki burada $\lambda := \int_a^b g(\nu)d\nu$ dir [3].

Teorem 2.3.5 $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ iki integrallenebilir fonksiyon ve $\forall \nu \in [a, b]$ için $0 \le g(\nu) \le 1$ olmak üzere $\int_a^b g(\nu)f(\nu)d\nu$ var olsun. Bu taktirde $1 \le p \le \infty$ olmak üzere $f' \in L_p[a, b]$ ve f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında mutlak sürekli ise

$$\left|\int_{a}^{a+\lambda} f(\nu)d\nu-\int_{a}^{b} f(\nu)g(\nu)d\nu\right|$$

$$\leq \begin{cases} \frac{1}{2}[\lambda^2 + (b-a-\lambda)^2]||f'||_{\infty,[a,b]}, & if \;\; f' \in L_\infty[a,b]; \\ \\ \frac{||f'||_{p,[a,b]}}{(q+1)^{1/q}}[\lambda^{(q+1)/q} + (b-a-\lambda)^{(q+1)/q}], & if \;\; f' \in L_p[a,b], \;\; p>1; \\ \\ \left[\int_{a+\lambda}^{b} g(\nu)d\nu\right]||f'||_1, & if \;\; f' \in L_1[a,b] \end{cases}$$

ve

$$\left|\int_a^b f(\nu)g(\nu)d\nu - \int_{b-\lambda}^b f(\nu)d\nu\right|$$
$$\leq \begin{cases} \frac{1}{2}[\lambda^2 + (b-a-\lambda)^2]||f'||_{\infty,[a,b]}, & if \;\; f' \in L_\infty[a,b]; \\ \\ \frac{||f'||_{p,[a,b]}}{(q+1)^{1/q}}[\lambda^{(q+1)/q} + (b-a-\lambda)^{(q+1)/q}], & if \;\; f' \in L_p[a,b], \;\; p>1; \\ \\ \left[\int_{a}^{b-\lambda} g(t)dt\right]||f'||_1, & if \;\; f' \in L_1[a,b] \end{cases}$$

eşitsizlikleri geçerlidir [3].

Teorem 2.3.6 $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ iki integrallenebilir fonksiyon ve $\forall \nu \in [a,b]$ için $0 \leq g(\nu) \leq 1$ olmak üzere $\int_a^b g(\nu)f(\nu)d\nu$ var olsun. f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında monoton azalmayan ise

$$\lambda := \int_a^b g(\nu)d\nu$$

olmak üzere

$$\left|\int_a^{a+\lambda} f(\nu)d\nu - \int_a^b f(\nu)g(\nu)d\nu\right|$$

$$\leq \;\; \lambda[f(a+\lambda) - f(a)] + (b-a-\lambda)[f(b) - f(a+\lambda)]$$

ve

$$\left|\int_a^b f(\nu)g(\nu)d\nu - \int_{b-\lambda}^b f(\nu)d\nu\right|$$

$$\leq \;\; \lambda[f(b) - f(b-\lambda)] + (b-a-\lambda)[f(b-\lambda) - f(a)]$$

eşitsizlikleri geçerlidir [3].

2.4 s-Konveks ve s-Konkav Fonksiyon Sınıfları İçin Steffensen Tipli Eşitsizlikler

2014 yılında Alomari Lemma 2.3.1'deki özdeşlikleri kullanarak s-konveks fonksiyonlar için aşağıdaki Steffensen tipli eşitsizlikleri elde etmiştir.

Teorem 2.4.1 $f, g : [a,b] \subset \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ integrallenebilir iki fonksiyon, $\forall \nu \in [a,b]$ için $0 \leq g(\nu) \leq 1$ ve $\int_a^b g(t)f'(\nu)d\nu$ integrali var olsun. f, $[a,b]$ aralığında mutlak sürekli bir fonksiyon ve $s \in (0,1]$ olmak üzere $|f'|$, $[a,b]$ aralığında s-konveks fonksiyon ise

$$\lambda := \int_a^b g(\nu)d\nu$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} & \left| \int_a^{a+\lambda} f(\nu)d\nu - \int_a^b f(\nu)g(\nu)d\nu \right| \\ \leq\ & \frac{1}{(s+1)(s+2)}[\lambda^2|f'(a)| + (b-a-\lambda)^2|f'(b)|] \\ +\ & \frac{1}{s+2}[\lambda^2 + (b-a-\lambda)^2]|f'(a+\lambda)| \end{aligned} \tag{2.4.1}$$

ve

$$\begin{aligned} & \left| \int_a^b f(\nu)g(\nu)d\nu - \int_{b-\lambda}^b f(\nu)d\nu \right| \\ \leq\ & \frac{1}{(s+1)(s+2)}[\lambda^2|f'(b)| + (b-a-\lambda)^2|f'(a)|] \\ & + \frac{1}{s+2}[\lambda^2 + (b-a-\lambda)^2]|f'(b-\lambda)| \end{aligned} \tag{2.4.2}$$

eşitsizlikleri geçerlidir [2].

İspat. (2.3.10) özdeşliğinde üçgen eşitsizliği ve $|f'|$'nin s-konveksliği kullanılarak

$$\begin{aligned} & \left| \int_a^{a+\lambda} f(\nu)d\nu - \int_a^b f(\nu)g(\nu)d\nu \right| \\ \leq\ & \left| \int_a^{a+\lambda} \left(\int_a^x (1-g(\nu))d\nu \right) f'(x)dx \right| + \left| \int_{a+\lambda}^b \left(\int_x^b g(\nu)d\nu \right) f'(x)dx \right| \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \left|\int_a^{a+\lambda}\left|\int_a^x (1-g(\nu))d\nu\right||f'(x)|dx + \int_{a+\lambda}^b\left|\int_x^b g(\nu)d\nu\right||f'(x)|dx\right. \\
&\leq \int_a^{a+\lambda}\left|\int_a^x (1-g(\nu))d\nu\right|\left[\frac{(x-a)^s}{\lambda^s}|f'(a+\lambda)| + \frac{(a+\lambda-x)^s}{\lambda^s}|f'(a)|\right]dx \\
&+\int_{a+\lambda}^b\left|\int_x^b g(\nu)d\nu\right|\left[\frac{(x-a-\lambda)^s}{(b-a-\lambda)^s}|f'(b)| + \frac{(b-x)^s}{(b-a-\lambda)^s}|f'(a+\lambda)|\right]dx \\
&\leq \frac{|f'(a+\lambda)|}{\lambda^s}\int_a^{a+\lambda}\left(\int_a^x |1-g(\nu)|d\nu\right)(x-a)^s dx \\
&+\frac{|f'(a)|}{\lambda^s}\int_a^{a+\lambda}\left(\int_a^x |1-g(\nu)|d\nu\right)(a+\lambda-x)^s dx \\
&+\frac{|f'(b)|}{(b-a-\lambda)^s}\int_{a+\lambda}^b\left(\int_x^b |g(\nu)|d\nu\right)(x-a-\lambda)^s dx \\
&+\frac{|f'(a+\lambda)|}{(b-a-\lambda)^s}\int_{a+\lambda}^b\left(\int_x^b |g(\nu)|d\nu\right)(b-x)^s dx \\
&\leq \frac{|f'(a+\lambda)|}{\lambda^s}\int_a^{a+\lambda}(x-a)^{s+1}dx + \frac{|f'(a)|}{\lambda^s}\int_a^{a+\lambda}(x-a)(a+\lambda-x)^s dx \\
&+\frac{|f'(b)|}{(b-a-\lambda)^s}\int_{a+\lambda}^b (b-x)(x-a-\lambda)^s dx + \frac{|f'(a+\lambda)|}{(b-a-\lambda)^s}\int_{a+\lambda}^b (b-x)^{s+1}dx \\
&= \frac{1}{(s+1)(s+2)}[\lambda^2|f'(a)| + (b-a-\lambda)^2|f'(b)|]
\end{aligned}
$$

$$+\frac{1}{s+2}[\lambda^2+(b-a-\lambda)^2]|f'(a+\lambda)|$$

elde edilir. Böylece (2.4.1)'deki eşitsizlik elde edilir. Benzer bir şekilde, (2.3.11) özdeşliği kullanarak, (2.4.2)'deki eşitsizlik elde edilir.

Sonuç 2.4.1 Sırasıyla (2.4.1) ve (2.4.2) eşitsizliklerinde $s=1$ seçilirse,

$$\left|\int_a^{a+\lambda} f(x)dx-\int_a^b f(x)g(x)dx\right|$$

$$\leq \frac{1}{6}\lambda^2|f'(a)|+\frac{1}{3}[\lambda^2+(b-a-\lambda)^2]|f'(a+\lambda)|+\frac{1}{6}(b-a-\lambda)^2|f'(b)|$$

ve

$$\left|\int_a^{b} f(\nu)g(\nu)d\nu-\int_{b-\lambda}^b f(\nu)d\nu\right|$$

$$\leq \frac{1}{6}\lambda^2|f'(b)|+\frac{1}{3}[\lambda^2+(b-a-\lambda)^2]|f'(b-\lambda)|+\frac{1}{6}(b-a-\lambda)^2|f'(a)|$$

elde edilir [2].

Uyarı 2.4.1 (2.4.1) ve (2.4.2) eşitsizliklerinde, $\lambda=0$ seçilirse

$$\left|\int_a^{b} f(\nu)g(\nu)d\nu\right|$$

$$\leq \frac{(b-a)^2}{(s+1)(s+2)}\min{(s+1)|f'(a)|+|f'(b)|,|f'(a)|+(s+1)|f'(b)|}$$

elde edilir [2].

Teorem 2.4.2 [2] $f,g:[a,b]\subset\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ integrallenebilir iki fonksiyon, $\forall\nu\in[a,b]$ için $0\leq g(\nu)\leq 1$ ve $\int_a^b g(\nu)f'(\nu)d\nu$ integrali var olsun. f, $[a,b]$ aralığında mutlak sürekli bir fonksiyon ve $s\in(0,1]$ olmak üzere $|f'|$, $[a,b]$ aralığında s-konveks fonksiyon ise

$$\lambda:=\int_a^b g(\nu)d\nu$$

olmak üzere

$$\left|\int_a^{a+\lambda} f(\nu)d\nu-\int_a^b f(\nu)g(\nu)d\nu\right|$$

$$\leq \frac{1}{s+1}\left[\int_{a+\lambda}^b g(\nu)d\nu\right][\lambda|f'(a)|+(b-a)|f'(a+\lambda)|+(b-a-\lambda)|f'(b)|]$$

$$\leq \frac{(b-a-\lambda)}{s+1}[\lambda|f'(a)|+(b-a)|f'(a+\lambda)|+(b-a-\lambda)|f'(b)|] \quad (2.4.3)$$

ve

$$\left|\int_a^b f(\nu)g(\nu)d\nu - \int_{b-\lambda}^b f(\nu)d\nu\right|$$

$$\leq \frac{1}{s+1}\left[\int_{b-\lambda}^b g(\nu)d\nu\right][(b-a-\lambda)|f'(a)|+(b-a)|f'(b-\lambda)|+\lambda|f'(b)|]$$

$$\leq \frac{\lambda}{s+1}[(b-a-\lambda)|f'(a)|+(b-a)|f'(b-\lambda)|+\lambda|f'(b)|] \quad (2.4.4)$$

eşitsizlikleri geçerlidir [2].

İspat. Lemmadan 2.3.1'den,

$$\left|\int_a^{a+\lambda} f(\nu)d\nu - \int_a^b f(\nu)g(\nu)dx\right|$$

$$\leq \sup_{x\in[a,a+\lambda]}\left[\int_a^x (1-g(\nu))d\nu\right]\int_a^{a+\lambda}|f'(x)|dx + \sup_{x\in[a+\lambda,b]}\left[\int_x^b (g(\nu))d\nu\right]\int_{a+\lambda}^b |f'(x)|dx$$

yazılır. $|f'|, [a,b]$ üzerinde $s-$konveks fonksiyon olduğundan (2.1.3) eşitsizliği kullanılarak

$$\int_a^{a+\lambda}|f'(x)|dx \leq \lambda\frac{|f'(a)|,|f'(a+\lambda)|}{s+1}$$

ve

$$\int_{a+\lambda}^b |f'(x)|dx \leq (b-a-\lambda)\frac{|f'(a+\lambda)|,|f'(b)|}{s+1}$$

yazılır. Böylece

$$\left|\int_a^{a+\lambda} f(\nu)d\nu - \int_a^b f(\nu)g(\nu)d\nu\right|$$

$$\leq \lambda\frac{|f'(a)|+|f'(a+\lambda)|}{s+1}\int_a^{a+\lambda}(1-g(\nu))d\nu$$

$$+(b-a-\lambda)\frac{|f'(a+\lambda)|+|f'(b)|}{s+1}\int_{a+\lambda}^b g(\nu)d\nu$$

$$\leq \max\left\{\int_a^{a+\lambda}(1-g(\nu))d\nu, \int_{a+\lambda}^b g(\nu)d\nu\right\}$$

$$\times\left[\lambda\frac{|f'(a)|+|f'(a+\lambda)|}{s+1}+(b-a-\lambda)\frac{|f'(a+\lambda)|+|f'(b)|}{s+1}\right]$$

$$\leq \frac{1}{s+1}\left[\int_{a+\lambda}^b g(\nu)d\nu\right][\lambda|f'(a)|+(b-a)|f'(a+\lambda)|+(b-a-\lambda)|f'(b)|]$$

elde edilir. Dolayısıyla (2.4.3)'deki ilk eşitsizlik elde edilmiş olur. $\forall\nu\in[a,b]$ için $0\leq g(\nu)\leq 1$ olduğundan

$$0\leq\int_{a+\lambda}^b g(\nu)d\nu\leq(b-a-\lambda)$$

olacağından (2.4.3)'deki ikinci eşitsizlik kolayca elde edilir. (2.4.4)'deki eşitsizlikler de (2.3.11) özdeşliği kullanılarak benzer şekilde elde edilebilir.

Teorem 2.4.3 $f,g:[a,b]\subset\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ integrallenebilir iki fonksiyon, $\forall\nu\in[a,b]$ için $0\leq g(\nu)\leq 1$ ve $\int_a^b g(\nu)f'(\nu)dt$ integrali var olsun. f, $[a,b]$ aralığında mutlak sürekli bir fonksiyon ve $s\in(0,1]$ olmak üzere $|f'|$, $[a,b]$ aralığında s-konkav fonksiyon ise

$$\lambda:=\int_a^b g(\nu)d\nu$$

olmak üzere

$$\left|\int_a^{a+\lambda}f(t)dt-\int_a^b f(\nu)g(\nu)d\nu\right|$$

$$\leq 2^{s-1}\left[\int_{a+\lambda}^b g(\nu)d\nu\right]\left[\lambda\left|f'\left(a+\frac{\lambda}{2}\right)\right|+(b-a-\lambda)\left|f'\left(\frac{a+b+\lambda}{2}\right)\right|\right]$$

$$\leq 2^{s-1}(b-a-\lambda)\left[\lambda\left|f'\left(a+\frac{\lambda}{2}\right)\right|+(b-a-\lambda)\left|f'\left(\frac{a+b+\lambda}{2}\right)\right|\right] \quad (2.4.5)$$

ve

$$\left|\int_a^b f(\nu)g(\nu)d\nu-\int_{b-\lambda}^b f(\nu)d\nu\right|$$

$$\leq 2^{s-1}\left[\int_{b-\lambda}^b g(\nu)d\nu\right]\left[(b-a-\lambda)\left|f'\left(\frac{a+b-\lambda}{2}\right)\right|+\lambda\left|f'\left(b-\frac{\lambda}{2}\right)\right|\right]$$

$$\leq \lambda 2^{s-1}\left[(b-a-\lambda)\left|f'\left(\frac{a+b-\lambda}{2}\right)\right|+\lambda\left|f'\left(b-\frac{\lambda}{2}\right)\right|\right] \quad (2.4.6)$$

yazılır [2].

İspat. (2.3.10) özdeşliğinde üçgen eşitsizliği ve $[a,b]$ aralığında $|f'|$'nin s-konkavlığı için (2.1.3) eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
&\left|\int_a^{a+\lambda} f(\nu)d\nu - \int_a^b f(\nu)g(\nu)d\nu\right| \\
\leq\ & \sup_{x\in[a,a+\lambda]}\left[\int_a^x (1-g(\nu))d\nu\right]\int_a^{a+\lambda}|f'(x)|dx + \sup_{x\in[a+\lambda,b]}\left[\int_x^b g(\nu)d\nu\right]\int_{a+\lambda}^b |f'(x)|dx \\
\leq\ & 2^{s-1}\lambda\left|f'\left(a+\frac{\lambda}{2}\right)\right|\int_a^{a+\lambda}(1-g(\nu))d\nu + 2^{s-1}(b-a-\lambda)\left|f'\left(\frac{a+b+\lambda}{2}\right)\right|\int_{a+\lambda}^b g(\nu)d\nu \\
=\ & 2^{s-1}\left[\int_{a+\lambda}^b g(\nu)d\nu\right]\left[\lambda\left|f'\left(a+\frac{\lambda}{2}\right)\right| + (b-a-\lambda)\left|f'\left(\frac{a+b+\lambda}{2}\right)\right|\right]
\end{aligned}$$

yazılır. Böylece (2.4.5)'deki ilk eşitsizlik ispatlanır. $\forall\nu\in[a,b]$ için $0\leq g(\nu)\leq 1$ olduğundan

$$0\leq\int_{a+\lambda}^b g(\nu)d\nu\leq(b-a-\lambda)$$

olacağından (2.4.5)'deki ikinci eşitsizlik kolayca elde edilir. (2.4.6)'daki eşitsizlikler de (2.3.11) özdeşliği kullanılarak benzer şekilde elde edilir.

Teorem 2.4.4 $f,g:[a,b]\subset\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ integrallenebilir iki fonksiyon, $\forall\nu\in[a,b]$ için $0\leq g(\nu)\leq 1$ ve $\int_a^b g(\nu)f'(\nu)d\nu$ integrali var olsun. f, $[a,b]$ aralığında mutlak sürekli bir fonksiyon, $s\in(0,1]$, $q>1$ ve $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ olmak üzere $|f'|^q$, $[a,b]$ aralığında s-konkav fonksiyon ise

$$\lambda := \int_a^b g(\nu)d\nu$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
&\left|\int_a^{a+\lambda} f(\nu)d\nu - \int_a^b f(\nu)g(\nu)d\nu\right| \qquad (2.4.7)\\
\leq\ & \frac{2^{(s-1)/q}}{(p+1)^{1/p}}\left[\lambda^2\left|f'\left(a+\frac{\lambda}{2}\right)\right| + (b-a-\lambda)^2\left|f'\left(\frac{a+b+\lambda}{2}\right)\right|\right]
\end{aligned}$$

ve

$$\left|\int_a^b f(\nu)g(\nu)d\nu - \int_{b-\lambda}^b f(\nu)d\nu\right| \qquad (2.4.8)$$

$$\leq \frac{2^{(s-1)/q}}{(p+1)^{1/p}}\left[(b-a-\lambda)^2\left|f'\left(b-\frac{\lambda}{2}\right)\right|+\lambda^2\left|f'\left(\frac{a+b-\lambda}{2}\right)\right|\right]$$

eşitzlikleri geçerlidir [2].

İspat. Lemma 2.3.1 ve Hölder eşitsizliği kullanarak

$$\left|\int_a^{a+\lambda} f(\nu)d\nu-\int_a^b f(\nu)g(\nu)d\nu\right|$$

$$\leq \int_a^{a+\lambda}\left|\int_a^x(1-g(\nu))d\nu\right||f'(x)|dx+\int_{a+\lambda}^b\left|\int_x^b g(\nu)d\nu\right||f'(x)|dx$$

$$\leq \left(\int_a^{a+\lambda}\left|\int_a^x(1-g(\nu))d\nu\right|^p dx\right)^{1/p}+\left(\int_a^{a+\lambda}|f'(x)|^q dx\right)^{1/q}$$

$$+\left(\int_{a+\lambda}^b\left|\int_x^b g(\nu)d\nu\right|^p dx\right)^{1/p}+\left(\int_{a+\lambda}^b|f'(x)|^q dx\right)^{1/q}:=M \tag{2.4.9}$$

elde edilir. Öte yandan (2.1.3) eşitsizliği kullanılarak

$$\int_a^{a+\lambda}|f'(x)|^q dx\leq 2^{s-1}\lambda\left|f'\left(a+\frac{1}{2}\lambda\right)\right|^q \tag{2.4.10}$$

ve

$$\int_{a+\lambda}^b|f'(x)|^q dx\leq 2^{s-1}(b-a-\lambda)\left|f'\left(\frac{a+b+\lambda}{2}\right)\right|^q \tag{2.4.11}$$

yazılır. Böylece (2.4.10)ve (2.4.11) eşitsizlikleri (2.4.9)'de kullanılarak

$$M \leq 2^{(s-1)/q}\lambda^{1/q}\left|f'\left(a+\frac{\lambda}{2}\right)\right|\left(\int_a^{a+\lambda}(x-a)^p dx\right)^{1/p}$$

$$+ 2^{(s-1)/q}(b-a-\lambda)^{1/q}\left|f'\left(\frac{a+b+\lambda}{2}\right)\right|\left(\int_{a+\lambda}^b(b-x)^p dx\right)^{1/p}$$

$$= \frac{2^{(s-1)/q}}{(p+1)^{1/p}}\left[\lambda^{1+\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}\left|f'\left(a+\frac{\lambda}{2}\right)\right|+(b-a-\lambda)^{1+\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}\left|f'\left(\frac{a+b+\lambda}{2}\right)\right|\right]$$

$$= \frac{2^{(s-1)/q}}{(p+1)^{1/p}}\left[\lambda^2\left|f'\left(a+\frac{\lambda}{2}\right)\right|+(b-a-\lambda)^2\left|f'\left(\frac{a+b+\lambda}{2}\right)\right|\right]$$

elde edilir ki böylece (2.4.7)'deki eşitsizlik elde edilmiş olur. (2.4.8) eşitsizliğide (2.3.11) özdeşliği kullanılarak benzer şekilde elde edilebilir.

3. ARAŞTIRMA BULGULARI

3.1 η-Konveks Fonksiyon Sınıfı İçin Steffensen Tipli Eşitsizlikler

Teorem 3.1.1 $f, g : [a,b] \subset \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ integrallenebilir iki fonksiyon, $\forall \nu \in [a,b]$ için $0 \leq g(\nu) \leq 1$ ve $\int_a^b g(\nu) f'(\nu) d\nu$ integrali var olsun. f, $[a,b]$ aralığında mutlak sürekli bir fonksiyon ve $|f'|$, $[a,b]$ aralığında η-konveks fonksiyon ise

$$\lambda := \int_a^b g(\nu) d\nu$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
&\left| \int_a^{a+\lambda} f(x)dx - \int_a^b f(x)g(x)dx \right| \\
\leq\ & \frac{\lambda^2}{6} \left[3|f'(a)| + 2\eta(|f'(a+\lambda)|, |f'(a)|) \right] \\
&+ \frac{(b-a-\lambda)^2}{6} \left[3|f'(a+\lambda)| + \eta(|f'(b)|, |f'(a+\lambda)|) \right]
\end{aligned} \tag{3.1.1}$$

ve

$$\begin{aligned}
&\left| \int_a^b f(x)g(x)dx - \int_{b-\lambda}^b f(x)dx \right| \\
\leq\ & \frac{(b-a-\lambda)^2}{6} \left[3|f'(a)| + \frac{2(b-a-\lambda)\eta(|f'(a+\lambda)|, |f'(a)|)}{\lambda} \right] \\
&+ \frac{\lambda^2}{6} \left[3|f'(a+\lambda)| + \frac{(3b-3a-5\lambda)\eta(|f'(b)|, |f'(a+\lambda)|)}{b-a-\lambda} \right]
\end{aligned} \tag{3.1.2}$$

eşitsizlikleri geçerlidir.

İspat. Lemma 2.3.1 ve $|f'|$'nin η-konveksliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
&\left| \int_a^{a+\lambda} f(x)dx - \int_a^b f(x)g(x)dx \right| \\
\leq\ & \left| \int_a^{a+\lambda} \left(\int_a^x (1-g(\nu))d\nu \right) f'(x)dx \right| + \left| \int_{a+\lambda}^b \left(\int_x^b g(\nu)d\nu \right) f'(x)dx \right|
\end{aligned}$$

$$\leq \int_a^{a+\lambda}\left|\int_a^x (1-g(\nu))d\nu\right| |f'(x)|dx + \int_{a+\lambda}^b \left|\int_x^b g(\nu)d\nu\right| |f'(x)|dx$$

$$= \int_a^{a+\lambda}\left|\int_a^x (1-g(\nu))d\nu\right| \left|f'\left(\frac{x-a}{\lambda}(a+\lambda)+\frac{a+\lambda-x}{\lambda}a\right)\right| dx$$

$$+\int_{a+\lambda}^b \left|\int_x^b g(\nu)d\nu\right| \left|f'\left(\frac{x-a-\lambda}{b-a-\lambda}b+\frac{b-x}{b-a-\lambda}(a+\lambda)\right)\right| dx$$

$$\leq \int_a^{a+\lambda}\left|\int_a^x (1-g(\nu))d\nu\right| \left[|f'(a)|+\frac{x-a}{\lambda}\eta\left(|f'(a+\lambda)|,|f'(a)|\right)\right] dx$$
$$+\int_{a+\lambda}^b \left|\int_x^b g(\nu)d\nu\right| \left[|f'(a+\lambda)|+\frac{x-a-\lambda}{b-a-\lambda}\eta\left(|f'(b)|,|f'(a+\lambda)|\right)\right] dx$$

$$= \int_a^{a+\lambda}\left|\int_a^x (1-g(\nu))d\nu\right| |f'(a)|dx$$

$$+\int_a^{a+\lambda}\left|\int_a^x (1-g(\nu))d\nu\right| \frac{x-a}{\lambda}\eta\left(|f'(a+\lambda)|,|f'(a)|\right) dx$$

$$+\int_{a+\lambda}^b \left|\int_x^b g(\nu)d\nu\right| |f'(a+\lambda)|dx$$

$$+\int_{a+\lambda}^b \left|\int_x^b g(\nu)d\nu\right| \frac{x-a-\lambda}{b-a-\lambda}\eta\left(|f'(b)|,|f'(a+\lambda)|\right) dx$$

$$\leq |f'(a)|\int_a^{a+\lambda}(x-a)dx + \frac{\eta(|f'(a+\lambda)|,|f'(a)|)}{\lambda}\int_a^{a+\lambda}(x-a)^2dx$$

$$+|f'(a+\lambda)|\int_{a+\lambda}^b (b-x)dx + \frac{\eta(|f'(b)|,|f'(a+\lambda)|)}{b-a-\lambda}\int_{a+\lambda}^b (b-x)(x-a-\lambda)dx$$

$$= \frac{\lambda^2}{2}|f'(a)| + \frac{\lambda^3}{3}\frac{\eta(|f'(a+\lambda)|, |f'(a)|)}{\lambda}$$

$$+\frac{(b-a-\lambda)^2}{2}|f'(a+\lambda)| + \frac{(b-a-\lambda)^3}{6}\frac{\eta(|f'(b)|, |f'(a+\lambda)|)}{b-a-\lambda}$$

$$= \frac{\lambda^2}{6}[3|f'(a)| + 2\eta(|f'(a+\lambda)|, |f'(a)|)]$$

$$+\frac{(b-a-\lambda)^2}{6}[3|f'(a+\lambda)| + \eta(|f'(b)|, |f'(a+\lambda)|]$$

elde edilir ki böylece (3.1.1) eşitsizliğinin ispatı tamamlanır. Benzer şekilde (3.1.2) eşitsizliğinin ispatı da

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx - \int_{b-\lambda}^b f(x)dx\right|$$

$$\leq \left|\int_a^{b-\lambda}\left(\int_a^x g(\nu)d\nu\right)f'(x)dx\right| + \left|\int_{b-\lambda}^b\left(\int_x^b (1-g(\nu))d\nu\right)f'(x)dx\right|$$

$$\leq \int_a^{b-\lambda}\left|\int_a^x g(\nu)d\nu\right||f'(x)|dx + \int_{b-\lambda}^b\left|\int_x^b (1-g(\nu))d\nu\right||f'(x)|dx$$

$$= \int_a^{b-\lambda}\left|\int_a^x g(\nu)d\nu\right|\left|f'\left(\frac{x-a}{\lambda}(a+\lambda) + \frac{a+\lambda-x}{\lambda}a\right)\right|dx$$

$$+\int_{b-\lambda}^b\left|\int_x^b (1-g(\nu))d\nu\right|\left|f'\left(\frac{x-a-\lambda}{b-a-\lambda}b + \frac{b-x}{b-a-\lambda}(a+\lambda)\right)\right|dx$$

$$\leq \int_a^{b-\lambda}\left|\int_a^x g(\nu)d\nu\right|\left[|f'(a)| + \frac{x-a}{\lambda}\eta(|f'(a+\lambda)|, |f'(a)|)\right]dx$$

$$+\int_{b-\lambda}^{b}\left|\int_{x}^{b}(1-g(\nu))d\nu\right|\left[|f'(a+\lambda)|+\frac{x-a-\lambda}{b-a-\lambda}\eta(|f'(b)|,|f'(a+\lambda)|)\right]dx$$

$$= |f'(a)|\int_{a}^{b-\lambda}\left|\int_{a}^{x}g(\nu)d\nu\right|dx+\int_{a}^{b-\lambda}\left|\int_{a}^{x}g(\nu)d\nu\right|\frac{x-a}{\lambda}\eta(|f'(a+\lambda)|,|f'(a)|)dx$$

$$+|f'(a+\lambda)|\int_{b-\lambda}^{b}\left|\int_{x}^{b}g(\nu)d\nu\right|dx$$

$$+\int_{b-\lambda}^{b}\left|\int_{x}^{b}(1-g(\nu))d\nu\right|\frac{x-a-\lambda}{b-a-\lambda}\eta(|f'(b)|,|f'(a+\lambda)|)dx$$

$$\leq |f'(a)|\int_{a}^{b-\lambda}(x-a)dx+\frac{\eta(|f'(a+\lambda)|,|f'(a)|)}{b-a-\lambda}\int_{a}^{b-\lambda}(x-a)^2dx$$

$$+|f'(a+\lambda)|\int_{b-\lambda}^{b}(b-x)dx+\frac{\eta(|f'(b)|,|f'(a+\lambda)|)}{b-a-\lambda}\int_{b-\lambda}^{b}(b-x)(x-a-\lambda)dx$$

$$= \frac{(b-a-\lambda)^2}{2}|f'(a)|+\frac{(b-a-\lambda)^3}{3}\frac{\eta(|f'(a+\lambda)|,|f'(a)|)}{\lambda}$$

$$+|f'(a+\lambda)|\frac{\lambda^2}{2}+\frac{\lambda^2(3b-3a-5\lambda)}{6}\frac{\eta(|f'(b)|,|f'(a+\lambda)|)}{b-a-\lambda}$$

şeklinde yapılır.

Teorem 3.1.2 $f,g:[a,b]\subset\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ integrallenebilir iki fonksiyon, $\forall\nu\in[a,b]$ için $0\leq g(\nu)\leq 1$ ve $\int_a^b g(\nu)f'(\nu)d\nu$ integrali var olsun. f, $[a,b]$ aralığında mutlak sürekli bir fonksiyon ve $|f'|$, $[a,b]$ aralığında η-konveks fonksiyon ise

$$\lambda:=\int_a^b g(\nu)d\nu$$

olmak üzere

$$
\begin{aligned}
& \left| \int_a^{a+\lambda} f(x)dx - \int_a^b f(x)g(x)dx \right| \\
\leq \; & \int_{a+\lambda}^{b} g(\nu)d\nu \left[\lambda \left(|f'(a+\lambda)| + \frac{\eta(|f'(a)|, |f'(a+\lambda)|}{2} \right) \right. \\
& \left. + (b-a-\lambda) \left(|f'(b)| + \frac{\eta(|f'(a+\lambda)|, |f'(b)|)}{2} \right) \right] \\
\leq \; & (b-a-\lambda) \left[\lambda \left(|f'(a+\lambda)| + \frac{\eta(|f'(a)|, |f'(a+\lambda)|}{2} \right) \right. \\
& \left. + (b-a-\lambda) \left(|f'(b)| + \frac{\eta(|f'(a+\lambda)|, |f'(b)|)}{2} \right) \right] \qquad (3.1.3)
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
& \left| \int_a^{b} f(x)g(x)dx - \int_{b-\lambda}^b f(x)dx \right| \\
\leq \; & \int_{b-\lambda}^{b} g(\nu)d\nu \left[(b-a-\lambda) \left(|f'(b-\lambda)| + \frac{\eta(|f'(a)|, |f'(b-\lambda)|}{2} \right) \right. \\
& \left. + \lambda \left(|f'(b)| + \frac{\eta(|f'(b-\lambda)|, |f'(b)|)}{2} \right) \right] \\
\leq \; & (b-a-\lambda) \left[(b-a-\lambda) \left(|f'(b-\lambda)| + \frac{\eta(|f'(a)|, |f'(b-\lambda)|}{2} \right) \right. \\
& \left. + \lambda \left(|f'(b)| + \frac{\eta(|f'(b-\lambda)|, |f'(b)|)}{2} \right) \right] \qquad (3.1.4)
\end{aligned}
$$

eşitsizlikleri elde edilir.

İspat. Lemma 2.3.1'den

$$\left|\int_a^{a+\lambda} f(x)dx - \int_a^b f(x)g(x)dx\right|$$

$$\leq \sup_{x\in[a,a+\lambda]}\left[\int_a^x (1-g(\nu))d\nu\right]\int_a^{a+\lambda}|f'(x)|dx$$

$$+\sup_{x\in[a+\lambda,b]}\left[\int_x^b g(\nu)d\nu\right]\int_{a+\lambda}^b |f'(x)|dx$$

yazılır. $|f'|$ $[a,b]$ aralığında $\eta-$konveks olduğundan

$$\int_a^{a+\lambda}|f'(x)|dx \leq \lambda\left(|f'(a+\lambda)| + \frac{\eta(|f'(a)|,|f'(a+\lambda)|)}{2}\right)$$

ve

$$\int_{a+\lambda}^b |f'(x)|dx \leq (b-a-\lambda)\left(|f'(b)| + \frac{\eta(|f'(a+\lambda)|,|f'(b)|)}{2}\right)$$

olur. Böylece

$$\left|\int_a^{a+\lambda} f(x)dx - \int_a^b f(x)g(x)dx\right|$$

$$\leq \lambda\left(|f'(a+\lambda)| + \frac{\eta(|f'(a)|,|f'(a+\lambda)|)}{2}\right)\left[\int_a^{a+\lambda}(1-g(\nu))d\nu\right]$$

$$+(b-a-\lambda)\left(|f'(b)| + \frac{\eta(|f'(a+\lambda)|,|f'(b)|)}{2}\right)\left[\int_{a+\lambda}^b g(\nu)d\nu\right]$$

$$\leq \max\left\{\int_a^{a+\lambda}(1-g(\nu))d\nu, \int_{a+\lambda}^b g(\nu)d\nu\right\}$$

$$\times\left[\lambda\left(|f'(a+\lambda)| + \frac{\eta(|f'(a)|,|f'(a+\lambda)|)}{2}\right)\right.$$

$$+ (b-a-\lambda)\left(|f'(b)| + \frac{\eta(|f'(a+\lambda)|, |f'(b)|)}{2}\right)\Bigg]$$

$$= \int_{a+\lambda}^{b} g(t)dt \left[\lambda\left(|f'(a+\lambda)| + \frac{\eta(|f'(a)|, |f'(a+\lambda)|)}{2}\right)\right.$$

$$\left. +(b-a-\lambda)\left(|f'(b)| + \frac{\eta(|f'(a+\lambda)|, |f'(b)|)}{2}\right)\right]$$

yazılır ve (3.1.3)'deki ilk eşitsizlik elde edilir. $\forall \nu \in [a,b]$ için $0 \leq g(\nu) \leq 1$ olduğundan

$$0 \leq \int_{a+\lambda}^{b} g(\nu)d\nu \leq b-a-\lambda$$

olacağından (3.1.3)'deki ikinci eşitsizlik kolayca elde edilir. Benzer şekilde

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx - \int_{b-\lambda}^{b} f(x)dx\right|$$

$$\leq \sup_{x\in[a,b-\lambda]} \left[\int_a^x g(\nu)d\nu\right] \int_a^{b-\lambda} |f'(x)|dx$$

$$+ \sup_{x\in[b-\lambda,b]} \left[\int_x^b (1-g(\nu))d\nu\right] \int_{b-\lambda}^{b} |f'(x)|dx$$

eşitsizliği yazılır.$|f'|$, $[a,b]$ aralığında $\eta-$konveks fonksiyonu olduğundan

$$\int_a^{b-\lambda} |f'(x)|dx \leq (b-a-\lambda)\left(|f'(b-\lambda)| + \frac{\eta(|f'(a)|, |f'(b-\lambda)|)}{2}\right)$$

ve

$$\int_{b-\lambda}^{b} |f'(x)|dx \leq \lambda\left(|f'(b)| + \frac{\eta(|f'(b-\lambda)|, |f'(b)|)}{2}\right)$$

yazılır. Böylece

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx - \int_{b-\lambda}^{b} f(x)dx\right|$$

$$\leq (b-a-\lambda)\left(|f'(b-\lambda)| + \frac{\eta(|f'(a)|, |f'(b-\lambda)|)}{2}\right)\left[\int_a^{b-\lambda} g(t)dt\right]$$

$$+\lambda\left(|f'(b)| + \frac{\eta(|f'(b-\lambda)|, |f'(b)|)}{2}\right)\left[\int_{b-\lambda}^{b} (1-g(\nu))d\nu\right]$$

$$
\begin{aligned}
&\le \max\left\{\int_a^{b-\lambda} g(\nu)d\nu, \int_{b-\lambda}^{b}(1-g(\nu))d\nu\right\} \\
&\quad \times\left[(b-a-\lambda)\left(|f'(b-\lambda)|+\frac{\eta(|f'(a)|,|f'(b-\lambda)|)}{2}\right)\right. \\
&\quad \left.+\lambda\left(|f'(b)|+\frac{\eta(|f'(b-\lambda)|,|f'(b)|)}{2}\right)\right] \\
&= \int_{b-\lambda}^{b} g(\nu)d\nu\left[(b-a-\lambda)\left(|f'(b-\lambda)|+\frac{\eta(|f'(a)|,|f'(b-\lambda)|)}{2}\right)\right. \\
&\quad \left.+\lambda\left(|f'(b)|+\frac{\eta(|f'(b-\lambda)|,|f'(b)|)}{2}\right)\right]
\end{aligned}
$$

eşitsizliği elde edilir ve (3.1.4)'deki ilk eşitsizlik elde edilir. $\forall\nu\in[a,b]$ için $0\le g(\nu)\le 1$ olduğundan

$$
0\le\int_a^{b-\lambda} g(\nu)d\nu\le b-a-\lambda
$$

olacağından (3.1.4)'deki ikinci eşitsizlik kolayca elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.1.3 $f,g:[a,b]\subset\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ integrallenebilir iki fonksiyon, $\forall\nu\in[a,b]$ için $0\le g(\nu)\le 1$ ve $\int_a^b g(\nu)f'(\nu)d\nu$ integrali var olsun. f, $[a,b]$ aralığında mutlak sürekli bir fonksiyon, $s\in(0,1]$, $q>1$ ve $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ olmak üzere $|f'|^q$, $[a,b]$ aralığında η-konveks fonksiyon ise

$$
\lambda:=\int_a^b g(\nu)d\nu
$$

olmak üzere

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_a^{a+\lambda} f(x)dx-\int_a^b f(x)g(x)dx\right| \\
&\le \frac{\lambda^2}{(p+1)^{\frac{1}{p}}}\left[\left(|f'(a+\lambda)|^q+\frac{\eta(|f'(a)|^q,|f'(a+\lambda)|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}\right. \\
&\quad \left.+\frac{(b-a-\lambda)^2}{(p+1)^{\frac{1}{p}}}\left(|f'(b)|^q+\frac{\eta(|f'(a+\lambda)|^q,|f'(b)|^q)}{2}\right)^{\frac{1}{q}}\right] \qquad (3.1.5)
\end{aligned}
$$

ve

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx - \int_{b-\lambda}^b f(x)dx\right|$$

$$\leq \frac{(b-a-\lambda)^2}{(p+1)^{\frac{1}{p}}}\left[\left(|f'(b-\lambda)|^q + \frac{\eta(|f'(a)|^q, |f'(b-\lambda)|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left. + \frac{\lambda^2}{(p+1)^{\frac{1}{p}}}\left(|f'(b)|^q + \frac{\eta(|f'(b-\lambda)|^q, |f'(b)|^q)}{2}\right)^{\frac{1}{q}}\right] \quad (3.1.6)$$

eşitsizlikleri geçerlidir.

İspat. Lemma 2.3.1 ve Hölder eşitsizliği kullanarak

$$\left|\int_a^{a+\lambda} f(x)dx - \int_a^b f(x)g(x)dx\right|$$

$$\leq \int_a^{a+\lambda}\left|\int_a^x (1-g(\nu))d\nu\right||f'(x)|dx + \int_{a+\lambda}^b\left|\int_x^b g(\nu)d\nu\right||f'(x)|dx \quad (3.1.7)$$

$$\leq \left(\int_a^{a+\lambda}\left|\int_a^x (1-g(\nu))d\nu\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^{a+\lambda}|f'(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\left(\int_{a+\lambda}^b\left|\int_x^b g(\nu)d\nu\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{a+\lambda}^b|f'(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}} := M$$

elde edilir. Öte yandan $|f'|^q$ $\eta-$konveks olduğundan

$$\int_a^{a+\lambda}|f'(x)|^q dx \leq \lambda\left(|f'(a+\lambda)|^q + \frac{\eta(|f'(a)|^q, |f'(a+\lambda)|^q)}{2}\right) \quad (3.1.8)$$

ve

$$\int_{a+\lambda}^b|f'(x)|^q dx \leq (b-a-\lambda)\left(|f'(b)|^q + \frac{\eta(|f'(a+\lambda)|^q, |f'(b)|^q)}{2}\right) \quad (3.1.9)$$

eşitsizlikleri yazılır. Daha sonra (3.1.8) ve (3.1.9) eşitsizlikleri (3.1.7) eşitsizliğinde yerine yazılırsa

$$
\begin{aligned}
M &\leq \left(\int_a^{a+\lambda}(x-a)^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \lambda^{\frac{1}{q}} \left[|f'(a+\lambda)|^q + \frac{\eta(|f'(a)|^q, |f'(a+\lambda)|^q)}{2}\right]^{\frac{1}{q}} \\
&\quad + \left(\int_{a+\lambda}^{b}(b-x)^p dx\right)^{\frac{1}{p}} (b-a-\lambda)^{\frac{1}{q}} \left[|f'(b)|^q + \frac{\eta(|f'(a+\lambda)|^q, |f'(b)|^q)}{2}\right]^{\frac{1}{q}} \\
&= \frac{\lambda^2}{(p+1)^{\frac{1}{p}}} \left[|f'(a+\lambda)|^q + \frac{\eta(|f'(a)|^q, |f'(a+\lambda)|^q)}{2}\right]^{\frac{1}{q}} \\
&\quad + \frac{(b-a-\lambda)^2}{(p+1)^{\frac{1}{p}}} \left[|f'(b)|^q + \frac{\eta(|f'(a+\lambda)|^q, |f'(b)|^q)}{2}\right]^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}
$$

elde edilir ki böylece (3.1.5) eşitsizliği ispatlanmış olur. Benzer şekilde Lemma 2.3.1 ve Hölder eşitsizliği kullanılarak

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_a^b f(x)g(x)dx - \int_{b-\lambda}^{b} f(x)dx\right| \\
&\leq \int_a^{b-\lambda}\left|\int_a^x g(\nu)d\nu\right| |f'(x)|dx + \int_{b-\lambda}^{b}\left|\int_x^b (1-g(\nu))d\nu\right| |f'(x)|dx \qquad (3.1.10) \\
&\leq \left(\int_a^{b-\lambda}\left|\int_a^x g(\nu)d\nu\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^{b-\lambda}|f'(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\quad + \left(\int_{b-\lambda}^{b}\left|\int_x^b (1-g(\nu))d\nu\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{b-\lambda}^{b}|f'(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}} := N
\end{aligned}
$$

eşitsizliği elde edilir. $|f'|^q$ $\eta-$konveks olduğundan

$$\int_a^{b-\lambda}|f'(x)|^q dx \leq (b-a-\lambda)\left(|f'(b-\lambda)|^q + \frac{\eta(|f'(a)|^q, |f'(b-\lambda)|^q)}{2}\right) \qquad (3.1.11)$$

ve

$$\int_{b-\lambda}^{b}|f'(x)|^q dx \leq \lambda\left(|f'(b)|^q + \frac{\eta(|f'(b-\lambda)|^q, |f'(b)|^q)}{2}\right) \qquad (3.1.12)$$

yazılır. Daha sonra (3.1.11) ve (3.1.12) eşitsizlikleri (3.1.10) eşitsizliğinde yerine yazılırsa

$$
\begin{aligned}
N \quad \leq \quad & \left(\int_a^{b-\lambda}(x-a)^p dx\right)^{\frac{1}{p}}(b-a-\lambda)^{\frac{1}{q}}\left[|f'(b-\lambda)|^q+\frac{\eta(|f'(a)|^q,|f'(b-\lambda)|^q)}{2}\right]^{\frac{1}{q}} \\
& +\left(\int_{b-\lambda}^{b}(b-x)^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\lambda^{\frac{1}{q}}\left[|f'(b)|^q+\frac{\eta(|f'(b-\lambda)|^q,|f'(b)|^q)}{2}\right]^{\frac{1}{q}} \\
= \quad & \frac{(b-a-\lambda)^2}{(p+1)^{\frac{1}{p}}}\left[|f'(b-\lambda)|^q+\frac{\eta(|f'(a)|^q,|f'(b-\lambda)|^q)}{2}\right]^{\frac{1}{q}} \\
& +\frac{\lambda^2}{(p+1)^{\frac{1}{p}}}\left[|f'(b)|^q+\frac{\eta(|f'(b-\lambda)|^q,|f'(b)|^q)}{2}\right]^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}
$$

eşitziliği yazılır ve bu da (3.1.6) eşitsizliğini verir.

3.2 P-Fonksiyon Sınıfı İçin Steffensen Tipli Eşitsizlikler

Teorem 3.2.1 $f, g : [a,b] \subset \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ integrallenebilir iki fonksiyon, $\forall \in [a,b]$ için $0 \leq g(\nu) \leq 1$ ve $\int_a^b g(\nu)f'(\nu)d\nu$ integrali var olsun. f, $[a,b]$ aralığında mutlak sürekli bir fonksiyon ve $|f'|$, $[a,b]$ aralığında $P-$fonksiyonu ise

$$\lambda := \int_a^b g(\nu)d\nu$$

olmak üzere

$$
\begin{aligned}
& \left|\int_a^{a+\lambda} f(x)dx-\int_a^b f(x)g(x)dx\right| \\
\leq \quad & \frac{\lambda^2}{2}\left[|f'(a)|+|f'(a+\lambda)|\right]+\frac{(b-a-\lambda)^2}{2}\left[|f'(b)|+|f'(a+\lambda)|\right] \qquad (3.2.1)
\end{aligned}
$$

ve

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx-\int_{b-\lambda}^b f(x)dx\right|$$

$$\leq \frac{(b-a-\lambda)^2}{2}\left[|f'(a)|+|f'(a+\lambda)|\right]+\frac{\lambda^2}{2}\left[|f'(b)|+|f'(a+\lambda)|\right] \tag{3.2.2}$$

eşitsizlikleri geçerlidir.

İspat. Lemma 2.3.1 ve $|f'|$'nin P-fonksiyonu olduğu kullanılarak

$$\begin{aligned}
&\left|\int_a^{a+\lambda} f(x)dx-\int_a^b f(x)g(x)dx\right| \\
\leq\ & \left|\int_a^{a+\lambda}\left(\int_a^x (1-g(\nu))d\nu\right)f'(x)dx\right|+\left|\int_{a+\lambda}^b\left(\int_x^b g(\nu)d\nu\right)f'(x)dx\right| \\
\leq\ & \int_a^{a+\lambda}\left|\int_a^x (1-g(\nu))d\nu\right||f'(x)|dx+\int_{a+\lambda}^b\left|\int_x^b g(\nu)d\nu\right||f'(x)|dx \\
=\ & \int_a^{a+\lambda}\left|\int_a^x (1-g(\nu))d\nu\right|\left|f'\left(\frac{x-a}{\lambda}(a+\lambda)+\frac{a+\lambda-x}{\lambda}a\right)\right|dx \\
&+\int_{a+\lambda}^b\left|\int_x^b g(\nu)d\nu\right|\left|f'\left(\frac{x-a-\lambda}{b-a-\lambda}b+\frac{b-x}{b-a-\lambda}(a+\lambda)\right)\right|dx \\
\leq\ & \int_a^{a+\lambda}\left|\int_a^x (1-g(\nu))d\nu\right|\left[|f'(a+\lambda)|+|f'(a)|\right]dx \\
&+\int_{a+\lambda}^b\left|\int_x^b g(\nu)d\nu\right|\left[|f'(b)|+|f'(a+\lambda)|\right]dx \\
=\ & \int_a^{a+\lambda}\left|\int_a^x (1-g(\nu))d\nu\right||f'(a+\lambda)|dx+\int_a^{a+\lambda}\left|\int_a^x (1-g(\nu))d\nu\right||f'(a)|dx \\
&+\int_{a+\lambda}^b\left|\int_x^b g(\nu)d\nu\right||f'(b)|dx+\int_{a+\lambda}^b\left|\int_x^b g(\nu)d\nu\right||f'(a+\lambda)|dx
\end{aligned}$$

$$\leq \int_a^{a+\lambda}(x-a)|f'(a+\lambda)|dx+\int_a^{a+\lambda}(x-a)|f'(a)|dx$$

$$+\int_{a+\lambda}^{b}(b-x)|f'(b)|dx+\int_{a+\lambda}^{b}(b-x)|f'(a+\lambda)|dx$$

$$= |f'(a+\lambda)|\int_a^{a+\lambda}(x-a)dx+|f'(a)|\int_a^{a+\lambda}(x-a)dx$$

$$+|f'(b)|\int_{a+\lambda}^{b}(b-x)dx+|f'(a+\lambda)|\int_{a+\lambda}^{b}(b-x)dx$$

$$= \frac{\lambda^2}{2}[|f'(a+\lambda)|+|f'(a)|]+\frac{(b-a-\lambda)^2}{2}[|f'(b)|+|f'(a+\lambda)|]$$

eşitsizliği yazılır ki bu da (3.2.1) eşitsizliğinin ispatını tamamlar. Benzer şekilde

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx-\int_{b-\lambda}^{b} f(x)dx\right|$$

$$\leq \left|\int_a^{b-\lambda}\left(\int_a^x g(\nu)d\nu\right)f'(x)dx\right|+\left|\int_{b-\lambda}^{b}\left(\int_x^b(1-g(t))dt\right)f'(x)dx\right|$$

$$\leq \int_a^{b-\lambda}\left|\int_a^x g(\nu)d\nu\right||f'(x)|dx+\int_{b-\lambda}^{b}\left|\int_x^b(1-g(\nu))d\nu\right||f'(x)|dx$$

$$= \int_a^{b-\lambda}\left|\int_a^x g(\nu)d\nu\right|\left|f'\left(\frac{x-a}{\lambda}(a+\lambda)+\frac{a+\lambda-x}{\lambda}a\right)\right|dx$$

$$+\int_{b-\lambda}^{b}\left|\int_x^b(1-g(\nu))d\nu\right|\left|f'\left(\frac{x-a-\lambda}{b-a-\lambda}b+\frac{b-x}{b-a-\lambda}(a+\lambda)\right)\right|dx$$

$$\leq \int_a^{b-\lambda}\left|\int_a^x g(\nu)d\nu\right|[|f'(a+\lambda)|+|f'(a)|]\,dx$$

$$+\int_{b-\lambda}^{b}\left|\int_{x}^{b}(1-g(\nu))d\nu\right|\left[|f'(b)|+|f'(a+\lambda)|\right]dx$$

$$= \quad |f'(a+\lambda)|\int_{a}^{b-\lambda}\left|\int_{a}^{x}g(\nu)d\nu\right|dx+|f'(a)|\int_{a}^{b-\lambda}\left|\int_{a}^{x}g(\nu)d\nu\right|dx$$

$$+|f'(b)|\int_{b-\lambda}^{b}\left|\int_{x}^{b}g(\nu)d\nu\right|dx+|f'(a+\lambda)|\int_{b-\lambda}^{b}\left|\int_{x}^{b}(1-g(\nu))d\nu\right|dx$$

$$\leq \quad |f'(a+\lambda)|\int_{a}^{b-\lambda}(x-a)dx+|f'(a)|\int_{a}^{b-\lambda}(x-a)dx$$

$$+|f'(b)|\int_{b-\lambda}^{b}(b-x)dx+|f'(a+\lambda)|\int_{b-\lambda}^{b}(b-x)dx$$

$$= \quad \frac{(b-a-\lambda)^2}{2}\left[|f'(a+\lambda)|+|f'(a)|\right]+\frac{\lambda^2}{2}\left[|f'(b)|+|f'(a+\lambda)|\right]$$

eşitsizliği elde edilir ve böylece (3.2.2) eşitsizliği ispatlanmış olur.

Teorem 3.2.2 $f,g:[a,b]\subset\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ integrallenebilir iki fonksiyon, $\forall\nu\in[a,b]$ için $0\leq g(\nu)\leq 1$ ve $\int_a^b g(\nu)f'(\nu)dt$ integrali var olsun. f, $[a,b]$ aralığında mutlak sürekli bir fonksiyon ve $|f'|$, $[a,b]$ aralığında $P-$fonksiyonu ise

$$\lambda:=\int_{a}^{b}g(\nu)d\nu$$

olmak üzere

$$\left|\int_{a}^{a+\lambda}f(x)dx-\int_{a}^{b}f(x)g(x)dx\right| \tag{3.2.3}$$

$$\leq \quad \left(\int_{a+\lambda}^{b}g(\nu)d\nu\right)\left[\lambda\left(|f'(a)|+|f'(a+\lambda)|\right)+(b-a-\lambda)\left(|f'(a+\lambda)+|f'(b)|\right)\right]$$

$$\leq \ (b-a-\lambda)\Big[\lambda\left(|f'(a)|+|f'(a+\lambda)|\right)+(b-a-\lambda)\left(|f'(a+\lambda)+|f'(b)|\right)\Big]$$

ve

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx-\int_{b-\lambda}^b f(x)dx\right| \tag{3.2.4}$$

$$\leq \ \left(\int_a^{b-\lambda} g(\nu)d\nu\right)\Big[(b-a-\lambda)\left(|f'(b-\lambda)|+|f'(a)|\right)+\lambda\left(|f'(b)|+|f'(b-\lambda)|\right)\Big]$$

$$\leq \ \lambda\Big[(b-a-\lambda)\left(|f'(b-\lambda)|+|f'(a)|\right)+\lambda\left(|f'(b)|+|f'(b-\lambda)|\right)\Big]$$

eşitsizlikleri geçerlidir.

İspat. Lemma 2.3.1 yardımıyla

$$\left|\int_a^{a+\lambda} f(x)dx-\int_a^b f(x)g(x)dx\right|$$

$$\leq \ \sup_{x\in[a,a+\lambda]}\left[\int_a^x (1-g(\nu))d\nu\right]\int_a^{a+\lambda}|f'(x)|dx$$

$$+\sup_{x\in[a+\lambda,b]}\left[\int_x^b g(t)dt\right]\int_{a+\lambda}^b|f'(x)|dx$$

yazılır. $|f'|$'nin $[a,b]$ aralığında $P-$fonksiyonu olduğundan (2.1.5) eşitsizliği kullanılarak

$$\int_a^{a+\lambda}|f'(x)|dx\leq\lambda\left(|f'(a)|+|f'(a+\lambda)|\right)$$

ve

$$\int_{a+\lambda}^b|f'(x)|dx\leq(b-a-\lambda)\left(|f'(a+\lambda)|+|f'(b)|\right)$$

yazılır. Dolaysıyla buradan da

$$\left|\int_a^{a+\lambda} f(x)dx-\int_a^b f(x)g(x)dx\right|$$

$$\leq \lambda\left(|f'(a)|+|f'(a+\lambda)|\right)\left[\int_a^{a+\lambda}(1-g(\nu))d\nu\right]$$

$$+(b-a-\lambda)\left(|f'(a+\lambda|)+|f'(b)|\right)\left[\int_{a+\lambda}^{b}g(\nu)d\nu\right]$$

$$\leq \max\left\{\int_a^{a+\lambda}(1-g(\nu))d\nu,\int_{a+\lambda}^{b}g(\nu)d\nu\right\}\left[\lambda\left(|f'(a)|+|f'(a+\lambda)|\right)\right.$$

$$\left.+(b-a-\lambda)\left(|f'(a+\lambda)|+|f'(b)|\right)\right]$$

$$= \left(\int_{a+\lambda}^{b}g(\nu)d\nu\right)\left[\lambda\left(|f'(a)|+|f'(a+\lambda)|\right)+(b-a-\lambda)\left(|f'(a+\lambda)+|f'(b)|\right)\right]$$

elde edilir. $\forall\nu\in[a,b]$ için $0\leq g(\nu)\leq 1$ olduğundan

$$0\leq\int_{a+\lambda}^{b}g(\nu)d\nu\leq b-a-\lambda$$

yazılır. Böylece

$$\left|\int_a^{a+\lambda}f(x)dx-\int_a^b f(x)g(x)dx\right|$$

$$\leq \left(\int_{a+\lambda}^{b}g(\nu)d\nu\right)\left[\lambda\left(|f'(a)|+|f'(a+\lambda)|\right)+(b-a-\lambda)\left(|f'(a+\lambda)|+|f'(b)|\right)\right]$$

$$\leq (b-a-\lambda)\left[\lambda\left(|f'(a)|+|f'(a+\lambda)|\right)+(b-a-\lambda)\left(|f'(a+\lambda)|+|f'(b)|\right)\right]$$

eşitsizliği elde edilir ve (3.2.3) eşitizliğinin ispatı tamamlanır. Benzer şekilde Lemma 2.3.1'den

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx-\int_{b-\lambda}^{b}f(x)dx\right| \leq \sup_{x\in[a,b-\lambda]}\left[\int_a^x g(\nu)d\nu\right]\int_a^{b-\lambda}|f'(x)|dx$$

$$+\sup_{x\in[b-\lambda,b]}\left[\int_x^b(1-g(\nu))d\nu\right]\int_{b-\lambda}^b|f'(x)|dx$$

yazılır. $|f'|$'nin $[a,b]$ aralığında $P-$fonksiyonu olduğundan (2.1.5) eşitsizliği kullanılarak

$$\int_a^{b-\lambda}|f'(x)|dx\leq(b-a-\lambda)\left(|f'(b-\lambda)|+|f'(a)|\right)$$

ve

$$\int_{b-\lambda}^b|f'(x)|dx\leq\lambda\left(|f'(b)|+|f'(b-\lambda)|\right)$$

olur. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}
&\left|\int_a^b f(x)g(x)dx-\int_{b-\lambda}^b f(x)dx\right|\\
\leq\;&(b-a-\lambda)\left(|f'(b-\lambda)|+|f'(a)|\right)\left[\int_a^{b-\lambda}g(\nu)d\nu\right]\\
&+\lambda\left(|f'(b)|+|f'(b-\lambda)|\right)\left[\int_{b-\lambda}^b(1-g(\nu))d\nu\right]\\
\leq\;&\max\left\{\int_a^{b-\lambda}g(\nu)d\nu,\int_{b-\lambda}^b(1-g(\nu))d\nu\right\}\Big[(b-a-\lambda)\left(|f'(b-\lambda)|+|f'(a)|\right)\\
&+\lambda\left(|f'(b)|+|f'(b-\lambda)|\right)\Big]\\
=\;&\left(\int_{b-\lambda}^b(1-g(\nu))d\nu\right)\\
&\times\Big[(b-a-\lambda)\left(|f'(b-\lambda)|+|f'(a)|\right)+\lambda\left(|f'(b)|+|f'(b-\lambda)|\right)\Big]
\end{aligned}$$

yazılır. $\forall\nu\in[a,b]$ için $0\leq g(\nu)\leq 1$ olduğundan

$$0\leq\int_{b-\lambda}^b(1-g(\nu))d\nu\leq\lambda$$

olacağından

$$\begin{aligned}
&\left|\int_a^b f(x)g(x)dx - \int_{b-\lambda}^b f(x)dx\right| \\
\leq\ & \left(\int_a^{b-\lambda} g(\nu)d\nu\right)\Big[(b-a-\lambda)\left(|f'(b-\lambda)|+|f'(a)|\right)+\lambda\left(|f'(b)|+|f'(b-\lambda)|\right)\Big] \\
\leq\ & \lambda\Big[(b-a-\lambda)\left(|f'(b-\lambda)|+|f'(a)|\right)+\lambda\left(|f'(b)|+|f'(b-\lambda)|\right)\Big]
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir ve (3.2.4) eşitsizliğinin ispatı tamamlanır.

4. TARTIŞMA ve SONUÇ

Bu tezde Steffensen eşitsizliğinin tarihsel süreci ile ilgili bilgiler verilerek diferensiyellenebilen fonksiyonlar ve $s-$konveks fonksiyonlar için literatürde yer alan Steffensen tipli eşitsizlikler sunulduktan sonra η-konveks fonksiyon ve $P-$fonksiyon sınıfları için yeni Steffensen tipli integral eşitsizlikleri elde edilmiştir. Elde edilen bu yeni sonuçlar makale formatında hazırlanarak "Integral Inequalities of Steffensen Type for Some Different Classes of Functions" başlıklı "Eastern Anatolian Journal of Science" isimli uluslararası hakemli dergide yayınlanmıştır. Konuyla ilgilenen araştırmacılar tarafından bu konveks fonksiyonlar yerine farklı konveks fonksiyon sınıfları kullanılarak yeni Steffensen tipli eşitsizlikler elde edebilirler.

KAYNAKLAR

[1] Agarwal, RP. & Dragomir, SS. (1996). An application of Hayashi's inequlity for differentiable functions. *Computers & Mathematics with Applications*, 32(6), 95–99.

[2] Alomari, MW. (2014). New inequalities of Steffensen's type for $s-$convex functions. *Afrika Mathematica*, 25, 1053–1062.

[3] Alomari, MW., Hussain, S. & Liu, Z. (2017). Some Steffensen-type inequalities. *Advances in Pure and Applied Mathematics*, 8(3), 219–226.

[4] Alomari, MW. & Bakula, MK. (2022). An Application of Hayashi's Inequality for Differentiable Functions. *Mathematics*, 10(6), 1–9.

[5] Belmann, R. (1959). On inequalities with alternating signs, *Proceedings of the American Mathematical Society,* 10, 807–809.

[6] Breckner, WW. (1978). Stetigkeitsaussagen fur eine Klasse verallgemeinerter konvexer functionen in topologischen linearen Raumen. *Publications Deinstıtut Mathematique*, 23(37), 13–20.

[7] Cerone. P. (2001). On some generalizations of Steffensen's inequality and related results. *Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics*, 2(3), 1–26.

[8] Dragomir, SS. & Pearce, CEM. (2000). Selected topics on Hermite-Hadamard inequalities and applications, RGMIA Monographs. Victoria University.

[9] Dragomir, SS. & Fitzpatrick, S. (1999). The Hadamard's inequality for s-convex functions in the second sense. *Demonstratio Mathematica*, 32(4), 687–696.

[10] Dragomir, SS., Pečarić, JE. & Person, LE. (1995). Some inequalities of Hadamard type. *Soochow Journal of Mathematics,* 21(3), 335–341.

[11] El-Khatib, MS., Abu Hany, AAK., Matar, MM., Alqudah, MA. & Abdeljawad, T. (2023). On Cerone's and Bellman's generalization of Steffensen's integral inequality via conformable sense. *AIMS Mathematics*, 8(1), 2062–2082.

[12] Gradimir, VM. & Pečarić, JE. (1979). The Steffensen inequality for convex function of order n. *Publikacije Elektrotehničkog fakulteta. Serija Matematika i fizika*, 634/677, 97–100.

[13] Gordji, ME., Delavar, MR. & Dragomir, SS. (2015). Some inequality related to $\eta-$convex function. RGMIA 18, Art. 8., 1–14.

[14] Hayashi, T. (1919). On cuvers with monotonous curvature. *The Tohoku Mathematical Journal*, 15, 236–239.

[15] Hudzik, H. & Maligranda, L. (1994). Some remarks on s-convex functions. *Aequationes Mathematicae*, 48, 100–111.

[16] Jamei, MM., Qi, F. & Srivastava, HM. (2010). Generalizations of some classical inequalities via a special functional property. *Integral Transforms and Special Functions*, 21(5), 327–336.

[17] Liu, Z. (2005). More on Steffensen type inequalities. *Soochow Journal of Mathematics*, 31(3), 429–439.

[18] Liu, Z. (2007). On extensions of Steffensen's inequality. *Journal of Mathematical Analysis and Approximation Theory*, 2(2), 132–139.

[19] Mercer, PR. (2000). Extensions of Steffensen's inequality. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 246, 325–329.

[20] Mitrinović, D., Pečarić, J. & Fink, A. (1993). Classical and new inequalities in analysis, Kluwer Academic Publishers, Amsterdam, The Netherlands, 740 pp.

[21] Niculescu, CP. & Persson, LE. (2006). Convex Functions and Their Appl., A Contemporary Approach, springer Science+Business Media, Inc., 255 pp.

[22] Orlicz, W. (1961). A note on modular spaces I. *Bulletin L'Académie Polonaise des Science, Série des Sciences Mathématiques, Astronomiques et Physiques*, 9, 157–162.

[23] Pearce, CEM., Pečarić, JE. & Šimić, V. (1998). Stolarsky means and Hadamard's inequality. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 220(1), 99–109.

[24] Pečarić, JE. (1982). Notes on some general inequalities. *Publications L'Institut Mathématique*, 32(46), 131–135.

[25] Pečarić, JE., Perušić, A. & Smoljak, K. (2013). Mercer and Wu-Srivastava generalisations of Steffensen's inequality. *Applied Mathematics and Computation*, 219, 10548–10558.

[26] Pečarić, JE., Perušić, A. & Smoljak, K. (2014). Cerone's generalizations of Steffensen's inequality. *Tatra Mountains Mathematical Publications*, 58, 53–75.

[27] Pečarić, JE., Perušić, A. & Kalamir, KS. (2015). Generalizations of Steffensen's inequality via Taylor's formula. *Journal of Inequalities and Applications*, 2015:207, 1–25.

[28] Pečarić, JE. & Smoljak, K. (2015). Steffensen type inequalities involving convex functions. *Mathematical Inequalities & Applications*, 18(1) (2015), 363–378.

[29] Pečarić, JE. & Smoljak, K. (2015). New Steffensen type inequalities involving convex functions. *Results in Mathematics*, 67, 217–234.

[30] Pečarić, JE., Perušić, A. & Kalamir, KS. (2022). Weighted Hermite-Hadamard-Type Inequalities by Identities Related to Generalizations of Steffensen's Inequality. *Mathematics*, 10(9), 1–10.

[31] Wu, SH. & Srivastava HM. (2007). Some improvements and generalizations of Steffensen's integral inequality. *Applied Mathematics and Computation*, 192, 422–428.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler	
Adı Soyadı	Emre Karaman
Doğum Yeri	
Doğum Tarihi	
Uyruğu	■ T.C. ❒ Diğer:
Telefon	
E-Posta Adresi	

Eğitim Bilgileri	
Lisans	
Üniversite	Ordu Üniversitesi
Fakülte	Fen-Edebiyat Fakültesi
Bölümü	Matematik Bölümü
Mezuniyet Yılı	28.06.2021
Yüksek Lisans	
Üniversite	Ordu Üniversitesi
Enstitü Adı	Fen Bilimleri Enstitüsü
Anabilim Dalı	Matematik Anabilim Dalı
Mezuniyet Tarihi	…./…./…..
Yayınlar	

[1] Set E., Karaman E., Çelik B., Karaoğlan A., “Integral Inequalities of Steffensen Type for Some Different Classes of Functions”, Eastern Anatolian Journal of Science, 9(2) (2023), 37-45.