T. C.

ORDU ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

(h, m) −PREİNVEKS FONKSİYONLAR SINIFI ve BU SINIF İÇİN BAZI YENİ HERMİTE HADAMARD TİPİ EŞİTSİZLİKLER

MUSTAFA KARADENİZ

YÜKSEK LİSANS

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ORDU 2020

TEZ BİLDİRİMİ

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan ve kullanılan intihal tespit programının sonuçlarına göre; bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

Mustafa KARADENİZ

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

$(\boldsymbol{h},\boldsymbol{m})$ −PREİNVEKS FONKSİYONLAR SINIFI VE BU SINIF İÇİN BAZI YENİ HERMİTE HADAMARD TİPİ EŞİTSİZLİKLER

Mustafa KARADENİZ

ORDU ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI, 2020

YÜKSEK LİSANS, 40 SAYFA

TEZ DANIŞMANI: Dr. Öğr. Üyesi Erdal ÜNLÜYOL

Bu yüksek lisans tez çalışmasında, (h,m) −preinveks fonksiyonlar sınıfı ele alınmıştır. Bu sınıfın bazı cebirsel özellikleri incelenmiştir. Ayrıca, Hermite-Hadamard Tipi Eşizlikler yardımıyla bazı yeni eşitsizlikler elde edilmiştir. Son olarak ise türevinin mutlak değerinin bazı kuvvetleri bu sınıftan olan fonksiyonlar için yeni teoremler ifade ve ispat edilmiştir.

.

Anahtar Kelimeler: İnveks küme ve fonksiyon, Preinveks ve (h,m) −Preinveks Fonksiyonlar, Hermite-Hadamard Tipi Eşitsizlik.

ABSTRACT

CLASS OF (h, m) −PREINVEX FUNCTIONS AND SOME NEW HERMITE-HADAMARD TYPE INEQUALITIES FOR THIS CLASS

Mustafa KARADENİZ

ORDU UNIVERSITY INSTITUTE OF NATURAL SCIENCES

DEPARTMENTOF MATHEMATICS, 2020

MSC.THESIS, 40 PAGES

SUPERVISOR: Assist. Prof. Dr. Erdal ÜNLÜYOL

In this dissertation, the class of (h, m) −preinvex functions has been addressed. Some algebraic properties of this class have been studied. In addition, some new inequalities have been obtained with the help of Hermite-Hadamard type inequalities. Finally, New theorems have been expressed and proved for functions with some powers of the absolute value of the derivative in this class.

Keywords: Invex set and function, Preinvex and (h, m) −Preinvex Functions, Hermite-Hadamard Type Inequality.

İÇİNDEKİLER

1. GİRİŞ

Elster ve Neshse [9] konveksel fonksiyonlar sınıfını incelemişlerdir, yani $f : S \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda her $x, y \in S$ ve $\lambda \in [0,1]$ için

$$f(z) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \tag{1.0.1}$$

eşitsizliğini sağlayan $z \in S$ noktalarını içeren fonksiyonlara konveksel denir. Eğer S bir konveks küme ve f de konveks bir fonksiyon ise, bu durumda f'nin konveksel olduğu açıktır. Aslında Elster ve Neshse konveksel matematiksel programlama için optimal şart altında bir eyer(büküm) noktası elde etmişlerdir.

Hayaski ve Komiya [11] hem konveksel fonksiyonlar için hem de bu fonksiyonlar için bir Gordan tipi teorem geliştirmişler. İlaveten, konveksel programlar için Lograngion dualliğini araştırmışlardır.

Hanson [12], her $x, y \in S \subseteq \mathbb{R}$ için

$$f(x) - f(u) \geq [\eta(x,u)]^T \nabla f(u) \tag{1.0.2}$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde bir n-boyutlu $\eta(x,u)$ vektör fonksiyona sahip $f : S \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferansiyellenebilir fonksiyonlarını göz önüne almıştır. Burada "∇" sembolü diverjansı göstermektedir. Bu tarz fonksiyonlar Craven [4] tarafından inveks olarak isimlendirilmiştir. Bu terim ise "**in**variant con**vex**" ifadesinden kısaltılmıştır.

Craven ve Glover [5], Ben-Israel ve Mond [2], ayrıca Martin' in [18] invex fonksiyonlar sınıfıyla ilgili çalışmaları mevcuttur. Ben-Israel ve Mond [2], Hanson ve Mond [13] daha genel olan yani, S üzerinde diferensiyellenebilen fonksiyonların, her $x, u \in S$ ve $\lambda \in [0,1]$ için

$$f(u + \lambda\eta(x,u)) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(u) \tag{1.0.3}$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde bir n-boyutlu $\eta(x,u)$ vektör fonksiyonunun varlığını ispat etmişler ve diferensiyellenebilen fonksiyonların hem (1.0.2) yi hem de (1.0.3)'ü sağladığını göstermişlerdir. Bu koşullar altında (1.0.3) eşitsizliğini sağlayan bu fonksiyonlara V. Jeyakumar tarafından "pre-invex" ismi verilmiştir. Ayrıca, $f : S \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda, eğer f'nin bileşenlerinin her biri, η-ya göre S üzerinde pre-inveks ise, bu f'ye η'ya göre S üzeinde preinvekstir denir. Her $x, u \in S$ ve $\lambda \in [0,1]$ için

$$u + \lambda\eta(x,u) \in S$$

olup, buradan preinveks fonksiyonlar konvekseldir.

Yukarıdaki açıklamalardan da anlaşılacağı üzere, invekslik ve preinveksliğin nasıl ortaya çıktığının özetini verdik. Şimdi bu fonksiyon sınıfının "neden" ortaya çıktığı hakkında bilgi verelim. Konveksliğin bu yeni genelleştirmesi, optimizasyon problemleri, statik ve dinamik problemleri, Pareto veya çoklu-amaç programlama problemleri vb. konularının daha iyi anlaşılması ve çözülmesi için matematikçiler tarafından elde edilmiştir.

Böylece, preinveks fonksiyonlar ile ilgili genel bilgilere sahip olduk. Dolayısıyla bu yüksek lisans tez çalışmasında, (h, m)-preinveks fonksiyonlar sınıfı ele alınmıştır. Bu sınıfın bazı cebirsel özellikleri incelenmiştir. Ayrıca, Hermite-Hadamard Tipi Eşizlikler yardımıyla bazı yeni eşitsizlikler elde edilmiştir. Son olarak ise türevinin mutlak değerinin bazı kuvvetleri bu sınıftan olan fonksiyonlar için yeni teoremler ifade ve ispat edilmiştir.

2. GENEL BİLGİLER

Bu bölümde tez için gerekli olan bazı temel bilgiler verilmiştir.

Tanım 2.0.1 (Açık küme) [**19**] $E \subset \mathbb{R}$ alt kümesi verilsin. Eğer, $a \in E$ ve $U_{\epsilon(a)} \subset E$ olacak biçimde bir $\epsilon > 0$ sayısı varsa a ya E'nin bir iç noktası denir. E nin tüm iç noktalarının kümesine E nin içi denir ve E^0 ile gösterilir. Eğer, $E^0 = E$ ise E ye $\mathbb{R}$ de bir açık küme denir.

Tanım 2.0.2 (Fonksiyon) [**19**] f, A kümesinden B kümesine bir bağıntı olsun. Eğer f bağıntısı A kümesinin her elemanını B kümesinin yalnız bir elemanına eşliyorsa f bağıntısına A dan B ye bir fonksiyon denir.

$$f : A \to B$$

ile gösterilir. A kümesine f fonksiyonunun tanım kümesi B kümesine ise değer kümesi denir. Bu tanıma göre f bağıntısının A dan B ye bir fonksiyon olması için gerek ve yeter şart
i) $\forall x \in A,\ \exists y \in B,\ (x, y) \in f$
ii) $\forall x \in A,\ \forall y, z \in B,\ [(x, y) \in f$ ve $(x, z) \in f] \Rightarrow x = z$ olmasıdır.

Tanım 2.0.3 (Süreklilik) [**19**] $f : S \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in S$ ve $\epsilon > 0$ verilmiş olsun. Eğer $\mid x - x_0 \mid < \delta$ iken her $x \in S$ için $\mid f(x) - f(x_0) \mid < \epsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa f, x_0 da süreklidir denir.

Tanım 2.0.4 (Aynı sıralı fonksiyon) [33] $I, \mathbb{R}$ de bir aralık ve $f, g : I \to \mathbb{R}$ iki fonksiyon olsun. Bu durumda her $x, y \in I$ için

$$\Big[f(x) - f(y)\Big]\Big[g(x) - g(y)\Big] \geq 0$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f ve g fonksiyonlarına aynı sıralı fonksiyon denir.

Tanım 2.0.5 (Konveks fonksiyon) I, $\mathbb{R}$ de bir aralık ve $f : I \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere her $x, y \in I$ ve $\alpha \in [0, 1]$ için,

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y)$$

eşitsizliğini sağlayan, f fonksiyonuna konveks fonksiyon denir.

Tanım 2.0.6 (İkinci Anlamda s-Konveks fonksiyon) [3] $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$, $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ ve $0 < s \leq 1$ olsun. $\alpha, \beta \neq 0$, $\alpha + \beta = 1$ olmak üzere her $x, y \in \mathbb{R}_+$ için

$$f(\alpha x + \beta y) \leq \alpha^s f(x) + \beta^s f(y)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonuna ikinci anlamda s-konveks fonksiyon denir. İkinci anlamda s-konveks fonksiyonların sınıfı ${K_s}^2$ ile gösterilir.

Tanım 2.0.7 (P-fonksiyon)[7] $f : I \to \mathbb{R}$ negatif olmayan bir fonksiyon olsun. Her $x, y \in I$, $\alpha \in [0, 1]$ olmak üzere

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq f(x) + f(y)$$

şartını sağlayan f fonksiyonuna P-Konveks fonksiyonu veya $P(I)$ sınıfına aittir denir.

Tanım 2.0.8 (Godunova-Levin fonksiyon)[10] $f : I \to \mathbb{R}$ negatif olmayan bir fonksiyon olsun. Her $x, y \in I$, $\alpha \in (0, 1)$ olmak üzere

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \frac{f(x)}{\alpha} + \frac{f(y)}{1 - \alpha}$$

şartını sağlayan f fonksiyonuna Godunova-Levin fonksiyon veya $Q(I)$ sınıfına aittir denir.

Tanım 2.0.9 (h-Konveks fonksiyon) [33] $h \not\equiv 0$ ve $h : J \to \mathbb{R}$ negatif olmayan bir fonksiyon olsun. Her $x, y \in I$, $\alpha \in (0, 1)$ için,

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq h(\alpha)f(x) + h(1 - \alpha)f(y)$$

şartını sağlayan negatif olmayan $f : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna h-konveks fonksiyon denir. Burada I ve J, $\mathbb{R}$ de iki aralık, $(0, 1) \subseteq J$ dir.

Tanım 2.0.10 (m-Konveks fonksiyon)[30] $f : [0, b] \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $b > 0$ olsun. Her $x, y \in [0, b]$, $m \in [0, 1]$ ve $t \in [0, 1]$ için

$$f(tx + (1 - t)y) \leq t(x) + m(1 - t)f(y)$$

şartı sağlanıyorsa f fonksiyonuna m-konvekstir denir.

Tanım 2.0.11 ((h, m)-Konveks fonksiyon)[26] $h : J \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ negatif olmayan bir fonksiyon olsun. Her $x, y \in [0, b]$, $m \in [0, 1]$ ve $t \in [0, 1]$ olacak şekilde $f : [0, b] \to \mathbb{R}$ negatif olmayan f fonksiyonu

$$f(tx + (1 - t)y) \leq h(t)f(x) + mh(1 - t)f(y)$$

şartını sağlanıyorsa f fonksiyonuna (h, m)-konveks fonksiyon denir.

Tanım 2.0.12 (İnveks Küme) $F \subseteq \mathbb{R}^n$ ve $\eta(\cdot,\cdot) : F \times F \to \mathbb{R}^n$ sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer her $x, y \in F$ ve $t \in [0,1]$ için

$$y + t\eta(x,y) \in F$$

ise F ye $\eta(\cdot,\cdot)$ ya göre inveks bir küme denir.

Not 2.0.1 Her konveks küme, $\eta(y,x) = y - x$ dönüşümüne göre inveks olduğu açıktır. Fakat bunun tersi genelde doğru değildir, yani her inveks küme konveks küme olmayabilir.

Örnek 2.0.1 [1] $S \subset \mathbb{R}^2$ bir küme ve $\eta(\cdot,\cdot) : S \times S \to \mathbb{R}^2$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} S &:= \Big([-9,-2] \cup [1,8]\Big) \times \Big([-9,-2] \cup [1,8]\Big) \\ \eta(x,u) &:= \Big\{\eta_1(x,u), \eta_2(x,u)\Big\} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlayalım. Burada

$$\eta_1(x,u) = \begin{cases} x_1 - u_1, & x_1 \geq 0, \quad u_1 \geq 0, \\ -9 - u_1, & x_1 \geq 0, \quad u_1 \leq 0, \\ 1 - u_1, & x_1 \leq 0, \quad u_1 \geq 0, \\ x_1 - u_1, & x_1 \leq 0, \quad u_1 \leq 0, \end{cases} \quad \eta_2(x,u) = \begin{cases} x_2 - u_2, & x_2 \geq 0, \quad u_2 \geq 0, \\ -9 - u_2, & x_2 \geq 0, \quad u_2 \leq 0, \\ 1 - u_2, & x_2 \leq 0, \quad u_2 \geq 0, \\ x_2 - u_2, & x_2 \leq 0, \quad u_2 \leq 0, \end{cases}$$

olarak seçilirse $S \subset \mathbb{R}^2$ konveks bir küme olmayıp, yukarıdaki şekilde seçilen $\eta(x,u)$-ya göre inveks bir kümedir.

Tanım 2.0.13 (Preinveks Fonksiyon)[27] $K \subset \mathbb{R}^n$ inveks bir küme, $f : K \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer her $x, y \in K$ ve $t \in [0,1]$ için

$$f(x + t\eta(y,x)) \leq (1-t)f(x) + tf(y)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f ye η ya göre preinveks fonksiyon denir. Her konveks fonksiyon $\eta(y,x) = y - x$ fonksiyonuna göre preinveks fonksiyondur. Ancak bunun tersi doğru değildir.

Örnek 2.0.2 [35] $f(x) = -|x|$ fonksiyonu

$$\eta(x,y) = \begin{cases} x - y, & y \leq 0 \quad ve \quad x \leq 0 \\ x - y, & y \geq 0 \quad ve \quad x \geq 0 \\ y - x, & y > 0 \quad ve \quad x < 0 \\ y - x, & y < 0 \quad ve \quad x > 0 \end{cases}$$

fonksiyonuna göre preinveks olan fakat konveks olmayan bir fonksiyondur.

Tanım 2.0.14 **((C) koşulu)**[?] $F \subseteq \mathbb{R}^n$, η-ya göre boştan farklı bir inveks küme olsun. Bu durumda her $x, y \in F$ ve $t \in [0,1]$ için

$$\begin{aligned} (C) \;\; \eta(y, y + t\eta(x,y)) &= -t\eta(x,y) \\ \eta(x, y + t\eta(x,y)) &= (1-t)\eta(x,y) \end{aligned}$$

ise η dönüşümü (C) koşulunu sağlar denir.

Not 2.0.2 Eğer η, (C) koşulunu sağlarsa, her $x, y \in F$ ve her $t_1, t_2 \in [0,1]$ için

$$\eta\Big(y + t_2\eta(x,y), y + t_1\eta(x,y)\Big) = (t_2 - t_1)\eta(x,y) \tag{2.0.1}$$

eşitliği sağlanır [20], [34].

Tanım 2.0.15 **(h-Preinveks Fonksiyon)**[24] $K \subseteq \mathbb{R}$ bir inveks küme, $f : \mathbb{K} \to \mathbb{R}$ ve $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ negatif olmayan bir fonksiyon olsun. Eğer her $u, v \in K$, $t \in [0,1]$ için

$$f(u + t\eta(v,u)) \leq h(1-t)f(u) + h(t)f(y)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f ye η üzerinde bir h-preinveks fonksiyon denir.

Eğer eşitsizlik tersine çevrilirse f ye η üzerinde h-prekonkav fonksiyon denir.

Tanım 2.0.16 **(m-Preinveks Fonksiyon)**[17] $K \subseteq [0, b^*]$ bir inveks küme ve $f : [0, b^*] \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $u, v \in K$, $t \in [0,1]$ ve $m \in (0,1]$ için

$$f(u + t\eta(v,u)) \leq (1-t)f(u) + mtf(\frac{v}{m})$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f ye η ya göre m-preinveks fonksiyon denir.

Tanım 2.0.17 **(İntegraller için Hölder Eşitsizliği)**[21] $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. f ve g, $[a,b]$ aralığında tanımlı reel değerli fonksiyonlar, $\mid f \mid^p$ ve $\mid g \mid^q$ $[a,b]$ aralığında integrallenebilir fonksiyon ise

$$\int_a^b \big|f(x)g(x)\big|dx \leq \Big(\int_a^b \big|f(x)\big|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\int_a^b \big|g(x)\big|^q dx\Big)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği doğrudur. Bu eşitsizliğe İntegraller için Hölder Eşitsizliği denir.

Teorem 2.0.1 **(Hölder-İşcan Eşitsizliği)** [14] $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. f ve g, $[a,b]$ aralığında tanımlı reel değerli fonksiyonlar, $\mid f \mid^p$ ve $\mid g \mid^q$ $[a,b]$ aralığında integrallenebilir fonksiyon ise

1.

$$\begin{aligned}
&\int_a^b |f(x)g(x)|dx \\
\leq\ & \frac{1}{b-a}\Bigg\{\left(\int_a^b (b-x)|f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b (b-x)|g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \\
&+\left(\int_a^b (x-a)|f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b (x-a)|g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}\Bigg\}
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{b-a}\Bigg\{\left(\int_a^b (b-x)|f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b (b-x)|g(x)|^q\right)^{\frac{1}{q}} \\
&+\left(\int_a^b (x-a)|f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b (x-a)|g(x)|^q\right)^{\frac{1}{q}}\Bigg\} \\
\leq\ & \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b |g(x)|^q\right)^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

eşitsizlikleri doğrudur. Bu eşitsizliğe Hölder-İşcan eşitsizliği denir.

Tanım 2.0.18 (Power-Mean Eşitsizliği)[21] $q \geq 1$ olmak üzere $|f|$ ve $|g|^q$, $[a,b]$ aralığında integrallenebilen reel değerli iki fonksiyon olsun. Bu durumda,

$$\int_a^b |f(x)g(x)|dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|dx\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_a^b |f(x)||g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliğine Power-Mean Eşitsizliği denir.

Teorem 2.0.2 (İyileştirilmiş Power Mean Eşitsizliği) [16] $q \geq 1$ ve $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ olsun. $|f|^p$ ve $|g|^q$, $[a,b]$ aralığında integrallenebilen reel değerli iki fonksiyon olsun. Bu durumda,

1.

$$\begin{aligned}
\int_a^b |f(x)g(x)|dx \leq\ & \frac{1}{b-a}\Bigg\{\left(\int_a^b (b-x)|f(x)|dx\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_a^b (b-x)|f(x)||g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \\
+\ & \left(\int_a^b (x-a)|f(x)|dx\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_a^b (x-a)|f(x)||g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}\Bigg\}
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\int_a^b |f(x)g(x)|dx &\leq \frac{1}{b-a}\Bigg\{\left(\int_a^b (b-x)|f(x)|dx\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_a^b (b-x)|f(x)||g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \\ &+\left(\int_a^b (x-a)|f(x)|dx\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_a^b (x-a)|f(x)||g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}\Bigg\} \\ &\leq \left(\int_a^b |f(x)|dx\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_a^b |g(x)|^q\right)^{\frac{1}{q}}.\end{aligned}$$

eşitsizliklerine İyileştirilmiş Power-Mean Eşitsiliği denir.

Tanım 2.0.19 (Konveks Fonksiyonlar İçin Hermite-Hadamard Eşitsizliği)[28] $I, \mathbb{R}$ de bir aralık ve $a < b, a, b \in I$ olsun. Bu durumda herhangi bir konveks $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu için

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa bu eşitsizliğe Hermite-Hadamard Eşitsizliği denir.

Tanım 2.0.20 (Preinveks Fonksiyonlar İçin Hermite-Hadamard Eşitsizliği)[25] $K^o, \mathbb{R}$ de bir aralık ve $a < a+\eta(b,a)$, $a, b \in K^o$ olsun. Bu durumda $f : K = [a, a+\eta(b,a)] \to (0,\infty)$ preinveks fonksiyonu için

$$f\left(\frac{2a+\eta(b,a)}{2}\right) \leq \frac{1}{\eta(b,a)}\int_a^{a+\eta(b,a)} f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa bu eşitsizliğe preinveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard İntegral eşitsizliği denir.

Teorem 2.0.3 [26] $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ de (h,m) konveks fonksiyon ve $m \in (0,1]$, $t \in [0,1]$ olsun. Eğer $0 \leq a < b < \infty$ ve $f \in L_1[a,b]$ ise aşağıdaki eşitsizlik sağlanır.

$$\begin{aligned}f\left(\frac{a+b}{2}\right) &\leq \frac{h\left(\frac{1}{2}\right)}{b-a)}\int_a^b \left[f(x)+mf(\frac{x}{m})\right]dx \\ &\leq h\left(\frac{1}{2}\right)\left[\frac{f(a)+mf(\frac{b}{m})+mf(\frac{a}{m})+m^2f(\frac{b}{m^2})}{2}\right]\int_0^1 h(t)dt.\end{aligned}$$

Teorem 2.0.4 [26] $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ de (h,m) konveks fonksiyon ve $m \in (0,1]$, $t \in [0,1]$ olsun. Eğer $0 \leq a < b < \infty$ ve $f \in L_1[a,b]$ ise aşağıdaki eşitsizlik doğrudur.

$$\begin{aligned}\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx &\leq min\Bigg\{f(a)\int_0^1 h(t)dt + mf(\frac{b}{m})\int_0^1 h(1-t)dt, \\ &f(b)\int_0^1 h(t)dt + mf(\frac{a}{m})\int_0^1 h(1-t)dt\Bigg\}.\end{aligned}$$

Teorem 2.0.5 [26] $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ de (h,m) konveks fonksiyon ve $m\in(0,1]$, $t\in[0,1]$ olsun. Eğer $0\le a<b<\infty$ ve $f\in L_1[a,b]$ ise aşağıdaki eşitsizlik sağlanır,

$$\begin{aligned}&\frac{1}{m+1}\left[\frac{1}{mb-a}\int_a^{mb} f(x)dx+\frac{1}{b-ma}\int_{ma}^{b} f(x)dx\right]\\ \le\;& \frac{f(a)+f(b)}{2}\left[\int_0^1 h(t)dt+\int_0^1 h(1-t)dt\right].\end{aligned}$$

Teorem 2.0.6 [22] $f:I\to\mathbb{R}$, I^o üzerinde diferensiyellenebilen bir fonksiyon, $a,b\in I$, $m\in[0,1]$ ve $a<mb$ olsun. Eğer $|f'|$ (h,m) konveks fonksiyon ise aşağıdaki eşitsizlik sağlanır,

$$\begin{aligned}&\left|\frac{1}{mb-a)}\int_a^{mb} f(x)dx-f\left(\frac{a+mb}{2}\right)\right|\\ \le\;& (mb-a)\Big(|f'(a)|+m|f'(b)|\Big)\left[\int_0^{\frac12} th(t)dt+\int_0^{\frac12} th(1-t)dt\right].\end{aligned}$$

Teorem 2.0.7 [22] $f:I\to\mathbb{R}$, I^o üzerinde diferensiyellenebilen bir fonksiyon. Burada $f'\in L_1([a,mb])$,$a,b\in I$, $m\in[0,1]$ ve $a<mb$ olsun. Eğer $|f'|$ (h,m) konveks fonksiyon ise

$$\begin{aligned}&\left|\frac{f(a)+f(mb)}{2}-\frac{1}{mb-a}\int_a^{mb} f(x)dx\right|\\ \le\;& \frac{bm-a}{2}\Big(|f'(a)|+m|f'(b)|\Big)\left[\int_{\frac12}^{1} h(1-t)(2t-1)dt+\int_{\frac12}^{1} h(t)(2t-1)dt\right]\end{aligned}$$

eşitsizliği vardır.

Lemma 2.0.1 [22] $f:I\to\mathbb{R}$, $I\subset\mathbb{R}$, I^o üzerinde diferensiyellenebilen bir fonksiyon ve $a,b\in I$, $m\in[0,1]$ ve $a<mb$ olsun. Eğer $f'\in L_1([a,mb])$ ise

$$\begin{aligned}&\frac{1}{mb-a}\int_a^{mb} f(x)dx-f\left(\frac{a+mb}{2}\right)\\ =\;& (mb-a)\left[\int_0^{\frac12} tf'(ta+m(1-t)b)dt+\int_{\frac12}^{1}(t-1)f'(ta+m(1-t)b)dt\right]\end{aligned}$$

eşitliği doğrudur.

Lemma 2.0.2 [25] $f:I\to(0,\infty)$ diferensiyellenebilen bir fonksiyon $a<a+\eta(b,a)$ ve $f'\in L_1[a,a+\eta(b,a)]$ olsun. Bu durumda

$$\frac{1}{\eta(b,a)}\int_a^{a+\eta(b,a)} f(x)-\frac{f(a)+f(a+\eta(b,a))}{2}dx=\frac{\eta(b,a)}{2}\int_0^1(1-2t)f'(a+t\eta(b,a))dt$$

eşitliği doğrudur.

3. YAPILAN ÇALIŞMALAR

3.1 (h, m)-Preinveks Fonksiyonlar ve Bazı Cebirsel Özellikleri

Biz bu kısımda literatürde olmayan ve ilk defa burada tanımlayacağımız "(h, m)-Preinveks Fonksiyonlar" sınıfını ineleyeceğiz.

Tanım 3.1.1 $[0, b^*] \subseteq \mathbb{R}, \eta$-ya göre inveks bir küme ve $h : (0, 1) \subset J \to \mathbb{R}$ negatif olmayan bir fonksiyon olsun. Bu durumda her $x, y \in [0, b^*], b^* > 0$, $m \in (0, 1]$ ve $t \in (0, 1)$ için

$$f(x + t\eta(y, x)) \leq h(1 - t)f(x) + mh(t)f(\frac{y}{m})$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f ye η-ya göre (h, m)-preinveks fonksiyon denir.

Teorem 3.1.1 f ve g iki (h, m)-preinveks fonksiyon olsun. Bu durumda $\lambda > 0$ için λf ve $f + g$ de $(h, m)-$preinveks fonksiyondur.

İspat. f ve g (h, m)-preinveks fonksiyon olduğundan,

$$\begin{aligned} f(x + t\eta(y, x)) \leq h(1 - t)f(x) + mh(t)f(\frac{y}{m}) \\ g(x + t\eta(y, x)) \leq h(1 - t)g(x) + mh(t)g(\frac{y}{m}) \end{aligned}$$

yazabiliriz. Bu iki eşitsizliği taraf tarafa toplarsak

$$\begin{aligned} f(x + t\eta(y, x)) + g(x + t\eta(y, x) &\leq h(1 - t)f(x) + mh(t)f(\frac{y}{m}) + h(1 - t)g(x) + mh(t)g(\frac{y}{m}) \\ (f + g)(x + t\eta(y, x)) &\leq h(1 - t)[f(x) + g(x)] + mh(t)[f(\frac{y}{m}) + g(\frac{y}{m})] \\ &= h(1 - t)(f + g)(x) + mh(t)(f + g)(\frac{y}{m}). \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece iki (h, m)-preinveks fonksiyonun toplamı da (h, m)-preinvekstir. Benzer işlemler altında f (h, m)-preinveks fonksiyon ve $\lambda > 0$için

$$f(x + t\eta(y, x)) \leq h(1 - t)f(x) + mh(t)f(\frac{y}{m})$$

yazılabilir. Eşitsizliğin her iki tarafı λ ile çarparsak

$$\begin{aligned} \lambda f(x + t\eta(y, x)) &\leq \lambda h(1 - t)f(x) + \lambda mh(t)f(\frac{y}{m})) \\ &= h(1 - t)\lambda(fx) + mh(t)\lambda f(\frac{y}{m}) \\ &= h(1 - t)(\lambda f)(x) + mh(t)(\lambda f(\frac{y}{m}). \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece bir (h, m)-preinveks fonksiyonunun λ gibi bir sabit ile çarpımı da (h, m)-preinvekstir.

Teorem 3.1.2 f, g η üzerinde iki (h,m)-preinveks fonksiyon ve h negatif olmayan bir fonksiyon olsun. Bu durumda eğer f ve g aynı sıralı fonksiyonlar ve $h(1-t)+mh(t)\leq 1$ ise o zaman fg de (h,m)-preinveks fonksiyondur.

İspat. f ve g (h,m)-preinveks fonksiyon olduğundan,

$$f(x+t\eta(y,x)) \leq h(1-t)f(x)+mh(t)f(\frac{y}{m})$$
$$g(x+t\eta(y,x)) \leq h(1-t)g(x)+mh(t)g(\frac{y}{m})$$

yazabiliriz. Bu iki eşitsizliği taraf tarafa çarparsak

$$\begin{aligned}
f(x+t\eta(y,x))g(x+t\eta(y,x) &\leq [h(1-t)f(x)+mh(t)f(\frac{y}{m})][h(1-t)g(x)+mh(t)g(\frac{y}{m})] \\
(fg)(x+t\eta(y,x)) &= h^2(1-t)f(x)g(x)+mh(t)h(1-t)f(x)g(\frac{y}{m}) \\
&\quad +mh(t)h(1-t)f(\frac{y}{m})g(x)+m^2h^2(t)f(\frac{y}{m})g(\frac{y}{m}) \\
&\leq h^2(1-t)f(x)g(x)+m^2h^2(t)f(\frac{y}{m})g(\frac{y}{m})) \\
&\quad +\big[mh(t)h(1-t)f(x)g(\frac{y}{m})+mh(t)h(1-t)f(\frac{y}{m})g(x)\big]
\end{aligned}$$

Elde etmiş olduğumuz eşitsizliğe aynı sıralı fonksiyon özelliğini kullanarak ,

$$\begin{aligned}
(fg)(x+t\eta(y,x)) &\leq h^2(1-t)f(x)g(x)+m^2h^2(t)f(\frac{y}{m})g(\frac{y}{m})) \\
&\quad +\big[mh(t)h(1-t)f(x)g(\frac{y}{m})+mh(t)h(1-t)f(\frac{y}{m})g(x)\big] \\
&= h(1-t)\big[h(1-t)+mh(t)\big]f(x)g(x) \\
&\quad +mh(t)\big[h(1-t)+mh(t)\big]f(\frac{y}{m})g(\frac{y}{m}) \\
&\leq h(1-t)(fg)(x)+mh(t)(fg)(\frac{y}{m}).
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece iki (h,m)-preinveks fonksiyonun çarpımı da (h,m)-preinvekstir.

Teorem 3.1.3 h_1 ve h_2 $[0,b^*]\subset\mathbb{R}$ aralığı üzerinde tanımlanan negatif olmayan fonksiyon olsun. Bu durumda her $t\in(0,1)$ için

$$h_1(t)\leq h_2(t)$$

eşitsizliği sağlanır. Bu durumda f (h_1,m)-preinveks fonksiyon ise f (h_2,m)-preinveks fonksiyonudur.

İspat. f (h_1, m)-preinveks fonksiyonu olduğundan,

$$f(x + t\eta(y,x)) \leq h_1(1-t)f(x) + mh_1(t)f(\frac{y}{m})$$

yazabiliriz.Bu durumda her $t \in (0,1)$ için

$$\begin{aligned} f(x + t\eta(y,x)) &\leq h_1(1-t)f(x) + mh_1(t)f(\frac{y}{m}) \\ &\leq h_2(1-t)f(x) + mh_2(t)f(\frac{y}{m}) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise f fonksiyonunun bir (h_2, m) -preinveks fonksiyon olduğunu ispatlar.

Teorem 3.1.4 h negatif olmayan bir fonksiyon ve her $t \in (0,1)$ için

$$t \leq h(t)$$

eşitsizliği sağlansın. Bu durumda, eğer f, $[0, b^*]$ aralığı üzerinde negatif olmayan bir m-preinveks fonksiyon ise her $x, y \in [0, b^*]$, $m \in (0,1]$ ve $t \in (0,1)$ için f (h, m)-preinveks fonksiyondur.

İspat. f negatif olmayan bir m-preinveks fonksiyon olduğundan,

$$f(x + t\eta(y,x)) \leq (1-t)f(x) + mtf(\frac{y}{m})$$

yazabiliriz. $t \leq h(t)$ olduğuna göre

$$\begin{aligned} f(x + t\eta(y,x)) &\leq (1-t)f(x) + mtf(\frac{y}{m}) \\ &\leq h(1-t)f(x) + mh(t)f(\frac{y}{m}) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece f (h, m)-preinveks bir fonksiyondur. Dolasıyla ispat tamamlanır.

3.2 (h, m)-Preinveks Fonksiyonlar İçin Genelleştirmeler

Teorem 3.2.1 Her $m \in (0,1]$, $t \in [0,1]$ olmak üzere $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ de bir (h, m)-preinveks fonksiyon olsun. Eğer $0 < a < a + \eta(b,a)$ ve $f \in L_1[a, a + \eta(b,a)]$ ise aşağıdaki eşitsizlik doğrudur,

$$\begin{aligned} f\left(\frac{2a + \eta(b,a)}{2}\right) &\leq \frac{h\left(\frac{1}{2}\right)}{\eta(b,a)} \int_a^{a+\eta(b,a)} \left[f(x) + mf(\frac{x}{m})\right] dx \\ &\leq h\left(\frac{1}{2}\right) \left[\frac{f(a) + mf(\frac{b}{m}) + mf(\frac{a}{m}) + m^2 f(\frac{b}{m^2})}{2}\right] \int_0^1 h(t)dt. \end{aligned} \tag{3.2.1}$$

İspat. Her $x, y \in [0, +\infty)$ ve $t = \frac{1}{2}$ için (h, m)-preinveks fonksiyon tanımından,

$$f\Big(\frac{2x + \eta(y, x)}{2}\Big) \leq h\Big(\frac{1}{2}\Big)f(x) + mh\Big(\frac{1}{2}\Big)f(\frac{y}{m})$$

yazabiliriz. Eğer $x = a + t\eta(b, a)$ ve $y = a + (1 - t)\eta(b, a)$ seçelim. Bu durumda aşağıdaki eşitsizlik doğrudur.

$$f\Big(\frac{2a + \eta(b, a)}{2}\Big) \leq h\Big(\frac{1}{2}\Big)f(a + t\eta(b, a)) + mh\Big(\frac{1}{2}\Big)f\Big(\frac{a}{m} + (1 - t)\frac{\eta(b, a)}{m}\Big).$$

Üstteki eşitsizliğin $[0, 1]$ aralığında t'ye göre integralini alırsak,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f\Big(\frac{2a + \eta(b, a)}{2}\Big)dt &\leq h\Big(\frac{1}{2}\Big)\Bigg[\int_0^1 f(a + t\eta(b, a))dt + m\int_0^1 f\Big(\frac{a}{m} + (1 - t)\frac{\eta(b, a)}{m})\Bigg] \\
&\leq h\Big(\frac{1}{2}\Big)\Bigg[\int_a^{a+\eta(b,a)} f(x)\frac{dx}{\eta(b, a)} + m\int_a^{a+\eta(b,a)} f\Big(\frac{x}{m}\Big)\frac{dx}{\eta(b, a)}\Bigg] \\
&\leq \frac{h\big(\frac{1}{2}\big)}{\eta(b, a)}\int_a^{a+\eta(b,a)} \Bigg[f(x) + mf\Big(\frac{x}{m}\Big)\Bigg]dx
\end{aligned}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Bu ise bize (3.2.1) eşitsizliğinin sol tarafını verir. Şimdi eşitsizliğin sağ tarafını yazalım. En son elde edilen eşitsizlikte $x = a + t\eta(b, a)$ yerine yazalım ve $[0, 1]$ aralığında t'ye göre integralini alalım.

$$\begin{aligned}
&h(\frac{1}{2})\int_a^{a+a+\eta(b,a)} \big[f(x) + mf\Big(\frac{x}{m}\Big)\big]dx \\
&\qquad \leq \eta(b, a)\int_0^1 \Bigg[f(a + t\eta(b, a)) + f\Big(\frac{a}{m} + t\frac{\eta(b, a)}{m}\Big)\Bigg]dx \\
&\qquad \leq \eta(b, a)\int_0^1 \Bigg[\big(h(t)f(a) + mh(1 - t)f(\frac{b}{m})\big) \\
&\qquad\qquad + m\int_0^1 \big(h(t)f(\frac{a}{m}) + mh(1 - t)f(\frac{b}{m^2})\big)\Bigg] \\
&\frac{h\big(\frac{1}{2}\big)}{\eta(b, a)}\int_a^{a+a+\eta(b,a)} \big[f(x) + mf\Big(\frac{x}{m}\Big)\big]dx \leq \Bigg[\frac{f(a) + mf(\frac{b}{m}) + mf(\frac{a}{m}) + m^2f(\frac{b}{m^2})}{2}\Bigg]\int_0^1 h(t)dt.
\end{aligned}$$

Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 3.2.1 (3.2.1) eşitsizliğinde $m = 1$ seçilirse h-preinveks fonksiyonunun Hermite-Hadamard Eşitsizliği elde edilir [23], yani

$$\frac{1}{2h(\frac{1}{2})}f\left(\frac{2a + \eta(b, a)}{2}\right) \leq \frac{1}{\eta(b, a)}\int_a^{a+\eta(b,a)} f(x)dx \leq [f(a) + f(b)]\int_0^1 h(t)dt.$$

Sonuç 3.2.2 (3.2.1) eşitsizliğinde $h(t) = t$ seçilirse m-preinveks fonksiyonunun Hermite-Hadamard Eşitsizliği elde edilir[31], yani

$$\begin{aligned} f\Big(\frac{2a+\eta(b,a)}{2}\Big) &\leq \frac{1}{\eta(b,a)}\int_a^{a+\eta(b,a)} \frac{f(x)+mf\Big(\frac{x}{m}\Big)}{2}dx \\ &\leq \frac{m+1}{4}\Bigg[\frac{f(a)+f(b)}{2}+m\frac{f\Big(\frac{a}{m}\Big)+f\Big(\frac{b}{m}\Big)}{2}\Bigg]. \end{aligned}$$

Sonuç 3.2.3 (3.2.1) eşitsizliğinde $h(t) = t$ ve $m = 1$ seçilirse preinveks fonksiyonunun Hermite-Hadamard Eşitsizliği elde edilir [25], yani

$$f\left(\frac{2a+\eta(b,a)}{2}\right) \leq \frac{1}{\eta(b,a)}\int_a^{a+\eta(b,a)} f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

Sonuç 3.2.4 (3.2.1) eşitsizliğinde $\eta(b,a) = b - a$ seçilirse (h, m)- konveks fonksiyonun Hermite-Hadamard Eşitsizliği elde edilir [26], yani

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a+b}{2}\right) &\leq \frac{h\Big(\frac{1}{2}\Big)}{b-a)}\int_a^b \Big[f(x)+mf(\frac{x}{m})\Big]dx \\ &\leq h\Big(\frac{1}{2}\Big)\Bigg[\frac{f(a)+mf(\frac{b}{m})+mf(\frac{a}{m})+m^2f(\frac{b}{m^2})}{2}\Bigg]\int_0^1 h(t)dt \end{aligned}$$

Sonuç 3.2.5 (3.2.1) eşitsizliğinde $h(t) = t$ ve $\eta(b,a) = b - a$ seçilirse m-konveks fonksiyonun Hermite-Hadamard Eşitsizliği elde edilir [8], yani

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a+b}{2}\right) &\leq \frac{1}{b-a)}\int_a^{b)} \frac{f(x)+mf\Big(\frac{x}{m}\Big)}{2}dx \\ &\leq \frac{m+1}{4}\Bigg[\frac{f(a)+f(b)}{2}+m\frac{f\Big(\frac{a}{m}\Big)+f\Big(\frac{b}{m}\Big)}{2}\Bigg]. \end{aligned}$$

Sonuç 3.2.6 (3.2.1) eşitsizliğinde $m = 1$ ve $\eta(b,a) = b-a$ seçilirse h-konveks fonksiyonun Hermite-Hadamard Eşitsizliği elde edilir [29], yani

$$\frac{1}{2h\Big(\frac{1}{2}\Big)}f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \Big[f(a)+f(b)\Big]\int_0^1 h(t)dt.$$

Sonuç 3.2.7 (3.2.1) eşitsizliğinde $h(t) = t$,$m = 1$ ve $\eta(b,a) = b - a$ seçilirse konveks fonksiyonun Hermite-Hadamard Eşitsizliği elde edilir [28], yani,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

Teorem 3.2.2 Her $m \in (0,1]$, $t \in [0,1]$ olmak üzere $f : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ de bir (h,m)-preinveks fonksiyon olsun. Eğer $0 < a < a + \eta(b,a)$ ve $f \in L_1[a, a+\eta(b,a)]$ ise aşağıdaki eşitsizlik sağlanır,

$$\frac{1}{\eta(b,a)} \int_a^{a+\eta(b,a)} f(x)dx \leq min\Big\{ f(a)\int_0^1 h(1-t)dt + mf\Big(\frac{b}{m}\Big)\int_0^1 h(t)dt, \\ f(b)\int_0^1 h(1-t)dt + mf\Big(\frac{a}{m}\Big)\int_0^1 h(t)dt \Big\}. \quad (3.2.2)$$

İspat. f (h,m)-preinveks fonksiyon olduğundan,

$$f(a + t\eta(b,a)) \leq h(1-t)f(a) + mh(t)f\Big(\frac{b}{m}\Big)$$

ve

$$f(a + (1-t)\eta(b,a)) \leq h(1-t)f(b) + mh(t)f\Big(\frac{a}{m}\Big)$$

yazılır. Yukarıdaki iki eşitsizliğin $[0,1]$ aralığı üzerinde t' ye göre integrali alınırsa

$$\int_0^1 f(a + t\eta(b,a))dt \leq f(a)\int_0^1 h(1-t)dt + mf\Big(\frac{b}{m}\Big)\int_0^1 h(t)dt$$

ve

$$\int_0^1 f(a + (1-t)\eta(b,a))dt \leq f(b)\int_0^1 h(1-t)dt + mf\Big(\frac{a}{m}\Big)\int_0^1 h(t)dt$$

elde edilir. Son elde edilen iki eşitsizliğin sol taraflarında $x = a + t\eta(b,a)$ ve $y = a + (1-t)\eta(b,a)$ değişken değiştirip t'ye göre integral alırsak

$$\int_0^1 f(a + t\eta(b,a))dt = \int_0^1 f(a + (1-t)\eta(b,a))dt = \frac{1}{\eta(b,a)}\int_a^{a+\eta(b,a)} f(x)dx$$

buluruz. Elde edilen son eşitliğin sol tarafları birbirlerine eşit olduklarından

$$\frac{1}{\eta(b,a)} \int_a^{a+a\eta(b,a)} f(x)dx \leq min\Big\{ f(a)\int_0^1 h(1-t)dt + mf\Big(\frac{b}{m}\Big)\int_0^1 h(t)dt, \\ f(b)\int_0^1 h(1-t)dt + mf\Big(\frac{a}{m}\Big)\int_0^1 h(t)dt \Big\}$$

olup ispat tamamlanır.

Sonuç 3.2.8 (3.2.2) eşitsizliğinde $h(t) = 1$ seçilirse

$$\frac{1}{\eta(b,a)} \int_a^{a+\eta(b,a)} f(x)dx \leq min\Big\{ f(a) + mf(\frac{b}{m}), f(b) + mf(\frac{a}{m}) \Big\}$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 3.2.9 (3.2.2) eşitsizliğinde $m=1$ seçilirse aşağıdaki eşitsizlik elde edilir,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\eta(b,a)}\int_a^{a+\eta(b,a)} f(x)dx \;&\leq\; min\Bigg\{f(a)\int_0^1 h(1-t)dt+f(b)\int_0^1 h(t)dt,\\ &\qquad f(b)\int_0^1 h(1-t)dt+f(a)\int_0^1 h(t)dt\Bigg\}.\end{aligned}$$

Sonuç 3.2.10 (3.2.2) eşitsizliğinde $h(t)=t$ seçilirse

$$\frac{1}{\eta(b,a)}\int_a^{a+\eta(b,a)} f(x)dx \;\leq\; min\left\{\frac{f(a)+mf(\frac{b}{m})}{2}+\frac{f(b)+mf(\frac{a}{m})}{2}\right\}$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 3.2.11 (3.2.2) eşitsizliğinde $h(t)=t$ ve $\eta(b,a)=b-a$ seçilirse,

$$\frac{1}{b-a)}\int_a^b f(x)dx \;\leq\; min\left\{\frac{f(a)+mf(\frac{b}{m})}{2}+\frac{f(b)+mf(\frac{a}{m})}{2}\right\},$$

eşitsizliği [8]elde edilir.

Sonuç 3.2.12 (3.2.2) eşitsizliğinde $h(t)=t$ ve $m=1$ seçilirse preinveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliğinin sağ tarafı [25] elde edilir,

$$\frac{1}{\eta(b,a)}\int_a^{a+\eta(b,a)} f(x)dx \;\leq\; \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

Sonuç 3.2.13 (3.2.2) eşitsizliğinde $h(t)=1$ ve $m=1$ seçilirse aşağıdaki eşitsizlik elde edilir,

$$f\left(\frac{2a+\eta(b,a)}{2}\right)\leq\frac{1}{\eta(b,a)}\int_a^{a+\eta(b,a)} f(x)dx\leq\Big[f(a)+f(b)\Big].$$

Sonuç 3.2.14 (3.2.2) eşitsizliğinde $m=1$ ve $h(t)=t^s$ seçilirse,

$$2^{s-1}f\left(\frac{2a+\eta(b,a)}{2}\right)\leq\frac{1}{\eta(b,a)}\int_a^{a+\eta(b,a)} f(x)dx\leq\frac{f(a)+f(b)}{s+1}.$$

eşitsizliğini elde ederiz [15].

Teorem 3.2.3 $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ bir (h,m)-preinveks fonksiyon, $m\in(0,1]$ ve $t\in[0,1]$ olsun. Eğer $a,b\in[0,\infty)$,$a<b$, $\eta(ma,b)\neq 0$, $\eta(mb,a)\neq 0$

$a^* = min\{a, a+\eta(mb,a), b+\eta(ma,b)\}$, $b^* = max\{b, a+\eta(mb,a), b+\eta(ma,b)\}$ ve $f \in L_1[a^*, b^*]$ ise aşağıdaki eşitsizlik doğrudur,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{m+1}\left[\frac{1}{\eta(mb,a)}\int_a^{a+\eta(mb,a)} f(x)dx + \frac{1}{\eta(ma,b)}\int_b^{b+\eta(ma,b)} f(x)dx\right] \\ \leq\ &\frac{f(a)+f(b)}{2}\left[\int_0^1 h(t)dt + \int_0^1 h(1-t)dt\right]. \end{aligned} \tag{3.2.3}$$

İspat. f (h,m)-preinveks fonksiyon olduğundan,

$$\begin{aligned} f(a+t\eta(mb,a)) &\leq h(1-t)f(a) + mh(t)f(b) \\ f(a+(1-t)\eta(mb,a)) &\leq h(t)f(a) + mh(1-t)f(b) \\ f(b+t\eta(ma,b)) &\leq h(1-t)f(b) + mh(t)f(a) \end{aligned}$$

ve

$$f(b+(1-t)\eta(ma,b)) \leq h(t)f(b) + mh(1-t)f(a)$$

yazabiliriz. Yukarıdaki eşitsizlikler taraf tarafa toplanır ve $[0,1]$ aralığı üzerinde t'ye göre integrali alınırsa,

$$\begin{aligned} &\int_0^1 f(a+t\eta(mb,a))dt + \int_0^1 f(a+(1-t)\eta(mb,a))dt \\ &+\int_0^1 f(b+t\eta(ma,b))dt + \int_0^1 f(b+(1-t)\eta(ma,b))dt \\ \leq\ &[m+1]\Big(f(a)+f(b)\Big)\left[\int_0^1 h(1-t)dt + \int_0^1 h(t)dt\right]. \end{aligned}$$

elde edilir.Buradan, bazı ifadeler aşağıdaki gibi durumları incelendiğinde,

$$\int_0^1 f(a+t\eta(mb,a))dt = \int_0^1 f(a+(1-t)\eta(mb,a))dt = \frac{1}{\eta(mb,a)}\int_a^{a+\eta(mb,a)} f(x)dx$$

ve

$$\int_0^1 f(b+t\eta(ma,b))dt = \int_0^1 f(b+(1-t)\eta(ma,b))dt = \frac{1}{\eta(ma,b)}\int_{b+\eta(ma,b)}^{b} f(x)dx$$

eşitlikleri bulunur.Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 3.2.15 (3.2.3) eşitsizliğinde $h(t)=1$ seçilirse, aşağıdaki eşitsizlik elde edilir,

$$\frac{1}{m+1}\left[\frac{1}{\eta(mb,a)}\int_a^{a+\eta(mb,a)} f(x)dx + \frac{1}{\eta(ma,b)}\int_b^{b+\eta(ma,b)} f(x)dx\right] \leq f(a)+f(b).$$

Sonuç 3.2.16 (3.2.3) eşitsizliğinde $m = 1$, seçilirse, aşağıdaki eşitsizlik elde edilir,

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\eta(b,a)}\int_a^{a+\eta(b,a)} f(x)dx + \frac{1}{\eta(a,b)}\int_b^{b+\eta(a,b)} f(x)dx\right]$$
$$\leq \frac{f(a)+f(b)}{2}\left[\int_0^1 h(t)dt + \int_0^1 h(1-t)dt\right].$$

Sonuç 3.2.17 (3.2.3) eşitsizliğinde $h(t) = 1$ ve $m = 1$ seçilirse preinveks fonksiyonun Hermite-Hadamard eşitsizliğinin sağ tarafı [25] elde edilir, yani ,

$$\frac{1}{\eta(b,a)}\int_a^{a+\eta(b,a)} f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

Sonuç 3.2.18 (3.2.3) eşitsizliğinde $\eta(mb,a) = mb - a$ ve $\eta(ma,b) = ma - b$ seçilirse,

$$\frac{1}{m+1}\left[\frac{1}{mb-a}\int_a^{mb} f(x)dx + \frac{1}{ma-b}\int_b^{ma} f(x)dx\right]$$
$$\leq \frac{f(a)+f(b)}{2}\left[\int_0^1 h(t)dt + \int_0^1 h(1-t)dt.\right]$$

eşitsizliğini elde ederiz [26].

Sonuç 3.2.19 (3.2.3) eşitsizliğinde $\eta(mb,a) = mb - a$, $\eta(ma,b) = ma - b$, $m = 1$ ve $h(t) = t^s$ seçilirse,

$$2^{s-1} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{s+1}.$$

eşitsizliğini elde ederiz [6].

3.3 Türevinin Mutlak Değerinin Bazı Kuvvetleri (h,m)-Preinveks Fonksiyonlar İçin Bazı Yeni Eşitsizlikler

Şimdi diferensiyellenebilen (h,m)-preinveks fonksiyonlar için bazı yeni Hermite-Hadamard tipi eşitsizlikleri elde edelim.

Teorem 3.3.1 $f : I \to \mathbb{R}$ diferensiyellenebilir bir fonksiyon, $0 < a < a + \eta(mb,a)$ şartını sağlayan her $a, b \in I$, $m \in (0,1]$ ve $f' \in L_1[a, a + \eta(mb,a)]$ olsun. Eğer $|f'|$ bir (h,m)-preinveks fonksiyon ise

$$\left|\frac{1}{\eta(mb,a)}\int_a^{a+\eta(mb,a)} f(x)dx - f\left(\frac{2a+\eta(mb,a)}{2}\right)\right|$$
$$\leq \eta(mb,a)\Big(|f'(a)| + m|f'(b)|\Big)\left[\int_0^{\frac{1}{2}} th(t)dt + \int_0^{\frac{1}{2}} th(1-t)dt.\right]$$

eşitsizliği doğrudur.

İspat. Lemma 2.0.1 ve $|f'|$ in (h,m)-preinveks olduğundan

$$\begin{aligned}
&\left|f\left(\frac{2a+\eta(mb,a)}{2}\right)-\frac{1}{\eta(mb,a)}\int_a^{a+\eta(mb,a)}f(x)dx\right| \\
\leq\ & \eta(mb,a)\left[\int_0^{\frac{1}{2}}|t||f'(a+t\eta(mb,a))|dt+\int_{\frac{1}{2}}^1|t-1||f'(a+t\eta(mb,a))|dt\right] \\
\leq\ & \eta(mb,a)\left[|f'(a)|\int_0^{\frac{1}{2}}th(1-t)dt+m|f'(b)|\int_0^{\frac{1}{2}}th(t)dt\right. \\
& \left.+|f'(a)|\int_{\frac{1}{2}}^1(1-t)h(1-t)dt+m|f'(b)|\int_{\frac{1}{2}}^1(1-t)h(t)dt\right] \\
\leq\ & \eta(mb,a)\bigg(|f'(a)+m|f'(b)|\bigg)\left[\int_0^{\frac{1}{2}}th(t)dt+\int_0^{\frac{1}{2}}th(1-t)dt\right]
\end{aligned}$$

yazabiliriz. Böylece ispatımız tamamlanmış olur.

Sonuç 3.3.1 Yukarıdaki teoremimizde $\eta(mb,a)=mb-a$ alırsak,

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{mb-a)}\int_a^{mb}f(x)dx-f\left(\frac{a+mb}{2}\right)\right| \\
\leq\ & (mb-a)\Big(|f'(a)|+m|f'(b)|\Big)\left[\int_0^{\frac{1}{2}}th(t)dt+\int_0^{\frac{1}{2}}th(1-t)dt\right].
\end{aligned}$$

eşitsizliği [22] elde ederiz.

Teorem 3.3.2 $f:I\to\mathbb{R}$ I^o üzerinde diferensiyellenebilir bir fonksiyon olsun. $a<a+\eta(mb,a)$ şartını sağlayan her $a,b\in I$, $m\in(0,1]$ ve $f\in L_1[a,a+\eta(mb,a)]$ için, eğer $|f'|$ bir (h,m)-preinveks fonksiyon ise aşağıdaki eşitsizlik doğrudur,

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{f(a)+f(a+\eta(mb,a))}{2}-\frac{1}{\eta(mb,a)}\int_a^{a+\eta(mb,a)}f(x)dx\right| \\
\leq\ & \frac{\eta(mb,a)}{2}\Big(|f'(a)|+m|f'(b)|\Big)\left[\int_{\frac{1}{2}}^1h(1-t)(2t-1)dt+\int_{\frac{1}{2}}^1h(t)(2t-1)dt\right] \quad (3.3.1)
\end{aligned}$$

İspat. Lemma 2.0.1 den aşağıdaki eşitsizliğini yazabiliriz,

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{f(a)+f(a+\eta(mb,a))}{2}-\frac{1}{\eta(mb,a)}\int_a^{a+\eta(mb,a)}f(x)dx\right| \\
\leq\ & \frac{\eta(mb,a)}{2}\int_0^1|1-2t||f'(a+\eta(mb,a))|dt.
\end{aligned}$$

$|f'|$ (h,m)-preinveks olduğundan,

$$|f'(a+t\eta(mb,a))| \le h(1-t)|f'(a)| + mh(t)|f'(b)|.$$

Bu eşitsizliğin her tarafını $[0,1]$ aralığında t'ye göre integralini alırsak,

$$\begin{aligned}\int_0^1 |1-2t||f'(a+t\eta(mb,a))|dt &\le \int_0^1 |1-2t|\Big(h(1-t)|f'(a)| + mh(t)|f'(b)|\Big)dt \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} (1-2t)\Big(h(1-t)|f'(a)| + mh(t)|f'(b)|\Big)dt \\ &\quad + \int_{\frac{1}{2}}^1 (2t-1)\Big(h(1-t)|f'(a)| + mh(t)|f'(b)|\Big)dt.\end{aligned}$$

elde ederiz. Ayrıca

$$\int_0^{\frac{1}{2}} (1-2t)h(1-t)dt = \int_{\frac{1}{2}}^1 (2t-1)h(t)dt$$

ve

$$\int_0^{\frac{1}{2}} (1-2t)h(t)dt = \int_{\frac{1}{2}}^1 (2t-1)h(1-t)dt$$

doğru olan eşitlikleri kullanarak ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 3.3.2 (3.3.1) eşitsizliğinde $\eta(mb,a) = mb - a$ alırsak,

$$\begin{aligned}&\left|\frac{f(a)+f(mb)}{2} - \frac{1}{mb-a}\int_a^{mb} f(x)dx\right| \\ \le\ &\frac{bm-a}{2}\Big(|f'(a)| + m|f'(b)|\Big)\left[\int_{\frac{1}{2}}^1 h(1-t)(2t-1)dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 h(t)(2t-1)dt\right]\end{aligned}$$

eşitsizliğini [22] elde ederiz.

Teorem 3.3.3 $f : [0,+\infty) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I üzerinde diferensiyellenebilen bir fonksiyon ve $0 < a < a+\eta(b,a) < \infty$ için $f' \in L_1[a,b]$ olsun. Eğer her $m \in (0,1]$, $t \in [0,1]$ ve $q \in [0,\infty)$ için $|f'|^q$ $[a,b]$ üzerinde bir (h,m)-preinveks fonksiyon ise aşağıdaki eşitsizlik doğrudur,

$$\begin{aligned}&\left|\frac{f(a)+f(a+\eta(b,a))}{2} - \frac{1}{\eta(b,a)}\int_a^{a+\eta(b,a)} f(x)dx\right| \\ \le\ &\frac{\eta(b,a)}{2}\frac{1}{2^{\frac{1}{p}}}\left(\int_0^1 \Big(|2t-1||f(a)|^q + m|1-2t||f'(\frac{b}{m})|^q\Big)h(t)dt\right)^{\frac{1}{q}}.\end{aligned}$$

İspat. Lemma 2.0.2 ve Power-Mean eşitsizliğini uygulayarak,

$$\left|\frac{f(a)+f(a+\eta(b,a))}{2}-\frac{1}{\eta(b,a)}\int_a^{a+\eta(b,a)} f(x)dx\right|$$
$$\leq \frac{\eta(b,a)}{2}\left(\int_0^1 |1-2t|dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 |1-2t||f'(a+t\eta(b,a))|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

yazabiliriz. İddaya göre $|f'|^q$, (h,m)- preinveks fonksiyon olduğundan

$$\begin{aligned}\int_0^1 |1-2t||f'(a+t\eta(b,a))|^q dt &\leq \int_0^1 |1-2t|\Big[h(1-t)|f'(a)|^q+mh(t)|f'(\frac{b}{m})|^q\Big]dt\\ &= |f'(a)|^q\int_0^1 |1-2t|h(1-t)dt+m|f'(\frac{b}{m})|^q\int_0^1 |1-2t|h(t)dt\\ &= \int_0^1 \Big(|2t-1||f'(a)|^q+|1-2t|m|f'(\frac{b}{m})|^q\Big)h(t)dt\end{aligned}$$

yazabiliriz. Ayrıca

$$\int_0^1 |1-2t|dt=\int_0^{\frac{1}{2}}(1-2t)dt+\int_{\frac{1}{2}}^1 (2t-1)dt=\frac{1}{2}$$

ve

$$\int_0^1 |1-2t|h(1-t)dt=\int_0^1 |2t-1|h(t)dt$$

doğru olan eşitlikleri kullanılarak ispat tamamlanır.

Sonuç 3.3.3 Yukarıdaki eşitsizlikte $m=1$ alırsak,

$$\left|\frac{f(a)+f(a+\eta(b,a))}{2}-\frac{1}{\eta(b,a)}\int_a^{a+\eta(b,a)} f(x)dx\right|$$
$$\leq \frac{\eta(b,a)}{2}\frac{1}{2^{\frac{1}{p}}}\left(\int_0^1 \Big(|2t-1||f(a)|^q+|1-2t||f'(b)|^q\Big)h(t)dt\right)^{\frac{1}{q}}.$$

eşitsizliğini [24] elde ederiz.

Teorem 3.3.4 $f:[0,+\infty)\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, I üzerinde diferensiyellenebilen bir fonksiyon ve $0<a<a+\eta(b,a)<\infty$ için $f'\in L_1[a,b]$ olsun. Eğer her $m\in(0,1]$, $t\in[0,1]$ ve $q\in[0,\infty)$ için $|f'|^q$ $[a,b]$ üzerinde bir (h,m)-preinveks fonksiyon ise

$$\left|\frac{f(a)+f(a+\eta(b,a))}{2}-\frac{1}{\eta(b,a)}\int_a^{a+\eta(b,a)} f(x)dx\right|$$
$$\leq \frac{\eta(b,a)}{2}\frac{1}{4^{\frac{1}{p}}}\left\{\left(\int_0^1 \Big(t|2t-1||f(a)|^q+m(1-t)|1-2t||f'(\frac{b}{m})|^q\Big)h(t)dt\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$
$$\left.+\left(\int_0^1 \Big((1-t)|2t-1||f(a)|^q+mt|1-2t||f'(\frac{b}{m})|^q\Big)h(t)dt\right)^{\frac{1}{q}}\right\}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. Lemma 2.0.2 ve İyileştirilmiş Power-Mean eşitsizliğini uygularak,

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{f(a)+f(a+\eta(b,a))}{2}-\frac{1}{\eta(b,a)}\int_a^{a+\eta(b,a)}f(x)dx\right| \\
\leq\ & \frac{\eta(b,a)}{2}\left\{\left(\int_0^1(1-t)|1-2t|dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1(1-t)|1-2t||f'(a+t\eta(b,a))|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right. \\
+\ & \left.\left(\int_0^1 t|1-2t|dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 t|1-2t||f'(a+t\eta(b,a))|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right\}
\end{aligned}$$

yazabiliriz. $|f'|^q$,$[a,b]$ aralığı üzerinde bir (h,m)-preinveks olduğundan,

$$|f'(a+t\eta(b,a))|^q \leq h(1-t)|f'(a)|^q+mh(t)|f'(\frac{b}{m})|^q$$

yazılır. Buradan

$$\int_0^1(1-t)|1-2t||f'(a+t\eta(b,a))|^q dt \leq \int_0^1(1-t)|1-2t|\left[h(1-t)|f'(a)|^q+mh(t)\left|f'(\frac{b}{m})\right|^q\right]dt$$

ve

$$\int_0^1 t|1-2t||f'(a+t\eta(b,a))|^q dt \leq \int_0^1 t|1-2t|\left[h(1-t)|f'(a)|^q+mh(t)\left|f'(\frac{b}{m})\right|^q\right]dt$$

eşitsizliklerini yazabiliriz. Ayrıca

$$\begin{aligned}
\int_0^1(1-t)|1-2t|h(1-t)dt &= \int_0^1 t|2t-1|h(t)dt \\
\int_0^1 |1-2t|h(1-t)dt &= \int_0^1(1-t)|2t-1|h(t)dt
\end{aligned}$$

doğru olan eşitlikleri kullanılarak ispat tamamlanır.

Teorem 3.3.5 $f:[0,+\infty)\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, I üzerinde diferensiyellenebilen bir fonksiyon ve $0\leq a\leq b<\infty$ için $f'\in L_1[a,b]$ olsun.Eğer her $m\in(0,1]$, $t\in[0,1]$ ve $q\in[0,\infty)$ için $|f'|^q$ $[a,b]$ üzerinde (h,m)-preinveks fonksiyon ise aşağıdaki eşitsizlik doğrudur,

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{f(a)+f(a+\eta(b,a))}{2}-\frac{1}{\eta(b,a)}\int_a^{a+\eta(b,a)}f(x)dx\right| \\
\leq\ & \frac{\eta(b,a)}{2}\left(\frac{1}{2(p+1)}\right)^{\frac{1}{p}}\left[\left(\int_0^1(t|f'(a)|^q+m(1-t)|f'(\frac{b}{m})|^q)h(t)dt\right)^{\frac{1}{q}}\right. \\
&\left.+\left(\int_0^1((1-t)|f'(a)|^q+mt|f'(\frac{b}{m})|^q]h(t)dt\right)^{\frac{1}{q}}\right]. \qquad (3.3.2)
\end{aligned}$$

İspat. Lemma 2.0.2' den aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz,

$$\begin{aligned}&\left|\frac{f(a)+f(a+\eta(b,a))}{2}-\frac{1}{\eta(b,a)}\int_a^{a+\eta(b,a)}f(x)dx\right|\\ \leq\ & \frac{\eta(b,a)}{2}\int_0^1|1-2t||f'(a+t\eta(b,a))|dt.\end{aligned}$$

Şimdi yukarıdaki eşitsizliğe Hölder-İşcan integral eşitsizliğini uygularsak,

$$\begin{aligned}&\left|\frac{f(a)+f(a+\eta(b,a))}{2}-\frac{1}{\eta(b,a)}\int_a^{a+\eta(b,a)}f(x)dx\right|\\ \leq\ & \frac{\eta(b,a)}{2}\left\{\left(\int_0^1(1-t)|1-2t|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1(1-t)[h(1-t)|f'(a)|^q+mh(t)|f'(\frac{b}{m})|^q]dt\right)^{\frac{1}{q}}\right.\\ +\ & \left.\left(\int_0^1 t|1-2t|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 t[h(1-t)|f'(a)|^q+mh(t)|f'(\frac{b}{m})|^q]dt\right)^{\frac{1}{q}}\right\}\end{aligned}$$

elde ederiz. İddaya göre $|f'|^q$, (h,m)-preinveks fonksiyon olduğundan,

$$\begin{aligned}&\left|\frac{f(a)+f(a+\eta(b,a))}{2}-\frac{1}{\eta(b,a)}\int_a^{a+\eta(b,a)}f(x)dx\right|\\ \leq\ & \frac{\eta(b,a)}{2}\left\{\left(\int_0^1(1-t)|1-2t|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1(1-t)|f'(a+t\eta(b,a))|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right.\\ +\ & \left.\left(\int_0^1 t|1-2t|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 t|f'(a+t\eta(b,a))|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right\}\end{aligned}$$

yazabiliriz. Ayrıca

$$\int_0^1 th(t)dt=\int_0^1(1-t)h(1-t)dt$$

ve

$$\int_0^1(1-t)h(t)dt=\int_0^1 th(1-t)dt$$

doğru olan eşitlikleri en son elde edilen eşitsizlikte yerine koyularak ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 3.3.4 (3.3.2) eşitsizliğinde $m = 1$ alırsak, aşağıdaki eşitsizliği [32] elde ederiz,

$$\left|\frac{f(a)+f(a+\eta(b,a))}{2}-\frac{1}{\eta(b,a)}\int_a^{a+\eta(b,a)} f(x)dx\right|$$
$$\leq \frac{\eta(b,a)}{2}\left(\frac{1}{2(p+1)}\right)^{\frac{1}{p}}\left[\left(\int_0^1 (t|f'(a)|^q+(1-t)|f'(b)|^q)h(t)dt\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$
$$\left.+\left(\int_0^1 ((1-t)|f'(a)|^q+t|f'(b)|^q]h(t)dt\right)^{\frac{1}{q}}\right].$$

Sonuç 3.3.5 (3.3.2) eşitsizliğinde $h(t) = t$ alırsak, aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz.

$$\left|\frac{f(a)+f(a+\eta(b,a))}{2}-\frac{1}{\eta(b,a)}\int_a^{a+\eta(b,a)} f(x)dx\right|$$
$$\leq \frac{\eta(b,a)}{2(p+1)^{\frac{1}{p}}}\left[\frac{|f'(a)|^q+m|f'(\frac{b}{m})|^q}{2}\right]^{\frac{1}{q}}.$$

Sonuç 3.3.6 (3.3.2) eşitsizliğinde $p = q = 2$, $m = 1$ ve $t = \frac{1}{2}$ alırsak,

$$\left|\frac{f(a)+f(a+\eta(b,a))}{2}-\frac{1}{\eta(b,a)}\int_a^{a+\eta(b,a)} f(x)dx\right|$$
$$\leq \frac{\eta(b,a)}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{12}}\right)h^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)\left[\left(\int_0^1 (|f'(a)|^{\frac{1}{2}}+|f'(b)|^{\frac{1}{2}})h(t)dt\right)^{\frac{1}{2}}\right.$$
$$\left.+\left(\int_0^1 (|f'(a)|^{\frac{1}{2}}+|f'(b)|^{\frac{1}{2}}]h(t)dt\right)^{\frac{1}{2}}\right],$$

eşitsizliğini [32] elde ederiz.

4. SONUÇ VE ÖNERİLER

Sonuç olarak, bu yüksek lisans tez çalışmasında;

1. (h, m)-preinveks fonksiyonlar sınıfı ayrıntılı bir şekilde incelendi.
2. Bu sınıfın bazı cebirsel özellikleri araştırıldı.
3. Hermite-Hadamard Tipi Eşitsizlik yardımıyla bazı yeni eşitsizlikler elde edildi.
4. Literatürde var olan h ve m preinveks fonksiyonlar, bu sınıf sayesinde genelleştirildi.
5. Hölder-İşcan ve İyileştirilmiş Power Mean Eşitsizlikleri yardımıyla, literatürde var olan bir kaç eşitsizlik daha da küçültüldü.
6. Son olarak ise türevinin mutlak değerinin bazı kuvvetleri bu sınıftan olan fonksiyonlar için yeni teoremler ifade ve ispat edildi

Bu tezden elde edilen sonuçlar doğrultusundaki önerilerimiz,

1. İncelenen (h, m)-preinveks fonsiyonlar sınıfına benzer şekilde, literatürde var olan diğer konvekslik çeşitleri genelleştirilebilir.
2. Hölder-İşcan ve İyileştirilmiş Power Mean Eşitsizlikleri yardımıyla, literatürde var olan diğer eşitsizlikler daha da küçültülebilir.

KAYNAKLAR

[1] Antczak T., (2005). Mean value in invexity analysis. *Nonlinear Analysis*, (60), 1473-1484.

[2] Ben-Israel A., Mond B., (1986). What is invexity?. *Journal of the Australian Mathematical Society* , (28), 1-29.

[3] Breckner, W. W. (1978). Stetigkeitsaussagen für eine klasse verallgemeinerter konvexer funktionen in topologischen linearen.Räumen. *Institut Mathématique Publications*, (23), 13-20.

[4] Craven B. D., (1981). Invex functions and constrained local minima. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, (24), 357-366.

[5] Craven B. D., Glover B. M. (1985). Invex functions and duality. *Journal of the Australian Mathematical Society* , (39), 1-20.

[6] Dragomir, S. S., Fitzpatrick, S. (1999) The Hadamard's inequality for s-convex functions in the second sense, *Demonstratio Mathematical*, 32(4), 687-696.

[7] Dragomir, S. S., Pecaric, J., and Persson, L. E. (1995). Some inequalities of Hadamard type. *Soochow Journal of Mathematics*, 21(3), 335-341.

[8] Dragomir, S. S. (2002). On Some New Inequalities Of Hermite-Hadamard Type For $m-$Convex Functions. *Tamkang Journal of Mahtematics*, 33(1), 45-55.

[9] Elster K. H., Neshe R. (1980). Optimality conditions fo some non-convex problems, *Springer-Verlog*, New York,

[10] Godunova,E. K. and Levin, V. I.(1985). Neravenstva dlja funkcii širokogo klassa, soderžačego vypuklye, monotonnye i nekotorye drugie vidy funkcii. *Vycislitel. Mat. i. Mat. Fiz.*Mezvuzov. Sb. Nauc. Trudov, MGPI ,138-142

[11] Hayaski M., Komiya H., (1980). Perfect duality for convexlike programs, *Journal Optimization Theory Applications*, 38: 179-189.

[12] Hanson M. A., (1981). On sufficency of the Kuhn-Tucker conditions. *Journal Mathematical Analysis and Applications*, (80), 545-550.

[13] Hanson M. A., Mond B. (1987). Convex Transformable Probamming Problems and Invexity. *Journal of Information Optimization Sciences*, (8), 201- 207.

[14] İşcan, İ. (2019). New refinements for integral and sum forms of Hölder inequality. *Journal of Inequalities and Applications*, 304, 11 pages.

[15] Jue-You, L. (2010). On Hadamard-type inequalities for s-preinvex functions, *ournal of Chongqing Normal University* 27.

[16] Kadakal, M., İşcan , İ., Kadakal, H. and Bekar, K. (2019). On improvements of some integral inequalities. *ResearchGate,DOI:10.13140/RG.2.2.15052.46724*,(Prepint January)

[17] Latif, M. A. and Shoaib, M. (2015). Hermite-Hadamard type integral inequalities for differentiable m-preinvex and (α,m)-preinvex functions. *Journal of Egyptian Mathematical Society*, 23, 236-241.

[18] Martin D. H., (1985). The essence of invexity. *Journal Optimization Theory Applications* (47), 65- 76.

[19] Musayev B., Alp M., Mustafayev N., Ekincioğlu İ. (2007). Teori ve çözümlü problemlerle Analiz I . Seçkin yayıncılık 2. Baskı, Ankara,

[20] Mohan S. R., Neogy S. K., (1995). On invex sets and preinvex function. *Journal Mathematical Analysis Applications*, 189: 901-908;
Available online at http://dx.doi.org/10.1006/jmaa. 1995-1057.

[21] Mitrinović, D. S., Pecaric, J., Fink, A. M. (1993). Classical and New Inequalities in Analysis. *Journal of Mathematical Sciences*, Kluwer Academic.

[22] Matloka, M. (2013). On Some Integral Inequalities For (h, m)-Convex Functions. *Journal of Mathematical Economics*, 9(16), 56-70.

[23] Matloka, M. (2013). On some Hadamard-type inequalities for (h_1, h_2)-preinvex functions on the co-ordinates. *Journal of Inequalities and Applications*, 227.

[24] Noor, M. A., Noor, K. I., Awan,M. U. Li, J. (2014). On Hermite-Hadamard Inequalities for $h-$Preinvex Functions. *Filomat*, 28(7), 1463-1474.

[25] Noor, M. A. (2009). Hadamard Integral Inequalities For Product Of Two Preinvex Function. *Nonlinear Analysis From*, (14), 167-173.

[26] Özdemir, M. E., Akdemir A. O. and Set, E. (2016). On $(h-m)$-Convexity And Hadamard-Type Inequalities. *Transylvanıan Journal of Mathematics and Mechanics*, 1(8), 51-58

[27] Pini, R. (1991). Invexity and generalized convexity. *Optimization*, 22(4), 513-525.

[28] Pečaricć, J., Proschan, F. and Tong, Y. L. (1992). Convex Functions.Partial Orderings and Statistical Applications. Academic Press, Inc., Oval Road, London, 469 pp.

[29] Sarıkaya, M. Z., Sağlam, A. and Yıldırım, H. (2008). On Some Hadamard-Type Inequalities For $h-$Convex Functions. *Journal of the Mathematical Inequalities*, 2(3), 335-341.

[30] Toader, G. H. (1985). Some generalizations of the convexity. *Proceedings of the Colloquium on Approximation and Optimization*, 329-338.

[31] Ünlüyol, E. and Karadeniz, M. (2019). Some properties of (h, m)-preinvex functions and Hermite Hadamard İnequality. *Sigma Journal of Engineering and Natural Sciences*, 10(3), 257-264.

[32] Ünlüyol, E., Dalkun, G. and Salaş , S.(2019). On Improvement of Hermite-Hadamard Inequalities for h-Preinvexity via Hölder-İşcan Integral Inequality. Karadeniz I. Uluslararası Multidisipliner Bilimsel Çalışmalar Kongre Tam Metin Kitabı, Giresun, Turkey, p. 191-204.

[33] Varošanec, S. (2007). On h-convexity. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 326(1), 303-311.

[34] Yang X. M., Li D. (2001). On properties of preinvex functions. *Journal of the Mathematical Analysis Applications*, 256, 229-241.

[35] Weir, T. and Mond, B. (1998). Pre-invex Functions İn Multiple Objective Optimization. *Journal of Mathematical Analysis And Applications*, 136, 29-38.

ÖZGEÇMİŞ

Adı-Soyadı	**:**	Mustafa KARADENİZ
Doğum Yeri	**:**	Gölköy, Ordu
Doğum Tarihi	**:**	01.01.1994
Medeni Hali	**:**	Bekar
Bildiği Yabancı Dil	**:**	İngilizce
İletişim Bilgileri	**:**	İnönü mahallesi 1943.sokak No:3 D:3 Gebze Kocaeli mustafakradenz@gmail.com
Lisans	**:**	Ordu Üniversitesi Fen -Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü, 2018
Çalıştığı Yer	**:**	Gebze Çözüm Koleji, 2019 $-$ *Halen*,

Eserler:

1.Ünlüyol, E. and Karadeniz, M. (2019).Some properties of (h, m)-preinvex functions and Hermite Hadamard İnequality. *Sigma Journal of Engineering and Natural Sciences*, 10(3), 257-264.