T. C.

ORDU ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATRİSLERDE ÇEKİRDEK-EP İNVERS GÖSTERİMLERİ VE ÇEŞİTLİ UYGULAMALARI

SALİH ERKAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ORDU 2023

TEZ BİLDİRİMİ

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan ve kullanılan intihal tespit programının sonuçlarına göre; bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

SALİH ERKAN

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

MATRİSLERDE ÇEKİRDEK-EP İNVERS GÖSTERİMLERİ VE ÇEŞİTLİ UYGULAMALARI

SALİH ERKAN

ORDU ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ, 72 SAYFA

(TEZ DANIŞMANI: PROF. DR. SELAHATTİN MADEN)

Bu tez çalışması beş bölüm halinde düzenlenmiştir. Birinci bölümde tez çalışmasının amacından bahsedilerek kısa bir giriş verilmiştir. İkinci bölümde çalışma boyunca gerekli olacak temel tanımlar, teoremler ve bazı genel bilgiler ifade edilmiştir. Bu bölümde ayrıca bir matrisin çekirdek inversinin tanımı ve bunun bazı özellikleri sıralanmıştır. Üçüncü bölümde Çekirdek-EP invers tanımları verilerek Çekirdek-EP inversin çeşitli özellikleri ortaya konulmuştur. Ayrıca matrislerin çekirdek-EP inversleri ile ilgili bazı hesaplanma yöntemleri verilerek çekirdek-EP inverslerin bazı uygulamalarından bahsedilmiştir. Dördüncü bölümde sonuç ve öneriler verilmistir. Beşinci bölümde ise tezin hazırlanmasında yararlanılan bazı kaynaklar listelenmiştir.

Anantara Kelimeler: Matris, Kare Matris, Rank, Parçalı Matris, Genelleştirilmiş İnvers, Moore - Penrose İnvers, Grup İnvers, Drazin İnvers, Çekirdek İnvers, Çekirdek-EP İnvers.

ABSTRACT

REPRESENTATIONS OF THE CORE-EP INVERSES OF MATRICES AND SEVERAL APPLICATIONS

SALİH ERKAN

ORDU UNIVERSITY INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

MATHEMATICS

MASTER THESIS, 72 PAGES

(SUPERVISOR: PROF. DR. SELAHATTİN MADEN)

This thesis is organized in five parts. In the first chapter, a short introduction is given by mentioning the purpose of the thesis study. In the second chapter, the basic definitions, theorems and some general informations that will be required in our study are expressed. Also in this chapter, the definition of kernel inverse of a matrix and some of its properties are listed. In the third chapter, it is given the definition of the core-EP inverse of a matrix and considered some properties of the core-EP inverses. Furthermore, some computational methods and several applications of the core-EP inverses of matrices are given. In the fourth chapter, conclusions and recommendations are given. In the fifth chapter, some sources used in the thesis are listed.

Keywords: Matrix, Square Matrix, Rank, Partitoned Matrix, Generalized Inverse, Moore-Penrose Inverse, Group Inverse, Drazin Inverse, Core Inverse, Core-EP Inverse.

TEŞEKKÜR

Tez konusunun belirlenmesinde ve tüm çalışmalarım boyunca her zaman üstün bilgi ve deneyimleriyle bana yol gösteren danışman hocam Sayın Prof. Dr. Selahattin MADEN' e en içten duygularla teşekkür eder, saygılarımı sunarım.

Ayrıca Lisansüstü eğitimim sırasında kendilerinden ders aldığım ve engin tecrübelerinden en iyi şekilde yararlandığım Ordu Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümündeki değerli hocalarıma teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER ve KISALTMALAR LİSTESİ

$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{C}_n^m$ **veya** $\mathbb{C}_{m\times n}$	: $\mathbb{C}$ üzerinde tanımlı $m \times n$ tipindeki tüm matrislerin kümesi
$\boldsymbol{I_n}$	: $n \times n$ tipindeki birim matris
$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ **veya** $\boldsymbol{A}'$	: A matrisinin transpoz matrisi
$\overline{\boldsymbol{A}}$	: A matrisinin eşlenik matrisi (eş matrisi)
$\boldsymbol{A}^*$	: A matrisinin eşlenik transpoz matrisi (Hermitian matrisi)
$\lvert\boldsymbol{A}\rvert$	: A matrisinin determinantı
$\mathbf{Ek}(\boldsymbol{A})$	: A matrisinin ek matrisi
$\boldsymbol{A_{ij}}$	: A matrisinin bir a_{ij} elemanının kofaktörü
$\boldsymbol{A^{-1}}$	: A matrisinin inversi
$\mathbf{ind}(\boldsymbol{A})$	: A matrisinin indeksi
$\boldsymbol{r}(\boldsymbol{A})$	: A matrisinin rankı
$\boldsymbol{tr}(\boldsymbol{A})$	: A matrisinin izi
$\boldsymbol{\mathcal{C}}(\boldsymbol{A})$	: A matrisinin satır uzayı
$\boldsymbol{\mathcal{N}}(\boldsymbol{A})$	: A matrisinin null (sıfır) uzayı
$\boldsymbol{\Re}(\boldsymbol{A})$	: A matrisinin ranj (sütun) uzayı
$\boldsymbol{A}^-$ **veya** $\boldsymbol{A^{(1)}}$	: A matrisinin genelleştirilmiş inversi (iç inversi)
$\boldsymbol{A}^=$ **veya** $\boldsymbol{A}^{(2)}$	: A matrisinin dış inversi
$\boldsymbol{A_r^-}$ **veya** $\boldsymbol{A^{(1,2)}}$	: A matrisinin yansımalı genelleştirilmiş inversi
$\boldsymbol{A}^\dagger$ **veya** $\boldsymbol{A}^+$	: A matrisinin Moore–Penrose tipi genelleştirilmiş inversi
$\boldsymbol{A}^D$	: A matrisinin Drazin inversi
$\boldsymbol{A}^\#$	: A matrisinin grup inversi
$\boldsymbol{A}^{\oplus}$	: A matrisinin çekirdek inversi
$\boldsymbol{A}^{\circledcirc}$	: A matrisinin çekirdek-EP inversi
$\mathbf{köş}(\boldsymbol{A})$	: A matrisinin köşegen elemanları
$\oplus$	: Direkt toplam

1. GİRİŞ

Matris teorisi ve bu teorinin önemli kısmını oluşturan lineer denklem sistemleri günümüzde matematik ve istatistik başta olmak üzere sosyoloji, kimya, fizik, bilgisayar mühendisliği, kodlama teorisi ve elektrik mühendisliği gibi pek çok teknik alanda gerekli temel bilgilerin ayrılmaz bir parçası haline gelmiştir. Matris hesabı, 19. yüzyıl ortalarından itibaren yaygın olarak kullanılmaya başlanmıştır. Matris kavramını ilk kez 1850 yılında İngiliz matematikçi Sylvester kullanmıştır. 1853 yılında ise bir diğer İngiliz matematikçi Hamilton '*Lineer and Vector Functions*' isimli eserinde matrislerin çeşitli özelliklerinden faydalanmış olmakla birlikte matris ismini henüz kullanmamıştır. Yine bir İngiliz matematikçisi olan Cavley, 1858 yılında '*Memorie on the Theory of Matrices*' isimli çalışmasında matris cebirinin temel esaslarını ortaya koymuştur. İlerleyen zamanlarda Fransız bilim adamı Laguerre ve Alman bilim adamı Frobenius matrislerle ilgili yeni kavram ve teoremler üzerinde çalışmışlardır.

Bilindiği gibi bir matrisin bilinen anlamda inversinden söz edebilmek için matrisin kare ve nonsingüler olması gerekmektedir. Ancak kare olmayan ya da kare olduğu halde singüler olan matrislerin de mevcut olduğu ve bu tipten matrislerle uygulamada oldukça sık karşılaşıldığı da bilinen bir gerçektir. Dolayısıyla bu tip matrislerin de bir çeşit inverslerine ihtiyaç duyulmaktadır. Singüler bir matrisin inversi kavramı ilk kez 1920 yılında Moore tarafından ortaya atılmış olmakla birlikte, 1950 li yılların ortalarına kadar bu konuda herhangi bir sistematik çalışma yapılamamıştır. 1955 yılında, daha önce yapılan çalışmalardan tamamen habersiz olarak, Penrose (1955, 1956) isimli bilim adamı biraz farklı bir yoldan Moore tarafından singüler matrisler için verilen invers kavramını tekrar tanımlamıştır. Penrose ile hemen hemen aynı dönemlerde yaşayan Rao ise, bir singüler matrisin Pseudo inversi olarak adlandırdığı ve en küçük kareler teorisinde, singüler matrisli normal denklemlerin çözümünde ve istatistiksel tahmin edicilerin varyanslarının hesaplanmasında oldukça sık kullanılan yeni bir invers kavramı geliştirmiştir. Ancak Rao tarafından geliştirilen bu invers, Moore ve Penrose tarafından ortaya konulan kısıtlamaların tamamını sağlamamaktadır. Bu nedenle Pseudo invers, Moore ve Penrose tarafından verilen inverslerden biraz farklıdır. Rao, daha sonraki bir çalışmasında lineer denklemlerle ilgili problemlerin çözümünde kullanılan ve Moore ve Penrose' un vermiş olduğu tanımdan daha zayıf bir tanım ortaya koymuştur. Genelleştirilmiş invers adı verilen bu inversin çeşitli uygulamaları Rao’ nun daha sonraki birçok çalışmasında yer almıştır.

Genelleştirilmiş inverslerle ilgili çalışmalar yapan başlıca bilim adamları arasında Greville, Bjerhammer, Ben-Israel ve Charnes, Chipman, Chipman ve Rao, Scroggs ve Odell ve diğerleri sayılabilir. Bott ve Duffin, bir kare matrisin kısıtlı inversini tanımlamışlardır ki bu invers bilinen g–inversten biraz farklıdır ve bazı uygulamalarda oldukça sık kullanılmaktadır. Chernoff ise çalışmalarında singüler nonnegatif tanımlı bir matrisin g–inversi kavramını ele almıştır ki bu invers, bir g–invers olmamasına rağmen tahmin problemlerinin incelenmesinde oldukça yararlıdır. Rao tarafından verilen daha zayıf tanımı sağlayan g–invers tek türlü olmamakla birlikte matris cebirinde ilginç bir çalışma olarak kabul edilmektedir. 1967 yılında bir yayınında Rao, değişik amaçlarla kullanılmak üzere g–inverslerin bir sınıflandırmasını vermiştir. Bu çalışmalar daha sonraları bu inverslerin yeni bir sınıflandırmasını ortaya koyan Mitra ve Bhimasankaram (1969, 1970) tarafından geliştirilmiştir.

Genelleştirilmiş inverslerin diğer çeşitli uygulamaları Mitra ve Rao (1968a, 1968b, 1969) ve Rao (1968) tarafından yapılan bir dizi çalışmada ele alınmıştır. Genelleştirilmiş inverslerle ilgili sistematik gelişmeler ve bunların çeşitli uygulamaları *Generalized Inverse of Matrices and Its Applications* (Wiley, 1971) adlı eserde etraflıca verilmiştir.

Bu tez çalışmasında öncelikle kare olmayan ya da kare olduğu halde normal olarak bildiğimiz anlamda inversi mevcut olmayan matrisler için geliştirilen ve özellikle lineer denklem sistemlerinin genel durumda çözümünün mevcut olup olmadığının araştırılmasında ve mevcut olması durumunda çözümün belirlenmesinde kullanılan ve bilinen invers özelliklerini de sağlayan yeni bir genelleştirilmiş invers kavramı ele alınmıştır. Bu amaçla öncelikle Moore-Penrose invers olarak adlanıdırılan bu inversin çeşitli özellikleri verilmiştir. Ayrıca keyfi mertebeden bir kare matris için grup invers, Drazin invers ve çekirdek invers tanımı verilerek bu inversin bazı özellikleri ortaya konulmuştur. Son olarak bilinen inversi mevcut olmayan kare matrisler için çekirdek-EP invers tanımı verilerek bu inversin çeşitli özellikleri verilmiş ve bu tipten inversleri hesaplamada kullanılan bazı yeni yöntemler geliştirilmiştir.

2. GENEL BİLGİLER

2.1 Matrislerle İlgili Bazı Temel Kavramlar

Tanım 2.1 i) $\mathbb{K}$ bir cisim, $m, n \in \mathbb{N}$ ve $1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n$ olmak üzere bütün (i, j) sıralı ikililerinin kümesini $\mathcal{A} = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ gösterelim. Bir $f: \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{K}$ fonksiyonu

$$(i, j) \longrightarrow f(i, j) = a_{ij}$$

biçiminde tanımlansın. Bu durumda $a_{ij} \in \mathbb{K}$ olmak üzere keyfi seçilen $m.n$ tane elemanın oluşturduğu tabloya $\mathbb{K}$ üzerinde tanımlı $m \times n$ tipinde bir matris denir ve

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

veya kısaca $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ şeklinde gösterilir. Her bir $(i, j),\ 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n$ ikilisine karşılık gelen a_{ij} elemanına ise A matrisinin (i, j)–yinci bileşeni adı verilir.

ii) $A = [a_{ij}]$ ve $B = [b_{ij}]$ matrisleri $m \times n$ tipinde iki matris olmak üzere, eğer her $(i, j),\ 1 \leq i \leq m$ ve $1 \leq j \leq n$ için $a_{ij} = b_{ij}$ ise bu matrisler birbirine eşittir denir.

iii) $A = [a_{ij}]$ matrisi $m \times n$ tipindeki bir olmak üzere eğer her bir $(i, j),\ 1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ için $a_{ij} = 0$ ise A matrisine sıfır matris denir (Hacısalihoğlu H.H., 1977).

iv) $m \times n$ tipindeki iki $A = [a_{ij}]$ ve $B = [b_{ij}]$ matrisi verildiğinde, bu iki matrisin toplamı, (i, j)–yinci bileşeni $a_{ij} + b_{ij}$ olan bir matris olup aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + +b_{12} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}$$

v) $c \in \mathbb{K}$ bir skaler olmak üzere $cA \in \mathbb{K}_n^m$ matrisi (i, j)–yinci bileşeni ca_{ij} olan bir matris olup aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$cA = \begin{bmatrix} ca_{11} & ca_{12} & \dots & ca_{1n} \\ ca_{21} & ca_{22} & \dots & ca_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ ca_{m1} & ca_{m2} & \dots & ca_{mn} \end{bmatrix}$$

vi) $A = [a_{ij}] \in \mathbb{K}_p^m$ ve $B = [b_{ij}] \in \mathbb{K}_n^p$ tipindeki iki A ve B matrisinin çarpımı $C = [c_{ij}] \in \mathbb{K}_n^m$ tipinde bir matris olup

$$C = A.B = \left[\sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}\right],\ 1 \leq i \leq m,\ \ 1 \leq j \leq n$$

şeklinde veya daha açık olarak

$$A.B = \begin{bmatrix} (a_{11}b_{11} + \cdots + a_{1p}b_{p1}) & \dots & (a_{11}b_{1n} + \cdots + a_{1p}b_{pn}) \\ \dots & \dots & \dots \\ (a_{m1}b_{11} + \cdots + a_{mp}b_{p1}) & \dots & (a_{m1}b_{1n} + \cdots + a_{mp}b_{pn}) \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlanır. Bu durumda iki matrisin çarpımının tanımlı olabilmesi için birinci matrisin sütun sayısı ile ikinci matrisin satır sayısının eşit olması gerekir. Uygun A ve B matrislerinin çarpımı $A.B$ veya AB ile gösterilir (Hacısalihoğlu H.H., 1977).

Tanım 2.2 Eğer, özel olarak $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ alınırsa, bu takdirde matrise bir reel matris ve $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ alınırsa matrise bir kompleks matris denir (Branson R., 1999).

Tanım 2.3 i) Eğer bir $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ matrisinde $m = n$ ise, yani matrisin satır sayısı ve sütun sayısı birbirine eşit ise, bu takdirde A matrisine bir kare matris denir.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad (2.2)$$

kare matrisinde $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ elemanlarına A matrisinin köşegen(esas köşegen) elemanları denir.

ii) Bir $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ kare matrisinin köşegen elemanları dışındaki diğer tüm elemanları sıfır ise bu matrise köşegen matris denir ve $A = \text{Köş}\{a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}\}$ ile gösterilir.

iii) Bir köşegen matriste $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn} = \mathrm{k},\ \mathrm{k} \in \mathbb{K}$ ise matrise skaler matris denir.

iv) Köşegen elemanları 1 ve diğer elemanları 0 olan bir kare matrise birim matris denir ve $n-$ yinci mertebeden bir birim matris

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

şeklinde gösterilir. Herhangi bir $A \in \mathbb{K}_n^m$ matrisi için, $I_m A = A I_n = A$ eşitliği sağlanır.

v) Bir $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ matrisinden aynı numaralı satır ve sütunlar kendi aralarında yer değiştirilerek elde edilen matrisie A matrisinin transpozu denir ve $A^T = [a_{ij}]_{n\times m}$ ile gösterilir. Buna göre uygun mertebeden A ve B matrisleri için

$$(A+B)^T = A^T + B^T \quad \text{ve} \quad (AB)^T = B^T A^T$$

olduğu kolayca görülür.

vi) Eğer A bir reel kare matris olmak üzere $A^T = A$ ise, bu takdirde A matrisine bir simetrik matris denir.

vii) A ve B aynı mertebeden iki kare matris olmak üzere eğer $AB = BA$ eşitliği sağlanıyorsa, bu matrislere değişmelidirler denir (Hacısalihoğlu H.H., 1977).

Tanım 2.4 $\{1,2, \dots n\}$ kümesinin kendisi üzerine tanımlı birebir ve örten bağıntısına veya buna eş değer olarak $1,2, \dots n$ sayılarının yeniden bir sıralanmasına $\{1,2, \dots n\}$ kümesinin bir σ permütasyonu denir. Böyle bir permütasyon,

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ j_1 & j_2 & \dots & j_n \end{pmatrix}$$

veya kısaca

$$\sigma = j_1, j_2, \dots, j_n \quad , \; j_i = \sigma(i)$$

ile gösterilir. Bu şekildeki permütasyonların kümesi S_n ile gösterilir. S_n de gelişigüzel bir σ permütasyonu, örneğin $\sigma = j_1, j_2, \dots, j_n$ düşünüldüğünde σ da çift veya tek sayıda permütasyonlar olmasına göre σ ya çift veya tek permütasyon denir. O halde bir σ permütasyonunun işareti

$$sgn\sigma = \begin{cases} 1, & \text{eğer } \sigma \text{ çift ise} \\ -1, & \text{eğer } \sigma \text{ tek ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır ve $sgn\sigma$ ile gösterilir (Hacısalihoğlu H.H., 1977).

$A = [a_{ij}]_{n \times n}$ matrisinin $\mathbb{K}$ cismi üzerinde tanımlı bir kare matris olduğunu varsayalım. Bu takdirde A matrisinin her satırından ve her sütunundan yalnız ve yalnız bir eleman alınmak üzere n elemanın bir çarpımı göz önüne alınsın. Böyle bir çarpım $a_{1j_1}.a_{2j_2}.\dots.a_{nj_n}$ şeklinde yazılır. Burada çarpanlar ardışık satırlardan gelir ve bu yüzden alt indisler $1, 2, \dots, n$ doğal sayı sırasındadır. Çarpanlar farklı sütunlardan geldiğinden, ikinci alt indislerin dizisi S_n de bir $\sigma = j_1, j_2, \dots, j_n$ permütasyonunu oluşturur. Tersine, S_n deki her bir permütasyon yukarıdaki şekilde bir çarpım tanımlar. Böylece A matrisi bu şekilde $n!$ tane çarpım kapsar.

Tanım 2.5 $A = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ kare matrisinin determinantı $\det(A)$ veya $|A|$ şeklinde gösterilir ve yukarıdaki her çarpanı $sgn\sigma$ ile çarpılan veya $n!$ tane çarpımların toplamıdır. Yani,

$$|A| = \sum_{\sigma}(sgn\sigma)a_{1j_1}.a_{2j_2}.\dots.a_{nj_n}$$

veya

$$|A| = \sum_{\sigma\in S_n}(sgn\sigma)a_{1\sigma(1)}.a_{2\sigma(2)}.\dots.a_{n\sigma(n)}$$

şeklinde n mertebedendir. Bu durumda 1×1 tipinde bir A matrisinin determinantı kendisidir. Başka bir deyişle $A = [a]$ ise, bu durumda $\det(A) = |a| = a$ olur. Öte yandan 2×2 tipindeki bir A matrisi için

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21}$$

olur (Branson R., 1999).

Tanım 2.6 i) $A = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ matrisinin keyfi bir a_{ij} elemanının $\left|M_{ij}\right|$ ile gösterilen minörü, A matrisinden i–yinci satırın ve j–yinci sütunun atılması ile oluşan alt kare matrisin determinantıdır.

ii) $A = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ matrisinin keyfi bir a_{ij} elemanının minörü $\left|M_{ij}\right|$ olsun. Bu durumda a_{ij} elemanının A_{ij} ile gösterilen kofaktörü (veya işaretli minörü veya eş çarpanı),

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}.\left|M_{ij}\right|$$

şeklinde tanımlanır.

iii) $A = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ matrisinin determinantı herhangi bir satır(sütun) elemanlarının kendi kofaktörleriyle çarpılıp tüm elde edilen çarpanların toplanmasıyla hesaplanır. Başka bir deyişle herhangi i ve j $(i,j = 1,2,3,\dots,n)$ için

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}.A_{ik} = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{i+k}a_{ik}|M_{ik}| \tag{2.3}$$

veya

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}.A_{kj} = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+j}a_{kj}|M_{ik}| \tag{2.4}$$

şeklinde tanımlanır. Bu durumda her bir i için, (2.3) açılımına A matrisinin determinantının i–yinci satıra göre açılımı ve her bir j için, (2.4) açılımına ise A matrisinin determinantının j–yinci sütuna göre açılımı adı verilir.

iv) $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ matrisi için eğer $|A| = 0$ ise, A matrisine bir singüler matris ve eğer $|A| \neq 0$ ise, A matrisine bir nonsingüler(veya regüler) matris denir(Branson R., 1999).

Tanım 2.7 $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ matrisinde bir a_{ij} elemanının kofaktörü A_{ij} olmak üzere

$$\mathrm{Ek}(A) = [A_{ij}]^T = [A_{ji}]$$

matrisine A matrisinin ek matrisi denir ve

$$Ek(A) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

ile gösterilir (Hacısalihoğlu H.H., 1977).

Tanım 2.8 Herhangi bir $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ kare matrisi verildiğinde, eğer

$$A.B = B.A = I_n$$

olacak şekilde bir $B = [b_{ij}]_{n\times n}$ kare matrisi mevcut ise bu B matrisine A matrisinin inversi (tersi) denir ve $A^{-1} = B$ ile gösterilir (Hacısalihoğlu H.H., 1977).

Teorem 2.1 Bir $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ matrisi ile ek matrisinin çarpımı bir skaler matris olup,

$$A.\mathrm{Ek}(A) = \mathrm{Ek}(A).A = |A| \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = |A| I_n \tag{2.5}$$

ile verilir (Hacısalihoğlu H.H., 1977).

Teorem 2.2 Bir $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ nonsingüler matrisinin inversi,

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}.\mathrm{Ek}(A) \tag{2.6}$$

dır (Hacısalihoğlu H.H., 1977).

Teorem 2.3 i) Bir $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ nonsingüler matrisi için A^{-1} inversi tektir.

ii) A nonsingüler bir matris ise A^{-1} inversi de nonsingüler olup $(A^{-1})^{-1} = A$ dır.

iii) A ve B çarpıma uygun nonsingüler matrisler ise AB çarpımı da nonsingüler olup $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ dir.

iv) A nonsingüler ise A^T matrisi de nonsingüler olup $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ dir (Branson R., 1999).

Tanım 2.9 i) Bir $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ kare matrisi için eğer $A^2 = A$ ise, bu takdirde A matrisine bir idempotent matris denir.

ii) $\mathbb{C}$ kompleks sayılar cismi üzerinde tanımlı bir A matrisinin elemanlarının yerlerine bunların eşlenikleri yazılarak elde edilen matrise A matrisinin eşleniği (eş matrisi) denir ve $\overline{A}$ ile gösterilir.

iii) $\mathbb{C}$ kompleks sayılar cismi üzerinde tanımlı bir A matrisi için eğer $\left(\overline{A}\right)^T = A$ ise, bu takdirde A matrisine bir hermityen matris denir ve $A^* = \left(\overline{A}\right)^T$ ile gösterilir.

iv) Bir A matrisi için eğer $AA^* = A^*A$ eşitliği sağlanıyorsa, bu takdirde A matrisine bir normal matris denir.

v) $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ nonsingüler bir matris olmak üzere, $A^{-1} = A^*$ (veya buna denk olarak $AA^* = A^*A = I$) ise A matrisine birimsel (unitary) matris denir.

vi) $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ bir kare matris olmak üzere, eğer $A^{-1} = A^T$ ise, bu takdirde A matrisine bir ortogonal matris denir (Branson R., 1999).

Teorem 2.5 A ve B uygun mertebeden matrisler olmak üzere aşağıdaki eşitlikleri sağlanır (Branson R., 1999).

i) $\left(\overline{A}\right)^T = \overline{(A^T)}$.

ii) $(A^*)^* = A$.

iii) $(A+B)^* = A^* + B^*$.

iv) $(AB)^* = B^*A^*$.

Tanım 2.10 i) $x_1, x_2, \dots x_n$vektörler kümesi verilmiş olsun. Eğer $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$ eşitliği ancak $a_1, a_2, \dots, a_n$ skalerlerinin tümü birden sıfır olduğunda sağlanıyorsa bu takdirde $x_1, x_2, \dots x_n$ vektörlerine lineer bağımsızdır denir. Aksi durumda yani, $a_1, a_2, \dots, a_n$ skalerlerinden en az biri sıfırdan farklı olmak üzere eğer $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$ eşitliği sağlanıyorsa bu takdirde $x_1, x_2, \dots x_n$ vektörlerine lineer bağımlıdır denir.

ii) A matrisi $m \times n$ tipinde herhangi bir matris olsun. A matrisinin sütun vektörlerini $A_{*1}, A_{*2}, \dots, A_{*n}$ ile ve satır vektörlerini de $A_{1*}, A_{2*}, \dots, A_{m*}$ ile gösterelim. Bu takdirde A_{i*}, $i = 1, 2, \dots, m$ vektörleri arasından oluşturulan en büyük lineer bağımsız vektörler kümesinin eleman sayısına A matrisinin satır rankı ve A_{*j}, $j = 1, 2, \dots, n$ vektörleri arasından oluşturulan en büyük lineer bağımsız vektör kümesinin eleman sayısına ise A matrisinin sütun rankı denir (Hacısalihoğlu H.H., 1977).

Teorem 2.6 Bir matrisin herhangi iki satırının kendi aralarında yer değiştirmesi o matrisin satır rankını değiştirmez (Branson R., 1999).

Teorem 2.7 i) Elemanter işlemler herhangi bir matrisin sütun rankını değiştirmez.
ii) Herhangi bir A matrisi için satır rankı sütun rankına eşittir (Branson R., 1999).

Tanım 2.11 Herhangi bir A matrisinin rankı, satır ve sütun rankı olarak tanımlanır ve $\mathrm{rank}(A)$ veya $r(A)$ şeklinde gösterilir (Branson R., 1999).

Teorem 2.8 A bir matris olmak üzere $r(A)$ = $r(A^T)$ dir (Hacısalihoğlu H.H., 1977).

Tanım 2.12 $n \times n$ tipindeki bir A kare matrisi için eğer $r(A) = n$ ise A matrisine nonsingüler matris, aksi durumda singüler matris denir (Hacısalihoğlu H.H., 1977).

Tanım 2.13 $A \in \mathbb{K}_n^m$ matrisi verilmiş olsun. Bu takdirde $\mathcal{N}(A) = \{x : Ax = 0\}$ kümesine A marisinin null (sıfır) uzayı denir. $\Re(A) = \{y : Ax = y\}$ kümesine ise A matrisinin ranj (sütun) uzayı denir (Hacısalihoğlu H.H., 1977).
Teorem 2.9 $m \times n$ tipindeki bir A matrisi için eğer $r(A) = r$ ise, bu takdirde aşağıdaki şartları sağlayan nonsingüler P ve Q matrisleri mevcuttur. I, $r \times r$ boyutlu bir birim matris olmak üzere,

i) $m = n = r \Rightarrow PAQ = I$

ii) $m = r < n \Rightarrow PAQ = [I, 0]$

iii) $m > r,\ n > r \Rightarrow PAQ = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

dir (Branson R., 1999).

Teorem 2.10 Çarpıma uygun A ve B matrisleri için AB çarpımının rankı A ve B matrislerinin rankını geçemez. Yani,

$$r(AB) \leq \min\{r(A),\ r(B)\} \tag{2.7}$$

dir (Branson R., 1999).

2.2 Genelleştirilmiş İnversler

Bu kısımda çalışmamız boyunca sık sık isimlerini zikredeceğimiz bazı genelleştirilmiş inversler ve çeşitli özellikleri verilecektir.

Tanım 2.14 $\mathbb{C}_n^m$, kompleks sayılar cismi üzerinde tanımlı $m \times n$ tipindeki tüm matrislerin kümesini göstersin. Bir $A \in \mathbb{C}_n^m$ matrisi için aşağıdaki dört şartı (Moore–Penrose şartları) sağlayan bir X matrisine A matrisinin bir Moore–Penrose inversi denir ve A^+ veya $A^\dagger$ sembollerinden birisi ile gösterilir.

(i) $AXA = A$,
(ii) $XAX = X$,
(iii) $(AX)^* = AX$,
(iv) $(XA)^* = XA$. (2.8)

Bu durumda eğer X matrisi sadece (i) şartını sağlıyorsa, bu X matrisine, A matrisinin bir genelleştirilmiş inversi (iç inversi) denir ve A^- veya $A^{(1)}$ ile gösterilir. Sadece (ii) şartını sağlayan X matrisine, A matrisinin bir dış inversi denir ve $A^=$ veya $A^{(2)}$ ile gösterilir. Hem (i) hem de (ii) şartını sağlayan X matrisine ise, A matrisinin bir yansımalı genelleştirilmiş inversi denir ve $A^{(1,2)}$ veya A_r^- ile gösterilir.

A nonsingüler bir matris olmak üzere A^{-1} matrisinin Moore–Penrose invers şartlarını sağlayacağı açıktır. Yani $A^{-1} = A^+$ olur. Bununla birlikte, eğer A matris bir singüler matris veya kare olmayan bir matris ise, bu durumda Moore–Penrose şartlarını sağlayan bir A^+ matrisinin mevcut olup olmadığı sorusu akla gelebilir. Bu sorunun cevabı her A matrisi için bir A^+ matrisinin mevcut ve tek olduğu şeklindedir. Aşağıda bu durum gösterilecektir. Ayrıca bu şekilde tanımlanan Moore–Penrose inversin bazı önemli özellikleri verilecektir.

Teorem 2.11 Eğer A matrisi $m \times n$ tipinde bir sıfır matris ise, A^+ matrisi de $n \times m$ tipinde sıfır matristir (Pringle and Rayner, 1971).

Teorem 2.12 Her A matrisi için Moore–Penrose şartlarını sağlayan bir ve yalnız bir tek A^+ matrisi vardır (Pringle and Rayner, 1971).

İspat: Eğer $A = 0$ ise bu takdirde $A^+ = 0$ olacağından $A \neq 0$ alınabilir. A matrisi r ranklı bir matris olsun. Bu durumda A matrisi

$$A = BC \tag{2.9}$$

olarak parçalanabilir, burada B matrisi $m \times r$ tipinde r ranklı bir matris ve C matrisi de $r \times n$ tipinde r ranklı bir matris olup, B^*B ve CC^* matrisleri nonsingüler matrislerdir. Bu durumda eğer A^+ matrisi

$$A^+ = C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^* \tag{2.10}$$

olarak alınırsa, A^+ matrisi istenen Moore–Penrose şartlarını sağlar. Gerçekten

(i) $AA^+A = (BC)C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^*(BC)$

$= B(CC^*)(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}(B^*B)C = BC = A,$

(ii) $A^+AA^+ = C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^*(BC)C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^*$

$= C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}(B^*B)(CC^*)(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^*$

$= C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^* = A^+,$

(iii) $(AA^+)^* = [(BC)C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^*]^* = B(B^*B)^{-1}(CC^*)^{-1}(CC^*)B^*$

$= B(B^*B)^{-1}B^* = B(CC^*)(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^*$

$= (BC)C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^* = AA^+,$

(iv) $(A^+A)^* = [C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^*(BC)]^*$

$= C^*(B^*B)(B^*B)^{-1}(CC^*)^{-1}C$

$= C^*(CC^*)^{-1}C = C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}(B^*B)C$

$= C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^*(BC) = A^+A$

olduğu görülür. Moore–Penrose inversin tek olduğunu göstermek için A matrisinin Moore–Penrose şartlarını sağlayan herhangi iki A_1^+ ve A_2^+ Moore–Penrose inversinin mevcut olduğunu varsayalım. Bu durumda,

$$A_1^+ = A_1^+AA_1^+ = A_1^+(AA_1^+)^* = A_1^+(A_1^+)^*A^* = A_1^+(A_1^+)^*(AA_2^+A)^*$$

$$= A_1^+(A_1^+)^*A^*(A_2^+)^*A^* = A_1^+(AA_1^+)^*(AA_2^+)^* = A_1^+AA_1^+AA_2^+ = A_1^+AA_2^+$$

$$= A_1^+A(A_2^+AA_2^+) = (A_1^+A)^*(A_2^+A)^*A_2^+ = A^*(A_1^+)^*A^*(A_2^+)^*A_2^+$$

$$= (AA_1^+A)^*(A_2^+)^*A_2^+ = A^*(A_2^+)^*A_2^+ = (A_2^+A)^*A_2^+ = A_2^+AA_2^+ = A_2^+$$

olur, yani A^+ matrisi tektir.

Teorem 2.13 $m \times n$ tipinde bir A matrisinin Moore–Penrose inversi $n \times m$ tipindedir (Pringle and Rayner, 1971).

Teorem 2.14 i) $m \times n$ tipinde bir A matrisinin tüm elemanları 1 ise, $A^+ = \frac{1}{m.n} A^*$ dir.
ii) $a,\ n \times 1$ tipinde bir sütun vektörü ise, bu durumda $a^+ = (a^* a)^{-1} a^*$ şeklindedir.

iii) $a,\ 1 \times n$ tipinde bir satır vektörü ise, bu durumda a^+, $a^+ = a^*(aa^*)^{-1}$ şeklindedir (Pringle and Rayner, 1971).

Teorem 2.15 A herhangi bir matris olmak üzere

$$(A^*)^+ = (A^+)^* \tag{2.11}$$

eşitliği geçerlidir (Pringle and Rayner, 1971).

İspat: (2.9) bağıntısındaki gibi $A = BC$ alınsın. Bu durumda $A^* = C^* B^*$ olduğundan,

$$A^+ = C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^* \quad \text{ve} \quad (A^+)^* = B(B^*B)^{-1}(CC^*)^{-1}C$$

elde edilir ki, bu da A^* matrisinin Moore–Penrose inversidir. Gerçekten,

(i) $A^*(A^*)^+A^* = C^*B^*B(B^*B)^{-1}(CC^*)^{-1}CC^*B^* = C^*B^* = A^*$,

(ii) $(A^*)^+A^*(A^*)^+ = B(B^*B)^{-1}(CC^*)^{-1}CC^*B^*B(B^*B)^{-1}(CC^*)^{-1}C$

$= B(B^*B)^{-1}(CC^*)^{-1}C = (A^*)^+$,

(iii) $[A^*(A^*)^+]^* = [(C^*B^*)B(B^*B)^{-1}(CC^*)^{-1}C]^* = [C^*(CC^*)^{-1}C]^*$

$= C^*(CC^*)^{-1}C = C^*(B^*B)(B^*B)^{-1}(CC^*)^{-1}C = A^*(A^*)^+$,

(iv) $[(A^*)^+A^*]^* = [B(B^*B)^{-1}(CC^*)^{-1}C(C^*B^*)]^* = [B(B^*B)^{-1}B^*]^*$

$= B(B^*B)^{-1}B^* = B(B^*B)^{-1}(CC^*)^{-1}(CC^*)B^* = (A^*)^+A^*$

olur. Böylece, $(A^*)^+ = B(B^*B)^{-1}(CC^*)^{-1}C$ elde edilir. Buradan da $(A^*)^+ = (A^+)^*$ olduğu görülür.

Teorem 2.16 Bir matrisin Moore–Penrose inversinin Moore–Penrose inversi matrisin kendisine eşittir. Yani, bir A matrisi için, $(A^+)^+ = A$ dir (Pringle and Rayner, 1971).

Teorem 2.17 Herhangi bir A matrisi için $r(A) = r(A^+)$ eşitliği gerçeklenir (Pringle and Rayner, 1971).

İspat: Teorem 2.10 $AA^+A = A$ ve $A^+AA^+ = A^+$ eşitliklerine uygulanırsa sırasıyla

$$r(A) = r(AA^+A) \leq \min\{r(A),\ r(A^+)\} \leq r(A^+)$$

ve

$$r(A^+) = r(A^+AA^+) \leq \min\{r(A),\ r(A^+)\} \leq r(A)$$

elde edilir. Bu iki eşitsizlikten istenen sonuç sağlanır.

Bu teoremin sonucu olarak eğer A matrisinin rankı r ise, bu takdirde A^+, AA^+, A^+A, AA^+A, A^+AA^+ matrislerinin her birinin rankının da r olduğu görülür.

Teorem 2.18 Eğer A simetrik ve idempotent bir matris ise, bu takdirde $A^+ = A$ dir (Pringle and Rayner, 1971).

Teorem 2.19 Eğer $B = \text{Köş}\{\mathrm{b}_{11}, \mathrm{b}_{22}, \dots, \mathrm{b}_{nn}\}$ ise, bu takdirde B matrisinin Moore–Penrose inversi B^+, i–yinci satır ve i–yinci sütunda yer alan köşegen elemanı $\mathrm{b}_{ii} \neq 0$ iken b_{ii}^{-1} ve $\mathrm{b}_{ii} = 0$ iken 0 olan bir köşegen matristir (Pringle and Rayner, 1971).

Teorem 2.19 i) A, $m \times n$ matrisi tam satır ranklı ise, $A^+ = A^*(AA^*)^{-1}$ ve $AA^+ = I_m$,

ii) A, $m \times n$ matrisi tam sütun ranklı ise, $A^+ = (A^*A)^{-1}A^*$ ve $A^+A = I_n$ olur (Pringle and Rayner, 1971).

İspat: Her iki durum için verilen A^+ matrisinin Moore–Penrose şartlarını sağladığını göstermek yeterlidir. Bu durumda,

i) $AA^+A = AA^*(AA^*)^{-1}A = (AA^*)(AA^*)^{-1}A = A,$

$$A^+AA^+ = A^*(AA^*)^{-1}AA^*(AA^*)^{-1}$$

$$= A^*(AA^*)^{-1}(AA^*)(AA^*)^{-1} = A^*(AA^*)^{-1} = A^{+\dagger},$$

$$(AA^+)^* = (AA^*(AA^*)^{-1})^* = ((AA^*)(AA^*)^{-1})^* = I^* = I$$

$$= (AA^*)(AA^*)^{-1} = AA^*(AA^*)^{-1} = AA^+,$$

$$(A^+A)^* = (A^*(AA^*)^{-1}A)^* = A^*(AA^*)^{-1}A = A^+A$$

olacaktır.

ii) $AA^+A = A(A^*A)^{-1}A^*A = A(A^*A)^{-1}(A^*A) = A,$

$$A^+AA^+ = (A^*A)^{-1}A^*A(A^*A)^{-1}A^*$$

$$= (A^*A)^{-1}(A^*A)(A^*A)^{-1}A^* = (A^*A)^{-1}A^* = A^+,$$

$$(AA^+)^* = (A(A^*A)^{-1}A^*)^* = A(A^*A)^{-1}A^* = AA^+,$$

$$(A^+A)^* = ((A^*A)^{-1}A^*A)^* = ((A^*A)^{-1}(A^*A))^* = I^* = I$$

$$= (A^*A)^{-1}(A^*A) = (A^*A)^{-1}A^*A = A^+A$$

dir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 2.20 $B \neq 0$ ve $C \neq 0$ olmak üzere B ve C matrisleri sırasıyla $m \times r$ ve $r \times n$ tipinde olmak üzere $r(B) = r(C) = r$ olsun. Bu takdirde,

$$(BC)^+ = C^+B^+ \tag{2.12}$$

eşitliği sağlanır (Pringle and Rayner, 1971).

İspat: B matrisi sütun ranklı, C matrisi satır ranklı olduğundan Teorem 2.19 a göre

$$C^+ = C^*(CC^*)^{-1} \text{ ve } B^+ = (BB^*)^{-1}B^*$$

olacaktır ve buradan da

$$C^+B^+ = C^*(CC^*)^{-1}(BB^*)^{-1}B^*$$

elde edilir. Bu ise zaten $(BC)^+$ matrisidir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

2.3 Bir Matrisin Çekirdek İnversi

$\mathbb{C}_n^m$ $m \times n$ tipindeki kompleks matrislerinin kümesi olsun. A*, $\mathfrak{R}(A)$ ve $r(A)$ sembolleri bir $A \in \mathbb{C}_n^m$ matrisinin sırasıyla, eşlenik devriğini, ranj uzayını (sütun uzayı) ve rankını göstersin. Ayrıca, I_n, n-yinci mertebeden birim matrisi göstersin.

Çekirdek invers tanımına geçmeden önce, bazı genelleştirilmiş invers kavramlarını hatırlamak daha ilginç olacaktır. Bir önceki kısımda belirtildiği gibi bir $A \in \mathbb{C}_n^m$ matrisinin $A^+ \in \mathbb{C}_n^m$ ile gösterilen Moore-Penrose inversi aşağıdaki eşitlikleri sağlayan ve tek türlü olarak mevcut olan matristir:

$$AA^+A = A\ ,\ A^+AA^+ = A^+,\quad AA^+ = (AA^+)^*,\ A^+A = (A^+A)^* \tag{2.13}$$

Moore-Penrose inversin önemli bir özelliği ortogonal izdüşümleri temsil etmek için kullanılabilmesidir. Örneğin $P_A = AA^+$ ve $P_{A^*} = A^+A$ sırasıyla $\mathfrak{R}(A)$ ve $\mathfrak{R}(A^*)$ üzerindeki ortogonal izdüşümlerdir.

Diğer bir önemli genelleştirilmiş invers ise Drazin inverstir. Böyle bir inversin varlığı sadece kare matrislerle sınırlıdır. Bir $A \in \mathbb{C}_n^n$ matrisinin Drazin inversi aşağıdaki üç denklemi sağlayan ve tek türlü mevcut olan bir $A^D \in \mathbb{C}_n^n$ matrisidir:

$$A^D A A^D = A^D,\ A A^D = A^D A,\ A^{l+1} A^D = A^{l+1}\text{, her } l \geq k \text{ için,} \tag{2.14}$$

burada k, $r(A^{k+1}) = r(A^k)$ eşitliğini sağlayan en küçük pozitif tam sayıdır. k sayısına A matrisinin indeksi denir ve $k = ind(A)$ ile gösterilir. Açıkça görülür ki $ind(A) = 0$ olması için gerek ve yeter şart A matrisinin nonsingüler olmasıdır. Öte yandan $AA^D = A^D A$ olması durumunda her $l \geq k$ için $A^{l+1}A^D = A^{l+1}$ eşitliğinin $A^D A^{l+1} = A^{l+1}$ eşitliğine denk olduğu açıktır.

Özel olarak eğer $ind(A) = 1$, yani $r(A^2) = r(A)$ ise bu durumda Drazin inverse grup invers adı verilir. Başka bir deyişle bir A matrisinin grup inversi aşağıdaki denklemleri sağlayan ve tek türlü olarak mevcut olan bir $A^\# \in \mathbb{C}_n^n$ matrisidir:

$$AA^\# A = A \qquad A^\# A A^\# = A^\# \qquad AA^\# = A^\# A \tag{2.15}$$

Burada hemen belirtelim ki her kare matrisin bir grup inverse sahip olması gerekmez. Ancak verilen bir A matrisinin böyle bir inverse sahip olması için gerek ve yeter koşul indeksinin 1 olması veya başka bir deyişle $r(A^2) = r(A)$ olmasıdır. Bu çalışma boyunca indeksi 1 olan matrislerin kümesi $\mathbb{C}_n^{CM}$ ile gösterilecektir, yani

$$\mathbb{C}_n^{CM} = \{ A \in \mathbb{C}_n^n \colon r(A^2) = r(A)\}$$

dir. İndeksi 1 olan matrislere grup matrisler veya çekirdek matrisler adı verilir.

$\mathbb{C}_{m\times n}^{Pl}$, $\mathbb{C}_n^{P}$, $\mathbb{C}_n^{OP}$, $\mathbb{C}_n^{TM}$ ve $\mathbb{C}_n^{EP}$ ile sırasıyla kısmi izometrilerin, izdüşümlerin (idempotent matrislerin), ortogonal izdüşümlerin, (Hermityen idempotent matrislerin), tripotent matrislerin ve EP (ranj-Hermityen) matrislerin kümelerini gösterelim, yani

$$\mathbb{C}_{m,n}^{Pl} = \{ A \in \mathbb{C}_n^m \colon AA^*A = A\} = \{A \in \mathbb{C}_n^m \colon A^+ = A^*\}, \tag{2.16}$$

$$\mathbb{C}_n^{P} = \{A \in \mathbb{C}_n^n \colon A^2 = A\}, \tag{2.17}$$

$$\mathbb{C}_n^{OP} = \{A \in \mathbb{C}_n^n \colon A^2 = A = A^*\} = \{A \in \mathbb{C}_n^n \colon A^2 = A = A^+\}, \tag{2.18}$$

$$\mathbb{C}_n^{TM} = \{A \in \mathbb{C}_n^n \colon A^3 = A\}, \tag{2.19}$$

$$\mathbb{C}_n^{EP} = \{A \in \mathbb{C}_n^n \colon AA^+ = A^+A\} = \{A \in \mathbb{C}_n^n \colon \mathfrak{R}(A) = \mathfrak{R}(A^*)\}, \tag{2.20}$$

olsun.

Rankı r olan her $A \in \mathbb{C}_n^n$ matrisi $U \in \mathbb{C}_n^n$ uniter matris olmak üzere,

$$A = U \begin{pmatrix} \Sigma K & \Sigma L \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^* \tag{2.21}$$

biçiminde gösterilebilir, burada $\Sigma = \text{köş}\{\sigma_1 I_{r_1} \ldots\ldots \ \sigma_t I_{r_t}\}$ matrisi A matrisinin singüler değerlerinden oluşan köşegen matris, $\sigma_1 > \sigma_2 > \cdots > \sigma_t > 0$, $r_1 + r_2 + \cdots + r_t = r$ olmak üzere $K \in \mathbb{C}_{r,r}$ ve $L \in \mathbb{C}_{r,n-r}$ matrisleri

$$KK^* + LL^* = I_r \tag{2.22}$$

eşitliğini sağlar. Önemli olan şudur ki eğer A nonsingüler ise, yani $r = n$ ise (2.21) deki parçalı matrisin alt satırı ve sağ sütunu yok olur ve bu durumda $V = UK^*$ olmak üzere $A = U\Sigma V^*$ olur. (2.21) eşitliğinden

$$A^+ = U \begin{pmatrix} K^*\Sigma^{-1} & 0 \\ L^*\Sigma^{-1} & 0 \end{pmatrix} U^* \tag{2.23}$$

sonucu çıkmaktadır. Ayrıca eğer A matrisinin indeksi bir ise, bu takdirde

$$A^\# = U \begin{pmatrix} K^{-1}\Sigma^{-1} & K^{-1}\Sigma^{-1}K^{-1}L \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^* \tag{2.24}$$

yazılabilir. Daha sonraki değerlendirmelerde yardımcı olacak olan aşağıdaki lemma (2.21) ve (2.23) gösterimleri ile (2.16)-(2.20) ifadelerinin doğrudan birleştirilmesiyle elde edilmiştir.

Lemma 2.1 $A \in \mathbb{C}_n^n$ matrisi r ranklı olmak üzere (2.21) deki gösterime sahip olsun. Bu takdirde aşağıdaki durumlar gerçeklenir (Baksalary and Trenkler, 2010):

(i) $A \in \mathbb{C}_{n\times n}^{Pl} \Leftrightarrow \Sigma = I_r$,

(ii) $A \in \mathbb{C}_n^{P} \Leftrightarrow \Sigma K = I_r$,

(iii) $A \in \mathbb{C}_n^{OP} \Leftrightarrow L = 0, \Sigma = I_r,\ K = I_r$,

(iv) $A \in \mathbb{C}_n^{TM} \Leftrightarrow (\Sigma K)^2 = I_r$,

(v) $A \in \mathbb{C}_n^{EP} \Leftrightarrow \mathrm{L} = 0$.

Tanım 2.15 $A \in \mathbb{C}_n^n$ kare matrisi verilmiş olsun. Bu durumda

$$\text{(i)} \quad AA^{\oplus} = P_A \quad \text{ve} \quad \text{(ii)} \quad \Re(A^{\oplus}) \subseteq \Re(A) \tag{2.25}$$

şartlarını sağlayan bir $A^{\oplus} \in \mathbb{C}_n^n$ matrisine A matrisinin çekirdek inversi adı verilir (Baksalary and Trenkler, 2010).

Aşağıda çekirdek inversin çeşitli özellikleri tanımlanmıştır. Bu özellikler çekirdek invers ile bilinen çeşitli matris sınıfları arasındaki ilişkiyi ortaya koymada önemli rol oynamaktadır. Yukarıda belirtildiği gibi, Moore–Penrose invers ve grup invers tektir. Aynı özelliğin Çekirdek invers için de geçerli olduğu istenen bir durumdur.

Lemma 2.2 $A \in \mathbb{C}_n^n$ matrisi (2.21) şeklinde verilmiş olsun. Bu takdirde A matrisinin çekirdek inversi

$$A^{\oplus} = U\begin{pmatrix} (\Sigma K)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^* \tag{2.26}$$

şeklindedir (Baksalary and Trenkler, 2010).

İspat. Öncelikle (2.2) – (.223) ifadelerinden

$$P_A = U\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^* \tag{2.27}$$

eşitliğinin yazılabildiğini belirtelim. Şimdi, $B \in \mathbb{C}_n^n$ matrisinin $W \in \mathbb{C}_r^r$ ve $Z \in \mathbb{C}_{n-r}^{n-r}$ A matrisinin çekirdek inversi olmak üzere

$$B = U\begin{pmatrix} W & X \\ Y & Z \end{pmatrix} U^* \tag{2.28}$$

şeklinde parçalanabildiğini farz edelim. Doğrudan hesaplamayla kolayca gösterilebilir ki, Tanım 2.18 de ifade edilen (i) koşulunun sağlanması için gerek ve yeter şart $\Sigma KW + \Sigma LY = I_r$ ve $KX + LZ = 0$ olmasıdır. Öte yandan $\Re(A^{\oplus}) \subseteq \Re(A)$ bağıntısı denk olarak $P_A A^{\oplus} = A^{\oplus}$ şeklinde de ifade edilebildiğinden, Tanım 2.18 de verilen (ii) koşulunun sağlanması için gerek ve yeter şart $Y = 0,\ Z = 0$ olmasıdır. Dolayısıyla, $\Sigma KW = I_r$, $KX = 0$ elde edilir. Bu koşullardan ilki, K matrisinin nonsingüler olduğunu ikincisi ise $X = 0$ olduğunu gösterir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Lemma 2.2 den açıkça görülüyor ki, her A kare matrisi çekirdek inverse sahip değildir ve $A^{\oplus}$ nın varlığı için gerek ve yeter koşul (2.21) gösterimindeki K matrisinin nonsingüler olmasıdır. Daha önce belirtildiği gibi $r(K) = r$ koşulu A matrisinin indeksinin bir olmasına ve dolayısıyla A nın bir çekirdek matris olmasına eşdeğerdir. Bu gözlem aslında $A^{\oplus}$ ile ilgili olarak 'Çekirdek invers' teriminin kullanımına ilham kaynağı olmuştur.

Öte yandan $r(A^2) = r(A)$ koşulu $A^{\#}$ grup inversinin varlığı için gerek ve yeter şart olduğundan $A^{\oplus}$ Çekirdek inversinin grup invers ile çakışıp çakışmadığını sorgulamak doğaldır. Genel olarak bu durum doğru değildir. Şöyle ki,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

idempotent matrisi için $A^{\#} = A$ olmasına rağmen

$$A^{+} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix},$$

ve buradan da

$$A^{\oplus} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

olduğu görülebilir. Ayrıca, (2.24) ve (2.26) karşılaştırıldığında $A^{\oplus} = A^{\#}$ durumunun olması için gerek ve yeter koşul $L = 0$ olması yani, A nın bir EP matris olması olduğu sonucuna götürür. Aşağıda verilen üç teorem, bir A matrisinin $A^{\oplus}$ çekirdek inversinin çeşitli karakterizasyonlarını ortaya koymaktadır.

Teorem 2.21 $A \in \mathbb{C}_n^{CM}$ ve $m \in \mathbb{N}$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki eşitlikler gerçeklenir (Baksalary and Trenkler, 2010):

(i) $A^{\oplus} = A^{\#}P_A$,
(ii) $A^{\oplus} \in \mathbb{C}_n^{EP}$,
(iii) $(A^{\oplus})^{+} = AP_A$,
(iv) $(A^{\oplus})^{\oplus} = AP_A$,
(v) $A^{\oplus} \in A\{1,2\}$,
(vi) $(A^{\oplus})^2 A = A^{\#}$,
(vii) $(A^{\oplus})^m = (A^m)^{\oplus}$,
(viii) $A^{\oplus}A = A^{\#}A$.

İspat. (i) şıkkı, (2.24), (2.26) ve (2.27) iadelerinin doğrudan bir sonucudur. (2.26) dan

$$(A^{\oplus})^{+} = U \begin{pmatrix} \Sigma K & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^{*} \tag{2.29}$$

ve dolayısıyla $A^{\oplus}(A^{\oplus})^{+} = (A^{\oplus})^{\dagger}A^{\oplus} = P_A$ elde edilir ki bu da teoremin (ii) şıkkıdır. Bir sonraki koşul da (2.21), (2.22) ve (2.29) eşitliklerinden elde edildiği gibi doğrudan doğruya kurulur. Öte yandan teoremin (i) şıkkından $(A^{\oplus})^{\oplus} = (A^{\oplus})^{\#}P_{A^{\oplus}}$ olduğu görülür, burada kolaylıkla doğrulanabileceği gibi $(A^{\oplus})^{\#}$ (2.29) da verilen $(A^{\oplus})^{+}$ ile aynıdır ve dolayısıyla $P_{A^{\oplus}} = P_A$ ile aynı biçimdedir. Böylelikle (iv) koşulunun geçerliliği doğrudan görülür. (v) şıkkının ispatı teoremin (i) şartının $AA^{\oplus}A = AA^{\#}P_A A$ ve $A^{\oplus}AA^{\oplus} = A^{\#}P_A AA^{\#}P_A$ olmasını gerektirdiği gerçeğine dayanır. Bu eşitliklerin birincisinden $AA^{\oplus}A = AA^{\#}A = A$ olduğu ve ikincisinden $A^{\oplus}AA^{\oplus} = A^{\#}AA^{\#}P_A = A^{\oplus}$ olduğu elde edilir. Ayrıca (vi) koşulunu sağlamak için (2.21) ve (2.27) ifadelerinin kullanımıyla yapılan basit hesaplamalardan sonra

$$(A^{\oplus})^2 A = U\begin{pmatrix} (\Sigma K)^{-1} & (\Sigma K)^{-2}\Sigma L \\ 0 & 0 \end{pmatrix}U^* ,$$

elde edilir ki sağ taraftaki matrisin (2.24) te verilen $A^{\#}$ matrisinin başka bir formunun olmasına yol açtığı gözlemlenir. Son iki koşulun ispatları ise teoremin (i) şıkkına dayanmaktadır. (viii) koşulunun geçerliliği kolayca görülürken (vii) koşulunun ispatı daha içeriklidir. Öncelikle Teorem 2.1 in (i) şıkkından $(A^{\oplus})^m = (A^{\#}P_A)^m$ elde edilir. Bundan dolayı (2.24) ve (2.27) eşitlikleri kullanılarak

$$(A^{\oplus})^m = U\begin{pmatrix} (\Sigma K)^{-m} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}U^* \tag{2.30}$$

olduğu görülür. Öte yandan, $(A^m)^{\#} = (A^{\#})^m$ eşitliğinin belirlenen özelliği göze alındığında $(A^m)^{\oplus} = (A^{\#})^m P_{A^m}$ denklemi elde edilir. Bununla beraber A matrisinin indeksi bir olduğundan, $P_{A^m} = P_A$ yazılabilir. Bunun sonucu olarak $(A^m)^{\oplus} = (A^{\#})^m P_A$ yazılabilir. Buradan da $(A^m)^{\oplus}$ nin (2.30) daki matris ile aynı forma sahip olduğu gösterilmiş olur ve böylece de ispat tamamlanır.

Teorem 2.21 in (iii) şıkkından $A^{\oplus} = (A^2A^+)^+$ elde edilir ki bu da (i) şıkkında verilen Çekirdek invers için alternatif bir formüldür. Ayrıca, Teorem 2.21 ile ilgili gözlemler aşağıda verilmiştir. Bunlardan ilki, EP sizlik özelliği Lemma 2.1 de meydana gelen yegane özelliktir ki bu $A^{\oplus}$ nın da sahip olup olmadığına bakılmaksızın A nın sahip olduğu tek özelliğin EP-sizlik özelliğidir. Örneğin, $A^{\oplus}$ matrisinin r-potent, yani $(A^{\oplus})^r = A^{\oplus}, r \geq 2$ olması için gerek ve yeter şart A matrisinin r-potent olmasıdır. Özellik olarak eğer $A^{\oplus}$ bir izdüşüm ise, bu takdirde bir ortogonal izdüşüm olacaktır.

Tanım 2.15 in $AA^{\oplus}$ matrisinin $\mathfrak{R}(A)$ üzerindeki ortogonal izdüşüm olmasını istemesine rağmen, Teorem 2.21 in (viii) şıkkından, $A^{\oplus}A$ nın aynı zamanda idempotent olduğu ancak Hermityen olmasının gerekmediği de dikkate değerdir. Aslında $A^{\oplus}A$, $AA^{\#} = A^{\#}A$ ile çakışan $\mathfrak{R}(A)$ üzerine bir eğik izdüşümdür.

Aşağıdaki teorem, $A^{\oplus}$ matrisinin A matrisinin çeşitli dönüşümlerine eşit olması için gerek ve yeter koşulları ortaya koyar.

Teorem 2.22 $A \in \mathbb{C}_n^{CM}$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler gerçeklenir (Baksalary and Trenkler., 2010):

(i) $A^{\oplus} = 0 \Leftrightarrow A = 0$,
(ii) $A^{\oplus} = P_A \Leftrightarrow A \in \mathbb{C}_n^{P}$,
(iii) $A^{\oplus} = A^{+} \Leftrightarrow A \in \mathbb{C}_n^{EP}$,
(iv) $A^{\oplus} = A^{\#} \Leftrightarrow A \in \mathbb{C}_n^{EP}$,
(v) $A^{\oplus} = A\, A \in \mathbb{C}_n^{TM} \cap \mathbb{C}_n^{EP}$,
(vi) $A^{\oplus} = A^{*} \Leftrightarrow A \in \mathbb{C}_{n\times n}^{Pl} \cap \mathbb{C}_n^{EP}$.

İspat: (i) şıkkının gereklilik kısmını oluşturmak için, Teorem 2.21 in (i) şıkkından $A^{\oplus} = 0 \implies A^{\#}P_A = 0$ yazılabileceğine dikkat edelim. Sağ taraftaki ifadeyi A ile sağdan ve soldan çarparak $A = 0$ olduğu görülür. (i) şıkkının yeterlilik kısmı ise Tanım 2.18 (ii) koşulunun doğrudan bir sonucudur. Öte yandan (2.26) ve (2.27) ifadeleri ve Lemma 2.1 in (ii) şıkkının birleştirilmesiyle (ii) elde edilir. (2.23) ve (2.26) ifadeleri kullanılarak, $A^{\oplus} = A^{+}$ olması için gerek ve yeter şartın $L = 0$ ve $(\Sigma K)^{-1} = K^{*}\Sigma^{-1}$ olduğu gösterilebilir. Bununla birlikte, (2.22) eşitliğinin ışığı altında, $L = 0 \implies K^{*} = K^{-1}$ olduğu ve dolayısıyla bu ilişkilerin ikincisinin her zaman sağlandığı görülür. Benzer şekilde (iv) ifadesinin sol tarafındaki koşulun sağlanması için gerek ve yeter şart $L = 0$ ve $(\Sigma K)^{-1} = K^{-1}\Sigma^{-1}$ olmasıdır ki bu da yalnızca birinci koşula indirgenebilen bağlaç olması durumunda geçerlidir.

(2.21) ve (2.26) ifadelerinin kullanımıyla yapılan doğrudan hesaplamalar, $A^{\oplus} = A$ olması için gerek ve yeter şart $L = 0$ ve $(\Sigma K)^{-1} = \Sigma K$ iken $A^{\oplus} = A^{*}$ olması için gerek ve yeter şart $L = 0$ ve $(\Sigma K)^{-1} = K^{*}\Sigma$ olduğunu gösterir. Hem Σ ve hem de K matrislerinin nonsingüler olduğu gerçeğini kullanarak, birinci durumda $L = 0$ ın $(\Sigma K)^2 = I_r$ ile ve ikinci durumda ise $\Sigma = I_r$ ile birleştirileceği sonucuna varılır. Buradan, teoremin (v) ve (vi) şıklarındaki ifadeler Lemma 2.1 den kolaylıkla elde edilebilir ve böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 2.22 nin (v) şıkkından $A^{\oplus} = A$ olmasının A nın öz değerlerinin {-1, 0, 1} kümesine ait olduğunu bu ise herhangi bir tripotent matrisin özdeğerlerinin kısıtlı olduğunu gösterir. Bu durumla ilgili bir başka gözlem ise bir matrisin tripotent olması için gerek ve yeter şart iki ayrık idempotent matrisin farkı olarak ifade edilebilmesidir. Sonuç olarak söylenebilir ki $A^{\oplus} = A$ olması için gerek ve yeter şart $A \in \mathbb{C}_n^{EP}$ olması ve $A = P_1 - P_2$ olacak şekilde şekilde $P_1 P_2 = 0 = P_2 P_1$ şartlarını sağlayan $P_1, P_2 \in \mathbb{C}_n^{P}$ matrislerinin mevcut olmasıdır.

$A^{\oplus}$ yı içeren $A \in \mathbb{C}_n^{EP}$ matrisinin iki karakterizasyonu Teorem 2.22 de verildiği gibidir. Diğer sonuçlar aşağıdaki teoremde belirlenmiştir.

Teorem 2.23 $A \in \mathbb{C}_n^{CM}$ matrisi verilmiş olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler birbirine eşdeğerdir (Baksalary and Trenkler., 2010):

(i) $A \in \mathbb{C}_n^{EP}$,
(ii) $(A^{\oplus})^{\oplus} = A$,
(iii) $A^{\oplus} A = A A^{\oplus}$,
(iv) $(A^{+})^{\oplus} = A$,
(v) $(A^{\oplus})^{+} = (A^{+})^{\oplus}$.

İspat: İspat için (ii)–(v) koşullarının her birinin $L = 0$ ifadesine eşdeğer olduğunu göstermek yeterlidir. Teorem 2.21 in (iv) şıkkı göz önüne alındığında, teoremin (ii) koşulunun $AP_A = A$ olarak ifade edilebildiği görülür. Bu nedenle $(A^{\oplus})^{\oplus} = A \iff L = 0$ denkliği açıktır. Açıkça doğrulanabileceği gibi, (i)⟺(iii) kısmını ispatlamak için, $A^{\oplus} A = A A^{\oplus} \iff (\Sigma K)^{-1} \Sigma L = 0$ olduğuna dikkat edilmelidir. Bu durumda Teorem 2.1 in (i) şıkkının yeniden kullanılmasıyla $(A^{+})^{\oplus} = (A^{+})^{\#} P_{A^{+}}$ olduğu gösterilebilir. Öte yandan doğrudan hesaplamayla

$$(A^{+})^{\#} = U \begin{pmatrix} \Sigma (K^{*})^{-1} & 0 \\ L^{*} (K^{*})^{-1} \Sigma (K^{*})^{-1} & 0 \end{pmatrix} U^{*}$$

ve

$$P_{A^{+}} = U \begin{pmatrix} K^{*}K & K^{*}L \\ L^{*}K & L^{*}L \end{pmatrix} U^{*}$$

olduğu gösterilebilir. Buradan da

$$(A^{+})^{\oplus} = U \begin{pmatrix} \Sigma K & \Sigma L \\ L^{*} (K^{*})^{-1} \Sigma K & L^{*} (K^{*})^{-1} \Sigma L \end{pmatrix} U^{*} \tag{2.31}$$

elde edilir. Diğer taraftan (2.21) ve (2.31) ifadelerinin karşılaştırılması bizi $L^{*}(K^{*})^{-1}\Sigma K = 0$ ve $L^{*}(K^{*})^{-1}\Sigma L$ olması için gerek ve yeter şartın $(A^{+})^{\oplus} = A$ olduğu sonucuna götürür. Σ ve K matrislerinin nonsingülerliği dikkate alındığında bu koşullardan ilkinin $L = 0$ a denk olduğu görülür. Böylece teoremin (i)⟺ (iv) denkliği ispatlanmış olur. Aslında (2.22) ve (2.31) den direkt olarak görülmektedir ki, $(A^{\oplus})^{\oplus} = A \iff L = 0$ denkliğinin geçerliliği ispatı tamamlayan bir gerçektir.

Teorem 2.23 e yapılan bir yorum da şudur ki, (2.23), (2.24) ve (2.26) eşitliklerinden $A \in \mathbb{C}_n^{EP} \iff A^{\oplus} = A^{\#} \iff A^{\oplus} = A^{+}$ olduğunun elde edilmesidir. Bu denkliklere $A \in \mathbb{C}_n^{EP} \iff A^{\#} = A^{+}$ bilinen sonucunun bir karşılığı olarak bakılabilir.

Aşağıdaki teorem, iki ortogonal izdüşümün çarpımının Çekirdek inversi için bir formül ortaya koymaktadır.

Teorem 2.24 $A, B \in \mathbb{C}_n^{OP}$ matrisleri verilmiş olsun. Bu duruma $(AB)^{\oplus} = (ABA)^{+}$ dir (Baksalary and Trenkler., 2010).

İspat: A ve B sırasıyla (2.21) ve (2.28) genel şekillerinde verilmiş olsun. Bu takdirde $A, B \in \mathbb{C}_n^{OP}$ olduğundan

$$A = U\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}U^* \quad \text{ve } B = U\begin{pmatrix} W & X \\ X^* & Z \end{pmatrix}U^* \tag{2.32}$$

ifadeleri yazılabilir. Burada (2.32) nin sol taraftaki ifade Lemma 2.1' in (iii) şıkkından elde edilir ve (2.32) nin sağ tarafındaki W ve Z matrisleri Hermityen matrisler, yani $W^* = W$ ve $Z^* = Z$ dir. Öte yandan $B^2 = B$ olduğundan

$$W = W^2 + XX^* \tag{2.33}$$

elde edilir. Ayrıca (2.33) deki eşitlik (W, X) bir sütun parçalanmış matris olmak üzere

$$rk(W) = rk(WW^* + XX^*) = rk(W, X)$$

eşitliğini temsil eder. Bunun sonucu olarak

$$\Re(X) \subseteq \Re(W) \tag{2.34}$$

içermesi yazılabilir. (2.32) ifadelerinin bir sonucu olarak

$$AB = U\begin{pmatrix} W & X \\ 0 & 0 \end{pmatrix}U^* \tag{2.35}$$

eşitliği yazılabilir. Bu durumda (2.35) ifadesi sondan A matrisi ile çarpıldığında

$$(ABA)^{+} = U\begin{pmatrix} W^{+} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}U^*$$

sonucuna elde edilir. Öte yandan, (2.33) ve (2.34) ifadelerinin ışığı altında

$$(AB)^{+} = U\begin{pmatrix} P_W & 0 \\ X^*W^{+} & 0 \end{pmatrix}U^* \quad \text{ve} \quad (AB)^{\#} = U\begin{pmatrix} W^{+} & (W^{+})^2X \\ 0 & 0 \end{pmatrix}U^*$$

yazılabilir, burada

$$P_{AB} = U\begin{pmatrix} P_W & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}U^*$$

dir. Öte yandan $(AB)^{\oplus} = (AB)^{\#}P_{AB}$ formülü nedeniyle

$$(AB)^{\oplus} = U\begin{pmatrix} W^+ & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}U^*$$

eşitliğine ulaşılır ki bunun sonucunda da ispat tamamlanmış olur.

Şimdi Teorem 2.21 (i) ve (iii) deki $A^{\oplus}$ nın iki gösterimi hakkında daha ilginç sonuçlar verilecektir.

Sonuç 2.1 $A \in \mathbb{C}_n^{CM}$ matrisi (2.21) formuna sahip r ranklı bir matris olsun. X ve Y, A matrisinin iki genelleştirilmiş inversi olsun. O halde aşağıdaki koşullar eşdeğerdir (Baksalary and Trenkler., 2010):

(i) $A^{\oplus} = XAY$,

(ii) $\Re(XA) \subseteq \Re(A)$,

(iii) $X_{12} \in \mathbb{C}_{r,(n-r)}$, $X_{22}, Y_{22} \in \mathbb{C}_{(n-r),(n-r)}$ ve $Y_{21} \in \mathbb{C}_{(n-r),r}$ olmak üzere X ve Y matrisleri sırasıyla

$$X = U\begin{pmatrix} (\Sigma K)^{-1} & X_{12} \\ 0 & X_{22} \end{pmatrix}U^* \text{ ve } Y = U\begin{pmatrix} (\Sigma K)^{-1} - K^{-1}LY_{21} & -K^{-1}LY_{22} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix} \quad (2.36)$$

şeklindedir.

Teorem 2.25 $A \in \mathbb{C}_n^{CM}$ matrisi (2.21) formuna sahip r ranklı bir matris olsun. Z, A matrisinin bir genelleştirilmiş inversi olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktir (Baksalary and Trenkler., 2010):

(i) $A^{\oplus} = (A^2Z)^+$,

(ii) $Z \in A\{1,3\}$,

(iii) $Z_{21} \in \mathbb{C}_{(n-r),r}$ ve $Z_{22} \in \mathbb{C}_{(n-r),(n-r)}$ olmak üzere Z matrisi

$$Z = U\begin{pmatrix} (\Sigma K)^{-1} - K^{-1}LZ_{21} & -K^{-1}LZ_{22} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix}U^* \quad (2.37)$$

olarak yazılabilir.

İspat: (ii) ve (iii) nin denkliği Sonuç 2.1 de zaten verildiğinden burada (i) ve (iii) nin denk olduğunu gösterelim. $A^{\oplus} = (A^2Z)^+$ koşulu

$$(A^{\oplus})^+ = (A^2Z),$$

eşitliğine denk olduğundan $A^{\oplus}$ matrisinin Moore-Penrose inversi

$$(A^{\oplus})^{+} = U \begin{pmatrix} \Sigma K & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^{*}$$

olarak yazılabilir. Öte yandan Z matrisi A nın bir genelleştirilmiş inversi olduğundan,

$$Z = U \begin{pmatrix} (\Sigma K)^{-1} - K^{-1} L Z_{21} & Z_{21} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix} U^{*}.$$

şeklindedir. Bu durumda $A^2 Z$ çarpımı

$$A^2 Z = U \begin{pmatrix} \Sigma K & \Sigma L \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Sigma K & \Sigma L \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\Sigma K)^{-1} - K^{-1} L Z_{21} & Z_{21} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix} U^{*}$$

$$= U \begin{pmatrix} \Sigma K & \Sigma K(\Sigma K Z_{12} + \Sigma L Z_{22} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^{*}$$

olarak yazılabilir ve böylece $A^{\oplus} = (A^2 Z)^{+}$ eşitliği

$$\begin{pmatrix} \Sigma K & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Sigma K & \Sigma K(\Sigma K Z_{12} + \Sigma L Z_{22} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

eşitliğine denktir. Öte yandan bu eşitliğin sağlanabilmesi için gerek ve yeter koşul $Z_{12} = -(\Sigma K)^{-1}(\Sigma L Z_{22}) = -K^{-1} L Z_{22}$ olmasıdır. Böylece (i) ve (iii) nün denkliği ispatlanmış olur ve ispat tamamlanır.

Tanım 2.16 $A, B \in \mathbb{C}_n^{CM}$ matrisleri verilmiş olsun. Eğer $A^{\oplus} A = A^{\oplus} B$ ve $AA^{\oplus} = BA^{\oplus}$ eşitlikleri sağlanıyorsa, bu takdirde A matrisi B matrisinden çekirdek kısmi sıralama bağıntısına göre daha küçüktür denir ve $A \leq^{\oplus} B$ ile gösterilir.

Lemma 2.3 $A, B \in \mathbb{C}_n^{CM}$ ve A matrisi (2.21) biçiminde verilmiş olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler birbirine denktir (Baksalary and Trenkler., 2010):

(i) $A \leq^{\oplus} B$ dir.

(ii) $Z \in \mathbb{C}_{n-r}^{CM}$ olmak üzere $B = U \begin{pmatrix} \Sigma K & \Sigma L \\ 0 & Z \end{pmatrix} U^{*}$ dir.

(iii) $A^{+} A = A^{+} B$ ve $A^2 = BA$ dir.

Sonuç 2.2 $A, B \in \mathbb{C}_n^{CM}$ olsun ve $A \leq^{\oplus} B$ olduğunu varsayalım. Bu takdirde aşağıdaki eşitlikler sağlanır (Baksalary and Trenkler., 2010):

(i) $BA^{\oplus} B = A$,

(ii) $B^{\oplus} A B^{\oplus} = A^{\oplus}$,

(iii) $B^{\oplus} B A^{\oplus} = A^{\oplus} B B^{\oplus} = A^{\oplus}$

Sonuç 2.3 $A \in \mathbb{C}_n^{CM}$ matrisi r ranklı bir matris olsun. Bu takdirde

(i) $B \in \mathbb{C}_n^{CM}$ olması için için gerek ve yeter koşul $BA^{\oplus}B = A$ olmasıdır, burada $Z \in \mathbb{C}_{n-r}^{CM}$ ve $T \in \mathbb{C}_{r,r}$ ve $T^2 = I_r$ olmak üzere

$$B = U\begin{pmatrix} T\Sigma K & T\Sigma L \\ 0 & 0 \end{pmatrix}U^* \tag{2.38}$$

dir.

(ii) $B \in \mathbb{C}_n^{CM}$ olması için gerek ve yeter koşul burada $Z \in \mathbb{C}_{n-r}^{CM}$, $V \in \mathbb{C}_{n-r}^{r}$, $T \in \mathbb{C}_r^r$ ve $T^2 = I_r$ olmak üzere $B^{\oplus}AB^{\oplus} = A^{\oplus}$ olmasıdır, burada

$$B = U\begin{pmatrix} T\Sigma K & T\Sigma[LZ^{\oplus}\, Z + V(I_{n-r} - Z^{\oplus}\, Z] \\ 0 & Z \end{pmatrix} \tag{2.39}$$

dir.

(iii) $B \in \mathbb{C}_n^{CM}$ olması için gerek ve yeter koşul $\mathfrak{R}(A) \subseteq \mathfrak{R}(B)$ olmak üzere $B^{\oplus}BA^{\oplus} = A^{\oplus}BB^{\oplus} = A^{\oplus}$ olmasıdır (Baksalary and Trenkler., 2010).

Sonuç 2.4 $A, B \in \mathbb{C}_n^{CM}$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadelerler eşdeğerdir (Baksalary and Trenkler., 2010):

(a) $A^{\oplus}BA^{\oplus} = A^{\oplus}$, yani $A^{\oplus}$, B matrisinin bir dış inversidir.

(b) $A^{\dagger}BA^{\#} = A^{\oplus}$

Sonuç 2.5 (i) $A \in \mathbb{C}_n^{CM}$ matrisi r ranklı bir matris olsun. Bu takdirde $B \in \mathbb{C}_n^n$ matrisinin $A^{\oplus}BA^{\oplus} = A^{\oplus}$ eşitliğini sağlaması için gerek ve yeter koşul B matrisinin $B_{12} \in \mathbb{C}_{r,(n-r)}$, $B_{21} \in \mathbb{C}_{(n-r),r}$ ve $B_{22} \in \mathbb{C}_{(n-r),(n-r)}$ keyfi matrisler olmak üzere

$$B = U\begin{pmatrix} \Sigma K & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}U^* \tag{2.40}$$

formunda olmasıdır.

(ii) $r(A) = r$ olmak üzere $B \in \mathbb{C}_n^n$ ve $A \in \mathbb{C}_n^{CM}$ matrislerinin $A^{\dagger}BA^{\#} = A^{\oplus}$ eşitliğini sağlaması için gerek ve yeter şart A nın ranj-Hermityen ve B matrisinin $B_{12} \in \mathbb{C}_{r,(n-r)}$, $B_{21} \in \mathbb{C}_{(n-r),r}$ ve $B_{22} \in \mathbb{C}_{(n-r),(n-r)}$ matrisleri keyfi matrisler olmak üzere

$$B = U\begin{pmatrix} \Sigma K & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}U^* \tag{2.41}$$

formunda olmasıdır.

3. MATRİSLERDE ÇEKİRDEK-EP İNVERS GÖSTERİMLERİ

3.1 Bir Matrisin Çekirdek-EP İnversi

Bir önceki kısımda ifade edildiği gibi $A \in \mathbb{C}_n^n$ matrisi için $P_A = AA^+$ olmak üzere

$$AX = P_A \text{ ve } \Re(X) \subseteq \Re(A)$$

koşullarını sağlayan bir X matrisine $A \in \mathbb{C}_n^n$ matrisinin bir çekirdek inversi adı verilir. Ayrıca $A \in \mathbb{C}_n^n$ matrisi için eğer $\Re(A) = \Re(A^*)$ eşitliği sağlanıyorsa bu takdirde A matrisine bir EP- matris adı verilir ve bu koşulu sağlayan tüm matrislerin kümesi $\mathbb{C}_n^{EP}$ ile gösterilir. Burada $\Re(A^*) = \mathcal{C}(A)$ yani A matrisinin satır uzayı olduğunu belirtelim. $\mathbb{C}_n^n$ kümesi üzerinde tanımlı ve indeksi 1 olan matrislerin kümesi $\mathbb{C}_n^{CM}$ ile gösterilir, yani

$$\mathbb{C}_n^{CM} = \{ A \in \mathbb{C}_n^n : r(A^2) = r(A)\}$$

dir. Bu durumda eğer $A \in \mathbb{C}_n^{CM}$ ise A matrisine çekirdek matris ya da grup matris adı verilir. Ayrıca $A \in \mathbb{C}_n^{CM}$ olmak şartıyla her A matrisinin çekirdek inversinin mevcut ve tek olduğunu söyleyebiliriz.

Bu kısımda çekirdek inversin bir genelleştirmesi olan bir başka genelleştirilmiş invers kavramı ele alınacaktır. Bununla ilgili olarak öncelikle belirtelim ki bu kısımda ele alınacak matrisler $A \in \mathbb{C}_n^n$ ve $ind(A) = k$ olacak şekilde matrislerdir. aşağıdaki tanım verilebilir.

Tanım 3.1 $A \in \mathbb{C}_n^n$ matrisi $ind(A) = k$ özelliğini sağlasın. Bu takdirde $GAG = G$ olmak üzere

$$\Re(X) = \mathcal{C}(X) = \Re(A^k) \qquad (3.1a)$$

şartını sağlayan bir G matrisine $A \in \mathbb{C}_n^n$ matrisinin bir çekirdek-EP inversi denir ve $X = A^{\circledcirc}$ ile gösterilir. Bu durumda eğer $\mathcal{C}(X) = \Re(X^*)$ eşitliği dikkate alınırsa (3.1a) ifadesinin

$$\Re(X) = \Re(X^*) = \Re(A^k) \qquad (3.1b)$$

olarak da yazılabileceği görülür.

Eğer (3.1a) ifadesinde $\Re(A^k)$ ile $\mathcal{C}(A^k) = \Re((A^*)^k)$ yer değiştirirse bir kare matrisin yıldız-çekirdek-EP invers tanımı verilebilir.

Tanım 3.2 $A \in \mathbb{C}_n^n$ matrisi $ind(A) = k$ özelliğini sağlasın. Bu takdirde $XAX = X$ olmak üzere

$$\mathfrak{R}(X) = \mathcal{C}(X^*) = \mathcal{C}(A^k) \tag{3.2}$$

koşulunu sağlayan bir X matrisine $A \in \mathbb{C}_n^n$ matrisinin bir yıldız-çekirdek-EP inversi adı verilir.

Şimdi aşağıdaki Lemmayı verebiliriz.

Lemma 3.1 $A \in \mathbb{C}_n^n$ matrisi $ind(A) = k$ özelliğini sağlasın. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktir:

(i) X matrisi A matrisinin bir çekirdek-EP inversidir.

(ii) $XAX = X$, $(AX)^* = AX$, $XA^{t+1} = A^t$, $\mathfrak{R}(X) \subseteq \mathfrak{R}(A^t)$ dir, burada t bir pozitif tam sayısıdır.

İspat. (i) $\Longrightarrow$ (ii): (i) den X matrisi bir dış invers olup

$$\mathfrak{R}(X) = \mathcal{C}(X^*) = \mathfrak{R}(A^k) \tag{3.2}$$

olduğu görülür. Öte yandan XA matris çarpımı $\mathfrak{R}(X) = \mathfrak{R}(A^k)$ üzerinde bir eğik izdüşüm olduğundan $XA^{k+1} = XAA^k = A^k$ yazılabilir. Dolayısıyla $k = t$ alınabilir. Benzer şekilde X matrisi A matrisinin bir dış inversi olduğundan AX bir idempotent matris olup $\mathcal{C}(AX) = \mathcal{C}(X) = \mathfrak{R}(A^k)$ dir. Böylece (3.2) den $\mathfrak{R}(AX) = \mathfrak{R}(A^{k+1}) = \mathfrak{R}(A^k)$ olduğu görülür. Bu nedenle AX bir EP matris olacaktır. Dolayısıyla idempotent ve EP olduğundan $(AX)^* = AX$ yazılabilir, bu ise (i) $\Longrightarrow$ (ii) ispatını tamamlar.

(ii)$\Longrightarrow$(i): X matrisi (ii) de verilen şartları sağlasın. Bu durumda $XA^{t+1} = A^t$ olduğundan $r(XA^{t+1}) = r(A^t)$ ve $\mathfrak{R}(A^t) \subseteq \mathfrak{R}(X)$ yazılabilir. Aksine olarak $t \geq k$ ve $\mathfrak{R}(A^t) = \mathfrak{R}(A^k)$ alalım. Bu durumda $\mathfrak{R}(X) \subseteq \mathfrak{R}(A^t)$ ifadesi

$$\mathfrak{R}(X) = \mathfrak{R}(A^k) \tag{3.3}$$

eşitliğini sağlar. Öte yandan $XAX = X$ ve $(AX)^* = AX$ olduğundan AX matrisi $\mathcal{C}(X) = \mathcal{C}(AX) = \mathfrak{R}(AX)$ olacak şekilde bir eğik izdüşümdür. Bu durumda (3.3) den

$$\mathcal{C}(X) = \mathcal{C}(AX) = \mathfrak{R}(AX) = \mathfrak{R}(A^k) \tag{3.4}$$

olduğu görülür. Bu nedenle X bir EP matrisi olup Gnin satır ve sütun uzayları $\mathfrak{R}(A^k)$ olarak aynıdır. Böylece (ii)$\Longrightarrow$(i) olduğu görülür ve ispat tamamlanır.

Çekirdek-EP inversin mevcut olup olmadığı ile ilgili soruya aşağıdaki Lemma kullanılarak cevap verilebilir.

Lemma 3.2 $\mathbb{F}$ keyfi bir skaler cisim olmak üzere A, P, Q matrisleri $\mathbb{F}$ cismi üzerinden uygun boyutta matrisler olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler gerçeklenir:

(i) Öyle bir $O \in \{A^{=}\}$ matrisi mevcuttur ki

$$\Re(O) \subseteq \Re(Q), \mathcal{C}(O) \subset \mathcal{C}(P) \text{ ve } r(O) = r(PAQ) \qquad (3.5)$$

dir.

(ii) (i) deki tüm dış inverslerin sınıfı

$$\{O \in \{A^{=}\} : \Re(O) \subseteq \Re(Q),\ \mathcal{C}(O) \subset \mathcal{C}(P)\} = \{Q(PAQ)^{=}\mathrm{P}\} \qquad (3.6)$$

ile verilir.

(iii) (i) deki tüm dış inverslerin sınıfı

$$\{O \in \{A^{=}\} : \Re(O) \subseteq \Re(Q), \mathcal{C}(O) \subset \mathcal{C}(P)\}$$

$$= \{Q_1(P_1AQ_1)^{=}P_1 :\ \Re(Q_1) \subseteq \Re(Q), \mathcal{C}(P_1) \subset \mathcal{C}(P)\} \qquad (3.7)$$

ile verilir.

(iv) Eğer PAQ sıfır değilse bu takdirde $\Re(O) = \Re(Q)$ ve $\mathcal{C}(O) = \mathcal{C}(P)$ olacak şekilde bir O dış inversinin tek türlü olarak mevcut olması için gerek ve yeter şart ve $r(P) = r(Q) = r(PAQ)$ olmasıdır. Bu durumda O dış inversi PAQ nun keyfi seçilmiş $(PAQ)_r^-$ yansımalı g-inversi ve $(PAQ)^-$ g-inversi için

$$O = Q(PAQ)_r^- P = Q(PAQ)^- P \qquad (3.8)$$

ile verilir.

Teorem 3.1 $ind(A) = k$ olmak üzere $A \in \mathbb{C}_n^n$ kare matrisi verilmiş olsun. Bu takdirde Çekirdek-EP inversin mevcut olması için gerek ve yeter şart $r\left(A^{*k}A^{k+1}\right) = r(A^k)$ olmasıdır. Ayrıca mevcut olması durumunda çekirdek-EP invers tektir ve

$$A^{\circledcirc} = A^k((A^*)^k A^{k+1})^-(A^*)^k \qquad (3.9)$$

ile verilir.

İspat. Mevcut olduğunda A nın çekirdek-EP inversinin, satır ve sütun uzayları aynı ve $\Re A^k)$ ye eşit olmak üzere, A nın bir dış inversi olduğunu hatırlatalım. Bu durumda

$\mathcal{C}(A^{*k}) = \Re(A^k)$ olduğu dikkate alınarak Lemma 3.2 (iv) den $P = A^{*k}$ ve $Q = A^k$ alınarak teorem kolayca elde edilir ve böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.1 i açıklamak için aşağıdaki örneği göz önüne alalım.

Örnek 3.1 ℝ kümesi üzerinde tanımlı

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

matrisini göz önüne alalım. Burada $r(A) = 2$ olduğu kolayca görülebilir. Bu durumda

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ ve } A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 10 & 6 & 2 \\ 10 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

olup $r(A^2) = r(A^3) = 1$ ve dolayısıyla $ind(A) = 2$ elde edilir. Ayrıca $r\left(A^{*2}A^3\right) = r(A^2) = 1$ olup Teorem 3.1 in şartları sağlanır. Buradan

$$\left(A^{*2}A^3\right)^- = \begin{pmatrix} 1/100 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

olduğu ve (3.9) da verilen formül kullanılarak A matrisinin çekirdek-EP inversinin

$$A^{\circledcirc} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$

şeklinde olduğu görülür.

Hatırlatma 3.1 Skaler cisim yerine reel sayılar ya da kompleks sayılar cismi alındığında $ind(A) = k$ olan herhangi bir A matrisi için $r\left(A^{*k}A^{k+1}\right) = r(A^k)$ eşitliği $r\left(A^{*k}A^k\right) = r(A^k)$ eşitliği olarak alınabilir. Dolayısıyla reel sayılar ya da kompleks sayılar cismi üzerindeki bir kare matris için tıpkı Drazin invers de olduğu gibi $A^{\circledcirc}$ çekirdek-EP invers de daima mevcut ve tektir.

Ayrıca eğer A^k bir EP matris ve $G = A^{\circledcirc}$ mevcut ise bu takdirde hem AG ve hem de GA aynı satır ve sütun uzaylarına sahip idempotent matrisle olacaktır. Bu nedenle $GA = AG$ olup (3.1) şartı sağlanır. Dolayısıyla bu durumda çekirdek-EP invers Drazin invers ile aynı olacaktır. Öte yandan indeksi 1 olan her kare matrisin bir grup inverse sahip olduğu bilinmektedir.

Hatırlatma 3.2 Eğer A matrisi 1 indeksli ve $G = A^{\circledcirc}$ ise bu takdirde $GA^2 = A$ olup G matrisi bir çekirdek matris ile bir nilpotent matrisin toplamı olarak $G = N + M$ olarak yazılabilir burada N bir çekirdek matris ve M bir nilpotent matris olup $MN = NM = 0$ dir. Bu ise AG ve GA matrislerinin idempotent matrisler olup $r(G) = r(A)$ eşitliğinin sağlandığını gösterir. Bu nedenle G matrisi $AGA = A$ şartını da sağlar.

3.2 Çekirdek-EP İnversin Ayrışımı

Kısım 2.3 de ifade edildiği gibi rankı r olan her $A \in \mathbb{C}_n^n$ matrisi $U \in \mathbb{C}_n^n$ uniter matris olmak üzere,

$$A = U\begin{pmatrix} \Sigma K & \Sigma L \\ 0 & 0 \end{pmatrix}U^* \tag{3.10}$$

biçiminde yazılabilir, burada $\Sigma = \text{köş}\{\sigma_1 I_{r_1} \ldots\ldots \sigma_t I_{r_t}\}$ matrisi A matrisinin singüler değerlerinden oluşan köşegen matris, $\sigma_1 > \sigma_2 > \cdots > \sigma_t > 0$, $r_1 + r_2 + \cdots + r_t = r$ olmak üzere $K \in \mathbb{C}_{r,r}$ ve $L \in \mathbb{C}_{r,n-r}$ matrisleri

$$KK^* + LL^* = I_r$$

eşitliğini sağlar. Bu durumda Baksalary and Trenkler (2010) $A \in \mathbb{C}_n^n$ matrisinin çekirdek inversinin

$$A^{\oplus} = U\begin{pmatrix} (\Sigma K)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}U^*$$

şeklinde olduğunu göstermişlerdir.

Bu kısımda çekirdek-EP ayrışımı adı verilen yeni bir ayrışım vererek bunun bazı özellikleri ortaya konulacaktır. Bu amaçla $A \in \mathbb{C}_n^n$ matrisi için $ind(A) = k$ olsun. Bu takdirde $A \in \mathbb{C}_n^n$ matrisi $A_1 \in \mathbb{C}_n^{CM}$, $A_2 = 0$ ve $A_1A_2 = A_2A_1 = 0$ olmak üzere $A = A_1 + A_2$ şeklinde ayrışabilir. Bu ayrışım literatürde çekirdek-nilpotent ayrışımı olarak adlandırılır (bkz. Wang, 2016). Şimdi aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.2 (Çekirdek-EP Ayrışımı) $A \in \mathbb{C}_n^n$ matrisi verilsin ve $ind(A) = k$ olsun. Bu takdirde

(i) $A_1 \in \mathbb{C}_n^{CM}$,

(ii) $A_2^k = 0$,

(iii) $A_1^*A_2 = A_2A_1 = 0$,

olmak üzere $A \in \mathbb{C}_n^n$ matrisi A_1 ve A_2 matrislerinin toplamı şeklinde $A = A_1 + A_2$ formunda yazılabilir. Burada A_1 ve A_2 matrislerinden biri veya her ikisi de sıfır matrisi olabilir (Wang, 2016).

İspat. $A \in \mathbb{C}_n^n$ olsun. Bu durumda Schur ayrışımına göre U^*AU bir üst üçgensel matris olacak şekilde bir $U \in \mathbb{C}_n^n$ üniter matrisi mevcuttur. Gerçekten üst üçgensel matrisin esas köşegen elemanları A matrisinin özdeğerleri olup ilk özdeğerin sıfırdan farklı olduğu kabul edilebilir. Bu nedenle T_1 üst üçgensel ve nonsingüler, T_3 üst üçgensel ve esas köşegeni sıfır olmak üzere A matrisi

$$A = U\begin{pmatrix} T_1 & T_2 \\ 0 & T_3 \end{pmatrix}U^*$$

şeklinde yazılabilir. Bu durumda A_1 ve A_2 matrisleri

$$A_1 = U\begin{pmatrix} T_1 & T_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}U^* \text{ ve } A_2 = U\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & T_3 \end{pmatrix}U^*$$

olarak alınırsa istenilen şartlar sağlanır.

Teorem 3.3 $A \in \mathbb{C}_n^n$ matrisinin çekirdek-EP ayrışımı Teorem 3.2 deki gibi verilmiş olsun. Bu takdirde T nonsingüler, N nilpotent olmak üzere

$$A_1 = U\begin{pmatrix} T & S \\ 0 & 0 \end{pmatrix}U^* \text{ ve } A_2 = U\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix}U^* \tag{3.11}$$

olacak şekilde bir $U \in \mathbb{C}_n^n$ üniter matrisi mevcuttur (Wang, 2016).

Bu durumda (3.11) ifadesi ve $A = A_1 + A_2$ eşitliğinden

$$A^k = U\begin{pmatrix} T^k & \tilde{S} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}U^*,$$

$$\tilde{S} = \sum_{i=0}^{k-1} T^i S N^{k-i}$$

$$A^k(A^k)^+ = U\begin{pmatrix} I_{r(A^k)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}U^*$$

olduğu görülür. Böylece aşağıdaki sonuç verilebilir.

Teorem 3.4 $\in \mathbb{C}_n^n$ matrisi için $ind(A) = k$ ve A matrisinin çekirdek-EP ayrışımı Teorem 3.2 deki gibi verilmiş olsun. Bu takdirde

$$A_1 = A^k(A^k)^+A \text{ ve } A_2 = A - A^k(A^k)^+A \tag{3.12}$$

olacaktır (Wang, 2016).

Teorem 3.5 Verilen bir matrisin çekirdek-EP ayrışımı tektir.

İspat. A_1 çekirdek tersinir bir matris ve A_2 nilpotent bir matris olmak üzere $A = A_1 + A_2$ ifadesi $A \in \mathbb{C}_n^n$ matrisinin çekirdek-EP ayrışımı olsun. Ayrıca A_1 ve A_2 matrisleri (3.12) deki gibi olsun. üzere $A = B_1 + B_2$ A matrisinin başka bir çekirdek-EP ayrışımı olsun. Bu takdirde $A^k = \sum_{i=0}^k B_1^i B_2^{k-i}$ yazılabilir. $B_1^* B_2 = 0$ ve $B_2^k = 0$ kullanılarak $(A^k)^* B_2 = 0$ olduğu elde edilir. Buradan da $(A^k)^+ B_2 = 0$ yazılabilir. Benzer şekilde $B_2 B_1 = 0$ ve $B_1 \in \mathbb{C}_n^{CM}$ olduğu kullanılarak $A^k B_1 (B_1^k)^\# = B_1$ olduğu görülebilir. Böylece $A^k (A^k)^+ B_1 = A^k (A^k)^+ A^k B_1 (B_1^k)^\# = A^k B_1 (B_1^k)^\# = B_1$ ve dolayısıyla

$$\begin{aligned} B_1 - A_1 &= B_1 - A^k (A^k)^+ A \\ &= B_1 - A^k (A^k)^+ B_1 - A^k (A^k)^+ B_2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

olduğu görülür. Yani $B_1 = A_1$ dir. Bu nedenle A nın çekirdek-EP ayrışımı tektir.

Teorem 3.6 $A \in \mathbb{C}_n^n$ matrisi için $ind(A) = k$ ve A matrisinin çekirdek-EP ayrışımı Teorem 3.2 deki gibi verilmiş olsun. Bu takdirde $A^{\circledcirc} = A_1^{\oplus}$ dir. Ayrıca eğer A_1 matrisi (3.11) deki ayrışıma sahip ise

$$A^{\circledcirc} = U \begin{pmatrix} T^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^* \tag{3.13}$$

olacaktır(Wang, 2016).

İspat. A_1 matrisi (3.11) deki ayrışıma sahip olsun. Bu takdirde

$$A_1^{\oplus} = U \begin{pmatrix} T^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^*$$

olacaktır. Şimdi $\hat{T}$ keyfi bir matris olmak üzere

$$A^k = U \begin{pmatrix} T^k & \hat{T} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^*$$

yazalım. Bu durumda kolayca gösterilebilir ki $\mathfrak{R}({A_1}^{\oplus}) \subseteq \mathfrak{R}(A^k)$ olup

$$A_1^{\oplus} A^{k+1} = U \begin{pmatrix} T^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T^{k+1} & T\hat{T} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^* = U \begin{pmatrix} T^k & \hat{T} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^* = A^k,$$

$$A_1^{\oplus} A A_1^{\oplus} = U \begin{pmatrix} T^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T & S \\ 0 & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^* = U \begin{pmatrix} T^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^* = A_1^{\oplus},$$

$$(AA_1^{\oplus})^* = \left(U\begin{pmatrix} T & S \\ 0 & N \end{pmatrix}\begin{pmatrix} T^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}U^*\right)^* = \left(U\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}U^*\right)^* = AA_1^{\oplus}$$

eşitlikleri elde edilir. Bu durumda teorem 3.3 uygulanırsa

$A^{\circledcirc} = A_1^{\oplus}$ olduğu görülür. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 3.1 $A \in \mathbb{C}_n^n$ matrisi için $ind(A) = k$ ve A matrisinin çekirdek-EP ayrışımı Teorem 3.2 deki gibi verilmiş olsun. Bu takdirde

$$A^{\circledcirc} = A^k(A^{k+1})^{\oplus} \ ,$$

$$AA^{\circledcirc} = A^k(A^k)^{\oplus} = A^k(A^k)^{+} \tag{3.14}$$

eşitlikleri sağlanır(Wang, 2016).

Teorem 3.6 dan kolayca gösterilebilir ki

$$AA^{\circledcirc} = U\begin{pmatrix} I_{r(T)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}U^*$$

dir. Bunun sonucu olarak A matrisinin $A^{\circledcirc}$ çekirdek-EP inversi kullanılarak $A \in \mathbb{C}_n^n$ matrisinin çekirdek-EP ayrışımının bir karakterizasyonu verilebilir.

Teorem 3.7 $A \in \mathbb{C}_n^n$ matrisi için $ind(A) = k$ ve A matrisinin çekirdek-EP ayrışımı Teorem 3.2 deki gibi verilmiş olsun. Bu takdirde

$$A_1 = AA^{\circledcirc}A \quad \text{ve} \quad A_2 = A - AA^{\circledcirc}A$$

dir(Wang, 2016).

3.3 Çekirdek-EP İnversle İlgili Bazı Yeni Revizyonlar

Bu kısımda kare matrislerin çekirdek-EP inverslerinin bazı özelliklerinin vereceğiz. Bununla ilgili olarak öncelikle

$$(AX)^* = AX, XA^{k+1} = A^k \text{ ve } \Re(X) = \Re(X^*) = \Re(A^k)$$

şartlarını kullanarak çekirdek-EP invers için bazı gerek ve yeter şartlar vereceğiz. Daha sonra çekirdek-EP inversin bazı özelliklerini ve yeni gösterimlerini sıralayacağız. İlk olarak Lemma 3.1 den $XAX = X$ şartını çıkarmakla işe başlayalım. Bu durumda aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.8 $A \in \mathbb{C}_n^n$ matrisi için $ind(A) = k$ olsun. Bu takdirde X in A matrisinin bir çekirdek-EP inversi olması için gerek ve yeter şart $(AX)^* = AX, XA^{k+1} = A^k$ ve $\Re(X) \subseteq \Re(A^k)$ şartlarını sağlamasıdır (Zou ve Cheng, 2019).

İspat. $XA^{k+1} = A^k$ ve $\Re(X) \subseteq \Re(A^k)$ olduğunu varsayalım. Bu takdirde bir $T \in \mathbb{C}_n^n$ matrisi için $X = A^k T$ yazılabilir. Bu nedenle

$$XAX = XA^{k+1}T = A^k T = X$$

elde edilir. Böylece Lemma 3.1 e göre ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.8 e göre X matrisi A matrisinin bir çekirdek-EP inversi olmak üzere $(AX)^* = AX$ ve $XA^{k+1} = A^k$ olacak şekilde X matrisi bulunabilir. Bu aşağıdaki teoremde $(AX)^* = AX$ ve $XA^{k+1} = A^k$ ile çekirdek-EP için bazı gerek ve yeter şartlar geliştirilebilir. Teoremi ispatlamak için aşağıdaki lemmayı verebiliriz.

Lemma 3.2 $A \in \mathbb{C}_n^n$ matrisi için $ind(A) = k$ olsun. $A = U\begin{pmatrix} T & S \\ 0 & N \end{pmatrix}U^*$ ifadesi A matrisinin çekirdek-EP ayrışımı olsun. Eğer $XA^{k+1} = A^k$ ise bu takdirde X_2 ve X_4 matrisleri keyfi olmak üzere X matrisi $X = U\begin{pmatrix} T^{-1} & X_2 \\ 0 & X_4 \end{pmatrix}U^*$ olarak yazılabilir.

İspat. $A = U\begin{pmatrix} T & S \\ 0 & N \end{pmatrix}U^*$ olsun. Bu takdirde A^k matrisi $\hat{T}$ keyfi bir matris olmak üzere $A^k = U\begin{pmatrix} T^k & \tilde{S} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}U^*$ şeklinde yazılabilir. $X = U\begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix}U^*$ olduğunu varsayalım. Eğer $XA^{k+1} = A^k$ ise bu durumda

$$\begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} T^{k+1} & T\tilde{S} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T^k & \tilde{S} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} X_1T^{k+1} & X_1T\tilde{S} \\ X_3T^{k+1} & X_4T\tilde{S} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T^k & \tilde{S} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

olacağından

$$X_1T^{k+1} = T^k, X_1T\tilde{S} = \tilde{S}, X_3T^{k+1} = 0 \text{ ve } X_4T\tilde{S} = 0$$

eşitlikleri elde edilir. Bu eşitliklerden $X_1 = T^{-1}$ ve $X_3 = 0$ olduğu görülür. Bu nedenle X matrisinin

$$X = U\begin{pmatrix} T^{-1} & X_2 \\ 0 & X_4 \end{pmatrix}U^*$$

olarak yazılabildiği görülür. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.9 $A, X \in \mathbb{C}_n^n$ olmak üzere $ind(A) = k$ ve A matrisinin çekirdek-EP ayrışımı Teorem 3.2 deki gibi verilmiş olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktir (Zou ve Cheng, 2019):

(i) $X = A^{\circledcirc}$,

(ii) $(AX)^* = AX$, $XA^{k+1} = A^k$ ve $r(A^k) = r(X)$,

(iii) $(AX)^* = AX$, $XA^{k+1} = A^k$ ve $A_1X^2 = X$,

(iv) $(AX)^* = AX$, $XA^{k+1} = A^k$ ve $A^sX^{s+1} = X, s > 0$ bir tam sayı,

(v) $(AX)^* = AX$, $XA^{k+1} = A^k$ ve $XA_1X = X$.

İspat: (i) $\Longrightarrow$(ii), (i) $\Longrightarrow$(iii), (i) $\Longrightarrow$(iv) ve (i) $\Longrightarrow$(v) durumlarının ispatı Teorem 3.6 dan direkt olarak görülmektedir. (iii) $\Longrightarrow$(i) durumunu gösterelim. Eğer $XA^{k+1} = A^k$ ise bu takdirde $\Re(A^k) \subseteq \Re(X)$ olur. Bu durumda $r(A^k) = r(X)$ olduğundan $\Re(A^k) = \Re(X)$ elde edilir. Teorem 3.8 e göre $X = A^{\circledcirc}$ olduğu görülür. (iii) $\Longrightarrow$(i) durumunu göstermek için $X = U\begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix}U^*$ alalım. A matrisi de $A = U\begin{pmatrix} T & S \\ 0 & N \end{pmatrix}U^*$ formunda olsun. Ayrıca Teorem 3.3 de verildiği gibi

$$A_1 = U\begin{pmatrix} T & S \\ 0 & 0 \end{pmatrix}U^* \text{ ve } A^k = U\begin{pmatrix} T^k & \tilde{S} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}U^* , \tilde{S} = \sum_{i=0}^{k-1} T^iS\,N^{k-i}$$

alınsın. Bu durumda Lemma 3.2 ye göre $X = U\begin{pmatrix} T^{-1} & X_2 \\ 0 & X_4 \end{pmatrix}U^*$ yazılabilir. Öte yandan $A_1X^2 = X$ olduğundan

$$\begin{pmatrix} T & S \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} T^{-1} & X_2 \\ 0 & X_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} T^{-1} & X_2 \\ 0 & X_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T^{-1} & X_2 \\ 0 & X_4 \end{pmatrix}, \tag{3.15}$$

$$\begin{pmatrix} T^{-1} & X_2 + TX_2X_4 + SX_4^2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T^{-1} & X_2 \\ 0 & X_4 \end{pmatrix} \tag{3.16}$$

eşitlikleri elde edilir. Dolayısıyla $X_4 = 0$ olacaktır. $(AX)^* = AX$ olduğundan $X_2 = 0$ olacaktır ve bu nedenle $X = A^{\circledcirc}$ olduğu görülür. Şimdi (iv) $\Longrightarrow$(i) durumunu alalım. $XA^{k+1} = A^k$ olduğundan $X = U\begin{pmatrix} T^{-1} & X_2 \\ 0 & X_4 \end{pmatrix}U^*$ yazılabilir. Öte yandan $A^sX^{s+1} = X$ olduğundan $\tilde{S} = \sum_{i=0}^{k-1} T^iS\,N^{k-i}$ ve $\widetilde{M} = \sum_{i=0}^{k-1} T^iX_2\,X_4^{s+1}$ olmak üzere

$$\begin{pmatrix} T & S \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} T^{-1} & X_2 \\ 0 & X_4 \end{pmatrix}^{s+1} = \begin{pmatrix} T^{-1} & X_2 \\ 0 & X_4 \end{pmatrix}, \tag{3.17}$$

$$\begin{pmatrix} T^s & \tilde{S} \\ 0 & N^s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} T^{-(s+1)} & \widetilde{M} \\ 0 & X_4^{s+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T^{-1} & X_2 \\ 0 & X_4 \end{pmatrix} \tag{3.18}$$

yazılabilir. Dolayısıyla $\begin{pmatrix} T^{-1} & T^s\widetilde{M} + \tilde{S}X_4^{s+1} \\ 0 & N^s X_4^{s+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T^{-1} & X_2 \\ 0 & X_4 \end{pmatrix}$ elde edilir. Bu nedenle $N^s X_4^{s+1} = X_4$ olacaktır. Eğer $s \geq k$ ise $X_4 = 0$ olacağı kolayca görülebilir. Öte yandan eğer $s < k$ ise $X_4 = N^s X_4^{s+1} = N^{2s} X_4^{s+1} = \cdots = N^{ks} X_4^{s+1}$ olacaktır. Bu durumda $N^k = 0$ olduğundan $X_4 = 0$ bulunur. Böylece $X = \begin{pmatrix} T^{-1} & X_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ elde edilir. $(AX)^* = AX$ olduğundan $X_2 = 0$ olacaktır. Sonuç olarak $X = A^{\circledcirc}$ olduğu elde edilir. (v) $\Longrightarrow$(i) durumu (iii) $\Longrightarrow$(i) durumunun aynısıdır. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Aşağıda verilen örnek Teorem 3.9(v) şıkkında $XA_1X = X$ yerine $XAX = X$ alınması durumunda $X = A^{\circledcirc}$ eşitliğine ulaşılamayacağını gösterir.

Örnek 3.2 A ve X matrisleini

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ ve } X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

olaarak alalım. Bu durumda $ind(A) = 2$ olduğu açıktır. Ayrıca $(AX)^* = AX$ ve $XA^3 = A^2$ ve $XAX = X$ olduğu kolayca gösterilebilir. Diğer taraftan $\Re(X) \neq \Re(X^*) \neq \Re(A^k)$ olduğu gösterilebilir. Bu nedenle $X \neq A^{\circledcirc}$ olacaktır.

Lemma 3.3 $A, X \in \mathbb{C}_n^n$ olmak üzere $ind(A) = k$ ve A matrisinin çekirdek-EP ayrışımı $A = U\begin{pmatrix} T & S \\ 0 & N \end{pmatrix}U^*$ şeklinde verilmiş olsun. Eğer taraftan $\Re(X) = \Re(X^*) = \Re(A^k)$ ise bu takdirde X_1 tersinir olmak üzere $X = U\begin{pmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}U^*$ olarak yazılabilir (Zou ve Cheng, 2019).

İspat. Teorem 3.3 de verildiği gibi

$$A^k = U\begin{pmatrix} T^k & \tilde{S} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}U^*, \tilde{S} = \sum_{i=0}^{k-1} T^i S\, N^{k-i}$$

yazılabilir. X matrisi $X = U\begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix}U^*$ olarak yazılabilsin. Bu durumda $\Re(X) = \Re(A^k)$ olduğundan $X = A^kY$ olacak şekilde bir Y matrisi mevcuttur. Y matrisini $X = U\begin{pmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Y_3 & Y_4 \end{pmatrix}U^*$ olarak parçalayalım. Bu takdirde $X = A^kY$ den

$$U\begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix}U^* = U\begin{pmatrix} T^k & \tilde{S} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Y_3 & Y_4 \end{pmatrix}U^*, \tag{3.19}$$

$$\begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T^kY_1 + \tilde{S}Y_3 & T^kY_2 + \tilde{S}Y_4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.20}$$

olduğu görülür. Böylece $X_3 = 0$ ve $X_4 = 0$ elde edilir. Benzer şekilde $\Re(X^*) = \Re(A^k)$ olduğundan $X_2 = 0$ elde edilir. Böylece X matrisi X_1 tersinir olmak üzere $X = U\begin{pmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}U^*$ olarak yazılabilir.

Teorem 3.9 ve lemma 3.2 kullanılarak aşağıdaki Teorem verilebilir.

Teorem 3.10 $A, X \in \mathbb{C}_n^n$ olmak üzere $ind(A) = k$. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktir (Zou ve Cheng, 2019):

(i) $X = A^{\circledcirc}$,

(ii) $\Re(X) = \Re(X^*) = \Re(A^k)$ ve $XA^{k+1} = A^k$,

(iii) $\Re(X) = \Re(X^*) = \Re(A^k)$ ve $A^sX^{s+1} = X, s > 0$ bir tam sayı,

(iv) $\Re(X) = \Re(X^*) = \Re(A^k)$ ve $XA \in \mathbb{C}_n^P$,

(v) $\Re(X) = \Re(X^*) = \Re(A^k)$ ve $AX \in \mathbb{C}_n^P$,

(vi) $\Re(X) = \Re(X^*) = \Re(A^k)$ ve $AXA^k = A^k$.

İspat: (i) ⟹(ii), (i) ⟹(iii), (i) ⟹(iv), (i) ⟹(v) ve (i) ⟹(vi) durumlarının ispatı Teorem 3.6 dan direkt olarak görülmektedir. (ii) ⟹(i), (iii) ⟹(i) ve (vi) ⟹(i) için A matrisinin çekirdek-EP ayrışımı $A = U\begin{pmatrix} T & S \\ 0 & N \end{pmatrix}U^*$ şeklinde verildiğini varsayalım ve X matrisi $X = U\begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix}U^*$ olarak yazılabilsin. Bu takdirde Lemma 3.2 ye göre $\Re(X) = \Re(X^*) = \Re(A^k)$ olup buradan X_1 tersinir olmak üzere $X = U\begin{pmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}U^*$ sağlanır. Bu takdirde diğer şartları uygulayarak direkt bir hesaplamayla $X_1 = T^{-1}$ olduğu görülebilir ve böylece $X = U\begin{pmatrix} T^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}U^* = A^{\circledcirc}$ elde edilir. (iv) ⟹(i) olduğunu gösterelim. Lemma 3.2 ye göre X_1 tersinir olmak üzere $X = U\begin{pmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}U^*$ sağlanır. Öte yandan $XA \in \mathbb{C}_n^P$ olduğundan

$$\begin{pmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} T & S \\ 0 & N \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} T & S \\ 0 & N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} T & S \\ 0 & N \end{pmatrix}, \tag{3.21}$$

$$\begin{pmatrix} X_1TX_1T & X_1TX_1S \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1T & X_1S \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.22}$$

yazılabilir. Böylece $X_1TX_1T = X_1T$ olup X_1 ve T matrisleri tersinir olduğundan $X_1T = I$ yani $X_1 = T^{-1}$ olduğu ve dolayısıyla $X = U\begin{pmatrix} T^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}U^* = A^{\circledcirc}$ olduğu görülür. (v) ⟹(i) durumunun ispatı (iv) ⟹(i) durumunun ispatı ile aynıdır. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Lemma 3.4 $A, X \in \mathbb{C}_n^n$ olmak üzere $ind(A) = k$ olsun. X matrisinin A matrisinin bir çekirdek-EP inversi olması için gerek ve yeter şart $AX = P_{A^k}$ ve $\Re(X) \subseteq \Re(A^k)$ olmasıdır (Zou ve Cheng, 2019).

Bu lemma dikkate alındığında eğer X matrisi A matrisinin bir çekirdek-EP inversi ise $AX = P_{A^k}$ elde edilir. Bu nedenle aşağıda verilecek olan teorem $AX = P_{A^k}$ alarak çekirdek-EP invers hakkında bazı gerek ve yeter şartlar vermektedir.

Teorem 3.11 $A, X \in \mathbb{C}_n^n$ olmak üzere $ind(A) = k$ olsun ve A matrisinin çekirdek-EP ayrışımı Teorem 3.2 deki gibi verilmiş olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktir (Zou ve Cheng, 2019):

(i) $X = A^{\circledcirc}$,

(ii) $AX = P_{A^k}$ ve $AX^2 = X$,

(iii) $AX = P_{A^k}$ ve $A_1X^2 = X$,

(iv) $AX = P_{A^k}$, $X \in \mathbb{C}_n^{EP}$ve $XAX = X$.

İspat: (i) ⟹(ii) ve (i) ⟹(iii) durumlarının ispatı Teorem 3.6 dan direkt olarak görülmektedir. (i) ⟹(iv) olduğunu gösterelim. Bu durumda Lemma 3.3 e göre $AX = P_{A^k}$ yazılabilir. Buradan çekirdek-EP invers tanımı dikkate alınırsa $\Re(X) = \Re(X^*)$ ve $X = XAX$ olacaktır. Ayrıca $\Re(X) = \Re(X^*)$ olduğundan $X \in \mathbb{C}_n^{EP}$ olduğu görülür. Şimdi (ii) ⟹(i) olduğunu gösterelim. Eğer göre $AX = P_{A^k}$ ise bu takdirde $AX^2 = X$ olduğundan $P_{A^k}X = X$ elde edilir. Ayrıca $\Re(X) \subseteq \Re(A^k)$ olduğundan Lemma 3.3 e göre $X = A^{\circledcirc}$ olduğu görülür.

Şimdi de (iii) ⟹(i) olduğunu gösterelim. Bunun için A matrisinin $A = U\begin{pmatrix} T & S \\ 0 & N \end{pmatrix}U^*$ şeklinde verildiğini varsayalım ve $X = U\begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix}U^*$ olarak yazılabilsin. Bu takdirde A_1 matrisi $A_1 = U\begin{pmatrix} T & S \\ 0 & 0 \end{pmatrix}U^*$ olarak yazılabilir ve $A^k = U\begin{pmatrix} T^k & \tilde{S} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}U^*$, $\tilde{S} = \sum_{i=0}^{k-1} T^i S\, N^{k-i}$ dir. Buradan Lemma 3.3 e göre

$$P_{A^k} = AA^{\circledcirc} = U\begin{pmatrix} T & S \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} T^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}U^* = U\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}U^* \tag{3.23}$$

yazılabilir. Öte yandan $A_1X^2 = X$ olduğundan

$$\begin{pmatrix} T & S \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix} \tag{3.24}$$

veya buna denk olarak

$$\begin{pmatrix} TX_1^2 + SX_3X_1 + TX_2X_3 + SX_4X_1 & TX_1X_2 + SX_3X_2 + TX_2X_4 + SX_4^2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix}$$

ve buradan da

$$TX_1^2 + SX_3X_1 + TX_2X_3 + SX_4X_1 = X_1,$$
$$TX_1X_2 + SX_3X_2 + TX_2X_4 + SX_4^2 = X_2,$$
$$X_3 = 0,$$
$$X_4 = 0,$$

elde edilir. Bunun sonucunda $X_3 = 0$ ve $X_4 = 0$ olup

$$X = U\begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}U^* \tag{3.25}$$

olduğu görülür. Öte yandan $AX = P_{A^k}$ olacağından

$$\begin{pmatrix} T & S \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

olacaktır ve bu nedenle $X_1 = T^{-1}$ ve $X_2 = 0$ olduğu görülür. Sonuç olarak $X = A^{\circledcirc}$ bulunur. Son olarak (iv)⟹(i) olduğunu da gösterelim. Bu durumda $AX = P_{A^k}$ olduğundan $X = XAX$ olup $X = XP_{A^k}$ yazılabilir. Dolayısıyla

$$\begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix} \tag{3.26}$$

ve buradan da $\begin{pmatrix} X_1 & 0 \\ X_3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix}$ olduğu görülebilir. Bu nedenle $X_2 = X_4 = 0$ olacaktır. Öte yandan $X \in \mathbb{C}_n^{EP}$ olduğundan $X_3 = 0$ elde edilir. Bu takdirde $AX = P_{A^k}$ olduğundan $X = A^{\circledcirc}$ bulunur ve böylece ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 3.2 $A, X \in \mathbb{C}_n^n$ olmak üzere $ind(A) = k$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktir (Zou ve Cheng, 2019):

(i) $X = A^{\circledcirc}$,

(ii) $XAX = X,\ \Re(X) = \Re(A^k)$ ve $XP_{A^k} = X$

(iii) $XA^{k+1} = A^k\ ,\ \Re(X) = \Re(A^k)$ ve $XP_{A^k} = X$

(iv) $XA^{k+1} = A^k$ ve $\Re(X^*) = \Re(A^k)$,

(v) $X = P_{A^k}X = XP_{A^k}$ ve $P_{A^k} = XAP_{A^k}$,

(vi) $X = P_{A^k}X = XP_{A^k}$ ve $P_{A^k} = P_{A^k}AX$.

İspat. (i) $\Longrightarrow$(iv) durumunun ispatı Teorem 3.6 dan direkt olarak görülmektedir. Teorem 3.3 den $r(I) = r(A^k)$ olmak üzere $P_{A^k} = U\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}U^*$ eşitliği yazılabilir. Dolayısıyla çekirdek-EP tanımı kullanılarak (i) $\Longrightarrow$(ii), (i) $\Longrightarrow$(iii), (i) $\Longrightarrow$(v) ve (i) $\Longrightarrow$(v) durumlarının sağlandığı gösterilebilir. (ii) $\Longrightarrow$(i) durumunun ispatı için A matrisini $A = U\begin{pmatrix} T & S \\ 0 & N \end{pmatrix}U^*$ formunda yazabiliriz. Benzer şekilde A^k matrisi $A^k = U\begin{pmatrix} T^k & \tilde{S} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}U^*$, $\tilde{S} = \sum_{i=0}^{k-1} T^i S\, N^{k-i}$ olarak yazılabilir. X matrisi A matrisinin parçalanışına uygun olarak $X = U\begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix}U^*$ şeklinde yazılabilsin. Öte yandan $P_{A^k} = U\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}U^*$ olduğu bilinmektedir. Ayrıca $XP_{A^k} = X$ olduğundan

$$U\begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}U^* = U\begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix}U^* \Rightarrow \begin{pmatrix} X_1 & 0 \\ X_3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix} \qquad (3.27)$$

olup $X_2 = 0$ ve $X_4 = 0$ olduğu görülür. Teorem 3.10(ii) $\Longrightarrow$(i) durumundan $\Re(X) = \Re(A^k)$ olacağından $X_3 = 0$ elde edilir. Dolayısıyla X matrisi X_1 tersinir olmak üzere $X = U\begin{pmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}U^*$ şeklindedir. Böylece $XAX = X$ için basit bir hesaplamayla $X_1 = T^{-1}$ elde edilir. Sonuç olarak $X = U\begin{pmatrix} T^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}U^* = A^{\circledcirc}$ olduğu gösterilmiş olur.

(iii) $\Longrightarrow$(i) in ispatı (ii) $\Longrightarrow$(i) ispatıyla aynıdır. (iv) $\Longrightarrow$(i) i ispatlamak için X matrisini Lemma 3.3 e göre $X = U\begin{pmatrix} T^{-1} & X_2 \\ 0 & X_4 \end{pmatrix}U^*$olarak yazabiliriz. Bu takdirde $\Re(X^*) = \Re(A^k)$ olacağından $X_2 = 0$ ve $X_4 = 0$ olduğu görülür. Tüm bunlar dikkate alınırsa $X = U\begin{pmatrix} T^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}U^* = A^{\circledcirc}$ elde edilmiş olur. (v) $\Longrightarrow$(i) durumunu ispatlamak için

$P_{A^k} = U\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^*$ olduğundan $X = XP_{A^k}$ eşitliğinden $X_2 = 0$ ve $X_4 = 0$ elde edilir. Dolayısıyla $X = U\begin{pmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^*$ şeklindedir. Öte yandan $P_{A^k} = XAP_{A^k}$ olduğundan

$$U\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^* = U\begin{pmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} T & S \\ 0 & N \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^* \Rightarrow \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 T & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.28)$$

ve buradan da hesaplamayla $X_1 = T^{-1}$ elde edilir. Böylece $X = U\begin{pmatrix} T^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^* = A^{\circledcirc}$ elde edilmiş olur. Öte yandan (vi) ⟹(i) durumunu ispatı ise (v) ⟹(i) durumun ispatına benzerdir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Yukarıda verilenler dikkate alınırsa, şu ana kadar $XA^{k+1} = A^k$ şartı üzerinde duruldu. Şimdi $A^{k+1}X = A^k P_{A^k}$ şartını dikkate alabiliriz. Lemma 3.4 e göre $X = A^{\circledcirc}$ olduğundan $A^{k+1}X = A^k P_{A^k}$ eşitliği elde edilir. Dolayısıyla aşağıdaki sonuç $A^{k+1}X = A^k P_{A^k}$ şartı kullanılarak çekirdek-EP inversin bazı karakterizasyonlarını verecektir.

Sonuç 3.3 $A, X \in \mathbb{C}_n^n$ olmak üzere $ind(A) = k$ olsun ve A matrisinin çekirdek-EP ayrışımı Teorem 3.2 deki gibi verilmiş olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktir (Zou ve Cheng, 2019):

(i) $X = A^{\circledcirc}$,

(ii) $A^{k+1}X = A^k P_{A^k}$ ve $\mathfrak{R}(X) = \mathfrak{R}(A^k)$,

(iii) $A^{k+1}X = A^k P_{A^k}$ ve $P_{A^k}X = X$,

(iv) $A^{k+1}X = A^k P_{A^k}$ ve $A_1 X^2 = X$,

(v) $A^{k+1}X = A^k P_{A^k}$ ve $X^2 = X$.

İspat. (i)⟹(ii)-(v) durumlarının ispatı Teorem 3.6 ve lemma 3.3 den direkt olarak görülmektedir. (ii)⟹(i) in ispatı için A matrisini $A = U\begin{pmatrix} T & S \\ 0 & N \end{pmatrix} U^*$ formunda yazabiliriz. Bu takdirde $A_1 = U\begin{pmatrix} T & S \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^*$ olarak yazılabilir ve $A^k = U\begin{pmatrix} T^k & \tilde{S} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^*$, $\tilde{S} = \sum_{i=0}^{k-1} T^i S\, N^{k-i}$ dir. X matrisi A matrisinin parçalanışına uygun olarak $X = U\begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix} U^*$ şeklinde yazılabilsin. Öte yandan $P_{A^k} = U\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^*$ olduğu bilinmektedir. Ayrıca $A^{k+1}X = A^k P_{A^k}$ olduğundan

$$U\begin{pmatrix} T^{k+1} & T\tilde{S} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix} U^* = U\begin{pmatrix} T^k & \tilde{S} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^* \quad (3.29)$$

yani

$$\begin{pmatrix} T^{k+1}X_1 + T\tilde{S}X_3 & T^{k+1}X_2 + T\tilde{S}X_4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T^k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

olup $T^{k+1}X_1 + T\tilde{S}X_3 = T^k$ ve $T^{k+1}X_2 + T\tilde{S}X_4 = 0$ olduğu görülür. Bu durumda $\mathfrak{R}(X) = \mathfrak{R}(A^k)$ olacağından $X_3 = X_4 = 0$ olacaktır. Ayrıca $T^{k+1}X_1 = T^k$ ve $T^{k+1}X_2 = 0$ olduğu görülebilir. Öte yandan T matrisi tersinir olduğundan $X_1 = T^{-1}$ ve $X_2 = 0$ olup Böylece $X = U\begin{pmatrix} T^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}U^* = A^{\circledcirc}$ elde edilmiş olur. Öte yandan (iii)⟹(i) nin ispatı için $A^{k+1}X = A^kP_{A^k}$ olduğundan

$$T^{k+1}X_1 + T\tilde{S}X_3 = T^k \text{ ve } T^{k+1}X_2 + T\tilde{S}X_4 = 0$$

eşitlikleri yazılabilir. Bu takdirde $P_{A^k}X = X$ olduğundan

$$U\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix}U^* = U\begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix}U^* \Rightarrow \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

yazılabilir. Dolayısıyla $X_3 = X_4 = 0$ olduğu görülür. Böylece (ii)⟹(i) den $X = A^{\circledcirc}$ olduğu gösterilmiş olur. Şimdi (iv)⟹(i) durumunu ispatlayalım. (ii)⟹(i) durumundan $T^{k+1}X_1 + T\tilde{S}X_3 = T^k$ ve $T^{k+1}X_2 + T\tilde{S}X_4 = 0$ eşitlikleri yazılabilir. $A_1X^2 = X$ olduğu dikkate alınırsa

$$U\begin{pmatrix} T & S \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix}U^* = U\begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix}U^* \tag{3.30}$$

yani

$$\begin{pmatrix} TX_1^2 + SX_3X_1 + TX_2X_4 + SX_4X_3 & TX_1X_2 + SX_3X_2 + TX_2X_4 + SX_4^2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix}$$

olduğu ve dolayısıyla $X_3 = X_4 = 0$ olduğu görülür. Böylece (ii)⟹(i) den $X = A^{\circledcirc}$ olduğu gösterilmiş olur. Şimdi de (v)⟹(ii) durumunu ispatlayalım. $AX^2 = X$ olduğu dikkate alınırsa $X = AX^2 = AX^3 = \cdots = AX^{k+1}$ olduğu görülür. Böylece $\mathfrak{R}(X) \subseteq \mathfrak{R}(A^k)$ elde edilir ki bu da $P_{A^k}X = X$ olması demektir. Bu nedenle (ii) sağlanır ve böylece de ispat tamamlanmış olur.

3.4 Çekirdek-EP İnverslerin Bazı Karakterizasyonları

Moore-Penrose invers ve Drazin inverslerin hesaplanmasında blok parçalanmış matrislerin kullanılması bazen araştırmacılara kolaylıklar sağlamaktadır.

Benzer durum çekirdek-EP inversler için de söz konusudur. Bu amaçla çekirdek-EP inverslerle ilgili karakterizasyonları vermede ele alınan matrisi blok parçalanmış matris olarak göz önüne alacağız. Prasad ve Raj (2018) uygun bir kenarlık matrisini kullanarak çekirdek-EP inversleri türetmede kullanılan bir metot geliştirmişlerdir. Bunun için önce bir tanım verelim.

Tanım 3.3 Bir $\mathbb{K}$ cismi üzerinde tanımlı mxn tipinde bir matris verilsin ve k sayısı $0 \leq k \leq \min\{m, n\}$ olsun. Bu takdirde $T = \begin{pmatrix} A & P \\ Q & R \end{pmatrix}$ matrisi tersinir olacak şekilde $mx(m-k)$ tipinde bir P, $(n-k)xn$ tipinde bir Q ve $(n-k)x(m-k)$ tipinde bir R matrisi bulunabilirse A matrisine k -tersinir kenarlığa sahiptir denir. T matrisine de A matrisinin k -tersinir kenarlık matrisi adı verilir (Prasad ve Raj, 2018).

Tüm k -tersinir kenarlık matrislerinin kümesini $\mathfrak{B}_k(A)$ ile gösterelim. $r(A) = r$ olsun. Eğer $r < k \leq \min\{m, n\}$ ise (A, P) matrisi m den küçük ranka sahip olacaktır ki bu durumda yukarıda tanımlanan T matrisi tersinir olamaz. Böyle bir k için $\mathfrak{B}_k(A) = \emptyset$ olacaktır. $k \leq r$ olması durumunda keyfi P, Q matrisleri için $T = \begin{pmatrix} A & P \\ Q & 0 \end{pmatrix}$ olup $\mathfrak{B}_k(A) \neq \emptyset$ olacaktır. Örneğin k ranklı bir G dış inversini ve $I - AG = PY$ ve $I - GA = XQ$ rank ayrışımlarını göz önüne alalım. Bu durumda $T = \begin{pmatrix} A & P \\ Q & 0 \end{pmatrix}$ için $T^{-1} = \begin{pmatrix} G & X \\ Y & -YAX \end{pmatrix}$ olacağı kolayca gösterilebilir. $k = r$ ve G bir yansımalı genelleştirilmiş invers olduğunda $AGA = A$ olup $YAX = 0$ olacaktır. Tersine olarak eğer $T^{-1} = \begin{pmatrix} G & X \\ Y & Z \end{pmatrix}$ olmak üzere $T = \begin{pmatrix} A & P \\ Q & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{B}_k(A)$ ise

$$\begin{pmatrix} A & P \\ Q & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} G & X \\ Y & Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G & X \\ Y & Z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & P \\ Q & 0 \end{pmatrix} \tag{3.31}$$

olup $GP = 0$, $YP = I$ ve $AG + PY = I$ elde edilir. Bu ise $GAG = G$ ve $r(G) = r(AG) = r(I - PY) = n - r(P) = k$ olması demektir. Ayrıca G A nın bir dış inversi olduğundan $\mathfrak{R}(G) = \mathfrak{R}(AG)$ ve $\mathcal{C}(G) = \mathcal{C}(AG)$ olacağından

$$AG = I - PY \Rightarrow \mathfrak{R}(G) = \mathcal{C}(P)^{\perp} \tag{3.32}$$

$$GA = I - XQ \Rightarrow \mathcal{C}(G) = \mathfrak{R}(Q)^{\perp} \tag{3.33}$$

elde edilebilir.

Lemma 3.4 Bir $\mathbb{K}$ cismi üzerinde tanımlı mxn tipinde bir A matris verilsin ve $r(A) = r$ olsun. Bu takdirde

(i) $k > r$ için $\mathfrak{B}_k(A) = \emptyset$ dir.

(ii) $0 < k \leq r$ için $\begin{pmatrix} A & P \\ Q & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{B}_k(A)$ olacak şekilde P, Q matrisleri matrisleri her zaman mevcut olup $\mathfrak{B}_k(A) \neq \emptyset$ dir.

(iii) $0 < k \leq r$ için $T = \begin{pmatrix} A & P \\ Q & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{B}_k(A)$ ve $T^{-1} = \begin{pmatrix} G & X \\ Y & Z \end{pmatrix}$ ise k ranklı bir G dış inversi $\mathfrak{R}(G) = \mathcal{C}(P)^{\perp}$ ve $\mathcal{C}(G) = \mathfrak{R}(Q)^{\perp}$ eşitliklerini sağlar (Prasad ve Raj, 2018).

Teorem 3.12 $A \in \mathbb{C}_n^m$, $X \in \mathbb{C}_m^p$ ve $Y \in \mathbb{C}_q^n$ olsun. Eğer XAY sıfırdan farklı ise $\mathfrak{R}(G) = \mathfrak{R}(X)$ ve $\mathcal{C}(G) = \mathcal{C}(Y)$ olacak şekilde A matrisinin bir G dış inversinin bulunabilmesi için gerek ve yeter şart $r(XAY) = r(X) = r(Y)$ olmasıdır. Ayrıca böyle bir G dış inversi tektir (Prasad ve Raj, 2018).

Bu durumda $ind(A) = d$ olmak üzere $r\left(A^{*d}A^{d+1}\right) = r(A^d) = r\left(A^{*d}\right)$ olduğundan yukarıdaki teoremin bir sonucu olarak çekirdek-EP inversin mevcut olduğu söylenebilir. Şimdi uygun bir kenarlık kullanılarak Çekirdek-EP invers ile ilgili aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.13 $A \in \mathbb{C}_n^n$ matrisi verilsin. Bu takdirde

$$\mathcal{C}(P) = \mathcal{C}(A^d)^{\perp} \text{ ve } T = \begin{pmatrix} A & P \\ P^* & 0 \end{pmatrix} \tag{3.34}$$

matrisi tersinir olacak şekilde d, k pozitif tam sayıları ve $nx(n-k)$ tipinde bir P mevcuttur. Başka bir deyişle ve $T \in \mathfrak{B}_k(A)$ dir (Prasad ve Raj, 2018).

İspat. G matrisi A nın bir çekirdek-EP inversi olsun. Bu takdirde $\mathcal{C}(G) = \mathfrak{R}(X) = \mathcal{C}(A^k) = d$ diyelim, olacak şekilde en az bir k pozitif tam sayısı mevcuttur. Bu durumda çekirdek-EP invers tanımından AG $\mathcal{C}(A^d)$ üzerinde bir hermityen izdüşüm olup $\mathcal{C}(I - AG) = \mathfrak{R}(I - AG) = \mathcal{C}(A^d)^{\perp}$ elde edilir. Eğer $r(A^d) = k$ ise $\mathcal{C}(A^d)^{\perp}$ nin boyutu $n - k$ olacaktır. Şimdi $nx(m-k)$ tipinde bir P matrisinin göz önüne alalım öyle ki P matrisinin sütunları $\mathcal{C}(A^d)^{\perp}$ nin taban vektörlerini oluştursun. X matrisi $I - AG = PX$ olacak şekilde verilsin. Bu durumda PX bir idempotent matrisin rank ayrışımı olup $XP = I$ dır.

Benzer şekilde $\mathcal{C}(GA) = \mathcal{C}(G) = \mathcal{C}(A^d)$ olduğu dikkate alınırsa $GAA^d = A^d$ ve dolayısıyla da $(I - GA)A^d = 0$ olduğu görülebilir. Buradan $\Re(I - AG) \subseteq \mathcal{C}(A^d)^{\perp}$ bulunur. Öte yandan $r(G) = r(A^d)$ olduğundan $r(I - G) = n - r(A^d) = n - k$ olacaktır. Bu durumda

$$\Re(I - AG) = \mathcal{C}(A^d)^{\perp} = \mathcal{C}(P) = \Re(P^*) \tag{3.35}$$

yazılabilir. Buradan $I - AG = YP^*$ olacak şekilde bir Y matrisinin mevcut olduğu görülür. Açıkça görülebilir ki YP^* $I - GA$ nın bir rank ayrışımıdır ve dolayısıyla da $P^*Y = I$ dır. Şimdi $\begin{pmatrix} G & X \\ Y & -YAX \end{pmatrix}$ matrisini göz önüne alalım. Bu takdirde bu matrisin ve $T = \begin{pmatrix} A & P \\ P^* & 0 \end{pmatrix}$ matrisinin inversi olacağı kolayca gösterilebilir.

Teorem 3.13 e benzer şekilde aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.14 $A \in \mathbb{C}_n^n$ matrisi verilsin. Bu takdirde

$$\mathcal{C}(Q) = \Re(A^d)^{\perp} \text{ ve } T = \begin{pmatrix} A & Q \\ Q^* & 0 \end{pmatrix} \tag{3.36}$$

matrisi tersinir olacak şekilde d, k pozitif tam sayıları ve $nx(n-k)$ tipinde bir Q mevcuttur. Başka bir deyişle ve $T \in \mathfrak{B}_k(A)$ dir (Prasad ve Raj, 2018).

Aşağıdaki teorem çekirdek-EP inversi hesaplamak için bir metot vermektedir.

Teorem 3.15 $A \in \mathbb{C}_n^n$ matrisi verilsin ve $i = 1,2,\ldots.$ için $k(i) = r(A^i)$ olsun. P matrisi $nx(n - k(i))$ tipinde bir matris ve $\mathcal{C}(P) = \mathcal{C}(A^i)^{\perp}$ olmak üzere $T_i = \begin{pmatrix} A & P \\ P^* & 0 \end{pmatrix}$ olsun. Bu takdirde aşağıdakiler saptanır (Prasad ve Raj, 2018):

(i) Eğer q sayısı $T_q \in \mathfrak{B}_{k(q)}(A)$ koşulunu sağlayan en küçük tam sayı ise T_q^{-1} de A ya karşılık gelen matris A nın çekirdek-EP inversidir.

(ii) Eğer q sayısı (i) deki gibi ise $q = ind(A)$ dir.

İspat. q sayısı $T_q \in \mathfrak{B}_{k(q)}(A)$ koşulunu sağlayan en küçük tam sayı olsun. Bu durumda $T = \begin{pmatrix} A & P \\ P^* & 0 \end{pmatrix}$ tersinir olup burada P matrisi $nx(n - k(q))$ tipindedir ve $\mathcal{C}(P) = \mathcal{C}(A^q)^{\perp}$ olacaktır. Eğer $\begin{pmatrix} G & S \\ T & R \end{pmatrix}$ matrisi T matrisinin inversi ise

$$\begin{pmatrix} AG + PT & AS + PR \\ P^*G & P^*S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} GA + SP^* & GP \\ TA + RP^* & TP \end{pmatrix} \tag{3.37}$$

olup buradan $GP = 0$ ve $GAG = G(I - PT)$ olur ki bu da $GAG = G - GPT = G$ olması demektir. Dolayısıyla G matrisi A nın bir dış inversidir. Ayrıca $P^*G = 0$ olup

$$\mathcal{C}(G) \subseteq \Re(P^*)^{\perp} = \mathcal{C}(P)^{\perp} = \mathcal{C}(A^q) \tag{3.38}$$

olduğu görülür. Benzer şekilde $P^*S = I$ olup SP^* bir idempotent matristir. Dolayısıyla $GA + SP^* = I$ olup

$$r(G) = r(GA) = r(I - SP^*) = n - r(P) = r(A^q) \tag{3.39}$$

elde edilir. Buradan $\mathcal{C}(G) = \mathcal{C}(A^q)$ bulunur. Benzer şekilde $GP = 0$ olduğundan $\Re(G) = \mathcal{C}(P)^{\perp}$ ve $r(G) = n - r(P)$ olduğundan

$$\Re(G) = \mathcal{C}(P)^{\perp} = \mathcal{C}(A^q) \tag{3.40}$$

elde edilir. Böylece G matrisi A nın çekirdek-EP inversi olup (i) ispatı tamamlanır.

Şimdi (ii) şıkkını ispatlayalım. (i) deki çekirdek-EP invers $\mathcal{C}(G) = \mathcal{C}(A^q)$ eşitliğini sağladığından $GAA^q = A^q$ olur ve buradan $r(A^{q+1}) = r(A^q)$ olduğu görülür. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Örnek 3.3 Teorem 3.15 i açıklamak için aşağıdaki sayısal örneği göz önüne alalım.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

matrisinin rankı 3 tür. Şimdi $q = 1,2,3$ için $r(A^q)$ ile verilen $k(q)$ sayılarını ve A^{*q} ın sıfır uzayı için taban olacak olan P matrisinin yardımıyla T_q matrisilerini bulacağız. Bu takdirde $q = 1$ için

$$A^1 = A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} \text{ olup } k(1) = 3 \text{ ve } P = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

olduğu görülür. Buradan

$$T_1 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

olup $\det(T_1) = 0$ olduğundan bu matris singülerdir. $q = 2$ için

$$A^2 = \begin{pmatrix} 8 & -8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 8 \\ 8 & -8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 8 \end{pmatrix} \text{ olup } k(2) = 2 \text{ ve } \mathrm{P}= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

olduğu görülür. Buradan

$$\mathrm{T}_2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

olup $\det(T_2) = 0$ olduğundan bu matris de singülerdir. $q = 3$ için

$$A^3 = \begin{pmatrix} 16 & -16 & 16 & -16 \\ -16 & 16 & -16 & 16 \\ 16 & -16 & 16 & -16 \\ -16 & 16 & -16 & 16 \end{pmatrix}$$

olup $k(3) = 3$ ve

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

olduğu görülür. Buradan

$$T_3 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -3 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

olup $\det(T_3) \neq 0$ olduğundan bu matris nonsingülerdir. Dolayısıyla $q = 3$ sayısı T_q nonsingüler olacak şekildeki en küçük pozitif tam sayıdır. Buradan $T_3 \in \mathfrak{B}_3(A)$ olup $ind(A) = 3$ ve $r(A^3) = r(A^4) = 1$ ve $r(A^2) = 2$ olduğu elde edilir. Şimdi A nın çekirdek-EP inversini bulabiliriz.

$$T_3^{-1} = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 12 & 4 & -4 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 4 & 12 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -4 & 4 & 12 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 4 & -4 & 4 \\ 12 & 4 & -4 & 4 & -32 & 0 & 32 \\ 4 & 12 & 4 & -4 & -32 & 0 & 32 \\ -4 & 4 & 12 & 4 & 0 & -32 & 0 \end{pmatrix}$$

elde edilir. Böylece A nın çekirdek-EP inversi

$$G = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

şeklinde bulunmuş olur. Buradan direkt hesaplamayla

$$GAG = G \text{ ve } \mathcal{C}(G) = \mathcal{C}(A^3) = span\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

olacağı gösterilebilir.

Lemma 3.5 $A \in \mathbb{C}_n^n$ olsun ve $M \in \mathbb{C}_{2n}^{2n}$ matrisi $M = \begin{pmatrix} A & AT \\ SA & B \end{pmatrix}$ olarak parçalanmış olsun. Bu takdirde

$$r(M) = r(A) + r(B - SAT)$$

rank eşitliği sağlanır (Ma ve Stanimirovic, (2019)).

Teorem 3.16 $A \in \mathbb{C}_n^n$ matrisi $A = U\begin{pmatrix} T & S \\ 0 & N \end{pmatrix}U^*$ Schur formunda olsun ve $ind(A) = k$ ve $r(A^k) = r$ olsun. Bu takdirde

$$(A^{k+1})^* = 0, XA^k = 0, X^2 = X, r(X) = n - r \tag{3.41}$$

olacak şekilde bir tek X matrisi,

$$YA^k = 0, Y^2 = Y\ XA^k = 0, Y^* = Y, r(Y) = n - r \tag{3.42}$$

olacak şekilde bir tek Y matrisi ve

$$r\begin{pmatrix} A & I - Y \\ I - X & Z \end{pmatrix} = r(A) \tag{3.43}$$

olacak şekilde bir tek Z matrisi mevcut olup $Z = A^{\circledcirc}$ dir. Ayrıca

$$X = I - A^{\circledcirc}A \text{ ve } Y = I - AA^{\circledcirc} \tag{3.44}$$

eşitlikleri sağlanır (Ma ve Stanimirovic, 2019).

İspat. $A \in \mathbb{C}_n^n$ matrisi $A = U\begin{pmatrix} T & S \\ 0 & N \end{pmatrix}U^*$ Schur formunda ve $A^{\circledcirc} = U\begin{pmatrix} T^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}U^*$ olsun. Bu takdirde $X = U\begin{pmatrix} 0 & T^{-1}S \\ 0 & I \end{pmatrix}U^* = I - A^{\circledcirc}A$ matrisinin (3.41) şartlarını sağladığı gösterilebilir. X in tek olduğunu göstermek için başka bir X_1 matrisinin de aynı şartları sağladığını varsayalım. $X_0 = \begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix} \in \mathbb{C}_r^r$ olmak üzere $X_1 = UX_0U^*$ olsun. Bu takdirde matematiksel tümevarım prensibi ve N matrisinin bir nilpotent matris olduğu gerçeği dikkate alınırsa

$$A^k = U \begin{pmatrix} T^k & \sum_{i=0}^{k-1} T^{k-1-i} S\, N^i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^* \tag{3.45}$$

olduğu görülebilir. Bu durumda (3.41) in temelinde (3.45) eşitliği ve T matrisinin tersinirliği dikkate alınırsa

$$\begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T^k & \sum_{i=0}^{k-1} T^{k-1-i} S\, N^i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \Longrightarrow E = 0 \text{ ve } G = 0$$

olacağı görülür. Ayrıca $X_1 = X_1^2$ ve $r(X_1) = n - r$ olacağından $H^2 = H$ ve $F = FH$ eşitlikleri sağlanır. Dolayısıyla H tersinir olup $H = I$ dır. Aynı zamanda (3.41) den

$$\begin{aligned}(A^{k+1})^* AX &= \begin{pmatrix} (T^{k+1})^* & 0 \\ (\sum_{i=0}^{k} T^{k-1-i} S\, N^i)^* & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T & S \\ 0 & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & F \\ 0 & I \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & (T^{k+1})^* (\mathrm{TF} + \mathrm{S}) \\ 0 & \left(\sum_{i=0}^{k} T^{k-1-i} S\, N^i\right)^* (\mathrm{TF} + \mathrm{S}) \end{pmatrix} \\ &= 0\end{aligned}$$

olacağı görülür. Bu durumda $(T^{k+1})^*$ matrisinin nonsingüler olduğu dikkate alınırsa $\mathrm{TF} + \mathrm{S} = 0$ olup buradan da $\mathrm{F} = -\mathrm{T}^{-1} S$ olduğu görülür. Böylece $X_1 = X$ elde edilir. (3.42) özelliği de benzer şekilde ispatlanabilir.

Şimdi $A^{\circledcirc}$ matrisi A matrisinin çekirdek-EP inversi olsun. Bu durumda $X = I - A^{\circledcirc} A$ ve $Y = I - AA^{\circledcirc}$ için

$$\begin{pmatrix} A & I - Y \\ I - X & Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & AA^{\circledcirc} \\ A^{\circledcirc} A & Z \end{pmatrix}$$

yazılabilir. Bunun sonucu olarak Lemma 3.5 ve (3.43) ifadesinden

$$Z = A^{\circledcirc} A A^{\circledcirc} = A^{\circledcirc}$$

olacağı görülür ve böylece ispat tamamlanmış olur.

$X = I - A^{\circledcirc} A$ ve $Y = I - AA^{\circledcirc}$ izdüşümleri kullanılarak çekirdek-EP invers için başka karakterizasyonlar da türetilebilir. Böyle bir karakterizasyon aşağıdaki teoremde verilmektedir.

Teorem 3.17 $A \in \mathbb{C}_n^n$ matrisi $A = U\begin{pmatrix} T & S \\ 0 & N \end{pmatrix}U^*$ Schur formunda olsun ve $ind(A) = k$ olsun. Bu takdirde $X = I - A^{\circledcirc}A$ ve $Y = I - AA^{\circledcirc}$ olmak üzere $A^{\circledcirc}$ inversi

$$A^{\circledcirc} = (A - X)^{-1}(I - Y) = (A + X)^{-1}(I - Y) \tag{3.46}$$

şeklindedir.

İspat. Direkt bir hesaplama yapılarak

$$\begin{aligned} A \pm X &= U\begin{pmatrix} T & S \\ 0 & N \end{pmatrix}U^* \pm \left(I - U\begin{pmatrix} T^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}U^*U\begin{pmatrix} T & S \\ 0 & N \end{pmatrix}U^*\right) \\ &= U\begin{pmatrix} T & S \\ 0 & N \end{pmatrix}U^* \pm U\begin{pmatrix} 0 & -T^{-1}S \\ 0 & 0 \end{pmatrix}U^* \\ &= U\begin{pmatrix} T & S \pm T^{-1}S \\ 0 & N \pm I \end{pmatrix}U^* \end{aligned}$$

olduğu gösterilebilir. Bu durumda T ve $N \pm I$ matrisleri tersinir olup

$$(A \pm X)^{-1} = U\begin{pmatrix} T^{-1} & -T^{-1}(S \pm T^{-1}S)(N \pm I)^{-1} \\ 0 & (N \pm I)^{-1} \end{pmatrix}U^*$$

ve buradan da

$$\begin{aligned} (A \pm X)^{-1}(I - Y) &= U\begin{pmatrix} T^{-1} & -T^{-1}(S \pm T^{-1}S)(N \pm I)^{-1} \\ 0 & (N \pm I)^{-1} \end{pmatrix}U^*U\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}U^* \\ &= U\begin{pmatrix} T^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}U^* \\ &= A^{\circledcirc} \end{aligned}$$

olduğu görülür. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Şimdi $A^{\circledcirc}$ çekirdek-EP invers ile uygun bir nonsingüler kenarlık matrisi arasındaki bir ilişkiyi ortaya koyan aşağıdaki teorem verilebilir. Bu ilişki gramer kuralından türetilmiştir.

Teorem 3.18 $A \in \mathbb{C}_n^{CM}$ matrisi $A = U\begin{pmatrix} T & S \\ 0 & N \end{pmatrix}U^*$ Schur formunda verilmiş olsun ve $ind(A) = k$ olsun. B ve C^* matrisleri $\mathcal{N}(A^k)^* = \Re(B)$ ve $\Re(A^k) = \mathcal{N}(C)$ olacak şekilde tam sütun ranklı matrisler olsun. Bu takdirde $W = \begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix}$ matrisi nonsingüler olup

$$W^{-1} = \begin{pmatrix} A^{\circledcirc} & (I - A^{\circledcirc}A)C^{+} \\ C^{+}(I - AA^{\circledcirc}) & B^{+}(AA^{\circledcirc}A - A)C^{+} \end{pmatrix} \tag{3.47}$$

dir.

İspat. $Z = \begin{pmatrix} A^{\circledcirc} & (I - A^{\circledcirc}A)C^{+} \\ C^{+}(I - A^{\circledcirc}A) & B^{+}(AA^{\circledcirc}A - A)C^{+} \end{pmatrix}$ olarak alalım. Bu takdirde kolayca gösterilebilir ki

$$CA = (CA^{D})A^{k}(A^{k})^{+} = 0,$$

$$\begin{aligned} BB^{+}(I - AA^{\circledcirc}) &= BB^{+}(I - A^{k+1}(A^{k+1})^{+} \\ &= BB^{+}P_{\mathcal{N}(A^{k+1})^{*},\Re(A^{k+1})} \\ &= P_{\mathcal{N}(A^{k+1})^{*},\Re(A^{k+1})} \\ &= I - AA^{\circledcirc} \end{aligned}$$

eşitlikleri gerçeklenir. Sonuç olarak bazı dönüşümler yapılarak

$$\begin{aligned} WZ &= \begin{pmatrix} AA^{\circledcirc} + BB^{+}(I - AA^{\circledcirc}) & A(I - A^{\circledcirc}A)C^{+} - BB^{+}(A - AA^{\circledcirc}A)C^{+} \\ CA^{\circledcirc} & C(I - A^{\circledcirc}A)C^{+} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} AA^{\circledcirc} + (I - AA^{\circledcirc}) & A(I - A^{\circledcirc}A)C^{+} - BB^{+}(I - AA^{\circledcirc})AC^{+} \\ CA^{\circledcirc} & CC^{+} - CA^{\circledcirc}AC^{+} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} I & A(I - A^{\circledcirc}A)C^{+} - (I - AA^{\circledcirc})AC^{+} \\ CA^{\circledcirc} & CC^{+} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} = I \end{aligned}$$

elde edilir. Benzer işlemler yapılarak $ZW = I$ olduğu da gösterilebilir. Sonuç olarak $Z = W^{-1}$ olur ve böylece de ispat tamamlanmış olur.

Hatırlatma 3.3 Teorem 3.15 in ispatında da ifade edildiği gibi Prasad ve Raj(2018) uygun bir tersinin $T_q = \begin{pmatrix} A & Q \\ Q^{*} & 0 \end{pmatrix}$ kenarlık matrisi verildiğinde X, Y ve Z üzerinde herhangi bir kısıtlama olmaksızın $T_q^{-1} = \begin{pmatrix} G & X \\ Y & Z \end{pmatrix}$ invers matrisindeki üst sol blok olan G matrisinin A nın çekirdek-EP inversi olduğu bilinmektedir.

Teorem 3.19 $A \in \mathbb{C}_n^n$ matrisi $A = U\begin{pmatrix} T & S \\ 0 & N \end{pmatrix}U^*$ Schur formunda verilmiş olsun ve $ind(A) = k$ olsun. Eğer $A^k = PQ$ çarpımı A^kmatrisinin bir tam rank ayrışımı ise bu takdirde

$$A^{\circledcirc} = P(QAP)^{-1}QP(P^*P)^{-1}P^* \tag{3.48}$$

dir.

İspat. Bu durumda Drazin invers ve Moore-Penrose inversin tam rank ayrışımları dikkate alınarak sırasıyla

$$A^D = P(QAP)^{-1}Q \quad \text{ve} \quad (A^k)^+ = Q^*(QQ^*)^{-1}(P^*P)^{-1}P^* \tag{3.49}$$

olduğu gösterilebilir. Böylece

$$A^{\circledcirc} = A^D A^k (A^k)^+ = P(QAP)^{-1}QPQQ^*(QQ^*)^{-1}(P^*P)^{-1}P^* \tag{3.50}$$

yazılabilir ve buradan da ispat tamamlanır.

Teorem 3.20 $A \in \mathbb{C}_n^n$ matrisi $A = U\begin{pmatrix} T & S \\ 0 & N \end{pmatrix}U^*$ Schur formunda verilsin ve $ind(A) = k$ olsun. Ayrıca $\Re(U) = \Re(A^k)$ ve $\mathcal{N}(U) = \mathcal{N}(A^k)^*$ olmak üzere $A^{k+1}(A^{k+1})^* = U - V$ olsun. Bu takdirde

(i) $ind(U) = 1$ dir.

(ii) $I - U^{\#}V$ matrisi tersinirdir.

(iii) $A^{\circledcirc} = A^k(A^{k+1})^*(I - U^{\#}V)^{-1}U^{\#}$ dir.

(iv) $A^{\circledcirc} = A^D A^k (A^k)^+ = A^D U U^{\#}$ dir.

İspat. $\Re(U) \oplus \mathcal{N}(U) = \Re(A^k) \oplus \mathcal{N}(A^k)^* = \Re(A^k) \oplus \Re(A^k)^{\perp} = \mathbb{C}^n$ eşitliği dikkate alınırsa $ind(U) = 1$ olduğu kolayca görülebilir. Bu nedenle $U^{\#}$ mevcuttur ve devamında $I - U^{\#}V$ nin tersinir olduğunu gösterebiliriz. Bunun için farz edelim ki $x \in \mathbb{C}^n$ olmak üzere $x = U^{\#}Vx$ olsun. Bu ise

$$x = U^{\#}Vx \in \Re(U^{\#}) = \Re(A^k) = \Re(A^{k+1}) = \Re(A^{k+1}(A^{k+1})^*)$$

veya

$$\Re(V) = \Re(U - A^{k+1}(A^{k+1})^*) \subseteq \Re(A^k) = \Re(U)$$

ve

$$U^{\#}U(I-U^{\#}V)x = U^{\#}(U-UU^{\#}V)x = U^{\#}(U-V)x = U^{\#}A^{k+1}\,(A^{k+1})^{*}x = 0$$

olması demektir. Buradan da

$$A^{k+1}\,(A^{k+1})^{*}x \in \mathcal{N}(U^{\#}) = \mathcal{N}(U) = \mathcal{N}(A^{k})^{*} = \mathcal{N}((A^{k+1})^{*}) = \mathcal{N}((A^{k+1})^{+})$$

yani

$$(A^{k+1})^{+}A^{k+1}(A^{k+1})^{*}x = (A^{k+1})^{*}x = 0$$

olduğu görülür. Böylece

$$x \in \mathcal{N}((A^{k+1})^{*}) \cap \Re(A^{k+1}) = \Re((A^{k+1})^{\perp}) \cap \Re(A^{k+1}) = \{0\}$$

olduğu görülür. Bu nedenledir ki $I-U^{\#}V$ matrisi tersinirdir. Genelleştirilmiş inverslerin temel özelliklerinden ortaya çıkan elemanter dönüşümler göstermektedir ki

$$\begin{aligned}
(I-U^{\#}V)[A^{k+1}(A^{k+1})^{*}]^{\#} &= [A^{k+1}(A^{k+1})^{*}]^{\#} - U^{\#}U[A^{k+1}(A^{k+1})^{*}]^{\#} \\
&\quad + U^{\#}A^{k+1}(A^{k+1})^{*}[A^{k+1}(A^{k+1})^{*}]^{\#} \\
&= [A^{k+1}(A^{k+1})^{*}]^{\#} - P_{\Re(U),\mathcal{N}(U)}[A^{k+1}(A^{k+1})^{*}]^{\#} + U^{\#}A^{k+1}(A^{k+1})^{*}[A^{k+1}(A^{k+1})^{*}]^{\#} \\
&= [A^{k+1}(A^{k+1})^{*}]^{\#} - [A^{k+1}(A^{k+1})^{*}]^{\#} + U^{\#}A^{k+1}(A^{k+1})^{*}[(A^{k+1})^{*}]^{+}(A^{k+1})^{+} \\
&= U^{\#}A^{k+1}(A^{k+1})^{+} \\
&= U^{\#} \qquad (3.51)
\end{aligned}$$

eşitliği gerçeklenir. Diğer taraftan $A^{\circledcirc} = A^{D}A^{k}(A^{k})^{+} = A^{D}A^{k+1}(A^{k+1})^{+} = A^{D}UU^{\#}$ eşitliği yazılabilir. Bu durum ise

$$\begin{aligned}
A^{\circledcirc} = A^{k}(A^{k+1})^{+} &= A^{k}(A^{k+1})^{*}[A^{k+1}(A^{k+1})^{*}]^{+} \\
&= A^{k}(A^{k+1})^{*}[A^{k+1}(A^{k+1})^{*}]^{\#}
\end{aligned}$$

olduğunu gösterir. Dolayısıyla (3.51) kullanılarak $A^{\circledcirc}$ nın bir gösteriminin

$$A^{\circledcirc} = A^{k}(A^{k+1})^{*}[A^{k+1}(A^{k+1})^{*}]^{\#} = A^{k}(A^{k+1})^{*}(I-U^{\#}V)^{-1}U^{\#}$$

şeklinde olacağı gösterilmiş olur ve böylece ispat tamamlanır.

Örnek 3.4 Örnek 3.3 de verilen

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

matrisini göz önüne alalım. Bu durumda $ind(A) = 3$ olacaktır. Bu durumda birinci adımda

$$U = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} (1 \quad -1 \quad 1 \quad -1)^*$$

olmak üzere

$$A^4(A^4)^* = \begin{pmatrix} 16384 & -16384 & 16384 & -16384 \\ -16384 & 16384 & -16384 & 16384 \\ 16384 & -16384 & 16384 & -16384 \\ -16384 & 16384 & -16384 & 16384 \end{pmatrix} = U - V$$

elde edilir. Bu durumda $ind(U) = 1$ olup

$$U^{\#} = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} (1 \quad -1 \quad 1 \quad -1)^* \text{ ve } A^D = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

olacağı gösterilebilir. Buradan da

$$A^3(A^4)^*(I - U^{\#}V)^{-1}U^{\#} = A^D U U^{\#} = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = A^{\circledcirc}$$

elde edilir.

3.5 Çekirdek-EP Sıralama

Bir kümenin elemanları arasındaki bir ikili bağıntıya bir ön sıralama bağıntısı denir şayet yansıma ve geçişme özelliklerine sahip ise. Öte yandan eğer bu bağıntı aynı zamanda ters simetri özelliğini de sağlıyorsa bağıntıya bir kısmi sıralama bağıntısı adı verilir. S_1 ve S_2 iki küme ve $S_1 \subseteq S_2$ olsun. $\leq^1$ ve $\leq^2$ sırasıyla S_1 ve S_2 kümeleri üzerinde tanımlı iki kısmi sıralama bağıntısı olsun. Bu takdirde eğer $A, B \in S_2$ için $A \leq^2 B \Longrightarrow A \leq^1 B$ oluyorsa $\leq^1$ bağıntısı $\leq^2$ bağıntısı tarafından sağlanır denir.

Tanım 2.16 da verilen çekirdek kısmi sıralama bağıntısına benzer şekilde

Tanım 3.4 $A, B \in \mathbb{C}_n^n$ matrisleri verilmiş olsun. Eğer

$$A^{\circledcirc}A = A^{\circledcirc}B \text{ ve } AA^{\circledcirc} = BA^{\circledcirc} \tag{3.52}$$

eşitlikleri sağlanıyorsa, bu takdirde A matrisi B matrisinden çekirdek-EP sıralama bağıntısına göre daha küçüktür denir ve $A \leq^{\circledcirc} B$ ile gösterilir.

Hatırlatma 3.4 $A, B \in \mathbb{C}_n^{CM}$ olması durumunda $A^{\circledcirc} = A^{\oplus}$ ve $B^{\circledcirc} = B^{\oplus}$ olduğunu belirtelim. Bu nedenle $\mathbb{C}_n^{CM}$ üzerinde çekirdek-EP sıralama ve çekirdek kısmi sıralama bağıntıları çakışacaktır.

Aşağıdaki teoremde çekirdek-EP sıralama bağıntısının bazı önemli karakterizasyonları verilecektir.

Teorem 3.21 $A, B \in \mathbb{C}_n^n$ matrisleri verilmiş olsun. Bu takdirde aşağıda verilen ifadeler birbirine denktir (Wang, 2010):

(i) $A \leq^{\circledcirc} B$ dir.

(ii) T_1 ve T_3 matrisleri nonsingüler ve $\begin{pmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{13} & N_{14} \end{pmatrix}$ ve N_2 matrisleri nilpotent olmak üzere

$$A = U \begin{pmatrix} T_1 & T_2 & S_1 \\ 0 & N_{11} & N_{12} \\ 0 & N_{13} & N_{14} \end{pmatrix} U^* \text{ ve } B = U \begin{pmatrix} T_1 & T_2 & S_1 \\ 0 & T_3 & S_2 \\ 0 & 0 & N_2 \end{pmatrix} U^* \tag{3.53}$$

olacak şekilde bir U üniter matrisi mevcuttur.

(iii) $k = ind(A)$ olmak üzere $A^{k+1} = BA^k$ ve $A^*A^k = B^*A^k$ dir.

(iv) Herhangi bir V matrisi için $VAV^* \leq^{\circledcirc} VBV^*$ dir.

(v) A_1 ve B_1 çekirdek tersinir ve A_2 ve B_2 nilpotent, $A = A_1 + A_2$ ve $B = B_1 + B_2$ sırasıyla A ve B nin çekirdek-EP ayrışımları olmak üzere $A_1 \leq^{\circledcirc} B_1$ dir.

İspat. (i)⟹(ii): T_1 matrisi nonsingüler, $\begin{pmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{13} & N_{14} \end{pmatrix}$ matrisi nilpotent ve U_1 üniter matris olmak üzere A matrisinin çekirdek-EP ayrışımı

$$A = U_1 \begin{pmatrix} T_1 & \hat{T}_2 & \hat{S}_1 \\ 0 & \hat{N}_{11} & \hat{N}_{12} \\ 0 & \hat{N}_{13} & \hat{N}_{14} \end{pmatrix} U_1^*$$

olsun. Bu takdirde

$$A^{\circledcirc} = U_1 \begin{pmatrix} T_1^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} U_1^*$$

olacaktır. Bu durumda eğer

$$B = U_1 \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} \\ X_{21} & X_{22} & X_{23} \\ X_{31} & X_{32} & X_{33} \end{pmatrix} U_1^*$$

alınırsa bu takdirde

$$A^{\circledcirc} A = U_1 \begin{pmatrix} I & T_1^{-1}\hat{T}_2 & T_1^{-1}\hat{S}_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} U_1^* = A^{\circledcirc} B = U_1 \begin{pmatrix} T_1^{-1}X_{11} & T_1^{-1}X_{12} & T_1^{-1}X_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} U_1^*$$

olacağından $X_{11} = T_1$, $X_{12} = \hat{T}_2$ ve $X_{13} = \hat{S}_1$ elde edilir. Benzer şekilde

$$AA^{\circledcirc} = U_1 \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} U_1^* = BA^{\circledcirc} = U_1 \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ X_{21}T_1^{-1} & 0 & 0 \\ X_{31}T_1^{-1} & 0 & 0 \end{pmatrix} U_1^*$$

olacağından $X_{21} = 0$ ve $X_{31} = 0$ elde edilir. Böylece

$$B = U_1 \begin{pmatrix} T_1 & \hat{T}_2 & \hat{S}_1 \\ 0 & X_{22} & X_{23} \\ 0 & X_{32} & X_{33} \end{pmatrix} U_1^*$$

elde edilir. T_2 matrisi nonsingüler, N_2 matrisi nilpotent ve U_2 üniter matris olmak üzere $\begin{pmatrix} X_{22} & X_{23} \\ X_{32} & X_{33} \end{pmatrix}$ matrisinin çekirdek-EP ayrışımı

$$\begin{pmatrix} X_{22} & X_{23} \\ X_{32} & X_{33} \end{pmatrix} = U_2 \begin{pmatrix} T_3 & S_2 \\ 0 & N_2 \end{pmatrix} U_2^*$$

olsun. Diğer taraftan eğer $U = U_1 \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & U_2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{13} & N_{14} \end{pmatrix} = U_2^* \begin{pmatrix} \widehat{N}_{11} & \widehat{N}_{12} \\ \widehat{N}_{13} & \widehat{N}_{14} \end{pmatrix} U_2$ ve $(\hat{T}_2 \;\; \hat{S}_1)U_2 = (T_2 \;\; S_1)$ matrisleri tanımlanırsa bu takdirde

$$A = U \begin{pmatrix} T_1 & T_2 & S_1 \\ 0 & N_{11} & N_{12} \\ 0 & N_{13} & N_{14} \end{pmatrix} U^* , \; B = U \begin{pmatrix} T_1 & T_2 & S_1 \\ 0 & T_3 & S_2 \\ 0 & 0 & N_2 \end{pmatrix} U^*$$

olup $\begin{pmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{13} & N_{14} \end{pmatrix}$ matrisi nilpotenttir. Böylece (i)⟹(ii) durumu ispatlanmış olur.

(ii)⟹(i) durumu açıktır.

(ii)⟹(iii): Bu durumda (3.53) uygulanarak $\hat{T}_2$ ve $\hat{S}_1$ matrisleri yukardaki gibi olmak üzere $A^k = U \begin{pmatrix} T_1^k & \hat{T}_2 & \hat{S}_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} U^*$ olacağından

$$A^{k+1} = U \begin{pmatrix} T_1 T_1^k & T_1\hat{T}_2 & T_1\hat{S}_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} U^* = BA^k$$

$$A^*A^k = U\begin{pmatrix} T_1^*T_1^k & T_1^*\hat{T}_2 & T_1^*\hat{S}_1 \\ T_2^*T_1^k & T_2^*\hat{T}_2 & T_2^*\hat{S}_1 \\ S_1^*T_1^k & S_1^*\hat{T}_2 & S_1^*\hat{S}_1 \end{pmatrix}U^* = B^*A^k$$

elde edilir.

(iii)⟹(i): Sonuç 3.1 uygulanarak eğer $AA^k = BA^k$ eşitliği $(A^{k+1})^{\oplus}$ matrisi ile sağdan çarpılırsa $AA^{\circledcirc} = BA^{\circledcirc}$ eşitliği elde edilir. Eğer $A^*A^k = B^*A^k$ eşitliği $(A^{k+1})^{\oplus}$ matrisi ile sağdan çarpılırsa $A^*A^{\circledcirc} = B^*A^{\circledcirc}$ eşitliği elde edilir. Benzer şekilde eğer $(A^{\circledcirc})^*A = (A^{\circledcirc})^*B$ eşitliği $A^{\circledcirc}\left((A^{\circledcirc})^*\right)^{\oplus}$ matrisi ile soldan çarpılır ve $A^{\circledcirc} = A^{\circledcirc}\left((A^{\circledcirc})^*\right)^{\oplus}(A^{\circledcirc})^*$ olduğu dikkate alınırsa $A^{\circledcirc}A = A^{\circledcirc}B$ olduğu görülür.

(iii)⟺(iv) durumu açıktır.

(ii)⟺(v): A_1 ve B_1 çekirdek tersinir ve A_2 ve B_2 nilpotent olmak üzere $A = A_1 + A_2$ ve $B = B_1 + B_2$ sırasıyla A ve B matrislerinin çekirdek-EP ayrışımları olsun. Bu takdirde $A^{\circledcirc} = A_1^{\oplus}$ ve $B^{\circledcirc} = B_1^{\oplus}$ olacaktır. Bu durumda Lemma 2.3 uygulanarak (ii)⟺(v) olduğu görülür. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.21 uygulanarak (3.52) çekirdek-EP sıralama bağıntısının yansıma ve geçişme özelliklerini sağladığı, yani çekidek-EP sıralama bağıntısının bir ön sıralama bağıntısı olduğu görülür. Fakat çekirdek-EP sıralama ters simetrik değildir.

Örnek 3.5 $A = \begin{pmatrix} I & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ve $B = \begin{pmatrix} I & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ matrislerini göz önüne alalım. Bu durumda $A \leq^{\circledcirc} B$ ve $B \leq^{\circledcirc} A$ olacaktır. Ancak $A \neq B$ dir.

Teorem 3.22 Çekirdek-EP sıralama bağıntısı bir kısmi sıralama bağıntısı değildir ancak sadece bir ön sıralama bağıntısıdır (Wang, 2010).

Yeni kısmi sıralama bağıntıları türetmek matrisinin teorisinin en temel problemlerinden birisidir. Matris ayrışımı kısmi sıralama bağıntıları kurmanın en önemli aracıdır. $\leq^-$ eksi kısmi sıralama, $\leq^\#$ Sharp kısmi sıralama ve $\leq^{\#-}$ C-N kısmi sıralama bağıntıları aşağıdaki şekilde tanımlanabilir:

(i) $A, B \in \mathbb{C}_n^m$ matrisleri için $A \leq^- B: r(b) - r(A) = r(B - A)$ dir.

(ii) $A, B \in \mathbb{C}_n^{CM}$ matrisleri için $A \leq^\# B: A^\#A = A^\#B$ ve $AA^\# = BA^\#$ dir.

(iii) $A, B \in \mathbb{C}_n^{CM}$ matrisleri için $\leq^{\#-}$: $A_1 \leq^\# B_1$ ve $A_2 \leq^- B_2$ olup $A = A_1 + A_2$ ve $B = B_1 + B_2$ sırasıyla A ve B marislerinin çekirdek-nilpotent ayrışımlarıdır.

Bu tanımlamalara göre C-N kısmi sıralama bağıntısı aynı zamanda eksi kısmi sıralama bağıtısıdır. (iii) de tanımlanan C-N kısmi sıralama bağıntısına benzer şekilde çekirdek-eksi sıralama bağıtısı aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

Tanım 3.5 $A, B \in \mathbb{C}_n^n$ matrisleri verilsin. A_1 ve B_1 çekirdek tersinir ve A_2 ve B_2 nilpotent olmak üzere $A = A_1 + A_2$ ve $B = B_1 + B_2$ sırasıyla A ve B matrislerinin çekirdek-EP ayrışımları olsun. Bu takdirde eğer $A_1 \leq^{\#} B_1$ ve $A_2 \leq^{-} B_2$ ise A matrisi çekirdek-eksi sıralamasına göre B nin altındadır denir ve bu durum $A \leq^{CM} B$ şeklinde gösterilmektedir.

Verilen bir matrisin çekirdek-EP ayrışımı tek olduğundan çekirdek sıralama ve eksi sıralama bağıntılarının her ikisi de kısmi sıralama bağıntısıdır. Bu durumda aşağıdaki teorem kolayca ispatlanabilir.

Teorem 3.23 Çekirdek-eksi sıralama bağıntısı aynı zamanda bir kısmi sıralama bağıntısıdır (Wang, 2010).

Hatırlatma 3.5 $k = 1$ olması durumunda çekirdek-eksi kısmi sıralama bağıntısı çekirdek kısmi sıralama bağıntısı ile çakışacaktır. Ayrıca çekirdek-eksi kısmi sıralama bağıntısı eksi kısmi sıralama bağıntısını sağlar (Wang, 2010).

Teorem 3.24 $A, B \in \mathbb{C}_n^n$ matrisleri verilmiş olsun. Bu takdirde $A \leq^{CM} B$ olması için gerek ve yeter koşul T_1 ve T_3 matrisleri nonsingüler, N_1 ve N_2 matrisleri nilpotent ve $N_1 \leq^{-} N_2$ olmak üzere

$$A = U\begin{pmatrix} T_1 & T_2 & S_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 \end{pmatrix}U^* \text{ ve } B = U\begin{pmatrix} T_1 & T_2 & S_1 \\ 0 & T_3 & S_2 \\ 0 & 0 & N_2 \end{pmatrix}U^* \tag{3.54}$$

olacak şekilde bir U üniter matrisinin mevcut olmasıdır (Wang, 2010).

İspat. $A, B \in \mathbb{C}_n^n$ matrisleri (3.54) formunda verilmiş olsunlar ve $N_1 \leq^{-} N_2$ sağlansın. Bu takdirde $A = A_1 + A_2$ ve $B = B_1 + B_2$ sırasıyla A ve B matrislerinin çekirdek-EP ayrışımları olmak üzere

$$A_1 = U\begin{pmatrix} T_1 & T_2 & S_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}U^*, \; A_2 = U\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 \end{pmatrix}U^*$$

ve

$$B_1 = U\begin{pmatrix} T_1 & T_2 & S_1 \\ 0 & T_3 & S_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}U^*, \quad B_2 = U\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_2 \end{pmatrix}U^*$$

olacaktır. Bu durumda Tanım 3.5 den $A \leq^{CM} B$ olduğu görülür. Tersine olarak $B = B_1 + B_2$ ifadesi B matrisinin çekirdek-nilpotent ayrışımı olsun. Bu durumda $A_1 \leq^{\#} B_1$ olduğundan Lemma 2.3 e göre

$$A_1 = U\begin{pmatrix} T_1 & T_2 & S_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}U^* \text{ ve } B_1 = U\begin{pmatrix} T_1 & T_2 & S_1 \\ 0 & T_3 & S_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}U^*$$

olacak şekilde bir U üniter matrisi mevcuttur. Buradan N_2 nilpotent olmak üzere

$$B_2 = U\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_2 \end{pmatrix}U^*$$

elde edilir. Öte yandan $A_2 \leq^{-} B_2$ için N_1 nilpotent ve $N_1 \leq^{-} N_2$ olmak üzere

$$A_2 = U\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 \end{pmatrix}U^*$$

olduğu görülür. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.25 $A, B \in \mathbb{C}_n^n$ matrisleri verilmiş olsun. Bu takdirde $A \leq^{CM} B$ olması için gerek ve yeter koşul

$$A \leq^{\circledcirc} B \quad \text{ve} \quad A - AA^{\circledcirc}A \leq^{-} BB^{\circledcirc}B \tag{3.55}$$

olmasıdır (Wang, 2010).

İspat. $A, B \in \mathbb{C}_n^n$ matrislerinin çekirdek-EP ayrışımları Tanım 3.5 deki gibi olsun. Bu takdirde $A \leq^{CM} B$ olması için gerek ve yeter şart $A_1 \leq^{\#} B_1$ ve $A_2 \leq^{-} B_2$ olmasıdır. Bu durumda Teorem 3.21 uygulanarak $A \leq^{\circledcirc} B$ bağıntısının $A_1 \leq^{\#} B_1$ bağıntısına ve ayrıca $A - AA^{\circledcirc}A \leq^{-} BB^{\circledcirc}B$ bağıntısının da $A_2 \leq^{-} B_2$ bağıntısına denk olduğu görülebilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

4. SONUÇ ve ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında ilk olarak bir Giriş verilerek Genel Bilgiler başlığı altında matrisler ile ilgili önemli tanım ve teoremler verilmiştir. Kare olmayan ya da kare olduğu halde normal olarak bildiğimiz anlamda inversi mevcut olmayan matrisler için geliştirilen ve özellikle lineer denklem sistemlerinin çözümünün olup-olmadığının araştırılmasında ve çözüm mevcut olması durumunda çözümün belirlenmesinde kullanılan ve bilinen anlamdaki invers özelliklerini de sağlayan genelleştirilmiş invers adı verilen bir invers kavramı ele alınmıştır. Bu amaçla öncelikle bir matrisin Moore-Penrose inversi tanımı verilerek bu inversin çeşitli özellikleri detaylı bir şekilde ortaya konulmuştur. Daha sonra keyfi mertebeden bir kare matris için Grup invers, Drazin invers ve Çekirdek invers gibi bazı invers tanımları verilerek çekirdek inversin bazı temel özellikleri ifade edilmiştir.

Tezin temel kısmında keyfi mertebeden bir kare matris için Çekirdek-EP invers adı verilen ve Çekirdek inversten daha genel olan bir genelleştirilmiş invers tanımı verilerek bu inversin bazı temel özellikleri incelenmiştir. Ayrıca çekirdek-EP invers ayrışımı verilerek bu ayrışım yardımıyla çekirdek-EP invers hesaplamada kullanılan bazı yeni yöntemler ve çeşitli çekirdek-EP invers gösterimleri verilmiştir. Daha sonra blok parçalanmış matrislerde çekirdek-EP invers kavramı ele alınmış bu invers ile bazı sonuçlar verilmiştir.

Tezde yapılan çalışmalar dikkate alınarak keyfi mertebeden bir kare matris çeşitli alt kare matrisler şeklinde parçalanarak verilen matrisin Çekirdek-EP inversinin bu alt kare matrislerin çekirdek-EP inversleri yardımıyla nasıl ifade edilebileceği araştırılabilir. Ayrıca tıpkı diğer genelleştirilmiş inverslerde olduğu gibi çekirdek-EP inversleri hesaplamada kullanılmak üzere algoritmalar ve bilgisayar programları geliştirilebilir. Özellikle matrislerin inverslerinin kullanıldığı çeşitli mühendislik uygulamalarında çekirdek-EP inverslerin de kullanılıp-kullanılamayacağı ve eğer kullanılabiliyorsa diğer inverslere göre daha uygulanabilir olup olmadığı araştırılabilir.

5. KAYNAKLAR

Baksalary, OM. & Trenkler, G. (2008). Characterization of EP, normal, and Hermitian matrices, Linear and Multilinear Algebra 56(3): 299 – 304.

Baksalary, OM. & Trenkler, G. (2010). Core inverse of matrices. Linear Multilinear Algebra, 58, No. 6: 681–697.

Baksalary, OM. & Trenkler, G. (2014). On a generalized core inverse. Applied Math. Computation, 236: 450–457.

Baksalary, OM., Styan, GPH. & Trenkler, G. (2009). On a matrix decomposition of Hartwig and Spindelböck. Linear Algebra and Its Appl., 430: 2798–2812.

Ben-Israel A & Greville TNE. Generalized Inverses, Theory and Applications, second edition, Canadian Mathematical Society, Springer, New York, Berlin, Heidelberg, Hong Kong, London, Milan, Paris, Tokyo, 2003.

Bjerhammer, A. (1958). A generalized matrix algebra, Kungl. Tekn. Hogsk. Handl. Stockholm. No. 124, 1-32.

Bu, C., Zhao, J. & Zheng, J. (2008). Group inverse for a class 2×2 block matrices over skew fields, Applied Mathematics and Computation 204: 45 – 49.

Campbell, SL. & Meyer, CD. (1979). Generalized inverses of linear transformations. London: Pitman.

Chen, J., Zhu, H. & Patricio, P. (2017). Characterizations and representations of core and dual core inverses. Canad Math Bulletion, 60:269–282.

Cvetković-Ilić, DS. & Wei, Y. (2017). Algebraic properties of generalized inverses. Singapore: Springer.

Ferreyra, DE., Levis, FE. & Thome N. (2018). Revisiting the core EP inverse and its extension to rectangular matrices. Quaest Mathhematics, 41:265–281.

Gao, Y., Chen, JL. & Patricio, P. (2021). Continuity of the core-EP inverse and its applications. Linear and Multilinear Algebra. Volume 69(3): 557-571.

Hartwig, RE. (1994). EP perturbations. Sankhya Ser A., 56:347–357.

Hernandez, A., Lattanzi, M, Thome, N, et al. (2012). The star partial order and the eigen projection at 0 on EP matrices. Appl Math Computations, 218: 10669–10678.

Ke, Y., Wang, L. & Chen, J. (2019). The core inverse of a product and 2×2 matrices, Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society 42: 51 – 66.

Krishnaswamy, D. & Sankari, G. (2022). Some Results on Core Inverses of Block Matrices Over Skew Fields. Communications in Mathematics and Applications, Vol. 13, No. 1, 53–73.

Kurata, H. (2018). Some theorems on the core inverse of matrices and the core partial ordering. Appl Math Computation, 316:43–51.

Ma, H. (2018). Optimal perturbation bounds for the core inverse. Applied Math. Computation, 336: 176–181.

Ma, H. & Li, T. (2021). Characterizations and representations of the core inverse and its applications, Linear and Multilinear Algebra, 69(1): 93-103.

Ma, H. & Stanimirovic, PG. (2019). Characterizations, approximation and perturbations of the core-EP inverse. Applied Mathematics and Computation. 359: 404–417.

Malik, SB. & N. Thome, N. (2014). On a new generalized inverse for matrices of an arbitrary index. Applied Mathematics and Computation. 226: 575-580.

Malik, SB., Rueda, L. & and N. Thome, N. (2014). Further properties on the core partial order and other matrix partial orders. Linear and Multilinear Algebra. 62: 1629-1648.

Mieliniczuk, J. (2015). Some results on C-inverses of a core matrix, Indian Journal of Pure and Applied Mathematics 46: 383 – 395.

Mitra, SK. (1987). On group inverses and the sharp order. Linear Algebra and Its Applications, 92: 17–37.

Mitra, SK. & Rao, CR. (1968). A note on a previous lemma in the theory of least squares and some further results. Sankhya Ser. A. Vol. 30, 245-252.

Moore, E H. (1920). On the reciprocal of the general algebraic matrix (abstract), Bull. Amer. Math. Soc., Vol. 26, 394-395.

Mosic, D. (2018). Core-EP pre-order of Hilbert spaces operators. Quaest Mathematics. 41. 585-600.

Mosic, D. (2019). Weighted core-EP inverse of an operator between hilbert spaces, Linear Multilinear Algebra 67: 278–298.

Mosic, D., Stanimirovic, PG. & Ma, H. (2021). Generalization of core-EP inverse for rectangular matrices. J. of Math. Analysis and Appl. 500(1), 125101, 1-19.

Penrose, R. (1955). A generalized inverse for matrices, Proceeding Cambridge Philos. Soc., Vol. 51, 406-413.

Penrose, R. (1956). On best approximate solutions of linear matrix equations, Proc. Cambridge Philos. Soc., Vol. 52, 17-19.

Prasad, KM. (2012). An introduction to generalized inverse, in: R. B. Bapat, Steve Kirkland, K. Manjunatha Prasad, Simo Puntanen (Eds.), Lectures on Matrix and Graph Methods, Manipal University Press, Manipal, India. Ch. 5, 43–60.

Prasad, KM. & Mohana, KS. (2014). Core-EP inverse. Linear Multilinear Algebra, 62(6): 792–802.

Prasad, KM. & Raj, MD. (2018). Bordering method to compute core-EP inverse, Spec. Mathematics. 6: 193–200.

Prasad, KM., Raj, MD. & Vinay, M. (2018). Iterative method to find core-EP inverse, Bull. Kerala Math. Assoc., Special Issue 16(1): 139–152.

Pringle, RM., Rayner AA. (1970). Expressions for generalized inverses of a bordered matrix with application to the theory of constrained linear models, SIAM Rev. 12, 107-115.

Pringle, RM., Rayner AA. (1971). Generalized Inverse Matrices ,Griffin,London.

Rakic, DS, Dincic, N, Djordjevic, DS. (2014). Core inverse and core partial order of Hilbert space operators. Appl Math Computations, 244: 283–302.

Rao, CR. (1962). A note on a generalized inverse of a matrix with applications to problems in mathematical statistics, Journal of Roy. Statist. Soc. Ser. B. Vol. 24, 152-158.

Rao, CR. (1966). Generalized inverse for matrices and its applications in mathematical statistics, Research papers in Statistics, Festschrift for Journal Neyman, New York, Wiley.

Rao, CR. (1967). Calculus of generalized inverse of matrices. Part 1: General theory, Sankhya Ser. A, Vol. 29, 317-342 s.

Rao, CR., Mitra, SK. (1971). Generalized inverse if matrices and its Applications, Wiley, New York.

Xu, S. (2019). Core invertibility of triangular matrices over a ring, Indian Journal of Pure and Applied Mathematics 50: 837 – 847.

Wang, G., Wei, Y. & Qian, S. (2018). Generalized inverses: Theory and computations, in Developments in Mathematics, 53, Springer and Beijing, Science Press.

Wang, H. (2016). Core-EP decomposition and its applications. Linear Algebra and Its Applications, 508: 289–300.

Wang, H., Chen, J. & Yan, G. (2018). Generalized Cayley–Hamilton theorem for core-EP inverse matrix and DMP inverse matrix, J. Southeast Univ. English Edition 34: 135–138.

Wang, H., Li, X. (2015). Characterizations of the core inverse and the core partial ordering. Linear Multilinear Algebra, 63: 1829–1836.

Wang, H., Li, X. (2016). Partial orders based on core-nilpotent decomposition. Linear Algebra and its Applications. 488: 235-248.

Zhou, M., Chen, J., Li, TT. & Wang, D. (2018). Three limit representation of the core-EP inverse, Filomat ,32(17): 5887 – 5894

Zuo, KZ. & Cheng, YJ. (2019). Three new revisition of core-EP inverse of matrices, Filomat, 33(10): 3061 – 3072.

Zuo, KZ., Yu, L. & Gaojun L. (2020). A new generalized inverse of matrices from core-EP decomposition. https://doi.org/10.48550/arXiv.2007.02364.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler	
Adı Soyadı	Salih ERKAN
Doğum Yeri	
Doğum Tarihi	
Uyruğu	■ T.C. ❐ Diğer:
Telefon	
E-Posta Adresi	

Eğitim Bilgileri	
Lisans	
Üniversite	Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fakülte	Fen Edebiyat Fakültesi
Bölümü	Matematik Bölümü
Mezuniyet Yılı	2001
Yüksek Lisans	
Üniversite	
Enstitü Adı	
Anabilim Dalı	
Programı	
Mezuniyet Tarihi	
Doktora	
Üniversite	
Enstitü Adı	
Anabilim Dalı	
Programı	
Mezuniyet Tarihi	